



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
ENG07053 - TRABALHO DE DIPLOMAÇÃO EM  
ENGENHARIA QUÍMICA



# **Comparação entre controladores PID e FOPID baseada em novo método de ajuste**

*Autor: Gabriel Lapa Grandi*

*Orientador: Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler*

Porto Alegre, julho de 2018



## **AGRADECIMENTOS**

A meus pais, Alexandre e Rosane, por buscarem a melhor educação para mim e me incentivarem a estudar, bem como a toda minha família, por sempre apoiarem minhas decisões.

Ao meu orientador, Jorge Otávio Trierweiler, pelos diversos ensinamentos e discussões, indispensáveis a realização deste trabalho.

Ao doutorando Bruno Éttori Bueno, pelas discussões e dicas que muito contribuíram a este trabalho.

Por fim, a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que eu me tornasse quem sou hoje e chegasse aonde cheguei.

## RESUMO

Controladores FOPID (PID de ordem fracionária) são uma generalização do controlador PID (proporcional, integral e derivativo) clássico, na qual as ações integral e derivativa podem ser de ordem fracionária. Estes controladores vêm sendo muito estudados nos últimos anos, mas ainda não é claro em que situações a sua utilização pode melhorar o desempenho e a robustez de sistemas controle, em comparação com uso de controladores PID. Em parte, isso deve a inexistência de um método geral de ajuste que possa ser aplicado aos dois controladores, tornando difícil a comparação entre ambos. Para contornar esse problema, neste trabalho um método de ajuste desenvolvido para controladores PID foi adaptado para que pudesse ser aplicado a controladores FOPID. O método é baseado em um problema de otimização no domínio da frequência, e testes computacionais mostraram que o mesmo é adequado para o ajuste dos controladores FOPID. Os dois controladores ajustados pelo método proposto foram usados em simulações de malhas de controle com plantas de diferentes características, a fim de comparar o desempenho e a robustez dos controladores em cada caso. Estes testes mostraram que, para plantas com elevado tempo morto e plantas de elevada ordem, o controlador FOPID é capaz de melhorar o desempenho do sistema, de reduzir o uso da ação de controle e de aumentar a robustez em relação a variações na dinâmica da planta, o que foi verificado pelo aumento da reserva de fase. Para os demais casos testados, houve pouca diferença entre ambos os controladores.

**Palavras-chaves:** Controlador fracionário. Derivada fracionária. Ordem fracionária. FOPID. PID. Ajuste. Domínio da frequência. Otimização.

## ABSTRACT

FOPID (fractional order PID) controllers are a generalization of the classic PID (proportional, integral and derivative) controller, in which the integral and derivative actions can be of fractional order. These controllers have been heavily studied in recent years, but it is still unclear in what situations their use can improve the performance and robustness of control systems in comparison to the use PID controllers. In part, this is due to the lack of a general tuning method that can be applied to both controllers, making it difficult to compare them. To overcome this problem, in this work a tuning method developed for PID controllers was adapted so that it could be applied to FOPID controllers. The method is based on an optimization problem in the frequency domain, and computational tests have shown that it is suitable for tuning FOPID controllers. The two controllers tuned by the proposed method were used in simulations of control loops containing plants with different characteristics, in order to compare the performance and the robustness of the controllers in each case. These tests showed that, for high time-delay plants and higher order plants, the FOPID controller is able to improve the performance of the system, to reduce the use of control action and to increase the robustness in relation to variations in the plant dynamics, which was verified by the increase of the phase margin. For the other cases tested, there was little difference between the two controllers.

**Keywords:** Fractional controller. Fractional derivative. Fractional order. FOPID. PID. Tuning. Frequency domain. Optimization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Malha de controle retroalimentada padrão. Fonte: FACCIN (2004).....	14
Figura 2: Malha de controle com dois graus de liberdade. Fonte: FACCIN (2004)....	14
Figura 3: Respostas degrau das funções de transferência G1, G2, G3, G4 e T <sub>0</sub> .....	21
Figura 4: Varredura da função objetivo para as plantas (a) G1, (b) G2, (c) G3 e (d) G4.....	22
Figura 5: Razão entre os critérios calculados para os controladores FOPID e para os controladores PID em função do subcaso.....	28
Figura 6: Resposta degrau da malha C para $\theta = 3$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	29
Figura 7: Resposta degrau da malha C para $\theta = 6$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	30
Figura 8: Resposta degrau da malha C para $\theta = 9$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	30
Figura 9: Resposta degrau da malha C para $\theta = 12$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	30
Figura 10: Resposta degrau da malha D para $n = 3$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	31
Figura 11: Resposta degrau da malha D para $n = 4$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	31
Figura 12: Resposta degrau da malha D para $n = 5$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	31
Figura 13: Resposta degrau da malha D para $n = 6$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle. ....	32

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Comparação entre os métodos de ajuste.....	12
Tabela 2: Plantas e FDA usadas no caso A.....	25
Tabela 3: Plantas e FDA usadas no caso B.....	25
Tabela 4: Plantas e FDA usadas no caso C. ....	25
Tabela 5: Plantas e FDA usadas no caso D. ....	25
Tabela 6: Parâmetros dos controladores ajustados para cada caso. ....	26
Tabela 7: Critérios de desempenho e robustez das malhas de controle dos de cada caso.....	27
Tabela 8: Aproximações de terceira, quarta e quinta ordem de $s^r$ . ....	40
Tabela 9: Funções de transferência com coeficientes ótimos baseados no critério ITAE em resposta a uma entrada do tipo degrau unitário. ....	41
Tabela 10: Tempo de assentamento normalizado para cada ordem das funções utilizadas como padrões da FDA. ....	41

## LISTA DE SÍMBOLOS

${}_a D_b^r$  – operador integro-diferencial de ordem fracionária;

$a$  – limite inferior de integração do operador integro-diferencial;

$r$  – ordem do operador integro-diferencial;

$b$  – limite superior de integração do operador integro-diferencial;

$\frac{d^r}{dt^r}$  – operador de diferenciação de ordem  $r$ ;

$\Re(r)$  – parte real do número  $r$ ;

$\int_a^b (d\tau)^{-r}$  – operador de integração de ordem  $r$ ;

$\mathbb{R}$  – conjunto dos números reais;

$\lim_{h \rightarrow 0} h$  – limite de  $h$  tendendo a zero;

$f(t)$  – função de uma variável genérica  $t$ ;

$h$  – passo de integração da definição de Grünwald-Letnikov da derivada fracionária;

$\Sigma$  – operador de somatório;

$k$  – índice dos somatórios e produtórios;

$\binom{r}{k}$  – coeficiente binomial do número  $r$  na classe  $k$ ;

$\Gamma(\cdot)$  – função Gamma;

$\tau$  – variável muda de integração;

$v$  – primeiro número inteiro maior que uma ordem fracionária  $r$ ;

$\mathcal{L}\{f(t)\}$  – transformada de Laplace de  $f(t)$ ;

$s$  – variável complexa da transformada de Laplace;

$\sigma$  – parte real da variável da transformada de Laplace;

$\omega$  – parte imaginária da variável da transformada de Laplace;



$j$  – unidade imaginária;

$s^r$  – operador integro-diferencial fracionário no domínio de Laplace;

$K_p$  – ganho proporcional do controlador FOPID na forma paralelo expandida;

$K_i$  – ganho integral do controlador FOPID na forma paralelo expandida;

$\lambda$  – ordem da ação integral;

$K_d$  – ganho derivativo do controlador FOPID na forma paralelo expandida;

$\mu$  – ordem da ação derivativa;

$w_k^r$  – função recursiva interna da definição modificada de Grünwald-Letnikov;

$K_{fo}$  – ganho do filtro recursivo de Oustaloup;

$\Pi$  – operador de produtório;

$M$  – ordem do filtro recursivo de Oustaloup;

$\omega_k$  – polos do filtro recursivo de Oustaloup;

$\omega'_k$  – zeros do filtro recursivo de Oustaloup;

$\omega$  – intervalo de frequências usado no filtro recursivo de Oustaloup;

$\omega_b$  – limite de frequência inferior do filtro recursivo de Oustaloup;

$\omega_u$  – frequência interna do filtro recursivo de Oustaloup;

$\omega_h$  – limite de frequência superior do filtro recursivo de Oustaloup;

$p$  – parte inteira da ordem fracionária  $r$ ;

$q$  – parte não inteira da ordem fracionária  $r$ ;

$L$  – tempo morto normalizado;

$K$  – ganho de uma função de transferência genérica;

$T$  – constante de tempo de uma função de transferência genérica;

$\alpha$  – ordem fracionária da função de transferência usada nas regras de ajuste;

$K_c$  – ganho do controlador;

$T_i$  – constante de tempo integral do controlador;

$T_d$  – constante de tempo derivativo do controlador;

$N$  – coeficiente do filtro da ação derivativa;

$\Delta U(s)$  – transformada de Laplace da saída do controlador;

$\Delta Y_r(s)$  – transformada de Laplace do sinal de referência;

$\Delta Y(s)$  – transformada de Laplace da saída da planta;

$y_r$  – sinal de referência;

$y$  – saída da planta;

$T(s)$  – função de transferência da malha fechada;

$G(s)$  – função de transferência da planta;

$C(s)$  – função de transferência do controlador;

$C_{PI}(s)$  – função de transferência do bloco  $C_{PI}$  da Figura 3.2;

$C_{SP}(s)$  – função de transferência do bloco  $C_{SP}$  da Figura 3.2;

$C_{PV}(s)$  – função de transferência do bloco  $C_{PV}$  da Figura 3.2;

$\min_{x \in \mathbb{R}^+} FO(x)$  – mínimo da função objetivo  $FO$  sujeita a valores reais positivos de  $x$ ;

$x$  – vetor das variáveis de decisão;

$\omega_1$  – valor máximo do intervalo de frequências no qual a função objetivo é avaliada;

$\omega_0$  – valor mínimo do intervalo de frequências no qual a função objetivo é avaliada;

$|\cdot|$  - valor absoluto de um número qualquer;

$T_0(s)$  – função de transferência do desempenho desejado em malha fechada;

$erro[x_i]$  – erro relativo da variável  $x_i$ ;

$\varepsilon$  – tolerância do erro;

$b_i$  – coeficientes das funções de transferência otimizadas para o critério ITAE;

$m$  – ordem da função desempenho alcançável;

$\omega_n$  – parâmetro de ajuste das funções otimizadas para o critério ITAE;

$t_{A,n}$  – tempo de assentamento normalizado;

$t_A$  – tempo de assentamento;

$z_i$  – zeros positivos de uma planta;

$p_i$  – polos positivos de uma planta;

$S(s)$  – função de sensibilidade;

$nz$  – número de zeros positivos de um sistema;

$np$  – número de polos positivos de uma planta;

$\bar{z}_i$  – complexo conjugado de  $z_i$ ;

$\bar{p}_i$  – complexo conjugado de  $p_i$ ;

$B_z(s)$  – fatoração dos zeros de uma função de transferência;

$B_p(s)$  – fatoração dos polos de uma função de transferência;

$T_0^*(s)$  – forma fatorada da função desempenho alcançável;

$X, Y, Z$  – eixos cartesianos;

$\zeta$  – fator de amortecimento de uma planta genérica;

$\beta$  – constante de tempo associada a um zero de uma planta genérica;

$\theta$  – tempo morto de uma planta genérica;

$n$  – ordem de uma planta genérica.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FDA – função desempenho alcançável;

FO – função objetivo;

FOPD – controlador proporcional e derivativo de ordem fracionária;

FOPID – controlador proporcional e integral de ordem fracionária;

FOPID – controlador proporcional, integral e derivativo de ordem fracionária;

IAE – integral do erro absoluto;

IFAC – International Federation of Automatic Control;

IMC – controle por modelo interno;

ISE – integral do erro ao quadrado;

ITAE – integral do erro absoluto ponderada pelo tempo;

MG – margem de ganho;

MS – máxima sensibilidade;

PD – controlador proporcional e derivativo;

PI – controlador proporcional e integral;

PID – controlador proporcional, integral e derivativo;

RF – reserva de fase;

SIOM – método de otimização sequencial iterativo;

SQP – programação quadrática sequencial.

**SUMÁRIO**

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>3</b>
2.1.	CÁLCULO FRACIONÁRIO .....	3
2.2.	CONTROLADOR FOPID .....	4
2.3.	SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA .....	5
<b>2.3.1.</b>	<b>Simulação numérica baseada na definição da derivada fracionária</b> .....	<b>5</b>
<b>2.3.2.</b>	<b>Aproximação inteira do operador de ordem fracionária</b> .....	<b>6</b>
2.4.	MÉTODOS DE AJUSTE PARA CONTROLADORES FOPID .....	7
<b>2.4.1.</b>	<b>Regras de ajuste</b> .....	<b>7</b>
<b>2.4.2.</b>	<b>Métodos analíticos</b> .....	<b>8</b>
<b>2.4.3.</b>	<b>Métodos baseados em otimização</b> .....	<b>9</b>
2.5.	ANÁLISE COMPARATIVA .....	10
<b>3.</b>	<b>AJUSTE DOS CONTROLADORES NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA</b> .....	<b>13</b>
3.1.	CONTROLADOR FOPID .....	13
3.2.	MÉTODO DE AJUSTE .....	13
<b>3.2.1.</b>	<b>Malha de controle com dois graus de liberdade</b> .....	<b>14</b>
<b>3.2.2.</b>	<b>Procedimento de conversão</b> .....	<b>15</b>
<b>3.2.3.</b>	<b>Método de otimização sequencial iterativo</b> .....	<b>16</b>
<b>3.2.4.</b>	<b>Função desempenho alcançável</b> .....	<b>19</b>
<b>3.2.5.</b>	<b>Varredura da função objetivo</b> .....	<b>20</b>
<b>4.</b>	<b>ESTUDOS DE CASO</b> .....	<b>23</b>
4.1.	FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ESTUDADAS .....	23
<b>4.1.1.</b>	<b>Plantas subamortecidas (Caso A)</b> .....	<b>24</b>
<b>4.1.2.</b>	<b>Plantas com zeros positivos (Caso B)</b> .....	<b>24</b>
<b>4.1.3.</b>	<b>Plantas com elevado tempo morto (Caso C)</b> .....	<b>24</b>
<b>4.1.4.</b>	<b>Plantas de elevada ordem (Caso D)</b> .....	<b>25</b>

4.2.	RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	26
<b>5.</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>33</b>
5.1.	CONCLUSÕES.....	33
5.2.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	34
<b>6.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>36</b>
<b>APÊNDICE A</b> .....		<b>40</b>
<b>APÊNDICE B</b> .....		<b>41</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O controlador PID de ordem fracionária, comumente referido como  $PI^\lambda D^\mu$  ou FOPID (sendo esta última a denominação adotada neste trabalho), é uma generalização do controlador PID convencional (i.e., de ordem inteira). Esta generalização está baseada em uma extensão do cálculo diferencial e integral, conhecida como cálculo de ordem fracionária. Nela, a ordem dos operadores integral e derivada pode assumir qualquer valor, não apenas valores inteiros, como no cálculo convencional. Vale notar que “ordem fracionária” não é o termo mais adequado, uma vez que números irracionais também são válidos como ordens. Contudo, denominações como “derivada fracionária”, “cálculo fracionário” e “PID fracionário” já estão bem estabelecidas na literatura, sendo por isso também utilizadas nesta monografia.

