

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO DE UM MANIPULADOR HIDRÁULICO  
PARA ATUAÇÃO NA INDÚSTRIA

por

Emanuel Moutinho Cesconeto

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2018

METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO DE UM MANIPULADOR HIDRÁULICO  
PARA ATUAÇÃO NA INDÚSTRIA

por

Emanuel Moutinho Cesconeto  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Processos de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Aprovada por:

Prof. Dr. Antonio Carlos Valdiero, UNIJUÍ

Prof. Dr. Flavio José Lorini, UFRGS

Prof. Dr. Fabiano Disconzi Wildner, UFRGS

Prof. Dr. Eduardo André Perondi  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 31 de Agosto de 2018

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Eduardo André Perondi, pelo apoio à elaboração desta dissertação.

À Universidade Federal do Rio Grande Do Sul (UFRGS), pela reconhecida qualidade do programa de pós graduação. Ao Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), e o Laboratório de Mecatrônica e Controle (LAMECC) pela disponibilidade de infraestrutura, e auxílio à conclusão desta dissertação. Em especial, ao técnico responsável do LAMECC, Eder Gonçalves Dorneles, ao coordenador do PROMEC, Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler, e ao secretário do PROMEC, Laziê Laerte da Silva.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro que possibilitou a elaboração desta dissertação, através da bolsa de fomento a pesquisa (148887/2016-3).

Aos meus colegas e amigos, em especial ao Eduardo Menezes, João Batista Dias Moreira, Lisandro Maders, Álvaro Bruscato Schmidt, Daiane dos Santos, Fernanda Link, e tantos outros não mencionados aqui. Também aos professores Dr. Walter Jesus Paucar Casas e Dr.<sup>a</sup> Letícia Fleck Fadel Miguel.

Aos meus pais, Claudio Cesconeto e Elaine Dutra Moutinho, e à minha irmã, Carolina Moutinho Cesconeto, pelo apoio, ajuda e paciência durante esta jornada.

## RESUMO

Este trabalho aborda o desenvolvimento de uma metodologia para a da determinação de parâmetros de projeto de uma classe de robôs industriais hidráulicos com atuadores lineares diretamente acoplados aos elos. Um robô típico desta classe pode ser dividido em três partes: a base, o braço e o punho, sendo que, no presente trabalho, é abordado o desenvolvimento do braço. São propostos métodos sistemáticos para a determinação das dimensões dos elos, dos cursos angulares das juntas, dos pontos de acoplamento dos atuadores, da estrutura principal dos elos, e para a sistematização do procedimento de especificação dos atuadores e unidades de potência hidráulica. Estes métodos dependem da predefinição por um projetista das necessidades técnicas das tarefas que o robô deve realizar, a partir dos quais os métodos então buscam a determinação dos parâmetros ótimos do braço para estas tarefas. Também é apresentada a cinemática direta, inversa, e a matriz Jacobiana, e é feito o equacionamento da dinâmica do braço em forma matricial, considerando a influência da inércia e peso dos atuadores, de modo a permitir a análise dos carregamentos e facilitar o controle. As equações propostas são verificadas com comparações com *softwares* comerciais e resultados disponíveis na literatura. Um programa computacional que implementa a metodologia deste trabalho foi desenvolvido e aplicado para determinar os parâmetros de dois braços propostos como estudo de casos. A metodologia se mostrou capaz de rapidamente especificar o braço adequado para cada caso, calculando as características de desempenho que deverão possuir se construídos. Estes dados podem ser aplicados para a construção de um robô hidráulico, ou para assistir o projetista a determinar se um robô hidráulico é adequado ou não para realizar as tarefas predefinidas.

Palavras-chave: Robô hidráulico; Otimização cinemática; Dinâmica; Otimização estrutural; Projeto de manipuladores.

## **ABSTRACT**

This work presents the development of a methodology for the determination of the design variables of a class of hydraulic industrial robots with linear actuators directly coupled to the links. A typical robot of this class can be divided in three parts: the base, the arm and the wrist, of which the development of the arm is tackled in this work. Systematic methods are proposed for the determination of the links' dimensions, the joints' angular strokes, the coupling points for the actuators, the main structure of the links, and for the systematization of the procedure used to specify the actuators and pumps. These methods depend on the technical specifications, predefined by the designer, that are required for the arm to be able to perform a given set of tasks, and then seek the optimum parameters for the arm. The direct and inverse kinematics are also presented, as well as the Jacobian matrix, and the dynamics of the arm are calculated in matrix form, taking into consideration the inertia and weight of the actuators, so as to allow the analysis of the structural loads and facilitate the control. The proposed equations are verified via comparisons with commercial software and results found in the literature. A computer program that implements the methodology of this work was developed and used to determine the parameters of two proposed arms as a case study. The program was able to quickly specify the configurations for the arm of each case, and also calculate the performance characteristics the arms should possess if built. This data can be used to build a hydraulic arm, or even to help the designer to determine if a hydraulic robot is ideal or not for the given set of tasks.

**Keywords:** Hydraulic robot; Kinematic optimization; Dynamics; FEM; Structural optimization.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	Contextualização.....	1
1.2	Motivação para o trabalho .....	2
1.3	Exposição do problema.....	3
1.3.1	Estado da arte.....	4
1.3.2	Proposta de uma solução.....	5
1.4	Objetivos.....	6
1.4.1	Objetivo principal .....	6
1.4.2	Objetivos específicos .....	6
1.5	Estrutura deste documento.....	7
<b>2</b>	<b>CARACTERÍSTICAS DE UM ROBÔ.....</b>	<b>9</b>
2.1	Classificação dos robôs.....	9
2.1.1	Estrutura.....	9
2.1.2	Forma de atuação .....	11
2.2	Características de desempenho de um robô .....	11
2.2.1	Erro de posicionamento, repetibilidade e precisão .....	11
2.2.2	Velocidade e aceleração.....	13
2.2.3	Capacidade de carga .....	13
2.2.4	Espaço de trabalho .....	14
2.3	Escolha do tipo de robô .....	15
2.4	Análise modular de um robô articulado.....	15
2.4.1	A base .....	15
2.4.2	O punho.....	15
2.4.3	O braço.....	16
2.5	Definição do braço.....	16
2.5.1	Sistema de coordenadas local de um elo .....	17
2.5.2	Disposição relativa de um atuador.....	17
2.6	Visão geral da metodologia .....	18
<b>3</b>	<b>PARÂMETROS CINEMÁTICOS.....</b>	<b>21</b>
3.1	Cálculo da cinemática.....	21
3.1.1	Cinemática direta .....	21

3.1.2	Cinemática inversa.....	23
3.1.3	Matriz Jacobiana.....	24
3.2	Definição das dimensões dos elos, limites de junta e pontos de fixação dos atuadores.....	25
3.2.1	Limitação do volume de trabalho.....	26
3.2.2	Definição dos parâmetros dos atuadores lineares para otimização da propriedade de repetibilidade de posicionamento.....	33
3.2.3	Otimização do braço para maximização de seu desempenho global.....	37
3.3	Cálculo do erro de posicionamento do braço.....	46
<b>4</b>	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA.....</b>	<b>48</b>
4.1	Visão geral do método para dimensionamento da estrutura.....	48
4.2	Equações dinâmicas.....	50
4.2.1	Equação dinâmica de um braço com atuadores rotacionais.....	50
4.2.2	Dinâmica da ferramenta.....	51
4.2.3	Dinâmica dos atuadores.....	54
4.2.4	Dinâmica de um braço com atuadores lineares.....	61
4.2.5	Verificação das equações dinâmicas.....	62
4.3	Análise estrutural do braço.....	65
4.3.1	Método dos Elementos Finitos de deslocamentos para análise estrutural estática.....	66
4.3.2	Modelagem detalhada do braço.....	68
4.3.3	Modelo simplificado.....	71
4.3.4	Discretização da estrutura.....	79
4.3.5	Elementos estruturais.....	80
4.3.6	Carregamentos devido ao peso próprio.....	81
4.3.7	Carregamentos devido à dinâmica do braço.....	82
4.3.8	Método dos elementos finitos para análise estrutural de uma estrutura dinâmica.....	85
4.3.9	Cálculo dos esforços em um elemento.....	85
4.3.10	Verificação do modelo proposto.....	86
4.4	Otimização estrutural do braço.....	96
4.4.1	Função objetivo.....	96
4.4.2	Escolha dos casos aplicados na análise.....	99
4.4.3	Método de otimização.....	101

<b>5</b>	<b>ESPECIFICAÇÃO DOS ATUADORES E DA UNIDADE DE POTÊNCIA HIDRÁULICA .....</b>	<b>103</b>
5.1	Cálculo das forças e velocidades máximas dos atuadores .....	104
5.2	Escolha teórica dos diâmetros dos êmbolos .....	105
5.3	Escolha dos atuadores com base em um catálogo .....	108
5.4	Estimativa dos parâmetros inerciais de um atuador.....	112
5.5	Curva pressão x vazão necessária de um sistema .....	115
<b>6</b>	<b>RESULTADOS: ESTUDO DE CASO.....</b>	<b>117</b>
6.1	Caso 1: robô para movimentação de objetos pesados entre linhas de fabricação.....	117
6.1.1	Definição do problema e dos valores nominais .....	117
6.1.2	Resultado da definição dos parâmetros cinemáticos .....	121
6.1.3	Resultado da definição do curso e pontos de fixação dos atuadores .....	122
6.1.4	Resultado da otimização estrutural .....	122
6.1.5	Escolha dos atuadores .....	124
6.1.6	Iteração 2 – novos valores de entrada para os dados dos atuadores .....	126
6.1.7	Iteração 3 – atuadores com os valores finais .....	127
6.1.8	Especificação da unidade de potência hidráulica .....	132
6.1.9	Gráfico do erro de posicionamento.....	132
6.2	Discussão .....	133
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>135</b>
7.1	Trabalhos futuros .....	136
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>138</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>Deduções das equações.....</b>	<b>143</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>Modelo detalhado do braço .....</b>	<b>172</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>Modelo simplificado do braço .....</b>	<b>179</b>
<b>APÊNDICE D</b>	<b>Elemento de viga de Timoshenko de dois nós e 12 GDLs .....</b>	<b>183</b>
<b>APÊNDICE E</b>	<b>Tabelas de parâmetros para a verificação da análise estrutural .....</b>	<b>188</b>



<b>APÊNDICE F</b>	<b>Segundo caso de exemplo: robô para armazenamento de objetos pesados.....</b>	<b>193</b>
-------------------	---	------------

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	(a) Robô antropomórfico com atuadores elétricos. [ABB®, 2018]. (b) Escavadeira com atuadores hidráulicos. [CAT®, 2018].	2
Figura 1.2	Conceito de um robô hidráulico estudado no presente trabalho.	3
Figura 1.3	Fluxograma mostrando uma visão geral da metodologia proposta neste trabalho.	8
Figura 2.1	Modelos tridimensionais mostrando um exemplo de: (a) um robô paralelo tipo delta, e (b) um robô serial tipo braço articulado.	9
Figura 2.2	Desenhos esquemáticos mostrando as diversas configurações dos robôs com respeito à sua geometria. [adaptado de Rivin, 1987].	10
Figura 2.3	Desenho esquemático do braço estudado.	11
Figura 2.4	Desenho esquemático mostrando a diferença entre os espaços de trabalho.	14
Figura 2.5	Desenho esquemático mostrando a definição das dimensões e ângulos do braço.	16
Figura 2.6	Desenho esquemático do braço com juntas rotativas e atuadores lineares.	16
Figura 2.7	Desenho esquemático mostrando os pontos e dimensões definidas no sistema de coordenada local dos elos.	17
Figura 2.8	Desenhos esquemáticos mostrando as possíveis disposições de um atuador.	18
Figura 2.9	Fluxograma mostrando o procedimento geral para desenvolvimento de um braço hidráulico proposto neste trabalho.	19
Figura 3.1	Desenho esquemático mostrando a definição dos ângulos $q_1$ e $q_2$ , bem como as dimensões dos elos, $a_1$ e $a_2$ , e dos atuadores, $P_1$ e $P_2$ .	22
Figura 3.2	Desenho esquemático mostrando a definição dos ângulos $q_i$ , $\phi_{Ai}$ , $\beta_i$ e $\phi_{Bi}$ .	23
Figura 3.3	Fluxograma mostrando o processo para determinação dos parâmetros cinemáticos e dos pontos de fixação dos atuadores.	26
Figura 3.4	Desenho mostrando os parâmetros afetados pela modificação da transmissão mecânica, assumindo que os parâmetros do atuador são os mesmos nos dois casos.	27

Figura 3.5	Desenhos esquemáticos que mostram o volume de trabalho prismático e a relação de $V_{x'}$ e $L_{min'}$ com $V_x$ , $V_z$ , $L_{min}$ e $d_{off}$ .....	29
Figura 3.6	Desenho esquemático mostrando a definição da área de trabalho, com os pontos ABCD demarcando os vértices, e o ponto O demarcando a posição da Junta 1.....	29
Figura 3.7	Desenho tridimensional mostrando um robô cujo espaço de trabalho completo inclui dois volumes prismáticos.....	30
Figura 3.8	Desenho que mostra a relação entre os ângulos $\psi_1$ , $\psi_2$ , $q_{1max}$ , $q_{2max}$ e as dimensões $a_1$ e $a_2$ com as dimensões da área de trabalho $V_y$ , $V_{x'}$ e $L_{min'}$ .....	31
Figura 3.9	Gráfico mostrando o comportamento de $d_{pdP}$ em função de $P$ .....	34
Figura 3.10	Desenho mostrando o curso e as duas partes do “comprimento morto” do cilindro atuador.....	35
Figura 3.11	Esquema mostrando o significado geométrico de três índices de desempenho .....	39
Figura 3.12	Modelo cinemático do mecanismo de um robô paralelo de 2 GDLs usado como exemplo para verificação da metodologia. [ Zhang et al., 2013].....	42
Figura 3.13	Gráfico mostrando valores de $GPI_c$ para diferentes configurações de um braço .....	45
Figura 3.14	Exemplo de um gráfico mostrando o erro de posição para um braço na região da área de trabalho de interesse .....	47
Figura 4.1	Fluxograma mostrando uma vista geral do procedimento para dimensionamento da estrutura dos elos do braço .....	49
Figura 4.2	Desenho esquemático mostrando a massa pontual que representa a ferramenta, e possivelmente um objeto, na extremidade do braço.....	52
Figura 4.3	Desenho esquemático mostrando as forças que agem sobre um atuador, bem como as forças de reação que o atuador aplica sobre a estrutura. ....	56
Figura 4.4	Desenho esquemático mostrando as forças passivas que o atuador aplica sobre os elos .....	56
Figura 4.5	Imagens mostrando o caso usado para verificação simulado no programa desenvolvido.....	63

Figura 4.6	Comparação da trajetória da extremidade do braço: (a) desempenhada pelo braço simulado pelo simDRHL, e (b) desempenhada pelo braço simulado pelo software comercial. ....	64
Figura 4.7	Conjunto de figuras comparando a posição do braço simulado pelo simDRHL, para (a) $t=5$ , (b) $t=10$ , (c) $t=20$ e (d) $t=30$ segundos. ....	65
Figura 4.8	Desenho esquemático mostrando o projeto básico do primeiro elo do braço .....	69
Figura 4.9	Desenho esquemático mostrando o projeto básico do segundo elo do braço .....	69
Figura 4.10	Comparação entre um acoplamento (a) em linha, e (b) lateral.....	70
Figura 4.11	Modelos 3D mostrando duas configurações possíveis para a montagem do braço completo .....	71
Figura 4.12	Desenho esquemático mostrando as vigas que representam as estruturas básicas dos elos 1 e 2. (a): vista lateral, (b): vista superior. ....	72
Figura 4.13	Desenho esquemático mostrando a seção transversal usada para a estrutura principal dos elos .....	72
Figura 4.14	Desenho esquemático, em vista superior, mostrando a modelagem do pino da Junta 2, entre os dois elos. ....	74
Figura 4.15	Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os elos modelados com os pontos de acoplamento.....	76
Figura 4.16	Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando as extensões do pino de acoplamento e da Junta 2, em preto, para fixação da chapa de reforço.....	77
Figura 4.17	Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os atuadores, em preto, conectados aos seus respectivos pontos de acoplamento. ....	77
Figura 4.18	Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os nós chave das estruturas principais dos elos.....	79
Figura 4.19	Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os outros nós chave do modelo simplificado.....	80
Figura 4.20	Discretização do braço, com $q=00.4T$ , mostrando os nós (pontos) e elementos (linhas), além dos pontos de acoplamento.....	88
Figura 4.21	Modelo detalhado usado para verificação dos cálculos dos parâmetros de massa dos elos, mostrando (a) o Elo 1, e (b) o Elo 2.....	89
Figura 4.22	Comparação entre (a) o modelo detalhado, e (b) o modelo simplificado.....	91

Figura 4.23	Gráficos comparativos dos resultados do deslocamento obtidos pelo programa desenvolvido em Matlab® e pelo SolidWorks® para o caso 6. ....	95
Figura 4.24	Gráficos do comportamento das forças ativas dos atuadores para pontos dentro do volume de trabalho prismático do braço .....	99
Figura 4.25	Diferentes combinações possíveis para os casos de carregamento .....	100
Figura 4.26	Gráfico que exemplifica o deslocamento da extremidade do braço, ou flecha, para os pontos dentro do volume de trabalho. ....	101
Figura 5.1	Fluxograma mostrando o procedimento para a especificação dos atuadores .....	103
Figura 5.2	Desenho esquemático mostrando a diferença entre as áreas efetivas do êmbolo para retração e para extensão .....	105
Figura 5.3	Exemplo de um gráfico pressão x vazão necessária para um braço. dh1 e dh2 representam os diâmetros das hastes dos atuadores 1 e 2 respectivamente. ....	107
Figura 5.4	Gráfico mostrando os valores para os coeficientes de atrito, para atuadores da série RDH da Parker®. [adaptado de PARKER HANNIFIN CORPORATION, 2014]. ....	110
Figura 5.5	Exemplo de nuvem de pontos dos requerimentos de pressão e vazão do braço considerado, e curva vazão x pressão mínima da bomba hidráulica. ....	116
Figura 6.1	Desenho tridimensional mostrando o conceito do braço utilizado, bem como o volume de trabalho desejado. ....	118
Figura 6.2	Gráfico do GPIr em função dos cursos angulares das juntas .....	121
Figura 6.3	Gráfico mostrando o valor da função objetivo ao longo das iterações da otimização estrutural.....	123
Figura 6.4	Exemplos dos casos de carregamento analisados.....	123
Figura 6.5	Gráfico do GPIr em função dos cursos angulares das juntas, para a terceira iteração.....	128
Figura 6.6	Gráfico mostrando o valor da função objetivo ao longo das iterações da otimização estrutural para a terceira iteração do caso 1 .....	129
Figura 6.7	Exemplos dos casos de carregamento analisados.....	130
Figura 6.8	Desenhos esquemáticos mostrando o braço final especificado para o caso 1, em duas poses diferentes. ....	131

Figura 6.9	Nuvem de pontos dos requerimentos de pressão e vazão do braço da terceira iteração do caso 1, e curva vazão x pressão mínima da bomba hidráulica. ....	132
Figura 6.10	Gráfico do erro de posicionamento da extremidade do braço projetado para o caso 1 em função da sua posição .....	133
Figura A.1	Desenho esquemático mostrando a relação entre os pontos C, D, E, G e O, além do ângulo $\alpha_{Bl}$ . ....	150
Figura A.2	Desenhos esquemáticos mostrando (a) os elos ligados ao atuador $i$ à, inclusive os ângulos e dimensões envolvidas, e (b) a força axial FL aplicada pelo atuador $i$ . ....	164
Figura A.3	Desenhos esquemáticos mostrando as forças que atuam: (a) sobre o elo $i$ , e (b) sobre o elo $i-1$ . ....	164
Figura B.1	Desenho esquemático mostrando as dimensões usadas para uma ponta qualquer de um elo que faça o acoplamento com uma das juntas. ....	172
Figura B.2	Desenho esquemático mostrando o projeto da estrutura básica do segundo elo no caso em que a componente x do ponto B2 seja negativa .....	172
Figura B.3	Desenho esquemático mostrando os parâmetros usados no projeto do reforço das juntas no Elo 1 .....	173
Figura B.4	Desenho esquemático mostrando o projeto dos reforços dos pontos de acoplamento com os atuadores .....	174
Figura B.5	Modelo 3D de um corte do Elo 1, mostrando os reforços nos pontos de acoplamento com os atuadores. ....	174
Figura B.6	Desenho esquemático mostrando o projeto do garfo de acoplamento para o ponto B2, no caso em que $B2y > HB22$ . ....	174
Figura B.7	Desenho esquemático mostrando o projeto de um pino lateral, no caso em que $A2y < HA22$ . ....	175
Figura B.8	Modelo 3D com um pino lateral para acoplamento com um atuador, juntamente com a chapa de reforço .....	175
Figura B.9	Modelo 3D do segundo elo com um acoplamento em linha tipo garfo no ponto B2 com $B2x < 0$ . ....	176
Figura B.10	Desenho esquemático mostrando a região onde é feito o corte para o acoplamento com o atuador no ponto B2 com $B2x < 0$ .....	176

Figura B.11	Modelo 3D de um Elo 1 com os pinos incorporados ao modelo. A vista do detalhe mostra a região da Junta 1 usada para aplicar a condição de pino do SolidWorks®. ....	177
Figura B.12	Foto mostrando o rolamento esférico em uma das extremidades de um cilindro hidráulico. [Parker®, 2018]. ....	177
Figura B.13	Modelo 3D de um atuador, mostrando as três conexões rotacionais utilizadas para aproximar uma junta esférica. ....	178
Figura C.1	Desenho esquemático mostrando a composição da ponta de um elo através do uso de três trapezoides. ....	179
Figura C.2	Desenho esquemático mostrando as dimensões da seção lateral de um trapezoide, bem como a posição de seu centro de massa. ....	180
Figura C.3	Modelo 3D mostrando as partes dos garfos que são modeladas diretamente, em cinza escuro, e as partes que têm seus parâmetros calculados separadamente, em cinza claro. ....	181
Figura C.4	Modelo 3D mostrando as partes dos pinos laterais modeladas diretamente, em cinza escuro, e as partes que têm seus parâmetros calculados separadamente, em cinza claro. ....	182
Figura F.1	Gráfico do GPIr em função dos cursos angulares das juntas, para a terceira iteração. ....	195
Figura F.2	Gráfico mostrando o valor da função objetivo ao longo das iterações da otimização estrutural para a terceira iteração do caso 2. ....	197
Figura F.3	Exemplos dos casos de carregamento analisados. ....	198
Figura F.4	Modelo tridimensional mostrando o braço final especificado para o caso 2 em duas poses diferentes. ....	199
Figura F.5	Nuvem de pontos dos requerimentos de pressão e vazão do braço da terceira iteração do caso 2, e curva vazão x pressão mínima da bomba hidráulica. ....	200
Figura F.6	Gráfico do erro de posicionamento da extremidade do braço projetado para o caso 2 em função da sua posição. ....	201

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Comparação entre os resultados .....	43
Tabela 4.1	Parâmetros do braço utilizado para a verificação .....	63
Tabela 4.2	Comparação dos resultados obtidos pelo software comercial e pelo simDRHL.....	64
Tabela 4.3	Parâmetros do braço usado para a verificação do programa desenvolvido.....	87
Tabela 4.4	Comparação entre os parâmetros de massa dos elos do modelo simplificado e do modelo detalhado.....	89
Tabela 4.5	Comparação das forças de reação da Junta 1 entre o software comercial de dinâmica utilizado e o programa desenvolvido em Matlab®.....	90
Tabela 4.6	Comparação das forças de reação da junta A1 entre o software comercial de dinâmica utilizado e o programa desenvolvido em Matlab®.....	91
Tabela 4.7	Diferenças entre os casos analisados.....	92
Tabela 4.8	Comparação dos parâmetros de massa calculados pelo programa desenvolvido em Matlab e pelo SolidWorks®, para os casos 1, 2, 3, 5 e 7.....	93
Tabela 4.9	Comparação dos resultados da flecha, obtidos pelo programa desenvolvido em Matlab®, e pelo software SolidWorks®.....	94
Tabela 6.1	Características de desempenho que o robô deve possuir para o caso 1.....	118
Tabela 6.2	Parâmetros de entrada usados para o caso 1.....	119
Tabela 6.3	Limites para os parâmetros da otimização estrutural .....	120
Tabela 6.4	Valores iniciais assumidos para os atuadores.....	120
Tabela 6.5	Resultados da definição dos parâmetros cinemáticos na primeira iteração.....	121
Tabela 6.6	Resultados da definição dos parâmetros dos atuadores na primeira iteração.....	122
Tabela 6.7	Valores otimizados para os parâmetros .....	122
Tabela 6.8	Máximas forças aplicadas pelos atuadores calculadas nos pontos e casos considerados.....	124



Tabela 6.9	Parâmetros da escolha dos diâmetros dos êmbolos e das hastes dos atuadores .....	125
Tabela 6.10	Parâmetros usados para o cálculo da massa total dos atuadores, e resultado.....	126
Tabela 6.11	Resultados para a massa, centro de gravidade e momento de inércia para o cilindro e para a haste dos atuadores, bem como os parâmetros usados para os cálculos.....	126
Tabela 6.12	Valores dos parâmetros dos atuadores no início da segunda iteração do método .....	127
Tabela 6.13	Parâmetros dos atuadores especificados pelo método no final da segunda iteração .....	127
Tabela 6.14	Resultados da definição dos parâmetros cinemáticos na terceira iteração .....	128
Tabela 6.15	Resultados da definição dos parâmetros dos atuadores na terceira iteração.....	128
Tabela 6.16	Valores otimizados para os parâmetros de altura das vigas dos elos, para a terceira iteração do caso 1 .....	129
Tabela 6.17	Parâmetros inerciais dos elos do braço final para o caso 1 .....	130
Tabela 6.18	Máximas forças aplicadas pelos atuadores .....	130
Tabela 6.19	Parâmetros dos atuadores especificados para a configuração do braço da terceira iteração do caso 1 .....	131
Tabela A.1	Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o braço mostrado na Figura 3.1.....	143
Tabela A.2	Equações definidas pelas relações definidas entre a área de trabalho natural do braço e a área de trabalho retangular desejada .....	148
Tabela C.1	Parâmetros das dimensões usadas para o cálculo da massa, centro de gravidade e momento de inércia de massa dos três trapezoides.....	180
Tabela E.1	Parâmetros comuns usados em todos os casos de verificação dos deslocamentos.....	188
Tabela E.2	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 1 .....	189
Tabela E.3	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 2.....	189
Tabela E.4	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 3.....	190
Tabela E.5	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 4.....	190
Tabela E.6	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 5.....	191
Tabela E.7	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 6.....	191
Tabela E.8	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 7.....	192

Tabela E.9	Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 8.....	192
Tabela F.1	Limites para os parâmetros da otimização estrutural .....	193
Tabela F.2	Valores dos atuadores usados como entrada para a terceira iteração do caso 2.....	193
Tabela F.3	Parâmetros de entrada usados para o caso 1 .....	194
Tabela F.4	Características de dimensão e desempenho que o robô deve possuir para o caso 1 .....	195
Tabela F.5	Resultados da definição dos parâmetros cinemáticos na terceira iteração do caso 2 .....	196
Tabela F.6	Resultados da definição dos parâmetros dos atuadores na primeira iteração do caso 2 .....	196
Tabela F.7	Valores otimizados para os parâmetros de altura das vigas dos elos, para a terceira iteração do caso 2.....	197
Tabela F.8	Parâmetros inerciais dos elos do braço final para o caso 2 .....	197
Tabela F.9	Máximas forças aplicadas pelos atuadores encontradas dentre os 225 pontos e 20 casos considerados .....	198
Tabela F.10	Parâmetros dos atuadores especificados para a configuração do braço da terceira iteração do caso 2.....	199

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

1D	Unidimensional
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
Adim.	Adimensional
CAD	<i>Computer Aided Design</i> , Projeto Assistido por Computador
CG	Centro de Gravidade
CNC	<i>Computer Numerical Control</i> , Controle Numérico Computacional
DFC	Diferenças Finitas Centrais
EDOSOCV	Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem com Coeficientes Variáveis
FEM	<i>Finite Element Method</i> , Método dos Elementos Finitos
GAI	<i>Global Average Index</i> , Índice Médio Global
GDL(s)	Grau(s) de Liberdade
GKI	<i>Global Kurtosis Index</i> , Índice de Curtose Global
GPI	<i>Global Performance Index</i> , Índice de Desempenho Global
GSI	<i>Global Skewness Index</i> , Índice de Obliquidade Global
GVI	<i>Global Volatility Index</i> , Índice de Dispersão Global
IFR	<i>International Federation of Robotics</i> , Federação Internacional de Robótica
RIA	<i>Robot Institute of America</i> , Instituto de Robótica da América
SCARA	<i>Selective Compliance Assembly Robot Arm</i> , Braço Robótico para Montagem com Conformidades Seletas
simDRH	Simulação Dinâmica de Robôs Hidráulicos com atuadores Lineares, programa desenvolvido em Matlab® para a simulação do braço

## LISTA DE SIMBOLOS

$A$	Área transversal	$m^2$
$a_1$	Comprimento do primeiro elo do braço	m
$A_1$	Vetor com as coordenadas do primeiro ponto de fixação do primeiro atuador, no sistema de coordenadas da base	m
$a_2$	Comprimento do segundo elo do braço	m
$A_2$	Vetor com as coordenadas do primeiro ponto de fixação do segundo atuador, no sistema de coordenadas do primeiro elo do braço	m
$A_2$	Matriz 2 x 3 com as coordenadas do ponto $A_2$ em função dos comprimentos $a_1$ e $a_2$	m, adim.
$\vec{A}_{end}$	Vetor de aceleração do centro de massa da ferramenta	$m/s^2$ , $rad/s^2$
$A_{epi}$	Erro de posicionamento nominal do atuador $i$	m
$A_i$	Vetor com as coordenadas do primeiro ponto de fixação do atuador $i$ , no sistema de coordenadas do elo $i - 1$ do braço	m
$\ A_i\ $	Distância entre a junta $i - 1$ do braço e o ponto $A_i$	m
$\ A_i'\ $	Distância entre a junta $i$ do braço e o ponto $A_i$	m
$\vec{a}_{i_{cil}}$	Vetor com as acelerações translacionais do centro de massa do cilindro do atuador $i$ , em um sistema de referência inercial	$m/s^2$
$A_{i_{embolo}}$	Área do êmbolo do atuador $i$	$m^2$
$A_{i_{ext}}$	Área ativa de extensão do atuador $i$	$m^2$
$\vec{a}_{i_{haste}}$	Vetor com as acelerações translacionais do centro de massa da haste do atuador $i$ , em um sistema de referência inercial	$m/s^2$
$A_{i_{haste}}$	Área da haste do atuador $i$	$m^2$
$A_{i_{ret}}$	Área ativa de retração do atuador $i$	$m^2$
$A_{ix}, A_{iy}$	Coordenadas do ponto $A_i$	m
$A_{max}$	Aceleração que o braço deve ser capaz de alcançar em qualquer ponto da área de trabalho com carga máxima	$m/s^2$
$a\theta_i$	Ângulo entre o atuador $i$ e a horizontal	rad
$a\dot{\theta}_i$	Velocidade angular do atuador $i$	rad/s
$a\ddot{\theta}_i$	Aceleração angular do atuador $i$	rad/s <sup>2</sup>
$B$	Matriz de Coriolis e atrito viscoso dos elos do braço	kg.m <sup>2</sup> /s

$b_1, b_2$	Largura das vigas dos elos 1 e 2 respectivamente	m
$B_1$	Vetor com as coordenadas do segundo ponto de fixação do primeiro atuador, no sistema de coordenadas do primeiro elo do braço	m
$B_1$	Matriz 2 x 3 com as coordenadas do ponto $B_1$ em função dos comprimentos $a_1$ e $a_2$	m, adim.
$B_2$	Vetor com as coordenadas do segundo ponto de fixação do segundo atuador, no sistema de coordenadas do segundo elo do braço	m
$B_{ep}$	Erro de posicionamento nominal da extremidade do braço, para uma dada posição, devido ao erro dos atuadores e da deformação elástica do braço	m
$B_i$	Vetor com as coordenadas do segundo ponto de fixação do atuador $i$ , no sistema de coordenadas do elo $i$ do braço	m
$\ B_i\ $	Distância entre a junta $i$ do braço e o ponto $B_i$	m
$B_{ix}, B_{iy}$	Coordenadas do ponto $B_i$	m
$b_s$	Base da seção da viga dos elos, dadas em função da posição $x$	m
$C$	Matriz de Coriolis dos elos do braço	kg.m <sup>2</sup> /s
$C_{a_1}$	Matriz de Coriolis do Atuador 1	kg.m <sup>2</sup> /s
$C_{a_2}$	Matriz de Coriolis do Atuador 2	kg.m <sup>2</sup> /s
$C_{end}$	Matriz de Coriolis da ferramenta	kg.m <sup>2</sup> /s
$cg_1$	Distância entre o centro de massa do primeiro elo e a primeira junta	m
$cg_2$	Distância entre o centro de massa do segundo elo e a segunda junta	m
$\ddot{CG}_c$	Vetor de acelerações translacionais e rotacionais do centro de gravidade de um corpo	m/s <sup>2</sup> , rad/s <sup>2</sup>
$CG_{i_{cil}}$	Posição do centro de massa do cilindro do atuador $i$	m
$CG_{i_{haste}}$	Posição do centro de massa da haste do atuador $i$	m
$CG_{i_{total}}$	Posição do centro de massa do atuador $i$ completo	m
$CG_{i_x}$	Coordenada $x$ do centro de gravidade do elemento de massa concentrada $i$	m
$CG_{i_z}$	Coordenada $z$ do centro de gravidade do elemento de massa concentrada $i$	m
$C_i$	Curso do atuador $i$	m
$C'_i$	Curso real do atuador físico especificado	m
$d_{ei}$	Diâmetro do êmbolo do atuador $i$	m
$d_{end}$	Distância entre a extremidade do braço e o centro de massa da ferramenta acoplada	m

$d_{hi}$	Diâmetro da haste do atuador $i$	m
$D_{li}$	Comprimento morto do atuador $i$	m
$D'_{li}$	Comprimento morto real do atuador físico especificado	m
$d_{luva_1}$	Diâmetro externo da luva de reforço para o eixo da Junta 1	m
$d_{luva_2}$	Diâmetro externo da luva de reforço para o eixo da Junta 2	m
$d_{off}$	<i>Offset</i> entre os elos do braço, na direção Z	m
$\frac{dp_i}{dP_i}$	Transmissão mecânica entre o atuador $i$ e a extremidade do braço	adim.
$d_{pin_1}$	Diâmetro do pino da Junta 1	m
$d_{pin_2}$	Diâmetro do pino da Junta 2	m
$d_{pin_{A_2}}$	Diâmetro do pino de acoplamento do ponto $A_2$	m
$d_{pin_{B_1}}$	Diâmetro do pino de acoplamento do ponto $B_1$	m
$d_{pin_{B_2}}$	Diâmetro do pino de acoplamento do ponto $B_2$	m
$E$	Módulo de elasticidade do material dos elos	N/m <sup>2</sup>
$e_l$	Comprimento efetivo dos elementos	m
$e_{length}$	Comprimento aproximado dos elementos, usado para a discretização do modelo simplificado	m
$\vec{F}_{act}$	Vetor de forças e momentos devido ao peso e inércia dos atuadores	N, N.m
$\vec{F}_{A_i}$	Vetor de forças que o atuador $i$ aplica sobre o ponto $A_i$ , no sistema de coordenadas local do atuador	N
$\vec{F}_{A_{i,g}}$	Vetor de forças que o atuador $i$ aplica sobre o ponto $A_i$ , no sistema de coordenadas global do braço	N
$F_{atrito_i}$	Força de atrito para o atuador $i$	N
$\vec{F}_{B_i}$	Vetor de forças que o atuador $i$ aplica sobre o ponto $B_i$ , no sistema de coordenadas local do atuador	N
$\vec{F}_{B_{i,g}}$	Vetor de forças que o atuador $i$ aplica sobre o ponto $B_i$ , no sistema de coordenadas global do braço	N
$\vec{F}_{c_l}$	Vetor de forças e momentos aplicadas por um corpo, no ponto de seu centro de gravidade, sobre uma estrutura externa	N, N.m
$\vec{F}_e$	Forças e momentos aplicados nos nós de um elemento, no sistema local do elemento	N, N.m
$\vec{F}_{ea}$	Vetor de forças e momentos devido à inércia de todos os elementos	N, N.m

	estruturais do modelo	
$\vec{F}_{eg}$	Vetor de forças e momentos devido ao peso de todos os elementos estruturais do modelo	N, N.m
$\vec{F}_{e_i a}$	Vetor de forças inerciais causadas pelo elemento $i$ sobre a estrutura	N, N.m
$\vec{F}_{e_i g}$	Vetor de forças e momentos aplicados sobre os nós do elemento $i$ devido ao peso próprio, no sistema de coordenadas global,	N, N.m
$\vec{F}_{end}$	Vetor de forças e momento aplicados pela ferramenta sobre a extremidade do braço	N, N.m
$\vec{F}_{ferra}$	Vetor de forças e momentos devido ao peso e inércia da ferramenta	N, N.m
$\vec{F}_l$	Vetor de forças e momentos externos aplicados devido à outros fatores	N, N.m
$F_L$	Coefficiente de atrito para atuadores com selamento padrão	adim.
$\vec{f}_l$	Vetor de forças ativamente aplicadas pelos atuadores sobre os elos	N
$f_{li}$	Força ativamente aplicada pelo atuador $i$	N
$Fl_{i crit}$	Força máxima encontrada para o atuador $i$ dentre todos os casos simulados durante uma iteração da otimização	N
$Fl_{i ext}$	Maior força de extensão aplicada pelo atuador $i$ sem considerar o atrito	N
$Fl'_{i ext}$	Maior força de extensão aplicada pelo atuador $i$ considerando o atrito	N
$Fl_{i ret}$	Maior força de retração aplicada pelo atuador $i$ sem considerar o atrito	N
$Fl'_{i ret}$	Maior força de retração aplicada pelo atuador $i$ considerando o atrito	N
$\vec{F}_{mca}$	Vetor de forças e momentos devido à inércia de todas as massas concentradas do modelo	N, N.m
$\vec{F}_{mcg}$	Vetor de forças e momentos devido ao peso de todas as massas concentradas do modelo	N, N.m
$\vec{F}_{mca_i}$	Vetor de forças inerciais causadas pelo elemento de massa concentrada $i$ sobre o nó correspondente da estrutura	N, N.m
$\vec{F}_{mcig}$	Vetor de forças e momentos aplicados sobre o nó do elemento de massa concentrada $i$ devido ao peso próprio, no sistema de coordenadas global	N, N.m
$\vec{F}_n$	Vetor de forças e momentos externos aplicados sobre os nós	N, N.m
$\vec{F}_{n_l}$	Vetor de forças e momentos externos aplicados sobre os graus de liberdade livres	N, N.m
$F_P$	Coefficiente de atrito para atuadores com selamento de baixo atrito	adim.
$F_{pimin}$	Inversa de $\bar{J}_{i, i_{min}}$ , maior valor possível para a robustez de um braço	m

$\vec{F}_r$	Vetor de forças e momentos externos aplicados devido à reação dos graus de liberdade fixos	N, N.m
$F_{v1}, F_{v2}$	Atritos viscosos na primeira e segunda juntas do braço	N.m/s
$g$	Aceleração gravitacional, convencionada igual à 9.80665 m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
$\vec{g}$	Vetor de aceleração gravitacional	m/s <sup>2</sup>
$G$	Módulo de cisalhamento do material dos elos	N/m <sup>2</sup>
$GPI$	Valor global de desempenho do braço sobre o volume de trabalho	adim.
$GPI_c$	Valor global de desempenho do braço sobre o volume de trabalho considerando uma aproximação para o custo	adim.
$H$	Matriz inercial dos elos do braço, com relação a $\ddot{q}$	kg.m <sup>2</sup>
$H_{a1}$	Matriz de inércia do Atuador 1, com relação a $\ddot{q}$	kg.m <sup>2</sup>
$H_{A2}$	Altura da seção da viga principal do primeiro elo do braço no ponto $A_2$	m
$H_{a2}$	Matriz de inércia do Atuador 2, com relação a $\ddot{q}$	kg.m <sup>2</sup>
$H_{B1}$	Altura da seção da viga principal do primeiro elo do braço no ponto $B_1$	m
$H_{B2}$	Altura da seção da viga principal do segundo elo do braço no ponto $B_2$	m
$H_{end}$	Matriz inercial da ferramenta, com relação a $\ddot{q}$	kg.m <sup>2</sup>
$H_{J1}$	Altura da seção da viga principal do primeiro elo do braço na Junta 1	m
$H_{J21}$	Altura da seção da viga principal do primeiro elo do braço na Junta 2	m
$H_{J22}$	Altura da seção da viga principal do segundo elo do braço na Junta 2	m
$H_{ponta}$	Altura da seção da viga principal na extremidade do segundo elo do braço	m
$h_s$	Altura da seção da viga dos elos, dadas em função da posição $x$	m
$I_1, I_2$	Momentos de inércia do primeiro e segundo elos do braço em torno do eixo z	kg.m <sup>2</sup>
$I_{end}$	Momento de inércia da ferramenta acoplada ao braço	kg.m <sup>2</sup>
$I_{cil}$	Momento de inércia de massa do cilindro do atuador $i$	kg.m <sup>2</sup>
$I_{haste}$	Momento de inércia de massa da haste do atuador $i$	kg.m <sup>2</sup>
$I_{total}$	Momento de inércia do atuador $i$ completo	kg.m <sup>2</sup>
$\dot{I}_{total}$	Variação do momento de inércia do atuador $i$ com o tempo	kg.m <sup>2</sup> /s
$J$	Momento de inércia polar da seção transversal da viga	m <sup>4</sup>
$J$	Matriz Jacobiana convencional do braço, que relaciona $\vec{X}$ com $\vec{q}$	m, adim.
$J'$	Matriz jacobiana modificada do braço, onde a terceira linha é zerada	m, adim.



