

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE EQUIPAMENTO PARA MEDIÇÃO DE DIÂMETROS ATRAVÉS DO  
MÉTODO DOS TRÊS PONTOS

por

Guilherme Luiz Pelizzoli Caetano

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Junho de 2015



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

DESENVOLVIMENTO DE EQUIPAMENTO PARA MEDIÇÃO DE DIÂMETROS ATRAVÉS DO  
MÉTODO DOS TRÊS PONTOS

por

Guilherme Luiz Pelizzoli Caetano

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo Carrara  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Orientador: Prof. Dr. Heraldo José de Amorim

Comissão de Avaliação:

Prof. Arnaldo Ruben Gonzalez

Prof. Mario Roland Sobczyk Sobrinho

Prof. Rodrigo Rossi

Porto Alegre, 08 de Junho de 2015

## AGRADECIMENTOS

Aos funcionários do Laboratório de Usinagem, em especial a Guilherme Vargas Schirmer;

Ao Prof. Dr. Heraldo José de Amorim, pela competência como orientador deste trabalho.

CAETANO, G. L. P. **DESENVOLVIMENTO DE EQUIPAMENTO PARA MEDIÇÃO DE DIÂMETROS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS TRÊS PONTOS** . 2015. 26 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **RESUMO**

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de um equipamento para medição de diâmetros para uso em componentes de grandes dimensões. O princípio de funcionamento adotado se baseia no teorema matemático segundo o qual três pontos definem uma circunferência única. A partir das coordenadas de dois apalpadores fixos na estrutura e de um apalpador móvel, cuja posição é medida com um transdutor indutivo, um circuito eletrônico calcula o raio do mensurando. Devido à falta de linearidade do comportamento da função que relaciona o raio do mensurando com a coordenada móvel, é desenvolvido um mecanismo baseado no elipsógrafo que funciona como uma interface entre o transdutor e o apalpador. Desta forma, se obtém uma função de transferência com comportamento mais linear, reduzindo as incertezas de medição e aumentando a resolução do aparelho. Os resultados mostram que este mecanismo é de fato capaz de aprimorar o funcionamento do instrumento de medição. Porém, o protótipo possui precisão inferior aos produtos similares disponíveis no mercado, o que pode ser explicado pela sua faixa de medição maior e pelo custo reduzido com que o protótipo foi construído.

**PALAVRAS-CHAVE:** Metrologia, Instrumentos de Medição, LVDT, Incertezas.

CAETANO, G. L. P. **DEVELOPMENT OF DIAMETER GAUGE BASED ON THE THREE-POINT METHOD**. 2015. 26 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **ABSTRACT**

This work concerns a diameter gauge designed for measuring large components. The device's design is based on the mathematical theorem that states that three points uniquely define a circle. Given the fixed coordinates of two contact points in the frame, and the variable coordinate of a moving contact connected to an inductive transducer, the circuit can calculate the cylinder's diameter. Due to the non-linear behavior of the function that relates the measuring radius to the moving coordinate, a mechanism based on the ellipsograph is inserted as an interface between the transducer and the contact point. This way, a new transfer function, with a more linear behavior, is obtained, thus reducing the uncertainties and improving the device's resolution. Although the results show that this mechanism can, in fact, enhance the characteristics of the gauge, the prototype has less precision than the similar gauges available in the market, which is understandable due to its broader measuring range and the usage of some low cost materials.

**KEYWORDS:** Metrology, Measuring Devices, LVDT, uncertainty.

## ÍNDICE

	Pág.
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2 OBJETIVOS .....</b>	<b>1</b>
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>2</b>
<b>4 METODOLOGIA .....</b>	<b>3</b>
4.1 Projeto Conceitual.....	3
4.2 Avaliação dos Conceitos .....	7
4.3 Construção e calibração do protótipo.....	9
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>6 Conclusões .....</b>	<b>14</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>14</b>
<b>Apêndice A .....</b>	<b>16</b>
<b>Apêndice B .....</b>	<b>17</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A evolução das tecnologias de fabricação e controle inevitavelmente gera uma demanda por aparelhos de medição de melhor qualidade, tanto em termos de precisão e exatidão quanto de praticidade de uso, pois a metrologia é de extrema importância para qualquer processo de produção na engenharia mecânica. Através dos dados obtidos de medições, e com o auxílio dos conceitos de probabilidade e estatística, pode-se realizar o controle das tolerâncias de forma que o nível de qualidade dos produtos e serviços possam ser mantidos dentro dos padrões desejados. Atualmente, o mercado de aparelhos de medição favorece a substituição de dispositivos analógicos por digitais, visto que esse tipo de equipamento possui em geral maior precisão e exatidão, permitindo a detecção de menores variações no mensurando, além de evitar erros de leitura, como o de paralaxe, e tornar o processo de medição mais rápido. Há também uma maior facilidade de se automatizar processos de controle de qualidade com o uso de aparelhos de medição digitais, visto que desta forma os resultados podem ser enviados a um computador de forma mais prática.

O presente trabalho trata especificamente da medição de diâmetros, processo de extrema importância para a indústria metal-mecânica. Em todos os processos de fabricação, como fundição, usinagem e conformação, há a geração de geometrias circulares. Porém, há algumas dificuldades intrínsecas à medição de diâmetros de cilindros e que devem ser consideradas no projeto de um aparelho desenvolvido com esse objetivo. Uma das possíveis dificuldades é a de manter o aparelho de medição paralelo à seção transversal do mensurando. Por exemplo, com um paquímetro, uma variação no ângulo entre o aparelho e a seção do cilindro gera um acréscimo ao valor medido, consistindo num erro chamado erro de arco-cosseno. Outra problema encontrado na medição deste tipo de geometria é a possível falta de acesso a dois lados opostos da circunferência. Se uma peça possui um canto arredondado, por exemplo, não há uma forma prática de se medir este raio. É possível solucionar estes dois problemas utilizando-se medidores de diâmetros por três pontos. Este tipo de aparelho já pode ser encontrado no mercado atualmente, mas não é muito difundido devido a algumas limitações práticas.

As maiores limitações dos medidores por três pontos disponíveis no mercado são suas faixas de medição (que geralmente são muito pequenas, e apenas úteis para diâmetros muito grandes), o tamanho dos aparelhos, e seu custo. A razão por estes instrumentos possuírem tantas limitações significativas é que o deslocamento do apalpador não varia linearmente com a variação do raio a ser medido. De fato, a curva que relaciona estas duas grandezas possui uma inclinação que varia de menos infinito até 0, então só é possível se trabalhar em um intervalo muito restrito dessa curva.

A motivação deste trabalho é a necessidade de se projetar e fabricar um aparelho capaz de medir o diâmetro de cilindros e esferas tendo acesso a apenas uma porção de suas superfícies, evitando erros de paralelismo e reduzindo o problema de falta de linearidade entre a variação do raio em função do deslocamento do transdutor.

## 2. OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo o projeto de um instrumento de medição de diâmetros de cilindros e esferas que tenha como princípio de funcionamento o método dos três pontos, de forma que se obtenha um aparelho mais versátil do que os disponíveis atualmente no mercado (ou seja, com uma faixa de medição maior e mais portáteis) sem comprometer outros parâmetros, como custo e precisão. Porém, para se obter uma melhora geral sem afetar significativamente o custo somente é possível modificando-se o princípio de funcionamento do dispositivo. A aplicação do instrumento de medição se destina principalmente à indústria metal-mecânica, onde a versatilidade dos instrumentos é importante devido às grandes dimensões dos

produtos e à existência de peças com seções de circunferência incompletas, especialmente no processo de calandragem.

Também tem-se como objetivo a construção e calibração de um protótipo, cujos resultados devem ser comparados com os produtos disponíveis no mercado. As especificações para o projeto do aparelho de medição devem abranger uma faixa de medição de raios de 300 mm a 2000 mm, com uma incerteza máxima de 1,5 mm.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A primeira patente a registrar um dispositivo de medição de cilindros ou esferas a partir de três pontos surge em 1987, nos estados unidos (patente US 595865 A), e descreve um aparelho capaz de medir a dioptria (poder de refração) de lentes esféricas. A dioptria equivale matematicamente ao inverso do foco da lente. Este aparelho consiste basicamente de um relógio comparador com escala modificada e com duas hastes fixas nas laterais. A escala do aparelho não é linear, visto que uma variação de posição no apalpador é relacionado com a dioptria de forma não-linear. Contudo, este tipo de dispositivo só começou a ter uma aplicação mais difundida na indústria com o surgimento dos microchips, capazes de converter automaticamente as medidas para uma escala linear ou mostrar diretamente o resultado num monitor.

Segundo Holman, 1996, um aparelho de medição pode ser dividido em três partes conceituais: transdutor, responsável por transformar um dado de entrada, no caso a grandeza a ser medida, em um dado de saída, na mesma ou em outra grandeza; o estágio intermediário, que modifica o dado de saída do transdutor; e o estágio final, que consiste basicamente no último sinal gerado pelo aparelho, e que pode ser lido pelo operador ou utilizado por ele para ser posteriormente processado. A integração entre estas etapas é facilitada pelo uso de transdutores elétricos e sinais digitais, e esta é a justificativa de se integrar a mecânica com a eletrônica no projeto aqui descrito.