Assim, o FOPID consiste em um controlador PID no qual a ordem das ações derivativa e integral pode assumir valores não-inteiros. Isso faz do controlador FOPID uma versão mais flexível do PID convencional, uma vez que ele possui dois parâmetros de ajuste adicionais, mas mantém a mesma estrutura do controlador PID. Além disso, sistemas de ordem fracionária podem ser aproximados como sistemas de elevada ordem, o que permite que os controladores de ordem fracionária sejam pensados como controladores de elevada ordem “compactados” em poucos parâmetros. Como métodos de projeto de controladores robustos geralmente resultam em controladores de elevada ordem (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 1996), é natural levantar a hipótese de que o controlador FOPID tem potencial de oferecer robustez semelhante ao de controladores projetados por tais métodos, mas mantendo a simplicidade do controlador PID.

Esse controlador foi originalmente proposto por PODLUBNY (1999a) para controlar processos modelados por funções de transferência de ordem fracionária, mas desde sua introdução, houve diversas publicações sobre sua utilização no controle de sistemas de ordem inteira, tendo sido reportadas diversas aplicações. Por exemplo, FELIU-BATLLE et al. (2009) descrevem uma aplicação em um canal de irrigação com elevado tempo morto, na qual, utilizando um controlador fracionário, foi possível obter melhores desempenho e robustez do que no caso inteiro. Resultados similares foram obtidos em DAS et al. (2011) e SHAH e AGASHE

(2013) para sistemas de elevada ordem, enquanto CHENG e HWANG (2006) e PAN et al. (2011) ilustram a maior capacidade de controladores fracionários estabilizarem plantas instáveis com tempo morto. Estudando reguladores automáticos de voltagem, AGUILA-CAMACHO e DUARTE-MERMOUD (2013) mostram que controladores fracionários também são capazes de reduzir a utilização de ação de controle.

Contudo, não foi encontrada na literatura uma comparação sistemática a fim de verificar em que situações o controlador FOPID oferece melhoras consideráveis, em termos de desempenho e robustez, em relação ao controlador PID. Além disso, as vantagens reportadas nas comparações existentes na literatura são altamente dependentes dos métodos de ajuste utilizados tanto no FOPID quanto no PID, uma vez que, em geral, métodos diferentes de ajuste são usados para cada tipo de controlador.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é investigar as vantagens do controlador FOPID reportadas na literatura, bem como os casos onde tais vantagens são apreciáveis. Para tanto, este trabalho também tem o objetivo de desenvolver um método geral de ajuste, que possa ser aplicado para controladores PID de ordem tanto inteira quanto não-inteira, a fim de fazer uma comparação justa entre os dois controladores.

A terceira conferência da IFAC em Avanços em Controladores PIDs, realizada em maio de 2018 em Ghent, na Bélgica (<http://www.pid18.ugent.be/home.html>), dá uma ideia da relevância das pesquisas envolvendo controladores FOPID. Para se ter uma ideia, dos 152 artigos apresentados no evento, cerca da metade destes versaram sobre métodos de ajuste e/ou aplicações de controladores FOPID, sendo que uma das plenárias foi focada diretamente em cima deste tema. Tal fato demonstra claramente a relevância e a atualidade do referido tema.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica finalizando com uma análise comparativa que justifica a escolha do método de ajuste usado neste trabalho. Já o Capítulo 3 descreve em detalhes o método escolhido e como ele foi estendido para controladores FOPID. O Capítulo 4 apresenta os estudos de caso realizados para comparar os controladores, bem como uma discussão sobre os resultados obtidos. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.



## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. CÁLCULO FRACIONÁRIO

Uma vez que a base matemática do controlador FOPID é o cálculo de ordem fracionária, será feita uma breve revisão dos conceitos principais necessários a sua aplicação em teoria de controle.

Cálculo fracionário é uma generalização de integração e diferenciação para ordens não-inteiras. Assim, se define o operador integro-diferencial,  ${}_a D_b^r$ , como

$${}_a D_b^r = \begin{cases} \frac{d^r}{dt^r}, & \Re(r) > 0 \\ 1, & \Re(r) = 0 \\ \int_a^b (dt)^{-r}, & \Re(r) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são os limites de integração, e  $r$  é a ordem da operação. Geralmente,  $r \in \mathbb{R}$ , mas  $r$  também pode ser um número complexo (OUSTALOUP et al., 2000). Dessa forma, valores inteiros positivos e negativos de  $r$  correspondem às operações convencionais de diferenciação e integração, respectivamente.

Existe mais de uma definição usada para avaliar a operação integro-diferencial fracionária sobre uma função. As duas definições mais utilizadas na literatura são as definições de Grünwald-Letnikov e de Riemann-Liouville (OLDHAM e SPANIER, 1974; PODLUBNY, 1999a).

A definição de Grünwald-Letnikov é dada por

$${}_a D_b^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{h} \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot f(t - k \cdot h) \quad (2.2)$$

onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa a parte inteira do argumento. O coeficiente binomial é dado por

$$\binom{r}{k} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(r-k+1)} \quad (2.3)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gamma.

A definição de Riemann-Liouville é dada por

$${}_a D_b^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(v-r)} \cdot \frac{d^v}{dt^v} \int_a^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r-v+1}} d\tau \quad (2.4)$$

para  $(v-1 < r < v)$ .

A transformada de Laplace, muito utilizada em teoria de controle, quando aplicada à definição de Riemann-Liouville da derivada fracionária, é dada por

$$\mathcal{L}\{{}_a D_b^r f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot {}_a D_b^r f(t) \cdot dt = s^r \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \cdot {}_a D_b^{r-k-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (2.5)$$

para  $(v-1 < r \leq v)$ , onde  $s = \sigma + j \cdot \omega$  é variável da transformada de Laplace.

Nota-se que a transformada de Laplace da derivada fracionária é análoga a da derivada de ordem inteira. Este fato permite que se trabalhe com funções de transferência de ordens não-inteiras, servindo de base para o estudo de controladores de ordem fracionária.

Ainda sobre a derivada fracionária, vale mencionar que ela possui as propriedades da linearidade e da comutatividade, inclusive com a derivada convencional (PODLUBNY, 1999b).

## 2.2. CONTROLADOR FOPID

O controlador FOPID foi proposto por PODLUBNY (1999a) para controlar processos modelados por funções de transferência de ordem fracionária. Tal controlador consiste em uma generalização do PID convencional, na qual as ordens da ação integral e derivativa podem assumir qualquer valor, não somente valores inteiros. A equação do controlador no domínio de Laplace é dada pela Equação 2.6.

$$FOPID = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d \cdot s^\mu \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são números reais positivos,  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  são os ganhos proporcional, integral e derivativo, respectivamente. Claramente, o controlador FOPID apresentado é uma generalização do controlador PID na forma paralelo expandida.

Na literatura são encontrados vários estudos de caso onde controladores FOPID oferecem vantagens em relação a controladores PID convencionais. FELIU-BATLLE et al. (2009) descrevem uma aplicação em um canal de irrigação com

elevado tempo morto, na qual, utilizando um controlador FOPI (FOPID sem ação derivativa) combinado com um Preditor de Smith, foi possível obter melhores desempenho e robustez do que com um controlador PI inteiro combinado com Preditor de Smith. No estudo apresentado por PAN et al. (2011), foi possível alcançar bom desempenho em uma planta instável com tempo morto variável controlada por um FOPID, enquanto não foi possível estabilizar a mesma planta com um PID. Em CHENG e HWANG (2006), é mostrado como um controlador FOPD (FOPID sem ação integral) pode estabilizar plantas instáveis com tempos mortos que não podem ser estabilizadas com controladores PD inteiros. Os trabalhos apresentados por DAS et al. (2011) e SHAH e AGASHE (2013) ilustram como maior robustez pode ser obtida no controle de plantas de elevada ordem através de controladores FOPID. Estudando reguladores automáticos de voltagem, AGUILA-CAMACHO e DUARTE-MERMOUD (2013) mostram que controladores fracionários também são capazes de reduzir a utilização de ação de controle.

### 2.3. SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA

Existem duas formas de simular sistemas que contenham derivadas fracionárias. A primeira delas é utilizar integradores específicos, baseados na definição da derivada fracionária, para simular numericamente o sistema. A segunda delas é aproximar o operador de ordem fracionária no domínio de Laplace (i.e., a transformada de Laplace da derivada fracionária com condição inicial nula) como uma função de transferência de elevada ordem inteira. O sistema então pode ser simulado como um sistema de ordem inteira convencional. Ambos os métodos são descritos a seguir.

#### 2.3.1. Simulação numérica baseada na definição da derivada fracionária

Para computar numericamente a derivada fracionária, é utilizada uma versão modificada da definição de Grünwald-Letnikov, dada por

$${}_a D_b^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{h} \rfloor} w_k^{(r)} \cdot f(t - k \cdot h) \quad (2.7)$$

onde  $h$  é o tamanho do passo de integração, e  $w_k^{(r)}$  pode ser avaliado recursivamente por

$$w_0^{(r)} = 1, \quad w_k^{(r)} = \left(1 - \frac{r+1}{k}\right) \cdot w_{k-1}^{(r)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

### 2.3.2. Aproximação inteira do operador de ordem fracionária

O operador de ordem fracionária pode ser aproximado pelo filtro recursivo de Oustaloup, proposto em (OUSTALOUP et al., 2000), que fornece ótimas aproximações em um intervalo de frequências especificado.

O método consiste em aproximar o operador de diferenciação de ordem fracionária  $r$  ou de integração de ordem  $(-r)$  como uma função de transferência de ordem inteira, cujos polos e zeros são calculados pela equação a seguir:

$$s^r \approx K_{fo} \cdot \prod_{k=1}^M \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (2.9)$$

onde

$$\omega'_k = \omega_b \cdot \omega_u^{(2 \cdot k - 1 - r)/M} \quad (2.9.1)$$

$$\omega_k = \omega_b \cdot \omega_u^{(2 \cdot k - 1 + r)/M} \quad (2.9.2)$$

$$K_{fo} = \omega_h^r \quad (2.9.3)$$

onde  $M$  é a ordem da aproximação na faixa de frequência especificada  $(\omega_b; \omega_h)$ , e o parâmetro  $\omega_u$  é dado pela relação abaixo.

$$\omega_u = \sqrt{\omega_h/\omega_b} \quad (2.9.4)$$

Pela propriedade da comutatividade da derivada fracionária com a derivada inteira, para ordens fracionárias  $r \geq 1$  é válido que

$$s^r = s^p \cdot s^q \quad (2.9.5)$$

onde  $p = r - q$  denota a parte inteira de  $r$  e  $s^q$  é obtido pela aproximação de Oustaloup. Assim, operadores de qualquer ordem podem ser aproximados como funções de transferência de ordem inteira convencionais.

O filtro de Oustaloup é utilizado na implementação prática de controladores fracionários, pois além de fornecer ótimas aproximações, ele é computacionalmente mais rápido do que a simulação numérica direta da derivada fracionária. Por essa razão, optou-se pela sua utilização neste trabalho para simular sistemas de ordem fracionária.

Para melhor visualização, a Tabela 8 do Apêndice A apresenta as aproximações de  $s^r$  de terceira, quarta e quinta ordem, tipicamente utilizadas em implementações.

## 2.4. MÉTODOS DE AJUSTE PARA CONTROLADORES FOPID

Os métodos de ajuste para controladores FOPID podem ser divididos em três grupos (VALÉRIO, 2005):

- Regras de ajuste;
- Métodos analíticos;
- Métodos baseados em otimização.

A seguir serão revisados métodos representativos de cada grupo.

### 2.4.1. Regras de ajuste

Existem diversas regras de ajuste para controladores FOPID similares às regras desenvolvidas por ZIEGLER e NICHOLS (1942). Tais regras em geral são de simples aplicação e requerem apenas um modelo simples da planta para o cálculo dos parâmetros. As regras aqui apresentadas foram desenvolvidas para plantas de primeira ordem com tempo morto.

CHEN et al. (2008) desenvolveram regras de ajuste para controladores FOPI otimizando a resposta regulatória dos controladores restringindo a máxima sensibilidade em relação a distúrbios na carga. De forma similar, GUDE e KAHORAHO (2009) desenvolveram regras de ajuste para controladores FOPI maximizando a rejeição a distúrbios degrau no domínio da frequência da malha fechada, sujeita a restrições na máxima sensibilidade. Outras regras de ajuste para controladores FOPI foram desenvolvidas por BHAMBHANI et al. (2008), baseadas

na minimização multi-objetivo dos índices ITAE e Margem Jitter, descrita em CERVIN et al. (2004).

VALÉRIO (2006) desenvolveu regras de ajuste para controladores FOPID baseadas no problema de otimização proposto por MONJE et al. (2008), que será descrito no item 2.4.3., aplicado a várias plantas com diferentes tempos mortos normalizados<sup>1</sup>. A otimização foi realizada com o método de busca direta com o algoritmo de Nelder-Mead, e os resultados para várias plantas foram interpolados para obter as regras de ajuste.

BAYAT (2012) propôs regras de ajuste para controladores FOPID e plantas de primeira ordem com tempo morto cujo tempo morto normalizado esteja entre 0,1 e 3,5. Foram propostas regras para seguimento de comandos e rejeição de distúrbios baseadas na minimização da integral do erro ao quadrado (ISE) para várias plantas, de forma análoga ao método anterior.

PADULA e VISIOLI (2011) desenvolveram regras de ajuste para controladores FOPID e PID explicitamente para os problemas servo e regulatório minimizando a integral do erro absoluto (IAE) com restrição sobre a máxima sensibilidade. Ao contrário das regras citadas até agora (que foram desenvolvidas para a forma paralelo do controlador FOPID), as regras de Padula foram desenvolvidas para a forma série dos controladores FOPID e PID. Neste procedimento foram considerados diversos processos com vários valores de tempo morto, e os parâmetros do controlador foram encontrados utilizando algoritmos genéticos. As regras de ajuste foram obtidas interpolando os valores ótimos dos parâmetros dos controladores de diferentes processos com diferentes tempos mortos.

Uma revisão mais detalhada das regras apresentadas pode ser encontrada no estudo comparativo realizado por RANGANAYAKULU et al. (2016).

#### **2.4.2. Métodos analíticos**

Quando a planta é modelada como uma função de transferência de ordem fracionária, é possível projetar controladores FOPID pelo método IMC (RIVERA et al.

---

<sup>1</sup> Para uma planta de primeira ordem com constante de tempo  $T$  e tempo morto  $\theta$ , o tempo morto normalizado,  $L$ , é dado por  $L = \frac{\theta}{T+\theta}$ .

1986). Para uma planta “de primeira ordem” fracionária<sup>2</sup> com tempo morto, VALÉRIO (2005) mostrou como o método IMC leva um controlador FOPID. Em LI et al. (2015) foi proposto um controlador FOPID em série com um filtro para plantas fracionárias baseado na especificação da máxima sensibilidade. Em MAÂMAR e RACHID (2014), um controlador de ordem fracionária foi apresentado para controlar plantas de ordem inteira. O método consiste em uma modificação do método IMC para projetar um controlador PID em série com um filtro de ordem fracionária, o que possibilita especificar a reserva de fase desejada na malha de controle. Segundo o autor, essa metodologia leva a um controlador robusto a variações no ganho da planta.