$\dot{J}$	Derivada da matriz Jacobiana convencional do braço com relação ao tempo	m/s, s <sup>-1</sup>
$\bar{J}$	Matriz Jacobiana dos atuadores lineares do braço, que relaciona $\vec{q}$ com $\vec{P}$	rad/m
$J_c^j$	Matriz Jacobiana de um corpo pertencente ao elo $j$	m, adim.
$J''_{end}$	Matriz jacobiana modificada da ponta da ferramenta	m, adim.
$J_{cil}$	Matriz Jacobiana do cilindro do atuador $i$	m
$J'_{cil}$	Derivada da matriz Jacobiana do centro de massa do cilindro do atuador $i$ , modificada para considerar o sistema rotacional.	m/s
$J_{haste}$	Matriz Jacobiana da haste do atuador $i$	m
$J'_{haste}$	Derivada da matriz Jacobiana do centro de massa da haste do atuador $i$ , modificada para considerar o sistema rotacional.	m/s
$\bar{J}_{i,i}$	Componente $i$ da matriz Jacobiana $\bar{J}$ , igual à $\frac{dq_i}{dP_i}$	m <sup>-1</sup>
$\bar{J}_{i,i,min}$	Menor valor possível para a sensibilidade posicional de um braço	m <sup>-1</sup>
$J_T$	Matriz Jacobiana total do braço, que relaciona $\vec{X}$ com $\vec{P}$	adim, rad/m
$J_{\alpha i}$	Relação entre a velocidade angular do atuador $i$ e $\dot{q}_i$	adim.
$\dot{J}_{\alpha i}$	Relação entre a aceleração angular do atuador $i$ e $\dot{q}_i$	s <sup>-1</sup>
$K$	Matriz de rigidez global do sistema	N/m, N, N.m
$K_{e_i}$	Matriz de rigidez do elemento $i$	N/m, N, N.m
$K_f$	Matriz de rigidez dos graus de liberdade fixos do sistema	N/m, N, N.m
$k_j$	Índice de desempenho, índice de destreza	adim.
$K_l$	Matriz de rigidez dos graus de liberdade livres do sistema	N/m, N, N.m
$L$	Distância entre o ponto $(X_p, Y_p)$ e a Junta 1 do braço	m
$L_{ajustado}$	Comprimento ajustado de um atuador	m
$L_b$	Soma dos comprimentos dos elos do braço	m
$L_{basico}$	Comprimento básico de um atuador	m
$LB_i$	Limite inferior para o componente $i$ do vetor $\vec{v}_{otimização}$	vários
$L_{cut_2}$	Corte na viga do Elo 2 para formação do garfo de acoplamento no caso em que $B_{2x} < 0$	m
$l_i$	Distância entre a junta $i$ e a extremidade do braço para uma pose qualquer	m
$l_{imax}$	Maior distância possível entre a junta $i$ e a extremidade do braço	m
$Lmax$	Maior distância possível entre a extremidade do braço e a sua primeira junta	m

$L_{max}'$	Maior distância possível entre a extremidade do braço e a sua primeira junta, projetada sobre o plano onde a extremidade do braço se movimenta	m
$L_{min}$	Menor distância possível entre a extremidade do braço e a sua primeira junta	m
$L_{min}'$	Menor distância possível entre a extremidade do braço e a sua primeira junta, projetada sobre o plano onde a extremidade do braço se movimenta	m
$L_{tubo}$	Comprimento do tubo de parada de um atuador	m
$m_1, m_2$	Massas do primeiro e segundo elos do braço	kg
$\ Max_i\ $	Maior valor dentre as distâncias $\ A_i'\ $ e $\ B_i\ $	m
$m_{e_i}$	Massa do elemento $i$	kg
$m_{end}$	Massa da ferramenta e/ou objeto acoplado à extremidade do braço	kg
$M_{end}$	Matriz de inércia da ferramenta	kg, kg.m <sup>2</sup>
$M_c$	Matriz de inércia de um corpo	kg, kg.m <sup>2</sup>
$m_{cil}$	Massa do cilindro do atuador $i$	kg
$m_{haste}$	Massa da haste do atuador $i$	kg
$\ Min_i\ $	Menor valor dentre as distâncias $\ A_i'\ $ e $\ B_i\ $	m
$m_{i_{total}}$	Massa total do atuador $i$	kg
$m_{mci}$	Massa do elemento de massa concentrada $i$	kg
$M_r$	Índice de desempenho, manipulabilidade relativa	adim.
$n$	Número de graus de liberdade do braço	adim.
$n_{gdl}$	Número de graus de liberdade do sistema completo	adim.
$n_{gld_f}$	Número de graus de liberdade fixos do sistema	adim.
$n_{gld_i}$	Número de graus de liberdade do elemento $i$	adim.
$n_{gld_l}$	Número de graus de liberdade livres do sistema	adim.
$n_{i_x}, n_{i_z}$	Coordenadas $x$ e $z$ do nó do elemento da massa concentrada $i$	m
$\vec{p}$	Vetor com os comprimentos dos dois atuadores do braço	m
$P_1$	Comprimento atual do primeiro atuador do braço	m
$P_2$	Comprimento atual do segundo atuador do braço	m
$P_c$	Peso do custo	adim.
<i>penalty</i>	Valor de penalidade para a otimização	adim.
$P_i$	Comprimento atual do atuador $i$ do braço	m
$P_{imax}$	Comprimento que o atuador $i$ possui quando completamente estendido	m

$\dot{P}_{i_{max}}$	Maior velocidade encontrada para o atuador $i$	m/s
$P_{imed}$	Média dos valores de $P_{i_{max}}$ e $P_{i_{min}}$	m
$P_{i_{min}}$	Comprimento que o atuador $i$ possui quando completamente recolhido	m
$P_{\alpha}$	Vetor com os pesos relativos da média, dispersão, obliquidade e curtose para cálculo do valor global $\zeta_{integr}$ .	adim.
$P_{\beta}$	Vetor com os pesos relativos da manipulabilidade relativa, velocidade mínima, isotropia de velocidades e índice de destreza para o cálculo do $GPI$	adim.
$\vec{q}$	Vetor com os ângulos das juntas do braço ( $q_1, q_2$ )	rad
$q_1$	Ângulo entre o primeiro elo do braço e o eixo horizontal da base	rad
$q_{12}$	Ângulo entre o segundo elo e o plano horizontal	rad
$q_{13}$	Ângulo entre a ferramenta e o plano horizontal	rad
$q_2$	Ângulo entre o segundo e o primeiro elos do braço	rad
$q_3$	Ângulo entre o segundo elo e a ferramenta	rad
$q_i$	Ângulo entre um elo $i$ do braço e o elo anterior	rad
$q_{ilim1}$	Ângulo de limite de junta. Possui o valor de $q_{i_{min}}$ se o atuador $i$ estiver por cima da junta, ou $q_{i_{max}}$ se ele estiver por baixo.	rad
$q_{ilim2}$	Ângulo de limite de junta. Possui o valor de $q_{i_{max}}$ se o atuador $i$ estiver por cima da junta, ou $q_{i_{min}}$ se ele estiver por baixo.	rad
$q_{i_{max}}$	Valor máximo que o ângulo da junta $i$ pode assumir	rad
$q_{i_{min}}$	Valor mínimo que o ângulo da junta $i$ pode assumir	rad
$R$	Matriz de rotação elementar	adim.
$R_{ai}$	Matriz de rotação do atuador $i$	adim.
$t_b$	Espessura das chapas laterais verticais usadas para a construção dos elos	m
$tb_{A_2}$	Espessura do reforço da viga do primeiro elo em torno do ponto $A_2$	m
$tb_{B_1}$	Espessura do reforço da viga do primeiro elo em torno do ponto $B_1$	m
$tb_{B_2}$	Espessura do reforço da viga do segundo elo em torno do ponto $B_2$	m
$tb_{ref1_1}$	Espessura do reforço da viga do primeiro elo em torno da Junta 1	m
$tb_{ref1_2}$	Espessura do reforço da viga do primeiro elo em torno da Junta 2	m
$tb_{ref2_2}$	Espessura do reforço da viga do segundo elo em torno da Junta 2	m
$tb_{ref_{end}}$	Espessura do reforço da viga do segundo elo na sua extremidade	m
$tb_s$	Espessuras equivalentes das chapas verticais da seção da viga dos elos,	m

	dadas em função da posição $x$	
$T_{end}$	Matriz de deslocamento do ponto de aplicação da força	m, adim.
$t_h$	Espessura das chapas horizontais usadas para a construção dos elos	m
$th_s$	Espessuras equivalentes das chapas horizontais da seção da viga dos elos, dadas em função da posição $x$	m
$T_{mi}$	Matriz de translação de forças	m, adim.
$\vec{u}$	Vetor de deslocamentos da extremidade do braço devido à deformação elástica	m, rad
$ \vec{u} $	Deslocamento translacional total da extremidade do braço devido à deformação elástica, ou flecha	m
$UB_i$	Limite superior para o componente $i$ do vetor $\vec{v}_{otimização}$	vários
$\vec{u}_e$	Deslocamentos nodais de um elemento no sistema local do elemento	m, rad
$\vec{u}_{eg}$	Deslocamentos nodais de um elemento no sistema global	m, rad
$\vec{u}_n$	Vetor de deslocamentos nodais do sistema	m, rad
$\vec{u}_{nf}$	Vetor com os deslocamentos prescritos fixos do sistema	m, rad
$\vec{u}_{nl}$	Vetor com os deslocamentos nodais dos graus de liberdade livres do sistema	m, rad
$ \vec{u} _{projeto}$	Máxima flecha admissível para o braço	m
$\dot{V}_{caso}$	Vazão volumétrica necessária para o braço para um dado caso considerado	m <sup>3</sup> /s
$\dot{V}_{caso_i}$	Vazão volumétrica necessária para o atuador $i$ para um dado caso considerado	m <sup>3</sup> /s
$\dot{V}_{est}$	Estimativa para a vazão volumétrica necessária para a bomba hidráulica	m <sup>3</sup> /s
$V_{max}$	Velocidade que o braço deve ser capaz de alcançar em qualquer ponto da área de trabalho com carga máxima	m/s
$Vx$	Comprimento do volume de trabalho prismático desejado	m
$Vx'$	Comprimento da área de trabalho retangular que o braço deve ser capaz de alcançar	m
$Vy$	Altura do volume de trabalho prismático desejado	m
$Vz$	Largura do volume de trabalho prismático desejado	m
$\vec{X}$	Vetor com que informa as coordenadas e a orientação da extremidade do braço	m, rad
$\ddot{x}_{i_cit}$	Aceleração horizontal do centro de massa do cilindro do atuador $i$ , no sistema local de coordenadas, ajustadas para o referencial inercial	m/s <sup>2</sup>

$\ddot{x}_{i_{haste}}$	Aceleração horizontal do centro de massa da haste do atuador $i$ , no sistema local de coordenadas, ajustadas para o referencial inercial	m/s <sup>2</sup>
$X_p$	Coordenada X da extremidade do braço sobre o sistema de coordenadas global do braço	m
$W$	Espaço de trabalho desejado do braço	m <sup>2</sup>
$w_{A_2}$	Largura do reforço da viga do primeiro elo em torno do ponto $A_2$	m
$w_{B_1}$	Largura do reforço da viga do primeiro elo em torno do ponto $B_1$	m
$w_{B_2}$	Largura do reforço da viga do segundo elo em torno do ponto $B_2$	m
$w_{ref_1}$	Largura do reforço da viga do primeiro elo em torno da Junta 1	m
$w_{ref_{12}}$	Largura do reforço da viga do primeiro elo em torno da Junta 2	m
$w_{ref_{22}}$	Largura do reforço da viga do segundo elo em torno da Junta 2	m
$w_{ref_{end}}$	Largura do reforço da viga do segundo elo na sua extremidade	m
$\ddot{y}_{i_{cil}}$	Aceleração vertical do centro de massa do cilindro do atuador $i$ , no sistema local de coordenadas, ajustadas para o referencial inercial	m/s <sup>2</sup>
$\ddot{y}_{i_{CG}}$	Aceleração vertical do centro de massa geral do atuador $i$ , no seu sistema local de coordenadas, ajustada para o referencial inercial	m/s <sup>2</sup>
$\ddot{y}_{i_{haste}}$	Aceleração vertical do centro de massa da haste do atuador $i$ , no sistema local de coordenadas, ajustadas para o referencial inercial	m/s <sup>2</sup>
$Y_p$	Coordenada Y da extremidade do braço sobre o sistema de coordenadas global do braço	m
$\alpha_s$	Ângulo entre as chapas horizontais e a linha neutra da viga de um elo	rad
$\delta P$	Deslocamento combinado de todos os atuadores	m
$\Delta P_{atuador_i}$	Maior pressão necessária para a operação do atuador $i$	N/m <sup>2</sup>
$\Delta p_i$	Deslocamento da extremidade do braço causada pelo deslocamento do atuador $i$	m
$\Delta P_i$	Deslocamento do atuador $i$	m
$\Delta P_{caso}$	Pressão hidráulica necessária para o braço para um dado caso considerado	N/m <sup>2</sup>
$\Delta P_{caso_i}$	Pressão hidráulica necessária para o atuador $i$ para um dado caso considerado	N/m <sup>2</sup>
$\Delta P_{pump}$	Pressão máxima da bomba hidráulica	N/m <sup>2</sup>
$\Delta P_{pump_{max}}$	Pressão de trabalho máxima do sistema	N/m <sup>2</sup>
$\zeta_{avg}$	Média global de um dos índices de desempenho sobre o volume de	adim.

	trabalho. $\zeta$ pode representar qualquer um dos índices de desempenho.	
$\zeta_{integr}$	Valor global de um dos índices de desempenho sobre o volume de trabalho.	adim.
$\zeta_{kurt}$	Curtose da distribuição de um dos índices de desempenho sobre o volume de trabalho.	adim.
$\zeta_{skew}$	Obliquidade da distribuição de um dos índices de desempenho sobre o volume de trabalho.	adim.
$\zeta_{vol}$	Dispersão da distribuição de um dos índices de desempenho sobre o volume de trabalho.	adim.
$\lambda_i$	$i$ -ésimo autovalor da matriz jacobiana do braço	$m^2$
$\mu_{riso}$	Índice de desempenho, isotropia de velocidades	adim.
$\nu$	Coefficiente de Poisson	adim.
$\vec{v}_{otimização}$	Vetor com todos os parâmetros a serem otimizados	vários
$v'_{otimização_i}$	Componente $i$ do vetor diretamente otimizado pela função de otimização usada	vários
$\vec{v}_{outros}$	Vetor com todos os parâmetros de entrada que não são otimizados	vários
$v_{rmin}$	Índice de desempenho, velocidade mínima	adim.
$\sigma_i$	Raiz quadrada do $i$ -ésimo autovalor da matriz jacobiana do braço	m
$\vec{\tau}$	Vetor de torques externos aplicados sobre as juntas	N.m
$\vec{\tau}_a$	Torque equivalente que os atuadores aplicam sobre as juntas devido ao seu peso próprio e inércia	N.m
$\vec{\tau}_{ag_1}$	Vetor de torque equivalente devido ao peso próprio do Atuador 1	N.m
$\vec{\tau}_{ag_2}$	Vetor de torque equivalente devido ao peso próprio do Atuador 2	N.m
$\vec{\tau}_{end}$	Vetor de torques equivalentes aplicados pela ferramenta sobre as juntas	N.m
$\vec{\tau}_f$	Vetor de torques equivalentes ativamente aplicados pelos atuadores	N.m
$\vec{\tau}_g$	Vetor de torques devido ao peso próprio dos elos do braço	N.m
$\vec{\tau}_{g_{end}}$	Vetor de torques equivalentes devido ao peso da ferramenta e aceleração angular do punho	N.m
$\phi_{Ai}$	Ângulo entre a reta que liga a junta $i$ do braço com o ponto $A_i$ e o eixo horizontal do elo $i - 1$ do braço	rad
$\phi'_{Ai}$	Ângulo entre a reta que liga a junta $i - 1$ do braço com o ponto $A_i$ e o eixo horizontal do elo $i - 1$ do braço	rad
$\phi_{Bi}$	Ângulo entre a reta que liga a junta $i$ do braço com o ponto $B_i$ e o eixo	rad

horizontal do elo  $i$  do braço  
 $\psi_1, \psi_2$  Cursos angulares das juntas 1 e 2 do braço, respectivamente rad

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

É de conhecimento geral que robôs são amplamente empregados na indústria. Segundo a IFR, 2017, (*International Federation of Robotics*, Federação Internacional de Robótica) as vendas de novos robôs continuam a aumentar; em 2016 houve um aumento de 16% nas vendas quando comparado com o ano anterior, com um total estimado de 294.312 unidades. Isto se deve ao fato de que robôs são geralmente capazes de realizar tarefas mais rápida e precisamente do que um operário humano, aumentando a produção e a qualidade, e são também mais versáteis do que máquinas construídas para um fim específico, o que é importante no cenário atual da produção onde é buscada uma maior customização dos produtos, e lotes com menos unidades. Como são programáveis, podem ser facilmente reutilizados em outras linhas de produção, e podem até responder a diferentes situações por meio do uso de sensores.

Segundo o Instituto de Robótica da América (*Robot Institute of America*, RIA), “um robô é um manipulador multifuncional reprogramável projetado para mover materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especializados em movimentos variáveis programados para a execução de uma variedade de tarefas”. Desta forma, praticamente todas as máquinas usadas na indústria sob o controle de um computador podem ser chamadas de robô. No entanto, geralmente é feita uma distinção quanto às máquinas de fabricação CNC, que podem operar por remoção de material como no caso dos tornos e centros de usinagem CNC, ou por adição como no caso das impressoras 3D. Enquanto que estas máquinas são projetadas para realizar apenas um tipo de tarefa, as máquinas mais geralmente chamadas de robôs podem realizar vários tipos, como soldagem, pintura, movimentação de peças, paletização e montagem, necessitando apenas que a sua ferramenta, ou efetuator, seja trocada.

Existem vários tipos de robôs, que podem ser classificados de acordo com a sua estrutura ou configuração física (*geometry* segundo Spong et al., 2005) e tipo de atuação. Os robôs mais utilizados na indústria são os antropomórficos com acionamento elétrico, devido ao seu bom custo/benefício e boa versatilidade. Braços atuados hidraulicamente são utilizados principalmente em máquinas operadas manualmente, como escavadeiras. Exemplos destes tipos de máquinas podem ser visualizados na Figura 1.1.

Embora o uso de robôs antropomórficos com acionamento hidráulico não seja bem difundido na indústria, segundo Spong et al., 2005, este tipo de robô apresenta algumas



vantagens, como maior relação força/massa e melhor tempo de resposta, quando comparado com os robôs convencionais atuados eletricamente. No entanto, também existem desvantagens, uma vez que robôs hidráulicos geralmente possuem um maior erro de posicionamento, tendem a ser mais caros, e podem vir a apresentar vazamento do fluido de trabalho.

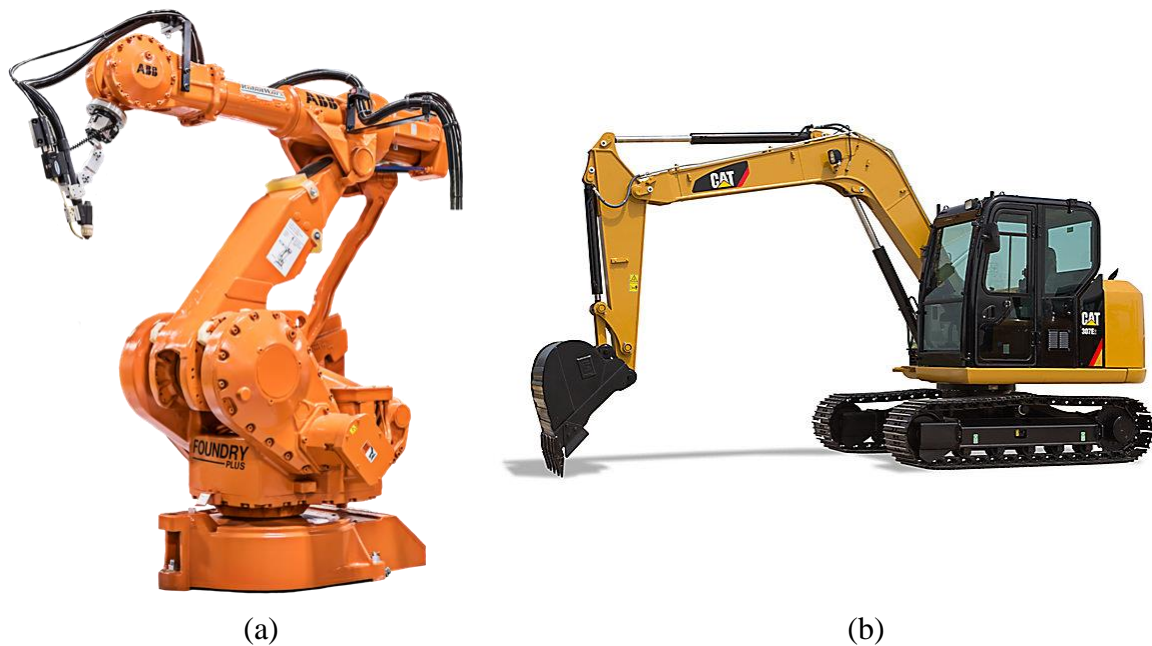


Figura 1.1 – (a) Robô antropomórfico com atuadores elétricos. [ABB®, 2018]. (b) Escavadeira com atuadores hidráulicos. [CAT®, 2018].

Embora existam vários modelos de robôs disponíveis no mercado, desenvolvidos por fabricantes como a Fanuc®, Yaskawa®, ABB®, Kuka®, Mitsubishi®, Epson® e Stäubli®, entre outros, não existe muita informação na literatura sobre a metodologia de desenvolvimento da parte física de um novo robô, nem do braço hidráulico de uma escavadeira. Existe uma grande quantidade de trabalhos relacionados ao controle e modelagem de robôs, porém é geralmente assumido que o robô a ser controlado ou modelado já se encontra construído ou determinado.

Um robô antropomórfico é caracterizado por três partes, correspondentes à base ou chassi, capaz de rotacionar sobre um eixo, o braço, que contém dois elos e duas juntas rotacionais, e o punho, que deve orientar a ferramenta acoplada à ponta do robô.

## 1.2 Motivação para o trabalho

A principal motivação para este trabalho é devido ao interesse da Parker®, uma empresa que produz primariamente componentes para sistemas hidráulicos, em desenvolver seus

próprios robôs manipuladores para atuação em suas linhas de fabricação. Estes robôs usariam os cilindros lineares fabricados pela empresa para a atuação do robô, aproveitando assim a sua tecnologia e a capacidade de fabricação.

### 1.3 Exposição do problema

O conceito escolhido para estudo é um robô antropomórfico com atuadores lineares diretamente acoplados aos elos. Esta escolha se deve à sua relativa simplicidade, e porque utiliza os atuadores hidráulicos convencionais fabricados pela Parker®. Um exemplo deste tipo de robô pode ser visualizado na Figura 1.2.

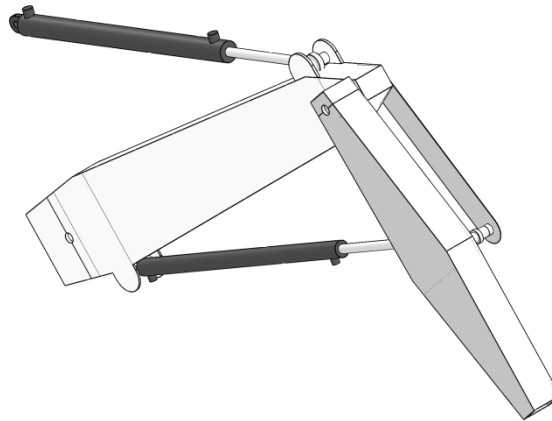


Figura 1.2 – Conceito de um robô hidráulico estudado no presente trabalho

Um robô hidráulico pode não ser necessariamente o mais indicado para uma dada tarefa. Portanto, é importante ser capaz de antecipar o desempenho que um robô teria, antes de ser construído um protótipo. Com esta informação, o processo de escolha do tipo de robô mais adequado é facilitado, pois o projetista conhecerá previamente as capacidades e desempenho que um robô hidráulico poderia ter, podendo estimar inclusive o seu erro de posicionamento, o que permite a sua comparação com outros tipos de robôs.

O desenvolvimento de um robô com atuadores lineares é mais complicado do que o de um robô com atuadores rotacionais. No caso dos robôs com atuadores rotacionais, existem várias características que podem ser maximizadas, como o tamanho do volume de trabalho. Em contrapartida, no caso dos robôs com atuadores lineares, a maximização destas características pode causar consequências negativas em outras características do robô, como a diminuição da precisão, o que requer um maior cuidado nas definições dos parâmetros. Isto é feito buscando-se um balanço entre as características. Além disto, existem mais parâmetros a serem definidos, como a posição dos pontos onde os atuadores são acoplados aos elos.

Já foi mencionado que uma característica geralmente importante dos robôs é a sua versatilidade. No entanto, o tipo de robô estudado neste trabalho possui uma versatilidade menor do que os robôs elétricos convencionais. Isto porque, apesar dos robôs hidráulicos poderem ser reprogramados e utilizados para diferentes tarefas, é importante que o desenvolvimento de um braço hidráulico tenha uma tarefa ou conjunto de tarefas como objetivo, devido ao mencionado no parágrafo anterior, para que possam ser escolhidos os balanços adequados entre as características. Desta forma, um manipulador com atuadores lineares poderá possuir um bom desempenho para realizar estas tarefas, mas provavelmente um menor desempenho para realizar outras tarefas, diminuindo assim a sua versatilidade. Assim, a limitação da versatilidade deve ser um fator a ser considerado quando se escolhe um robô com atuadores lineares ao invés de um com atuadores rotacionais.

Outro problema com o desenvolvimento de robôs hidráulicos é o maior custo dos componentes, como os atuadores, a bomba hidráulica e as servoválvulas, quando comparado com os motores elétricos e circuitos de potência utilizados em robôs convencionais. Para minimizar este custo, é importante que a escolha destas peças seja feita de modo adequado.

### **1.3.1 Estado da arte**

Na literatura foram encontrados poucos trabalhos que focam na determinação da cinemática e no desenvolvimento da estrutura de robôs. Em seu livro, Rivin, 1987, menciona várias considerações importantes para o projeto de um braço manipulador, mas não apresenta detalhes da maioria delas e não trata de parâmetros importantes, como as dimensões dos elos. O enfoque também não é em robôs hidráulicos. Ainda assim, esta referência é uma boa fonte de informações de apoio à metodologia proposta neste trabalho, considerando aspectos complementares que não são detalhados no presente trabalho. Albers et al., 2007 e 2006, documentam o desenvolvimento de componentes para o robô humanoide AMAR III, onde uma otimização topológica é utilizada para determinar a estrutura ótima. Este tipo de otimização também é mostrada por Kim et al., 2016, onde a topologia ideal da base de um robô de pintura é determinada. No entanto, a metodologia apresentada nestas referências não é totalmente adequada para o desenvolvimento do braço considerado, devido aos elevados custos envolvidos na fabricação de peças otimizadas por este método. Li et al., 2017, apresentam um estudo sobre a otimização da posição dos elos e juntas do braço de uma escavadeira hidráulica. No entanto, a metodologia é focada na maximização da força que a pá aplica sobre o solo ao cavar, e, portanto, não pode ser diretamente aplicada ao projeto do

braço estudado. Zhang et al., 2013, mostram uma forma de otimizar o tamanho dos elos de um robô serial ou paralelo. O enfoque dado não é de aplicação a robôs hidráulicos, mas a sua metodologia pode ser adaptada, se for modificado o modelo cinemático do braço para considerar os atuadores lineares.

Devido aos motivos apresentados, é necessário o desenvolvimento de novos métodos capazes de determinar os parâmetros ideais para um robô manipulador com atuadores hidráulicos lineares para uso em aplicação específica na indústria.

### **1.3.2 Proposta de uma solução**

A solução proposta é o uso de algoritmos matemáticos, tanto diretos quanto numéricos, para o desenvolvimento de uma metodologia capaz de determinar alguns dos parâmetros necessários para a construção de um robô manipulador com atuadores lineares. Para verificação dos resultados obtidos por estes algoritmos, são realizadas comparações com *softwares* comerciais e resultados encontrados na literatura.

O desenvolvimento de um robô é um processo complexo, e, portanto, este trabalho é limitado à determinação de alguns de seus parâmetros. O foco é apenas em uma parte do robô, o braço, e deste braço serão definidos apenas alguns parâmetros construtivos. Também não será feita uma análise aprofundada das tarefas que o robô deve realizar, devido à grande abrangência do assunto. Ao invés disto, assume-se que os requisitos das tarefas podem ser reduzidos a um conjunto de parâmetros, sendo eles o tamanho do espaço de trabalho, as velocidades e acelerações necessárias, e a capacidade de carga.

Primeiramente, será proposta uma metodologia para o cálculo dos parâmetros cinemáticos, que consistem dos comprimentos dos elos, dos cursos e limites angulares das juntas, e de um dos pontos de fixação de cada atuador. Para que isto seja possível, também devem ser calculadas a cinemática direta, inversa, e a matriz Jacobiana do braço.

Na segunda etapa será proposta uma metodologia para dimensionar a estrutura dos elos do braço, limitado à escolha de um conjunto de valores para as alturas das seções das vigas principais dos elos em alguns pontos de importância. Este dimensionamento é feito por meio de uma otimização, que busca minimizar as forças máximas que os atuadores devem aplicar durante a operação do braço, através da minimização da massa da estrutura, ao mesmo tempo em que mantém a rigidez acima de um valor mínimo, predeterminado pelo projetista. Para que isto seja possível, será feita uma análise estrutural pelo método dos elementos finitos, considerando carregamentos dinâmicos. Desta forma, a dinâmica do braço também será

calculada. Estão fora do escopo deste trabalho um dimensionamento dos rolamentos e outros detalhes estruturais, uma análise da vibração da estrutura do robô, ou uma análise das tensões estruturais.

Finalmente, será proposto um método para especificar os atuadores e a unidade de potência hidráulica adequada para o braço. São especificados componentes capazes de suprir as forças, pressões e vazões necessárias, calculadas com base em vários casos encontrados durante a operação nominal do braço. Estão fora do escopo desta especificação considerações como temperatura, *duty-cycle*, ou modos de vibração do fluido. Também não será feita uma análise detalhada da dinâmica do circuito hidráulico.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo principal**

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um método capaz de auxiliar o projetista a desenvolver um robô hidráulico, através da determinação de parâmetros de projeto de um braço robótico com atuadores lineares hidráulicos e análise de suas características de desempenho.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

A determinação destes parâmetros deve ser feita com base nas características das tarefas que o robô deve realizar, de modo que o resultado seja um braço otimizado para estas tarefas consideradas. Ao se desenvolver um robô com o método proposto, busca-se a obtenção de uma máquina com um desempenho adequado e menores custos, tornando-a apropriada para utilização na indústria.

O método deve determinar vários dos parâmetros de projeto de uma forma sistemática, baseado em hipóteses e algoritmos documentados. Desta forma, se facilita o processo de documentação das decisões das definições dos parâmetros de projeto, permitindo que elas sejam justificadas e discutidas.

O método deve ser modular, onde cada conjunto de parâmetros tem seus valores determinados por um módulo distinto. Desta forma, cada módulo pode ser substituído por um outro, com outro método ou outras hipóteses, se necessário. Assim, parte deste trabalho pode ser aplicado também para solucionar uma variedade de outros problemas, tais como o controle de um braço, a otimização estrutural de um robô elétrico, ou a especificação de atuadores hidráulicos adequados para máquinas operadas manualmente, como escavadeiras.

O primeiro módulo deve tratar sobre a determinação dos parâmetros cinemáticos do braço, isto é, os comprimentos dos elos e os cursos e limites angulares das juntas. Deve também ser capaz de determinar um dos pontos de fixação de cada atuador. Isto deve ser feito buscando-se a maximização de diversas características de desempenho do braço, principalmente a precisão e repetibilidade.

O segundo módulo deve abordar o dimensionamento da estrutura dos elos do braço. Esta estrutura deve ser rígida, sendo capaz de suportar os carregamentos dinâmicos que ocorrem durante a operação da máquina. Deve também ser leve, minimizando assim as forças que os atuadores precisam aplicar sobre o braço. Neste trabalho, o escopo deste dimensionamento é limitado à determinação das alturas das seções das vigas dos elos.

O terceiro módulo deve especificar os atuadores e a unidade de potência hidráulica adequada para o braço. Para tal, devem ser consideradas as forças que os atuadores aplicam sobre a estrutura e as velocidades que eles possuem, com diferentes posições, velocidades e acelerações do braço.

O método proposto deve ser implementado em um programa computacional, permitindo assim o cálculo automático dos parâmetros do braço. Desta forma, o processo de desenvolvimento é facilitado.

Também é um objetivo deste trabalho a análise da dinâmica e cinemática do braço, bem como uma análise do erro de posicionamento da extremidade do braço.

## **1.5 Estrutura deste documento**

No Capítulo 2 são apresentadas as classificações e características de um robô. Também são apresentadas as características do conceito do braço que é utilizado no presente trabalho, e no final é apresentada uma visão geral da metodologia proposta neste trabalho.

Nos capítulos 3, 4 e 5 é apresentada a metodologia proposta neste trabalho para definição dos parâmetros do braço, sendo que uma visão geral do funcionamento é apresentada na Figura 1.3.

No Capítulo 3 é detalhado o método de cálculo e definição dos parâmetros cinemáticos, no Capítulo 4 são analisados os carregamentos dinâmicos e dimensionadas as alturas das seções das vigas dos elos, o que é feito com a ajuda de uma análise estrutural, e no Capítulo 5 é detalhada a forma de especificação inicial dos atuadores e da unidade de potência hidráulica, considerando a força, pressão e vazão necessários.

No Capítulo 6 é apresentado um estudo de caso, exemplificando o uso do método proposto neste trabalho para o desenvolvimento de um braço hidráulico fictício, e é feita também uma discussão sobre os resultados obtidos. No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões obtidas, e é também feito um comentário sobre as partes de um robô hidráulico que não são definidas neste trabalho, ficando de sugestão para trabalhos futuros.

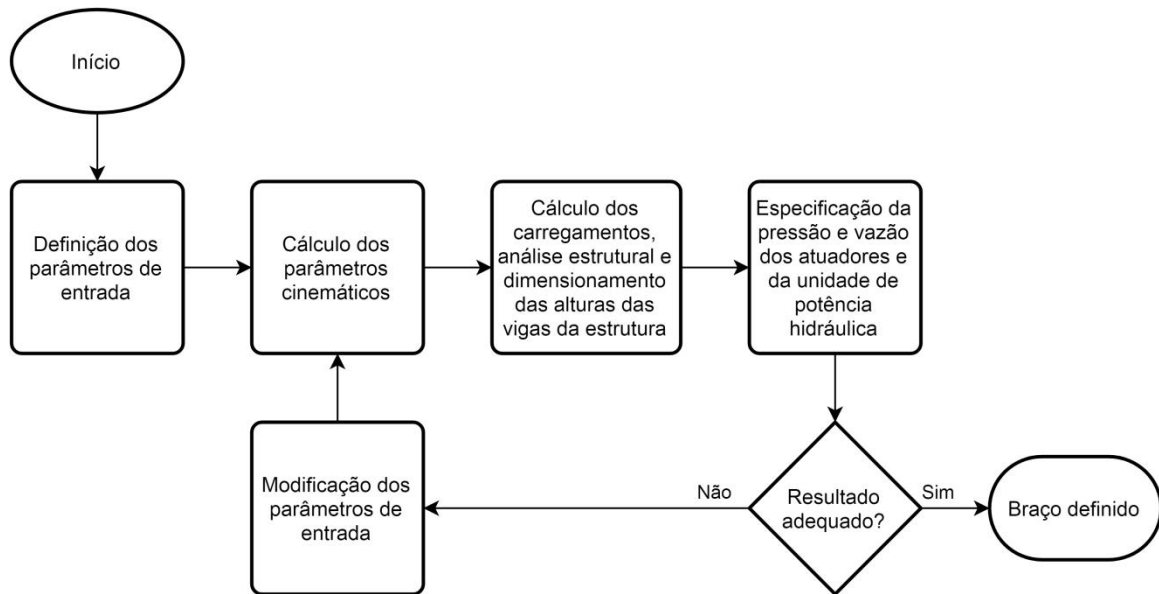


Figura 1.3 – Fluxograma mostrando uma visão geral da metodologia proposta neste trabalho

No Apêndice A são apresentadas as deduções para as equações apresentadas no Capítulo 3. No Apêndice B é apresentado modelamento detalhado completo do braço, enquanto que no Apêndice C é apresentado alguns detalhes do modelamento simplificado do braço. No Apêndice D é apresentado o equacionamento do elemento de viga de Timoshenko usado na simulação estrutural. No Apêndice E são apresentadas as tabelas dos parâmetros usados nos casos da verificação da análise estrutural. Finalmente, no Apêndice F é apresentado um segundo estudo de caso, complementado os resultados apresentados no Capítulo 6.

## 2 CARACTERÍSTICAS DE UM ROBÔ

Neste capítulo é descrita a forma de classificação dos robôs usualmente empregada na literatura, apresentada na Seção 2.1, bem como as características de desempenho importantes para um robô, mostradas na Seção 2.2. Na Seção 2.3 é feito um breve comentário sobre a forma de escolha do tipo de robô adequado para uma dada tarefa. Também é descrita, na Seção 2.4, uma forma de separar um robô articulado em três módulos para análise, um dos quais é o braço analisado no presente trabalho, e na Seção 2.5 são definidas as diferentes partes deste braço. Finalmente, na Seção 2.6 é apresentada uma visão geral da metodologia proposta no presente trabalho, antes de ser iniciado o seu detalhamento no Capítulo 3.

### 2.1 Classificação dos robôs

Existem vários tipos de robôs disponíveis no mercado. Segundo Spong et al., 2005, eles podem ser classificados quanto à sua área de aplicação, método de controle, forma de atuação e estrutura (*geometry* segundo Spong et al., 2005). No entanto, apenas os dois últimos são considerados importantes para este trabalho.

#### 2.1.1 Estrutura

Quanto à estrutura, os robôs podem ser classificados em dois grandes grupos: seriais e paralelos. Os robôs seriais possuem uma cadeia cinemática aberta, enquanto que os robôs paralelos possuem uma cadeia fechada. Exemplos de robôs destes dois tipos podem ser vistas na Figura 2.1.

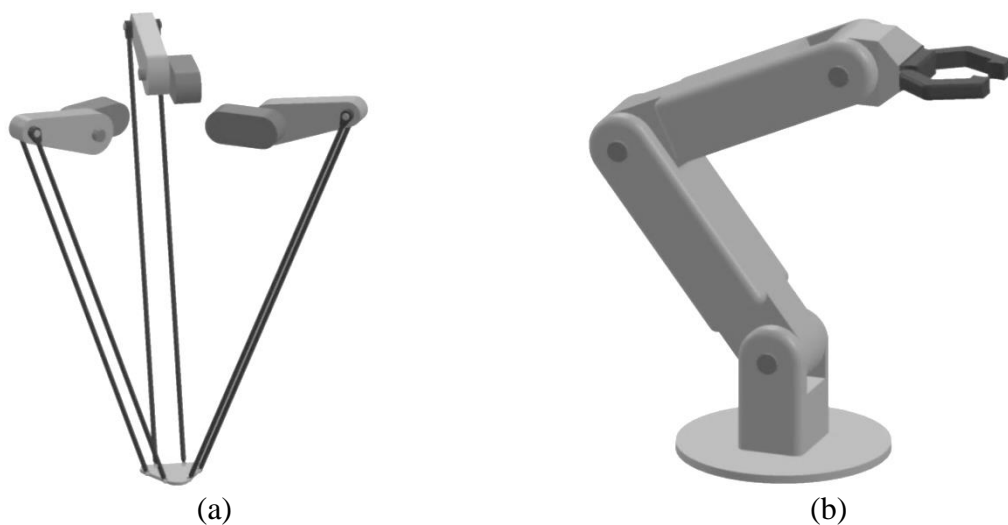


Figura 2.1 – Modelos tridimensionais mostrando um exemplo de: (a) um robô paralelo tipo delta, e (b) um robô serial tipo braço articulado.



Os robôs seriais podem ainda ser classificados de acordo com o tipo de movimento, rotacional (R) ou prismático (P) que cada uma das três primeiras juntas pode realizar. A orientação do eixo de cada junta rotacional também pode ser modificada, resultando em diferentes configurações. Assim, tem-se, por exemplo, RRR para os robôs manipuladores ou articulados, RRP para os esféricos e SCARA, RPP para os cilíndricos, e PPP para os cartesianos. A Figura 2.2 mostra diferentes tipos de robôs seriais de acordo com os tipos de juntas utilizadas.

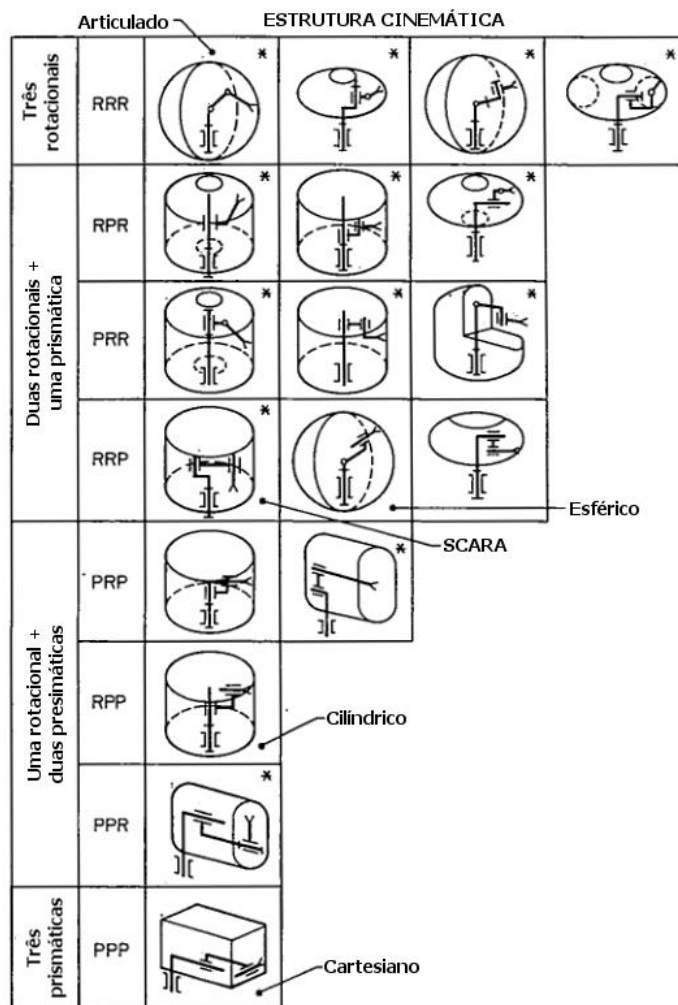


Figura 2.2 – Desenhos esquemáticos mostrando as diversas configurações dos robôs com respeito à sua geometria. [adaptado de Rivin, 1987].

Evidentemente, a escolha da geometria mais adequada para um robô depende das tarefas que ele deve desempenhar. Por exemplo, Robôs SCARA são geralmente mais adequados para operações de montagem, principalmente na eletrônica, enquanto que robôs cilíndricos são usados em sistemas automatizados de armazenamento. Os mais usados na indústria são os robôs articulados, ou manipuladores, pois podem realizar a maioria das operações realizadas por robôs devido à sua alta versatilidade, e porque seu preço não é muito elevado.

O robô hidráulico estudado neste trabalho possui atuadores prismáticos, no entanto esta é apenas a forma de atuação; as juntas dos elos são rotacionais e, portanto, constitui um braço articulado, como pode ser visto na Figura 2.3.

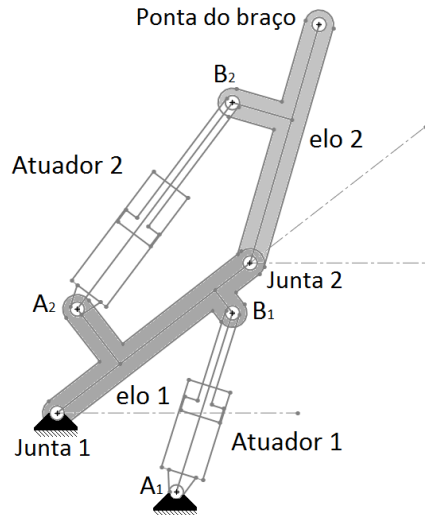


Figura 2.3 – Desenho esquemático do braço estudado

### 2.1.2 Forma de atuação

Segundo Spong et al., 2005, geralmente os robôs podem ser atuados eletricamente, hidráulicamente ou pneumaticamente. Atuadores elétricos são os mais utilizados, pois são de baixo custo e mais fáceis de controlar, sendo, geralmente, mais precisos. Atuadores hidráulicos, quando comparados com os elétricos, possuem um tempo de resposta menor e uma relação força/peso ou torque/peso maior, e, portanto, são geralmente usados em robôs que devem manipular cargas mais elevadas. No entanto, podem apresentar vazamentos do seu fluido de trabalho, e são usualmente mais ruidosos e mais difíceis de controlar do que os elétricos, prejudicando a precisão e repetibilidade que pode ser alcançada. Além disto, requerem componentes de custo elevado, como bombas hidráulicas e servoválvulas. Spong et al., 2005, afirmam também que robôs pneumáticos são mais simples do que os hidráulicos e podem ser possuir um custo menor do que os elétricos, mas são ainda mais difíceis de controlar, o que limita o seu uso.

## 2.2 Características de desempenho de um robô

### 2.2.1 Erro de posicionamento, repetibilidade e precisão

Segundo Pazos, 2002, a repetibilidade de um manipulador representa a sua capacidade de retornar repetidamente a um ponto determinado do espaço de trabalho. Quando o manipulador

encontra-se em um ponto determinado e então vai para um outro ponto qualquer, ao retornar ao primeiro ponto ele não se encontrará exatamente nas coordenadas originais; a distância entre o ponto onde o robô se encontra e o ponto onde ele deveria estar é chamado de erro de posicionamento. O conceito de “repetibilidade” está associado ao raio da menor esfera que envolve todos os pontos de retorno possíveis. Por outro lado, “precisão” é um conceito associado à capacidade do robô de atingir um ponto especificado, podendo ser interpretado como a distância entre o centro da esfera de repetibilidade e o ponto desejado.

A norma ISO 9283 define os testes que devem ser realizados para averiguação da precisão e repetibilidade de um manipulador robótico. Estes devem ser realizados várias vezes com várias cargas e velocidades, relativas às capacidades nominais do robô, sobre vários pontos do domínio de trabalho. Segundo a norma, os valores nominais são os mais desfavoráveis encontrados.

Greenway, 2000, afirma que historicamente a repetibilidade constituiu a característica mais importante, pois a programação feita com referência a pontos físicos, reais, tende a compensar os erros sistemáticos que provocavam a perda de precisão. No entanto, atualmente os robôs devem ser capazes de executar uma trajetória gerada por programas *CAD* ou outros sistemas externos, como sistemas de visão, o que requer uma alta precisão além de boa repetibilidade.

Segundo Schneider et al., 2016, os erros de posição de um robô podem ser divididos em erros dependentes do ambiente, erros de processo e erros do robô. Erros do ambiente dependem do espaço onde o robô é instalado, e portanto não podem ser reduzidos na etapa de projeto. Geralmente, este tipo de erro tem pouca influência no balanço global de erros. Erros dependentes do processo ocorrem devido às forças estáticas e dinâmicas decorrentes da execução da tarefa do robô. Este tipo de erro é mais importante quando a tarefa envolve vibrações, como é o caso da usinagem, e uma estimativa para seu valor depende de uma análise detalhada do processo. Os erros do robô são os mais importantes para este trabalho, e podem ser divididos em: erros geométricos, erros não geométricos, e erros do sistema.

Os erros geométricos são compostos pelos erros de tolerância e folgas de fabricação, folgas nas juntas e acoplamentos, e não linearidades nos atuadores. Kubela et al., 2015, mostra que em robôs elétricos uma fonte de erro considerável é o erro de folga dos motores, que é causado pelas diferenças geométricas nas engrenagens e ocorre quando a direção de movimento é invertida. Em robôs hidráulicos, a não linearidade das servoválvulas, principalmente na região central de abertura, causa um efeito similar. Estes erros podem ser compensados pelo controle, se for possível prevê-los com precisão.

Os erros não geométricos são causados pela deformação dos elos e juntas, desgaste das juntas, movimento adere-desliza devido ao atrito, e histerese nos atuadores. Em um robô com servoatuadores elétricos a principal causa de erros por flexibilidade do robô é a baixa rigidez das juntas, devido à presença de um sistema de engrenagens na redução dos servomotores. Mesmo assim, segundo Dumas et al., 2011, até 25% dos erros de posição podem ser causados pela deformação dos elos. No caso de um robô com atuadores lineares hidráulicos, a maior causa de deformação é devido à flexibilidade dos elos e dos pontos de acoplamento, pois o fluido de trabalho possui um rigidez elevada. Assim, é importante a construção de elos com alta rigidez.