Segundo Guedes, 2011, as principais características de um instrumento de medição são a faixa de medição ou capacidade, a resolução, a sensibilidade, a exatidão e a precisão. O projeto de um aparelho de medição deve levar em consideração principalmente estas características. No presente trabalho, há uma variação da sensibilidade do dispositivo ao longo da faixa de medição, o que é explorado mais profundamente no capítulo sobre metodologia.

De acordo com Zhang, 1989, os erros do tipo Abbe surgem quando o eixo de deslocamento do transdutor ou da escala não são alinhados com o(s) ponto(s) sobre os quais a medição é realizada. Por exemplo, um paquímetro gera erros de Abbe, pois os pontos de contato do bico não estão alinhados com o eixo em que ele se desloca. Um micrômetro, contudo, obedece ao princípio de Abbe, pois os pontos de contato com o mensurando estão alinhados com o eixo de movimento da escala. Um medidor por três pontos, a princípio, pode obedecer ao princípio de Abbe, pois a haste móvel, que fica entre as duas hastes fixas, está alinhada com a escala ou o transdutor.

Atualmente existem diversos instrumentos capazes de medir diâmetros a partir de três pontos numa superfície. A maior parte deles funciona com *encoders*, que são transdutores digitais capazes de medir deslocamentos angulares ou lineares. A figura 3.1 apresenta um exemplo de medidor disponível no mercado. De acordo com a National Instruments ([www.ni.com](http://www.ni.com)), os transdutores do tipo encoder possuem uma ótima exatidão de medida, porém têm um custo muito elevado. Os sensores do tipo LVDT podem chegar à mesma resolução de forma mais barata, porém com uma faixa de medição menor. Os aparelhos de medição por três pontos mais baratos disponíveis no mercado, em vez de utilizar encoders, utilizam potenciômetros, que possuem exatidão e precisão significativamente menores.



Figura 3.1 – medidor de diâmetros por três pontos da marca RiFtec (fonte: <http://www.ascorail.eu>).

## 4. METODOLOGIA

### 4.1 Projeto Conceitual

Há diversas formas de se realizar a medição do diâmetro de um cilindro a partir de três pontos. É necessário selecionar o tipo de transdutor (rotativo ou linear) e a tecnologia utilizada (resistivo, indutivo, capacitivo, óptico, etc.). Também é possível escolher algum mecanismo capaz de amplificar o movimento do apalpador, como por exemplo um fuso ou um conjunto de engrenagens, consequentemente melhorando a precisão do equipamento. A quantidade de combinações possíveis entre todas as alternativas supracitadas é muito grande, portanto, cada uma é analisada individualmente.

A escolha do tipo de transdutor (linear ou rotativo) é realizada através da avaliação matemática de como o raio a ser medido varia em função do movimento do transdutor. A primeira opção é o uso de três hastes paralelas, sendo que duas são fixas e uma está conectada a um transdutor de posição linear que mede apenas a coordenada que está sendo deslocada pelo apalpador (figura 4.1a). A partir do valor desta coordenada, e sabendo-se as coordenadas dos demais pontos, que são fixas, o aparelho pode calcular o raio equivalente, gerando uma curva de comportamento assintótico nos dois eixos, como mostra a figura 4.1b. A segunda possibilidade é um aparelho em que, em vez de uma haste ser deslocada linearmente, o deslocamento angular de um dos três pontos, medido por um transdutor angular, é utilizado para calcular o diâmetro equivalente (figura 4.2a), gerando a curva representada na figura 4.2b. As duas formas de medição podem ser encontradas no mercado (sendo o método do deslocamento linear mais comum), o que indica que ambas são viáveis. Comparando-se as curvas geradas pelos dois métodos (num intervalo de medição de aproximadamente 150 mm a 2000 mm), pode-se concluir que o instrumento que mede deslocamento linear gera um sinal de saída mais adequado do que o instrumento por deslocamento angular, pois apresenta uma inclinação mais suave.

A tecnologia do transdutor a ser utilizada no projeto leva em conta três fatores principais, que são custo, faixa de operação e precisão. Um estudo realizado pela SpaceAge Control, Inc. (<http://spaceagecontrol.com>), mostra que, dentre as tecnologias de custo médio (de U\$ 50,00 a U\$ 500,00, valores apresentados em 2014), as que apresentam maior precisão são as do tipo indutivo (LVDTs), como pode ser visto na figura 4.3. Para projetos de baixo custo (sensores de até U\$ 50,00), a única opção viável seria o uso de transdutores potenciométricos. Para que se tenha competitividade com os dispositivos disponíveis atualmente no mercado, opta-se pelo uso do LVDT neste projeto.

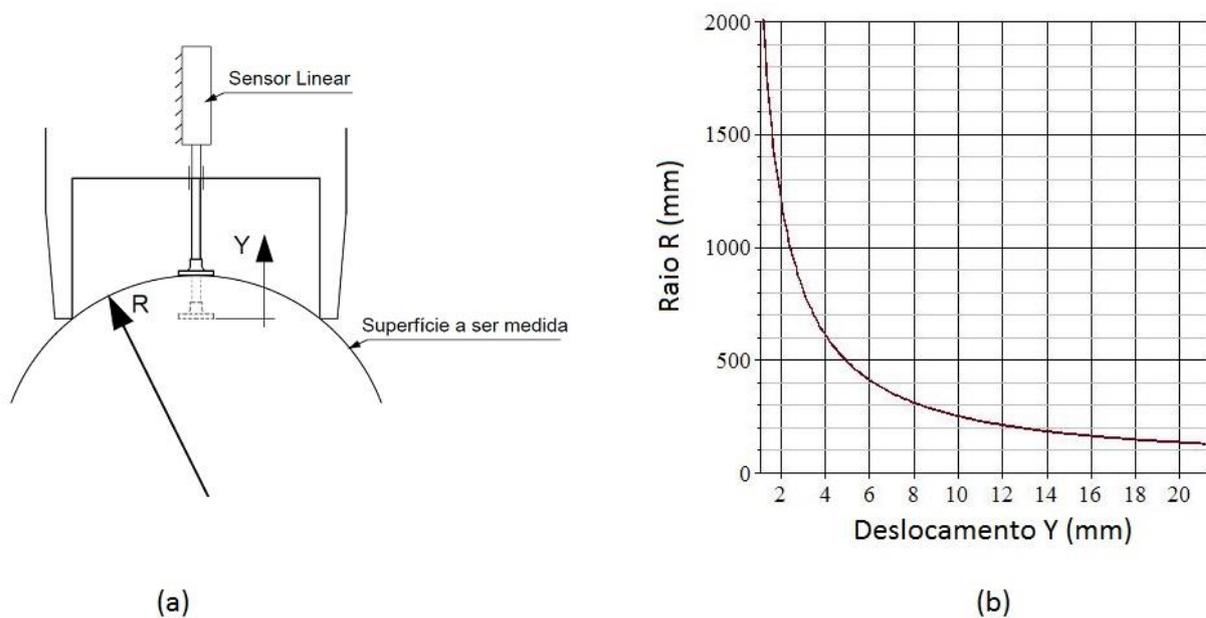


Figura 4.1: Representação esquemática de um medidor por deslocamento linear (a), e o gráfico do raio em função da posição  $Y$  da haste (b). Observe-se que o gráfico está deslocado no eixo das abscissas para começar em  $R = 2000$  mm, evitando a medição de um raio infinito.

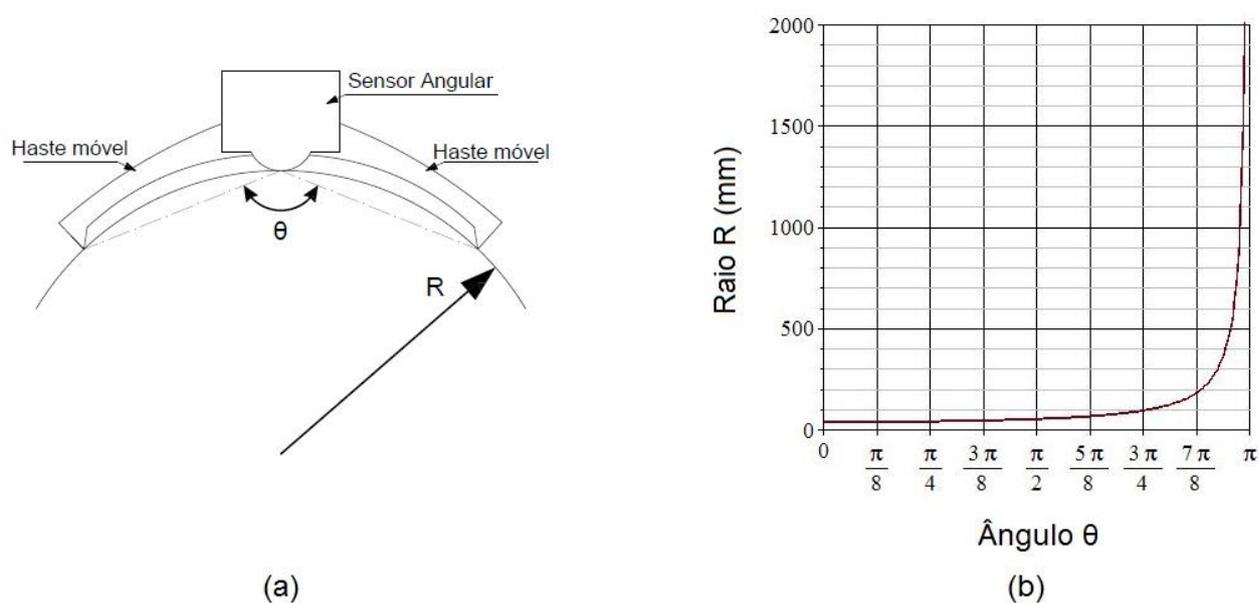


Figura 4.2: Representação esquemática de um medidor por deslocamento angular (a), e o gráfico do raio em função da posição  $\theta$  da haste (b).