### 2.4.3. Métodos baseados em otimização

Um dos métodos mais utilizados na literatura foi proposto por MONJE et al. (2008), que consiste em minimizar uma função objetivo contemplando até cinco especificações de desempenho e robustez no domínio da frequência, com quatro delas implementadas como restrições no problema de otimização. As especificações propostas são as seguintes:

- Frequência de corte;
- Reserva de fase;
- Derivada nula da função de transferência em malha aberta em relação à frequência na frequência de corte, que confere robustez frente a variações no ganho da planta (CHEN e MOORE, 2005);
- Restrição na magnitude da função de sensibilidade complementar em alta frequência, para garantir rejeição de ruído (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 1996);
- Restrição na magnitude da função de sensibilidade em baixas frequências, para garantir rejeição de distúrbios (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 1996).

Segundo MONJE et al. (2008), é possível atender uma especificação para cada parâmetro do controlador.

---

<sup>2</sup> Tal planta é descrita por  $G = \frac{K}{T.s^{\alpha+1}}$ , onde  $K$  é ganho estático da planta,  $T$  é sua constante de tempo e  $\alpha$  é a ordem fracionária da planta.

Essa formulação torna o problema de otimização não-convexo, i.e., a função objetivo tem muitos mínimos locais, de acordo com o autor, fazendo o método ser sensível à escolha dos parâmetros iniciais usados na sua inicialização. Por causa disso, muitos autores optam por métodos que não necessitam do cálculo de gradientes, tais como o método de Nelder-Mead (TEPLJAKOV, 2017), algoritmos genéticos (ZHANG e LI, 2011; LAZAREVIĆ et al., 2013) e enxame de partículas (ZAMANI et al, 2009; AGUILA-CAMACHO et al, 2017). Apesar disso, é argumentado em MONJE et al. (2008) que várias soluções do problema de otimização podem resultar em controladores satisfatórios, mesmo que não correspondam ao mínimo global.

FACCIN (2004) desenvolveu um método geral de ajuste controladores baseado no trabalho de TRIERWEILER (1997). O método consiste em uma modificação do método da Síntese Direta, onde a diferença entre as resposta degrau da função de transferência desejada para a malha fechada e da malha fechada com o controlador que se deseja ajustar e o modelo da planta é minimizada no domínio da frequência. Este método foi desenvolvido para ajustar controladores PID de ordem inteira, mas o método em si não impõe nenhuma restrição na estrutura do controlador. Assim, diferentes controladores podem ser ajustados para se obter a mesma malha fechada desejada. Por essa razão, neste trabalho se optou por utilizar este método para ajustar controladores FOPID e realizar a comparação destes com controladores PID. A versão modificada do método será descrita em detalhes no Capítulo 3.

## 2.5. ANÁLISE COMPARATIVA

Aqui será apresentado um levantamento das principais características de cada método de ajuste, tendo em mente o objetivo do trabalho de comparar o controlador FOPID com o PID.

A maior dificuldade na comparação entre os controladores FOPID e PID está em distinguir entre as vantagens do controlador em si e do método de ajuste utilizado, uma vez que a maioria dos métodos não é aplicável aos dois tipos de controladores. Além disso, não é sempre possível considerar as mesmas especificações para os controladores FOPID e PID, devido ao maior número de parâmetros do primeiro, que são usados como graus de liberdade para atender mais



especificações. Poderia ser argumentado que a possibilidade de atender mais especificações por si só é uma vantagem do controlador FOPID, contudo, mesmo que os métodos de ajuste para controladores PID não considerem explicitamente tantas especificações quanto os para controladores FOPID, essas especificações podem estar implicitamente relacionadas às que foram consideradas no ajuste do PID, de forma que elas também podem ser atendidas. Isto foi verificado em diversos testes preliminares com diferentes métodos de ajuste.

Assim, para uma comparação justa entre os controladores, é necessário que ambos sejam ajustados pelo mesmo método, levando em consideração as mesmas especificações.

Além disso, como o objetivo principal deste trabalho é comparar os dois tipos de controladores, é importante que sejam analisados o “melhor” FOPID e o “melhor” PID, a fim de evitar confundir o potencial do controlador com a qualidade do ajuste utilizado em cada um. Com “melhor”, quer-se dizer que o controlador deve atender as especificações consideradas da melhor maneira possível, ou seja, minimizando algum critério de desempenho e/ou robustez, o que requer que o método de ajuste considerado seja baseado em otimização.

Outro aspecto importante que deve ser considerado é a facilidade (ou dificuldade) de se obter um ajuste satisfatório. Por exemplo, no caso do método de Monje, a realização de testes preliminares permitiu constatar que o método não só é bastante sensível aos valores iniciais dos parâmetros (como explicitado pelo próprio autor), como também os parâmetros ótimos frequentemente são bastante distantes dos parâmetros de um PID inteiro (ajustado por métodos analíticos ou regras de ajuste), que em geral são usados como parâmetros iniciais (TEPLJAKOV, 2017). Assim, para que se consiga um ajuste satisfatório (ou seja, que atenda as especificações), são necessários diversos chutes iniciais dos parâmetros, sem existir uma metodologia para a escolha destes. Nos testes preliminares realizados, em muitos casos não foi possível atingir um ajuste satisfatório. Isso não ocorreu nos testes realizados com o método da aproximação no domínio da frequência de Faccin e Trierweiler, que foi bem mais robusto em relação aos parâmetros iniciais, geralmente convergindo ao mesmo resultado em menos iterações.

Por fim, é importante ressaltar que não é necessário fazer nenhum tipo de aproximação para computar a derivada fracionária no domínio da frequência. Por

esta razão, métodos de ajuste baseados no domínio da frequência tendem a fornecer melhores resultados.

A discussão acima está resumida na Tabela 2, que compara as características de métodos representativos de cada grupo em relação aos critérios discutidos, identificados como:

- A. O método pode ser aplicado tanto ao FOPID quanto ao PID, considerando as mesmas especificações;
- B. O método minimiza algum critério de desempenho e/ou robustez;
- C. Facilidade de se obter um ajuste satisfatório, dados as especificações e os parâmetros iniciais.
- D. O método é baseado no domínio da frequência.

**Tabela 1: Comparação entre os métodos de ajuste.**

<b>Critério</b>	<b>Maâmar</b>	<b>Padula</b>	<b>Monje</b>	<b>Faccin<sup>3</sup></b>
<b>A</b>	0	1	0	1
<b>B</b>	0	0	1	1
<b>C</b>	1	1	0	1
<b>D</b>	0	0	1	1
<b>Somatório</b>	1	2	2	4

*Notação: 0 – não atende e 1 – atende.*

Cada método recebeu uma nota (0 ou 1) em cada critério, e o método com o maior somatório de todos os critérios foi escolhido para ser utilizado no restante do trabalho.

O método proposto por Maâmar foi escolhido entre os métodos analíticos por poder ser aplicado a sistemas de ordem tanto inteira quanto fracionária, enquanto o método de Padula foi escolhido entre as regras de ajuste por ter se mostrado superior às demais regras em testes preliminares, resultado também apontado em (RANGANAYAKULU et al., 2016). O método de Monje foi incluído por ser o mais bem estabelecido na literatura, mas as dificuldades mencionadas acima motivaram a inclusão (e adaptação) do método de Faccin & Trierweiler.

Em vista do que foi exposto, o método proposto por Faccin & Trierweiler foi escolhido para ajustar os controladores usados neste trabalho. A versão do método modificada para ajustar controladores FOPID será descrita em detalhes no próximo capítulo.

<sup>3</sup> O critério A é atendido porque está sendo considerada a versão adaptada do método, descrita no Capítulo 3.

### 3. AJUSTE DOS CONTROLADORES NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Nesta seção será descrito o método de ajuste proposto por FACCIN (2004) baseado no método proposto por TRIERWEILER (1997). Esse método foi estendido para controladores FOPID como será descrito a seguir.

#### 3.1. CONTROLADOR FOPID

O controlador FOPID utilizado neste trabalho tem uma estrutura diferente da originalmente proposta e mais utilizada na literatura (Equação 2.6). Ele é representado pela equação

$$\Delta U(s) = K_c \left[ (\Delta Y_r(s) - \Delta Y(s)) + \frac{1}{T_i s^\lambda} (\Delta Y_r(s) - \Delta Y(s)) + \frac{T_d s^\mu}{\frac{T_d}{N} s^\mu + 1} (-\Delta Y(s)) \right] \quad (3.1)$$

onde  $\Delta U(s)$ ,  $\Delta Y_r(s)$  e  $\Delta Y(s)$  são as transformadas de Laplace da variável manipulada (saída do controlador), sinal de referência e variável controlada (saída da planta), respectivamente, enquanto  $\lambda$  e  $\mu$  são as ordens das ações integral e derivativa, como na Equação 2.1. Os parâmetros  $K_c$ ,  $T_i$  e  $T_d$  são as constantes proporcional, integral e derivativa, respectivamente, e  $N$  é um coeficiente do filtro da ação derivativa.

Nessa estrutura, a ação derivativa age somente sobre a variável controlada (e não sobre o erro), a fim de evitar ações de controle muito bruscas no primeiro instante de tempo após uma mudança degrau no sinal de referência (CORRIPIO, 2001). O filtro derivativo foi incluído para tornar o controlador fisicamente realizável, mas também tem o efeito de atenuar o efeito de ruído nos sinais. Ambas as modificações são usualmente inclusas em controladores PID usados em aplicações industriais. Além disso, neste trabalho, o coeficiente  $N$  não foi considerado como um parâmetro de ajuste, tendo sido fixado em  $N = 10$ , o que também é uma prática comum (SEBORG et al., 2010).

#### 3.2. MÉTODO DE AJUSTE

Este método foi originalmente proposto para sintetizar controladores de baixa ordem para qualquer planta, baseado no método da aproximação da resposta no

domínio da frequência (*Frequency Response Approximation*), cujas ideias básicas são discutidas em TRIERWEILER et al. (2000), e que evoluiu ao longo do tempo com a contribuição de vários trabalhos (ENGELL, 1988; ENGELL e MÜLLER, 1993; MÜLLER, 1996; TRIERWEILER, 1997). Contudo, devido a não convexidade e dificuldade de convergência, FACCIN (2004) dividiu o problema de otimização original em dois subproblemas aproximados, que são resolvidos de forma sequencial iterativa, de forma mais simples, fácil e rápida. Estes subproblemas são formulados baseados em uma malha de controle alternativa, com dois graus de liberdade, na qual todas as parametrizações de controladores PID podem ser convertidas e que constitui a base do método. Neste trabalho, foi proposto converter o controlador FOPID nessa malha alternativa para realizar seu ajuste.

### 3.2.1. Malha de controle com dois graus de liberdade

O estudo de sistemas de controle retroalimentados geralmente faz uso de uma malha de controle padrão, mostrada na Figura 1, onde  $y_r$  representa o sinal de referência e  $y$  representa a variável controlada.

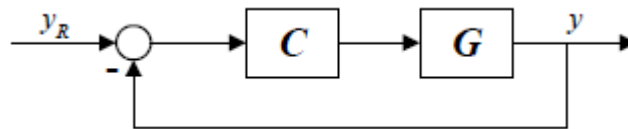


Figura 1: Malha de controle retroalimentada padrão. Fonte: FACCIN (2004).

Como será descrito na próxima Seção 3.2.2., essa malha padrão pode ser convertida na malha de controle com dois graus de liberdade mostrada na Figura 2., na qual o método proposto está baseado.

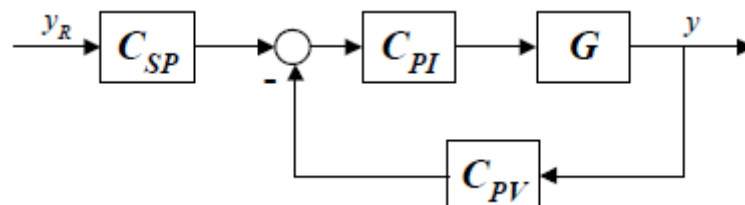


Figura 2: Malha de controle com dois graus de liberdade. Fonte: FACCIN (2004).

A função de transferência em malha fechada correspondente a Figura 2 é dada pela Equação 3.4., onde  $G$  é o modelo da planta,  $C_{PI}$  é a representação do

controlador do tipo PI,  $C_{PV}$  é um filtro da variável controlada, e  $C_{SP}$  é um filtro do sinal de referência.

$$T(s) = \frac{G(s) \cdot C_{PI}(s) \cdot C_{SP}(s)}{1 + G(s) \cdot C_{PI}(s) \cdot C_{PV}(s)} \quad (3.4)$$

Nesta estrutura, FACCIN (2004) propôs fixar a base de um controlador do tipo PI, enquanto os blocos adicionais  $C_{SP}$  e  $C_{PV}$  são filtros do tipo *lead-lag*, com estrutura variável de acordo com a parametrização, que podem incluir operadores fracionários. Neste trabalho, foi utilizado um controlador FOPI, dado pela Equação 3.5, no bloco  $C_{PI}$ , ao invés do controlador PI proposto originalmente.

$$C_{PI} = Kc \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s^\lambda} \right) \quad (3.5)$$

Na sequência, é apresentado o procedimento básico para conversão de qualquer parametrização de controlador para a malha de controle da Figura 2. Esse procedimento foi aplicado ao controlador FOPID para tornar possível seu ajuste pelo método proposto.

### 3.2.2. Procedimento de conversão

A conversão de qualquer parametrização de controlador PID para a base proposta é feita através da álgebra de blocos. A equivalência entre as ações de controle geradas pelo controlador da Figura 1 e o da Figura 2 é dada pela Equação 3.6.

$$\Delta U(s) = C_{PI} \cdot (C_{SP} \cdot \Delta Y_r(s) - C_{PV} \cdot \Delta Y(s)) \quad (3.6)$$

Através de manipulações algébricas, chega-se às relações de equivalência dos blocos  $C_{SP}$  e  $C_{PV}$  (Equações 3.7 e 3.8, respectivamente), para qualquer controlador PID, considerando que o bloco  $C_{PI}$  é sempre fixo. No caso do controlador FOPID proposto neste trabalho, o bloco  $C_{PI}$  é fixado pela Equação 3.5.

$$C_{SP} = \frac{1}{C_{PI}} \cdot \frac{\Delta U(s)}{\Delta Y_r(s)} \quad (3.7)$$

$$C_{PV} = -\frac{1}{C_{PI}} \cdot \frac{\Delta U(s)}{\Delta Y(s)} \quad (3.8)$$

Assim, a partir das relações entre  $\Delta U(s)$ ,  $\Delta Y(s)$  e  $\Delta Y_r(s)$  de uma determinada parametrização de controlador PID ou FOPID, pode-se obter a respectiva conversão para a estrutura apresentada na Figura 2.