Os erros de sistema são devidos aos erros de calibração, de medição dos sensores, do controle, e numéricos no sistema de processamento. No caso de robôs hidráulicos, o erro de posicionamento do braço será proporcional ao erro de posicionamento dos atuadores, que depende dos sensores e do método de controle utilizados. O mecanismo do braço pode amplificar ou reduzir este erro, devido à relação mecânica entre o deslocamento de um atuador e o deslocamento do efetuador do robô.

### **2.2.2 Velocidade e aceleração**

A velocidade e aceleração de um robô geralmente são dadas em graus por segundo, ou radianos por segundo, para cada junta. É necessário investigar a cinemática do robô para obter as velocidades e acelerações, as quais dependem da posição, em um sistema cartesiano, como mostrado posteriormente na Seção 3.1. Os “valores nominais do robô” são aqueles que ele é capaz de atingir em qualquer ponto do seu volume de trabalho, quando carregado com sua carga nominal. Geralmente, um robô possui uma maior agilidade em certos pontos, ou quando mais brandamente carregado.

### **2.2.3 Capacidade de carga**

A capacidade de carga nominal do robô é aquela para a qual ele é projetado para movimentar. É geralmente medida em quilogramas, porém a distância entre o centro de massa do objeto e o extremo do robô também influencia a capacidade de carregamento: quanto maior a distância, maior o esforço que ele precisa fazer.

Uma procura em catálogos de fabricantes de robôs industriais mostra que eles tipicamente possuem capacidades entre 3 kg e 20 kg, embora os de maior porte podem suportar 800 kg ou até 2300 kg no caso do Fanuc® M-2000iA/2300. Os robôs geralmente possuem sensores

capazes de interromper o seu funcionamento se for detectada sobrecarga, de modo a evitar danos aos seus motores ou mesmo à sua estrutura.

#### 2.2.4 Espaço de trabalho

Pade e Sastry, 1988, fazem uma distinção entre o espaço de trabalho alcançável e o espaço de trabalho de manipulação (*dextrous workspace*). O primeiro consiste do conjunto de todos os pontos alcançáveis por um ponto fixo ao braço, que geralmente é tido como o ponto de intersecção dos eixos das juntas do punho. Este ponto é no âmbito do presente trabalho chamado de “extremidade do braço”, por simplicidade. Já, o espaço de trabalho de manipulação é a região do espaço de trabalho alcançável em que o punho pode assumir uma orientação arbitrária. No entanto, para que isto seja possível, o robô deve possuir pelo menos uma redundância. Por exemplo, no caso de robôs manipuladores geralmente existem pontos alcançáveis com o cotovelo para baixo e para cima. Se o robô não possui uma redundância como esta, então ele não possuirá nenhum ponto em que a orientação do punho será totalmente arbitrária, pois algumas orientações causariam colisões com o elo onde o punho está fixado.

Neste trabalho também é feita uma distinção entre o espaço de trabalho total, ou natural, e o espaço de trabalho prismático, mostrados na Figura 2.4. O primeiro é o conjunto de todos os pontos que o robô pode alcançar, enquanto que o segundo é uma região do espaço, pré-definida pelo projetista sobre um sistema de coordenadas cartesiano, onde as tarefas do robô são realizadas, constituindo assim o espaço de interesse.

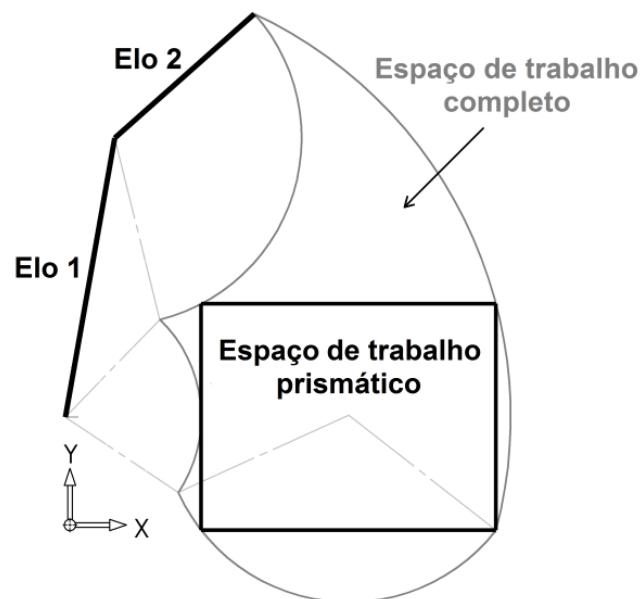


Figura 2.4 – Desenho esquemático mostrando a diferença entre os espaços de trabalho

## **2.3 Escolha do tipo de robô**

Para se escolher o tipo de robô mais adequado a uma aplicação, devem ser considerados vários fatores, como: o tipo de tarefas que ele deve realizar, a versatilidade necessária, os custos, o desempenho necessário e o volume de produção, além de comparação com o uso de alternativas como a mão de obra humana ou máquinas especializadas. Neste trabalho não será feita uma análise sobre este assunto, estando fora do seu escopo, podendo ser vista, por exemplo, em Oliveira, 2007.

## **2.4 Análise modular de um robô articulado**

Um robô articulado, também conhecido como manipulador ou antropomórfico, possui 6 Graus de Liberdade (GDLs) e pode ser dividido, para propósitos de projeto e análise, em 3 grupos distintos: a base, que contém o primeiro GDL, o braço, que contém os dois próximos GDLs, e o punho, que contém os 3 últimos GDLs. Cada grupo, ou módulo, é responsável por uma característica do robô: o braço define o alcance do robô e influencia de forma significativa a sua precisão, a base define a região de atuação do braço, e o punho orienta o efetuador.

Evidentemente, o projeto de cada módulo deve levar em conta as características dos demais. No contexto do presente trabalho, a influência que um módulo tem sobre outro pode ser representada por uma variável. Por exemplo, a massa do punho pode ser representada por uma força e um momento aplicados na extremidade do braço, como um requisito de projeto.

### **2.4.1 A base**

A base possui o primeiro GDL do robô. A carga suportada é grande, porém não há muita restrição quanto à sua massa, pois a maior parte do seu mecanismo permanece parado e apoiado sobre a estrutura externa de suporte, geralmente o próprio solo.

### **2.4.2 O punho**

O punho possui os GDLs 4, 5 e 6 do robô. Seus movimentos devem possuir cursos grandes e serem precisos, e sua massa deve ser a menor possível, mas não é necessário suportar um grande carregamento devido ao menor braço de alavanca.

### 2.4.3 O braço

O braço possui os GDLs 2 e 3 do robô. É possivelmente o seu módulo mais crítico, pois deve desempenhar grandes deslocamentos e suportar grandes esforços devido ao braço de alavanca. Deve ser relativamente rígido para não flexionar demais, ao mesmo tempo em que deve ser o mais leve possível para diminuir os esforços mecânicos, as forças nos atuadores, e os efeitos inerciais. Sua estrutura é formada por dois elos, com comprimentos  $a_1$  e  $a_2$ , e sua configuração é dada pelos ângulos  $q_1$  e  $q_2$ , segundo a notação utilizada por Valdiero, 2005, como mostrado na Figura 2.5.

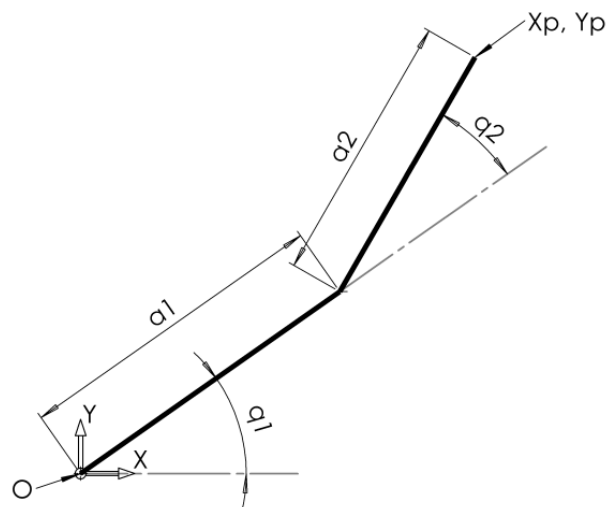


Figura 2.5 – Desenho esquemático mostrando a definição das dimensões e ângulos do braço

### 2.5 Definição do braço

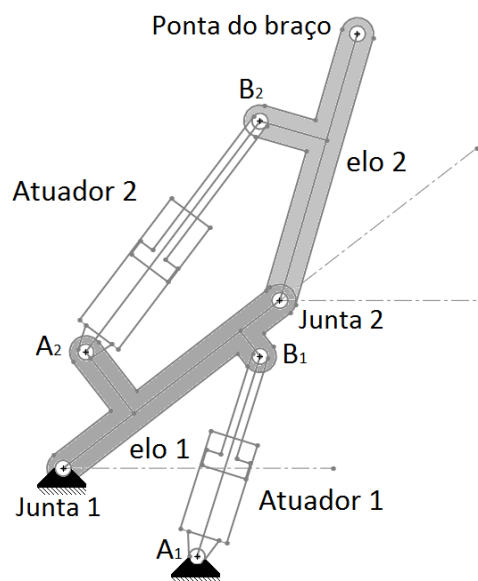


Figura 2.6 – Desenho esquemático do braço com juntas rotativas e atuadores lineares

O braço projetado é composto por dois elos, dois atuadores lineares diretamente conectados, e duas juntas rotativas. Um desenho esquemático deste braço é mostrado na Figura 2.6. É usada a mesma convenção usada por Valdiero, 2005, onde o atuador  $i$  é conectado entre os pontos  $A_i$ , pertencente ao elo  $i - 1$ , e  $B_i$ , pertencente ao elo  $i$ . Assim, o Elo 1 do braço possui os pontos  $B_1$  e  $A_2$ , e o Elo 2 possui o ponto  $B_2$ . Todos os pontos são definidos no sistema de coordenadas local do elo correspondente.

### 2.5.1 Sistema de coordenadas local de um elo

Cada elo possui um sistema de coordenadas local. Neste sistema, o eixo  $x$  passa pelas juntas 1 e 2 no caso do primeiro elo, e pela Junta 2 e pela extremidade do braço no caso do segundo elo. O eixo  $y$  aponta para a direção vertical. A origem se encontra na Junta 1 no caso do primeiro elo, e na Junta 2 no caso do segundo elo, conforme ilustrado na Figura 2.7, onde também são mostradas as coordenadas dos pontos  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ , dadas pelas dimensões  $A_{2x}$ ,  $A_{2y}$ ,  $B_{1x}$ ,  $B_{1y}$ ,  $B_{2x}$  e  $B_{2y}$ .

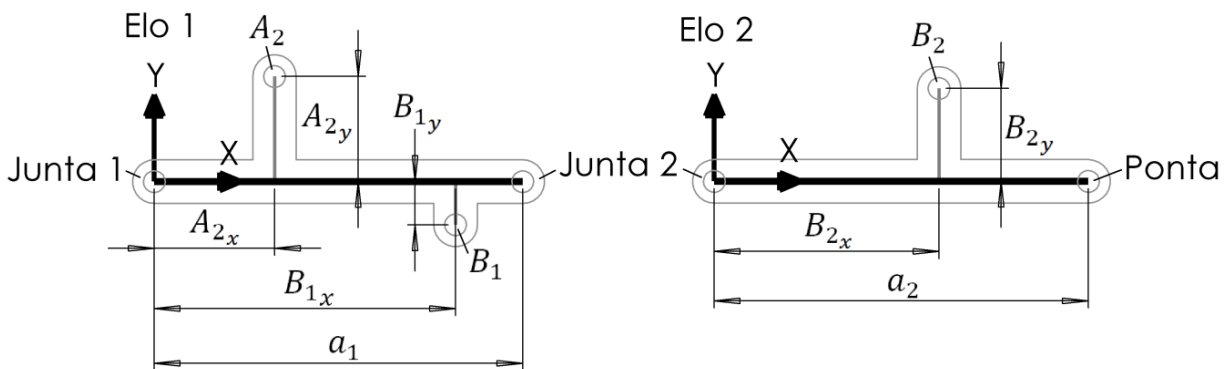


Figura 2.7 – Desenho esquemático mostrando os pontos e dimensões definidas no sistema de coordenada local dos elos

### 2.5.2 Disposição relativa de um atuador

Os atuadores podem ser fixados internamente ou externamente, com referência à junta correspondente. Se o atuador  $i$  for fixado internamente com relação à sua junta, então ao se estender ele faz com que o ângulo de junta correspondente,  $q_i$ , rotacione na direção anti-horária, ou seja, no sentido positivo, ao passo que se for fixado externamente, então ao se estender  $q_i$  rotaciona na direção horária, ou seja, no sentido negativo. Isto pode ser visto na Figura 2.8. Esta distinção é importante porque as equações cinemáticas, mostradas posteriormente, possuem casos distintos para as duas disposições possíveis.



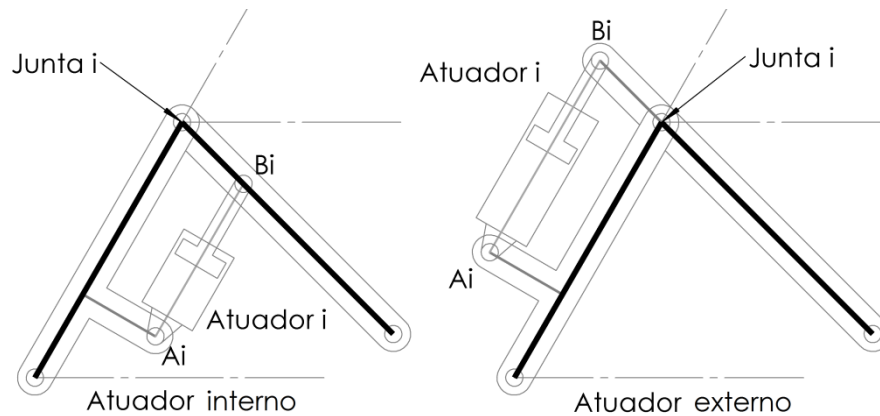


Figura 2.8 – Desenhos esquemáticos mostrando as possíveis disposições de um atuador

## 2.6 Visão geral da metodologia

O procedimento de desenvolvimento de um braço proposto neste trabalho é constituído de várias etapas, que estão relacionadas na Figura 2.9.

Antes de ser aplicado o método, o projetista deve definir quais tarefas o robô deve realizar, como já mencionado. A seguir, deve definir o volume de trabalho necessário para a realização destas tarefas, bem como a velocidade, aceleração e capacidade de carga, e também escolher alguns outros parâmetros de entrada, como a disposição relativa dos atuadores e largura da estrutura dos elos. Por último, ele deve definir valores iniciais estimados para os parâmetros dos atuadores, os quais não precisam ser muito precisos, pois seguindo os passos prescritos na metodologia proposta, serão calculados novos parâmetros, mais adequados à aplicação pré-definida. Estes procedimentos não serão abordados neste trabalho, devido à sua grande abrangência, ficando como responsabilidade do projetista a definição dos parâmetros adequados para as tarefas.

Com os valores de entrada iniciais definidos pelo projetista, o método pode ser iniciado. Como já mencionado, o método é composto de diversos módulos, cada um responsável pela determinação de alguns parâmetros do braço. Primeiramente são determinados os parâmetros cinemáticos adequados, compostos pelos comprimentos dos elos e limites angulares das juntas, e também os pontos de acoplamento dos atuadores com os elos. Este módulo é apresentado na Seção 3.2, mas depende do cálculo da cinemática inversa e da matriz Jacobiana, o que é apresentado na Seção 3.1.

Posteriormente, na Seção 4.2, são determinadas as equações dinâmicas do braço e dos atuadores. Estas equações são usadas para definir o carregamento do modelo estrutural usado para analisar a estrutura dos elos, cuja elaboração é mostrada na Seção 4.3. Esta análise

estrutural é otimizada, como apresentado na Seção 4.4, para dimensionar a estrutura. Neste trabalho, o escopo é limitado ao dimensionamento das alturas da seção transversal das vigas principais dos elos, em certos pontos.

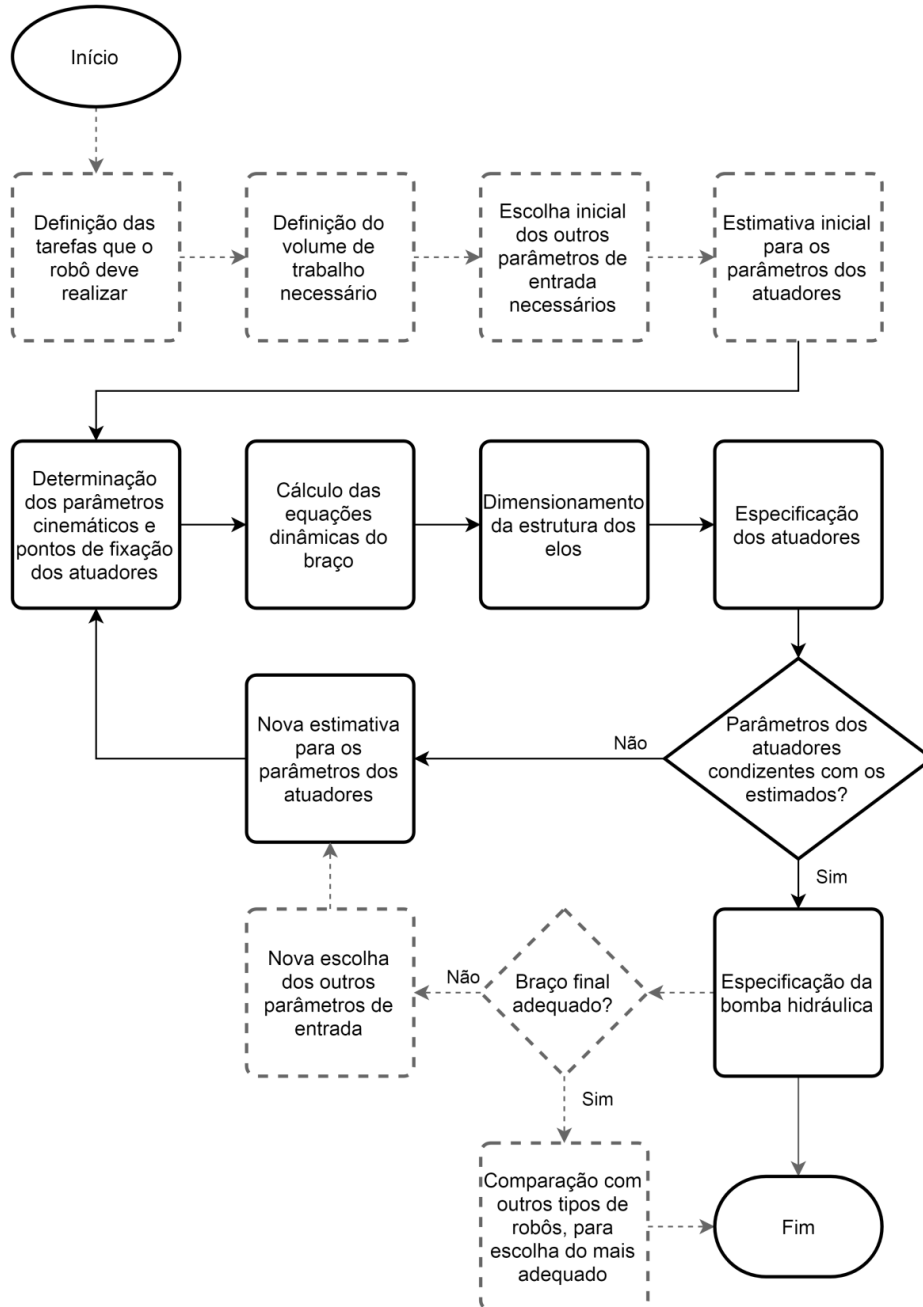


Figura 2.9 – Fluxograma mostrando o procedimento geral para desenvolvimento de um braço hidráulico proposto neste trabalho

Com a estrutura do braço definida, são especificados os atuadores adequados. Pode-se especificar os parâmetros adequados de um novo atuador, ou escolher dentre alguns modelos em um catálogo. Este módulo é mostrado no Capítulo 5. Os parâmetros dos atuadores escolhidos devem então ser comparados com os assumidos no início do processo. Se os

valores não estiverem próximos, então a análise deve ser refeita usando os novos valores obtidos. Caso contrário, então se pode passar para a próxima etapa, que é a definição dos parâmetros necessários da unidade de potência hidráulica para o braço. Isto também é mostrado no Capítulo 5. Neste trabalho, a especificação destes componentes considera apenas as forças, pressões e vazões necessárias, não sendo considerados fatores como temperatura, perda de carga nas tubulações ou facilidade de controle, entre outros.

Os exemplos mostrados neste trabalho terminam neste ponto. No entanto, caso esta metodologia seja aplicada na prática, é recomendado que alguns passos extras sejam aplicados, ilustrados pelas linhas pontilhadas do fluxograma da Figura 2.9. Como a metodologia depende de parâmetros de entrada definidos com base na experiência e estimativas do projetista, no final da aplicação do método é possível aplicá-lo novamente, com parâmetros diferentes, o que permite a obtenção de um braço potencialmente mais adequado. Após o projetista considerar o resultado satisfatório, ainda deve ser feita uma comparação com o desempenho obtido por simulação de outros tipos de robôs, como robôs articulados elétricos ou robôs cilíndricos ou esféricos.

### 3 PARÂMETROS CINEMÁTICOS

Neste capítulo é analisada a cinemática do braço, além dos parâmetros relacionados. Na Seção 3.1 são apresentados os cálculos da cinemática direta e inversa do braço, e também os da matriz Jacobiana, enquanto que na Seção 3.2 é apresentado o método proposto para definição dos parâmetros cinemáticos do braço, isto é, os comprimentos dos elos, os limites angulares das juntas e os pontos de fixação dos atuadores. Na Seção 3.3 é proposto um método para o cálculo do erro de posicionamento do braço, em função dos erros de posicionamento dos atuadores hidráulicos e da deformação elástica da estrutura.

#### 3.1 Cálculo da cinemática

Nesta seção são realizados os cálculos da cinemática direta e inversa, bem como os da matriz Jacobiana.

##### 3.1.1 Cinemática direta

Para determinar a cinemática direta, é preciso definir os ângulos e dimensões do braço, os quais são mostrados na Figura 3.1. Pode-se então usar o método de Denavit-Hartenberg para definir a cinemática direta do braço de uma forma convencional, resultando na Equação 3.1 que calcula o ponto  $(X_p, Y_p)$  da extremidade do braço em função dos ângulos de junta  $q_1$  e  $q_2$ , para um braço com elos de comprimento  $a_1$  e  $a_2$ . A dedução desta equação é mostrada no Apêndice A.1.

$$X_p = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_{12}), \quad Y_p = a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_{12}), \quad (3.1)$$

onde  $q_{12}$  é o ângulo entre o elo 2 e o plano horizontal, dado por

$$q_{12} = q_1 + q_2. \quad (3.2)$$

As juntas associadas aos ângulos  $q_1$  e  $q_2$  são acionadas pelos atuadores 1 e 2, respectivamente. Assim, é necessário calcular a relação entre o comprimento dos atuadores e o ângulo de junta correspondente.

Pode ser definida uma equação geral para o ângulo  $q_i$  de uma dada junta  $i$  em função do comprimento do atuador correspondente,  $P_i$ :

$$q_i = \phi_{Ai} - \phi_{Bi} - \arccos\left(\frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2}{2\|A_i'\|\|B_i\|}\right), \quad (3.3)$$

onde  $\phi_{Ai}$  é o ângulo entre o ponto  $A_i$  e a junta  $i$ , dado por

$$\phi_{Ai} = \text{atan}\left(\frac{A_{iy}}{A_{ix} - a_{i-1}}\right), \quad (3.4)$$

e  $\phi_{Bi}$  é o ângulo entre o ponto  $B_i$  e a junta  $i$ , dado por

$$\phi_{Bi} = \text{atan}\left(\frac{B_{iy}}{B_{ix}}\right), \quad (3.5)$$

sendo que os ângulos  $\phi_{Ai}$  e  $\phi_{Bi}$  podem ser visualizados na Figura 3.2. O ângulo  $\beta_i$  mostrado na figura é usado na dedução das equações, mas não faz parte das equações finais e portanto é utilizado apenas no Apêndice A.1.

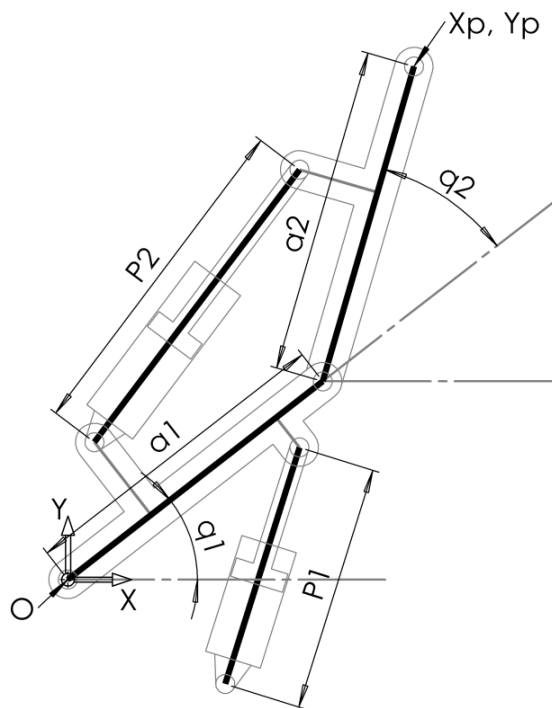


Figura 3.1 – Desenho esquemático mostrando a definição dos ângulos  $q_1$  e  $q_2$ , bem como as dimensões dos elos,  $a_1$  e  $a_2$ , e dos atuadores,  $P_1$  e  $P_2$ .

Estas equações dependem dos pontos de fixação do atuador,  $A_i$  e  $B_i$ , definidos na Seção 2.5. Os valores  $\|A_i'\|$  e  $\|B_i\|$  são as distâncias entre os pontos  $A_i$  e  $B_i$  e a junta  $i$  respectivamente, sendo definidos da seguinte forma:

$$\|A_i'\| = \sqrt{A_{iy}^2 + (a_{i-1} - A_{ix})^2}, \quad (3.6)$$

e

$$\|B_i\| = \sqrt{B_{iy}^2 + B_{ix}^2}. \quad (3.7)$$

A Equação 3.1, quando combinada com a Equação 3.3, permite definir o ponto  $(X_p, Y_p)$  da extremidade do braço em função dos comprimentos  $P_1$  e  $P_2$  dos atuadores.

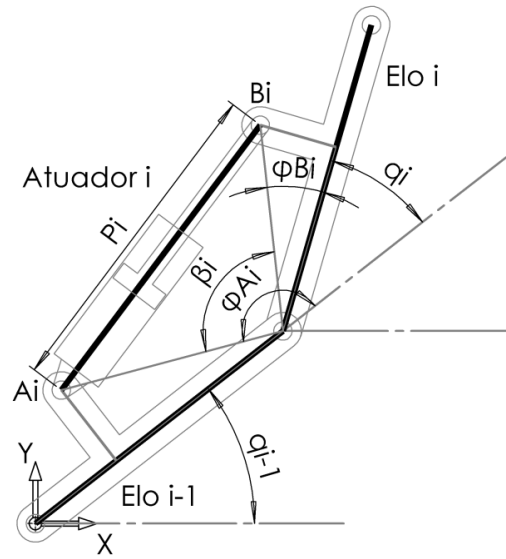


Figura 3.2 – Desenho esquemático mostrando a definição dos ângulos  $q_i$ ,  $\phi_{Ai}$ ,  $\beta_i$  e  $\phi_{Bi}$

### 3.1.2 Cinemática inversa

Para calcular a cinemática inversa, podem ser utilizadas as seguintes equações, cuja dedução encontra-se no Apêndice A.2:

$$q_2 = \text{atan2} \left( -\sqrt{1 - \left( \frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2} \right)^2}, -\frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2} \right), \quad (3.8)$$

onde  $L$  é a distância entre a extremidade do braço e a junta 1, dado por

$$L = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2}, \quad (3.9)$$

e

$$q_1 = \text{atan2} \left( \frac{[a_1 + a_2 \cos(q_2)]Y_p - a_2 \sin(q_2)X_p}{L^2}, \frac{[a_1 + a_2 \cos(q_2)]X_p + a_2 \sin(q_2)Y_p}{L^2} \right). \quad (3.10)$$

Estas equações são conhecidas na literatura, e podem ser vistas também em Siciliano et al., 2009.

Para calcular o comprimento dos atuadores, de forma que os ângulos de junta possuam os valores calculados pelas equações acima, pode-se utilizar a Equação 3.11, cuja dedução também é mostrada no Apêndice A.2.

$$P_i^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi}). \quad (3.11)$$

Combinando as Equações 3.8, 3.10 e 3.11 é possível determinar os valores de  $P_1$  e  $P_2$  para um ponto  $(X_p, Y_p)$  dentro do volume de trabalho do braço.

### 3.1.3 Matriz Jacobiana

A relação entre os comprimentos  $P_1$  e  $P_2$  e as coordenadas do ponto  $(X_p, Y_p)$  não é linear. A relação entre a velocidade dos atuadores e a velocidade da extremidade do braço, no entanto, é diretamente proporcional. Esta relação é dada pela matriz Jacobiana, como apresentado por Siciliano et al., 2009. A montagem desta matriz é amplamente conhecida na literatura para robôs com atuadores rotacionais, mas é um pouco diferente no caso de um robô com atuadores lineares e juntas rotacionais. Neste caso, a montagem da matriz é realizada conforme o apresentado por Valdiero, 2005. A dedução das equações apresentadas nesta seção é mostrada no Apêndice A.3.

A matriz Jacobiana convencional  $\mathbf{J}$  é definida de modo que:

$$\dot{\vec{X}} = \mathbf{J}\dot{\vec{q}}, \quad (3.12)$$

onde  $\dot{\vec{q}}$  é a derivada com respeito ao tempo de  $\vec{q}$ , que é um vetor com os parâmetros de junta, possuindo como componentes os ângulos  $q_1$  e  $q_2$ , e  $\dot{\vec{X}}$  é a derivada com respeito ao tempo de  $\vec{X}$ , que é um vetor com a posição e ângulo da extremidade do braço, definido abaixo:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ q_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

A Equação 3.12 é aplicável a um braço genérico qualquer. Braços diferentes possuem diferentes definições para a matriz Jacobiana, a qual depende da sua cinemática. No caso do braço aqui estudado, ela é composta por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 \text{sen}(q_1) - a_2 \text{sen}(q_{12}) & -a_2 \text{sen}(q_{12}) \\ a_1 \text{cos}(q_1) + a_2 \text{cos}(q_{12}) & a_2 \text{cos}(q_{12}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Derivando a Equação 3.12 é também possível obter as acelerações:

$$\ddot{\vec{X}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\vec{q}} + \mathbf{J}\ddot{\vec{q}}, \quad (3.15)$$

onde  $\dot{\mathbf{J}}$  é a derivada de  $\mathbf{J}$ , dada por

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -a_1 \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 - a_2 \text{cos}(q_{12})(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & -a_2 \text{cos}(q_{12})(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -a_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - a_2 \text{sen}(q_{12})(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & -a_2 \text{sen}(q_{12})(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Como o braço possui atuadores lineares, é preciso também a obtenção das velocidades dos atuadores. Portanto, é necessário relacionar o vetor de velocidades angulares das juntas,  $\vec{q}$ , com o vetor de velocidades dos atuadores  $\vec{P}$ , o que pode ser feito por intermédio de:

$$\vec{q} = \bar{J}\vec{P}, \quad (3.17)$$

onde  $\bar{J}$  é a matriz que relaciona as velocidades dos atuadores lineares com as velocidades dos parâmetros de junta. Esta matriz é dada por:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dP_1} & 0 \\ 0 & \frac{dq_2}{dP_2} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

onde  $\frac{dq_1}{dP_1}$  e  $\frac{dq_2}{dP_2}$  são dados por:

$$\frac{dq_i}{dP_i} = \bar{J}_{i,i} = \frac{-P_i}{\|A_i'\| \|B_i\| \text{sen}(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})}. \quad (3.19)$$

Finalmente, a matriz jacobiana total do braço,  $J_T$ , é dada pela combinação das duas matrizes apresentadas:

$$J_T = J\bar{J}. \quad (3.20)$$

### 3.2 Definição das dimensões dos elos, limites de junta e pontos de fixação dos atuadores

O braço possui seis parâmetros cinemáticos que devem ser calculados: as dimensões  $a_1$  e  $a_2$ , e os limites angulares das juntas,  $q_{1min}$ ,  $q_{1max}$ ,  $q_{2min}$  e  $q_{2max}$ . Além disto, os quatro pontos de fixação dos atuadores,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$  também devem ser determinados. A determinação destes parâmetros deve ser feita de modo a ser obtido o balanço desejado entre a precisão de posicionamento, repetibilidade, velocidade e aceleração sobre certo espaço de trabalho. Este balanço, ou seja, a importância relativa entre estas características, deve ser definido de acordo com a tarefa ou conjunto de tarefas a serem realizadas pelo braço.

A Figura 3.3 mostra um fluxograma do processo de determinação destes parâmetros. Os dados de entrada são um volume de trabalho prismático, definido pelo projetista de acordo com o necessário para a realização das tarefas, a orientação dos atuadores, as coordenadas dos pontos  $B_1$  e  $A_2$ , e alguns pesos usados para a otimização, que serão detalhados posteriormente.



O volume de trabalho prismático é usado para calcular a área de trabalho como mostrado na Seção 3.2.1.1. Esta área de trabalho, juntamente com uma estimativa inicial para os cursos angulares das juntas, são então usadas para calcular as dimensões dos elos do braço e os limites angulares das juntas. Estes são chamados de parâmetros cinemáticos, como mostrado na Seção 3.2.1.2.

Com os parâmetros cinemáticos definidos, e com os pontos  $B_1$  e  $A_2$  e a orientação dos atuadores escolhidos arbitrariamente, são determinados os pontos  $A_1$  e  $B_2$  mais adequados para maximização da menor precisão encontrada no espaço de trabalho, ou seja, busca-se melhorar o pior caso. Este procedimento é mostrado na Seção 3.2.2.

Neste ponto, o braço contém todos os seus parâmetros básicos já definidos. No entanto, os cursos angulares das juntas provêm de uma estimativa inicial. Para que sejam obtidos os cursos angulares ideais é feita uma otimização onde é buscado um braço com um desempenho ideal para as tarefas estabelecidas. Este processo, mostrado na Seção 3.2.3, depende da escolha de pesos usados para combinar os vários índices de desempenho em um único valor; estes pesos são dados de entrada. Após o teste de vários valores para os cursos angulares, são encontrados os valores finais, e o braço atinge a sua configuração definitiva.

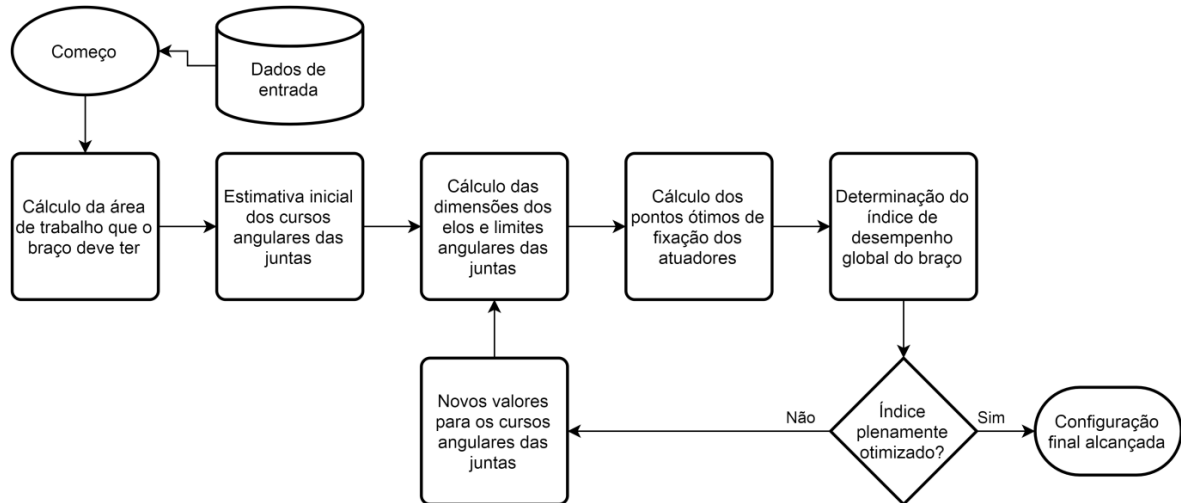


Figura 3.3 – Fluxograma mostrando o processo para determinação dos parâmetros cinemáticos e dos pontos de fixação dos atuadores

### 3.2.1 Limitação do volume de trabalho

Várias das tarefas que um robô deve realizar ocorrem sobre uma região prismática do espaço, como a manipulação de peças sobre uma bancada ou a soldagem de um componente. Assim, são propostos cálculos que permitam definir o tamanho dos braços e o limite de rotação de cada junta em função das dimensões desta região prismática, definida por um

comprimento  $V_x$ , largura  $V_z$ , e altura  $V_y$ . Desta forma o projetista não precisa considerar o espaço de trabalho completo ou natural do braço, que contém uma forma mais complexa, quando define o espaço de trabalho necessário.

Como o robô estudado neste trabalho é movimentado por atuadores lineares diretamente conectados aos elos, a transmissão do movimento linear dos atuadores para o movimento rotacional das juntas é similar a um mecanismo biela manivela. Devido a isto, o máximo curso angular teórico de cada junta é  $180^\circ$ , pois há um ponto de singularidade entre os dois hemisférios. Isto limita o volume de trabalho possível do braço, e devido a isto foi determinado que o braço deverá sempre operar com o cotovelo para cima; a redundância da posição do cotovelo é assim compensada por um espaço de trabalho útil maior. Como mencionado na Seção 2.2.4, há uma distinção entre o volume de trabalho alcançável e de manipulação, e, como não há nenhuma redundância no braço desenvolvido, ele não possuirá nenhum ponto onde a orientação do punho seja completamente arbitrária. Assim, nesta dissertação a expressão “volume de trabalho” irá se referir ao “volume de trabalho alcançável”, como definido por Pade e Sastry, 1988.

Na literatura, geralmente é buscada a maximização do tamanho do volume de trabalho, para maximizar a versatilidade do manipulador. Bergamaschi et al., 2004, e Panda et al., 2012, mostram este processo. No entanto, em um robô com atuadores lineares como o estudado neste trabalho, para que seja possível aumentar o tamanho do espaço de trabalho é necessário modificar os pontos de fixação dos atuadores, causando uma redução na relação de transmissão. Além de aumentar o espaço de trabalho, esta modificação também causa um aumento da velocidade e da aceleração da extremidade do braço, e uma diminuição da força e da precisão de posicionamento, se for considerado que a velocidade, aceleração, força e precisão dos atuadores não variam, como apresentado pela Figura 3.4.

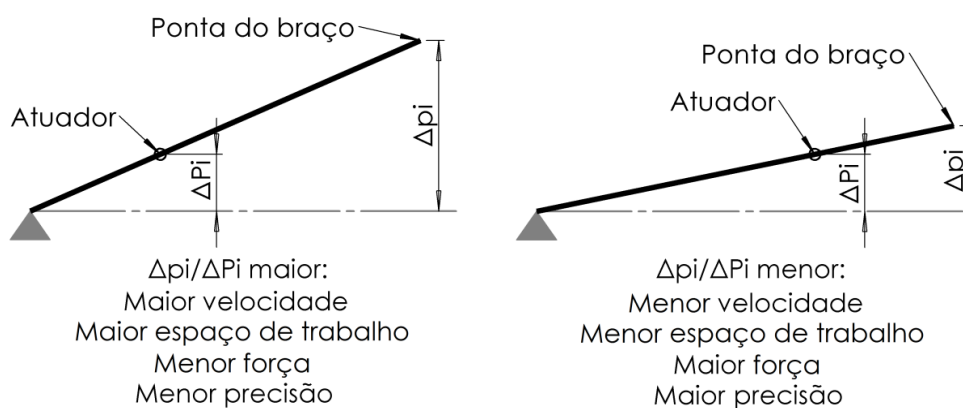


Figura 3.4 – Desenho mostrando os parâmetros afetados pela modificação da transmissão mecânica, assumindo que os parâmetros do atuador são os mesmos nos dois casos.

Atuadores hidráulicos podem possuir uma boa velocidade, aceleração e força, mas a sua precisão de posicionamento tende a ser baixa devido às dificuldades associadas ao seu controle. Assim, para o robô projetado neste estudo, o espaço de trabalho deve ser apenas o suficiente para que as tarefas possam ser executadas, pois um espaço maior do que o estritamente necessário aumentaria o erro de posicionamento, sem que seja em contrapartida obtida uma vantagem significativa em outros aspectos.

### 3.2.1.1 Cálculo da área de trabalho

Evidentemente, o volume de trabalho prismático possui três dimensões, porém o braço, que contém apenas as juntas 1 e 2, se desloca apenas sobre duas dimensões. A junta da base do robô é responsável pela terceira dimensão. Portanto, para determinação dos parâmetros do braço é preciso estabelecer uma área de trabalho equivalente, em duas dimensões, sobre o plano em que a extremidade do braço se movimenta. As dimensões desta área de trabalho devem ser calculadas em função das dimensões do volume de trabalho, de modo que quando esta área seja extrudada em torno do eixo da Junta 1 é gerado um volume de trabalho que inclui completamente o volume prismático. A altura é a mesma que a do volume de trabalho,  $Vy$ . A largura  $Vx'$  é dada por:

$$Vx' = \sqrt{(Lmin + Vx)^2 + \left(\frac{Vz}{2}\right)^2 - d_{off}^2} - Lmin', \quad (3.21)$$

onde  $Vx$  e  $Vz$  são a profundidade e largura do volume de trabalho prismático,  $Lmin$  é a distância entre o volume de trabalho e a base do robô,  $d_{off}$  é o *offset* entre os elos do braço, um parâmetro de entrada para o projeto do braço, e  $Lmin'$  é a distância entre a Junta 1 e o começo da área de trabalho, dada por:

$$Lmin' = \sqrt{Lmin^2 - d_{off}^2}. \quad (3.22)$$

A Figura 3.5 mostra o volume de trabalho e as relações geométricas que levam às Equações 3.21 e 3.22. Com isto, é definida uma área de trabalho para o braço, formada pelos pontos  $ABCD$ , que contém dimensões  $Vx'$  na horizontal e  $Vy$  na vertical, mostrada na Figura 3.6.

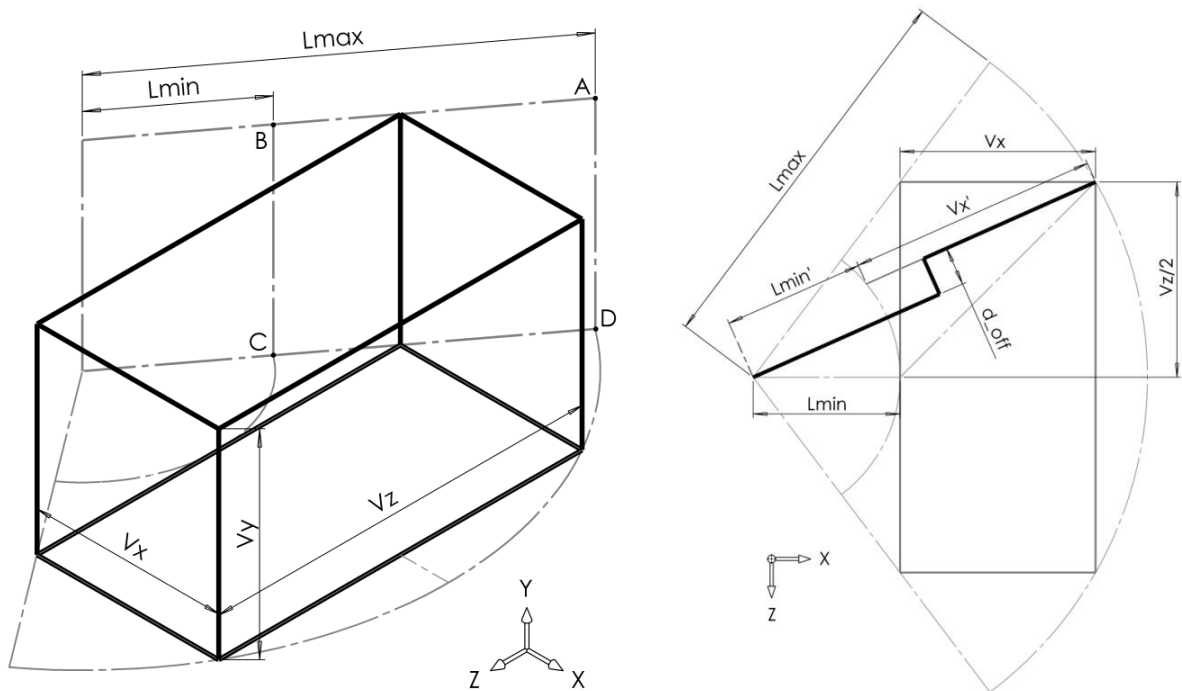


Figura 3.5 – Desenhos esquemáticos que mostram o volume de trabalho prismático e a relação de  $Vx'$  e  $Lmin'$  com  $Vx$ ,  $Vz$ ,  $Lmin$  e  $d_{off}$

Caso o robô precise operar em mais do que apenas uma região prismática, por exemplo uma região para pegar objetos e outra para largá-los, então podem ser definidos vários volumes prismáticos. Os parâmetros  $Vx$ ,  $Vy$  e  $Vz$  usados nas equações devem ser os maiores encontrados dentre todos os volumes. Desta forma, se o curso angular da base for aumentado, o volume de trabalho completo do robô poderá incluir todos os volumes prismáticos, como apresentado na Figura 3.7.