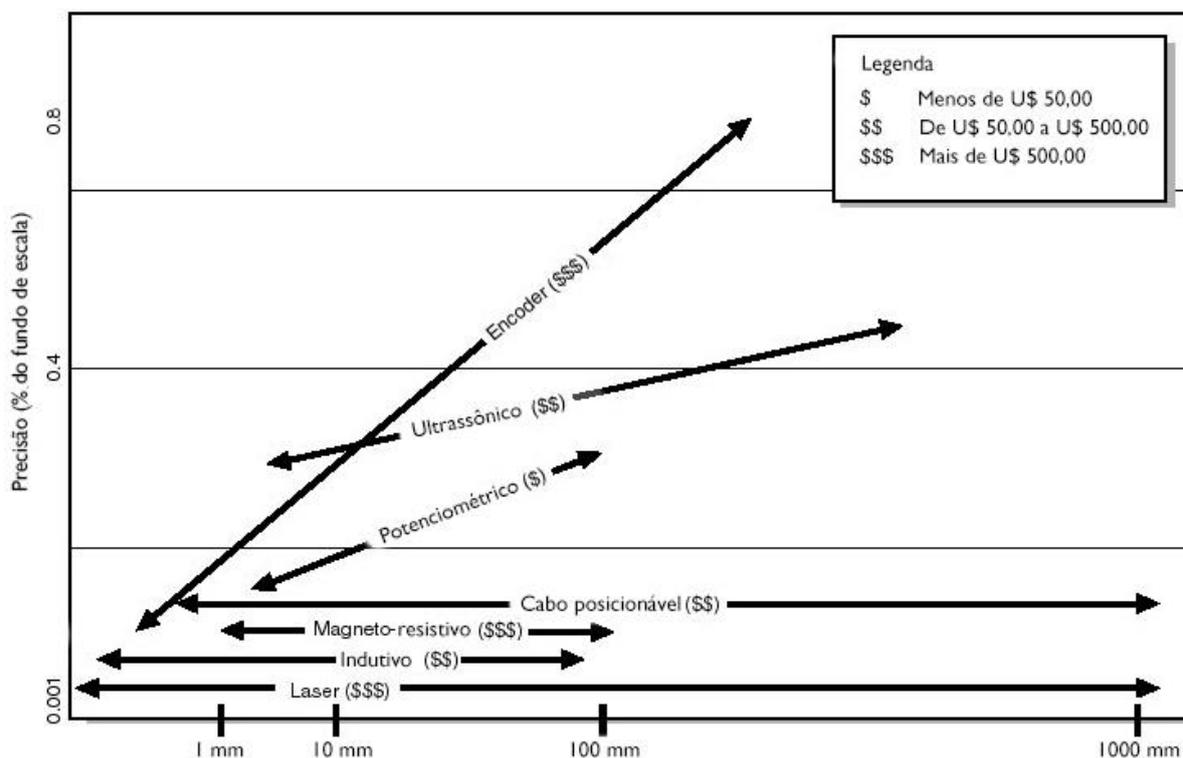


Figura 4.3 – Custos dos sensores de deslocamento mais comuns, num gráfico da faixa de medição (eixo das absissas) em função da exatidão (ordenadas) (Fonte: SpaceAge Control, Inc., acessado em 29/05/2015, adaptado para português).

Os sensores indutivos geralmente operam de forma simples, sendo alimentados por uma tensão alternada constante, e gerando como saída uma tensão contínua que varia linearmente com a posição do núcleo. De acordo com Holman, 1996, este tipo de transdutor apresenta um comportamento não linear em torno da posição zero (metade da faixa de operação), o que na maioria dos casos faz com que a saída pule de aproximadamente +0,0025 V para -0,0025 V. O manual do transdutor utilizado neste projeto sugere que se utilize um conversor analógico-digital com no mínimo 12 bits. Como seu curso é de 25,4 mm, com 12 bits sua resolução seria igual a 0,0062 mm. Porém, esta não equivale à resolução do instrumento de medição por três pontos, pois ela depende de quanto o diâmetro varia em função da posição do sensor. A resolução final, em milímetros, depende da inclinação da curva característica, como mostra a equação 4.1:

$$Resolução = \frac{\frac{dR}{dx} L}{2^{bits}} \quad (4.1)$$

onde  $dR/dx$  é a inclinação máxima da curva característica,  $L$  é o curso do LVDT em milímetros e  $bits$  é o número de bits do conversor analógico-digital. A inclinação máxima em módulo na curva da figura 4.1 é de 202 mm/mm, valor obtido derivando-se a equação de  $R$  em função de  $Y$ , resultando na resolução mínima de 1,25 mm. Ou seja, teoricamente, o aparelho é capaz de detectar uma variação de raio de 1,25 mm no ponto em que a resolução é pior. A incerteza do aparelho também depende da derivada desta função, como é discutido no capítulo 4.2.

Os instrumentos de medição por três pontos disponíveis no mercado ou possuem uma faixa de medição limitada, ou apresentam incerteza de medição elevada, sendo geralmente capazes de medir raios na faixa de 200 mm a 700 mm, com uma incerteza de  $\pm 0,2$  mm, e são equipamentos pouco portáteis, pois quanto maior a distância entre os pontos, maior é a sensibilidade. Estas características negativas existem em função da forma como o raio a ser medido varia em função do deslocamento do ponto efetivamente mensurado pelo sensor, que

não é linear, como se pode ver na figura 4.1. A equação que relaciona o raio com o deslocamento de um dos pontos pode ser deduzida a partir da equação de um círculo. É possível, entretanto, modificar esta equação ao se inserir uma interface entre o transdutor e o apalpador. Essa interface pode ser um mecanismo que, para suavizar a inclinação da curva característica do aparelho, faz com que nos pontos em que o raio tende ao infinito, uma pequena variação do raio resulte em uma grande variação no transdutor. Já nos pontos em que o raio se aproxima de zero, uma grande variação do raio deve gerar uma pequena variação no transdutor.

O mecanismo de compensação deve ser preferencialmente de simples manufatura, com poucas partes móveis e de folgas e atrito reduzidos. De acordo com Holman, 1996, o atrito é o maior responsável pelos erros de histerese (que fazem com que o valor medido dependa da direção em que o movimento da haste é feito para se aproximar da posição final). As folgas também podem causar histerese e aumentar a incerteza de medição. Alguns mecanismos sugeridos no livro *Five Hundred and Seven Mechanical Movements* (Brown, 1896), como o came e seguidor, variações do mecanismo de quatro barras e o elipsógrafo, são capazes de modificar movimentos lineares. O elipsógrafo funciona como um amplificador de movimentos até a metade de seu curso, e depois como um redutor, como mostra a figura 4.4. Este comportamento é adequado para suavizar a curva característica do medidor por três pontos, visto que ele pode amplificar o movimento do sensor no começo da faixa de medição, onde há grande variação do diâmetro em função da posição da haste móvel, e reduzir no final da faixa de medição, onde a variação do diâmetro é pequena comparado à variação da posição da haste.

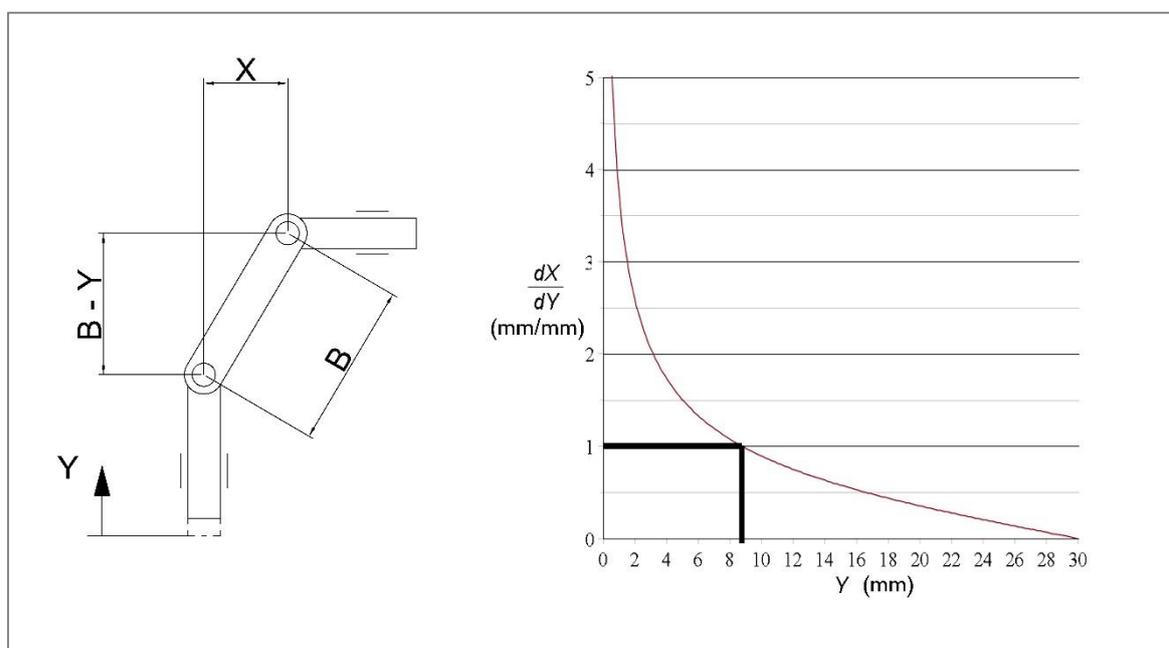


Figura 4.4 – Gráfico que descreve a sensibilidade (derivada) do movimento da barra horizontal em função do movimento da barra vertical, com  $B = 30$  mm.