Aplicando o procedimento descrito acima à Equação 3.1, chega-se às funções de transferência para os blocos  $C_{SP}$  e  $C_{PV}$  dadas a seguir.

$$C_{SP} = 1 \quad (3.9)$$

$$C_{PV} = \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right) T_i T_d s^{\lambda+\mu} + T_i s^\lambda + \frac{T_d}{N} s^\mu + 1}{\frac{T_i T_d}{N} s^{\lambda+\mu} + T_i s^\lambda + \frac{T_d}{N} s^\mu + 1} \quad (3.10)$$

### 3.2.3. Método de otimização sequencial iterativo

O problema de otimização consiste em minimizar, frente a uma perturbação degrau na variável de referência, a diferença entre a função de transferência da planta em malha fechada  $T(s, x)$ , onde  $x$  representa os parâmetros do controlador, dada pela Equação 3.4, a e função de transferência correspondente ao desempenho desejado em malha fechada,  $T_0(s)$ . Essa minimização é feita no domínio da frequência e os parâmetros do controlador são usados como variáveis de decisão. A formulação desse problema é dada na equação a seguir.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^+} FO(x) = \sum_{s=j \cdot \omega_0}^{j \cdot \omega_1} \left| \left( [T(s, x) - T_0(s)] \cdot \frac{1}{s} \right)^2 \right| \quad (3.11)$$

Na Equação 3.11, a função objetivo ( $FO$ ) é avaliada em um vetor de frequências com pontos igualmente espaçados em escala logarítmica no intervalo de frequências  $\omega = [\omega_0 \ \omega_1]$ . Uma vez que os parâmetros do controlador devem ser positivos, o vetor das variáveis de decisão, ( $x$ ), é forçado, por equações de restrição, a assumir valores reais não negativos.<sup>4</sup> Substituindo a Equação 3.4 na Equação 3.11, obtém-se a seguinte função objetivo.

$$FO(x) = \sum_{s=j \cdot \omega_0}^{j \cdot \omega_1} \left| \left( \left[ \frac{G(s) \cdot C_{PI}(s) \cdot (C_{SP}(s, x) - T_0(s) \cdot C_{PV}(s, x)) - T_0(s)}{1 + G(s) \cdot C_{PI}(s, x) \cdot C_{PV}(s, x)} \right] \cdot \frac{1}{s} \right)^2 \right| \quad (3.12)$$

<sup>4</sup> No caso de plantas com ganho estacionário negativo, para fins de cálculo, se troca o sinal da planta e se projeta o controlador com a restrição de que os parâmetros devem ser positivos. No final, para fins de implementação, basta se trocar o sinal do ganho do controlador ou simplesmente informar ação direta para o controlador.

A minimização desta função objetivo é um problema de otimização não-convexo, uma vez que as variáveis de decisão aparecem tanto no numerador quanto no denominador. Assim, o problema de otimização é de difícil solução, não ficando garantida a convergência para os parâmetros ótimos. FACCIN e TRIERWEILER (2004) propuseram um procedimento sequencial iterativo de otimização para resolver este problema, chamado de SIOM (*Sequential Iterative Optimization Method*). Neste procedimento, em cada iteração, o problema é dividido em dois subproblemas convexos, que são resolvidos em duas etapas (Etapa 1 e Etapa 2). Na primeira iteração, resolve-se um problema simplificado, cujo resultado é usado no problema da iteração seguinte, continuando recursivamente até a convergência.

A seguir é descrita a sequência de passos executados pelo algoritmo, adaptados para ajustar um controlador FOPID.

1. É resolvido um problema de otimização simplificado, com  $C_{SP}$  e  $C_{PV}$  iguais à unidade, de forma que, na primeira iteração, são estimados os parâmetros de um controlador FOPI ( $K_c$ ,  $T_i$  e  $\lambda$ ). Assim, a função objetivo se reduz à mostrada abaixo (Iteração 1 – Etapa 1).

$$FO_{E1}^1(x) = \sum_{s=j\cdot\omega_0}^{j\cdot\omega_1} \left| \left( \left[ G(s) \cdot C_{PI}(s, x) \cdot (1 - T_0(s))^2 - T_0(s) \cdot (1 - T_0(s)) \right] \cdot \frac{1}{s} \right)^2 \right|$$

$$x_{E1}^1 = [K_c^1 \ T_i^1 \ \lambda^1]$$

2. Com as estimativas iniciais dos parâmetros do controlador FOPI, a Equação 3.12 é resolvida com os parâmetros de  $C_{PI}$  fixos iguais aos da Etapa 1 e com o bloco  $C_{PV}$  do denominador igual a unidade (Iteração 1 – Etapa 2).

$$C_{PI}^*(s) = C_{PI}(s, x = x_{E1}^1)$$

$$FO_{E2}^1(x) = \sum_{s=j\cdot\omega_0}^{j\cdot\omega_1} \left| \left( \left[ \frac{G(s) \cdot C_{PI}^*(s) \cdot (C_{SP}(s, x) - T_0(s) \cdot C_{PV}(s, x)) - T_0(s)}{1 + G(s) \cdot C_{PI}^*(s)} \right] \cdot \frac{1}{s} \right)^2 \right|$$

$$x_{E2}^1 = [T_d^1 \ \mu^1]$$

3. Após as duas etapas, os parâmetros do controlador FOPID da primeira iteração são obtidos.

$$PID^1 = x^1 = [x_{E1}^1 \ x_{E2}^1] = [K_c^1 \ T_i^1 \ \lambda^1 \ T_d^1 \ \mu^1]$$

4. Na próxima iteração, a Equação 3.12 tem os blocos  $C_{SP}$  e  $C_{PV}$  e o bloco  $C_{PI}$  do denominador fixados com os parâmetros estimados na iteração anterior, e resolve-se o problema de otimização para estimar novamente os parâmetros  $K_c$ ,  $T_i$  e  $\lambda$  (Etapa 1).

$$nit = nit + 1$$

$$C_{PI}^*(s) = C_{PI}(s, x = x_{E1}^{nit-1})$$

$$C_{SP}^*(s) = C_{SP}(s, x = x^{nit-1})$$

$$C_{PV}^*(s) = C_{PV}(s, x = x^{nit-1})$$

$$FO_{E1}^{nit}(x) = \sum_{s=j\omega_0}^{j\omega_1} \left| \left( \left[ \frac{G(s) \cdot C_{PI}(s, x) \cdot (C_{SP}^*(s) - T_0(s) \cdot C_{PV}^*(s)) - T_0(s)}{1 + G(s) \cdot C_{PI}^*(s) \cdot C_{PV}^*(s)} \right] \cdot \frac{1}{s} \right)^2 \right|$$

$$x_{E2}^{nit} = [K_c^{nit} T_i^{nit} \lambda^{nit}]$$

5. Com os parâmetros da estimativa anterior, a Equação 3.12 tem o bloco  $C_{PI}$  e o bloco  $C_{PV}$  do denominador fixados, e o problema de otimização é resolvido para estimar novamente os parâmetros  $T_d$  e  $\mu$  (Etapa 2).

$$C_{PI}^*(s) = C_{PI}(s, x = x_{E1}^{nit})$$

$$C_{PV}^*(s) = C_{PV}(s, x = [x_{E1}^{nit} x_{E2}^{nit-1}])$$

$$FO_{E2}^{nit}(x) = \sum_{s=j\omega_0}^{j\omega_1} \left| \left( \left[ \frac{G(s) \cdot C_{PI}^*(s) \cdot (C_{SP}(s, x) - T_0(s) \cdot C_{PV}(s, x)) - T_0(s)}{1 + G(s) \cdot C_{PI}^*(s) \cdot C_{PV}^*(s)} \right] \cdot \frac{1}{s} \right)^2 \right|$$

$$x_{E2}^{nit} = [T_d^{nit} \mu^{nit}]$$

6. Após as duas etapas, são obtidas as novas estimativas dos parâmetros do controlador FOPID.

$$PID^{nit} = x^{nit} = [x_{E1}^{nit} x_{E2}^{nit}] = [K_c^{nit} T_i^{nit} \lambda^{nit} T_d^{nit} \mu^{nit}]$$

7. É feito um teste comparativo entre os parâmetros estimados em duas iterações sucessivas. Se o critério de parada for satisfeito para todos os parâmetros, o processo termina. Caso contrário, retorna-se ao passo 4.

O critério de parada utilizado foi o erro percentual relativo entre os parâmetros estimados em duas iterações sucessivas, conforme a Equação 3.13. Foi utilizado o



valor de 1 % para  $\varepsilon$ . Além disso, o processo iterativo termina quando é ultrapassado um número máximo pré-estabelecido de iterações.

$$|\text{erro}[x_i]| = \left| \frac{x_i^{\text{nit}} - x_i^{\text{nit}-1}}{x_i^{\text{nit}}} \right| \cdot 100 \% \leq \varepsilon, \quad i = 1,2,3,4,5. \quad (3.13)$$

Na Equação 3.13,  $x_i$  com os índices de 1 a 5 corresponde a cada um dos parâmetros do controlador.

Vale notar que, fixando-se  $\lambda$  e  $\mu$  iguais à unidade, o algoritmo acima é equivalente ao proposto em FACCIN e TRIERWEILER (2004) para o ajuste de controladores PID.

Este procedimento de otimização foi implementado no ambiente Matlab<sup>®</sup>, com auxílio do *Goal Attainment Method* (GEMBICKI, 1974), implementado na função *fgoalattain* da versão 7.2 do *Optimization Toolbox*<sup>™</sup> (MATHWORKS, 2015), que faz uso de um método de programação quadrática sequencial (SQP).

#### 3.2.4. Função desempenho alcançável

A função desempenho alcançável (FDA) representa o comportamento desejado da planta em malha fechada. Sua escolha é de suma importância na aplicação do método proposto, pois ela deve ter ordem e dinâmica compatíveis com o modelo da planta para que o controlador seja capaz de alcançar o desempenho desejado.

A especificação exata do desempenho desejado depende de cada aplicação, mas existem características que normalmente são desejadas na maioria dos sistemas de controle. Por exemplo, a malha fechada deve ser estável e robusta, além de ser mais rápida que a malha aberta, não apresentar erro em regime permanente, nem elevados tempos de assentamento e sobrelevação.

Existem diversas formas de funções de transferência disponíveis na literatura (D'AZZO e HOUPIS, 1978), mas neste trabalho optou-se por usar como FDA as funções de transferência cujos coeficientes foram otimizados em relação ao critério ITAE (integral do erro absoluto ponderado pelo tempo) frente a mudanças do tipo degrau na variável de referência. Essas funções foram escolhidas porque, além de apresentarem características citadas acima, são caracterizadas por apenas dois

parâmetros,  $\omega_n$ , que está relacionado ao tempo de assentamento, e a ordem da função de transferência.

A forma dessas funções é dada pela Equação 3.14, e o procedimento para calcular seus coeficientes em função da ordem  $m$  e do tempo de assentamento é descrito no Apêndice B.

$$T_0 = \frac{b_0}{s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + b_{m-2} \cdot s^{m-2} + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0} \quad (3.14)$$

Quando a planta contém fatores de fase não-mínima, a FDA deve ser modificada devido as restrições impostas por tais fatores. Quando o modelo contiver tempo morto, a FDA deve conter o mesmo tempo morto. Quando o modelo contiver zeros e polos positivos, a função de transferência deve ser fatorada para garantir a estabilidade interna (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 1996). Neste trabalho foi usada a mesma forma fatorada da FDA ( $T_0^*$ ) usada por FACCIN (2004) e proposta em (TRIERWEILER, 1997). A mesma é descrita no Apêndice B.

### 3.2.5. Varredura da função objetivo

A formulação do problema de otimização descrita nesta seção foi desenvolvida para lidar com a não-convexidade da minimização da Equação 3.12, e o método *Goal Attain* utilizado é um método de programação sequencial quadrática, apropriado para muitos problemas de otimização não-convexos. Contudo, conforme discutido no Capítulo 2, na literatura é argumentado que o problema de otimização resultante do ajuste de controladores FOPID é altamente não-convexo, razão pela qual muitos autores optam por métodos estocásticos de busca tais como enxame de partículas e algoritmos genéticos. Assim, para avaliar se o método de otimização usado neste trabalho é adequado, foi realizada uma varredura da função objetivo para alguns casos.

Para tanto, o método de ajuste proposto foi aplicado para valores fixos de  $\lambda$  e  $\mu$  nos intervalos (0,8; 1,2) e (0,4; 1,8), respectivamente, espaçados entre si pelo valor de 0,025. Para cada par  $\lambda$  e  $\mu$  foi feito um gráfico tridimensional com o valor da função objetivo no eixo Z, e os valores de  $\lambda$  e  $\mu$  nos eixos X e Y, respectivamente.

Esse procedimento foi aplicado a quatro plantas, a fim de verificar a existência de mínimos locais na função objetivo. As plantas utilizadas são representadas pelas funções de transferência a seguir.

$$G1(s) = \frac{e^{-1 \cdot s}}{3 \cdot s^2 + 1 \cdot s + 1} \quad (3.22)$$

$$G2(s) = \frac{e^{-1 \cdot s} \cdot (1 - 2 \cdot s)}{(4 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1) \cdot (2 \cdot s + 1)} \quad (3.24)$$

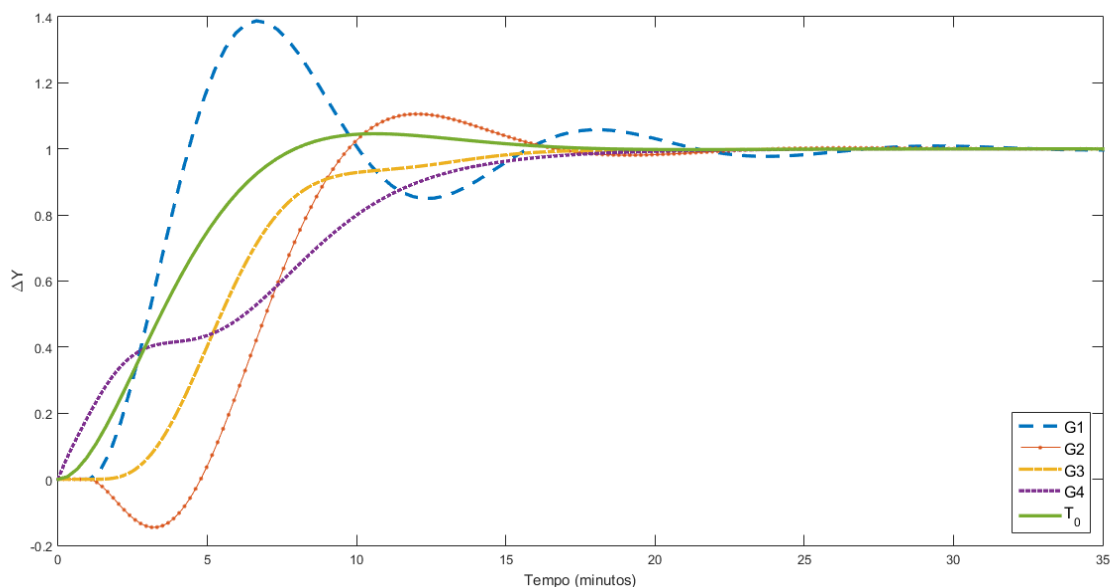
$$G3(s) = \frac{e^{-1 \cdot s}}{(3 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 1) \cdot (1,5 \cdot s^2 + 1 \cdot s + 1)} \quad (3.24)$$

$$G4(s) = \frac{1,5 \cdot s^5 + 4 \cdot s^4 + 8,5 \cdot s^3 + 4,5 \cdot s^2 + 1,667 \cdot s + 0,5556}{6 \cdot s^6 + 23 \cdot s^5 + 38 \cdot s^4 + 34,67 \cdot s^3 + 18,11 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 0,5556} \quad (3.25)$$

Nos quatro casos, foi escolhida a mesma função desempenho desejado, dada a seguir.