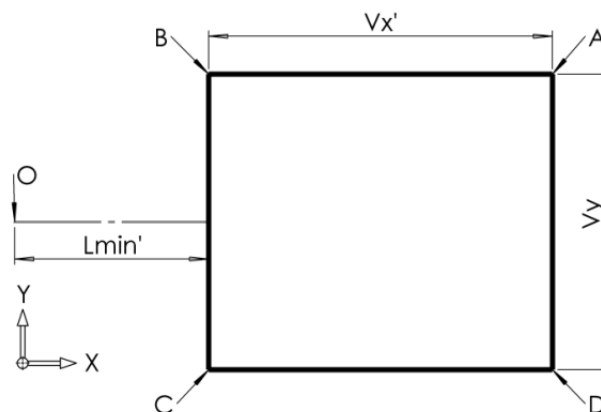


Figura 3.6 – Desenho esquemático mostrando a definição da área de trabalho, com os pontos ABCD demarcando os vértices, e o ponto O demarcando a posição da Junta 1.

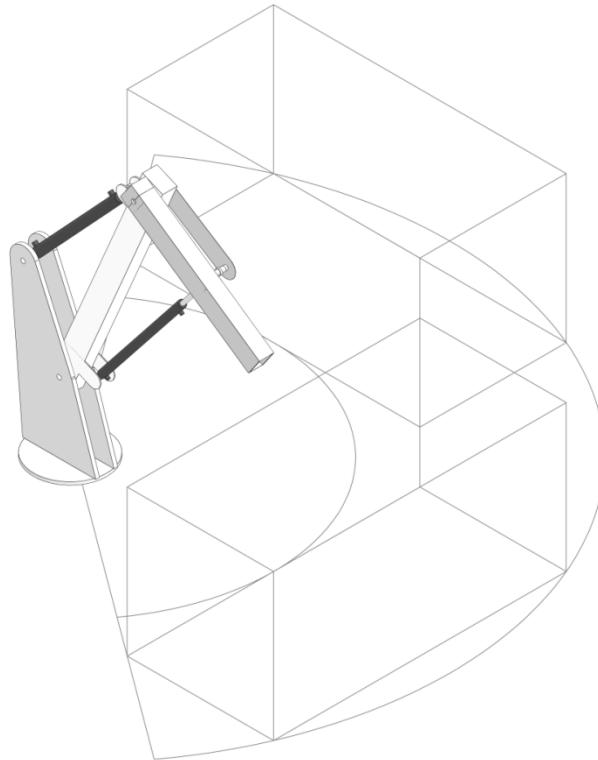


Figura 3.7 – Desenho tridimensional mostrando um robô cujo espaço de trabalho completo inclui dois volumes prismáticos

### 3.2.1.2 Cálculo dos comprimentos dos elos e dos limites angulares em função dos cursos angulares das juntas

O volume de trabalho prismático ocupa apenas uma fração do volume de trabalho do robô, e, sendo possível afirmar que quanto maior for esta fração mais eficiente é a utilização do espaço, e menor tenderá a ser o erro de posicionamento do braço dentro deste espaço. Com o objetivo de se obter uma boa eficiência, foram determinadas algumas condições geométricas que relacionam o volume de trabalho prismático e o volume de trabalho total do manipulador. As condições adotadas foram:

1. O volume de trabalho se encontra centrado verticalmente em relação à origem do robô.
2. Com o segundo elo recolhido ( $q_2 = q_{2min}$ ), movendo a Junta 1, a ponta do robô tangencia a reta  $\overline{BC}$ .
3. Com o segundo elo estendido ( $q_2 = q_{2max}$ ), movendo a Junta 1, a ponta do robô passa pelo ponto  $A$ .
4. Com o primeiro elo recolhido ( $q_1 = q_{1max}$ ), movendo a Junta 2, a ponta do robô passa pelo ponto  $B$ .

5. Com o primeiro elo estendido ( $q_1 = q_{1min}$ ), movendo a Junta 2, a ponta do robô passa pelo ponto *C*.
6. Com ambos os elos estendidos, a ponta do robô fica no ponto *D*.

O resultado da aplicação destas relações sobre a área de trabalho de um braço pode ser visto na Figura 3.8.

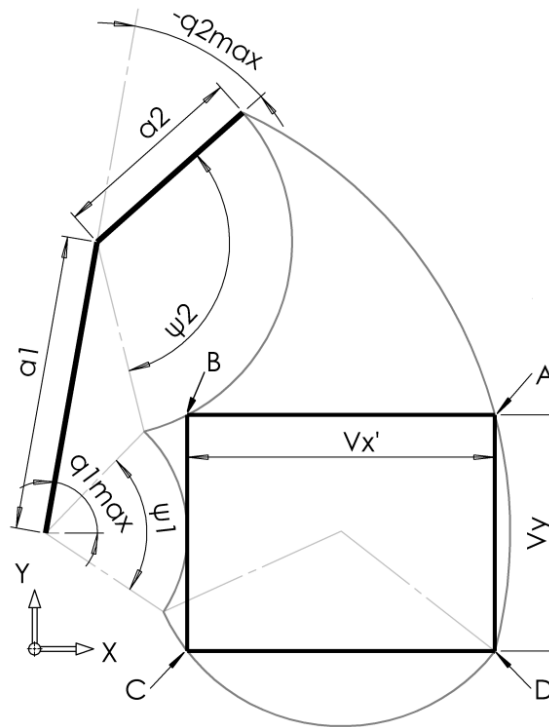


Figura 3.8 - Desenho que mostra a relação entre os ângulos  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $q_{1max}$ ,  $q_{2max}$  e as dimensões  $a_1$  e  $a_2$  com as dimensões da área de trabalho  $V_y$ ,  $V_{x'}$  e  $L_{min'}$ .

Além dos comprimentos dos elos e limites angulares das juntas, também é necessário definir a distância entre o começo da área de trabalho e a Junta 1, chamada de  $L_{min'}$ , e a altura da base do braço com relação à área. Existem, portanto, oito variáveis, mas apenas seis condições para o volume de trabalho, o que indica que dois destes parâmetros devem ser arbitrários. A metodologia para a definição dos pontos de fixação dos atuadores é mostrada na Seção 3.2.2, sendo que aqui é considerada apenas a cinemática do braço.

A altura da base do braço é diretamente definida pela primeira condição, e as outras cinco condições são usadas para definir cinco dos sete parâmetros restantes. Por uma simples modificação de variáveis, os parâmetros escolhidos para permanecerem arbitrários foram os cursos angulares das juntas,  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Como estes cursos são limitados devido ao uso de atuadores lineares para o acionamento do braço, esta escolha facilita a utilização de restrições durante a otimização, mostrada na Seção 3.2.2. As equações finais encontradas para a

definição dos parâmetros cinemáticos são apresentadas a seguir, com a dedução sendo mostrada no Apêndice A.4:

$$Lmin' = \frac{Vy}{2 \tan\left(\frac{\psi_1}{2}\right)}. \quad (3.23)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{(Lmin'^2 - Lmax'^2)}{2 \sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right)^2} + \frac{C - \left[(Vx' + Lmin') \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right) + \frac{Vy}{2}\right] D}{2}},$$

com  $C = \left[(Vx' + Lmin') \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right) + \frac{Vy}{2}\right]^2 +$  (3.24)  
 $Vx' \left[(Vx' + Lmin') - \frac{Vy}{2} \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right)\right],$

$$\text{e } D = \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right) \sqrt{Lmin'^2 + Vz Lmin' \operatorname{tg}\left(\frac{\psi_2}{2}\right) - \frac{Vy^2}{4}},$$

$$a_1 = \sqrt{\left(Lmin' + \frac{Vx'}{2}\right)^2 + \left[\sqrt{a_2^2 - \left(\frac{Vx'}{2}\right)^2} - \frac{Vy}{2}\right]^2}, \quad (3.25)$$

$$q_{1min} = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{a_2^2 - \left(\frac{Vx'}{2}\right)^2} - \frac{Vy}{2}}{Lmin' + \frac{Vx'}{2}}\right), \quad (3.26)$$

$$q_{1max} = q_{1min} + \psi_1, \quad (3.27)$$

$$q_{2min} = \operatorname{acos}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - Lmin'^2}{2a_1a_2}\right) - \pi, \quad (3.28)$$

e

$$q_{2max} = q_{2min} + \psi_2. \quad (3.29)$$

Também deve-se definir o alcance máximo do braço sobre o seu plano de deslocamento,  $Lmax'$ . Este pode ser expresso pela seguinte equação:

$$Lmax' = Vx' + Lmin'. \quad (3.30)$$

Estas equações foram verificadas com o *software* SolidWorks®, onde foi confirmado que o uso dos parâmetros por elas calculados define um braço capaz de alcançar todos os pontos desejados. Este resultado é a própria Figura 3.8, elaborada com este programa.

### 3.2.2 Definição dos parâmetros dos atuadores lineares para otimização da propriedade de repetibilidade de posicionamento

É necessária a definição dos comprimentos máximo e mínimo, do curso, e dos pontos de fixação dos atuadores. A escolha deve ser feita de forma a serem obtidos os valores de  $q_{1max}$ ,  $\psi_1$ ,  $q_{2min}$  e  $\psi_2$ , definidos na Seção 3.2.1.2. Além disso, também deve ser avaliada a sensibilidade do deslocamento da ponta do braço em função do deslocamento dos atuadores, pois este valor está relacionado com a repetibilidade que pode ser obtida pelo braço. A dedução das equações apresentadas nesta seção é mostrada no Apêndice A.5.

Para se obter os limites mínimo e máximo do comprimento do atuador  $i$ ,  $P_{imin}$  e  $P_{imax}$ , respectivamente, é possível basear-se na Equação 3.11, o que permite escrever:

$$P_{imax}^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_{ilim1} - \phi_{Bi}), \quad (3.31)$$

e

$$P_{imin}^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_{ilim2} - \phi_{Bi}), \quad (3.32)$$

onde  $q_{ilim1}$  e  $q_{ilim2}$  representam  $q_{imin}$  e  $q_{imax}$ . A atribuição depende da orientação do atuador: se ele estiver por cima da junta, então  $q_{ilim1} = q_{imin}$  e  $q_{ilim2} = q_{imax}$ , e, se estiver por baixo, então  $q_{ilim1} = q_{imax}$  e  $q_{ilim2} = q_{imin}$ .

Estas equações dependem da definição prévia de ambos os pontos de fixação do atuador, os quais podem ser escolhidos arbitrariamente pelo projetista, mas, de preferência, deve-se usar um método sistemático para a definição destes pontos, com o objetivo de se obter valores ideais sob alguma métrica. Assim, foi desenvolvido um método para definir um dos pontos, buscando a minimização do erro de posicionamento do braço nos pontos críticos.

O erro de posicionamento do manipulador, ou sua repetibilidade, depende do erro de posicionamento dos atuadores, além da flexibilidade do braço. O erro devido à flexibilidade é tratada na Seção 4.3, enquanto que aqui é avaliada a relação entre o erro de posicionamento de cada atuador,  $\Delta P_i$ , com o erro na extremidade do braço,  $\Delta p_i$ . A relação entre os dois erros é dada pela transmissão mecânica, que pode ser obtida da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta p_i}{\Delta P_i} = \frac{dp_i}{dP_i} = \sqrt{\left(\frac{dX_p}{dP_i}\right)^2 + \left(\frac{dY_p}{dP_i}\right)^2}, \quad (3.33)$$

onde  $X_p$  e  $Y_p$  são as coordenadas da extremidade do braço. A Equação 3.34 é equivalente:

$$\frac{dp_i}{dP_i} = \bar{J}_{i,i} l_i, \quad (3.34)$$



onde  $\bar{J}_{i,i}$  é mostrado na Equação 3.19 e  $l_i$  é a distância entre a junta  $i$  e a ponta do braço. Como  $\bar{J}_{i,i}$  depende do comprimento do atuador  $i$ , ele será aqui escrito como uma função de  $P_i$ ,  $\bar{J}_{i,i}(P_i)$ . O comprimento  $l_i$  para a segunda junta,  $l_2$ , é constante e igual a  $a_2$ , enquanto que o do primeiro elo,  $l_1$ , depende do ângulo  $q_2$  e varia entre  $Lmin'$  e  $Lmax'$ .

Neste caso, o foco é na transmissão mecânica porque quanto menor for  $\frac{dp_i}{dP_i}$  melhor será a repetibilidade do braço, para uma mesma repetibilidade  $\Delta P_i$  do atuador  $i$ . Além disso, a força obtida na extremidade do braço também é amplificada, mas a velocidade é atenuada. Isto porque esta transmissão mecânica é equivalente à de um braço de alavanca, como mostrado na Figura 3.4.

Pela norma ISO 9283, a repetibilidade nominal do braço é a menor repetibilidade encontrada em seu volume de trabalho. Portanto, se deve analisar quais são os pontos em que  $\frac{dp_i}{dP_i}$  é maior em função do comprimento  $P_i$ . Desde que  $\|A_i'\| \neq \|B_i\|$ , a função terá será uma curva em forma de uma bacia, como pode ser visto na Figura 3.9, para  $L = 1$ ,  $\|A_i'\| = 1$  e  $\|B_i\| = 2$ . Assim, o pior caso ocorre quando  $P_i = P_{imax}$  ou quando  $P_i = P_{imin}$ , com  $l_i = l_{imax}$  sendo a maior distância possível entre a ponta do braço e a junta  $i$ . Para o primeiro elo,  $l_{1max} = Lmax'$ , e para o segundo elo  $l_{2max} = a_2$ .

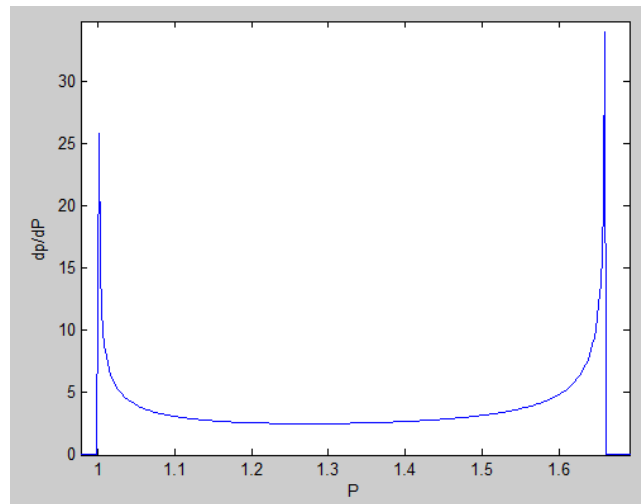


Figura 3.9 – Gráfico mostrando o comportamento de  $\frac{dp}{dP}$  em função de  $P$

O erro nominal do braço devido ao erro de posicionamento do atuador  $i$  é dado pela seguinte equação:

$$\Delta p_i = \Delta P_i \max(\bar{J}_{i,i}(P_{imax})l_{imax}, \bar{J}_{i,i}(P_{imin})l_{imax}). \quad (3.35)$$

Assim, para minimizar a sensibilidade de posicionamento, e melhorar a repetibilidade,  $\bar{J}_{i,i}(P_{imax})$  deve ser igual a  $\bar{J}_{i,i}(P_{imin})$ . Há também uma restrição sobre o curso do atuador, que deve ser escolhido de modo a ser possível alcançar o curso angular da junta. Desta forma, a sensibilidade é minimizada, para um dado curso  $C_i$ , se  $\bar{J}_{i,i}(P_{imax}) = \bar{J}_{i,i}(P_{imin}) = \bar{J}_{i,i,min}$ .

Ao se resolver um sistema de equações que leva em consideração as restrições de curso e comprimento dos atuadores, chega-se à seguinte equação para a inversa do valor de  $\bar{J}_{i,i,min}$ , definida por  $F_{pimin}$ :

$$\frac{1}{\bar{J}_{i,i,min}} = F_{pimin} = \frac{-3 \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) D_{li} \pm \sqrt{\|Max_i\|^2 \left(9 \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2 + 1\right) - D_{li}^2}}{\left(9 \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2 + 1\right)}, \quad (3.36)$$

$$\text{com } \|Max_i\| \equiv \max(\|A_i'\|, \|B_i\|),$$

onde  $D_{li}$ , ou “comprimento morto”, é a parte do comprimento do atuador que não contribui para o seu curso. O comprimento morto é composto de duas partes,  $D_{li}'$  e  $D_{li}''$ , que se referem ao comprimento morto da base e da extremidade, respectivamente, como mostrado na Figura 3.10. Embora o curso possa ser customizado com relativa facilidade, este comprimento morto é uma característica de projeto do atuador. O valor para os atuadores considerados deve ser tomado de um catálogo ou fornecido diretamente pelo fabricante.

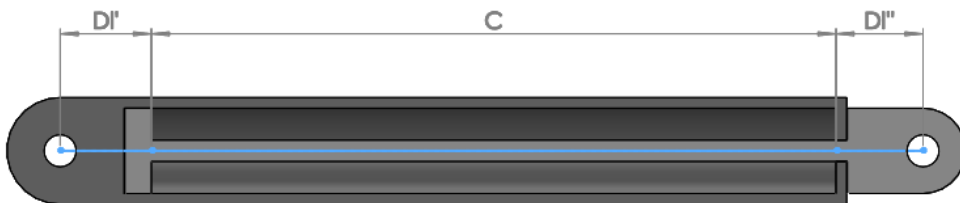


Figura 3.10 – Desenho mostrando o curso e as duas partes do “comprimento morto” do cilindro atuador

Com o valor  $F_{pimin}$  calculado, é possível obter os demais parâmetros do atuador  $i$ , incluindo um dos pontos de fixação, usando-se as seguintes equações:

$$P_{imed} = \sqrt{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2}, \quad (3.37)$$

onde  $P_{imed}$  é o comprimento do atuador quando ele se encontra na metade do seu curso,

$$P_{imax} = P_{imed} + \frac{C_i}{2}, \quad (3.38)$$

$$P_{imin} = P_{imin} - \frac{C_i}{2}, \quad (3.39)$$

$$\|Min_i\| = \frac{F_{pimin}}{\cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)}, \quad (3.40)$$

onde  $\|Min_i\| \equiv \min(\|A_i'\|, \|B_i\|)$ , e

$$C_i = 2 \|Min_i\| \operatorname{sen}\left(\frac{\psi_i}{2}\right), \quad (3.41)$$

onde  $C_i$  é o curso do atuador.

Os parâmetros  $l_{imax}$  e  $\psi_i$  são definidos em função do volume de trabalho desejado, enquanto que  $\|Max_i\|$  é um valor arbitrário, definido como um parâmetro de entrada no projeto. O uso dos pontos  $\|Max_i\|$  e  $\|Min_i\|$ , ao invés dos pontos  $\|A_i'\|$  e  $\|B_i\|$ , é importante para o equacionamento, como pode ser visto no Apêndice A.5.

Geralmente, os atuadores são montados de forma a estarem mais alinhados com o primeiro elo. Neste caso, para o primeiro atuador, o ponto de fixação  $Max_1$  será  $B_1$ , e portanto  $\|Max_1\| = \|B_1\|$ . Similarmente, para o segundo atuador,  $Max_2 = A_2'$ , e  $\|Max_2\| = \|A_2'\|$ , lembrando que  $A_2'$  é baseado no ponto  $A_2$  segundo a seguinte equação:

$$A_2' = \begin{bmatrix} a_1 - A_{2x} \\ A_{2y} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Por consequência,  $\|Min_1\| = \|A_1'\|$  e  $\|Min_2\| = \|B_2\|$ .

A definição dos pontos de fixação iniciais  $B_1$  e  $A_2$  é feita na especificação do projeto, antes mesmo de serem definidos os comprimentos dos elos. Como a definição dos pontos pode depender dos comprimentos, são usadas duas matrizes,  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ , de modo que:

$$B_1 = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

e

$$A_2 = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

As matrizes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  possuem dimensão de 2 x 3. Desta forma, os pontos de fixação iniciais podem ser definidos em função dos comprimentos dos elos, mesmo eles ainda não sendo conhecidos no começo do projeto.

A Equação 3.40 permite calcular apenas a distância entre o ponto de fixação do atuador e a junta correspondente. Para obter a posição deste ponto também é necessário o cálculo de um ângulo, o que pode ser feito por intermédio da seguinte equação:

$$(\phi_{Ai} - \phi_{Bi}) = \pm \operatorname{acos} \left( \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_{imin}^2}{2\|A_i'\|\|B_i\|} \right) + q_{ilim2}, \quad (3.45)$$

onde o sinal  $\pm$  aparece porque  $\cos(x) = \cos(-x)$ . Deve ser positivo se o atuador estiver por cima da junta, ou negativo se estiver por baixo. Com isso, se pode definir o valor de um dos ângulos  $\phi_{Ai}$  ou  $\phi_{Bi}$ . O valor do outro ângulo deverá ser calculado de acordo com o ponto inicial definido arbitrariamente. O cálculo destes ângulos em função das coordenadas dos pontos é mostrado na Seção 3.1.1.

Para que seja possível fabricar o braço, é importante que os valores para as coordenadas dos pontos de acoplamento sejam truncadas em um certo valor, por exemplo para o milímetro mais próximo. Com os pontos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$  calculados e truncados, então podem ser usadas as Equações 3.31 e 3.32, juntamente com os limites angulares calculados na Seção 3.2.3, para calcular os comprimentos mínimos e máximos dos atuadores. Estes valores não precisam ser truncados; os atuadores físicos escolhidos apenas precisam ter um comprimento mínimo menor do que o valor calculado, e similarmente um comprimento máximo maior. Isto pode ser obtido se for usado nos cálculos desta seção um comprimento morto  $D_{li}$  levemente maior do que o do atuador cogitado.

### 3.2.3 Otimização do braço para maximização de seu desempenho global

Usando as equações mostradas na Seção 3.2.1.2, é possível definir o tamanho dos elos do braço de modo que a sua ponta alcance todos os pontos dentro do volume de trabalho desejado. No entanto, ainda restam dois parâmetros a serem definidos: os cursos angulares das juntas,  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Estes parâmetros podem ser definidos de modo a se obter características desejadas para o robô, o que se faz por meio de uma otimização.

Braços robóticos antropomórficos, devido ao seu uso de juntas rotacionais, não possuem a mesma rigidez, precisão e repetibilidade sobre todo o seu volume de trabalho. Lin et al., 2017, mostram este fato, onde o uso de um robô para tarefas de usinagem requer uma análise do desempenho do robô sobre os pontos que ele alcança para que seja obtida uma boa qualidade no processo. Neste artigo os autores buscam definir uma sub-região do volume de trabalho total onde o robô possui melhores características para o processo, e concluem que o ideal é realizar a tarefa próximo à base, com o cotovelo para cima, e a ferramenta alinhada com a segunda e terceira juntas do robô.

O uso de um braço robótico na sua melhor região é uma boa prática, mas idealmente ele deve possuir um desempenho similar sobre todos os pontos onde ele pode operar. Assim, ao

se projetar um robô deve-se buscar um desempenho o mais homogêneo possível sobre o seu volume de trabalho, para facilitar seu uso em diversas situações. É possível aproximar-se deste objetivo se for feita uma otimização do desempenho global do braço.

### 3.2.3.1 O Índice de Desempenho Global

Como mostrado por Ying et al., 2016, é possível atribuir um índice de desempenho cinemático global para o mecanismo de um manipulador robótico. Para tal, eles integram um valor que representa a destreza do robô sobre o seu volume de trabalho, e então realizam uma otimização para encontrar os comprimentos ideais para os elos. Zhang et al., 2013, também definem um índice de desempenho cinemático global, o *GPI (Global Performance Index)*, que é composto por uma combinação de valores globais calculados com base em 4 índices de desempenho diferentes, sendo assim mais genérico. Estes quatro índices são: a manipulabilidade relativa, a velocidade mínima, a isotropia de velocidades, e a destreza. Estes quatro índices já eram definidos na literatura: os três primeiros parâmetros são apresentados por Kim e Khosla, 1991, enquanto que o quarto é apresentado por Gosselin, 1990. Como este índice *GPI* leva em consideração várias características do robô, e a importância relativa de cada uma pode facilmente ser modificada, ele foi escolhido como função objetivo para determinação dos cursos  $\psi_1$  e  $\psi_2$  ideais.

#### Definição dos índices de desempenho

Para mover a extremidade do braço se deve mover os atuadores. Se for provocado um deslocamento unitário em um atuador, se pode observar o deslocamento da extremidade do braço, que dependerá dos mecanismos utilizados e da posição atual do robô, e verificar a relação entre eles. Se o deslocamento do atuador for infinitesimal, então a relação entre o movimento do atuador e da extremidade do braço é dada pela matriz jacobiana. Pode-se também aplicar um deslocamento conjunto nos atuadores, tal que a soma de seus quadrados seja igual a um deslocamento total equivalente  $\delta P$ , como expresso pela Equação 3.46:

$$\Delta P_1^2 + \Delta P_2^2 + \dots + \Delta P_n^2 = \delta P^2, \quad (3.46)$$

onde  $\Delta P_1$ ,  $\Delta P_2$ ,  $\Delta P_n$  são deslocamentos dos atuadores 1, 2 e  $n$  respectivamente.

É possível observar que esta equação é a de um círculo se o manipulador possuir dois atuadores, esfera se possuir três, ou de dimensão maior se possuir mais atuadores. Como geralmente são utilizados três atuadores ou menos, pode-se considerar que o deslocamento dos atuadores é genericamente uma esfera. Como a relação entre o deslocamento dos

atuadores e o deslocamento da ponta do manipulador não é usualmente 1:1, a forma descrita por este último é um elipsoide, ou seja, uma esfera distorcida. A forma deste elipsoide pode ser calculada diretamente através da matriz Jacobiana, e assim como ela, esta também depende da posição atual do manipulador. Pode-se calcular certos parâmetros do elipsoide para determinar características do manipulador, como mostrado na Figura 3.11.

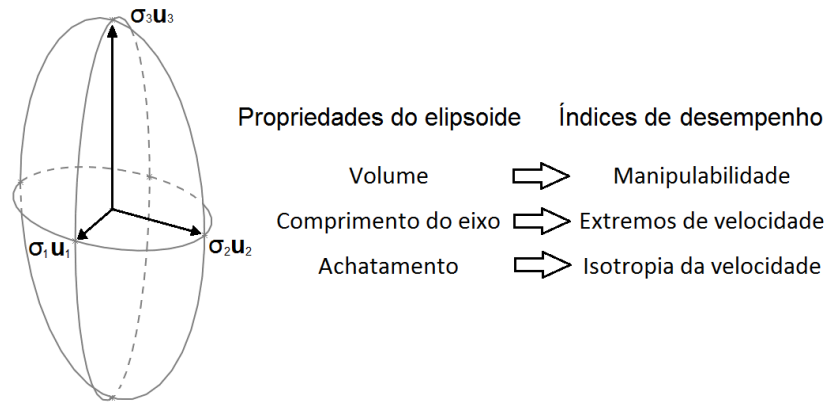


Figura 3.11 – Esquema mostrando o significado geométrico de três índices de desempenho

A manipulabilidade relativa indica a capacidade de deslocamento da ponta do manipulador, sendo que, geometricamente, é proporcional ao volume do elipsoide de manipulabilidade. Um valor nulo indica que o braço não consegue se movimentar em pelo menos uma direção, ou seja, encontra-se sobre uma singularidade. O valor calculado é relativo à soma dos comprimentos de todos os elos, o que permite a comparação entre robôs com escalas diferentes. Um valor maior indica que o robô consegue se deslocar com uma velocidade maior, mas com menor precisão. A manipulabilidade relativa pode ser calculada pela seguinte equação:

$$M_r = \frac{\sqrt[n]{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}}{L_b^2} = \frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n}}{L_b^2}, \quad (3.47)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana do manipulador analisado,  $\lambda_i$  são os seus autovalores,  $L_b$  é a soma do comprimento de todos os seus elos, e  $n$  é o número de graus de liberdade, o qual devem ser igual ao número de linhas e colunas de  $\mathbf{J}$ .

A velocidade mínima indica a capacidade de transmissão cinemática na direção de menor velocidade do robô. Esta direção possui a maior força e maior precisão de posicionamento, pois a movimentação dos atuadores causa menores deslocamentos na ponta do manipulador. Geometricamente, é o menor eixo do elipsoide de manipulabilidade, sendo expressa por:

$$v_{rmin} = \frac{\sqrt{\min(\lambda_i)}}{L_b}. \quad (3.48)$$

A isotropia de velocidades indica a variação da capacidade de transmissão cinemática entre as direções de deslocamento. Idealmente, o robô deve ser capaz de se deslocar com a mesma velocidade em todas as direções, e, nesse caso, o índice é igual a 1. Geometricamente, representa o achatamento do elipsoide. É expressa por:

$$\mu_{riso} = \frac{\sqrt[n]{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}}{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n}{n}\right)}, \quad (3.49)$$

onde  $\sigma_i$  são os valores singulares da matriz jacobiana,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .

O índice de destreza, ou precisão de transmissibilidade cinemática, indica a sensibilidade da posição do robô a erros de posicionamento dos atuadores e erros geométricos de fabricação. Quanto maior for seu valor, menos suscetível será a posição do manipulador a estes erros, e, portanto, maior a precisão que poderá ser obtida. É dado por:

$$k_j = \frac{1}{\|J\| \|J^+\|} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad (3.50)$$

onde  $J^+$  é a matriz inversa generalizada da matriz Jacobiana.

### Cálculo dos valores estatísticos dos índices de desempenho

Os índices apresentados são locais, isto é, dependem da posição atual do manipulador, e assim são válidos apenas para um ponto do espaço. É preferível, no entanto, avaliar seu desempenho sobre todo o volume de trabalho desejado, obtendo-se assim índices globais. Para tal, Zhang et al., 2013, propõem o cálculo de 4 valores globais para cada um destes 4 índices. São eles:

1. A Média global (GAI, *global average index*), que representa a média do índice sobre o espaço, e é expressa por:

$$\zeta_{avg} = \frac{\int_W \zeta dW}{\int_W dW}, \quad (3.51)$$

onde  $\zeta$  é um dos quatro índices, e  $W$  é o espaço de trabalho.

2. A dispersão (GVI, *global volatility index*), que representa o desvio padrão do índice calculado sobre o espaço, dividido pela sua média. É expressa por:

$$\zeta_{vol} = \frac{\zeta_{std}}{\zeta_{avg}} = \sqrt{\frac{\int_W (\zeta/\zeta_{avg} - 1)^2 dW}{\int_W dW}}. \quad (3.52)$$

3. A obliquidade (GSI, *global skewness index*), que representa a assimetria da distribuição. Um valor positivo indica que a maioria dos valores é menor do que a média, enquanto que um valor negativo indica o oposto. É expressa por:

$$\zeta_{skew} = \frac{\int_W (\zeta/\zeta_{avg} - 1)^3 dW}{\zeta_{vol}^3 \int_W dW}. \quad (3.53)$$

4. A curtose (GKI, *global kurtosis index*), que indica a concentração dos valores quando comparada com a distribuição normal. É expressa por:

$$\zeta_{kurt} = \frac{\int_W (\zeta/\zeta_{avg} - 1)^4 dW}{3 \zeta_{vol}^4 \int_W dW} - 1. \quad (3.54)$$

Esta última equação possui um fator de 1/3 quando comparada com a equação apresentada por Zhang et al., 2013<sup>1</sup>.

### Cálculo do Índice de Desempenho Global, *GPI*

Para realizar a otimização, é preferível a existência de um valor único a ser minimizado ou maximizado. Assim, os vários índices calculados devem ser combinados, levando em consideração a importância relativa de cada um.

Para cada índice de desempenho pode ser atribuído um valor global,  $\zeta_{integr}$ , que é formado por uma combinação de seus valores estatísticos, sendo expresso por:

$$\begin{aligned} \zeta_{integr} &= P_\alpha \cdot |GIV_\zeta| = [P_{\alpha_1} \ P_{\alpha_2} \ P_{\alpha_3} \ P_{\alpha_4}] [\zeta_{avg} \ \zeta_{vol} \ |\zeta_{skew}| \ |\zeta_{kurt}|]^T \\ &= P_{\alpha_1} \zeta_{avg} + P_{\alpha_2} \zeta_{vol} + P_{\alpha_3} |\zeta_{skew}| + P_{\alpha_4} |\zeta_{kurt}|, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde  $P_\alpha = [P_{\alpha_1} \ P_{\alpha_2} \ P_{\alpha_3} \ P_{\alpha_4}]$  são os pesos de cada característica. É usado módulo para os valores de obliquidade e curtose, pois valores positivos e negativos para estes valores são igualmente indesejáveis. Deve-se atribuir o valor 1 para  $P_{\alpha_1}$ , pois os pesos são relativos. Os outros pesos são arbitrários, mas como geralmente a média é o fator mais importante, eles devem ser menores do que 1. Zhang et al., 2013, sugerem a relação  $|P_{\alpha_2}| > |P_{\alpha_3}| \cong |P_{\alpha_4}|$ , usando os seguintes pesos:

$$P_\alpha = [1 \ -\zeta_{avg} \ -0.1\zeta_{avg} \ -0.1\zeta_{avg}], \quad (3.56)$$

onde os valores para  $P_{\alpha_2}$ ,  $P_{\alpha_3}$  e  $P_{\alpha_4}$  são negativos pois valores maiores para o desvio padrão, obliquidade e curtose são indesejáveis. Embora os pesos possam ser modificados

---

<sup>1</sup>Foi necessária a multiplicação por este fator para que os resultados obtidos pelo programa desenvolvido concordassem com os apresentados pelos autores, o que sugere que houve um erro de digitação no artigo.



arbitrariamente, para quaisquer valores reais, não há uma metodologia definida para esta escolha.

Aplicando esta fórmula aos 4 índices de desempenho, são calculados  $(M_r)_{integr}$ ,  $(v_{rmin})_{integr}$ ,  $(\mu_{riso})_{integr}$  e  $(k_j)_{integr}$ . Deve então ser calculado um valor global único que representa o desempenho global geral do manipulador,  $GPI$ , da seguinte forma:

$$GPI = \frac{P_{\beta_1}(M_r)_{integr}}{(M_r)_{norm}} + \frac{P_{\beta_2}(v_{rmin})_{integr}}{(v_{rmin})_{norm}} + \frac{P_{\beta_3}(\mu_{riso})_{integr}}{(\mu_{riso})_{norm}} + \frac{P_{\beta_4}(k_j)_{integr}}{(k_j)_{norm}}, \quad (3.57)$$

onde  $P_{\beta_1}$ ,  $P_{\beta_2}$ ,  $P_{\beta_3}$  e  $P_{\beta_4}$  são os pesos relativos de cada índice, e também são usados fatores de normalização. Zhang et al., 2013, sugerem usar o valor máximo do índice encontrado no espaço, como o fator de normalização  $(M_r)_{norm}$  e  $(v_{rmin})_{norm}$ , e para os outros índices,  $(\mu_{riso})_{norm} = (k_j)_{norm} = 1$ . Para os pesos, eles sugerem o uso de  $P_{\beta_1} = P_{\beta_2} = 0.1$  e  $P_{\beta_3} = P_{\beta_4} = 1$ , pois a isotropia de velocidades e índice de destreza tendem a ser mais importantes.

### Verificação do cálculo dos índices de desempenho

A metodologia aqui apresentada foi implementada no software Matlab®, e, para verificação, os resultados obtidos foram comparados com os mostrados por Zhang et al., 2013, para um robô paralelo de dois graus de liberdade, mostrado na Figura 3.12.

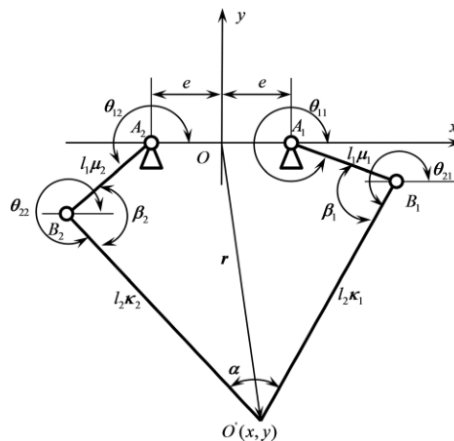


Figura 3.12 – Modelo cinemático do mecanismo de um robô paralelo de 2 GDLs usado como exemplo para verificação da metodologia. [ Zhang et al., 2013].

Foi determinada a matriz Jacobiana e a cinemática inversa deste robô, e assim foi possível o cálculo dos índices de desempenho. O volume de trabalho utilizado é dado por:

$$-0.4000 \text{ m} \leq x \leq 0.4000 \text{ m}, \quad -0.6130 \text{ m} \leq y \leq -0.4930 \text{ m}.$$

No referido artigo, os comprimentos dos elos do robô são parâmetros a serem otimizados. Os autores apresentam três otimizações realizadas com funções objetivos diferentes, obtendo assim três pares de comprimentos para os elos, um para cada caso. A verificação aqui apresentada não busca verificar o processo de otimização; ao invés disto, o foco é em verificar o cálculo dos índices de desempenho. Assim, foram calculados os índices de desempenho para os robôs com os comprimentos de elo encontrados pelo método apresentado no artigo, e estes índices foram comparados com os encontrados pelos autores. Esta comparação pode ser vista na Tabela 3.1. Neste exemplo os autores não utilizam os fatores de normalização para o cálculo do índice global geral, usando apenas os seguintes pesos:  $P_\beta = [5 \ 0.77 \ 1 \ 1]$ .

Tabela 3.1 – Comparação entre os resultados

		$l_1 = 0.336m$	$l_1 = 0.336m$	$l_1 = 0.352m$			
		$l_2 = 0.600m$	$l_2 = 0.626m$	$l_2 = 0.639m$			
		programa	literatura	programa	literatura	programa	literatura
Manipulabilidade	$(M_r)_{integr}$	0.0183	0.0183	0.0166	0.0166	0.0169	0.0169
	$(M_r)_{avg}$	0.0216	0.0216	0.0198	0.0198	0.0202	0.0202
	$(M_r)_{vol}$	0.0586	0.0586	0.0808	0.0808	0.0875	0.0875
	$(M_r)_{skew}$	-0.8223	-0.8220	-0.6291	-0.6288	-0.5007	-0.5005
	$(M_r)_{kurt}$	-0.0883	-0.0888	-0.1919	-0.1920	-0.2245	-0.2246
Velocidade mínima	$(V_{rmin})_{integr}$	0.1245	0.1245	0.1188	0.1188	0.1151	0.1151
	$(V_{rmin})_{avg}$	0.1379	0.1379	0.1319	0.1319	0.1327	0.1327
	$(V_{rmin})_{vol}$	-0.0484	-0.0484	0.0494	0.0494	0.0561	0.0562
	$(V_{rmin})_{skew}$	-0.3277	-0.3277	-0.3434	-0.3429	-0.5611	-0.5606
	$(V_{rmin})_{kurt}$	-0.1577	-0.1577	-0.1553	-0.1557	-0.2016	-0.2021
Isotropia de vel.	$(\mu_{riso})_{integr}$	0.4359	0.4553	0.6743	0.6799	0.9359	0.9378
	$(\mu_{riso})_{avg}$	0.9976	0.9976	0.9975	0.9978	0.9975	0.9975
	$(\mu_{riso})_{vol}$	0.0021	0.0021	0.0020	0.002	0.0014	0.0014
	$(\mu_{riso})_{skew}$	-2.3994	-2.3405	-1.6278	-1.6091	-0.4966	-0.491
	$(\mu_{riso})_{kurt}$	3.2096	3.0740	1.5929	1.5555	0.1061	0.0925
Destreza	$(k_j)_{integr}$	0.7852	0.7851	0.8252	0.8252	0.7930	0.7930
	$(k_j)_{avg}$	0.8822	0.8822	0.8790	0.879	0.8745	0.8745
	$(k_j)_{vol}$	0.0561	0.0561	0.0551	0.0551	0.0434	0.0434
	$(k_j)_{skew}$	-0.4045	-0.4046	-0.0375	-0.0377	0.3004	0.3003
	$(k_j)_{kurt}$	0.1340	0.1346	-0.0231	-0.0228	-0.1980	-0.1981
Índice Global	$GPI$	1.4087	1.4279	1.6740	1.6796	1.9022	1.9041

Analisando os resultados apresentados na Tabela 3.1, é possível constatar uma diferença máxima de 1,34% para o valor do índice global geral  $GPI$ , encontrada no primeiro caso. Esta diferença é causada principalmente pelas diferenças encontradas para os parâmetros de obliquidade e curtose para a isotropia de velocidades,  $(\mu_{r_{iso}})_{skew}$  e  $(\mu_{r_{iso}})_{skew}$ . Isto pode ser atribuído à diferenças na integração numérica. Para o programa desenvolvido, são utilizadas as funções internas do Matlab  $quad2d$  para cálculo da média e desvio, e  $dblquad$  para cálculo da obliquidade e curtose. Isto se deve ao fato de que  $dblquad$  fornece uma maior precisão, o que é mais crítico para estes casos devido ao maior expoente da função a ser integrada. O artigo não menciona o método de integração utilizado pelos seus autores.

### Consideração do custo de fabricação

O  $GPI$  proposto por Zhang et al., 2013, não leva em consideração os custos de fabricação do braço otimizado. Mais especificamente, um braço com elos maiores necessita de mais material em sua construção e é mais pesado, o que também influencia os atuadores necessários e a bomba hidráulica do sistema. Assim, é proposto um valor modificado,  $GPI_c$ , que considera o comprimento total do braço como uma aproximação de seus custos de fabricação:

$$GPI_c = \frac{GPI}{(L_b)^{P_c}}, \quad (3.58)$$

onde  $P_c$  é o coeficiente do peso do custo. Este valor deve ser definido como um parâmetro de entrada do projeto, dependendo da importância relativa entre desempenho e custo; quanto maior o valor, maior a importância dada para a redução dos custos, por meio da definição de um braço com elos mais curtos.

### 3.2.3.2 Otimização do Índice de Desempenho Global Modificado ( $GPI_c$ ) para definição dos comprimentos ideais para os elos

O cálculo do  $GPI_c$  fornece um valor numérico para o desempenho de um braço que depende dos pesos utilizados, os quais devem ser escolhidos de acordo com as tarefas que o braço deve realizar, e dos comprimentos dos elos, pois eles são usados no cálculo da matriz Jacobiana do braço. O comprimento dos elos é o fator que se busca definir, e, para isso, se pode realizar uma otimização do  $GPI_c$ , usando  $a_1$  e  $a_2$  como variáveis de controle. Assim, se pode definir que  $GPI_c = GPI_c(a_1, a_2)$ .

O uso dos comprimentos dos elos como variáveis de controle, no entanto, pode causar complicações com relação às restrições da otimização. Isto ocorre porque algumas

combinações de comprimento podem depender de cursos angulares de mais de  $180^\circ$  para alcançar toda a área de trabalho estudada, o que não é possível com o tipo de atuadores utilizados no braço estudado. Além disto, não há um limite superior único para as variáveis. Assim, para facilitar o processo computacional, podem ser usadas as equações da Seção 3.2.1 para calcular os comprimentos dos elos em função dos cursos angulares das juntas,  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , de modo que  $GPI_c = GPI_c(\psi_1, \psi_2)$ . Desta forma, as restrições podem ser simplesmente valores entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  para  $\psi_2$ , e entre  $2atan2(\frac{Vy}{2}, Vx)$  e  $180^\circ$  para  $\psi_1$ . A restrição inferior de  $\psi_1$  é necessária para que as relações consideradas na Seção 3.2.1 entre a área de trabalho retangular e o espaço de trabalho do braço sejam válidas.

Ao se graficar  $GPI_c(\psi_1, \psi_2)$  para vários valores, entre as restrições, obtém-se um gráfico como o mostrado na Figura 3.13, onde a região branca representa configurações impossíveis para o braço. Como se pode verificar a função é convexa, possuindo apenas um único ponto de máximo local. Desta forma, praticamente qualquer método de otimização é capaz de rapidamente encontrar os valores de  $\psi_1$  e  $\psi_2$  que resultam no melhor valor para  $GPI_c$ ; por simplicidade, a função *fmincon* do Matlab® foi utilizada.

Após a utilização do método, os resultados obtidos dessa forma para os comprimentos dos elos possuem muitas casas decimais. Para ser possível a fabricação, estes valores devem ser truncados para certa precisão, por exemplo milímetros. Para tal, pode-se simplesmente truncar  $a_1$  e  $a_2$  para o milímetro mais próximo, mas então os outros valores dependentes, como os limites angulares das juntas, devem ser recalculados usando estes novos valores.