Como mostra a figura 4.4, o mecanismo amplifica a taxa de variação de  $X$  em função de  $Y$  na faixa de  $Y = 0$  mm a  $Y = 8,8$  mm. A partir deste ponto, a taxa de variação de  $X$  em função de  $Y$  fica menor do que 1. Há uma restrição quanto uso deste mecanismo, pois quando  $X$  é igual a zero, o mecanismo trava os movimentos de  $Y$ . Valores muito próximos de zero também devem ser evitados pois, neste caso, a vantagem mecânica do mecanismo tende a zero. Ou seja, se houver atrito no sistema de guias, a força necessária na direção  $Y$  para deslocar o mecanismo tenderá ao infinito. Na figura 4.5 (a) está representado este mecanismo aplicado no medidor de diâmetros, e em (b), a curva que representa o raio medido em função do deslocamento lido pelo transdutor, cuja equação é discutida no item 4.2.

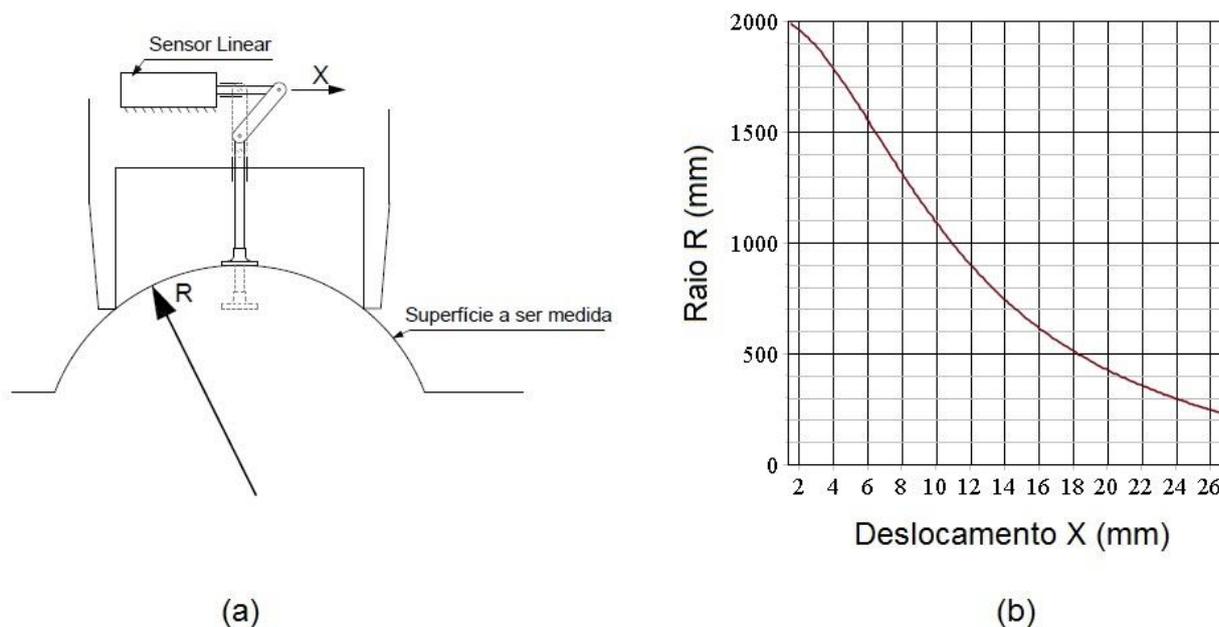


Figura 4.5: Representação esquemática de um medidor por deslocamento linear com um mecanismo compensador (a), e o gráfico do raio em função da posição X da (b). Observe-se que o gráfico está deslocado no eixo das abscissas para começar em  $R = 2000$  mm.

#### 4.2 Avaliação dos conceitos

Comparando-se as figuras 4.1, 4.2 e 4.5, nota-se que a última opção, que representa o transdutor linear auxiliado por um mecanismo, apresenta a curva característica com inclinação mais constante dentre as três opções, o que é vantajoso uma vez que a resolução mínima do aparelho de medição depende da derivada dessa função. A incerteza combinada de uma função que depende de mais de uma variável independente, de acordo com o Guia para a Expressão de Incerteza de Medição (INMETRO, 2008), pode ser calculada a partir equação de Kleine e McClintock (Eq. 4.2):

$$u_c(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \quad (4.2)$$

onde  $f$  é a função cuja incerteza é calculada,  $x_i$  é uma variável de  $f$ ,  $N$  é o número de variáveis independentes e  $u(x_i)$  é a incerteza-padrão (igual a um desvio padrão) associada à variável  $x_i$ . A derivada parcial de  $f$  em relação a  $x_i$  é definida também como coeficiente de sensibilidade. A função cuja incerteza se deseja calcular é o raio medido pelo aparelho, que é dado pela equação 4.3:

$$R := \frac{1}{2} \sqrt{4L^2 + \frac{\left(-2B^2 + 2\sqrt{B^2 - X^2} B + 2B\varepsilon + L^2 - 2\sqrt{B^2 - X^2} \varepsilon + X^2 - \varepsilon^2\right)^2}{\left(\sqrt{B^2 - X^2} - B + \varepsilon\right)^2}} \quad (4.3)$$

onde  $L$  e  $B$  são constantes e  $X$  é a posição do sensor, como indicado na figura 4.6, e  $\varepsilon$  é a folga radial do rolamento linear; todas as variáveis são dadas em milímetros. Esta equação é obtida com o auxílio do software Maple, processo descrito no Apêndice B.

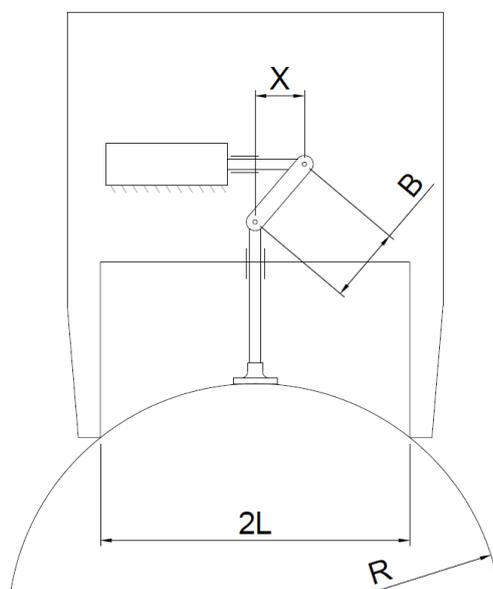


Figura 4.6 – Variáveis relativas à equação do raio da circunferência.

O valor nominal de  $L$  é 260,00 mm, e ele é assumido como sendo um valor constante. Incertezas associadas a  $L$  existem, principalmente levando em conta a expansão térmica da estrutura do aparelho. Neste caso, a incerteza associada à temperatura no instante da medição daria origem a uma incerteza na dimensão  $L$ . Contudo, para este estudo, variações de temperatura e suas incertezas serão desconsideradas para fins de simplificação.

O valor nominal de  $B$  é igual a 30,00 mm, e sua incerteza depende da folga dos rolamentos utilizados em suas rótulas. Os rolamentos radiais, modelo 6900 ZZ, produzidos pela empresa NSK, possuem, de acordo com o catálogo da empresa, uma folga radial  $f_R = 0,012$  mm quando fixados por interferência, como é o caso do instrumento em questão. Por falta de informações a respeito da distribuição de probabilidade de folgas em rolamentos, assume-se que elas seguem uma distribuição de probabilidade retangular, como sugere o Guia para a Expressão de Incerteza de Medição para os casos em que a distribuição é desconhecida. Esta distribuição, que vai de  $-f_R$  a  $+f_R$ , possui um desvio-padrão igual a 0,007 mm. A incerteza de  $B$  então é calculada a partir da equação 4.2, resultando em uma componente de incerteza associada  $u_c(B) = 0,010$  mm. A derivada parcial de  $R$  em função de  $B$  é igual a 14,0 (mm/mm).

A incerteza de  $X$ , ou seja, da posição do LVDT, depende não somente do transdutor, mas do sistema de aquisição do sinal. Esta incerteza é determinada a partir da sua calibração com blocos-padrão. Para isto, o transdutor é posicionado sobre uma mesa rígida. O processo começa com o posicionamento do transdutor na sua posição zero, que fica exatamente na metade do seu curso, gerando uma saída de  $0,0000 \text{ V} \pm 2,5 \text{ mV}$ . Este valor é conferido com um multímetro. O valor lido pelo sistema de aquisição de dados neste ponto é então definido com exatamente o ponto médio da reta. Inserindo-se blocos-padrão classe 0 de aço entre o núcleo do LVDT e a mesa, mede-se a saída em Volts lida pelo sistema de aquisição de dados. Uma vez que a incerteza associada aos blocos-padrão é duas ordens de grandeza inferior à do LVDT, ela é considerada desprezível. O processo de calibração do LVDT é descrito em maiores detalhes no apêndice A. A incerteza obtida no processo de calibração é de 0,031 mm. A derivada parcial de  $R$  em função de  $X$  é igual a -58,1 mm/mm (no ponto em que  $X = 8,3$  mm).