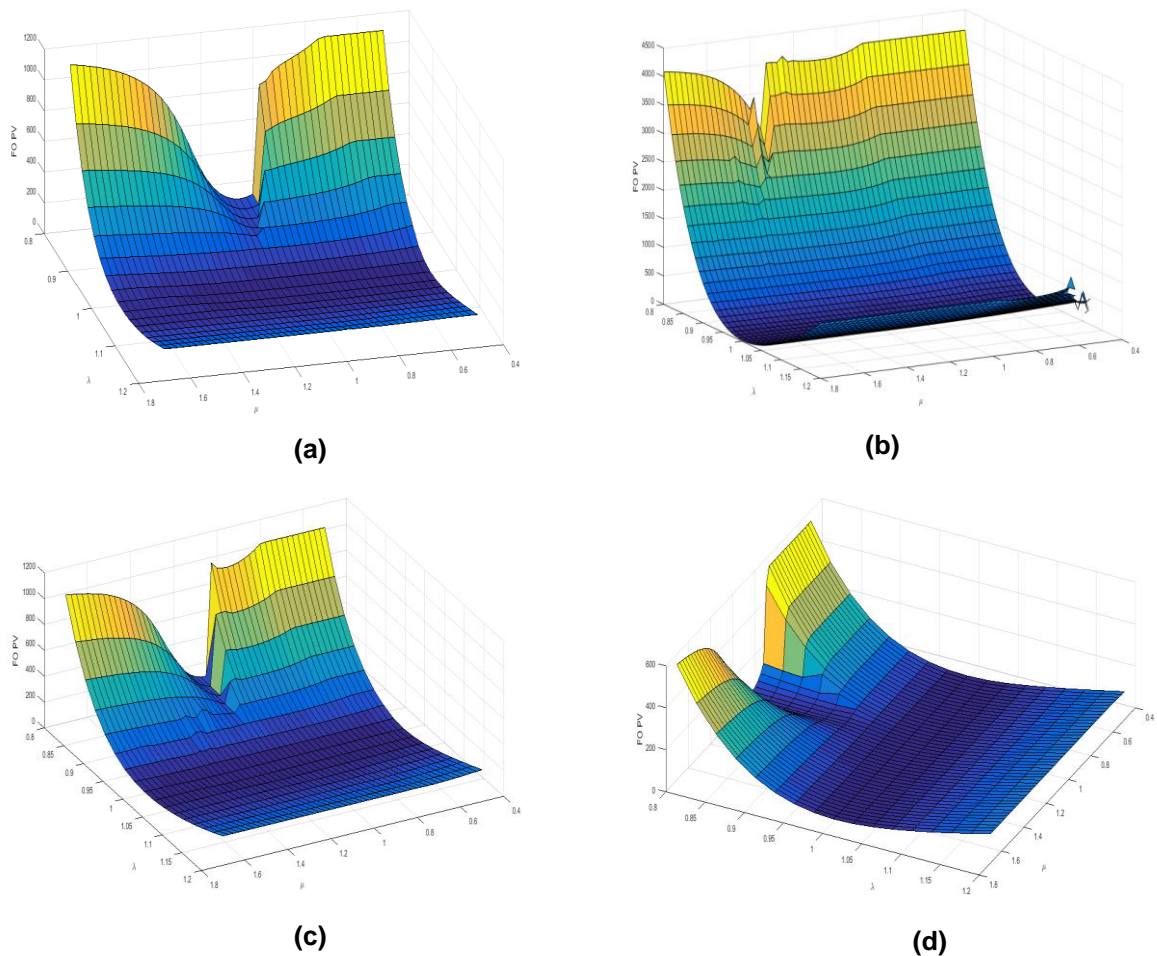
$$T_0(s) = \frac{0,1717}{s^2 + 0,5801 \cdot s + 0,1717} \quad (3.26)$$

As respostas degrau de cada planta, bem como da FDA, são mostradas na Figura 3, enquanto os gráficos correspondentes à varredura das funções objetivo são mostrados na Figura 4.



**Figura 3: Respostas degrau das funções de transferência G1, G2, G3, G4 e T<sub>0</sub>.**

Cabe salientar que a FDA na figura acima não inclui os fatores de fase não-mínima incluídos nos cálculos, que são diferentes para cada planta.



**Figura 4: Varredura da função objetivo para as plantas (a) G1, (b) G2, (c) G3 e (d) G4.**

Analisando a Figura 4, nota-se que, em todos os casos, a não convexidade é baixa. Embora isso não prove que não haverá mínimos locais para qualquer planta e desempenho desejado, é um forte indício de que, na maioria dos casos, a não convexidade não será um problema, pois esta teria de ser bastante acentuada (i.e., o problema teria de ter diversos mínimos locais), para justificar o uso de métodos tais como exame de partículas ou algoritmos genéticos. Outro fator importante para descrever a função objetivo é sua suavidade, a qual é extremamente benéfica, principalmente quando se utiliza métodos baseados em derivadas como o SQP utilizado neste trabalho. Dessa forma, conclui-se que o método aqui apresentado é apropriado para o ajuste de controladores FOPID.

#### 4. ESTUDOS DE CASO

O método de ajuste descrito foi utilizado para realizar o ajuste de controladores FOPID e PID para vários casos, a fim de realizar a comparação entre ambos. O controlador PID utilizado é dado pela equação a seguir.

$$\Delta U(s) = Kc \left[ (\Delta Y_r(s) - \Delta Y(s)) + \frac{1}{T_i s} (\Delta Y_r(s) - \Delta Y(s)) + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} (-\Delta Y(s)) \right] \quad (4.1)$$

Claramente, esse controlador é um caso particular do apresentado na Equação 3.2 quando as ordens das ações integral e derivativa são fixas iguais à unidade.

O estudo foi feito simulando em malha fechada quatro classes distintas de plantas: subamortecidas, com zeros positivos, com elevado tempo morto e de elevada ordem. Para cada caso, foram calculados critérios de desempenho e robustez das malhas de controle correspondentes aos dois controladores, para verificar em que casos o controlador FOPID oferece melhoras em relação ao PID.

Todas as simulações foram realizadas nos ambientes Simulink®/Matlab® (MATHWORKS, 2015). As simulações envolvendo sistemas de ordem fracionária foram realizadas com o auxílio do *FOMCON Toolbox™ (Fractional Order Modelling and Control)*, descrita em (TEPLJAKOV, 2017). A aproximação do operador fracionário foi feita através do filtro recursivo de Oustaloup (descrito na Seção 2.3.2.) de quinta ordem, na faixa de frequências (0,0001; 10000).

##### 4.1. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ESTUDADAS

A seguir serão apresentados os modelos com quais os testes foram realizados, bem como as especificações do sistema em malha fechada para cada caso. Para cada função de transferência apresentada, foram projetados um controlador FOPID e um controlador PID através do método descrito no Capítulo 3, e foram calculados os índices de desempenho: tempo de assentamento ( $t_A$ , para uma faixa de 5 % acima ou abaixo da resposta final) e integral do erro absoluto ponderado pelo tempo (ITAE), além dos índices de robustez: máxima sensibilidade (MS), margem de ganho (MG) e reserva de fase (RF).

#### 4.1.1. Plantas subamortecidas (Caso A)

A primeira série de simulações teve o intuito de verificar se o controlador FOPID oferece vantagens quando usado para controlar plantas subamortecidas, ou seja, com fator de amortecimento ( $\zeta$ ) menor que a unidade. O modelo da planta usado nos testes é dado a seguir, bem como os valores de  $\zeta$  utilizados.

$$G = \frac{1}{(100 \cdot s^2 + 20 \cdot \zeta \cdot s + 1)} \cdot e^{-1 \cdot s}, \quad \zeta = 1; 0,7; 0,4; 0,1. \quad (4.2)$$

Foi escolhida uma FDA de primeira ordem para todos os casos, com tempo de assentamento igual a 60 % do tempo de assentamento da planta. Essas informações são resumidas na Tabela 5.

#### 4.1.2. Plantas com zeros positivos (Caso B)

Aqui foi verificado se o controlador FOPID oferece vantagens quando usado para controlar plantas com zeros positivos, relacionados ao parâmetro  $\beta$ , a constante de tempo do numerador. Tais plantas apresentam resposta inversa que aumenta com o aumento da magnitude de  $\beta$ . O modelo da planta usado nas simulações é dado a seguir, bem como os valores de  $\beta$  utilizados.

$$G = \frac{(-\beta \cdot s + 1)}{(10 \cdot s + 1)^3} \cdot e^{-1 \cdot s}, \quad \beta = 5; 10; 15; 20. \quad (4.3)$$

Foi escolhida uma FDA de segunda ordem para todos os casos, com tempo de assentamento igual a um terço do tempo de assentamento da planta. Essas informações são resumidas na Tabela 6.

#### 4.1.3. Plantas com elevado tempo morto (Caso C)

Nestas simulações foi verificado como o controlador FOPID altera o comportamento da malha fechada quando a planta apresenta elevado tempo morto ( $\theta$ ). O modelo da planta usado nas simulações é dado a seguir, bem como os valores de  $\theta$  utilizados.

$$G = \frac{1}{(10 \cdot s + 1)^3} \cdot e^{-\theta \cdot s}, \quad \theta = 3; 6; 9; 12. \quad (4.4)$$

Nestes casos, o tempo de assentamento efetivo da planta foi considerado como sendo a diferença entre o tempo de assentamento e tempo morto de cada caso. Foi escolhida uma FDA de segunda ordem para todos os casos, com tempo de assentamento igual a 40 % do tempo de assentamento da planta para os dois primeiros casos, e 50 % para os dois últimos. Essas informações são resumidas na Tabela 7.

#### 4.1.4. Plantas de elevada ordem (Caso D)

Neste último caso foi verificado se o controlador FOPID traz benefícios em relação ao PID quando a planta a ser controlada é de ordem elevada. O modelo da planta usado nas simulações é dado a seguir, bem como as ordens ( $n$ ) utilizadas.

$$G = \frac{1}{(10 \cdot s + 1)^n} \cdot e^{-1 \cdot s}, \quad n = 3; 4; 5; 6. \quad (4.5)$$

Foi escolhida uma FDA de ordem inferior em uma unidade à ordem da planta para todos os casos, com tempo de assentamento igual a 40 % e 50 %, respectivamente, do tempo de assentamento da planta para os dois primeiros casos, e 60 % para os dois últimos. Essas informações são resumidas na Tabela 8.

**Tabela 2: Plantas e FDA usadas no caso A.**

Caso	Modelo		FDA	
	$\zeta$	$t_A$ (min)	$m$	$t_A$ (min)
A1	1	49,44	1	28,46
A2	0,7	31,00	1	17,40
A3	0,4	78,08	1	45,65
A4	0,1	291,55	1	173,73

**Tabela 3: Plantas e FDA usadas no caso B.**

Caso	Modelo		FDA	
	$\beta$	$t_A$ (min)	$m$	$t_A$ (min)
B1	5	67,89	2	22,30
B2	10	70,19	2	23,06
B3	15	71,64	2	23,55
B4	20	72,64	2	23,88

**Tabela 4: Plantas e FDA usadas no caso C.**

Caso	Modelo		FDA	
	$\theta$	$t_A$ (min)	$m$	$t_A$ (min)
C1	3	65,96	2	25,18
C2	6	68,96	2	25,18
C3	9	71,96	2	31,48
C4	12	74,96	2	31,48

**Tabela 5: Plantas e FDA usadas no caso D.**

Caso	Modelo		FDA	
	$n$	$t_A$ (min)	$m$	$t_A$ (min)
D1	3	63,96	2	25,18
D2	4	78,54	3	38,77
D3	5	92,54	4	54,92
D4	6	106,13	5	63,08

## 4.2. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir são apresentados os resultados das simulações dos estudos de caso propostos. A Tabela 6 contém os valores dos parâmetros dos controladores FOPID e PID para cada caso, além do valor final da função objetivo ( $FO$ ).

**Tabela 6: Parâmetros dos controladores ajustados para cada caso.**

Caso	FOPID $Kc$	PID	FOPID $Ti (min^\lambda)$	PID $Ti (min)$	FOPID $Td (min^\mu)$	PID $Td (min)$	FOPID $\mu$	FOPID $\lambda$	FOPID $FO$	PID
A1	4,57	4,56	52,70	52,60	7,27	7,25	1,001	1,000	1,97	1,99
A2	6,58	7,04	51,89	55,17	6,24	5,99	1,020	1,000	5,24	6,23
A3	1,96	1,89	33,86	32,63	13,43	13,30	1,000	1,000	2,76	3,15
A4	0,21	0,24	12,61	14,19	54,62	53,25	1,008	1,000	5,81	4,73
B1	1,81	1,75	39,93	38,11	12,06	8,77	1,100	1,001	20,85	42,94
B2	1,05	1,03	34,14	33,03	12,77	9,36	1,100	1,000	18,16	36,82
B3	0,74	0,72	31,49	30,14	13,03	9,69	1,098	1,000	15,84	33,30
B4	0,57	0,56	29,96	29,44	13,13	9,68	1,096	1,000	14,11	29,96
C1	3,16	3,00	49,16	45,77	11,72	8,25	1,105	1,001	35,30	66,90
C2	2,55	2,39	48,06	43,93	15,10	9,57	1,148	1,002	98,53	186,69
C3	1,71	1,61	42,40	39,18	17,08	10,39	1,148	1,001	92,87	156,90
C4	1,52	1,44	42,19	39,84	19,60	11,52	1,166	1,000	172,92	292,18
D1	3,73	3,58	50,17	47,30	9,98	7,46	1,084	1,001	17,71	33,00
D2	2,28	2,24	56,03	54,51	14,09	11,40	1,060	1,001	36,96	54,14
D3	1,56	1,50	56,36	53,14	22,08	15,06	1,102	1,001	32,36	84,83
D4	1,54	1,43	66,17	61,46	33,98	18,44	1,160	1,000	224,71	472,09

Analisando a Tabela 6, nota-se que, exceto pelo caso A4, em todos os demais casos, o valor da função objetivo foi menor com o uso do controlador FOPID, o que sugere que a derivada fracionária oferece maior flexibilidade para atender a especificação do desempenho desejado em malha fechada.

Além disso, também para todos os casos, o parâmetro  $\lambda$  convergiu para um, o que sugere que a ordem fracionária na ação integral não oferece vantagens em relação à ordem inteira. Conclusões similares também são apresentadas em PADULA e VISIOLI (2011) e LANUSSE et al. (2014). Contudo, cabe salientar que isso pode ser decorrente da especificação da FDA, pois em todos os casos foram utilizadas funções de transferência de ordem inteira, o que pode ser responsável por esse resultado.

Quanto aos demais parâmetros, no caso A, a ordem da ação derivativa,  $\mu$ , foi bastante próxima da unidade, enquanto os valores de ganho e constantes de tempo



dos controladores FOPID e PID foram bastante próximos. Já nos outros três casos, o parâmetro  $\mu$  variou entre valores aproximadamente 10 % e 15 % superiores à unidade, enquanto o parâmetro  $T_d$  foi aproximadamente de 20 % a 80 % superior no caso fracionário. Os valores dos demais parâmetros também foram superiores no controlador FOPID, mas com aumentos inferiores a 10 %.