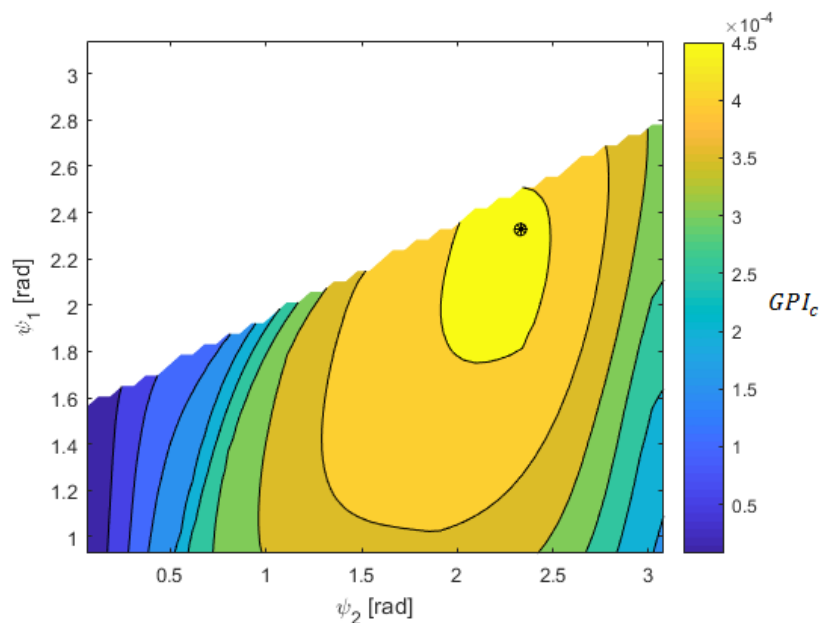


Figura 3.13 – Gráfico mostrando valores de  $GPI_c$  para diferentes configurações de um braço

### 3.3 Cálculo do erro de posicionamento do braço

Como mencionado na Seção 2.2.1, existem várias causas para o erro de posicionamento. Alguns podem ser compensados por algoritmos, outros não. Aqui o foco é nos erros que não podem ser compensados, pois eles limitam a repetibilidade que o braço pode alcançar.

Os erros que dependem do ambiente de trabalho não podem ser reduzidos no projeto do robô, a não ser que ele seja projetado para apenas uma instalação específica. Como não é o caso do robô projetado neste trabalho, este erro não será tratado. Os erros de calibração, tolerância, folgas de fabricação e folgas nas juntas e acoplamentos podem ser compensados por algoritmos e medições, fora do escopo deste trabalho, e portanto também não são tratados. Os erros devido a não linearidade da servoválvula, histerese, movimento adere-desliza devido ao atrito, e erros de sensoriamento influenciam o controle dos atuadores, podem ser combinados em um único valor, no caso, o erro de posicionamento do atuador  $i$ ,  $A_{ep_i}$ . O cálculo deste erro também está fora do escopo deste trabalho, sendo que o método de controle dos atuadores deve permitir conhecer qual o erro de posicionamento atingido. Assim, os valores  $A_{ep_1}$  e  $A_{ep_2}$  são valores de entrada para o cálculo final do erro de posicionamento do braço.

Como já mencionado, a cinemática do braço transfere o erro de posicionamento dos atuadores para a extremidade do braço, que é o ponto de interesse. Essa transferência pode amplificar ou reduzir o erro, de acordo com a Equação 3.34, reproduzida a seguir:

$$\frac{dp_i}{dP_i} = \bar{J}_{i,i} l_i. \quad (3.34)$$

Outra fonte de erro causada pelo braço é referente à flexibilidade dos elos e das juntas. Este erro é abordado na Seção 4.3, sendo o erro associado à flecha do braço. Combinando todos os erros considerados obtêm-se a seguinte equação para o erro de posicionamento da extremidade do braço:

$$B_{ep} = \sqrt{\left[ A_{ep_1} \left( \frac{dp_1}{dP_1} \right) \right]^2 + \left[ A_{ep_2} \left( \frac{dp_2}{dP_2} \right) \right]^2 + |\vec{u}|^2}. \quad (3.59)$$

O valor  $B_{ep}$  depende da posição do braço, e, portanto, pode-se obter um gráfico mostrando o erro de posicionamento esperado para o braço para pontos dentro da área de trabalho de interesse. A Figura 3.14 mostra um gráfico de exemplo. Para o cálculo da flecha  $|\vec{u}|$  é considerado o caso em que o braço está parado, isto é, as velocidades e acelerações angulares são iguais à zero.

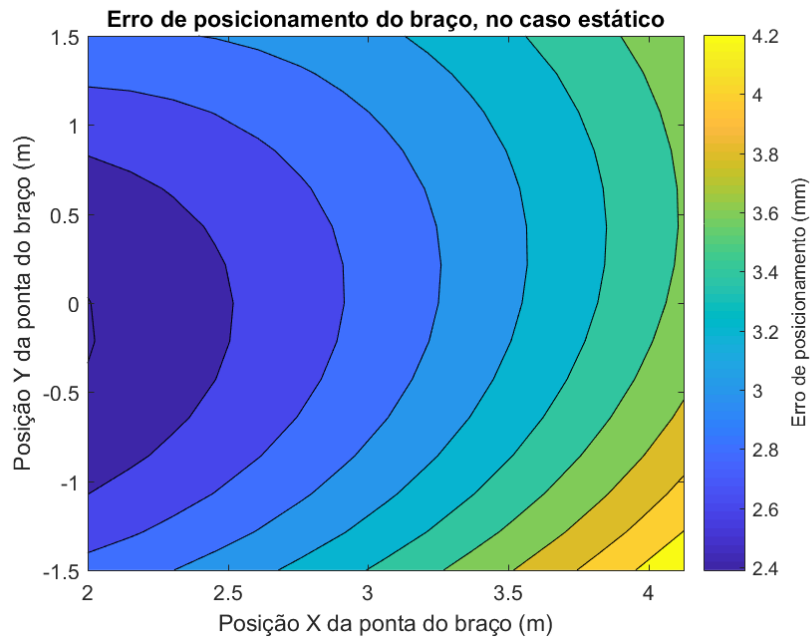


Figura 3.14 – Exemplo de um gráfico mostrando o erro de posição para um braço na região da área de trabalho de interesse

## 4 ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA

Neste capítulo é apresentada a metodologia proposta para o dimensionamento da estrutura dos elos do braço. Também é apresentado o equacionamento do comportamento dinâmico do braço, que posteriormente é utilizado para o cálculo dos carregamentos.

Primeiramente, a Seção 4.1 descreve o funcionamento geral do método proposto para o dimensionamento da estrutura do braço. Em seguida, a Seção 4.2 apresenta o equacionamento dinâmico desenvolvido para o braço, que além de ser usado para o cálculo dos carregamentos durante a análise estrutural, pode também ser utilizado como parte de um sistema de controle, ou para simular o deslocamento do braço ao longo do tempo. A Seção 4.3 então apresenta a análise estrutural, onde são calculados os deslocamentos que o braço sofre devido à deformação de seus elementos durante a sua operação. Finalmente, a Seção 4.4 descreve a metodologia proposta para a otimização estrutural do braço, usada para definir uma estrutura com uma utilização eficiente de material que atenda os requisitos de resistência e precisão do projeto.

### 4.1 Visão geral do método para dimensionamento da estrutura

A Figura 4.1 mostra um fluxograma do processo de dimensionamento da estrutura do braço proposto no presente trabalho. Os dados de entrada são os parâmetros cinemáticos, definidos na Seção 3.2, além das dimensões dos pinos e reforços usados na estrutura, as larguras dos elos, o *offset* entre os elos, a massa, inércia e distância nominais da ferramenta e/ou objeto manipulado pelo braço, a máxima deflexão<sup>2</sup> aceitável da extremidade do braço, ou flecha aceitável, e a velocidade e a aceleração nominais do braço.

A metodologia proposta começa com a modelagem do braço, incluindo os atuadores, como mostrado nas seções 4.3.3 e 4.3.4. Esta modelagem é uma versão simplificada do modelo apresentado na Seção 4.3.2, usando o método dos elementos finitos (como mostrado na Seção 4.3.1). São usados como parâmetros de entrada os parâmetros definidos na Seção 3.2 e o *offset* entre os elos.

A seguir, é feita uma proposição inicial para os valores das alturas das seções das vigas. Com estes valores, e com os dados de entrada da largura dos elos e das dimensões dos pinos e reforços, é calculada a matriz de rigidez global do sistema, composta pela combinação de

---

<sup>2</sup> Deslocamento devido à deformação elástica

várias matrizes de rigidez elementares. Cada uma delas é calculada como apresentado na Seção 4.3.5 e detalhado no Apêndice D.

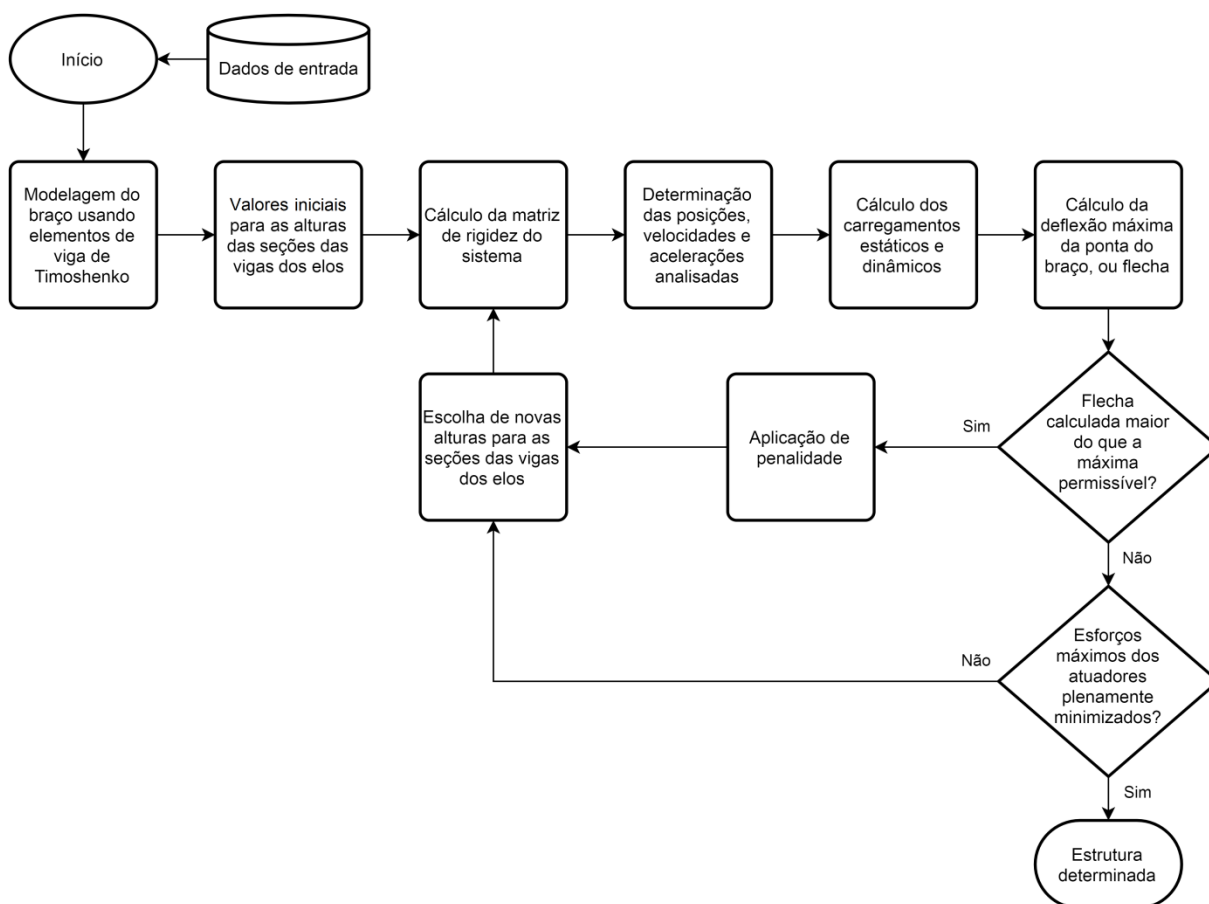


Figura 4.1 – Fluxograma mostrando uma vista geral do procedimento para dimensionamento da estrutura dos elos do braço

São especificados vários casos para análise dos carregamentos. Estes casos dependem da velocidade e da aceleração nominais do braço, dados de entrada escolhidos pelo projetista, e da área de trabalho determinada anteriormente, na Seção 3.2.1.1. Estes casos são mostrados na Seção 4.4.2.

Para cada um destes casos, os carregamentos devido ao peso próprio são calculados na Seção 4.3.6, e os devidos à dinâmica do braço na Seção 4.3.7, com base no equacionamento apresentado na Seção 4.2. Os dados de entrada da massa, momento de inércia e distância nominal da ferramenta também são usados, bem como os parâmetros inerciais dos atuadores.

É então calculada a flecha do braço para cada um dos casos de posição e carregamento, usando as equações mostradas nas seções 4.3.1 e 4.3.8 para o cálculo dos deslocamentos da estrutura em função da matriz de rigidez e do vetor de carregamentos. Após, é realizada uma otimização onde o valor obtido é comparado com o da flecha máxima admissível, um dado de entrada definido pelo projetista. Se o valor calculado for maior, então é aplicada uma



penalização ao valor da função objetivo, conforme descrito na Seção 4.4.1. Esta função objetivo busca a minimização dos esforços máximos dos atuadores, e usa para tanto as equações apresentadas na Seção 4.3.9. A penalização, por sua vez, é utilizada para fazer com que estruturas com flexibilidade superior à flexibilidade máxima predefinida sejam descartadas, em favor de outras estruturas que respeitem esta restrição. Caso o valor calculado para a flecha seja menor ou igual ao valor máximo previamente definido, o valor da função objetivo não é penalizado. Como resultado, um novo conjunto de valores para as alturas das seções das vigas dos elos e para as espessuras das chapas é escolhido e usado para definir um novo braço, que é também analisado pelo método. Este processo se repete até que seja encontrada a configuração que resulte nas menores forças os atuadores, dentre todos os casos analisados, possibilitando o uso de atuadores com menores diâmetros.

## 4.2 Equações dinâmicas

### 4.2.1 Equação dinâmica de um braço com atuadores rotacionais

O comportamento dinâmico básico de um braço robótico pode ser aproximado pela seguinte equação, amplamente usada na literatura, mostrada por Slotine e Asada, 1986:

$$\mathbf{H}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \mathbf{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_g(\vec{q}) = \vec{\tau}, \quad (4.1)$$

onde  $\vec{q}$  é o vetor com os ângulos de junta do robô,  $\mathbf{H}$  é a matriz inercial,  $\mathbf{C}$  é a matriz de efeitos giroscópicos e de Coriolis,  $\vec{\tau}_g$  é o vetor de torques gravitacionais, e  $\vec{\tau}$  é o vetor de torques externos aplicados nas juntas. Esta equação não leva em consideração efeitos não lineares como atrito estático ou folgas, e nem a elasticidade do braço ou atrito viscoso, mas fornece uma base que pode ser expandida para levar em consideração estes efeitos.

No caso do braço aqui estudado, isto é, duas juntas rotacionais e movimento bidimensional, as matrizes e vetores são dadas pelas seguintes equações:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{H}(\vec{q}) = \begin{bmatrix} I_1 + m_1 c g_1^2 + I_2' + m_2 [a_1^2 + 2a_1 c g_2 \cos(q_2)] & I_2' + m_2 [a_1 c g_2 \cos(q_2)] \\ I_2' + m_2 [c g_2^2 + a_1 c g_2 \cos(q_2)] & I_2' \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

com  $I_2' = I_2 + m_2 c g_2^2$ ,

$$\mathbf{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = m_2 a_1 c g_2 \operatorname{sen}(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

e

$$\vec{\tau}_g(\vec{q}) = g \begin{bmatrix} (m_1 c g_1 + a_1 m_2) \cos(q_1) + m_2 c g_2 \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 c g_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde  $g$  é a aceleração gravitacional,  $I_1$  e  $I_2$  são os momentos de inércia do primeiro e segundo elo em torno de seus respectivos centros de massa,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos elos,  $c g_1$  é a distância entre o centro de massa do primeiro elo até a primeira junta e  $c g_2$  é similarmente a distância entre o centro de massa do segundo elo até a segunda junta.

É fácil adicionar um termo referente ao o atrito viscoso das juntas, pois ele é linear com relação às suas velocidades angulares. É possível, portanto, modificar a matriz  $\mathbf{C}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{B}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \mathbf{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \begin{bmatrix} F_{v1} & 0 \\ 0 & F_{v2} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde  $F_{v1}$  e  $F_{v2}$  são os atritos viscosos da primeira e segunda junta respectivamente, e  $\mathbf{B}$  é a matriz de Coriolis e atrito viscoso, que pode ser usada na seguinte equação:

$$\mathbf{H}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_g(\vec{q}) = \vec{\tau}, \quad (4.7)$$

a qual foi desenvolvida primariamente para uso com robôs elétricos, onde o torque nas juntas pode ser controlado diretamente. No robô hidráulico estudado, no entanto, os atuadores aplicam forças sobre os elos. Mesmo assim é possível a utilização desta equação, se forem calculados os torques equivalentes que as forças provocam sobre as juntas.

Em sistemas hidráulicos a força de um atuador não é controlada diretamente, mas existem equações capazes de relacionar esta força com a variável diretamente controlada, que é a abertura da servoválvula. Mais especificamente, a força é proporcional à pressão no atuador, a pressão é proporcional à derivada com relação ao tempo da vazão, e a vazão é proporcional à área de abertura da servoválvula, que é a variável controlada. Os detalhes desta dinâmica se encontram fora do escopo deste trabalho, mas a equação obtida pode ser utilizada, juntamente com a equação da dinâmica do braço em função dos torques nas juntas, para ser realizado o controle.

#### 4.2.2 Dinâmica da ferramenta

O punho e a ferramenta que serão acoplados na extremidade do braço causam reações e carregamentos devidos aos seus pesos e inércias. Para representar uma ferramenta genérica, pode ser considerada uma massa pontual  $m_{end}$  acoplada à extremidade do braço com uma distância  $d_{end}$ . Também pode ser considerado o momento de inércia de massa da ferramenta,  $I_{end}$ . Estes valores devem representar a maior ferramenta e/ou objeto que o robô deve ser

capaz de manipular. Esta ferramenta encontra-se após o punho, e, portanto, a sua orientação não é necessariamente a mesma do braço. Uma terceira variável de junta,  $q_3$ , é usada para representar o ângulo entre o Elo 2 do braço e o eixo longitudinal da ferramenta, onde se encontra o seu centro de massa. Isto pode ser visto na Figura 4.2.

A variável  $q_3$ , embora similar às variáveis de junta  $q_1$  e  $q_2$ , não é tratada da mesma forma. Isto porque as juntas 1 e 2 são indiretamente controladas por atuadores lineares, já definidos, enquanto que a forma de controle do punho dependerá do tipo de punho utilizado, parâmetro que não é definido neste trabalho (por se encontrar fora do seu escopo). Assim, para o projeto do braço, será considerado que o ângulo de junta  $q_3$  pode ser controlado diretamente, e é, portanto, conhecido. Desta forma, este valor não é representado no vetor  $\vec{q}$ , que é uma incógnita devido controle indireto dos seus componentes,  $q_1$  e  $q_2$ . Ao invés disto,  $q_3$  é usado apenas como um valor de entrada para calcular o carregamento devido ao uso de uma ferramenta genérica.

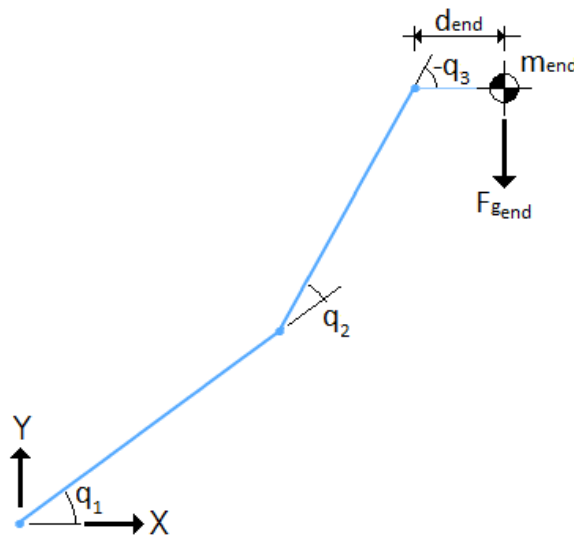


Figura 4.2 – Desenho esquemático mostrando a massa pontual que representa a ferramenta, e possivelmente um objeto, na extremidade do braço.

O valor de  $q_{13}$  (ângulo entre a ferramenta e o plano horizontal, tal que  $q_{13} = q_1 + q_2 + q_3$ ) é definido pela trajetória, de forma a se obter os ângulos de orientação desejados para a ferramenta. Suas derivadas também são definidas pela trajetória, de modo a se obter um movimento contínuo. Os valores para  $q_3$ ,  $\dot{q}_3$  e  $\ddot{q}_3$  são escolhidos de modo a serem obtidos os valores de  $q_{13}$ ,  $\dot{q}_{13}$  e  $\ddot{q}_{13}$  definidos pela trajetória. Assim, na prática, estes últimos são os parâmetros de entrada para as equações.

As forças e momentos que a ferramenta aplica sobre a ponta do segundo elo podem ser calculados por meio da Equação 4.8 (cuja dedução está apresentada no Apêndice A.6):

$$\vec{F}_{end} = \begin{bmatrix} F_{end_x} \\ F_{end_y} \\ M_{end} \end{bmatrix} = -\mathbf{T}_{end} \mathbf{M}_{end} (\vec{A}_{end} + \vec{g}), \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{T}_{end}$  é a matriz de deslocamento de forças, usada para calcular a força e momento equivalente quando a força aplicada sobre o centro de gravidade da ferramenta é deslocada para o ponto da extremidade do braço. A matriz  $\mathbf{T}_{end}$  pode ser expressa por:

$$\mathbf{T}_{end} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d_{end} \text{sen}(q_{13}) & d_{end} \text{cos}(q_{13}) & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Ainda na Equação 4.8(4.8),  $\mathbf{M}_{end}$  é a matriz de massa da ferramenta, expressa por:

$$\mathbf{M}_{end} = \begin{bmatrix} -m_{end} & 0 & 0 \\ 0 & -m_{end} & 0 \\ 0 & 0 & -I_{end} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$\vec{g}$  é o vetor da aceleração gravitacional, tal que  $\vec{g} = [0 \quad -g \quad 0]^T$ , e  $\vec{A}_{end}$  é o vetor de acelerações do centro de gravidade da ferramenta, o qual pode ser calculado da seguinte forma:

$$\vec{A}_{end} = \mathbf{J}' \vec{q} + \dot{\mathbf{J}} \vec{q} + \mathbf{J}''_{end} \ddot{q}_{13} + \dot{\mathbf{J}}''_{end} \dot{q}_{13}, \quad (4.11)$$

onde  $\dot{\mathbf{J}}$  é a derivada da matriz Jacobiana do braço,  $\mathbf{J}'$  é a matriz jacobiana modificada da extremidade do braço, expressa por:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} -a_1 \text{sen}(q_1) - a_2 \text{sen}(q_{12}) & -a_2 \text{sen}(q_{12}) \\ a_1 \text{cos}(q_1) + a_2 \text{cos}(q_{12}) & a_2 \text{cos}(q_{12}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

e  $\mathbf{J}''_{end}$  e  $\dot{\mathbf{J}}''_{end}$  são o a matriz Jacobiana da ferramenta e a sua derivada, respectivamente, equacionadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{J}''_{end}(q_1, q_2, q_{13}) = \begin{bmatrix} -d_{end} \text{sen}(q_{13}) \\ d_{end} \text{cos}(q_{13}) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e

$$\dot{\mathbf{J}}''_{end}(q_1, q_2, q_{13}, \dot{q}_{13}) = \begin{bmatrix} -d_{end} \text{cos}(q_{13}) \dot{q}_{13} \\ -d_{end} \text{sen}(q_{13}) \dot{q}_{13} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Para compatibilidade com as equações dinâmicas do torque, é preciso calcular o torque equivalente que a ferramenta aplica sobre as juntas do braço. Este torque pode ser calculado da seguinte forma:

$$\vec{\tau}_{end} = \mathbf{H}_{end} \ddot{\vec{q}} + \mathbf{C}_{end} \dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_{g_{end}}, \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{H}_{end}$  é a matriz de inércia da ferramenta, expressa como:

$$\mathbf{H}_{end} = -\mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} \mathbf{M}_{end} \mathbf{J}', \quad (4.16)$$

$\mathbf{C}_{end}$  é a matriz de Coriolis, expressa como:

$$\mathbf{C}_{end} = -\mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} \mathbf{M}_{end} \dot{\mathbf{J}}, \quad (4.17)$$

e  $\vec{\tau}_{g_{end}}$  é o vetor de torques devido ao peso próprio e dinâmica do punho, que pode ser equacionado como:

$$\vec{\tau}_{g_{end}} = \mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} [m_{end} \vec{g} - \mathbf{M}_{end} (\mathbf{J}''_{end} \ddot{q}_{13} + \mathbf{J}'_{end} \dot{q}_{13})]. \quad (4.18)$$

A Equação 4.18 permite calcular os esforços sofridos pelas juntas devido à dinâmica da ferramenta e/ou objeto, e assim pode ser utilizada juntamente com a Equação 4.7.

### 4.2.3 Dinâmica dos atuadores

Existem três efeitos que agem sobre os atuadores, fazendo com que eles apliquem forças sobre os elos: forças ativas, gravidade e inércia. Similarmente ao utilizado na dinâmica dos elos dos braços, expressa pela Equação 4.7, é possível considerar cada efeito individualmente, sendo que a descrição completa da dinâmica dos atuadores pode ser feita pela soma destes 3 efeitos.

Para que seja possível a utilização da Equação 4.7 é preciso que cada um destes efeitos seja equacionado de modo a possuir como entrada apenas os parâmetros de junta  $\vec{q}$ , bem como suas derivadas  $\dot{\vec{q}}$  e  $\ddot{\vec{q}}$ , e como saída os torques atuantes sobre as juntas, causados pelas forças aplicadas pelos atuadores. As forças ativas dos atuadores também são consideradas entradas, pois são fatores que podem ser controlados, mesmo que indiretamente, pelo sistema de controle do braço.

#### 4.2.3.1 Forças ativas

Pelo princípio do trabalho virtual, Sciavicco e Siciliano, 2000, mostram que a seguinte equação pode ser usada para relacionar o torque nas juntas com as forças ativas aplicadas pelos atuadores:

$$\vec{\tau}_f = \bar{\mathbf{J}}^{-1} \vec{f}_l, \quad (4.19)$$

onde  $\bar{\mathbf{J}}$  é a matriz Jacobiana parcial, mostrada na Seção 3.1.3, e  $\vec{f}_l$  é o vetor de forças lineares ativas que os atuadores aplicam sobre os elos. A Equação 4.19 também pode ser deduzida a

partir de uma análise das forças, o que é mostrado no Apêndice A.7.1. O cálculo do valor de  $\vec{f}_i$  deve ser feito pelo equacionamento dinâmico do sistema hidráulico, usado para controlar os atuadores. Este equacionamento dinâmico deve estabelecer a relação entre a abertura da servoválvula e a força aplicada pelo atuador, o qual está fora do escopo deste trabalho. Ele deve preferencialmente incluir um modelo para o atrito, para que o controle seja mais preciso.

Geralmente o equacionamento dinâmico dos atuadores considera efeitos inerciais, e ocasionalmente gravitacionais. O vetor  $\vec{f}_i$  usado por Sciavicco e Siciliano, 2000, também possui uma componente inercial e uma componente gravitacional, mas a inclusão destas componentes no vetor só é possível para o caso unidimensional. Como aqui está sendo considerado o movimento bidimensional dos atuadores, os efeitos inerciais e gravitacionais são mais complexos, e, portanto, são tratados separadamente na seção seguinte. Desta forma, é importante que o equacionamento dinâmico do sistema hidráulico, usado para o cálculo do vetor de forças  $\vec{f}_i$ , não considere estes efeitos, para compatibilidade com o método proposto, porque caso contrário os efeitos estariam seriam considerados duas vezes.

#### 4.2.3.2 Forças passivas

Os atuadores hidráulicos são compostos de duas partes principais: o cilindro e a haste. A haste pode deslizar sobre o eixo longitudinal do cilindro, enquanto que os outros movimentos são restritos. Normalmente, este deslizamento é resistido pela força causada pela diferença de pressão nas câmaras e pela força de atrito, mas o atuador modelado nesta seção utiliza um equacionamento que permite que a haste deslize livremente, pois estas forças já foram consideradas na Seção 4.2.3.1, e deve-se tomar cuidado para que elas não sejam consideradas duas vezes no equacionamento. Desta forma, não é possível simplificar o módulo do atuador como um único corpo, sendo necessário considerar as forças passivas da haste e do cilindro individualmente. As deduções das equações apresentadas nesta seção são mostradas no Apêndice A.7.2.

As forças passivas que o atuador  $i$  aplica sobre a estrutura foram calculadas utilizando o sistema de coordenadas local do atuador, como mostrado na Figura 4.3 e na Figura 4.4. O atuador encontra-se inclinado em relação ao plano horizontal, com um ângulo  $a\theta_i$ .

O atuador  $i$  aplica uma força  $\vec{FA}_i$  sobre o ponto  $A_i$  do elo  $i - 1$  e uma força  $\vec{FB}_i$  sobre o ponto  $B_i$  do elo  $i$ . Estas forças, no sistema de coordenadas local do atuador, podem ser calculadas por meio das seguintes equações:

$$\overrightarrow{FA}_i = \left[ \begin{array}{c} [\ddot{x}_{i_{cil}} + g \operatorname{sen}(a\theta_i)] m_{i_{cil}} \\ \{[\ddot{y}_{i_{cg}} + g \operatorname{cos}(a\theta_i)] m_{i_{total}} (P_i - CG_{i_{total}}) - a\ddot{\theta}_i I_{i_{total}} - a\dot{\theta}_i I_{i_{total}}\} / P_i \end{array} \right], \quad (4.20)$$

e

$$\overrightarrow{FB}_i = \left[ \begin{array}{c} [\ddot{x}_{i_{haste}} + g \operatorname{sen}(a\theta_i)] m_{i_{haste}} \\ \{[\ddot{y}_{i_{cg}} + g \operatorname{cos}(a\theta_i)] m_{i_{total}} CG_{i_{total}} + a\ddot{\theta}_i I_{i_{total}} + a\dot{\theta}_i I_{i_{total}}\} / P_i \end{array} \right], \quad (4.21)$$

onde  $\ddot{x}_{i_{cil}}$  e  $\ddot{x}_{i_{haste}}$  são a aceleração lateral do centro de massa do cilindro e da haste respectivamente,  $m_{i_{cil}}$  e  $m_{i_{haste}}$  são as respectivas massas,  $\ddot{y}_{i_{cg}}$  é a aceleração vertical do centro de gravidade do atuador,  $m_{i_{total}}$  é a massa total,  $CG_{i_{total}}$  é a distância entre o centro de gravidade do atuador e o ponto  $A_i$ ,  $a\dot{\theta}_i$  e  $a\ddot{\theta}_i$  são a velocidade e aceleração angular do atuador,  $I_{i_{total}}$  é o momento de inércia de massa do atuador em torno de um eixo paralelo ao eixo z global que passa pelo centro de gravidade do atuador, e  $I_{i_{total}}^{\cdot}$  é a derivada deste parâmetro com relação ao tempo.

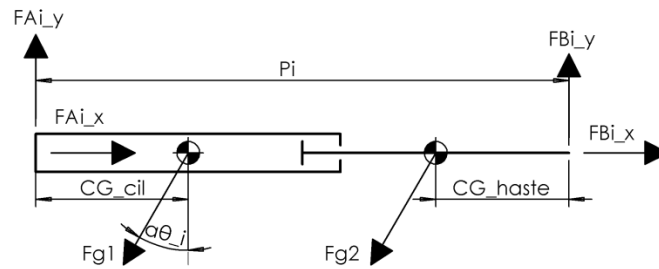


Figura 4.3 – Desenho esquemático mostrando as forças que agem sobre um atuador, bem como as forças de reação que o atuador aplica sobre a estrutura.

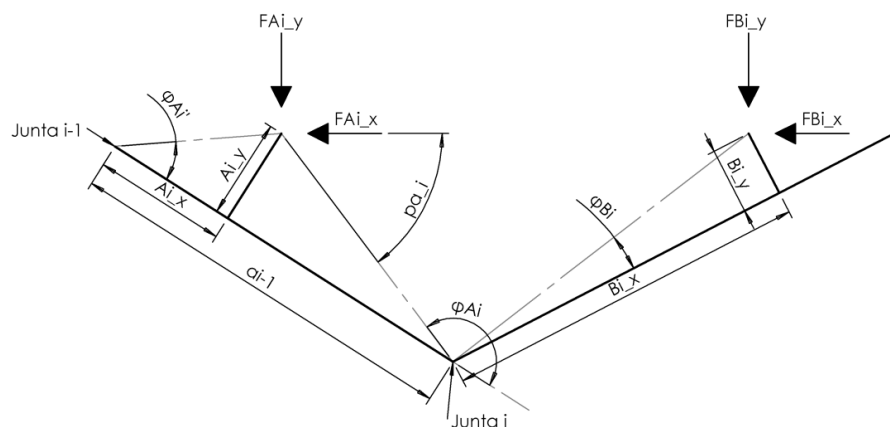


Figura 4.4 – Desenho esquemático mostrando as forças passivas que o atuador aplica sobre os elos

Os valores de  $m_{i_{cil}}$  e  $m_{i_{haste}}$  são dados de entrada para esta equação, e dependem do atuador utilizado. Também deve ser informado o momento de inércia de massa das peças,  $I_{i_{cil}}$  e  $I_{i_{haste}}$ , e as distâncias  $CG_{i_{cil}}$  e  $CG_{i_{haste}}$ , que são as distâncias entre os centros de massa do

cilindro e da haste e o ponto  $A_i$  e  $B_i$ , respectivamente, como pode ser visto na Figura 4.3. Com estes valores é possível calcular  $m_{i_{total}}$ ,  $CG_{i_{total}}$ ,  $I_{i_{total}}$  e  $I_{i_{total}}^{\cdot}$ :

$$m_{i_{total}} = m_{i_{cil}} + m_{i_{haste}}, \quad (4.22)$$

$$CG_{i_{total}} = \frac{m_{i_{cil}} CG_{i_{cil}} + m_{i_{haste}} (P_i - CG_{i_{haste}})}{m_{i_{total}}}, \quad (4.23)$$

$$I_{i_{total}} = I_{i_{cil}} + I_{i_{haste}} + m_{i_{cil}} (CG_{i_{cil}} - CG_{i_{total}})^2 + m_{i_{haste}} (CG_{i_{haste}} - CG_{i_{total}})^2, \quad (4.24)$$

e

$$I_{i_{total}}^{\cdot} = 2 \frac{m_{i_{cil}} m_{i_{haste}}}{m_{i_{total}}} (P_i - CG_{i_{haste}} - CG_{i_{cil}}) \frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i, \quad (4.25)$$

onde  $\frac{dP_i}{dq_i}$  é a inversa da Equação 3.19, de forma que  $\frac{dP_i}{dq_i} = \frac{1}{J_{i,i}}$ .

Para calcular o ângulo  $a\theta_i$ , a seguinte equação pode ser usada:

$$a\theta_i = q_{(i-1)} + p\alpha_i - (\pi - \phi_{A_i}), \quad (4.26)$$

onde  $q_{(i-1)}$  é igual à 0 para  $i = 1$ , e igual à  $q_1$  para  $i = 2$ ,

$$p\alpha_i = \text{atan2} \left( -\frac{dP_i}{dq_i}, \frac{\|A_i'\|^2 + P_i^2 - \|B_i\|^2}{2P_i} \right), \quad (4.27)$$

e para calcular a sua velocidade e aceleração, pode-se usar as seguintes equações:

$$a\dot{\theta}_i = J_{ai} \dot{q}_i + q_{(i-1)}^{\cdot}, \quad (4.28)$$

onde

$$J_{ai} = \frac{\|B_i\|^2 - \|A_i'\|^2}{2P_i^2} + \frac{1}{2}, \quad (4.29)$$

e

$$a\ddot{\theta}_i = J_{ai} \ddot{q}_i + \dot{J}_{ai} \dot{q}_i + q_{(i-1)}^{\cdot\cdot}, \quad (4.30)$$

onde

$$\dot{J}_{ai} = \frac{\|A_i'\|^2 - \|B_i\|^2}{P_i^3} \frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i. \quad (4.31)$$

$q_{(i-1)}^{\cdot}$  e  $q_{(i-1)}^{\cdot\cdot}$  serão igual à 0 no caso do Atuador 1, pois a base é estática, e igual a  $\dot{q}_1$  e  $\ddot{q}_1$ , respectivamente, no caso do Atuador 2.

Para o cálculo das acelerações no centro de massa do cilindro, pode-se usar a seguinte equação:

$$\vec{a}_{i_{cil}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{i_{cil}} \\ \ddot{y}_{i_{cil}} \end{bmatrix} = J_{i_{cil}} \vec{\ddot{q}} + J'_{i_{cil}} \vec{\dot{q}}, \quad (4.32)$$



onde

$$J_{i_{cil}} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) & 0 \\ \|\|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + CG_{i_{cil}} & J_{ai} CG_{i_{cil}} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

e

$$J'_{i_{cil}} = \begin{bmatrix} -[\|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + CG_{i_{cil}}] \dot{q}_{i-1} & -J_{ai} CG_{i_{cil}} (J_{ai} \cdot \dot{q}_i + 2\dot{q}_{i-1}) \\ -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) \dot{q}_{i-1} & J_{ai} CG_{i_{cil}} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

com

$$\zeta_{ai} = \phi'_{Ai} - a\theta_i + \theta_{i-1} = \phi'_{Ai} - p\alpha_i - \phi_{Ai} + \pi, \quad (4.35)$$

$$\phi'_{Ai} = \operatorname{atan}(A_{iy}/A_{ix}), \quad (4.36)$$

e

$$\|A_i\| = \sqrt{A_{ix}^2 + A_{iy}^2}, \quad (4.37)$$

sendo que os ângulos  $\phi_{Ai}$ ,  $p\alpha_i$  e  $\phi'_{Ai}$  podem ser visualizados na Figura 4.4. Para a haste, a aceleração pode ser calculada da seguinte forma:

$$\vec{a}_{i_{haste}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{i_{haste}} \\ \ddot{y}_{i_{haste}} \end{bmatrix} = J_{i_{haste}} \vec{\ddot{q}} + J'_{i_{haste}} \vec{\dot{q}}, \quad (4.38)$$

onde

$$J_{i_{haste}} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) & \frac{dP_i}{dq_i} \\ \|\|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + P'_i & J_{ai} P'_i \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

com  $P'_i = P_i - CG_{i_{haste}}$ , e

$$J'_{i_{haste}} = \begin{bmatrix} -[\|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + P'_i] \dot{q}_{i-1} & -J_{ai} P'_i (J_{ai} \dot{q}_i + 2\dot{q}_{i-1}) + \frac{d^2 P_i}{dq_i^2} \dot{q}_i \\ -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) \dot{q}_{i-1} & J_{ai} P'_i + 2 \frac{dP_i}{dq_i} (J_{ai} \dot{q}_i + \dot{q}_{i-1}) \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

onde

$$\frac{d^2 P_i}{dq_i^2} = -\frac{dP_i}{dq_i} \tan(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi}) - \left(\frac{dP_i}{dq_i}\right)^2 / P_i. \quad (4.41)$$

Com as acelerações dos centros de gravidade do cilindro e da haste calculados, é possível obter a aceleração vertical do centro de gravidade do atuador completo:

$$\ddot{y}_{i_{cg}} = \frac{\ddot{y}_{i_{cil}} m_{i_{cil}} + \ddot{y}_{i_{haste}} m_{i_{haste}}}{m_{i_{total}}}. \quad (4.42)$$

Com todos os parâmetros necessários determinados, as Equações 4.20 e 4.21 permitem calcular as forças que o atuador  $i$  aplica sobre os pontos de acoplamento, no sistema de

coordenadas local do atuador. É possível rotacionar os vetores de força para ficarem alinhados com o sistema de coordenadas global do braço:

$$\overrightarrow{FA}_{i_g} = \mathbf{R}_{ai} \overrightarrow{FA}_i, \quad (4.43)$$

e

$$\overrightarrow{FB}_{i_g} = \mathbf{R}_{ai} \overrightarrow{FB}_i, \quad (4.44)$$

onde  $\overrightarrow{FA}_{i_g}$  e  $\overrightarrow{FB}_{i_g}$  são os vetores de força que o atuador  $i$  aplica sobre os pontos de acoplamento do braço no sistema de coordenadas global, e  $\mathbf{R}_{ai}$  é uma matriz de rotação, dada por:

$$\mathbf{R}_{ai} = \begin{bmatrix} \cos(a\theta_i) & -\sin(a\theta_i) \\ \sin(a\theta_i) & \cos(a\theta_i) \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

As Equações 4.43 e 4.44 permitem calcular as forças passivas do atuador  $i$ , mas para ser possível utilizar as equações dinâmicas na forma mostrada nas seções 4.2.1 e 4.2.2 é preciso calcular o torque equivalente que estas forças aplicam sobre as juntas, podendo ser calculado por intermédio da Equação 4.46:

$$\vec{\tau}_a = (\mathbf{H}_{a_1} + \mathbf{H}_{a_2})\vec{q} + (\mathbf{C}_{a_1} + \mathbf{C}_{a_2})\dot{q} + \vec{\tau}_{ag_1}(\vec{q}) + \vec{\tau}_{ag_2}(\vec{q}), \quad (4.46)$$

onde  $\mathbf{H}_{a_1}$  e  $\mathbf{H}_{a_2}$  são as matrizes de inércia dos atuadores 1 e 2, respectivamente,  $\mathbf{C}_{a_1}$  e  $\mathbf{C}_{a_2}$  são as matrizes do efeito giroscópico e de Coriolis dos atuadores 1 e 2, respectivamente, e  $\vec{\tau}_{ag_1}$  e  $\vec{\tau}_{ag_2}$  são os vetores de torques equivalentes devido ao peso próprio dos atuadores 1 e 2, respectivamente.

$\mathbf{H}_{a_1}$  pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$\mathbf{H}_{a_1} = \begin{bmatrix} m_{a111} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

onde

$$m_{a111} = m_{1_{haste}} \frac{dP_1}{dq_1} \|B_1\| \sin(\zeta_{b1}) - \|B_1\| \cos(\zeta_{b1}) J_{\alpha 1} \frac{(CG_{1total}^2 m_{1total} + I_{1total})}{P_1}, \quad (4.48)$$

com

$$\zeta_{b1} = q_1 + \phi_{B1} - a\theta_1. \quad (4.49)$$

$\mathbf{H}_{a_2}$  pode ser expressa como:

$$\mathbf{H}_{a_2} = \begin{bmatrix} m_{a211} & m_{a212} \\ m_{a212} & m_{a222} \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

onde

$$m_{a_{211}} = -m_{2_{total}} (\|A_2\|^2 + 2\|A_2\| \cos(\zeta_{a2}) CG_{2_{total}} + CG_{2_{total}}^2) - I_{2_{total}}, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} m_{a_{212}} = & -m_{2_{total}} CG_{2_{total}} J_{\alpha 2} [\|A_2\| \cos(\zeta_{a2}) + CG_{2_{total}}] \\ & + m_{2_{haste}} \|A_2\| \operatorname{sen}(\zeta_{a2}) \frac{dP_2}{dq_2} - I_{2_{total}} J_{\alpha 2}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

e

$$m_{a_{222}} = m_{2_{haste}} \frac{dP_2}{dq_2} \|B_2\| \operatorname{sen}(\zeta_{b2}) - \|B_2\| \cos(\zeta_{b2}) J_{\alpha 2} \frac{(CG_{2_{total}}^2 m_{2_{total}} + I_{2_{total}})}{P_2}, \quad (4.53)$$

com

$$\zeta_{b2} = q_{12} + \phi_{B2} - a\theta_2. \quad (4.54)$$

$C_{a_1}$  pode ser expressa como:

$$C_{a_1} = \begin{bmatrix} c_{a111} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{a111} = & \|B_1\| \operatorname{sen}(\zeta_{b1}) m_{1_{haste}} \dot{q}_1 \left[ \frac{d^2 P_1}{dq_1^2} - J_{\alpha 1}^2 (P_1 - CG_{1_{haste}}) \right] \\ & - \frac{\|B_1\|}{P_1} \cos(\zeta_{b1}) \left( 2CG_{1_{total}} m_{1_{haste}} \frac{dP_1}{dq_1} J_{\alpha 1} \dot{q}_1 + J_{\alpha 1} CG_{1_{total}}^2 m_{1_{total}} \right) \\ & - \frac{\|B_1\|}{P_1} \cos(\zeta_{b1}) (J_{\alpha 1} I_{1_{total}} \dot{q}_1 + J_{\alpha 1} I_{1_{total}}), \end{aligned} \quad (4.56)$$

$C_{a_2}$  pode ser calculada pela Equação 4.57:

$$C_{a_2} = \begin{bmatrix} c_{a211} & c_{a212} \\ c_{a221} & c_{a222} \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

onde

$$c_{a211} = -I_{2_{total}} \dot{q}_1, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} c_{a212} = & \|A_2\| \operatorname{sen}(\zeta_{a2}) \left[ m_{2_{haste}} \frac{d^2 P_2}{dq_2^2} \dot{q}_2 - m_{2_{total}} J_{\alpha 2} CG_{2_{total}} (2\dot{q}_1 + J_{\alpha 2} \dot{q}_2) \right] \\ & - [CG_{2_{total}} + \|A_2\| \cos(\zeta_{a2})] m_{2_{total}} CG_{2_{total}} J_{\alpha 2} \dot{q}_1 - J_{\alpha 2} I_{2_{total}} \dot{q}_1 \\ & - [CG_{2_{total}} + \|A_2\| \cos(\zeta_{a2})] 2m_{2_{haste}} \frac{d^2 P_2}{dq_2^2} (\dot{q}_1 + J_{\alpha 2} \dot{q}_2) - J_{\alpha 2} I_{2_{total}} \dot{q}_1, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} c_{a221} = & \|A_2\| \|B_2\| \cos(\zeta_{b2}) \operatorname{sen}(\zeta_{a2}) m_{2_{total}} \frac{CG_{2_{total}}}{P_2} \dot{q}_1 \\ & - \|A_2\| \|B_2\| \operatorname{sen}(\zeta_{b2}) \cos(\zeta_{a2}) m_{2_{haste}} \dot{q}_1 \\ & - \|B_2\| \operatorname{sen}(\zeta_{b2}) m_{2_{haste}} (P_2 - CG_{2_{haste}}) \dot{q}_1 - \|B_2\| \cos(\zeta_{b2}) I_{2_{total}} \dot{q}_1 / P_2, \end{aligned} \quad (4.60)$$

e

$$\begin{aligned}
c_{a_{222}} = & \|B_2\| \operatorname{sen}(\zeta_{b2}) m_{2_{haste}} \left[ \frac{d^2 P_2}{dq_2^2} \dot{q}_2 - J_{\alpha 2} (2\dot{q}_1 + J_{\alpha 2} \dot{q}_2) (P_2 - CG_{2_{haste}}) \right] \\
& - 2 \frac{\|B_2\|}{P_2} \cos(\zeta_{b2}) CG_{2_{total}} m_{2_{haste}} \frac{dP_2}{dq_2} (\dot{q}_1 + J_{\alpha 2} \dot{q}_2) \\
& - \frac{\|B_2\|}{P_2} \cos(\zeta_{b2}) (J_{\alpha 2} CG_{2_{total}}^2 m_{2_{total}} + J_{\alpha 2} I_{2_{total}} + J_{\alpha 2} \dot{I}_{2_{total}}).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$\vec{\tau}_{ag_1}$  pode ser expresso como:

$$\vec{\tau}_{ag_1}(\vec{q}) = g \|B_1\| \begin{bmatrix} \cos(\zeta_{b1}) \cos(a\theta_1) tM_1 - m_{1_{haste}} \cos(q_1 + \phi_{B1}) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Finalmente,  $\vec{\tau}_{ag_2}$  pode ser calculado através da Equação 4.63:

$$\vec{\tau}_{ag_2}(\vec{q}) = g \begin{bmatrix} m_{2_{total}} [-\|A_2\| \cos(q_1 + \phi'_{A2}) - CG_{2_{total}} \cos(a\theta_2)] \\ \|B_2\| [\cos(\zeta_{b2}) \cos(a\theta_2) tM_2 - m_{2_{haste}} \cos(q_{12} + \phi_{B2})] \end{bmatrix}, \tag{4.63}$$

onde

$$tM_i = \frac{(CG_{i_{haste}} m_{i_{haste}} - CG_{i_{cil}} m_{i_{cil}})}{P_i}. \tag{4.64}$$

#### 4.2.4 Dinâmica de um braço com atuadores lineares

Para equacionar o braço robótico com atuadores lineares estudado neste trabalho, é possível combinar a equação dinâmica mostrada na Seção 4.2.1 com os efeitos calculados nas seções 4.2.2 e 4.2.3, resultando na seguinte equação:

$$\mathbf{H}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_g(\vec{q}) = \vec{\tau}_f(\vec{q}, \vec{f}_l) + \vec{\tau}_a(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) + \vec{\tau}_{end}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}), \tag{4.65}$$

onde  $\vec{\tau}_f(\vec{q}, \vec{f}_l)$  representa o torque devido às forças ativas dos atuadores,  $\vec{\tau}_a(\vec{q})$  representa as forças passivas dos atuadores, e  $\vec{\tau}_{end}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$  representa o carregamento devido à ferramenta.