A grandeza  $\varepsilon$  possui um valor médio teórico igual a zero, porém possui uma incerteza diferente de zero, que depende da folga. O rolamento linear utilizado é do tipo SCS 6-UU, da

empresa THK, em conjunto com eixos de aço ABNT 1045 retificados com tolerância H7. Esta combinação, de acordo com o fabricante, possui folgas radiais de 0,025 mm. Assumindo-se uma distribuição retangular, obtém-se uma incerteza de 0,014 mm. A sensibilidade de  $R$  em função de  $\varepsilon$ , aplicada no ponto em que  $X = 8,3$  mm, é igual a 42,0 mm/mm.

Inserindo-se as três incertezas supracitadas e as respectivas derivadas parciais da equação 4.3 na equação 4.2, obtém-se uma incerteza combinada de  $u_c(R) = \sqrt{(-58)^2 0,031^2 + 14^2 0,010^2 + 42^2 0,014^2} = 1,9$  mm. Esta equação evidencia que o fator que mais contribui para a incerteza combinada é a sensibilidade (derivada) de  $R$  em função de  $X$ . Portanto, provavelmente o melhor caminho para minimizar a incerteza seria modificar o sensor – as incertezas relacionadas às folgas não possuem um peso tão grande. Se o mecanismo que suaviza a relação entre estas duas variáveis não fosse utilizado, a incerteza causada pelo mecanismo seria eliminada, mas a incerteza total seria maior; a derivada parcial de  $R$  em função de  $Y$  (no gráfico da figura 4.1) é igual a -202 (no ponto em que  $R = 2000$  mm). A incerteza do aparelho seria, para este ponto, igual a 6,2 mm. Portanto, teoricamente, o mecanismo proposto aprimora a precisão e a exatidão do aparelho, em especial na faixa de operação em que a medição é mais problemática, i.e., para grandes diâmetros, onde a região a ser medida corresponde a uma parcela menor da circunferência.

#### 4.3 Construção e calibração do protótipo

A construção do protótipo foi feita inteiramente nos laboratórios da UFRGS. Toda a estrutura do aparelho de medição é feita a partir de um bloco de alumínio maciço, como ilustra a figura 4.7, usinado na forma desejada por uma fresadora CNC. A justificativa do uso de uma só peça para toda a estrutura se baseia na tentativa da redução de folgas e melhora nas tolerâncias. As hastes móveis são barras retificadas de 6,0 mm com tolerância H7, que são guiadas por mancais de rolamentos lineares do mesmo diâmetro, e unidas entre si por uma haste com dois rolamentos radiais modelo 6900 ZZ (blindados); estas peças, com a lubrificação adequada, devem reduzir significativamente os atritos de partida e as folgas, evitando assim deformações nos componentes e desalinhamento (erro de Abbe). O LVDT é então posicionado na parte superior do protótipo, sendo conectado à haste através de uma barra retangular, como ilustra a figura 4.7; este arranjo é feito para tornar o aparelho mais compacto.

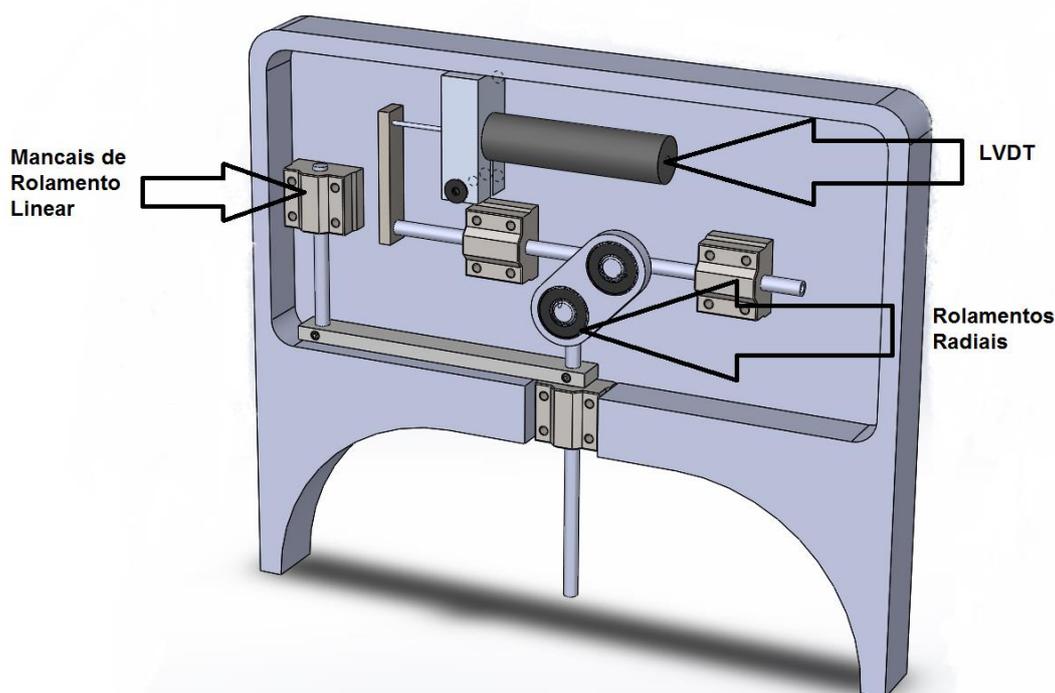


Figura 4.7 – Desenho em CAD da parte mecânica do protótipo.

A parte eletrônica do protótipo é construída com base em um Arduino, plataforma eletrônica de prototipagem com hardware livre, como mostra a figura 4.8. O modelo de arduino utilizado é o Due, capaz de converter sinais analógicos em digitais com resolução de 12 bits. O modelo de LVDT utilizado é o 7DCDT-500, da Hewlett Packard. Este dispositivo é alimentado com uma tensão constante de 6,0 V, e o sinal de saída varia de -3,3 V a 3,3 V linearmente de acordo com a posição do núcleo, que vai de -12,7 mm a 12,7 mm. Um simples circuito, desenvolvido para este projeto, é capaz de deslocar e amplificar a saída do transdutor, de forma que o sinal varie de 0,0 V a 3,3 V, que é a faixa de medição do arduino. O arduino é programado para ler este sinal, calcular o deslocamento do sensor (diretamente proporcional à tensão), aplicá-lo na equação da circunferência em função da posição do sensor com o mecanismo e mostrar o resultado numa tela de LCD. Os resultados também podem ser enviados para um computador pela saída USB nativa do arduino.

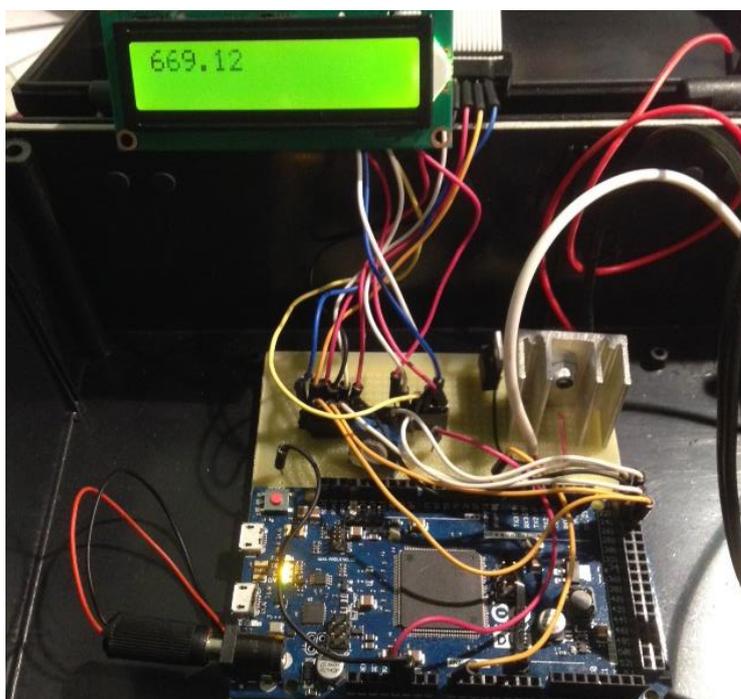


Figura 4.8 – Circuito baseado no Arduino utilizado para processar o sinal do transdutor, calcular o raio equivalente e mostrar o resultado.

Antes de se montar o protótipo, é necessário determinar a função de transferência, ou seja, a equação que relaciona a entrada (em milímetros) com a saída (em Volts) do LVDT. Esta função, que tem a forma  $y(x) = a.x + b$ , precisa ter seus coeficientes calculados, pois eles dependem da resistência interna do circuito de conversão analógico-digital. O processo de obtenção da função de transferência do LVDT envolve coletar 10 amostras em toda a faixa de medição do sensor e, a partir da aproximação por mínimos quadrados, obter uma função (reta) que se aproxime ao máximo do comportamento “real” do sensor acoplado ao circuito.