Para uma comparação mais compreensiva entre os dois controladores, é necessário analisar o desempenho e a robustez de cada malha de controle simulada, informações contidas na Tabela 7, que contempla os índices citados na Seção 4.1.

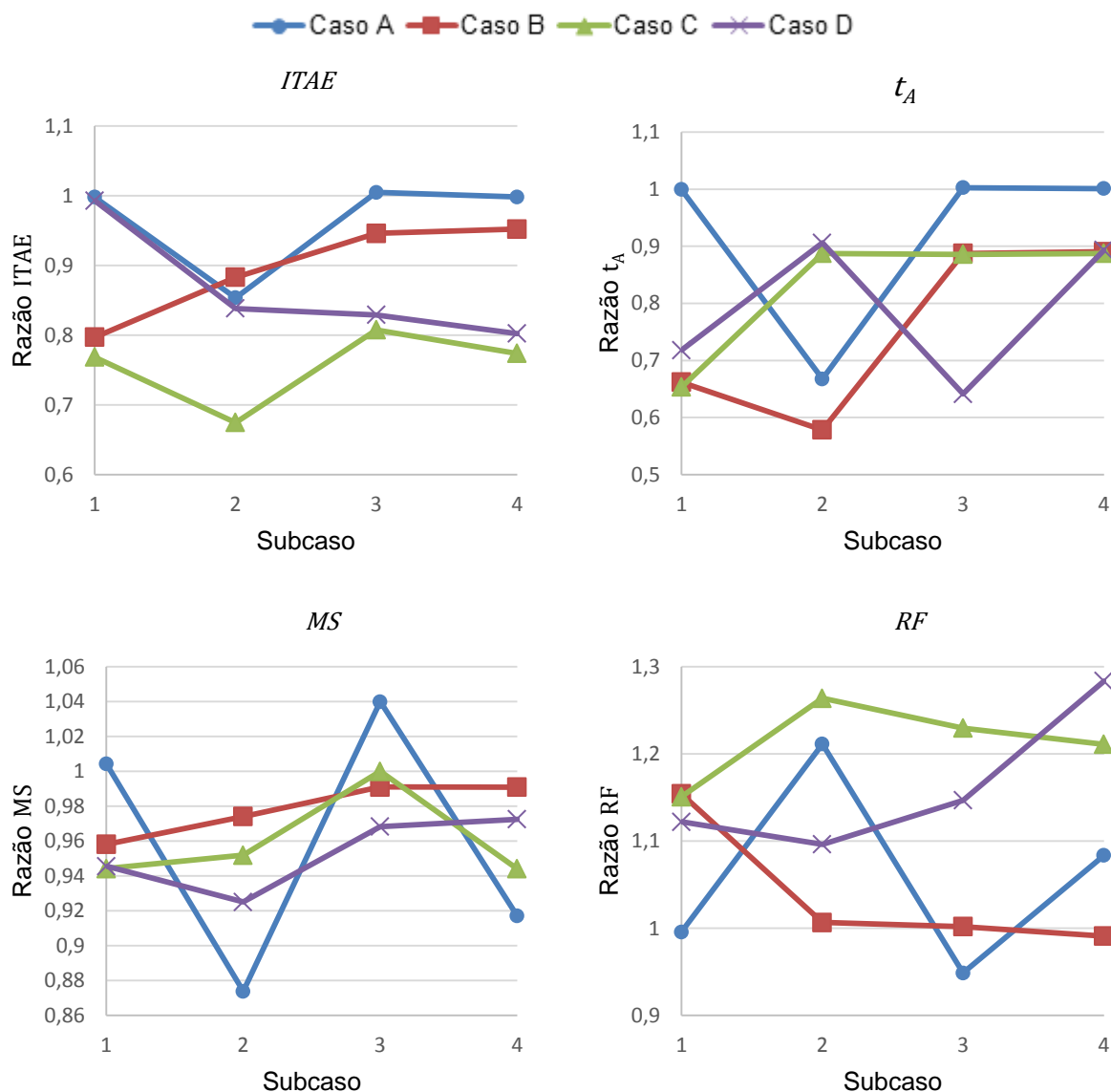
**Tabela 7: Critérios de desempenho e robustez das malhas de controle dos de cada caso.**

Caso	FOPID	PID	FOPID	PID	FOPID	PID	FOPID	PID	FOPID	PID
	<i>ITAE</i>		$t_A$ (min)		<i>MS</i>		<i>MG</i>		<i>RF</i>	
A1	107,34	107,55	30,52	30,54	2,27	2,26	1,91	1,92	48,60	48,81
A2	53,93	63,17	18,71	28,03	3,74	4,28	1,42	1,35	24,35	20,10
A3	255,92	254,69	47,02	46,90	2,34	2,25	2,02	2,12	38,18	40,24
A4	3333,18	3338,99	174,98	174,79	1,88	2,05	3,73	3,37	36,36	33,55
B1	362,41	454,65	42,98	64,94	2,29	2,39	1,85	1,84	66,18	57,34
B2	581,44	658,41	42,56	73,59	2,26	2,32	1,79	1,78	71,76	71,28
B3	923,30	975,97	70,49	79,44	2,22	2,24	1,81	1,81	68,05	67,92
B4	1328,87	1395,70	85,66	96,21	2,19	2,21	1,84	1,82	65,56	66,15
C1	247,36	321,86	35,38	54,14	2,20	2,33	2,10	2,10	47,12	40,94
C2	564,25	836,24	79,39	89,46	3,17	3,33	1,51	1,52	44,39	35,12
C3	709,53	878,60	95,43	107,73	2,66	2,66	1,64	1,68	73,40	59,69
C4	1180,01	1524,64	108,97	122,78	2,87	3,04	1,51	1,50	75,09	62,00
D1	166,88	168,04	22,90	31,90	1,74	1,84	3,78	3,77	53,12	47,34
D2	525,02	626,29	72,23	79,72	2,10	2,27	2,29	2,19	52,89	48,24
D3	1085,03	1308,48	70,29	109,61	2,14	2,21	2,07	2,01	77,89	67,92
D4	2568,24	3200,37	166,67	186,58	2,83	2,91	1,60	1,60	79,67	62,06

No caso A, percebe-se que tanto os índices de desempenho quanto de os de robustez foram bastante próximos com os dois controladores, o que era esperado, considerando a similaridade entre os valores dos parâmetros de cada par de controladores.

Nos demais casos, as diferenças entre os critérios mostrados na Tabela 7 foram mais acentuadas. Para melhor ilustrar estas diferenças, as razões entre os critérios calculados para os controladores FOPID e PID em cada caso foram plotadas como função dos subcasos na Figura 5. Isso não foi feito para margem de

ganho, uma vez que esta foi bastante semelhante com o uso dos dois controladores em todos os casos, variando em não mais que 5,2 %.



**Figura 5: Razão entre os critérios calculados para os controladores FOPID e para os controladores PID em função do subcaso.**

Analisando a Figura 5, nota-se que o controlador FOPID causou redução no critério ITAE e no tempo de assentamento no subcaso A2 e casos B, C e D. As maiores reduções no critério ITAE ocorreram nos casos C e D e no subcaso B1. Quanto ao tempo de assentamento, houve reduções consideráveis nos subcasos B1, B2 e C1, que se tornaram menos acentuadas nos subcasos seguintes. Também houve redução no caso D, mas sem um padrão bem definido. É interessante notar que, para ambos os critérios, o caso A apresentou redução apenas no subcaso A2, possivelmente devido a ter sido escolhida uma FDA mais facilmente atingível.

Em relação aos critérios de robustez, o controlador FOPID praticamente não alterou a margem de ganho, como já comentado. A máxima sensibilidade foi reduzida, embora de forma pouco significativa, com um fator de redução inferior a 0,9 apenas no subcaso A2, reforçando a possibilidade da FDA correspondente ter sido mais branda. O critério de robustez com maior melhora devido ao FOPID foi a reserva de fase, que teve aumentos significativos nos casos C e D e nos subcasos A2 (possivelmente pela mesma razão considerada nos demais critérios) e B1, chegando a um aumento de quase 30% no subcaso D4.

Nota-se que, no caso B, correspondente a plantas com zeros positivos, a melhoria dos critérios ITAE e RF foi superior no primeiro subcaso, enquanto no segundo, houve a maior redução de  $t_A$ . Estes subcasos correspondem aos zeros mais distantes da origem, que por levarem a respostas inversas menos acentuadas, tem respostas similares a de plantas com tempo morto. Esta é possivelmente a razão da similaridade dos critérios ITAE e RF nos subcasos B1 e C1.

Nos subcasos subsequentes, os casos C e D obtiveram as maiores reduções de ITAE e maiores aumentos de RF com uso de controladores FOPID, sugerindo que plantas com elevado tempo morto e de elevada ordem são as maiores beneficiadas por estes controladores.

A fim de melhor visualizar o aumento de desempenho nestes casos, as suas respostas a perturbações degrau unitário na variável de referência são mostradas nas Figuras 6, 7, 8 e 9 para o caso C e nas Figuras 10, 11, 12 e 13 para o caso D. As respostas da variável manipulada também são mostradas.

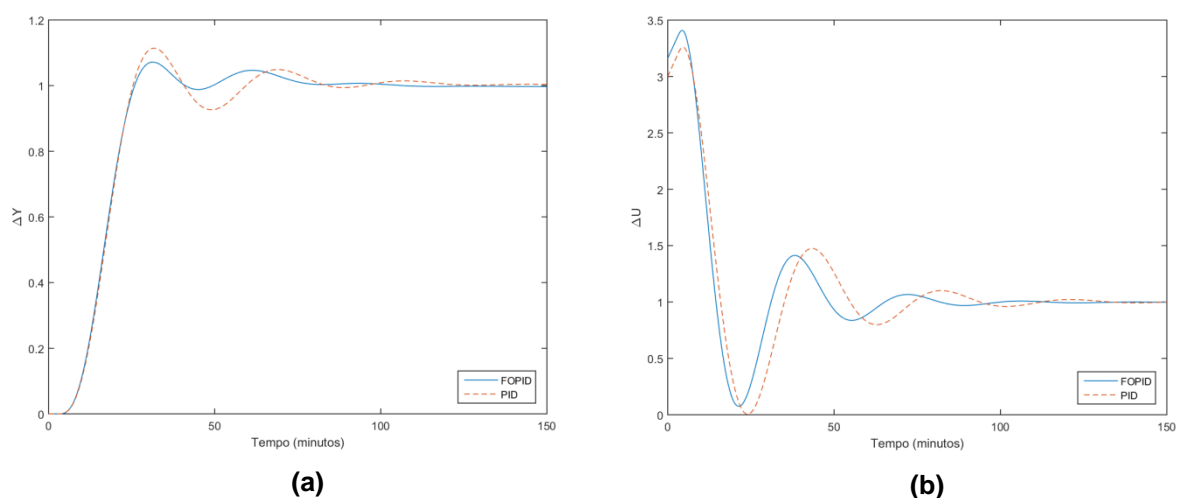


Figura 6: Resposta degrau da malha C para  $\theta = 3$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.

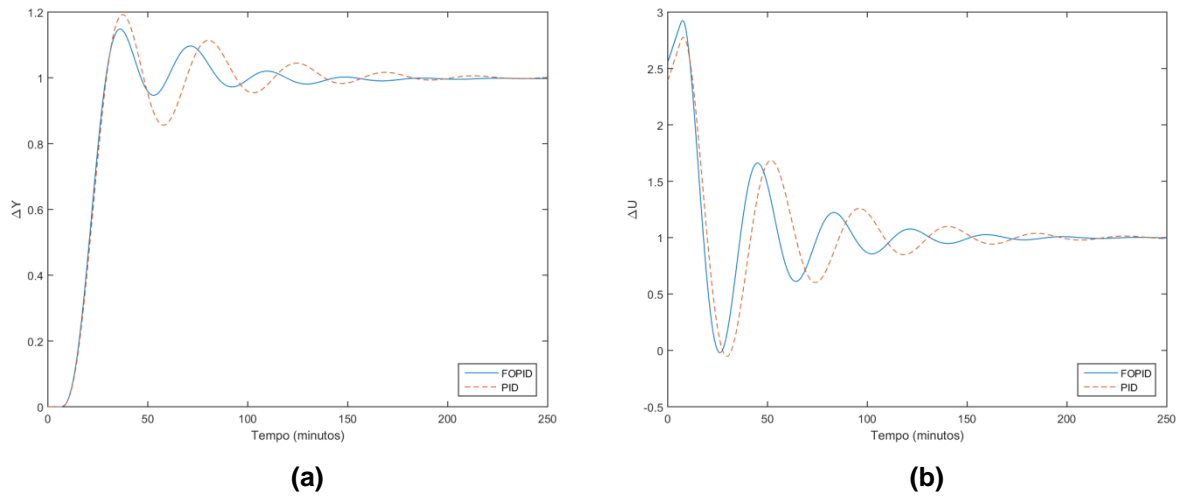


Figura 7: Resposta degrau da malha C para  $\theta = 6$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.

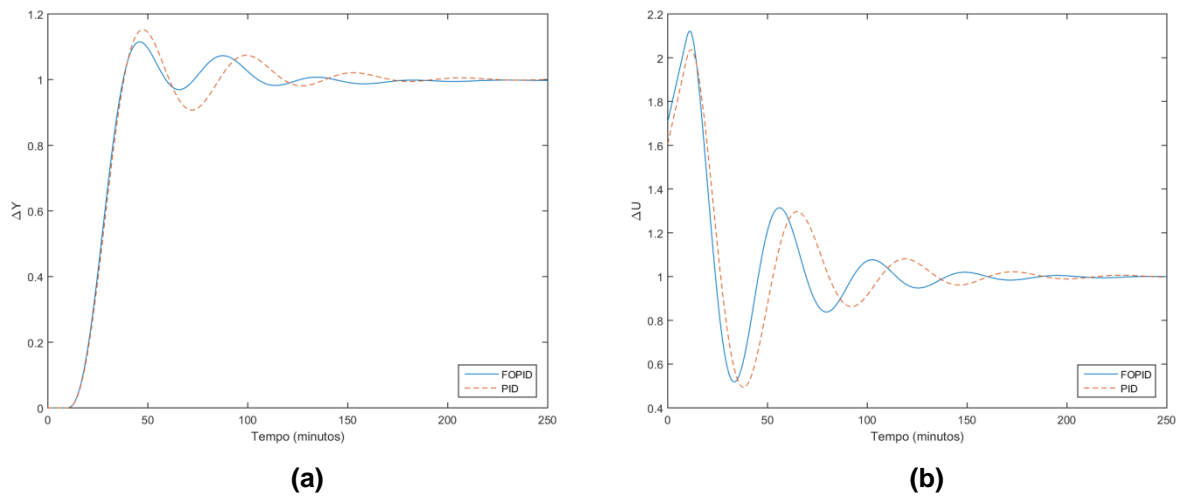


Figura 8: Resposta degrau da malha C para  $\theta = 9$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.