Substituindo as Equações 4.15, 4.19 e 4.46 chega-se à:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_g(\vec{q}) = & \bar{\mathbf{J}}^{-1} \vec{f}_l + \vec{\tau}_{ag_1}(\vec{q}) + \vec{\tau}_{ag_2}(\vec{q}) + \vec{\tau}_{g_{end}} \\
& + (\mathbf{H}_{a_1} + \mathbf{H}_{a_2} + \mathbf{H}_{end})\ddot{\vec{q}} + (\mathbf{C}_{a_1} + \mathbf{C}_{a_2} + \mathbf{C}_{end})\dot{\vec{q}}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Esta equação pode ser reordenada, deixando em seu lado direito apenas os valores controláveis, no caso as forças do atuador,  $\vec{f}_l$ :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{a_1} - \mathbf{H}_{a_2} - \mathbf{H}_{end})\ddot{\vec{q}} + (\mathbf{B} - \mathbf{C}_{a_1} - \mathbf{C}_{a_2} - \mathbf{C}_{end})\dot{\vec{q}} \\
+ (\vec{\tau}_g - \vec{\tau}_{ag_1} - \vec{\tau}_{ag_2} - \vec{\tau}_{g_{end}}) = \bar{\mathbf{J}}^{-1} \vec{f}_l.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

A Equação 4.67 pode, para efeito de síntese de algoritmos de controle, ser tratada como a Equação 4.7, isto é, os métodos de controle que usam como base a equação dos torques de um braço com atuadores rotacionais podem também ser utilizados com esta equação modificada, que considera braços com atuadores lineares. Esta consiste em uma importante contribuição do presente trabalho, pois permite que estratégias consolidadas de controle de manipuladores possam ser, com modificações moderadas, aplicadas aos braços em estudo.

A Equação 4.67 não considera todos os efeitos que ocorrem sobre o braço. Foram considerados os efeitos da inércia, Coriolis, gravidade e atrito viscoso linear, mas não foram considerados outros efeitos, como o do atrito estático e outras não linearidades do atrito, elasticidade dos componentes, ou folgas nas juntas.

#### 4.2.5 Verificação das equações dinâmicas

Foi desenvolvido um programa em Matlab® capaz de simular um braço robótico com atuadores lineares, usando as equações dinâmicas apresentadas nas seções anteriores. À este programa foi dado o nome de simDRHL, sigla para Simulação Dinâmica de Robôs Hidráulicos com atuadores Lineares. Para verificar a sua funcionalidade, e assim verificar as equações dinâmicas, foi realizada uma comparação com um *software* comercial, onde o mesmo caso foi simulado em ambos os programas computacionais. Os resultados comparados foram os ângulos das juntas, medidos ao longo do tempo. O caso simulado consiste no braço que pode ser visualizado na Figura 4.5, para  $t=24.1$  segundos, utilizando os parâmetros apresentados na Tabela 4.1. Inicialmente, o braço encontra-se em repouso com  $\vec{q} = [0; 0]$ , e é permitido que o braço tenha um movimento de queda livre devido à gravidade. O atrito nas juntas é desprezado. Desta forma, o caso analisado consiste em um tipo de pêndulo duplo cujo comportamento é altamente caótico, isto é, a sua resposta é altamente imprevisível e sensível aos parâmetros de entrada e ao seu estado anterior. Foram simulados 30 segundos do comportamento dinâmico do braço.

Devido à característica caótica do caso analisado, qualquer diferença entre o resultado do simDRHL e o resultado fornecido pelo *software* comercial, mesmo que inicialmente insignificativa, será ampliada a medida em que o tempo avança. Caso o comportamento do braço simulado nos dois algoritmos programados seja similar, então será possível afirmar que as equações utilizadas são compatíveis. Evidentemente, isto não significa que a modelagem utilizada representa exatamente a realidade, pois foram utilizadas simplificações, mas indica que os efeitos considerados foram equacionados corretamente.

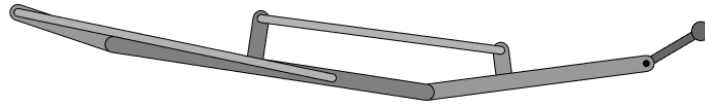


Figura 4.5 – Imagens mostrando o caso usado para verificação simulado no programa desenvolvido

Tabela 4.1 – Parâmetros do braço utilizado para a verificação

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Comprimento do elo $i$	$a_i$	1,0 m	0,7 m
CG do elo $i$	$cg_i$	0,5 m	0,35 m
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,1]$ m	$[0,45; 0,15]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,7; 0,0]$ m	$[0,25; 0,1]$ m
Massa do elo $i$	$m_i$	20 kg	14 kg
Momento de inércia do elo $i$	$I_i$	50 kg.m <sup>2</sup>	25 kg.m <sup>2</sup>
Massa do cilindro do atuador $i$	$m_{i,cil}$	30 kg	20 kg
Massa da haste do atuador $i$	$m_{i,haste}$	20 kg	10 kg
CG do cilindro do atuador $i$	$CG_{i,cil}$	0,35 m	0,25 m
CG da haste do atuador $i$	$CG_{i,haste}$	0,20 m	0,15 m
Momento de inércia do cilindro do atuador $i$	$I_{i,cil}$	3,0 kg.m <sup>2</sup>	1,5 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia da haste do atuador $i$	$I_{i,haste}$	4,0 kg.m <sup>2</sup>	2,5 kg.m <sup>2</sup>
Força aplicada pelo atuador $i$	$f_{l_i}$	100 N	100 N
Massa total da ferramenta e objeto	$m_{end}$	15 kg	
Offset da ferramenta	$d_{end}$	0,2 m	
Momento de inércia de massa da ferramenta	$I_{end}$	5 kg.m <sup>2</sup>	
Posição angular da ferramenta	$q_{13}$	$q_1 + q_2 + 0,4$ rad	
Velocidade angular da ferramenta	$\dot{q}_{13}$	$\dot{q}_1 + \dot{q}_2$	
Aceleração angular da ferramenta	$\ddot{q}_{13}$	$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$	

O software comercial utilizado não permite ao usuário fixar a orientação de um elemento sem o uso de forças externas. Desta forma, não é possível simular a ferramenta da mesma forma que ela é simulada no simDRHL, onde a posição, velocidade e aceleração angulares da ferramenta são determinados pela trajetória, conforme descrito na Seção 4.2.2. Ao invés disto, a verificação foi realizada considerando a ferramenta rigidamente acoplada ao segundo elo, com  $q_3 = 0,4$  rad. Assim, tem-se que  $q_{13} = q_1 + q_2 + 0,4$  rad,  $\dot{q}_{13} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ , e  $\ddot{q}_{13} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$ .

O simDRHL utiliza o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para resolver a equação diferencial no domínio do tempo. O passo temporal escolhido foi de 1 milissegundo. O computador usado para o teste possui um processador Intel Core-i5 4690K com 4 núcleos, frequência máxima de 4.4 GHz e 8GB de RAM. A simulação foi realizada 10 vezes com os mesmos parâmetros, resultando em um tempo médio de processamento de 8,19 segundos. Resultados para os ângulos de junta do braço, obtidos pela simulação realizada no *software* comercial e pelo simDRHL são mostrados na Tabela 4.2.

Como pode ser observado nos resultados mostrados na Tabela 4.2, o maior erro encontrado dentro dos 30 segundos analisados foi de 1,76%. Neta tabela, valores maiores do que  $2\pi$  para os ângulos indicam múltiplas rotações completas. A Figura 4.6, que permite comparar a trajetória da extremidade do braço desempenhada por ambos programas, comprova que o comportamento do braço simulado pelo simDRHL é significativamente semelhante ao do fornecido pelo *software* comercial.

Tabela 4.2 – Comparação dos resultados obtidos pelo software comercial e pelo simDRHL

Tempo, [s]	0	5	10	15	20	25	30
$\vec{q}(t)$ , [rad]	$\begin{matrix} \textit{Software} \\ \textit{comercial} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3,1178 \\ -4,9085 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,2328 \\ -10,1816 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0704 \\ -19,6172 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,6020 \\ -33,2055 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2,0152 \\ -36,0270 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,7475 \\ -54,1070 \end{bmatrix}$
	$\begin{matrix} \textit{simDRHL} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3,1178 \\ -4,9085 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,2353 \\ -10,1810 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0692 \\ -19,6166 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,6020 \\ -33,2055 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2,0151 \\ -36,0269 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,7473 \\ -54,1066 \end{bmatrix}$
Erro	$\begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \%$	$\begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,00 \end{bmatrix} \%$	$\begin{bmatrix} 0,20 \\ -0,01 \end{bmatrix} \%$	$\begin{bmatrix} -1,76 \\ -0,00 \end{bmatrix} \%$	$\begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,00 \end{bmatrix} \%$	$\begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,00 \end{bmatrix} \%$	$\begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,00 \end{bmatrix} \%$

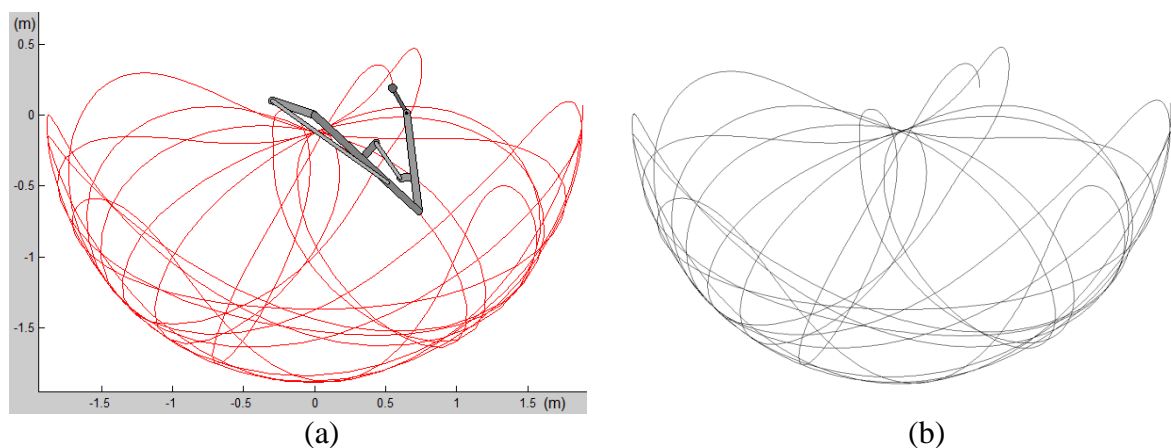


Figura 4.6 – Comparação da trajetória da extremidade do braço: (a) desempenhada pelo braço simulado pelo simDRHL, e (b) desempenhada pelo braço simulado pelo *software* comercial.

Concluindo, a equação dinâmica desenvolvida, quando usada com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem e um passo suficientemente pequeno, é capaz de aproximar o

comportamento do braço de uma forma adequada. Quando executado em um computador pessoal recente o programa simDRHL também é capaz de completar a simulação em um tempo menor do que o período simulado, de 30 segundos. Para facilitar a visualização, a Figura 4.7 mostra a posição do braço simulado em diversos tempos.

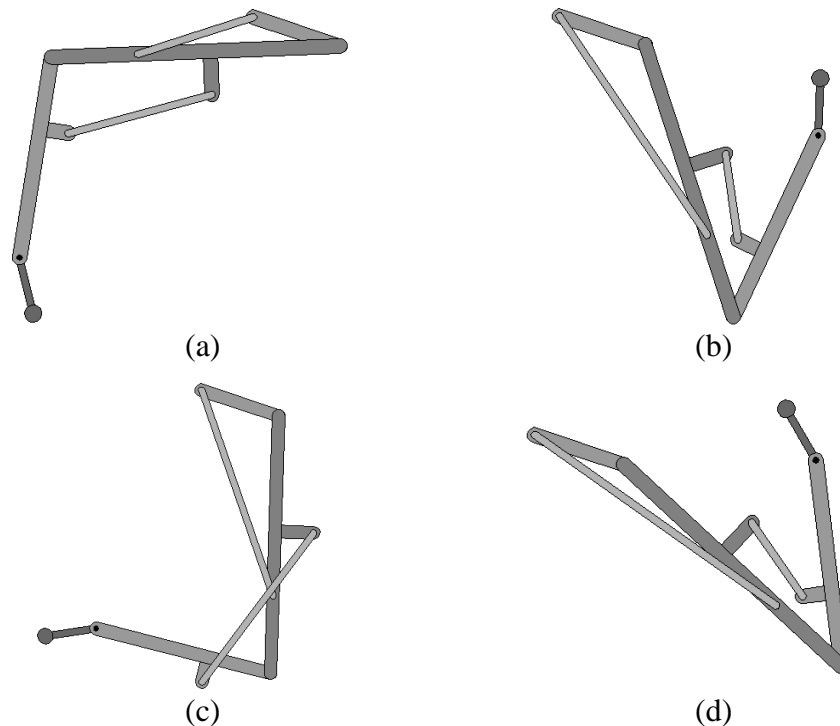


Figura 4.7 – Conjunto de figuras comparando a posição do braço simulado pelo simDRHL, para (a)  $t = 5$ , (b)  $t = 10$ , (c)  $t = 20$  e (d)  $t = 30$  segundos.

### 4.3 Análise estrutural do braço

Para ser possível definir uma estrutura ótima para o braço, é necessária uma análise estrutural do sistema. Esta pode ser feita com o uso de um *software* comercial, como o SolidWorks®, que é capaz de simular a estrutura com uma grande quantidade de detalhes. No entanto, embora este *software* possa fornecer resultados precisos e informações sobre concentrações de tensões, ele também requer um grande esforço computacional, o que compromete sua utilização com estratégias de otimização onde um grande número de iterações é necessário. Dessa forma, se torna necessário o desenvolvimento de um método simplificado de análise, capaz de fornecer resultados aproximados com um custo computacional reduzido. Este método pode ser, portanto, usado durante a etapa de otimização, pois permite que esta seja executada em um tempo significativamente reduzido.

O método de análise simplificado proposto é baseado no Método dos Elementos Finitos, conhecido por sua sigla em inglês FEM (*Finite Element Method*). Assim, foi desenvolvido um



programa computacional em linguagem compatível com o ambiente do Matlab® capaz de simular os deslocamentos estruturais, para um dado carregamento. Este programa utiliza elementos estruturais de viga, e modela o braço de modo que seja possível modificar a seção transversal dos elos ao longo de seu comprimento. Os carregamentos utilizados incluem o peso próprio dos elos, o peso de uma possível ferramenta e/ou objeto na extremidade do braço, e as forças aplicadas pelos atuadores. Também são considerados os carregamentos dinâmicos, devido à aceleração dos elos do braço. Os resultados obtidos pelo programa desenvolvido foram verificados por meio de comparação com os de uma simulação realizada utilizando o software comercial SolidWorks®. A seguir, este método será detalhado.

#### 4.3.1 Método dos Elementos Finitos de deslocamentos para análise estrutural estática

O método dos elementos finitos é amplamente descrito na literatura. Segundo Petyt, 1990, é um método que pode ser usado para calcular a resposta de estruturas cuja complexidade inviabiliza sua solução analítica. Isto é feito através da discretização de um domínio contínuo em vários elementos, o que permite que a variável de interesse seja calculada apenas sobre pontos específicos, chamados de nós, ao invés de sobre todo o domínio. Funções de interpolação são utilizadas para calcular os valores entre os nós. Uma análise mais aprofundada da teoria do método está fora do escopo deste trabalho, podendo ser encontrada na Seção 3.2 de Petyt, 1990, e em Liu e Quek, 2003. Este método é bem amplo, e pode ser utilizado para analisar vários tipos de comportamentos. Por exemplo, pode ser utilizado para a análise térmica de uma estrutura, ou análise do escoamento de um fluido. Aqui, este método é usado para calcular o deslocamento de uma estrutura sujeita a um carregamento conhecido.

A equação clássica utilizada para modelar o sistema elástico linear é:

$$\mathbf{K} \vec{u}_n = \vec{F}_n, \quad (4.68)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global do sistema,  $\vec{u}_n$  é o vetor com os deslocamentos nodais devido à deformação da estrutura, e  $\vec{F}_n$  são as forças aplicadas nos nós.

A matriz  $\mathbf{K}$  é formada pela combinação de várias matrizes de rigidez menores,  $\mathbf{K}_{e_i}$ , que são as matrizes de rigidez elementares. Para cada elemento  $i$  da estrutura é calculada uma matriz  $\mathbf{K}_{e_i}$ , que expressa a rigidez equivalente entre os  $n_{gdl_i}$  graus de liberdade do elemento. Portanto, esta matriz possui dimensões de  $n_{gdl_i} \times n_{gdl_i}$ . A matriz de rigidez completa  $\mathbf{K}$ , no entanto, contém todos os graus de liberdade da estrutura, possuindo dimensões de  $n_{gdl} \times n_{gdl}$ . Cada matriz  $\mathbf{K}_{e_i}$  deve ser adicionada a uma parte específica da matriz  $\mathbf{K}$ , de modo que os

graus de liberdade do elemento no sistema local correspondam aos respectivos graus de liberdade do elemento no sistema global.

Se os deslocamentos são conhecidos ou impostos, a Equação 4.68 permite calcular as forças que devem ser aplicadas à estrutura para que estes deslocamentos sejam alcançados. Por outro lado, se as forças externas são conhecidas, então é possível isolar o vetor  $\vec{u}_n$ , o que permite o cálculo dos deslocamentos em função das forças aplicadas sobre a estrutura. Este é o caso do modelo estudado, e, portanto, a seguinte equação é utilizada:

$$\vec{u}_n = \mathbf{K}^{-1} \vec{F}_n. \quad (4.69)$$

Para ser possível resolver esta equação, é necessário o uso de pelo menos uma restrição de deslocamento sobre cada tipo grau de liberdade nodal utilizado. Em outras palavras, a estrutura deve ser isostática. Caso contrário, a estrutura poderia ser deslocar livremente e as equações formadas pelas linhas da equação matricial se tornariam linearmente dependentes, o que impossibilitaria uma solução fechada.

Para se aplicar as restrições de deslocamento há dois métodos amplamente utilizados. No primeiro deles, a matriz  $\mathbf{K}$  é modificada, removendo-se as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade fixos. O sistema resolvido é assim composto apenas pelos graus de liberdade livres. Este método é exato, porém não permite a utilização de deslocamentos forçados diferentes de zero. O segundo método consiste na modificação dos valores da matriz  $\mathbf{K}$ , onde o valor correspondente a cada grau de liberdade fixo é substituído por um valor muito superior aos outros valores da matriz. Este método permite o uso de deslocamentos forçados diferentes de zero, mas não é exato e pode levar à perda de precisão durante a inversão da matriz  $\mathbf{K}$ .

Para que possam ser contornados os problemas dos métodos expostos no parágrafo anterior, é proposto um novo método de resolução, capaz de calcular apenas os deslocamentos dos graus de liberdade livres e permitindo o uso de deslocamentos forçados. Este método é composto de uma modificação da Equação 4.69, onde o vetor  $\vec{u}_n$  é separado na sua parte conhecida e desconhecida,  $\vec{u}_{n_f}$  e  $\vec{u}_{n_l}$ , e a parte desconhecida é isolada. As linhas referentes aos graus fixos também são removidas, pois o seu resultado já é conhecido. Isto resulta na seguinte equação:

$$\vec{u}_{n_l} = \mathbf{K}_l^{-1} \vec{F}_{n_l} - \mathbf{K}_f \vec{u}_{n_f}, \quad (4.70)$$

onde o sub-índice  $l$  indica que a variável é referente aos  $n_{gld_l}$  graus de liberdade livres, enquanto que o sub-índice  $f$  indica variáveis referentes aos  $n_{gdl_l}$  graus de liberdade fixos.

Assim,  $\vec{u}_{n_l}$  é um vetor  $n_{gdl_l} \times 1$ ,  $\mathbf{K}_l$  é uma matriz quadrada  $n_{gdl_l} \times n_{gdl_l}$  obtida removendo-se de  $\mathbf{K}$  as linhas e colunas referentes aos  $m$  graus de liberdade fixos, e  $\vec{F}_{n_l}$  é um vetor  $n_{gdl_l} \times 1$  de forças externas aplicados sobre os graus de liberdade livres;  $\mathbf{K}_f$  é uma matriz  $n_{gdl_l} \times n_{gdl_f}$  formada pelas  $n_{gdl_f}$  colunas removidas de  $\mathbf{K}$ , mas cujas linhas ainda são referentes apenas aos graus livres. Por último,  $\vec{u}_{n_f}$  é um vetor  $n_{gdl_f} \times 1$  com os deslocamentos conhecidos ou forçados.

Após o cálculo do vetor  $\vec{u}_{n_l}$ , é possível combiná-lo com o vetor de deslocamentos forçados  $\vec{u}_{n_f}$  para montar o vetor de deslocamentos completo,  $\vec{u}_n$ . Cada componente de  $\vec{u}_n$  será igual à componente correspondente de  $\vec{u}_{n_l}$  se for um grau de liberdade livre, ou de  $\vec{u}_{n_f}$  se for fixo. Com este vetor completo, é possível calcular a força de reação que é aplicada pelas restrições sobre os graus de liberdade fixos:

$$\vec{F}_r = \mathbf{K} \vec{u}_n - \vec{F}_l, \quad (4.71)$$

onde  $\vec{F}_r$  é o vetor  $n_{gdl} \times 1$  com as forças de reação, e  $\vec{F}_l$  é o vetor  $n_{gdl} \times 1$  de forças externas aplicadas sobre os graus livres.  $\vec{F}_r$  possui dimensão de  $n_{gdl}$ , mas todos os seus componentes referentes a graus livres serão igual à zero, pois as forças internas, representadas por  $\mathbf{K} \vec{u}_n$ , opõem as forças externas  $\vec{F}_l$ . Em graus de liberdade fixos, são aplicadas forças de reação além das forças externas e internas, e, portanto, as componentes do vetor  $\vec{F}_r$  correspondentes a estes  $n_{gdl_f}$  graus serão diferentes de zero.

### 4.3.2 Modelagem detalhada do braço

Foi usado um conjunto de regras para criar um modelo físico, a partir dos parâmetros de comprimento dos elos e das posições dos pontos de acoplamento, definidos nas seções anteriores. Este modelo detalhado é utilizado em uma análise feita por meio do *software* SolidWorks®, usada para verificação.

A estrutura principal de um elo consiste em uma viga com seção tipo caixão. A escolha deste tipo de seção deve-se à sua boa rigidez à torção e à flexão. A altura da viga não é constante, podendo variar linearmente ao longo de seu comprimento. Esta variação se dá entre os pontos de interesse da viga, constituídos pelos pontos de conexão com as juntas e atuadores, o que permite que a viga possua uma maior rigidez nos pontos onde o carregamento é maior. Duas espessuras de chapa são utilizadas: uma para as verticais que

formam a lateral da seção, e outra para as chapas horizontais utilizadas na parte superior e inferior da seção.

Uma viga cuja seção varie não linearmente pode possuir uma maior eficiência estrutural, tendo uma menor deflexão para uma dada quantidade de material utilizada, mas a sua fabricação, simulação e otimização seriam de maior dificuldade, e portanto este conceito não é abordado neste trabalho.

O projeto da estrutura básica do primeiro elo é feita com base em 10 parâmetros, mostrados na Figura 4.1: o comprimento do elo  $a_1$ , as coordenadas ao longo de  $x$  dos pontos de fixação dos atuadores  $B_{1x}$  e  $A_{2x}$ , as alturas das seções  $H_{J1}$ ,  $H_{B1}$ ,  $H_{A2}$  e  $H_{J2}$ , correspondentes ao ponto da Junta 1, ponto  $B_1$ , ponto  $A_2$  e Junta 2, respectivamente, as espessuras  $t_h$  e  $t_b$ , para as chapas horizontais e verticais, respectivamente, e a largura  $b_1$  da viga.

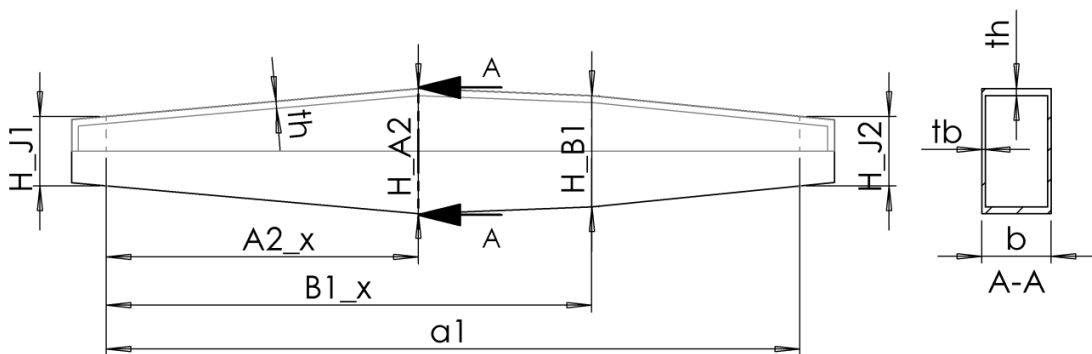


Figura 4.8 – Desenho esquemático mostrando o projeto básico do primeiro elo do braço

O projeto básico do segundo elo é similar ao do primeiro, possuindo porém 8 parâmetros, devido ao fato de ter apenas um ponto de acoplamento com um atuador. Assim, seus parâmetros, apresentados na Figura 4.9, são  $a_2$  para o comprimento entre a Junta 2 e a ponta do elo, a posição  $B_{2x}$ , as alturas  $H_{J2}$ ,  $H_{B2}$  e  $H_{ponta}$ , as espessuras  $t_h$  e  $t_b$ , e a largura  $b_2$ .

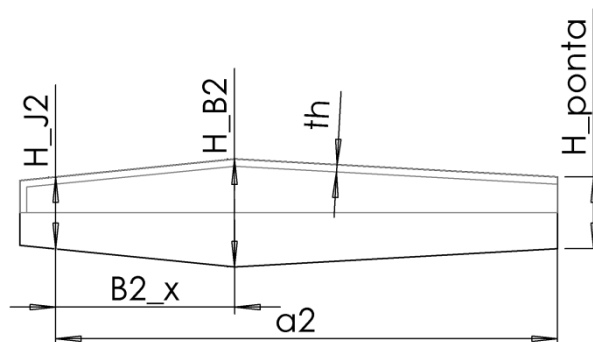


Figura 4.9 – Desenho esquemático mostrando o projeto básico do segundo elo do braço

O acoplamento entre os elos pode ser feito em linha ou lateralmente, com um *offset*, como pode ser visto na Figura 4.10. Um acoplamento em linha, onde ambos os elos pertencem ao mesmo plano, diminuiria o carregamento torcional e flexional horizontal dos elos, porém as estruturas utilizadas para a construção dos elos teriam que permitir o deslocamento relativo entre eles. Para tal, partes da estrutura teriam que ser removidas para evitar colisões, formando um garfo na região do acoplamento, o que reduziria a rigidez da viga. Além disto, as posições dos atuadores teriam que ser escolhidas de modo a evitar colisões entre eles e com a estrutura, limitando as opções e dificultando o projeto. Comparativamente, um acoplamento lateral permite o uso de estruturas mais rígidas, embora a junta em si seja mais flexível, e permite também a montagem dos atuadores em planos diferentes, impossibilitando assim colisões entre eles. Devido a estes fatores, principalmente a este último, apenas o acoplamento lateral foi considerado neste trabalho.

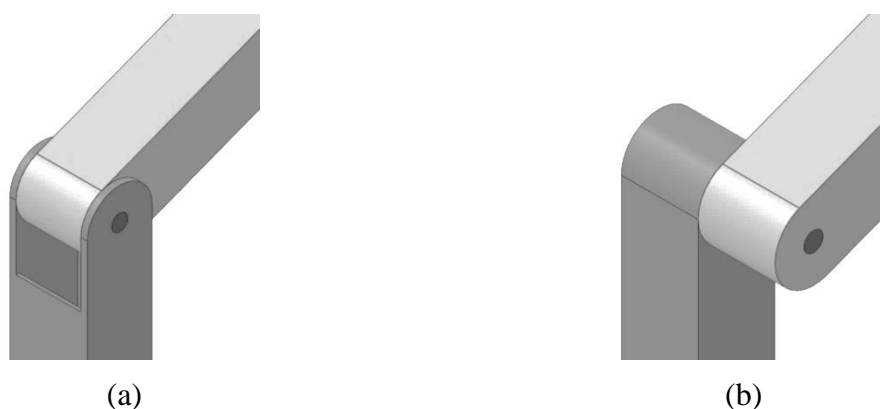


Figura 4.10 – Comparação entre um acoplamento (a) em linha, e (b) lateral

Para considerar a base do robô não é aplicada uma condição de dobradiça na Junta 1 do Elo 1 e na segunda extremidade do Atuador 1. As conexões entre os elos 1 e 2, bem como entre os elos e os atuadores, são feitas por meio da conexão tipo pino do SolidWorks®. É aplicada uma força vertical e um momento sobre a face da extremidade do segundo elo, para simular o peso de uma ferramenta acoplada, como detalhado na Seção 4.2.2.

Os atuadores são fixados aos elos com juntas esféricas, e, portanto, transmitem apenas forças axiais, sofrendo também apenas deformação axial. Como o comprimento axial dos atuadores é monitorado e controlado pelo sistema de controle do robô, pode-se afirmar que qualquer variação da distância entre os pontos de acoplamento é devida ao erro de controle, e não à flexibilidade da estrutura. Devido a isto, os atuadores são modelados como barras rígidas. A conexão entre os elos e os atuadores pode ser feita por meio de um pino lateral com uma chapa de reforço, ou por meio de um garfo, dependendo se o ponto de acoplamento se

encontra dentro ou fora da viga do elo. As forças passivas dos atuadores, de peso próprio e inércia, são calculadas conforme o mostrado na Seção 4.2.3, sendo estas forças aplicadas diretamente sobre os respectivos pontos de acoplamento do modelo.

Existem outros detalhes considerados na modelagem do braço, como o uso de reforços nas regiões das juntas e pontos de acoplamento definidos pelos parâmetros  $w_{ref_1}$ ,  $w_{A_2}$ ,  $w_{B_1}$ ,  $w_{ref_2}$ ,  $w_{B_2}$  e  $w_{ref_{end}}$  para a largura,  $tb_{ref_1}$ ,  $tb_{A_2}$ ,  $tb_{B_1}$ ,  $tb_{ref_2}$ ,  $tb_{B_2}$  e  $tb_{ref_{end}}$  para a espessura. Também são usadas luvas para os eixos das juntas, com diâmetros internos  $d_{pin_1}$  e  $d_{pin_2}$  e diâmetros externos  $d_{luva_1}$  e  $d_{luva_2}$ . Todas estas considerações podem ser vistas com mais detalhes no Apêndice B. Dois exemplos da montagem do braço, para dois casos diferentes, são mostrados na Figura 4.11.

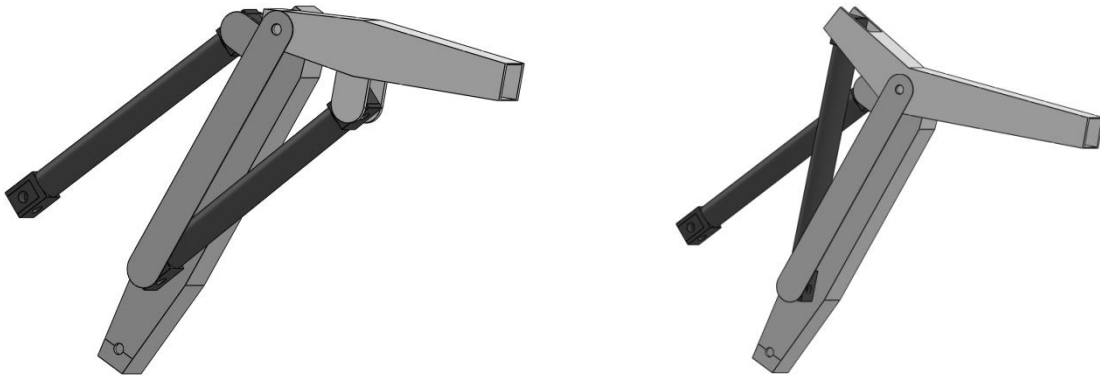


Figura 4.11 – Modelos 3D mostrando duas configurações possíveis para a montagem do braço completo

### 4.3.3 Modelo simplificado

O modelo simplificado desenvolvido utiliza elementos de viga tridimensionais de dois nós. Desta forma, este modelo é composto por vários segmentos de reta, cada um representando uma viga. A mesma estrutura do modelo detalhado é considerada, mas a modelagem é feita de forma a simplificar a resolução da simulação.

#### 4.3.3.1 Estrutura básica

A estrutura básica do primeiro elo é modelada como uma viga entre a posição da Junta 1 e da Junta 2, possuindo, assim, comprimento  $a_1$ , enquanto que a do segundo elo é modelada como uma viga de comprimento  $a_2$  entre a posição da Junta 2 e a ponta do elo, com um *offset* em  $z$  devido ao acoplamento lateral entre os elos, como mostrado na Figura 4.12. Este *offset*,  $d_{off}$ , é a média das larguras dos elos, sendo dado por  $d_{off} = \frac{b_1+b_2}{2}$ .

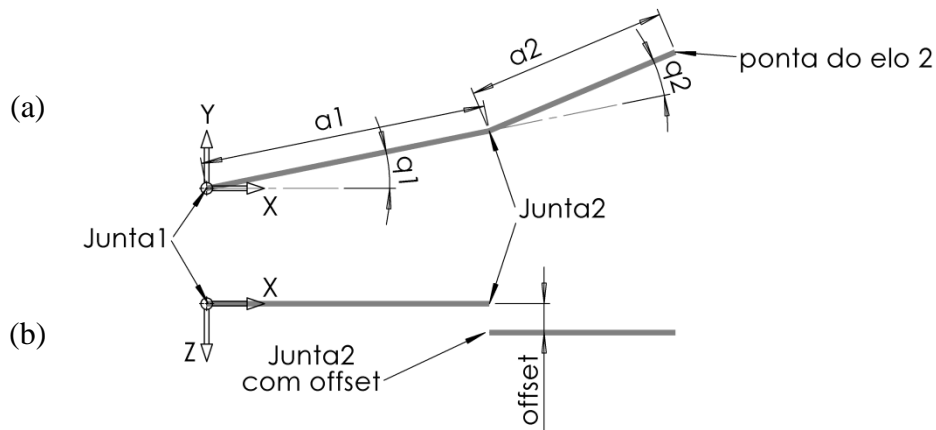


Figura 4.12 – Desenho esquemático mostrando as vigas que representam as estruturas básicas dos elos 1 e 2. (a): vista lateral, (b): vista superior.

Conforme já comentado, a seção transversal utilizada nestas vigas é do tipo caixão, como mostrado na Figura 4.13. O valor da dimensão da base,  $b_s$ , é igual à  $b_1$  para o Elo 1 e  $b_2$  para o Elo 2. Os outros parâmetros variam, no entanto, de acordo com a posição considerada, pois a estrutura dos elos não possui seção constante.

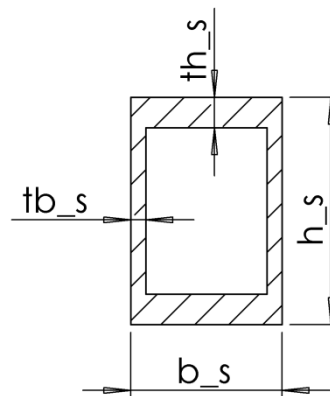


Figura 4.13 – Desenho esquemático mostrando a seção transversal usada para a estrutura principal dos elos

A altura  $h_s$  é obtida pela interpolação linear dos valores de altura definidos sobre os pontos de acoplamento, dados por  $H_{J_1}$ ,  $H_{B_1}$ ,  $H_{A_2}$  e  $H_{J_{2_1}}$  para o Elo 1 e  $H_{J_{2_2}}$ ,  $H_{B_2}$  e  $H_{ponta}$  para o Elo 2, assim como mostrado na Seção 4.3.2. Por exemplo, a seção de um ponto  $x_1$  no Elo 1 entre a Junta 1 e o ponto  $A_2$  possuirá uma altura  $h_s(x_1) = \frac{x_1}{A_{2x}} (H_{A_2} - H_{J_1}) + H_{J_1}$ . Note que a ordem destes pontos não é fixa; o ponto  $A_2$  pode estar antes do  $B_1$ , ou vice-versa, e o ponto  $B_2$  pode inclusive estar atrás da Junta 2, no caso em que  $B_{2x} < 0$ . Generalizando, pode ser utilizada a seguinte equação:

$$\forall x \mid P_{1x} < x < P_{2x}, \quad h_s(x) = \frac{x - P_{2x}}{P_{1x} - P_{2x}} (H_{P_1} - H_{P_2}) + H_{P_2}, \quad (4.72)$$

onde  $x$  é um ponto sobre uma das vigas dos elos, no sistema de coordenadas local de cada uma;  $P_{1x}$  e  $P_{2x}$  são as componentes  $x$  de dois pontos de acoplamento, seja com uma junta ou com um atuador, que sejam subsequentes e sobre o mesmo elo; e  $H_{P_1}$  e  $H_{P_2}$  são os parâmetros que definem a altura da seção nestes pontos.

A espessura das chapas laterais  $tb_s$  será igual à espessura  $t_b$ , mas esta deverá ser incrementada com um reforço se o ponto estiver próximo a um ponto de acoplamento. Estes reforços definem uma região em torno dos pontos de acoplamento, dadas por  $w_{ref_1}$ ,  $w_{B_1}$ ,  $w_{A_2}$  e  $w_{ref_2_1}$  para o Elo 1 e  $w_{ref_2_2}$ ,  $w_{B_2}$  e  $w_{ref_{end}}$  para o Elo 2, e uma espessura extra, dadas por  $tb_{ref_1}$ ,  $tb_{B_1}$ ,  $tb_{A_2}$  e  $tb_{ref_2_1}$  para o Elo 1 e  $tb_{ref_2_2}$ ,  $tb_{B_2}$  e  $tb_{ref_{end}}$  para o Elo 2. Por exemplo, para um ponto  $x_1$  no Elo 1 tal que  $\text{abs}(x_1 - B_{1x}) \leq \frac{w_{B_1}}{2}$ , a espessura das chapas laterais será dada por  $tb_s = t_b + tb_{B_1}$ . Se o ponto não estiver próximo aos pontos de acoplamento então a espessura será simplesmente dada por  $tb_s = t_b$ . Isto pode ser formalizado pela seguinte equação:

$$tb_s(x) = \begin{cases} t_b + tb_{P_1}, & \text{se existir um ponto } P_1 \text{ tal que } \text{abs}(x - P_{1x}) \leq \frac{w_{P_1}}{2}, \\ t_b, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.73)$$

onde o ponto  $P_1$  representa um ponto de acoplamento qualquer sobre o elo considerado, seja com uma das juntas ou com um atuador, e  $w_{P_1}$  e  $tb_{P_1}$  são os parâmetros de comprimento e espessura do reforço utilizado na proximidade daquele ponto. Existe uma exceção, no entanto, para a ponta do Elo 2: neste caso, ao invés da condição ser  $\text{abs}(x - a_2) \leq \frac{w_{ref_{end}}}{2}$ , deve ser  $\text{abs}(x - a_2) \leq w_{ref_{end}}$ , pois evidentemente o reforço não continua além da extremidade do braço.

A espessura das chapas superiores e inferiores  $th_s$  é dada pela espessura  $t_h$ , mas ajustada para levar em consideração o ângulo das chapas em relação à linha neutra. Isto porque teoricamente a seção transversal da viga é sempre perpendicular à linha neutra, mas a seção das chapas, que possuem espessura  $t_h$ , não é. Assim, a equação para esta espessura pode ser dada por:

$$th_s(x) = \frac{t_h}{\cos(\alpha_s(x))}, \quad (4.74)$$



onde  $\alpha_s(x)$  é o ângulo entre as chapas e a linha neutra do elo. Este ângulo pode ser calculado pela seguinte equação:

$$\alpha_s(x) = \text{atan2}(H_{P_2} - H_{P_1}, P_{2x} - P_{1x}), \quad (4.75)$$

onde  $P_{1x}$  e  $P_{2x}$  são as componentes  $x$  dos pontos de acoplamento mais próximos ao ponto  $x$ , e  $H_{P_1}$  e  $H_{P_2}$  são os parâmetros para a altura da viga nestes pontos. Existe uma exceção para o Elo 2, no caso em que  $B_{2x} < 0$  e o acoplamento com o atuador for feito em linha por meio de um garfo. Neste caso, se o ponto  $x$  estiver próximo da ponta, a uma distância menor ou igual a  $L_{cut_2}$  do ponto  $B_2$ , ou seja,  $|x - B_2| \leq L_{cut_2}$ , então  $th_s(x) = 0$ .

#### 4.3.3.2 Extremidades dos elos

As pontas dos elos, partes que ficam além das juntas, não são modeladas diretamente. No entanto, a sua massa é calculada, e o seu peso e efeito inercial são adicionados, como forças externas, sobre os nós das juntas. A inclusão destas forças não provoca um grande impacto nos resultados, mas é importante para a comparação com os do SolidWorks®.

Os detalhes do cálculo dos parâmetros de massa  $m_{ponta_i}$ ,  $CG_{ponta_i}$  e  $I_{ponta_i}$  das extremidades dos elos são mostrados no Apêndice C, e são usados em elementos de massa concentrada colocados sobre os nós das juntas dos elos. Os carregamentos provocados por eles são calculados nas seções 4.3.6 e 4.3.7, juntamente com os dos demais componentes.

#### 4.3.3.3 Pino da Junta 2

O pino da Junta 2, responsável por conectar os dois elos, é modelado como uma barra circular de seção constante. Seu diâmetro e comprimento são definidos pelos parâmetros  $d_{pin_2}$  e  $d_{off}$ , respectivamente. A Figura 4.14 mostra o posicionamento deste pino no modelo, entre os dois elos do braço. A rigidez desta barra é calculado de forma usual, porém a conexão entre o pino e os elos é feita de forma a permitir que eles rotacionem livremente em torno do eixo  $z$ , isto é, a rigidez torcional na direção  $z$  é nula.