A calibração, segundo o Vocabulário Internacional de Medidas (INMETRO, 2012), é uma operação que estabelece uma relação entre os valores e as incertezas de medição fornecidos por padrões e as indicações correspondentes com as incertezas associadas, e pode ser expressa de diversas formas, sendo uma delas a curva de calibração. A curva de calibração é uma função que relaciona a indicação do resultado de medição com o valor nominal do mensurando (o qual deve ter uma incerteza de medição no mínimo 10 vezes menor do que a do aparelho a ser calibrado). A calibração do protótipo desenvolvido neste projeto, apresentada na figura 4.9 (a) consiste em coletar grupos de 4 medições em 13 pontos da faixa de operação do

aparelho, totalizando 52 medições. Todas as medições são feitas deslocando-se a haste de cima para baixo, para evitar erros de histerese. Para averiguar a eficácia do uso do mecanismo compensador de sensibilidade, o mesmo processo de calibração também é realizado com um protótipo simplificado, como ilustra a figura 4.9 (b), sem o mecanismo.

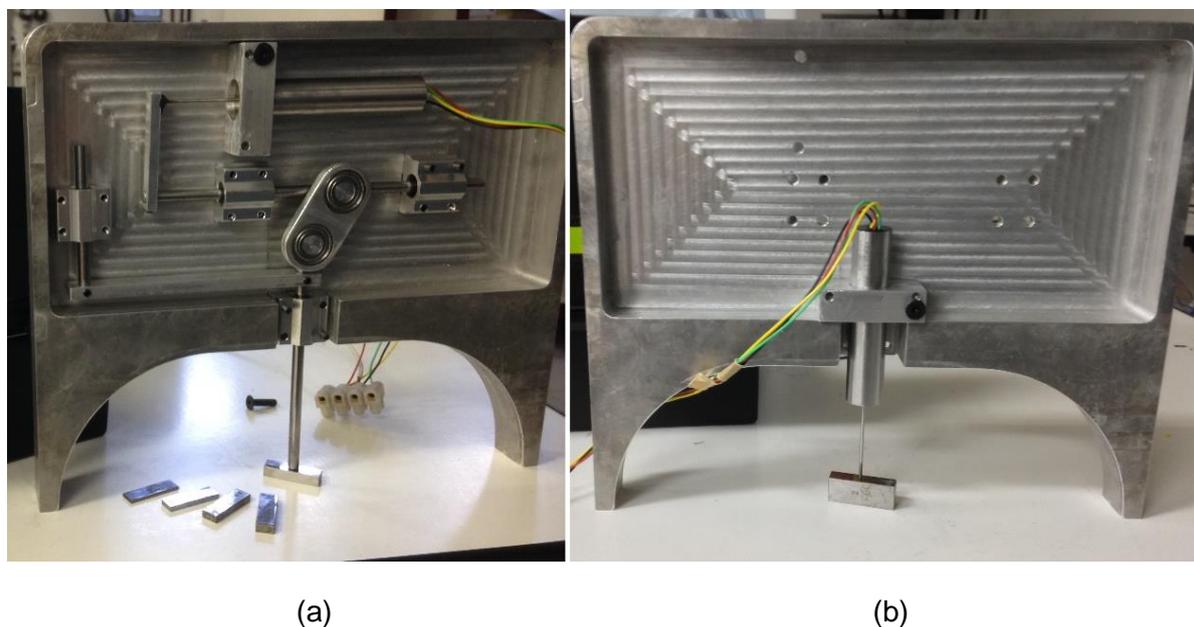


Figura 4.9 – Protótipo com o mecanismo modificador (a) e protótipo simplificado (b).

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos da calibração do protótipo com o mecanismo compensador estão na tabela 5.1. Os dados de entrada são a posição da haste móvel e o raio nominal equivalente a esta posição, que é calculado a partir da altura do bloco padrão. Os dados de saída são os resultados obtidos pela medição em si. O raio médio é obtido a partir de 4 medições na mesma posição de entrada; o desvio padrão em cada posição é calculado a partir desta amostra de 4 medições.

Tabela 5.1 – Resultados das medições com o protótipo com mecanismo compensador.

Dados de entrada		Saída	
Posição (mm)	Raio Equivalente (mm)	Raio Médio (mm)	Desv. Padrão (mm)
2	2026,00	2028,06	1,727
3	1351,50	1353,60	1,449
4	1014,50	1016,02	1,726
5	812,50	813,87	0,952
6	678,00	678,63	1,371
7	582,07	582,46	0,437
8	510,25	510,38	1,233
9	454,50	453,28	1,709
10	410,00	408,65	1,822
11	373,68	371,84	1,145
12	343,50	342,39	0,932
13	318,04	316,07	1,379
14	296,29	294,14	0,350

Utilizando-se um dispositivo simplificado, sem o mecanismo, como visto na figura 4.9 (b), obtêm-se os resultados mostrados na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Resultados das medições com o protótipo simplificado.

Dados de entrada		Saída	
Posição (mm)	Raio Equivalente (mm)	Raio Médio (mm)	Desv. Padrão (mm)
2	2026,00	2027,73	5,153
3	1351,50	1352,95	4,207
4	1014,50	1016,23	4,521
5	812,50	813,45	4,890
6	678,00	679,37	2,551
7	582,07	582,51	2,423
8	510,25	511,48	2,001
9	454,50	455,21	2,338
10	410,00	411,12	1,113
11	373,68	374,83	1,009
12	343,50	344,43	0,899
13	318,04	319,42	0,092
14	296,29	296,64	0,012

Em termos de precisão, o aparelho com mecanismo mostra resultados melhores do que o aparelho simples. Isto é previsto nos cálculos realizados no capítulo 4.2, e é explicado com o fato de que, na faixa de raios mais elevados, uma grande variação de raio causa uma pequena variação da haste móvel. Esta variação é lida diretamente pelo LVDT no aparelho de medição simples, então a baixa sensibilidade é traduzida em variabilidades mais altas. Porém, no aparelho com o mecanismo, a pequena variação da haste móvel é amplificada no começo do movimento pelo mecanismo, o que faz com que a variabilidade das leituras do LVDT sejam reduzidas.

Em termos de exatidão, o aparelho simplificado apresenta resultados levemente melhores do que o aparelho com o mecanismo compensador, pois possui menos erros sistemáticos que ele, ou seja, apesar de haver mais incerteza nas medições, aproxima-se mais do resultado esperado, em média. Os erros sistemáticos são predominantes quando se faz o uso do mecanismo pois a posição inicial dos componentes é feita manualmente, durante a montagem do aparelho. Contudo, a falta de exatidão é um problema possível de ser resolvido no caso deste instrumento, pois as diferenças ao longo da faixa de medição podem ser aproximadas por uma função. Esta função está representada na figura 5.1, assim como os desvios-padrão experimentais de cada ponto.

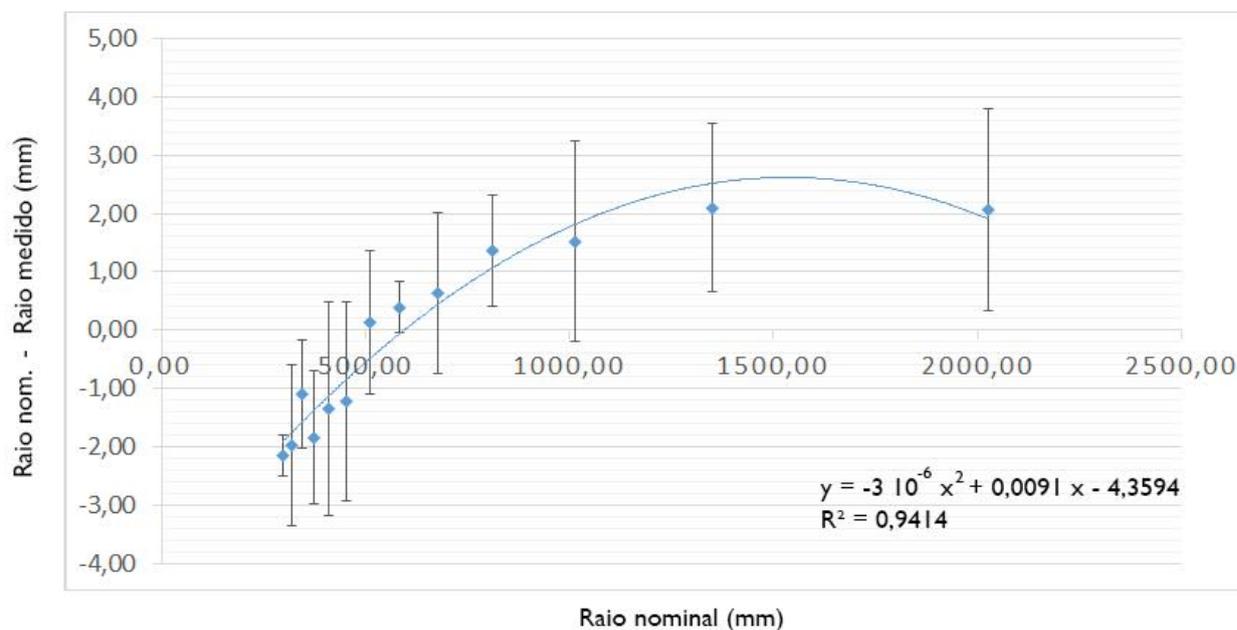


Figura 5.1 – Curva de calibração do protótipo com mecanismo, relacionando as diferenças entre o valor lido e o valor nominal com o valor nominal, com os respectivos desvios padrão de cada ponto e a equação da curva ajustada por mínimos quadrados.