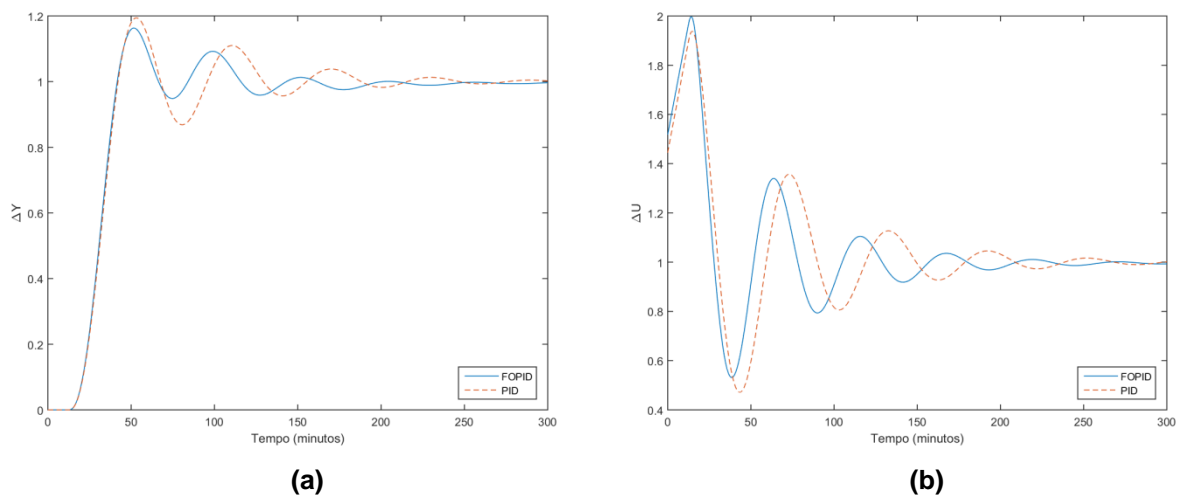
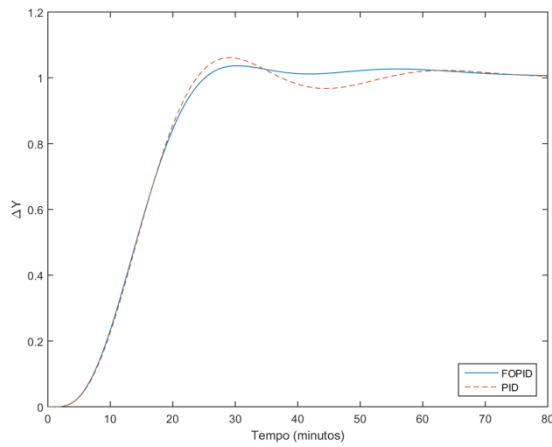
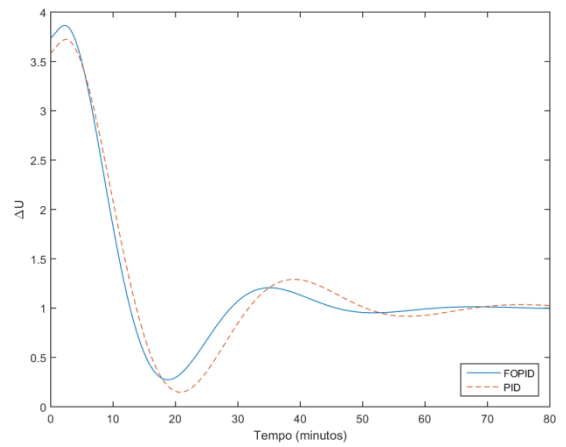


Figura 9: Resposta degrau da malha C para  $\theta = 12$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.

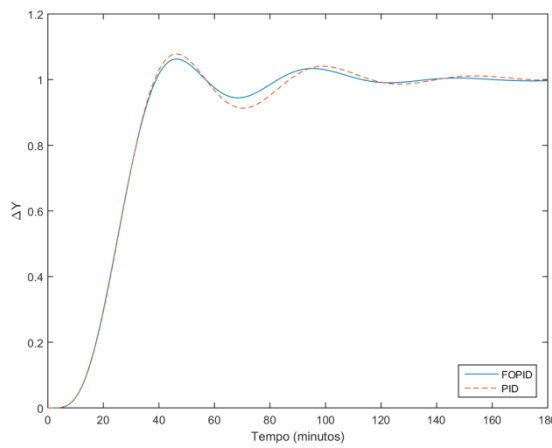


(a)

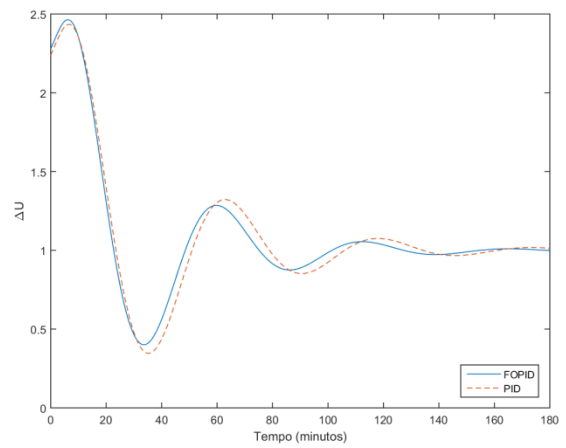


(b)

Figura 10: Resposta degrau da malha D para  $n = 3$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.

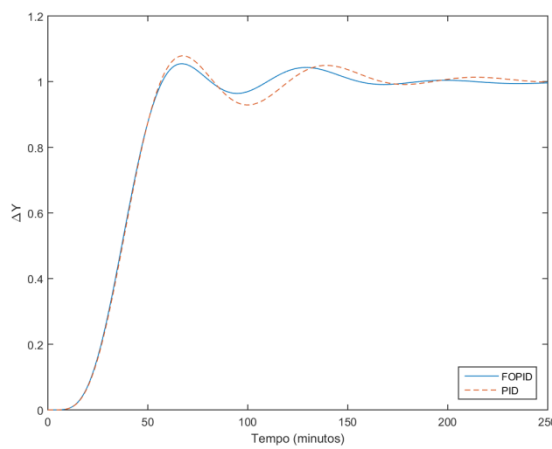


(a)

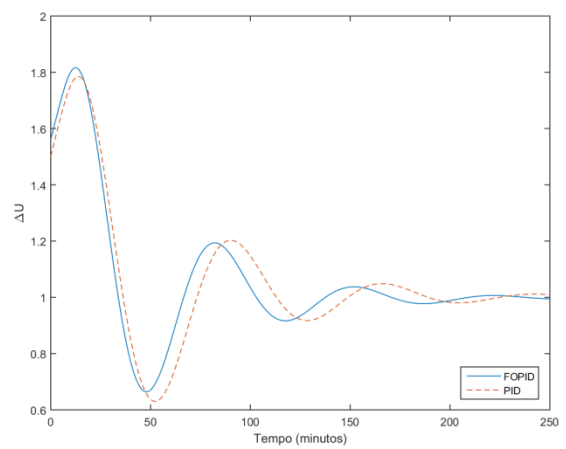


(b)

Figura 11: Resposta degrau da malha D para  $n = 4$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.

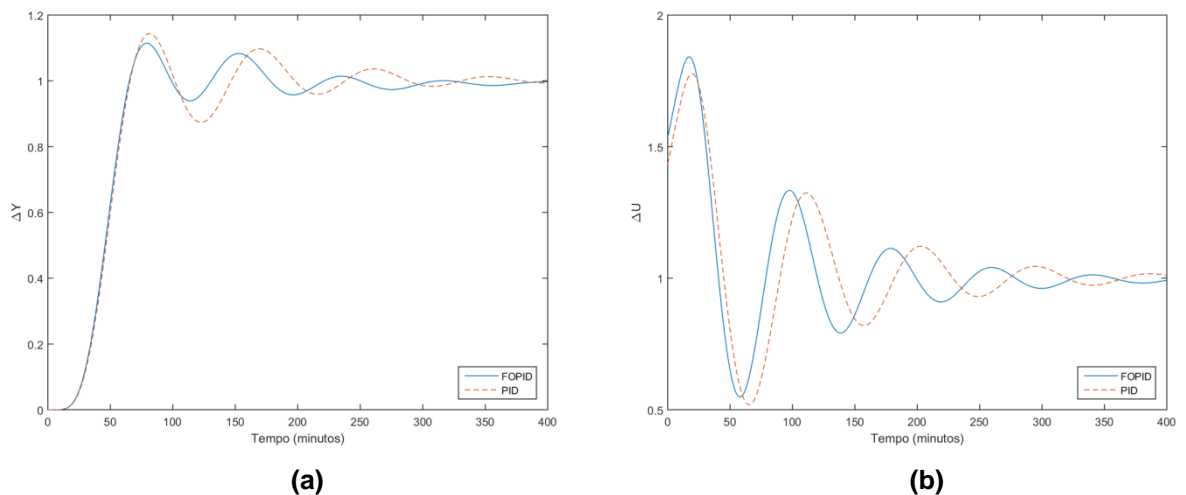


(a)



(b)

Figura 12: Resposta degrau da malha D para  $n = 5$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.



**Figura 13: Resposta degrau da malha D para  $n = 6$ . (a) variável controlada, (b) ação de controle.**

Analisando as respostas das variáveis controladas nas figuras de 6 a 13, percebe-se não há diferença entre os tempos de subida com os dois controladores, mas que com o uso do controlador FOPID há uma melhora na estabilização da resposta, reduzindo a oscilação após a curva de subida inicial. Além disso, o pico inicial da variável manipulada é maior no caso fracionário, com a mesma também assentando mais rápido do que no caso do controlador PID. Tal fato pode ser em decorrência do maior grau de liberdade do controlador FOPID, permitindo antecipar variações na ação de controle.

Dessa forma, conclui-se que, no caso de sistemas com elevado tempo morto e de elevada ordem, o uso de controladores de ordem fracionária permite melhorar o desempenho de sistemas com uma pequena redução do uso da ação de controle.

Para os mesmos casos, a melhora na robustez do sistema trazida pelo controlador FOPID pode ser vista no aumento da reserva de fase, que chegou a ser de quase 30 %. Isto indica que o controlador FOPID tem maior capacidade de tolerar aumento no tempo morto da planta sem instabilizar a malha de controle.

Assim, o controlador FOPID se mostrou superior ao controlador PID quando o sistema possui zeros positivos distantes da origem, elevado tempo morto ou é de elevada ordem. Aqui se sugere que isto está relacionado ao fato de controladores de ordem fracionária poderem ser interpretados como controladores de elevada ordem (Equação 2.9), o que lhes confere mais graus de liberdade em relação ao controlador PID convencional.

## 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões deste trabalho, bem como sugestões de temas relacionados para futuros trabalhos.

### 5.1. CONCLUSÕES

Em face da dificuldade de realizar uma comparação justa entre os controladores FOPID e PID, neste trabalho foi proposto um novo método de ajuste para controladores fracionários. O método foi originalmente desenvolvido para ajustar controladores de ordem inteira, mas devido a sua generalidade, foi possível adaptá-lo para ajustar controladores de ordem fracionária. Por ser possível aplicar o método aos dois tipos de controladores utilizando as mesmas especificações, ele se mostrou apropriado para realizar a comparação entre ambos. Como o método proposto é formulado como um problema de otimização, havia a preocupação da não-convexidade do problema impor dificuldade no ajuste dos controladores. Contudo, testes de varredura da função objetivo mostraram que a não-convexidade do problema, da maneira como foi formulado, é baixa, de forma que o método proposto se mostrou apropriado para o ajuste dos controladores FOPID.

Tendo desenvolvido um método de ajuste apropriado, foram feitas simulações comparando o desempenho e a robustez de diversos sistemas em malha fechada com os controladores FOPID e PID. A primeira constatação destes testes foi que, em todos os casos, a ordem da ação integral,  $\lambda$ , convergiu para a unidade, ou seja, para a ordem inteira. Isso sugere que o integrador de ordem fracionária não agrega vantagens ao sistema de controle nos casos avaliados. Contudo, este resultado deve ser relativizado, tendo em mente que as funções em malha fechada utilizadas para especificar o desempenho desejável eram de ordem inteira, o que pode ter levado ao resultado apresentado. Esse é um ponto que precisará ser avaliado em estudos futuros.

Além disso, na maioria dos casos, houve pouca diferença entre os parâmetros dos dois controladores. Os casos nos quais houve maior diferença foram os casos B, C e D, correspondentes a plantas com zeros positivos, plantas de com elevados tempos mortos e plantas de elevada ordem, respectivamente. Esta diferença foi

mais acentuada nos parâmetros  $T_d$ , que foi mais elevado com uso do controlador FOPID, e  $\mu$ , que foi cerca de 10 % superior à unidade nestes casos.

Também foi nestes casos que houve aumento considerável no desempenho e na robustez dos sistemas. Contudo, para plantas com zeros positivos, apenas quando estes estão distantes da origem este aumento é similar ao dos outros dois casos, uma vez que suas respostas inversas são menos acentuadas, tornando a resposta da planta mais similar à resposta de uma planta com tempo morto, que é o caso mais beneficiado pelo controlador FOPID, juntamente com as plantas de elevada ordem.

A melhora de desempenho nestes casos é evidenciada pelo critério ITAE, que foi aproximadamente entre 20 % e 30 % menor, e pelo tempo de assentamento que foi aproximadamente entre 10 % e 30 % menor. Esta melhora pode ser vista nas Figuras de 6 a 13, mostram respostas menos oscilatórias com o controlador fracionário. Também houve redução da variável manipulada, que teve pico inicial mais intenso, mas assentando mais rápido. Isto pode ser devido ao maior grau de liberdade do controlador FOPID, permitindo antecipar variações na ação de controle.

Quanto à robustez, seu aumento foi verificado em relação a variações na dinâmica do sistema, dado que houve aumentos de reserva de fase de 10 % a quase 30 % nos casos C e D.

Assim, conclui-se que os casos onde os controladores FOPID trazem mais vantagens em relação aos controladores PID são os sistemas que apresentam tempos mortos e/ou ordens elevadas. Acredita-se que isso se deve a derivada fracionária poder ser interpretada como um operador de elevada ordem, visto que controladores de elevada ordem possuem mais graus de liberdade e estão associados a sistemas de controle mais robustos.

## 5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A escolha da função desempenho alcançável é de fundamental importância no método de ajuste apresentado. Assim, como neste trabalho foram consideradas apenas funções desempenho alcançável de ordem inteira, cabe ser feito um estudo sobre a influência de FDAs de ordem fracionária nos resultados apresentados com o método proposto.



Usando a versão original do método de ajuste descrito no Capítulo 3, FACCIN (2004) mostrou que é possível aumentar o desempenho e a robustez do sistema de controle inserindo um filtro *lead-lag* de elevada ordem no bloco  $C_{PV}$  da malha de controle apresentada na Figura 2. Como aqui foi sugerido que as vantagens do controlador FOPID estão associadas à interpretação da derivada fracionária como um operador de elevada ordem, acredita-se que, através da inserção de um filtro *lead-lag* de ordem fracionária, seria possível aumentar a robustez do sistema.

Na mesma dissertação, FACCIN (2004) também propôs uma abordagem multi-modelos no projeto de controladores FOPID. A ideia dessa abordagem é projetar um controlador PID utilizando a mesma função desempenho alcançável para um conjunto de modelos que representem a planta em diferentes pontos de operação, aumentando, assim, a robustez do sistema de controle. Isso é feito minimizando a diferença do desvio entre a resposta de cada modelo e da FDA, através de uma formulação multi-objetivo. Aqui é sugerido que essa metodologia poderia ser aplicada no projeto de controladores FOPID, uma vez que estes se mostraram mais robustos que controladores PID em alguns casos, e que possuem maior flexibilidade devido ao maior número de parâmetros.