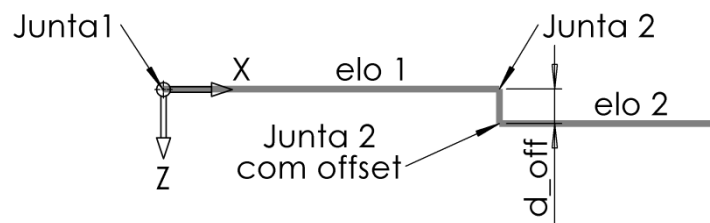


Figura 4.14 – Desenho esquemático, em vista superior, mostrando a modelagem do pino da Junta 2, entre os dois elos.

#### 4.3.3.4 Pontos de acoplamento com os atuadores

Os acoplamentos com os atuadores podem ser feitos em linha, através de um garfo, ou lateralmente, com um pino. A escolha entre os dois tipos é feita de acordo com a coordenada  $y$  do ponto em questão: se for maior do que metade da altura da seção naquele ponto, ou seja, se o ponto estiver fora da viga, então o acoplamento é feito com um garfo. Caso contrário, é usado um pino lateral.

Uma fixação com um pino lateral causa um momento elevado na junta quando comparado com uma fixação em linha, com um garfo. No entanto, uma fixação lateral permite que os atuadores sejam posicionados sobre planos diferentes, eliminando possíveis colisões entre eles. Se possível, o uso de acoplamento com garfos é indicado, mas existem situações em que o uso de pinos laterais é necessário, dependendo dos pontos de fixação calculados para os atuadores.

Ambos os tipos de acoplamento estão sujeitos a um deslocamento devido à deformação elástica. No modelo detalhado, este deslocamento é causado pela deformação do garfo ou pino externo, pela deformação da viga do elo em torno da sua linha neutra, e também pela deformação das paredes da viga, que não se deformam uniformemente devido à concentração das tensões na região de acoplamento. O modelo simplificado proposto é capaz de aproximar a deformação do garfo ou pino e a da viga em torno da linha neutra, mas não é viável a simulação da deformação devido às concentrações de tensão.

A deformação da viga em torno de sua linha neutra é a própria deformação da estrutura básica do elo, segundo a teoria de vigas. A deformação do garfo ou pino é também simulada pela teoria de vigas, aplicada à uma seção de reta que começa na superfície externa da viga principal e vai até o ponto de acoplamento com o atuador. Como, no modelo simplificado, a superfície da viga não é modelada, é necessária a utilização de uma segunda seção de reta que conecta a linha neutra da viga principal ao começo da viga do garfo ou pino. Como a deformação independente das paredes das vigas dos elos não está sendo considerada, estes conectores são considerados rígidos. A Figura 4.15 apresenta um desenho esquemático mostrando o modelo com as estruturas dos pontos de acoplamento adicionadas, onde as linhas pretas são seções de reta que representam conectores rígidos, as linhas claras representam garfos externos, no caso os pontos  $B_1$  e  $B_2$ , e um pino lateral, no caso do ponto  $A_2$ . As linhas pontilhadas são apenas ilustrativas e não fazem parte do modelo.

A seção transversal das vigas utilizadas para modelar os garfos de acoplamento é a mesma das vigas dos elos, mostrada na Figura 4.13, mas com a espessura  $th_s$  igual à zero. Os outros parâmetros para as dimensões da seção são dados pelas seguintes equações:

$$h_s = w_p, \quad (4.76)$$

$$b_s = b_i, \quad (4.77)$$

$$tb_s = t_b + tb_p, \quad (4.78)$$

onde  $w_p$  é a largura do reforço do ponto de acoplamento correspondente,  $tb_p$  é a espessura deste reforço, e  $b_i$  é a largura do elo.

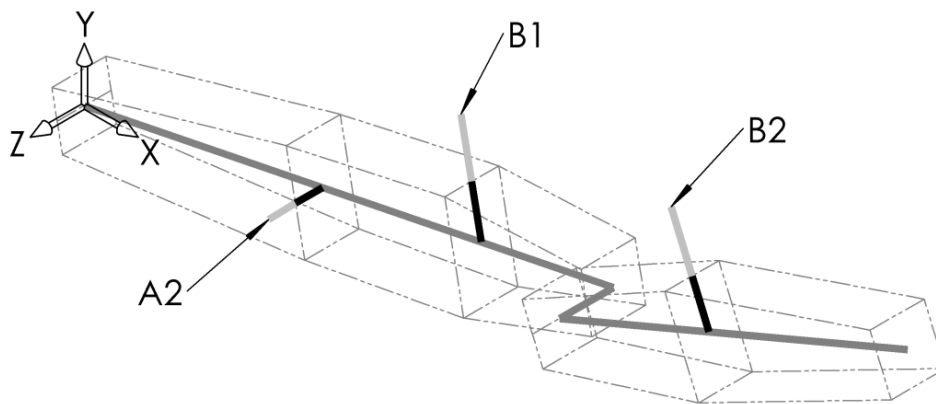


Figura 4.15 – Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os elos modelados com os pontos de acoplamento.

A seção transversal das vigas utilizadas para modelar os pinos laterais é circular, com diâmetro igual à  $d_{pin_{B1}}$ ,  $d_{pin_{A2}}$  ou  $d_{pin_{B2}}$ , dependendo do ponto correspondente. Neste caso também é necessário modelar a chapa externa de reforço, que é usada para reforçar os pinos laterais, diminuindo a flexão. Para tal, o pino do acoplamento e o pino da Junta 2 são estendidos e conectados por uma viga que modela a chapa de reforço, como mostrado na Figura 4.16. Esta viga possui uma seção retangular, cuja altura é igual à  $H_{J_2}$ , ou seja, a altura da viga do elo na Junta 2, e sua largura é igual à espessura das chapas laterais dos elos,  $t_b$ .

As vigas utilizadas para modelagem dos pontos de acoplamento contêm apenas parte de sua geometria, mais especificamente as partes que resistem a maior parte dos carregamentos impostos sobre eles. As partes não modeladas também suportam um carregamento, mas apenas devido às concentrações de tensão que ocorrem nas regiões de acoplamento. Como estas concentrações de tensão não são consideradas neste modelo simplificado, também não há necessidade de adicionar estas partes no modelo. No entanto, o seu peso e inércia impõem carregamentos sobre o resto da estrutura, e portanto é necessário o cálculo dos parâmetros de

massa destas partes extras. Similarmente ao mencionado na Seção 4.3.3.2 estes carregamentos não afetam significativamente o resultado, mas ajudam na comparação com os resultados do SolidWorks®. O cálculo destes parâmetros também é mostrado no Apêndice C.

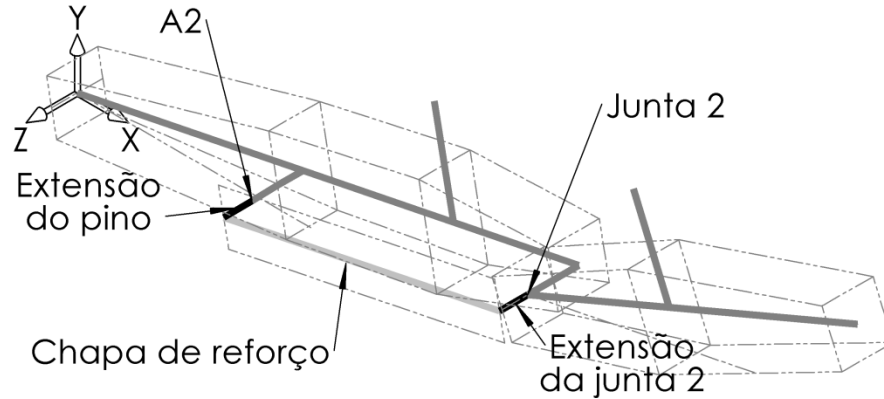


Figura 4.16 – Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando as extensões do pino de acoplamento e da Junta 2, em preto, para fixação da chapa de reforço.

#### 4.3.3.5 Atuadores

Assim como no modelo detalhado, os atuadores são modelados como barras rígidas que transmitem apenas forças axiais. Assim, as barras modeladas possuem rigidez elevada no sentido axial e rigidez nula para flexão e torção. A conexão  $A_1$  é feita fixando-se a extremidade correspondente do Atuador 1, enquanto que a outra extremidade é acoplada ao ponto  $B_1$ . O Atuador 2 é acoplado nos pontos  $A_2$  e  $B_2$ . Isto pode ser visto na Figura 4.17.

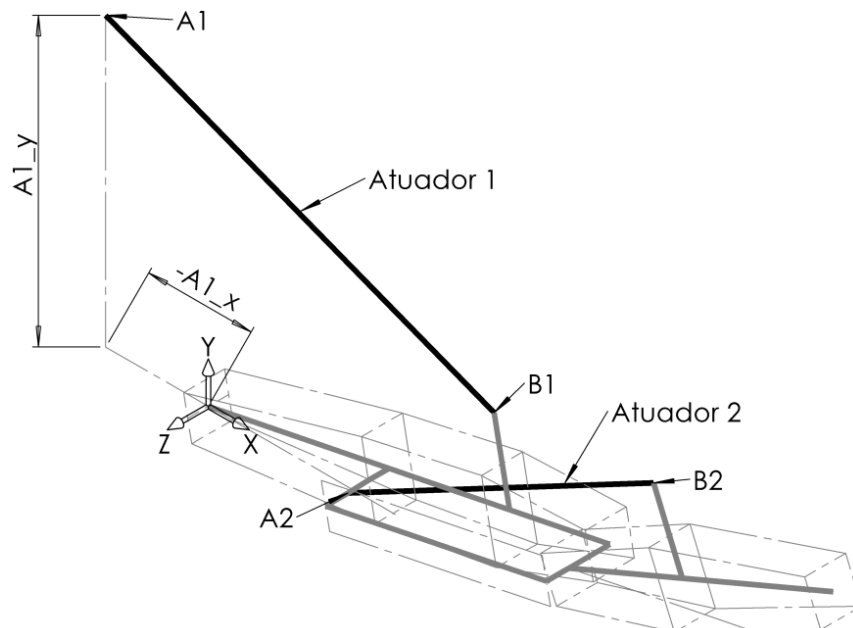


Figura 4.17 - Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os atuadores, em preto, conectados aos seus respectivos pontos de acoplamento.

Como a geometria dos atuadores não é modelada, os seus pesos e forças passivas de inércia são calculados através das equações mostradas na Seção 4.2.3.2 e aplicadas diretamente sobre os pontos de acoplamento com a estrutura, como forças externas. As forças ativas não são aplicadas como forças conhecidas; ao invés disto, elas são um resultado da simulação, sendo, inclusive, possível comparar as forças ativas encontradas pelo método FEM com as usadas em uma simulação dinâmica, como uma forma de verificar se o método está funcionando como deveria.

#### **4.3.3.6 Ferramenta**

A ferramenta acoplada à extremidade do braço não é modelada diretamente. Ao invés, são calculadas as forças e momentos que ela exerce sobre a extremidade do braço, através da Equação 4.8 mostrada na Seção 4.2.2. Este carregamento é, então, aplicado na ponta do segundo elo como uma força externa.

#### **4.3.3.7 Junta 1**

Idealmente, a extremidade do primeiro elo que se conecta à Junta 1 seria fixada na posição da origem ( $x=0, y=0$ ) com um pino, restringindo todos os seus movimentos com exceção da rotação em  $z$ . No entanto, os resultados da análise do modelo detalhado mostram que a seção da viga do elo se deforma em torno da luva de conexão com o pino da junta, permitindo assim uma pequena deformação rotacional em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . Esta deformação só pode ser analisada em um modelo detalhado, assim como as causadas pelas concentrações de tensão nos pontos de acoplamento mencionadas na seção 4.3.3.4, mas se não fosse considerada no modelo simples, haveria uma grande diferença entre os resultados dos dois modelos. Assim, esta deformação teve que ser considerada.

Para aproximar a deformação rotacional na Junta 1, a viga do primeiro elo é conectada a duas molas torcionais em  $x$  e em  $y$ . Estas molas possuem uma rigidez torcional diretamente definida, e, assim, permitem um pequeno deslocamento rotacional na junta. Para definição da rigidez torcional pode-se utilizar os resultados do modelo detalhado: a rigidez equivalente será o momento de reação da junta dividido pelo respectivo deslocamento rotacional. Durante a otimização da estrutura do elo, a geometria da junta é modificada, o que faz com que esta rigidez não mais corresponda à estrutura modelada, sendo, porém, o erro causado por esta aproximação relativamente baixo. Como o foco da otimização é a deformação das vigas dos elos, e não das juntas, esta aproximação foi considerada adequada.

#### 4.3.4 Discretização da estrutura

A discretização da estrutura divide-a em vários elementos para resolução do sistema pelo FEM. Todos os elementos utilizados possuem 2 nós, cada um com 6 graus de liberdade.

##### 4.3.4.1 Elementos da estrutura principal dos elos

Para executar a modelagem, são inicialmente posicionados nós sobre os pontos de acoplamento da viga, como pode ser visto na Figura 4.18. Estes nós são referidos como nós chave, pois fazem interface com as outras estruturas, como os pinos ou garfos de acoplamentos.

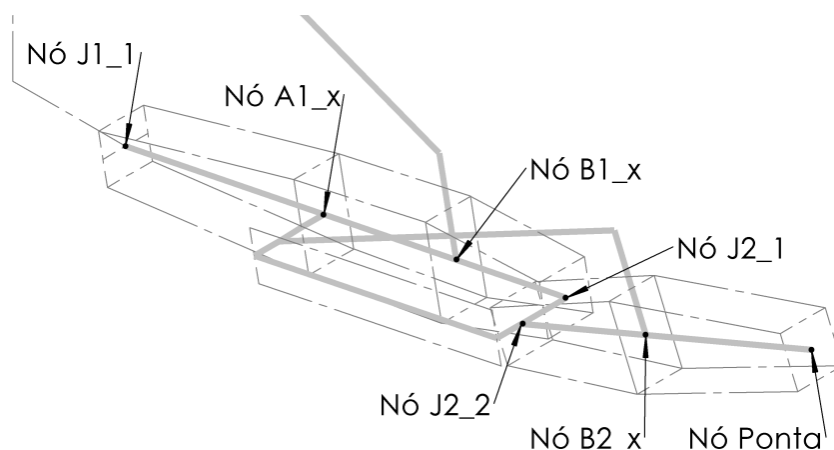


Figura 4.18 - Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os nós chave das estruturas principais dos elos.

A formulação matemática dos elementos de viga utilizados considera que cada elemento possui seção transversal constante. Mesmo assim é possível aproximar a seção transversal variável das estruturas principais dos elos utilizando diversos elementos pequenos, cada um com uma seção diferente. Portanto, o espaço entre cada nó chave é subdividido, sendo criados vários nós sobre as vigas dos elos.

Na Seção 4.3.3.1 mostra-se como calcular os parâmetros da seção transversal dos elos para um dado ponto  $x$ . Este procedimento é usado para calcular as propriedades da seção transversal de cada elemento, tomando a posição  $x$  como ponto central do respectivo elemento no sistema de coordenadas local do elo correspondente.

O comprimento de cada elemento, ou o espaçamento entre os nós criados, é aproximadamente definido pelo parâmetro  $e_{length}$ . Como o número de elementos entre os nós chave deve ser um número inteiro, o comprimento exato de cada elemento entre dois dados nós chave será dado pela seguinte equação:

$$e_l = \frac{|P_2 - P_1|}{\text{round}\left(\frac{|P_2 - P_1|}{e_{length}}\right)}, \quad (4.79)$$

onde  $P_2$  e  $P_1$  são as coordenadas dos dois nós chave.

#### 4.3.4.2 Outros elementos

Para as outras partes do modelo, nós chave são posicionados nas interfaces, como mostrado na Figura 4.19. Como todas estas partes possuem seções constantes, não é necessário subdividir estas seções, sendo necessário apenas um elemento para conectar cada par destes nós.

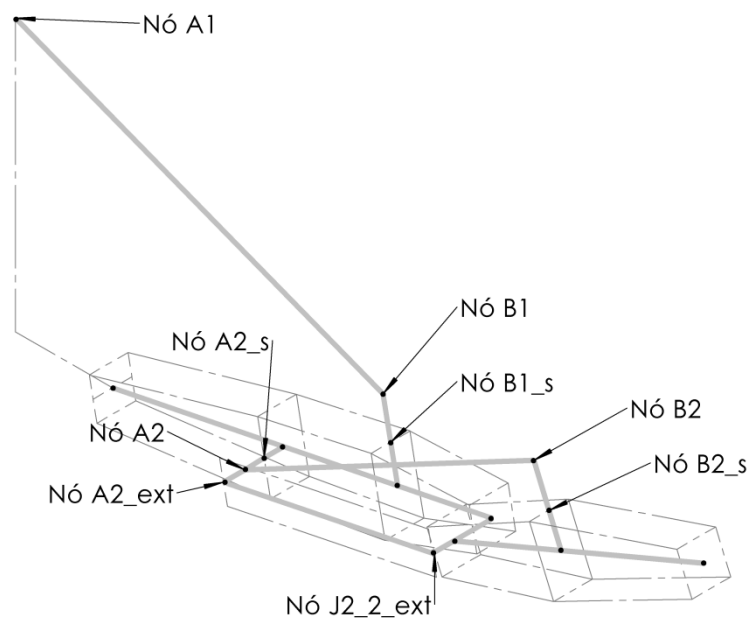


Figura 4.19 - Desenho esquemático, em vista isométrica, mostrando os outros nós chave do modelo simplificado.

#### 4.3.5 Elementos estruturais

Os elementos estruturais utilizados usam a formulação dos elementos de viga de Timoshenko tridimensionais, primeiro descritos por Timoshenko, 1921. Estes elementos possuem dois nós com seis graus de liberdade cada (deslocamento translacional ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e deslocamento rotacional em torno de  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), possuindo, assim, 12 graus de liberdade.

A formulação da matriz de rigidez elementar usada neste trabalho foi elaborada com base nos trabalhos de Liu e Quek, 2003, Myers, 1962, Young et al., 2012, Friedman e Kosmatka, 1993 e Jensen, 1982, sendo detalhada no Apêndice D.

### 4.3.6 Carregamentos devido ao peso próprio

O peso da estrutura principal dos elos é aplicado como uma força distribuída. Para tal, a massa de cada elemento desta estrutura é multiplicada pela aceleração da gravidade. Esta força atua sobre o centro de massa do elemento, mas deve ser convertida para forças aplicadas sobre os nós. Como cada elemento é modelado como possuindo uma seção constante e apenas dois nós, cada um destes recebe metade da força do peso do elemento, na direção do campo gravitacional, ou seja, na direção  $-y$ . A Equação 4.80 mostra o vetor de forças gravitacionais aplicado sobre os dois nós de um elemento  $i$ , já no sistema de coordenadas global.

$$\vec{F}_{eig} = \left[ 0 \quad -\frac{m_{e_i}g}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{m_{e_i}g}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T. \quad (4.80)$$

As forças peso dos atuadores são calculadas através das equações apresentadas na Seção 4.2.3.2, sendo consideradas como aplicadas diretamente sobre os nós dos pontos de acoplamento. Como os atuadores são acoplados com juntas esféricas, não há transmissão de torque.

A ferramenta acoplada à extremidade do braço aplica forças e momentos sobre o respectivo nó, cujos valores podem ser calculados através da Equação 4.8, que combina a parte do peso próprio com a parte da dinâmica. Embora o vetor de três componentes apresentado nesta equação considere o sistema bidimensional usado para o modelo dinâmico, é simples convertê-lo para um vetor de seis componentes do sistema tridimensional: as duas primeiras componentes do vetor 2D são também as duas primeiras componentes do vetor 3D, e a terceira componente do vetor 2D será a última componente do vetor 3D. Evidentemente, a terceira, quarta e quinta componentes do vetor 3D serão iguais à zero.

Para as massas concentradas do modelo, como as das extremidades dos elos ou as massas extras das estruturas de acoplamento, as forças peso são aplicadas sobre o nó mais próximo ao ponto do centro de massa. Estas forças podem ser calculadas através da seguinte equação:

$$\vec{F}_{mcig} = \left[ 0 \quad -m_{mc_i}g \quad 0 \quad -m_{mc_i}g(n_{i_z} - CG_{i_z}) \quad 0 \quad m_{mc_i}g(n_{i_x} - CG_{i_x}) \right]^T, \quad (4.81)$$

onde  $m_{mc_i}$  é a massa da massa concentrada considerada,  $CG_{i_x}$  e  $CG_{i_z}$  são as componentes  $x$  e  $z$  do seu centro de gravidade, e  $n_{i_x}$  e  $n_{i_z}$  são as componentes  $x$  e  $z$  do nó onde a força está sendo aplicada.



### 4.3.7 Carregamentos devido à dinâmica do braço

Além dos carregamentos mostrados na Seção 4.3.6, quando os elos são acelerados também há a aplicação de uma força contrária a esta aceleração, devido à inércia. Embora o modelo considere uma pose fixa do braço, é possível considerar também a sua velocidade e aceleração se forem consideradas as forças inerciais no modelo.

Para calcular as forças inerciais com relação ao centroide de um corpo  $c$ , pode-se usar diretamente a segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_{cI} = \begin{bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \\ M_{cx} \\ M_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{yc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{zc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{z}_c \\ \dot{\omega}_{xc} \\ \dot{\omega}_{yc} \\ \dot{\omega}_{zc} \end{bmatrix} = -\mathbf{M}_c \ddot{\vec{CG}}_c, \quad (4.82)$$

onde  $\vec{F}_{cI}$  é o vetor de forças e momentos de reação sobre a estrutura no ponto do seu centro de massa;  $\mathbf{M}_c$  é a matriz de inércia do corpo, composta pela sua massa  $m_c$  e pelos seus momentos de inércia de massa sobre os três eixos,  $I_{xc}$ ,  $I_{yc}$  e  $I_{zc}$ , e  $\ddot{\vec{CG}}_c$  é o vetor das acelerações translacionais e rotacionais do centro de massa do corpo, no sistema global.

O vetor  $\ddot{\vec{CG}}_c$  pode ser calculado pela seguinte equação:

$$\ddot{\vec{CG}}_c = \mathbf{J}_c^j \ddot{\vec{q}} + \dot{\mathbf{J}}_c^j \dot{\vec{q}}, \quad (4.83)$$

onde  $\mathbf{J}_c^j$  é a matriz Jacobina do corpo, com  $j$  sendo 1 se o corpo pertence ao Elo 1 ou 2 se pertence ao Elo 2,  $\dot{\mathbf{J}}_c^j$  é a sua derivada em relação ao tempo, e  $\vec{q}$  é o vetor de posição das juntas.

Embora estejam sendo calculadas as acelerações nos três eixos, apenas os deslocamentos das juntas 1 e 2 do braço são considerados, e portanto os únicos componentes não nulos para as acelerações são os pertencentes ao plano XY, isto é,  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{y}_c$  e  $\dot{\omega}_{zc}$ . Desta forma, estas matrizes jacobianas são equivalentes às matrizes 2D mostradas anteriormente na Seção 3.1.3, modificadas com 3 linhas nulas extras para compatibilidade com os vetores de seis componentes do sistema 3D. Isto também significa que não é necessário calcular as componentes  $I_{xc}$  e  $I_{yc}$  da matriz  $\mathbf{M}_c$ , pois eles sempre são multiplicados por zero.

Se o elemento pertence ao Elo 1 do braço, então as seguintes equações são usadas para calcular a matriz Jacobiana e a sua derivada:

$$J_c^1 = \begin{bmatrix} -cg_{c_x} \text{sen}(q_1) - cg_{c_y} \text{cos}(q_1) & 0 \\ cg_{c_x} \text{cos}(q_1) - cg_{c_y} \text{sen}(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

e

$$j_c^1 = \begin{bmatrix} [-cg_{c_x} \text{cos}(q_1) + cg_{c_y} \text{sen}(q_1)] \dot{q}_1 & 0 \\ [-cg_{c_x} \text{sen}(q_1) - cg_{c_y} \text{cos}(q_1)] \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

onde  $cg_{c_x}$  e  $cg_{c_y}$  são as coordenadas do centro de massa do corpo no sistema local do Elo 1.

Caso o elemento pertença ao Elo 2, então as seguintes equações devem ser usadas:

$$J_c^2 = \begin{bmatrix} -a_1 \text{sen}(q_1) - cg_{sc} & -cg_{sc} \\ a_1 \text{cos}(q_1) + cg_{cs} & cg_{cs} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

e

$$j_c^2 = \begin{bmatrix} -a_1 \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 - cg_{cs} \dot{q}_{12} & -cg_{cs} \dot{q}_{12} \\ -a_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - cg_{sc} \dot{q}_{12} & -cg_{sc} \dot{q}_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

onde  $cg_{sc} = cg_{c_x} \text{sen}(q_{12}) + cg_{c_y} \text{cos}(q_{12})$ ,  $cg_{cs} = cg_{c_x} \text{cos}(q_{12}) - cg_{c_y} \text{sen}(q_{12})$ , e  $q_{12} = q_1 + q_2$  e  $\dot{q}_{12} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ .

Com a Equação 4.82 é possível calcular as forças que agem sobre o centro de massa de um corpo. Similarmente ao mostrado na Seção 4.3.6, é necessário transformar estas forças em esforços aplicados sobre os nós atrelados ao corpo. Existem dois tipos de corpos que usam esta equação para determinar as forças de inércia: os elementos estruturais dos elos, e as massas concentradas dos extremos dos elos e das estruturas de acoplamento. A forma de transferência de forças é diferente em cada caso, pois no primeiro os elementos possuem dois nós, enquanto que no segundo possuem apenas um.

No caso dos elementos estruturais, a Equação 4.88 (similar à Equação 4.80), é usada para definição das forças aplicadas sobre os seus dois nós, já usando a condição de que todas as acelerações, com exceção de  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{y}_c$  e  $\dot{\omega}_{zc}$ , são nulas:

$$\vec{F}_{e;a} = \left[ \frac{F_{cx}}{2} \quad \frac{F_{cy}}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{M_{cz}}{2} \quad \frac{F_{cx}}{2} \quad \frac{F_{cy}}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{M_{cz}}{2} \right]^T, \quad (4.88)$$

onde  $\vec{F}_{e;a}$  é o vetor de forças inerciais causadas pelo elemento  $i$ ; e  $F_{cx}$ ,  $F_{cy}$  e  $M_{cz}$  são componentes do vetor  $\vec{F}_{c_i}$  da Equação 4.82, que deve ser calculada utilizando os valores de massa, momento de inércia de massa e centro de gravidade do elemento  $i$ .

No caso das massas concentradas, as forças aplicadas sobre o nó correspondente são dadas pela seguinte equação:

$$\vec{F}_{mc;a} = \mathbf{T}_{mi} \vec{F}_{c_i}, \quad (4.89)$$

onde  $\vec{F}_{mc;a}$  é o vetor de carregamentos aplicados sobre o nó mais próximo ao centro de massa do corpo,  $\vec{F}_{c_i}$  é o vetor de forças da Equação 4.82, calculado com a massa, momento de inércia e centro de gravidade do elemento de massa concentrada  $i$ , e  $\mathbf{T}_{mi}$  é a matriz de translação de forças, similar à usada na Equação 4.9, dada por

$$\mathbf{T}_{mi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n_{iz} - CG_{iz}) & -(n_{iy} - CG_{iy}) & 1 & 0 & 0 \\ -(n_{iz} - CG_{iz}) & 0 & (n_{ix} - CG_{ix}) & 0 & 1 & 0 \\ (n_{iy} - CG_{iy}) & -(n_{ix} - CG_{ix}) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

onde  $n_{ix}$ ,  $n_{iy}$  e  $n_{iz}$  são as coordenadas do nó onde a força está sendo aplicada, e  $CG_{ix}$ ,  $CG_{iy}$  e  $CG_{iz}$  são as coordenadas do centro de gravidade do elemento de massa concentrada  $i$ , no sistema global. Esta equação é uma generalização da Equação 4.81.

Os cálculos das forças inerciais da ferramenta e dos atuadores já foram mostrados nas seções 4.2.2 e 4.2.3.2, respectivamente. As forças da ferramenta são aplicadas sobre a ponta do Elo 2, enquanto que as forças dos atuadores são aplicadas sobre os nós de acoplamento  $B_1, A_2$  e  $B_2$ . As equações não estão no sistema 3D usado para a análise estrutural, mas é simples criar vetores de forças 3D cujas componentes correspondam aos valores 2D calculados, pois as forças e momentos fora do plano 2D considerado são iguais à 0.

### 4.3.8 Método dos elementos finitos para análise estrutural de uma estrutura dinâmica

Combinando a Equação 4.69 com as forças calculadas nas seções 4.3.6 e 4.3.7 chega-se à seguinte equação para os deslocamentos dos nós da estrutura modelada:

$$\vec{u}_n = \mathbf{K}^{-1} \left[ \vec{F}_{mc_a} + \vec{F}_{mc_g} + \vec{F}_{e_a} + \vec{F}_{e_g} + \vec{F}_{ferra} + \vec{F}_{act} \right], \quad (4.91)$$

onde  $\vec{F}_{mc_a}$  e  $\vec{F}_{mc_g}$  são os vetores de forças devido à inércia e peso de todas as massas concentradas do modelo,  $\vec{F}_{e_a}$  e  $\vec{F}_{e_g}$  é o vetor com as forças de peso e inércia dos elementos estruturais,  $\vec{F}_{ferra}$  é o vetor de forças e momentos inerciais e de peso que a ferramenta aplica sobre a extremidade do braço, calculado por meio da Equação 4.8, e  $\vec{F}_{act}$  é o vetor de forças que os atuadores aplicam sobre os nós de acoplamento devido ao peso e inércia, calculado por intermédio das Equações 4.20 e 4.21. Os vetores possuem dimensão de  $n_{gdl}$ , referentes aos  $n$  nós do modelo; os valores calculados para as forças passivas da ferramenta e dos atuadores devem ser aplicados nos GDLs correspondentes aos nós associadas a estas forças.

As forças ativas aplicadas pelos atuadores não são modeladas diretamente. Ao invés disto, estas forças consideradas como reações dos elementos correspondentes aos atuadores.

Como estão sendo consideradas todas as forças que atuam sobre o braço, inclusive as devido ao efeito inercial, este modelo é capaz de fornecer os deslocamentos de uma estrutura dinâmica (como o braço). É possível, portanto, obter os vetores  $\vec{q}$ ,  $\dot{\vec{q}}$  e  $\ddot{\vec{q}}$  a partir de uma simulação dinâmica e utilizá-los nesta simulação estrutural para calcular os esforços nos elos. As forças de reação calculadas utilizando o modelo de elementos finitos devem ser iguais às calculadas por uma simulação dinâmica, já que o mesmo carregamento é simulado.

### 4.3.9 Cálculo dos esforços em um elemento

Após o cálculo do vetor de deslocamentos  $\vec{u}_n$ , é possível calcular o esforço sofrido por cada elemento. Para tal, é usada a seguinte equação:

$$\vec{F}_e = \mathbf{K}_e \vec{u}_e, \quad (4.92)$$

onde  $\vec{F}_e$  é o vetor de forças do elemento,  $\mathbf{K}_e$  é sua matriz de rigidez, e  $\vec{u}_e$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, todos no sistema local. O vetor  $\vec{u}_e$  é a parte de  $\vec{u}_n$  referente aos nós do elemento analisado, rotacionado para o sistema local por meio da seguinte equação:

$$\vec{u}_e = \mathbf{R}^T \vec{u}_{eg}, \quad (4.93)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz de rotação, cuja elaboração pode ser verificada no Apêndice D, e  $\vec{u}_{eg}$  é a parte do vetor  $\vec{u}_n$ , no sistema de coordenadas global.

Em um modelo dinâmico, como o descrito na Seção 4.2, as forças dos atuadores são parâmetros de entrada, e o modelo calcula as posições, velocidades e acelerações angulares das juntas do braço. No modelo estrutural, no entanto, as posições, velocidades e acelerações são os parâmetros de entrada, ao passo que existe apenas um conjunto de forças que os atuadores devem aplicar sobre a estrutura para contrabalancear os carregamentos. Estas forças são justamente as forças aplicadas no modelo dinâmico, ou seja, as forças ativas dos atuadores, que no modelo estrutural são as forças de reação dos elementos associados aos atuadores. Devido a isto, a Equação 4.92 é primariamente utilizada para calcular os esforços dos elementos que modelam os atuadores, obtendo-se assim as forças ativas aplicadas por eles. Neste caso, os únicos componentes não zero do vetor  $\vec{F}_e$  são os referentes ao eixo  $x$  local, pois os atuadores aplicam forças apenas nas suas direções axiais. Assim, tem-se que:

$$\vec{F}_e = [-Fl_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Fl_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (4.94)$$

onde  $Fl_i$  é a força ativa do atuador  $i$ , calculada pelo modelo estrutural.

#### 4.3.10 Verificação do modelo proposto

A metodologia descrita nesta seção foi implementada em um programa programado no ambiente Matlab®. Para avaliar as respostas do sistema de simulação desenvolvido, optou-se por comparar separadamente os resultados dos cálculos do carregamento dinâmico, e os resultados da deformação estrutural devido a cargas distribuídas.

##### 4.3.10.1 Verificação dos carregamentos

Para verificar os carregamentos dinâmicos impostos sobre o modelo de elementos finitos, foi feita uma comparação com um braço simulado por um *software* comercial de dinâmica 2D, o mesmo utilizado na Seção 4.2.5. Como já mencionado, este programa permite realizar simulações dinâmicas de corpos unidos por conexões e restrições.

Os valores escolhidos para a comparação foram as forças de reação sobre os pontos de fixação da Junta 1 e do ponto  $A_1$ , pois estes valores são resultados que dependem do carregamento em ambas as simulações. O braço modelado para esta comparação possui as características mostradas na Tabela 4.3. Para evitar que haja colisões entre os atuadores, eles

são fixados lateralmente aos elos, de modo que seus movimentos ocorrem em planos distintos.

Tabela 4.3 – Parâmetros do braço usado para a verificação do programa desenvolvido

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Comprimento do elo $i$	$a_i$	1,0 m	0,7 m
CG local do elo $i$	$cg_{i_x}$	0,5297 m	0,2664 m
	$cg_{i_y}$	0,0062 m	0,0018 m
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	[-0,3; 0,6] m	[0,45; 0,15] m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	[0,7; 0,0] m	[0,25; 0,025] m
Massa do elo $i$	$m_i$	48,006 kg	31,131 kg
Momento de inércia do elo $i$	$I_i$	6,1067 kg.m <sup>2</sup>	1,7062 kg.m <sup>2</sup>
Massa do cilindro do atuador $i$	$m_{i_{cil}}$	30 kg	20 kg
Massa da haste do atuador $i$	$m_{i_{haste}}$	20 kg	10 kg
CG do cilindro do atuador $i$	$CG_{i_{cil}}$	0,35 m	0,25 m
CG da haste do atuador $i$	$CG_{i_{haste}}$	0,20 m	0,15 m
Momento de inércia do cilindro do atuador $i$	$I_{i_{cil}}$	3,0 kg.m <sup>2</sup>	1,5 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia da haste do atuador $i$	$I_{i_{haste}}$	4,0 kg.m <sup>2</sup>	2,5 kg.m <sup>2</sup>
Força aplicada pelo atuador $i$	$fl_i$	100 N	100 N
Massa total da ferramenta e objeto	$m_{end}$	15 kg	
Offset da ferramenta e objeto	$d_{end}$	0,2 m	
Momento de inércia de massa da ferramenta e objeto	$I_{end}$	5 kg.m <sup>2</sup>	
Posição angular da ferramenta	$q_{13}$	$q_1 + q_2 + 0,4$ rad	
Velocidade angular da ferramenta	$\dot{q}_{13}$	$\dot{q}_1 + \dot{q}_2$	
Aceleração angular da ferramenta	$\ddot{q}_{13}$	$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$	
Altura da seção transversal	$H_i$	0,15 m em todos os pontos	
Largura, ou base, das vigas	$b_i$	0,12 m para ambos os elos	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,01 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,005 m	
Densidade do material	$\rho$	7800 kg/m <sup>3</sup>	
Módulo de elasticidade	$E$	200 GPa	

A forma como o carregamento é aplicado é diferente entre os dois modelos comparados: o modelo de elementos finitos aplica cargas distribuídas sobre os elos e pontos de acoplamento, usando as posições, velocidades e acelerações angulares dos elos como dados de entrada, calcula o peso e inércia dos atuadores e da ferramenta separadamente, e as forças ativas dos atuadores são um resultado da simulação. Para aplicar o modelo do *software* comercial de

dinâmica foi necessário, por sua vez, usar como entrada as forças ativas dos atuadores; aplicar os carregamentos sobre o centro de gravidade de cada elemento; simular os cilindros e as hastes dos atuadores da mesma forma que os elos, e modelar a ferramenta como uma massa concentrada fixa ao Elo 2. As saídas obtidas são as posições, velocidades e acelerações angulares das juntas, em função do tempo.

Mesmo operando com métodos diferentes, os dois sistemas foram utilizados para modelar o mesmo braço, e assim os resultados de ambos devem ser semelhantes, desde que ambos estejam programados adequadamente. Assim, torna-se possível usar esta comparação para verificar o cálculo e a distribuição dos carregamentos do modelo de elementos finitos.

Para o modelo de elementos finitos foi usado  $e_{length} = 0.01m$ , e desta forma a estrutura principal do primeiro elo foi discretizada com 100 elementos de viga e a do segundo com 70 elementos, cada um com um comprimento de 0,01m. Além disto, foram utilizados 17 elementos para modelar os atuadores e estruturas de acoplamento (garfos e pinos). Desta forma, o modelo completo contém 187 elementos e 185 nós, como mostrado na Figura 4.20.

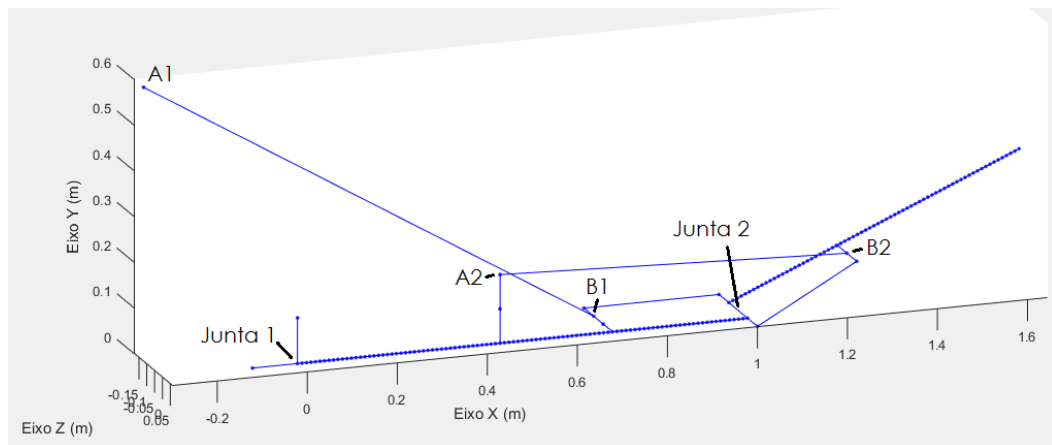


Figura 4.20 – Discretização do braço, com  $q = [0 \ 0.4]^T$ , mostrando os nós (pontos) e elementos (linhas), além dos pontos de acoplamento.

Deve-se observar que elementos de viga de Timoshenko, usados no modelo, ao contrário de elementos como placas ou sólidos tridimensionais, possuem uma formulação que não se baseia em aproximações espaciais, isto é, não é assumido, por hipótese, que os elementos possuem dimensões pequenas. Portanto, normalmente não é necessária a subdivisão de uma viga em vários elementos, pois um elemento é capaz de assumir a mesma configuração deformada do que um conjunto de elementos. No entanto, cada elemento é formulado com a hipótese de que possui uma seção transversal constante, e, portanto, para aproximar a seção variável das vigas dos elos foi necessário o uso de vários elementos, cada um com uma seção transversal diferente. Para a escolha do número de elementos, foi realizado um estudo de

malha, onde foi constatado que 100 elementos são suficientes para modelar a seção linearmente variável das vigas, tanto para o cálculo das deformações quanto para o cálculo das massas.

As massas, centros de gravidade e momentos de inércia mostrados na Tabela 4.3 foram calculadas utilizando o programa desenvolvido em Matlab®, e usados no modelo do *software* comercial de dinâmica como dados de entrada. Para verificar estes valores, foi feita uma comparação com um modelo detalhado construído no *software* SolidWorks®, cujos elos são mostrados na Figura 4.21. Os resultados desta comparação são mostrados na Tabela 4.4.

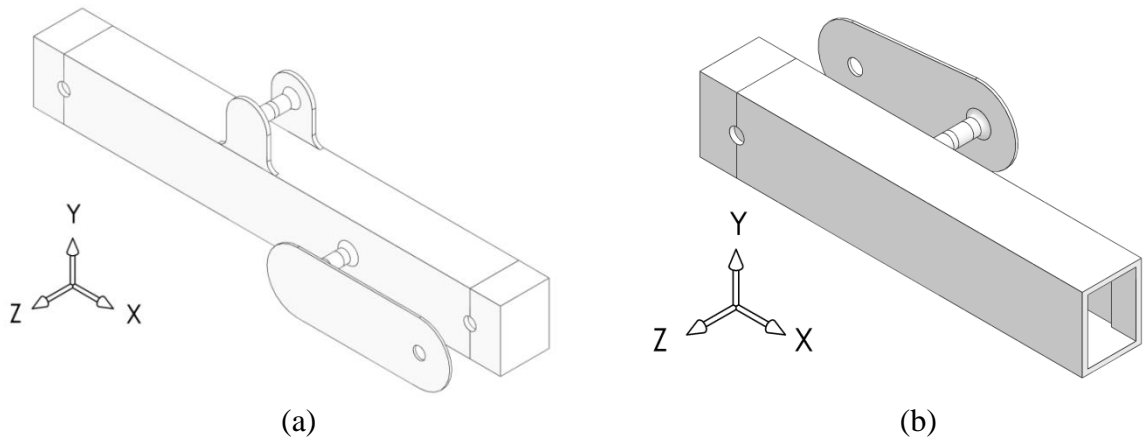


Figura 4.21 – Modelo detalhado usado para verificação dos cálculos dos parâmetros de massa dos elos, mostrando (a) o Elo 1, e (b) o Elo 2.

Tabela 4.4 – Comparação entre os parâmetros de massa dos elos do modelo simplificado e do modelo detalhado

Parâmetro	Variável	Matlab	SolidWorks	Diferença
Massa do Elo 1	$m_1$	48,006 kg	47,909 kg	0,20%
Massa do Elo 2	$m_2$	31,131 kg	31,066 kg	0,21%
CG local do Elo 1	$cg_{1x}$	0,5297 m	0,5297 m	0,00%
	$cg_{1y}$	0,0062 m	0,0064 m	-3,56%
CG local do Elo 2	$cg_{2x}$	0,2664 m	0,2675 m	-0,43%
	$cg_{2y}$	0,0018 m	0,0018 m	-3,49%
Momento de inércia do Elo 1	$I_1$	6,1067 kg.m <sup>2</sup>	6,0492 kg.m <sup>2</sup>	0,95%
Momento de inércia do Elo 2	$I_2$	1,7062 kg.m <sup>2</sup>	1,6964 kg.m <sup>2</sup>	0,57%

Comparando os valores da massa, posição do centro de gravidade e momento de inércia calculados pelos dois programas, pode-se constatar que a maior diferença encontrada foi de 3,56%, para a posição  $y$  do centro de gravidade do Elo 1,  $cg_{1y}$ . Uma diferença similar é encontrada para  $cg_{2y}$ , de 3,49%. Os valores destas posições são muito pequenas, e, portanto,



sensíveis a pequenas diferenças na massa total da estrutura, pois apenas uma pequena parcela de cada elo não possui simetria no plano XZ. Devido a isto, este erro pode ser atribuído à pequena diferença encontrada para a massa total do elo, de 0,20% e 0,21%. As outras diferenças encontradas não passam de 1%, e portanto o cálculo dos parâmetros de massa dos elos feito pelo programa desenvolvido pode ser considerado como suficiente para a aplicação na avaliação dos resultados dos *softwares*.

Ao ser executado, o programa desenvolvido calcula todos os carregamentos aplicáveis sobre o braço, assim como descrito nas seções 4.3.6 e 4.3.7. Em seguida, o programa realiza a análise dos deslocamentos dos nós, como mostrado na Seção 4.3.8, e então calcula as forças de reação sobre os nós fixos, usando a Equação 4.71. O *software* comercial de dinâmica utilizado também determina as forças que a Junta 1 e o acoplamento  $A_1$  aplicam sobre o braço durante uma simulação dinâmica, permitindo a comparação.

Foram executados 5 casos no programa implementado, que diferem entre si quanto às posições angulares  $q$ , velocidades  $\dot{q}$  e acelerações  $\ddot{q}$  das juntas. Estes valores foram obtidos por meio da simulação dinâmica do *software* comercial, para  $t = 2s, 4s, 6s, 8s$  e  $10s$  respectivamente, começando com  $q = \dot{q} = \ddot{q} = [0 \ 0]^T$ . Apenas as forças em  $x$  e  $y$  foram comparadas, pois a simulação deste programa é 2D. Os resultados da comparação das forças de reação na Junta 1 são mostrados na Tabela 4.5, enquanto que na Tabela 4.6 são mostrados os resultados da junta  $A_1$ . A Figura 4.22 mostra o braço simulado pelo programa desenvolvido, usando o modelo simplificado estrutural, juntamente com o modelo detalhado, usado pelo SolidWorks®, para facilitar a visualização.