A curva de calibração é aproximada de um polinômio de grau dois pelo método dos mínimos quadrados, como mostra a equação na figura 5.1, onde o eixo das ordenadas representa a diferença entre o valor nominal e o valor lido, e o eixo das abscissas representa o valor nominal. Na programação do arduino, a equação do raio em função da leitura do sensor (eq. 4.3) é subtraída por este polinômio, e assim os erros sistemáticos são reduzidos, e a incerteza causada pelos erros aleatórios passa a ser a fonte de erros predominante. Os resultados subtraídos desta equação de ajuste estão representados na figura 5.2.

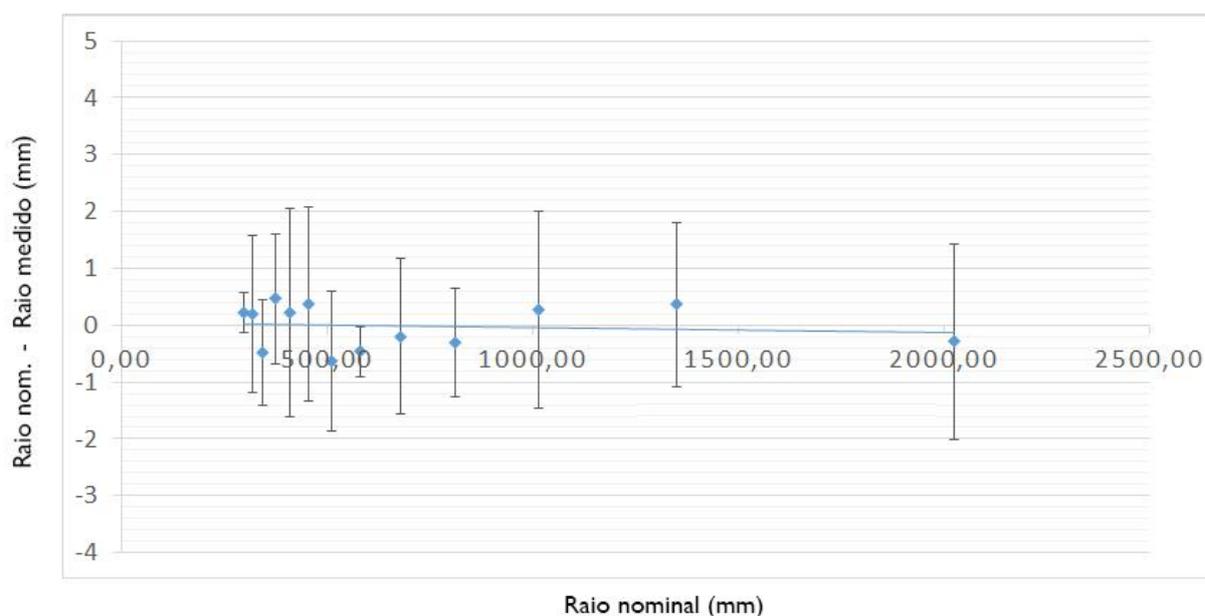


Figura 5.2 – Resultados subtraídos pela curva de calibração

A incerteza de medição não depende somente da repetitividade do medidor ( $\Delta l$ ), estimada pelo desvio-padrão da média das amostras apresentadas nas tabelas 5.1 e 5.2. A incerteza total também depende da resolução digital do aparelho ( $Res$ ), dada pela equação 4.1, e do erro do raio nominal ( $R_{NOM}$ ) utilizado como padrão. O raio medido pode então ser reescrito como:

$$R = R_{NOM} + \Delta l + Res, \quad (5.1)$$

cuja incerteza pode ser estimada inserindo-se a equação 5.1 na 4.2, obtendo-se a equação 5.2:

$$u_c(R) = \sqrt{u^2(R_{NOM}) + u^2(\Delta l) + u^2(Res)}. \quad (5.2)$$

A incerteza de  $R_{NOM}$  é igual à derivada de  $R$  em função de  $X$  (variáveis apresentadas na figura 4.1) vezes a incerteza de  $X$ , ou seja, do bloco padrão. A incerteza associada à repetitividade das medições é estimada como o desvio-padrão da média da medição com mais variação, ou seja, de 1,8 mm para o aparelho com o mecanismo, e de 5,1 mm para o aparelho sem o mecanismo. A incerteza associada à resolução, cuja distribuição de probabilidades é adotada como sendo retangular, é igual à metade da resolução calculada pela equação 4.1 (que já é multiplicada pela sensibilidade da curva) dividido por  $\sqrt{3}$  (desvio da distribuição retangular). Substituindo estes valores na equação 5.2, obtém-se uma incerteza de medição de 1,9 mm para o aparelho com o mecanismo compensador, e 5,4 mm para o aparelho simples.

Os cálculos sobre os dados obtidos no experimento demonstram que o aparelho simples apresenta mais incerteza do que aparelho que funciona com o auxílio do mecanismo, como previsto pelos cálculos realizados no capítulo 4.2. Esta característica é de fundamental importância para qualquer instrumento de medição, pois a precisão é o que define em que aplicação o aparelho pode ser utilizado. Para conferir as medidas de uma peça fabricada em um torno moderno, por exemplo, é comum se utilizar aparelhos de medição com incertezas menores do que 0,02 mm. Já para processos de calandragem, incertezas de 1 mm podem ser aceitáveis, principalmente para diâmetros maiores do que 1 m. O protótipo construído para este trabalho, contudo, apresenta uma incerteza muito elevada para aplicações na indústria.

Os erros aleatórios gerados pelo mecanismo poderiam ser reduzidos com o uso de molas encarregadas de inserir uma pré-tensão nos rolamentos lineares no sentido radial. Esta tensão faria com que os eixos deixassem de ficar soltos no sentido radial, reduzindo a influência das folgas. Também seria possível substituir os rolamentos lineares por guias lineares, as quais apresentam menos folgas, mas têm um custo muito mais elevado. Se estas modificações não melhorarem significativamente a incerteza, a solução seria projetar um aparelho com faixa de medição menor, como a dos aparelhos de medição de três pontos disponíveis no mercado.

## 6. CONCLUSÕES

O dispositivo projetado, construído e testado neste trabalho cumpre em parte a função desejada, comportando-se de acordo com o previsto, porém apresentando uma baixa precisão se comparado aos produtos comercialmente disponíveis. O uso de um mecanismo capaz de compensar a forma não linear da variação do raio em função do deslocamento mostra-se eficaz, melhorando a precisão do aparelho e aumentando sua repetitividade em quase três vezes, se comparado ao aparelho sem o mecanismo. Com este mecanismo, a resolução do aparelho é uniformizada. Contudo, o mecanismo gera complicações em termos de montagem, pois a posição inicial das peças influi drasticamente no comportamento da curva característica, dando origem a erros sistemáticos. Estes erros sistemáticos podem ser compensados pelo circuito eletrônico a partir de uma curva de calibração, que relaciona a diferença entre o valor lido e o valor real com o próprio valor errado.

Este projeto, para ter competitividade com os produtos disponíveis atualmente no mercado, necessita ser aprimorado, e para isto, a parte eletrônica deve ser melhorada, especialmente o transdutor, que é o responsável pela maior parcela da incerteza combinada. Um

encoder óptico, por exemplo, é capaz de operar com uma precisão mais de dez vezes maior do que a de um LVDT. A parte mecânica do protótipo também pode ser otimizada, substituindo-se os rolamentos lineares por guias lineares, adicionando-se elementos tensionadores (molas) e fabricando a estrutura com um material que possua maior rigidez e menor coeficiente de expansão térmica do que o alumínio.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bolton, W.; **“Mecatrônica: Uma Abordagem Multidisciplinar”**, Bookman, 4ª edição, 2010.
- Brown, H.; **“Five Hundred and Seven Mechanical Movements”**, Brown & Seward, 18<sup>th</sup> edition, 1896.
- COLLINS, J. A.; **“Projeto Mecânico de Elementos de Máquinas”**, Editora LTC, 1ª edição, 2006.
- Guedes, P.; **“Metrologia Industrial”**, Lidel – Edições Técnicas, 1ª edição, 2011.
- HOLMAN, J.; **“Experimental Methods for Engineers”**, McGraw Hill, 6<sup>th</sup> edition, 1996.
- INMETRO; **“Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados”**, INMETRO, 2012.
- INMETRO; **“Guia para a Expressão de Incerteza de Medição”**, INMETRO, 2008.
- Lira, F. A.; **“Metrologia na Indústria”**, Editora Erica, 8ª edição, 2011.
- National Instruments; **“How to Choose Among LVDT, RVDT, Potentiometer, Optical Encoder, Ultrasonic, Magnetostrictive, and Other Technologies”**, www.ni.com, 2006, acessado em 29/03/2015.
- Shigley, J.E; Mishke, C.R.; **“Projeto de Engenharia Mecânica”**, Bookman, 7ª edição, 2005.
- Williams, E.; **“Make: AVR Programming”**, Maker Media, Inc., 1<sup>st</sup> edition, 2014.
- Zhang, G.; **“A Study on the Abbe Principle and Abbe Error”**, Tianjin University, 1989.