Outra ideia interessante, uma vez que o controlador FOPID apresentou vantagens em relação ao PID em sistemas com elevado tempo morto, seria explorar o uso de controladores FOPID em conjunto com métodos de compensação de tempo morto, tais como o Preditor de Smith. Sabe-se que esses métodos são pouco robustos frente a variações do tempo morto (SEBORG et al., 2010), de forma que o uso da derivada fracionária poderia ajudar a superar este problema.

Por fim, sugere-se comparar a capacidade de rejeição de distúrbios entre os dois tipos de controladores estudados aqui. De forma similar ao apresentado em (CHEN e SEBORG, 2002), poderia se modificar o problema de otimização proposto para minimizar a diferença entre uma função desempenho alcançável própria para rejeição de distúrbios e a função de transferência de um distúrbio na carga para a variável controlada. Uma vez que as simulações realizadas neste trabalho mostraram que, em alguns casos, o controlador FOPID permite o uso de ganhos maiores do que o controlador PID, acredita-se que o primeiro controlador possa oferecer melhor rejeição a distúrbios.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUILA-CAMACHO, N.; DUARTE-MERMOUD, M. A. *Fractional adaptive control for an automatic voltage regulator*. ISA Transactions, Volume 52, Issue 6, 2013, p. 807–815.
- AGUILA-CAMACHO, N.; LE ROUX, J. D.; DUARTE-MERMPUD, M. A.; ORCHARD, M. E. *Control of a grinding mill circuit using fractional order controllers*. Journal of Process Control, Volume 53, 2017, p. 80–94.
- BAYAT, F.M. *General rules for optimal tuning the  $PI^\lambda D^\mu$  controllers with application to first-order plus time delay processes*, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Volume 90, 2012, p. 1–11.
- BHAMBHANI, V.; CHEN, Y. Q.; XUE, D. *Optimal Fractional Order Proportional Integral Controller for Varying Time-Delay Systems*. IFAC Proceedings Volumes, Volume 41, Issue 2, 2008, p. 4910-4915.
- CERVIN, A.; LINCOLN, B.; EKER, J.; RARZÉN, K. E.; BUTTAZZO, G. *The jitter margin and its application in the design of real-time control systems*. Proceedings of the IEEE International Conference on Real-Time and Embedded Computing Systems and Applications, 2004.
- CHEN, D.; Seborg, D. E. *PI/PID Controller Design Based on Direct Synthesis and Disturbance Rejection*, Industrial & Engineering Chemistry Research, Volume 41, 2002, p. 4807–4822.
- CHEN, Y. Q.; BHASKARAN, T.; XUE, D. *Practical tuning rule development for fractional order proportional and integral controllers*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. Volume 3, Issue 2, 2008, p. 214031–214038.
- CHEN, Y. Q.; MOORE, K. L. *Relay feedback tuning of robust PID controllers with iso-damping property*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, Volume 35, Issue 1, 2005, p. 23–31.
- CHENG Y. C.; HWANG C. *Stabilization of unstable first-order time-delay systems using fractional-order PD controllers*. Journal of the Chinese Institute of Engineers, Volume 29, Issue 2, 2006, p. 241–249.
- CORRIPIO, A. B. *Tuning of Industrial Control Systems*. 2<sup>nd</sup> ed. Research Triangle Park: ISA, 2001.
- DAS, S.; SAHA, S.; DAS, S.; GUPTA, A. *On the selection of tuning methodology of FOPID controllers for the control of higher order processes*. ISA Transactions, Volume 50, Issue 3, 2011, p. 376–388.
- D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. *Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares*. Tradução de FILHO, B. S. S. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.
- ENGELL, S. *Optimale lineare Regelung*. Springer-Verlag, Berlim, 1988.

- ENGELL, S.; MÜLLER, R. *Multivariable Controller Design by Frequency Response Approximation*. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> European Control Conference, Volume 3, 1993, p. 1715-1720.
- FACCIN, F.; TRIERWEILER, J. O. *Performance Limitations of Some Industrial PID Controllers*. 14<sup>th</sup> ESCAPE Symposium. Lisboa, 2004.
- FACCIN, F. *Abordagem Inovadora no Projeto de Controladores PID*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2004.
- FELIU-BATLLE, V.; RIVAS-PEREZ, R.; CASTILLO-GARCIA, F. *Fractional order controller robust to time delay variations for water distribution in an irrigation main canal pool*. Computers and Electronics in Agriculture, Volume 69, Issue 2, 2009, p. 185–197.
- GEMBICKI, F. W., *Vector Optimization for Control with Performance and Parameter Sensitivity Indices*. Tese de PhD, Case Western Reserve University, Cleveland, 1974.
- GUDE J. J.; KAHORAHO, E. *Simple tuning rules for fractional PI controllers*. IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, 2009, p. 4910–4915.
- LANUSSE, P.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. *Extension of PID to fractional orders controllers: a frequency-domain tutorial presentation*. IFAC Proceedings Volumes, Volume 47, Issue 3, 2014, p. 7436-7442.
- LAZAREVIC, M. P.; BATALOV, S. A.; LATINOVIC, T. S. *Fractional PID Controller Tuned by Genetic Algorithms for a Three DOF's Robot System Driven by DC motors*, IFAC Proceedings Volumes, Volume 46, Issue 1, 2013, p. 385-390.
- LI, D.; LIU, L.; JIN, Q.; HIRASAWA, K. *Maximum sensitivity based fractional IMC–PID controller design for non-integer order system with time delay*, Journal of Process Control, Volume 31, 2015, p. 17-29.
- MAÂMAR, B.; RACHID, M, *IMC-PID-fractional-order-filter controllers design for integer order systems*, ISA Transactions, Volume 53, Issue 5, 2014, p. 1620-1628.
- MATHWORKS (2015). *Optimization Toolbox: User's Guide (R2015a)*. Disponível em <<https://www.mathworks.com/help/doc-archives.html>>. Acessado em 11 de Junho de 2018.
- MONJE, C.A.; VINAGRE, B.M.; FELIU-BATLLE, V.; CHEN, Y. Q. *Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications*, Control Engineering Practice, Volume 16, Issue 7, 2008, p. 798–812.
- MÜLLER, R. *Entwurf von Mehrgrößenreglern durch Frequenzgang-Approximation*. Tese de Doutorado (em Alemão), Lehrstuhl für Anlagensteuerungstechnik, University of Dortmund. Shaker Verlag, 1996.

OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.

OUSTALOUP, A.; LEVRON, F.; MATHIEU, B.; NANOT, F. M. *Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis*. IEEE Transactions on Circuit and Systems - I: Fundamental Theory and Application, Volume 47, Issue 1, 2000, p. 25–39.

PADULA F.; VISIOLI, A. *Tuning rules for optimal PID and fractional order PID controllers*. Journal of Process Control, Volume 21, Issue 1, 2011, p. 69–81.

PAN I.; DAS S.; GUPTA A. *Handling packet dropouts and random delays for unstable delayed processes in NCS by optimal tuning of controllers with evolutionary algorithms*. ISA Transactions, Volume 50, Issue 4, 2011, p. 557–572.

PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.

PODLUBNY, I. *Fractional-order systems and  $PI^\lambda D^\mu$ -controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 44, Issue 1, 1999, p. 208–214.

RANGANAYAKULU, R.; BABU, G. U. B.; RAO, A. S.; PATLE, D. S. *A comparative study of fractional order  $PI^\lambda/PI^\lambda D^\mu$  tuning rules for stable first order plus time delay processes*. Resource-Efficient Technologies, Volume 2, Supplement 1, 2016, p. S136–S152.

RIVERA, D. E.; MORARI, M.; SKOGESTAD, S. *Internal Model Control, 4. PID Controller Design*. Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development, Volume 25, Issue 1, 1986, p. 252–265.

SHAH, P.; AGASHE, S. *Design and optimization of fractional PID controller for higher order control system*. International conference of IEEE ICART, 2013, p. 588–592.

SEBORG, D. E.; EDGAR, T. F.; MELLICHAMP, D. A.; DOYLE, F. J. *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York, 2010.

SKOGESTAD, S; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 1996.

TEPLJAKOV, A. *Fractional-order Modeling and Control of Dynamic Systems*, Springer International, Switzerland, 2017.

TRIERWEILER, J. O. *A Systematic Approach to Control Structure Design*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Química, Universidade de Dortmund. Dortmund, 1997.

TRIERWEILER, J. O.; MÜLLER, R; ENGELL, S. *Multivariable Low Order Structured-Controller Design by Frequency Response Approximation*. Brazilian Journal of Chemical Engineering, Volume 17, Issue 4, 2000, p. 793-807.

VALÉRIO, D. *Fractional robust system control*. Tese de PhD, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2005.

VALÉRIO, D.; DA COSTA, J. S. *Tuning of fractional PID controllers with Ziegler–Nichols-type rules*. *Signal Processing* Volume 86, Issue 10, 2006, p. 2771–2784.

ZAMANI, M.; KARIMI-GHARTEMANI, M.; SADATI, N.; PARNIANI, M. *Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization*. *Control Engineering Practice*, Volume 17, Issue 12, 2009, p. 1380-1387.

ZHANG, Y.; LI, J. *Fractional-order PID controller tuning based on genetic algorithm*. 2011 International Conference on Business Management and Electronic Information, Guangzhou, 2011, p. 764-767.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. *Optimum Settings for Automatic Controllers*. *ASME Transactions*, Volume 64, 1942, p. 759-768.

## APÊNDICE A

Neste apêndice são apresentadas aproximações de  $s^r$  pelo filtro recursivo de Oustaloup de terceira, quarta e quinta ordem, tipicamente utilizadas em implementações, para melhor visualização das aproximações de ordem inteira. Estas aproximações são mostradas na Tabela 8.

**Tabela 8: Aproximações de terceira, quarta e quinta ordem de  $s^r$ .**

$$K_{fo} \cdot \frac{\left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{1-r}{3}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{3-r}{3}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{5-r}{3}\right)}\right)}{\left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{1+r}{3}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{3+r}{3}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{5+r}{3}\right)}\right)}$$

$$K_{fo} \cdot \frac{\left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{1-r}{4}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{3-r}{4}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{5-r}{4}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{7-r}{4}\right)}\right)}{\left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{1+r}{4}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{3+r}{4}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{5+r}{4}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{7+r}{4}\right)}\right)}$$

$$K_{fo} \cdot \frac{\left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{1-r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{3-r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{5-r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{7-r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{9-r}{5}\right)}\right)}{\left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{1+r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{3+r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{5+r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{7+r}{5}\right)}\right) \cdot \left(s + \omega_b \cdot \omega_u^{\left(\frac{9+r}{5}\right)}\right)}$$

Na tabela acima,  $K_{fo}$  e  $\omega_u$  são dados pelas Equações 2.9.3 e 2.9.4, respectivamente.

## APÊNDICE B

Neste apêndice são dados mais detalhes sobre as funções de transferência cujos coeficientes foram otimizados para o critério ITAE, que foram usadas como funções desempenho alcançável. Também são apresentadas as restrições impostas por fatores de fase não-mínima e a fatoração usada nestes casos.

Conforme descrito na seção 3.2.4, a forma dessas funções é dada pela Equação 3.14.

$$T_0 = \frac{b_0}{s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + b_{m-2} \cdot s^{m-2} + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0} \quad (3.14)$$

Os denominadores da Equação 3.14 para diversas ordens são mostrados na Tabela 9.

**Tabela 9: Funções de transferência com coeficientes ótimos baseados no critério ITAE em resposta a uma entrada do tipo degrau unitário.**

$s + \omega_n$
$s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2$
$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
$s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4$
$s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5$
$s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,6\omega_n^2 s^4 + 8,6\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6$
$s^7 + 4,475\omega_n s^6 + 10,42\omega_n^2 s^5 + 15,08\omega_n^3 s^4 + 15,54\omega_n^4 s^3 + 10,64\omega_n^5 s^2 + 4,58\omega_n^6 s + \omega_n^7$
$s^8 + 5,2\omega_n s^7 + 12,8\omega_n^2 s^6 + 21,6\omega_n^3 s^5 + 25,75\omega_n^4 s^4 + 22,2\omega_n^5 s^3 + 13,3\omega_n^6 s^2 + 5,15\omega_n^7 s + \omega_n^8$

Fonte: D'AZZO e HOUPIS (1978).

O parâmetro  $\omega_n$  pode ser obtido especificando a ordem ( $m$ ) e tempo de assentamento ( $t_A$ ) desejados para FDA através da Equação B.1.

$$\omega_n = \frac{t_{A,n}}{t_A} \quad (B.1)$$

onde  $t_{A,n}$  é o tempo de assentamento normalizado, que pode ser obtido na Tabela 10, para uma dada ordem. Para estas funções, considera-se o tempo de assentamento relativo a uma faixa de 5 % acima ou abaixo da resposta final.

**Tabela 10: Tempo de assentamento normalizado para cada ordem das funções utilizadas como padrões da FDA.**

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_{A,n} = \omega_n \cdot t_A$	2,9960	2,9004	3,5877	4,2788	5,1738	5,6092	9,4092	9,9624

Fonte: FACCIN (2004).

As funções acima descritas são compatíveis com modelos de fase mínima, mas quando a planta for representada por modelos que contenham fatores de fase não-mínima, os mesmos devem ser considerados na escolha da função desempenho desejável, uma vez que eles impõem restrições no desempenho alcançável. Quando o modelo contiver tempo morto, a função desempenho alcançável deve conter o mesmo tempo morto. Quando o modelo contiver zeros ( $z$ ) e polos ( $p$ ) positivos, a função de transferência deve ser fatorada para garantir a estabilidade interna (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 1996), e devem ser respeitadas as restrições dadas pelas Equações B.2 e B.3.

$$T(z) = 0, \quad S(z) = 1 \quad (\text{B.2})$$

$$T(p) = 1, \quad S(p) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Nas equações anteriores,  $S(s) = 1 - T(s)$  é função de sensibilidade em malha fechada.

Neste trabalho foi usada a mesma forma fatorada da função desempenho alcançável ( $T_0^*$ ) usada por FACCIN (2004) e proposta em (TRIERWEILER, 1997). Para sistemas com  $nz$  zeros positivos a forma fatorada é dada pelas Equações B.4 e B.5. No caso de sistemas com  $np$  polos positivos, ela é obtida pelas Equações B.6 e B.7. Nas equações abaixo,  $\bar{z}_i$  e  $\bar{p}_i$  são os complexos conjugados dos zeros ( $z_i$ ) e polos ( $p_i$ ) positivos, respectivamente.

$$B_z(s) = (-1)^{nz} \cdot \prod_{i=1}^{nz} \frac{s - z_i}{s + \bar{z}_i} \quad (\text{B.4})$$

$$T_0^*(s) = B_z(s) \cdot T_0(s) \quad (\text{B.5})$$

$$B_p(s) = (-1)^{np} \cdot \prod_{i=1}^{np} \frac{s - p_i}{s + \bar{p}_i} \quad (\text{B.6})$$

$$T_0^*(s) = 1 + (1 - T_0(s)) \cdot B_p(s) \quad (\text{B.7})$$