## Apêndice A – Calibração do LVDT

A calibração do LVDT em conjunto com o arduino é realizada durante este trabalho para que sua incerteza seja inserida na equação 4.3 do capítulo 4 – Metodologia. O transdutor utilizado é o 7DCDT-500, da Hewlett Packard A função de transferência do LVDT, ou seja, a equação que relaciona a entrada em milímetros com a saída em Volts, também é obtida neste processo. A calibração é feita inserindo-se blocos padrão entre o transdutor e uma mesa rígida. Cada bloco tem uma diferença de 1 mm entre ele e o anterior. Como o curso do LVDT é de 24,5 mm, se coletam amostras em 24 pontos. Em cada ponto, são coletadas três medições, resultando num total de 72 pontos. As médias de cada ponto estão mostrados na tabela A.1.

Tabela A.1 – Tabela com valores de entrada e saída do transdutor e cálculos estatísticos relacionados a eles.

Posição nominal - L (mm)	Saída (V)	Posição Calculada - l (mm)	L - l (mm)
0	3,232	0,046	-0,046
1	3,110	0,938	0,062
2	2,970	1,960	0,040
3	2,830	2,976	0,024
4	2,692	3,986	0,014
5	2,553	4,996	0,004
6	2,414	6,011	-0,011
7	2,274	7,027	-0,027
8	2,136	8,031	-0,031
9	1,999	9,035	-0,035
10	1,862	10,033	-0,033
11	1,725	11,026	-0,026
12	1,588	12,024	-0,024
13	1,452	13,016	-0,016
14	1,318	13,997	0,003
15	1,181	14,989	0,011
16	1,046	15,976	0,024
17	0,910	16,968	0,032
18	0,772	17,972	0,028
19	0,636	18,964	0,036
20	0,498	19,968	0,032
21	0,359	20,984	0,016
22	0,213	22,047	-0,047
23	0,079	23,022	-0,022
<b>s (mm) =</b>			<b>0,031</b>

A equação que relaciona a entrada em V com a saída em mm é calculada pelo método dos mínimos quadrados, e resulta na equação  $U = - 0,1372 L + 3,2386$ , onde  $U$  é a tensão, em V, e  $L$  é a posição, em mm. A última coluna da tabela A.1 mostra a diferença entre o valor obtido por esta equação e o valor nominal (altura do bloco-padrão). A incerteza obtida neste experimento é de 0,031 mm. A incerteza associada às dimensões dos blocos-padrão é mais de 100 vezes menor do que a do LVDT, e portanto ela não é considerada no cálculo de incerteza.

## Apêndice B – Obtenção das Equações no Maple

As equações que relacionam o raio mensurado com a posição do sensor nos três conceitos sugeridos são obtidas através do programa copiado abaixo, desenvolvido para este trabalho. O programa parte das coordenadas de três pontos, e a partir de um sistema de equações, a coordenada do centro do círculo é descoberta. A partir da relação pitagórica, tendo a coordenada do centro do círculo e uma coordenada da superfície do círculo (qualquer uma das três), o raio é calculado. O programa também plota as funções do raio em função da posição do sensor, bem como as derivadas destas funções.

### Dados Iniciais

```
> restart : with(LinearAlgebra) : with(DifferentialGeometry) :
#Coordenadas dos três pontos no aparelho simples (em mm):
P1 := <<(-L, 0)>> :
P2 := <<(0, y)>> :      #Coordenada da extremidade da haste móvel
P3 := <<(L, 0)>> :
L := 90 :              #Distância entre os pontos nas extremidades dividido por 2

#Coordenadas dos três pontos no aparelho angular (em mm):
P1a2 := <<<(-130·sin( thetas / 2 ), 0)>>>> :
P2a2 := <<<(0, 130·cos( thetas / 2 ))>>>> :
P3a2 := <<<(130·sin( thetas / 2 ), 0)>>>> :

#Coordenada do sensor dentro do mecanismo (substitui o P2):
Paux := <<(0, -sqrt(-(X^2) + B^2) + B + 2)>> :
      #Substitui o P2, sendo X = posição do sensor
B := 30 :      #Tamanho da barra com rolamentos
```

### Cálculos

```
> #Sistema de equações para descobrir a coordenada do centro do círculo a partir de três
    pontos:

#Aparelho simples:
An := <<<(-2·PI[1, 1]) + (2·P2[1, 1]), (-2·P2[1, 1]) + (2·P3[1, 1])>><<(-2·PI[2, 1])
      + (2·P2[2, 1]), (-2·P2[2, 1]) + (2·P3[2, 1])>><<-(PI[1, 1]^2 + PI[2, 1]^2)
      + (P2[1, 1]^2 + P2[2, 1]^2), -(P2[1, 1]^2 + P2[2, 1]^2) + (P3[1, 1]^2 + P3[2, 1]^2)>>>> :
Cn := LinearSolve(An) :

> #Aparelho com mecanismo:
Ai := <<<(-2·PI[1, 1]) + (2·Paux[1, 1]), (-2·Paux[1, 1]) + (2·P3[1, 1])>><<(-2·PI[2, 1])
      + (2·Paux[2, 1]), (-2·Paux[2, 1]) + (2·P3[2, 1])>><<-(PI[1, 1]^2 + PI[2, 1]^2)
      + (Paux[1, 1]^2 + Paux[2, 1]^2), -(Paux[1, 1]^2 + Paux[2, 1]^2) + (P3[1, 1]^2
      + P3[2, 1]^2)>>>> :
Cim := LinearSolve(Ai) :
```

&gt;

#Aparelho angular:

```
Arad :=  $\langle \langle (-2 \cdot P1a2[1, 1]) + (2 \cdot P2a2[1, 1]), (-2 \cdot P2a2[1, 1]) + (2 \cdot P3a2[1, 1]) \rangle \langle (-2 \cdot P1a2[2, 1]) + (2 \cdot P2a2[2, 1]), (-2 \cdot P2a2[2, 1]) + (2 \cdot P3a2[2, 1]) \rangle \rangle \langle - (P1a2[1, 1]^2 + P1a2[2, 1]^2) + (P2a2[1, 1]^2 + P2a2[2, 1]^2), - (P2a2[1, 1]^2 + P2a2[2, 1]^2) + (P3a2[1, 1]^2 + P3a2[2, 1]^2) \rangle \rangle$  :
Cirad := LinearSolve(Arad) :
```

&gt;

#Equações para descobrir o raio dos círculos a partir da coordenada do centro e de um ponto na superfície:

```
rn := solve(rs = sqrt((P3[1, 1] - Cn(1))^2 + (P3[2, 1] - Cn(2))^2), rs) :
R := solve(rs = sqrt((P3[1, 1] - Cim(1))^2 + (P3[2, 1] - Cim(2))^2), rs) :
rrad := solve(rs = sqrt((P3a2[1, 1] - Cirad(1))^2 + (P3a2[2, 1] - Cirad(2))^2), rs) :
rnormal := evalf[10](rn) :
#Raio do aparelho simples linear em função do deslocamento da haste
rimproved := evalf[10](R) :
#Raio do aparelho simples com mecanismo em função da posição do sensor
rradial := evalf[10](rrad) :
#Raio do aparelho simples linearangular em função do ângulo entre hastes
```

&gt;

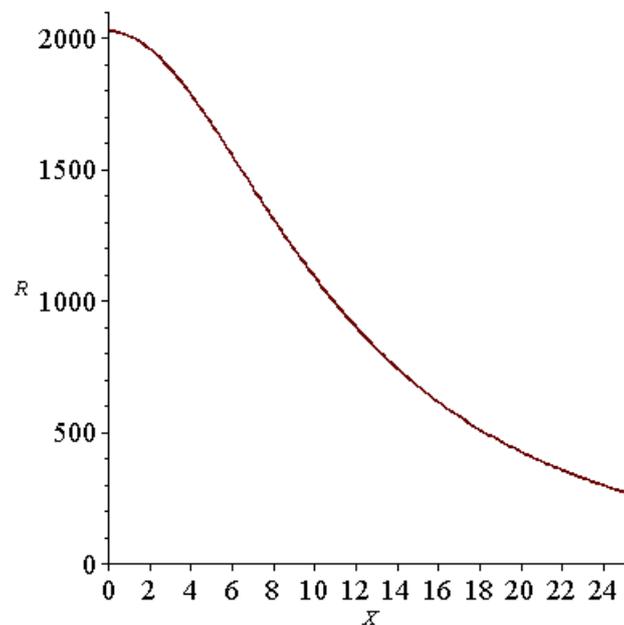
#Equações para se descobrir a derivada do raio em função da posição da haste e a derivada do raio em função da posição do sensor

```
diffrn := diff(rn, y) : diffri := diff(R, X) :
```

## Resultados

&gt;

```
startri := 0 :
plot([R], X = startri .. (startri + 25.4), y = 0 .. 2100, axesfont = ["arial", "ROMAN", 14],
tickmarks = [spacing(2), default]);
plot([diffri], X = startri .. (startri + 25.4), y = -200 .. 0, axesfont = ["arial", "ROMAN", 14],
tickmarks = [spacing(2), default]);
```



```

startrn := 2 :
plot(rn,y=startrn..(startrn + 25.4),y=0..2000, axesfont=["arial", "ROMAN", 14],
  tickmarks=[spacing(2), default]);#plot(diff(rn,y),y=1..11,y=0..-2000);
plot([diffrn],y=startrn..(50),y=-200..0, axesfont=["arial", "ROMAN", 14], tickmarks
  = [spacing(2), default]);

#plot(rrad,thetas=0..Pi,y=0..2000, axesfont=["arial", "ROMAN", 14], tickmarks
  = [spacing( $\frac{\pi}{8}$ ), default]);

```