Tabela 4.5 – Comparação das forças de reação da Junta 1 entre o *software* comercial de dinâmica utilizado e o programa desenvolvido em Matlab®

Caso	$\vec{q}$ , rad	$\dot{\vec{q}}$ , rad/s	$\ddot{\vec{q}}$ , rad/s <sup>2</sup>	Forças de reação da Junta 1, $[F_x \ F_y]^T$ , N		Diferença
				Matlab®	<i>software</i> comercial	
1	$\begin{bmatrix} -1,4039 \\ -0,9058 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7169 \\ 8,7004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -26,457 \\ 53,614 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -566,2 \\ 2022,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -566,3 \\ 2022,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,02 \\ 0,01 \end{bmatrix}$ %
2	$\begin{bmatrix} -2,2242 \\ 9,4788 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,9496 \\ 2,6392 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6581 \\ -1,7495 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 626,4 \\ 1188,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 626,4 \\ 1188,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,00 \end{bmatrix}$ %
3	$\begin{bmatrix} -2,1790 \\ 27,374 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,2934 \\ 4,6417 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18,372 \\ -24,427 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 486,2 \\ 817,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 486,4 \\ 817,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,02 \\ -0,03 \end{bmatrix}$ %
4	$\begin{bmatrix} -2,5892 \\ 32,292 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,3652 \\ -8,9568 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20,296 \\ -49,583 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1755,8 \\ 1187,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1755,7 \\ 1187,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix}$ %
5	$\begin{bmatrix} -2,6582 \\ 32,451 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,9579 \\ -8,4750 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19,408 \\ -44,843 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1469,0 \\ 883,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1468,9 \\ 883,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix}$ %

Tabela 4.6 – Comparação das forças de reação da junta  $A_1$  entre o *software* comercial de dinâmica utilizado e o programa desenvolvido em Matlab®

Caso	$\vec{q}$ , rad	$\dot{\vec{q}}$ , rad/s	$\ddot{\vec{q}}$ , rad/s <sup>2</sup>	Forças de reação da junta $A_1$ , $[F_x \ F_y]^T$ , N		Diferença
				Matlab®	<i>software</i> comercial	
1	$\begin{bmatrix} -1,4039 \\ -0,9058 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7169 \\ 8,7004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -26,457 \\ 53,614 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 36,37 \\ 54,54 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 36,38 \\ 54,49 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,04 \\ 0,08 \end{bmatrix}$ %
2	$\begin{bmatrix} -2,2242 \\ 9,4788 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,9496 \\ 2,6392 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6581 \\ -1,7495 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6,18 \\ 69,06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6,18 \\ 69,00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,11 \\ 0,08 \end{bmatrix}$ %
3	$\begin{bmatrix} -2,1790 \\ 27,374 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,2934 \\ 4,6417 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18,372 \\ -24,427 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22,01 \\ 64,03 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22,04 \\ 63,73 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,12 \\ 0,48 \end{bmatrix}$ %
4	$\begin{bmatrix} -2,5892 \\ 32,292 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,3652 \\ -8,9568 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20,296 \\ -49,583 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -36,99 \\ 82,14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -37,01 \\ 82,07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,06 \\ 0,08 \end{bmatrix}$ %
5	$\begin{bmatrix} -2,6582 \\ 32,451 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,9579 \\ -8,4750 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19,408 \\ -44,843 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -41,68 \\ 79,39 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -41,71 \\ 79,31 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,07 \\ 0,11 \end{bmatrix}$ %

Como é possível constatar, os resultados para a força de reação da Junta 1 calculados pelo programa estão próximos dos calculados pelo *software* comercial de dinâmica, com o maior erro absoluto sendo de 0,03%. Para a junta  $A_1$  os resultados também estão próximos; o maior erro foi de 0,48% no caso 2, e o segundo maior erro foi de 0,12%. Isto permite afirmar que o método proposto é capaz de calcular e aplicar os carregamentos sobre o braço de forma adequada, incluindo os carregamentos causados pela reação dinâmica do movimento do braço e pelo peso próprio.

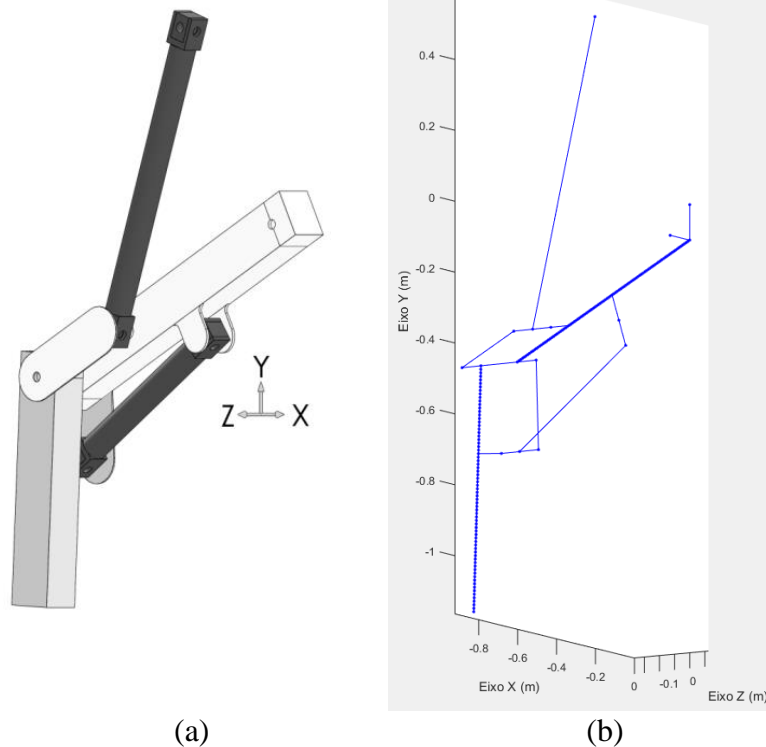


Figura 4.22 – Comparação entre (a) o modelo detalhado, e (b) o modelo simplificado.

### 4.3.10.2 Verificação dos deslocamentos

Para verificação das deformações foram analisados oito casos, nos quais foram comparados os resultados do programa desenvolvido em Matlab® com os do *software* comercial SolidWorks®. Apenas carregamentos estáticos foram aplicados, isto é, as velocidades e acelerações angulares são consideradas nulas para todos os casos. Cada caso considera um braço com uma estrutura ou posição diferente, sendo que as diferenças entre eles são apresentadas na Tabela 4.7. No Apêndice E são apresentadas as tabelas completas.

Tabela 4.7 – Diferenças entre os casos analisados

Caso	Modificação em relação ao caso anterior
1	Caso de base
2	Reduz as espessuras das chapas para $t_b = t_h = 3\text{mm}$
3	Modifica as alturas e larguras da seção para $H_{J_1} = H_{J_{2_1}} = H_{J_{2_2}} = H_{ponta} = 0,1\text{m}$ , $H_{A_2} = H_{B_1} = 0,16\text{m}$ , $H_{B_2} = 0,15\text{m}$ e $b_1 = b_2 = 0,1\text{m}$
4	Modifica a posição para $q = [-0,4 \quad 0,6]\text{rad}$ e a posição da ferramenta para $\theta_3 = 0$
5	Modifica os pontos de acoplamento para $A_1 = [-0,3 \quad 0,4]\text{m}$ , $A_2 = [0,25 \quad 0]\text{m}$ , $B_1 = [0,9 \quad 0,15]\text{m}$ e $B_2 = [0,25 \quad -0,15]\text{m}$ , e também a posição para $q = [1 \quad -1,2]\text{rad}$
6	Modifica a posição para $q = [0,2 \quad -0,2]\text{rad}$
7	Modifica o ponto de acoplamento $B_2$ , para $B_2 = [-0,25 \quad 0,15]\text{m}$ , fazendo com que o elo 2 seja do tipo em que $B_{2_x} < 0$ , troca as alturas da seção para $H_{J_{2_2}} = 0,15\text{m}$ e $H_{B_2} = 0,1\text{m}$ , muda a posição para $q = [1 \quad -1,2]\text{rad}$ , e define o corte $L_{cut_2} = 0,08\text{m}$ , para acoplamento em linha com garfo.
8	Modifica a posição do para $q = [0,2 \quad -0,2]\text{rad}$

Para cada caso analisado, o programa desenvolvido realiza o cálculo da massa, posição do centro de gravidade e momento de inércia de cada elo. A Tabela 4.8 mostra uma comparação entre os valores calculados pelo programa desenvolvido, usando o modelo simplificado, e os valores calculados pelo *software* SolidWorks®, usando o modelo detalhado. Os casos 4,6 e 8 não são apresentados, pois as suas estruturas são iguais às dos casos 3,5 e 7, respectivamente.

Como pode ser verificado, as maiores diferenças encontradas são no cálculo da coordenada  $y$  do centro de gravidade dos elos,  $cg_{1_y}$  e  $cg_{2_y}$ , com uma diferença máxima de 4,77%, a qual pode ser justificado pelos pequenos valores obtidos para estes parâmetros, de forma que por causa disso, mesmo uma pequena diferença entre os modelos detalhados e simplificados pode causar uma grande diferença relativa. No entanto, esta diferença não causa grandes impactos nas análises estruturais ou dinâmicas, já que estes valores são muito pequenos em relação aos demais. Também é possível perceber uma diferença máxima de

2,85% para os valores do momento de inércia para o Elo 1,  $I_1$ . Isto se deve ao fato de que o cálculo deste valor é muito sensível às diferenças geométricas entre os modelos, pois depende do quadrado das distâncias. Mesmo assim, é possível afirmar que este erro é relativamente pequeno e que não afeta significativamente o resultado das análises. Para os outros parâmetros, o erro máximo encontrado foi menor do que 1,5%, e, portanto, os mesmos podem ser considerados adequados para as análises comparativas.

Tabela 4.8 – Comparação dos parâmetros de massa calculados pelo programa desenvolvido em Matlab e pelo SolidWorks®, para os casos 1, 2, 3, 5 e 7.

Caso	Programa	$m_1$ (kg)	$m_2$ (kg)	$cg_{1x}$ (m)	$cg_{2x}$ (m)	$cg_{1y}$ (m)	$cg_{2y}$ (m)	$I_1$ (kg.m <sup>2</sup> )	$I_2$ (kg.m <sup>2</sup> )
1	Matlab	48,006	31,124	0,530	0,266	0,006	0,000	6,107	1,705
	SolidWorks®	47,909	31,058	0,530	0,268	0,006	0,000	6,049	1,695
	Diferença (%)	0,20	0,21	0,00	-0,43	-3,56	0,00	0,95	0,58
2	Matlab	26,995	17,184	0,544	0,252	0,009	0,000	3,435	0,897
	SolidWorks®	26,702	17,062	0,543	0,255	0,010	0,000	3,340	0,886
	Diferença (%)	1,10	0,71	0,11	-1,05	-4,77	0,00	2,85	1,26
3	Matlab	21,923	13,463	0,540	0,264	0,011	0,000	2,381	0,623
	SolidWorks®	21,839	13,408	0,541	0,266	0,011	0,000	2,326	0,614
	Diferença (%)	0,38	0,41	-0,05	-0,91	-4,65	0,00	2,37	1,45
5	Matlab	23,924	14,103	0,560	0,270	0,012	-0,023	3,017	0,640
	SolidWorks®	23,826	14,032	0,560	0,272	0,013	-0,023	2,974	0,633
	Diferença (%)	0,41	0,51	-0,06	-0,75	-2,29	-1,49	1,44	1,26
7	Matlab	23,924	14,740	0,560	0,124	0,012	0,036	3,017	1,346
	SolidWorks®	23,826	14,693	0,560	0,124	0,013	0,035	2,974	1,349
	Diferença (%)	0,41	0,32	-0,06	0,09	-2,29	4,70	1,44	-0,24

Para cada caso analisado foram calculadas as deformações translacionais e rotacionais ao longo da viga. O principal foco da análise estrutural é cálculo das deformações translacionais na extremidade do braço, ou flecha. A Tabela 4.9 permite realizar uma comparação entre os resultados obtidos para este valor pelo programa desenvolvido em Matlab® e pelo SolidWorks®. Como pode ser constatado, as maiores diferenças para o deslocamento resultante,  $|u|$ , foram encontradas nos casos 6 e 8, com 11,54% e 10,70%, respectivamente. No caso 6, inclusive, as componentes  $y$  e  $z$  do deslocamento apresentam uma diferença maior, de 17,89% e 13,73%, respectivamente.

Para o caso 6, a Figura 4.23 mostra gráficos que permite comparar os deslocamentos calculados ao longo das vigas, medidos no sistema local de cada elo, onde os resultados até 1000mm são referentes ao Elo 1, e após 1000mm são referentes ao Elo 2. Como pode ser

constatado, as curvas para os deslocamentos rotacionais de cada elo são muito similares, com exceção de um salto no ponto de conexão da Junta 2, onde os elos são acoplados, o que permite concluir que as diferenças encontradas podem ser atribuídas às deformações dos pontos associados aos acoplamentos. Como esta junta é modelada como um pino, o deslocamento rotacional vertical neste ponto não é limitado pela junta, e sim pelos atuadores, que são responsáveis por manter o elo em uma dada posição. Estes atuadores são modelados como sendo rígidos, enquanto que as estruturas usadas para o acoplamento, no caso garfos e pinos laterais, são flexíveis. Como já mencionado, a deformação destas estruturas não pode ser adequadamente simulada por meio de um modelo simplificado, e, portanto, este desvio não pode ser eliminado.

Tabela 4.9 – Comparação dos resultados da flecha, obtidos pelo programa desenvolvido em Matlab®, e pelo *software* SolidWorks®.

Caso	Programa	$u_x$ (mm)	$u_y$ (mm)	$u_z$ (mm)	$ u $ (mm)
1	Matlab	-0,060	-0,311	0,226	0,389
	SolidWorks®	-0,060	-0,293	0,217	0,370
	Diferença (%)	-0,53%	5,90%	4,08%	5,11%
2	Matlab	-0,070	-0,348	0,264	0,443
	SolidWorks®	-0,077	-0,373	0,275	0,469
	Diferença (%)	-9,71%	-6,47%	-3,84%	-5,64%
3	Matlab	-0,066	-0,319	0,313	0,452
	SolidWorks®	-0,072	-0,338	0,327	0,475
	Diferença (%)	-8,20%	-5,68%	-4,06%	-4,97%
4	Matlab	-0,177	-0,437	0,453	0,654
	SolidWorks®	-0,190	-0,468	0,468	0,689
	Diferença (%)	-6,89%	-6,74%	-3,11%	-5,06%
5	Matlab	0,019	-0,042	-0,037	0,059
	SolidWorks®	0,020	-0,047	-0,032	0,061
	Diferença (%)	-6,84%	-10,14%	14,34%	-2,26%
6	Matlab	0,012	-0,120	-0,076	0,142
	SolidWorks®	0,012	-0,146	-0,067	0,161
	Diferença (%)	-0,89%	-17,89%	13,73%	-11,54%
7	Matlab	0,017	-0,105	0,005	0,106
	SolidWorks®	0,018	-0,116	0,004	0,118
	Diferença (%)	-6,41%	-9,86%	30,23%	-9,73%
8	Matlab	0,001	-0,148	0,015	0,149
	SolidWorks®	0,002	-0,166	0,016	0,166
	Diferença (%)	-21,83%	-10,76%	-4,78%	-10,70%

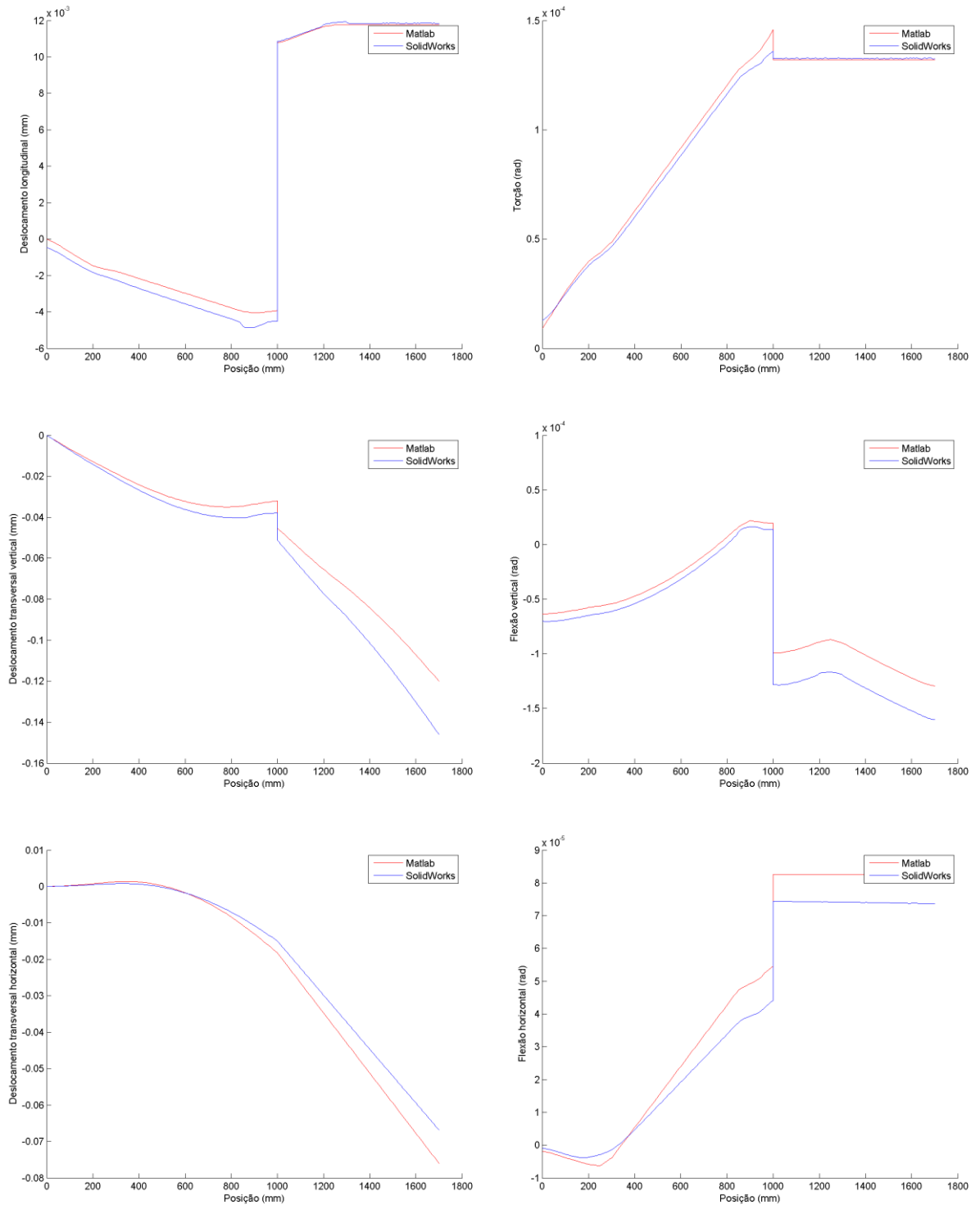


Figura 4.23 – Gráficos comparativos dos resultados do deslocamento obtidos pelo programa desenvolvido em Matlab® e pelo SolidWorks® para o caso 6.

O processo de otimização modifica apenas a viga principal dos elos, mantendo as estruturas usadas para os acoplamentos constantes. Como o modelo simplificado é capaz de obter resultados que refletem o deslocamento destas vigas, ele pode ser utilizado para a

otimização, pois variações na estrutura dos elos causam uma correspondente variação da flecha, isto é, o cálculo do deslocamento de um braço com vigas reforçadas resultará, corretamente, em uma menor deflexão da extremidade do braço. Desta forma, a flecha encontrada pelo programa desenvolvido não pode ser considerada com alta precisão, porém, é possível ainda afirmar que a análise é capaz de simular com aproximação aceitável o comportamento das vigas principais dos elos.

#### **4.4 Otimização estrutural do braço**

No projeto de um robô, é importante ser realizada uma otimização estrutural. Com isso é possível reduzir os esforços dos atuadores, que podem assim ter diâmetros menores ou necessitarem de pressões menores, e é também facilitada a instalação do robô.

O objetivo de uma otimização estrutural é reduzir a quantidade de material usada nos elementos estruturais, mantendo a rigidez dentro do domínio de projeto. Por exemplo, Albers et al., 2007, apresentam uma otimização estrutural dos membros e do tórax do robô humanoide ARMAR III, por meio de otimização topológica e uso de fibras orientadas com a componente principal da tensão, obtendo, assim, elementos mais leves, mas com boa rigidez. Kim et al., 2016, mostram o uso de otimização topológica para robôs industriais, aplicado a um proposto robô de pintura.

No caso do robô humanoide, o uso do método de otimização topológica resulta em uma estrutura com vantagens importantes, constituídas pela redução da inércia dos membros, reduzindo assim os danos que poderiam ser causados com colisões, e pelo uso de atuadores menores, pois o espaço é limitado. No caso de um robô industrial, estas vantagens são de menor importância, sendo a redução dos custos de fabricação um objetivo mais importante. O uso destes métodos requer o conhecimento dos carregamentos, o que é geralmente difícil de se definir previamente em um robô industrial versátil, e pode causar um aumento dos custos de fabricação, pois a estrutura pode tornar-se mais complexa. Assim, no presente caso, o método proposto é relativamente simples, visando apenas à modificação de alguns dos parâmetros das seções de viga utilizadas na construção dos elos, pois assim é possível a obtenção de um braço mais leve, mas ainda de fácil fabricação.

##### **4.4.1 Função objetivo**

O processo usual de otimização necessita de uma função objetivo. Esta função retorna um valor numérico que indica o desempenho de uma certa configuração, procurando o método de

otimização maximizar ou minimizar este valor, por meio da modificação das variáveis de otimização. Desta forma, esta função deve ser capaz de fornecer um parâmetro de desempenho do sistema (geralmente, na forma de um único valor numérico). Se o sistema analisado possuir mais do que um resultado de interesse, então a função objetivo deve usualmente combinar estes resultados em um único valor numérico.

A análise mostrada na Seção 4.3 permite rapidamente calcular a flecha aproximada do braço, os esforços dos atuadores, e a massa dos elos, para uma dada posição e condição de carregamento. Portanto, esta metodologia é usada como a base da função objetivo, que deve calcular algum valor proporcional à massa ou a inércia do braço, pois este é o valor que deve ser minimizado. Devido à complexidade da matriz inercial do braço, onde fatores como a massa, posição do centro de gravidade e momento de inércia influenciam o resultado, uma forma simples de calcular indiretamente este valor é através das forças ativas dos atuadores. De forma geral, quanto menor forem as forças que os atuadores precisam aplicar sobre a estrutura, menor será o peso e a inércia do braço, desde que o carregamento externo permaneça o mesmo. Portanto, a seguinte equação é proposta:

$$f_{caso}(\vec{v}_{otimização}, \vec{v}_{outros}) = penalty \sqrt{fl_1^2 + fl_2^2}, \quad (4.95)$$

onde  $f_{caso}$  é uma proposta de função objetivo,  $\vec{v}_{otimização}$  é um vetor composto pelas variáveis que são modificadas durante a otimização, constituídas de alguns dos parâmetros utilizados para definir os elos,  $\vec{v}_{outros}$  é um vetor com os outros parâmetros que definem o caso analisado mas que não são modificados pela otimização,  $fl_1$  e  $fl_2$  são as forças ativas dos atuadores 1 e 2 respectivamente, obtidos como mostrado na Seção 4.3.9, e  $penalty$  é um valor que depende da flecha do braço, da seguinte forma:

$$penalty = \begin{cases} 1, & \text{se } |\vec{u}| < |\vec{u}|_{projeto} \\ 100 \left( 1 + \frac{|\vec{u}| - |\vec{u}|_{projeto}}{|\vec{u}|_{projeto}} \right), & \text{se } |\vec{u}| \geq |\vec{u}|_{projeto} \end{cases}, \quad (4.96)$$

onde  $|\vec{u}|$  é o módulo da flecha calculada para o braço e  $|\vec{u}|_{projeto}$  é o valor máximo admissível para este módulo, constituindo um parâmetro de projeto do braço. Desta forma, a otimização buscará a redução dos esforços dos atuadores através da redução da massa e inércia dos elos, focando primariamente na redução do esforço do atuador mais carregado, sem permitir, por outro lado, que o deslocamento total da extremidade do braço ultrapasse um certo valor limite, definido como um dos requisitos de projeto.



Como o foco da análise apresentada na Seção 4.3 está no comportamento da flexão vertical das vigas dos elos, as variáveis de otimização,  $\vec{v}_{otimização}$ , são as seguintes:

$$\vec{v}_{otimização} = [H_{J_1} \quad H_{A_2} \quad H_{B_1} \quad H_{J_{2_1}} \quad H_{J_{2_2}} \quad H_{B_2} \quad H_{ponta} \quad t_h \quad t_b], \quad (4.97)$$

onde  $H_{J_1}$ ,  $H_{A_2}$ ,  $H_{B_1}$ ,  $H_{J_{2_1}}$ ,  $H_{J_{2_2}}$ ,  $H_{B_2}$  e  $H_{ponta}$  são as alturas das vigas dos elos, e  $t_h$  e  $t_b$  são as espessuras das chapas. Além disso,  $v_{outros}$  é composto por todas as demais variáveis necessárias para a análise, incluindo os outros parâmetros da estrutura dos elos, como as larguras das vigas  $b_1$  e  $b_2$ , as dimensões dos reforços e posições dos pontos de acoplamento, os parâmetros dos atuadores, como suas massas e momentos de inércia, os parâmetros de massa e inércia da ferramenta e objeto da extremidade do braço, e as posições, velocidades e acelerações angulares.

O cálculo de  $f_{caso}$  depende de fatores que são variáveis durante a operação do braço, como a posição, velocidade e aceleração angular dos elos, e o carregamento na extremidade do braço. Visando à simplicidade, no presente trabalho optou-se por realizar a otimização considerando apenas o caso considerado mais crítico, para garantir que os componentes finais especificados pela metodologia proposta serão capaz de operar mesmo na pior situação encontrada durante a operação do braço.

Infelizmente, não foi possível estabelecer um único conjunto de valores que caracteriza o pior caso. Elementos diferentes do braço sofrem as respectivas solicitações máximas, associadas aos seus piores casos, em posições diferentes. Isto pode ser visualizado, por exemplo, na Figura 4.24, onde a força máxima do Atuador 1 ocorre no ponto (1,9 -0,5), enquanto que a força máxima do Atuador 2 ocorre no ponto (1,9 0,5). A maior flecha do braço pode ainda ocorrer em um terceiro ponto. Além disso, a distribuição dos carregamentos também depende da geometria da estrutura dos elos, que varia a cada iteração da otimização. Isto é, os pontos onde ocorrem os maiores carregamentos variam quando a estrutura é modificada. Devido à isto, não é possível estabelecer um ponto como o pior caso, e similarmente não é possível saber antecipadamente qual o conjunto de valores para a velocidade e aceleração do braço que provocam o maior carregamento.

Devido ao exposto no parágrafo anterior, ao invés de ser feita uma análise em apenas um ponto com apenas uma condição de carregamento, devem ser analisados diversos casos, e os valores utilizados na função objetivo devem ser os mais desfavoráveis encontrados dentre todos eles. Desta forma, um pior caso é individualmente encontrado para cada componente analisado (a flecha do braço e as forças dos atuadores), e os valores encontrados para estes

componentes nestes pontos são combinados na função objetivo. Assim, a seguinte função objetivo foi utilizada:

$$f_{crit}(\vec{v}_{otimização}, \vec{v}_{outros}) = penalty_{crit} \sqrt{Fl_{1crit}^2 + Fl_{2crit}^2}, \quad (4.98)$$

onde  $penalty_{crit}$ ,  $Fl_{1crit}$  e  $Fl_{2crit}$  são, respectivamente, os maiores valores de  $penalty$ ,  $fl_1$  e  $fl_2$  encontrados entre todos os casos. Isto significa que estes valores não precisam necessariamente pertencer ao mesmo caso; os três valores são calculados independentemente para cada caso e a função final  $f_{crit}$  usa o maior valor encontrado para cada um. Isto garante que o braço não ultrapasse o limite de deslocamento da ponta  $|\vec{u}|_{projeto}$  em nenhum caso, e faz com que a otimização busque a minimização dos valores máximos de força encontrados para cada atuador durante a operação do robô.

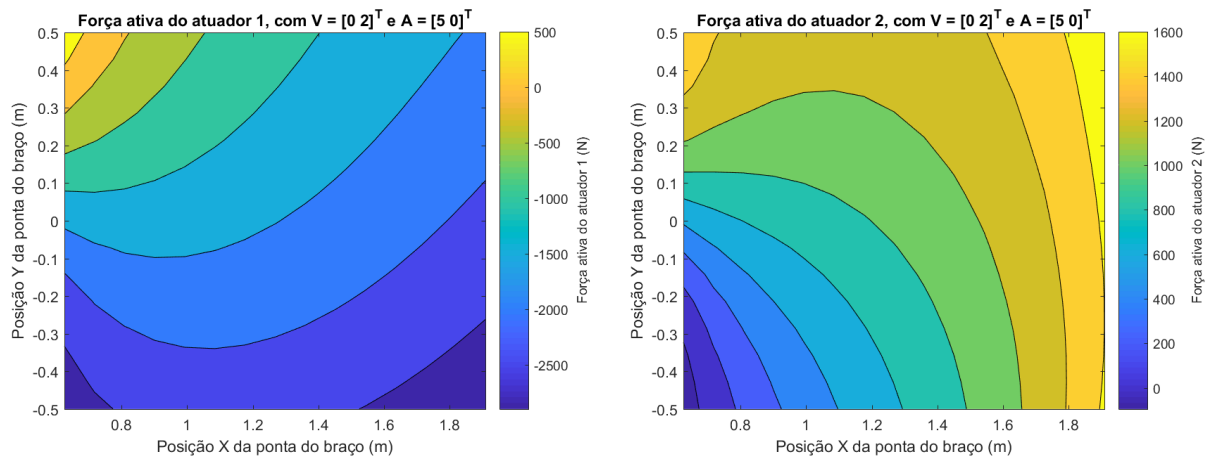


Figura 4.24 – Gráficos do comportamento das forças ativas dos atuadores para pontos dentro do volume de trabalho prismático do braço

#### 4.4.2 Escolha dos casos aplicados na análise

Os módulos das velocidades e acelerações máximas da extremidade do braço,  $V_{max}$  e  $A_{max}$ , são parâmetros de projeto definidos no espaço cartesiano. Estes valores se referem à velocidade máxima que o braço pode alcançar no pior caso encontrado dentro do volume de trabalho prismático definido, ou seja, em outros pontos do volume de trabalho o braço pode possuir um desempenho melhor. As velocidades e acelerações angulares dos elos,  $\vec{q}$  e  $\vec{\ddot{q}}$ , são obtidas por meio das Equações 3.12 e 3.15. Como a matriz Jacobiana utilizada nestas equações depende da posição do braço, os valores de  $\vec{q}$  e  $\vec{\ddot{q}}$  também dependem da posição, além da direção da velocidade e da aceleração da extremidade do braço.

A posição e as direções da velocidade e aceleração angulares devem ser escolhidas visando ao pior caso possível. Assim, deve ser considerado um certo ponto  $\vec{X}$  para a extremidade do braço, dentro do volume de trabalho prismático, e certas direções para a velocidade  $\vec{X}$  e aceleração  $\vec{X}$  que provoquem o maior esforço possível. O ponto  $\vec{X}$ , expresso em coordenadas cartesianas, pode ser convertido para um vetor de posição de juntas  $\vec{q}$  através da cinemática inversa, conforme apresentado na Seção 3.1.2. São consideradas diversas posições para a extremidade do braço, e para cada uma destas posições são considerados diversos casos de carregamento, cada um referente a uma combinação diferente para as direções de  $\vec{X}$  e  $\vec{X}$ .

Como as definições dos nós, dos elementos e da matriz de rigidez dependem apenas da posição do braço, e não do carregamento, é possível aplicar diversos carregamentos sem aumentar significativamente o tempo de computação necessário. Desta forma, foram considerados 16 casos de carregamento onde a velocidade e a aceleração apontam em direções axiais diferentes, e também 4 casos onde a velocidade é nula e é aplicada apenas aceleração, totalizando assim 20 casos de carregamento para cada ponto, como apresentado na Figura 4.25.

		Velocidade				
		↑	→	↓	←	
Aceleração	↑	↑	↗	↕	↖	↑
	→	↗	→	↘	↔	→
	↓	↘	↖	↓	↙	↓
	←	↖	↔	↙	←	←

Figura 4.25 – Diferentes combinações possíveis para os casos de carregamento

Ao serem considerados um número grande de posições, o tempo computacional pode aumentar significativamente, e, portanto, se deve limitar os pontos calculados para o conjunto dos mais críticos. Ao se analisar a flecha do braço em função do volume de trabalho de um braço qualquer, como mostrado na Figura 4.26, é possível verificar que os pontos de maior carregamento ocorrem nas bordas do espaço de trabalho. Isto ocorreu com todos os carregamentos aplicados, como esperado, pois é nos limites do espaço de trabalho que os atuadores precisam aplicar a maior força, pois o ângulo entre eles e o seu elo correspondente é

mais agudo. Análises das forças dos atuadores corroboram esta conclusão, como é mostrado na Figura 4.24. Desta forma, durante a otimização, apenas 8 pontos são considerados: os quatro cantos do espaço de trabalho e os quatro pontos intermediários entre os cantos. Estes pontos podem ser visualizados na Figura 4.26. Após cada otimização, os gráficos de todos os carregamentos devem ser analisados para confirmar se os pontos críticos ocorreram sobre ou próximo a estes pontos, pois, a princípio, não se obteve uma prova matemática para esta constatação, e não é possível afirmar que todos os braços obedeceriam esta regra.

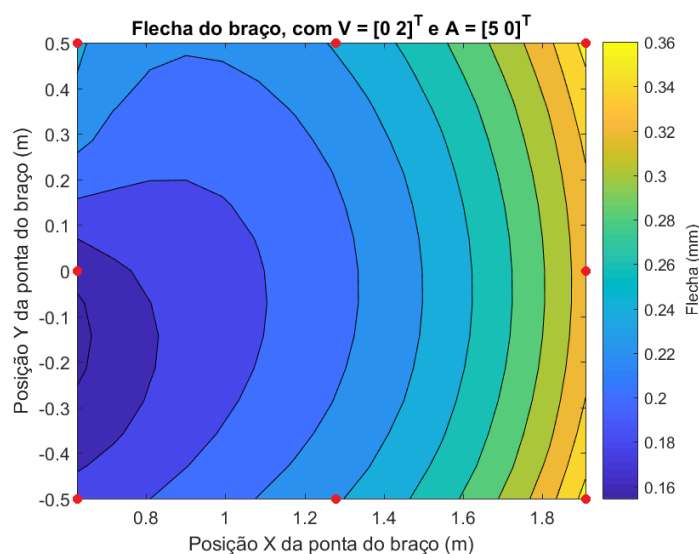


Figura 4.26 – Gráfico que exemplifica o deslocamento da extremidade do braço, ou flecha, para os pontos dentro do volume de trabalho.

Esta análise pode ser considerada conservativa, pois é realizada com relação ao pior caso. Porém, ao mesmo tempo ela garante que o braço possuirá um desempenho de força, velocidade e aceleração igual ou superior aos seus valores nominais em todos os pontos de seu volume de trabalho. Ao se escolher os valores de  $V_{max}$ ,  $A_{max}$  e  $|\vec{u}|_{projeto}$  para a otimização deve-se levar isto em consideração, não escolhendo valores desnecessariamente grandes, já que, na maior parte dos pontos do volume de trabalho, o braço será capaz de operar com desempenho superior a estes valores.

#### 4.4.3 Método de otimização

O método específico de otimização utilizado não é considerado um ponto crítico no presente trabalho, pois existem diversos métodos capazes de otimizar a estrutura de uma maneira satisfatória. O método escolhido, por simplicidade, foi o da função *fminsearch* do Matlab®, que implementa o método de Nelder-Mead descrito por Lagarias et al., 1998. Segundo estes autores, este método busca minimizar o valor de uma função objetivo de  $n$

variáveis usando apenas os valores da função, sem qualquer informação sobre a derivada (explícito ou implícito), e, portanto, é classificado na classe geral dos métodos de procura diretos. Os detalhes deste método podem ser vistos na publicação destes autores.

Para aplicação no presente caso, deve-se levar em conta que a função *fminsearch* não aceita limites para os valores otimizados como argumento, e, portanto, é necessário fazer uma mudança de variáveis para implementar estes limites. Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$v_{otimização_i} = LB_i + \frac{1 + \cos(v'_{otimização_i})}{2} (UB_i - LB_i), \quad (4.99)$$

onde  $v_{otimização_i}$  é a componente  $i$  do vetor de entrada da função objetivo  $\vec{v}_{otimização}$ ,  $LB_i$  e  $UB_i$  são os limites inferior e superior para esta componente, e  $v'_{otimização_i}$  é a componente  $i$  do vetor que é diretamente otimizado pela função *fminsearch*, e que portanto não possui limites.

## 5 ESPECIFICAÇÃO DOS ATUADORES E DA UNIDADE DE POTÊNCIA HIDRÁULICA

A Figura 5.1 apresenta um fluxograma do procedimento proposto para a especificação dos atuadores. Os dados de entrada são os resultados dos esforços axiais dos atuadores obtidos na Seção 4.3, juntamente com as velocidades necessárias. O projetista também deve escolher se deseja desenvolver um novo atuador, ou se deseja escolher um modelo utilizando um catálogo de fabricantes.

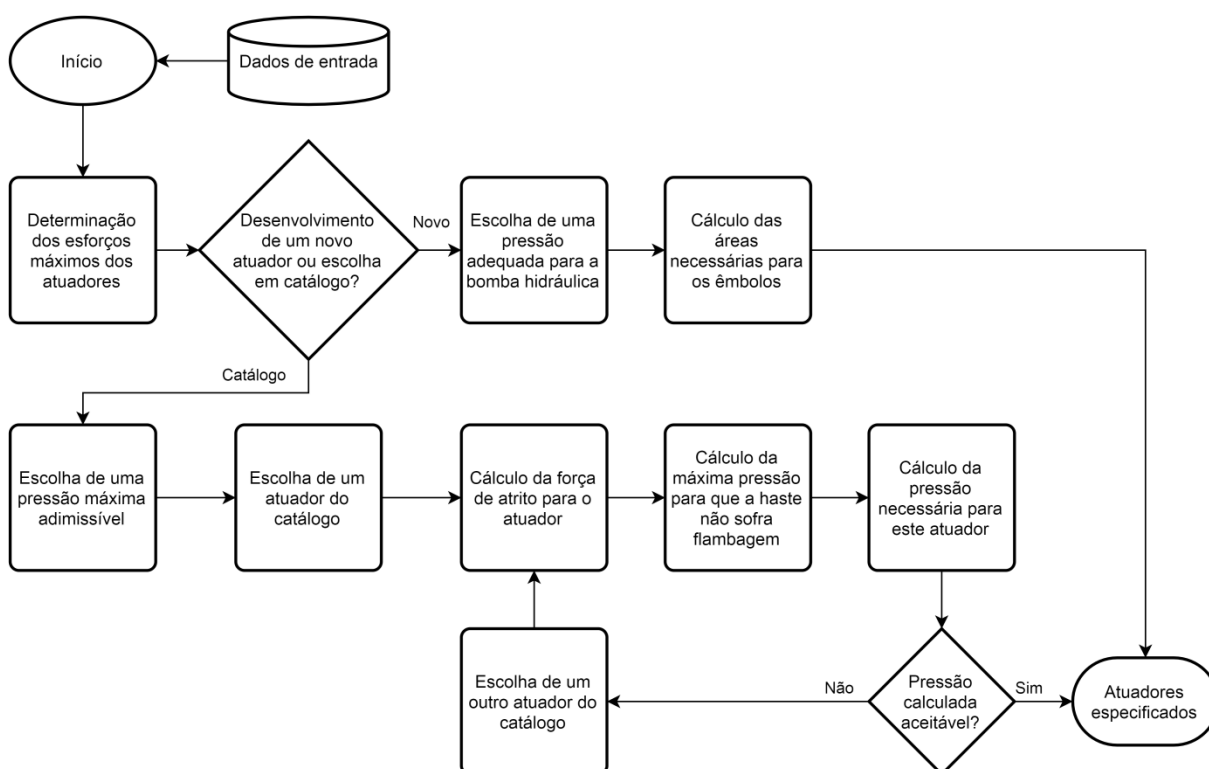


Figura 5.1 – Fluxograma mostrando o procedimento para a especificação dos atuadores

Primeiramente, devem ser determinadas as forças e velocidades máximas dos atuadores, o que está descrito na seção 5.1. Em seguida, a sequência depende da escolha do projetista. Se for definida a especificação de um novo atuador, então deve-se escolher uma pressão adequada, de preferência com base na pressão de uma série de bombas hidráulicas, e calcular os diâmetros ideais para os êmbolos. Isto pode ser visto na seção 5.2. Não é possível nesta etapa dispor-se de dados precisos do atrito, pois este depende dos detalhes construtivos do atuador, cuja definição encontra-se fora do escopo deste trabalho. Estes detalhes incluem, por exemplo, a espessura das paredes, diâmetro da haste do êmbolo, sistema de vedação e forma de fixação. Se for definida a escolha de um atuador com base em um catálogo, então deve ser pré-definida uma pressão de trabalho máxima arbitrária. Também são necessários os dados de

uma “família” de atuadores. Começando com o de menor diâmetro interno, todos os modelos de atuador da família devem ser testados um por um até que seja encontrado um modelo que seja adequado. Para tanto, deve-se calcular a pressão que o modelo de atuador sendo testado exige para que possa ser aplicada a força necessária. Neste caso, é possível incluir uma estimativa para a força de atrito. Esta pressão deve então ser comparada com três outros valores de pressão: a pressão máxima suportada pelo atuador, a pressão máxima pré-definida, e a pressão que leva à flambagem da haste do atuador. Se a pressão calculada for maior do que qualquer uma destas três, então o atuador não pode ser selecionado, e o próximo modelo da família deve ser analisado. Se a pressão calculada for menor do que todas as três, então o atuador é indicado para ser aplicado ao braço. Este procedimento é mostrado na Seção 5.3.

Ao final da análise, os valores dos atuadores especificados devem ser comparados com os valores usados como entrada no início do processo de projeto do braço. Se necessário, o projeto deve ser refeito usando os novos valores, em um processo iterativo, como mencionado na Seção 5.3.

Após a iteração final, onde o braço já se encontra completamente especificado, deve-se selecionar, segundo os procedimentos apresentados na Seção 5.5, a bomba hidráulica adequada para os atuadores do braço. Esta procedimento é feito considerando apenas os requisitos de pressão e vazão dos atuadores durante a operação do braço, estando uma análise aprofundada do sistema hidráulico fora do escopo deste trabalho.

## 5.1 Cálculo das forças e velocidades máximas dos atuadores

Para especificar as dimensões dos atuadores, é necessário dispor-se dos valores das forças e velocidades máximas que os mesmos devem desempenhar. É importante fazer uma distinção entre as forças máximas que eles aplicam quando se estendem, chamadas de  $Fl_{1_{ext}}$  e  $Fl_{2_{ext}}$ , e quando se retraem, chamadas de  $Fl_{1_{ret}}$  e  $Fl_{2_{ret}}$ . Isto é importante porque a área efetiva do êmbolo é diferente nos dois sentidos, devido à haste do êmbolo, como é possível observar na Figura 5.2. Existem atuadores que possuem hastes nos dois sentidos, chamados de atuadores de dupla ação com haste passante, que possuem áreas efetivas iguais; porém, estes não podem ser usados com o robô devido a possíveis colisões que a haste teria com a estrutura quando o atuador estivesse retraído. O braço deve ser capaz de se deslocar para todas as direções com a mesma velocidade, e, portanto, as velocidades máximas em retração são iguais às velocidades máximas em extensão, sendo as velocidades máximas dos atuadores determinadas por  $\dot{P}_{1_{max}}$  e  $\dot{P}_{2_{max}}$ .

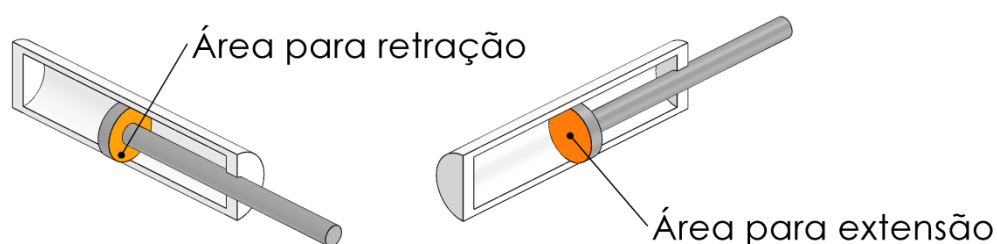


Figura 5.2 – Desenho esquemático mostrando a diferença entre as áreas efetivas do êmbolo para retração e para extensão

Para o cálculo das forças máximas, é possível usar a metodologia utilizada para a função objetivo da otimização estrutural, onde vários pontos e casos de carregamento são considerados. Como este cálculo só precisa ser feito para uma única configuração da estrutura do braço, ao invés de todo o conjunto de configurações testadas durante a otimização, é possível considerar mais pontos sobre o volume de trabalho. Por exemplo, a Figura 4.24 foi elaborada por meio do cálculo de 225 pontos, igualmente espaçados em uma grade 15 x 15 (ao invés dos 8 pontos normalmente considerados durante a otimização). São considerados todos os 20 casos de carregamento. Os valores positivos máximos encontrados para a força, dentre todos estes pontos e casos, fornecem os valores de  $Fl_{1_{ext}}$  e  $Fl_{2_{ext}}$ , e os valores negativos máximos os valores de  $Fl_{1_{ret}}$  e  $Fl_{2_{ret}}$ . Estas forças ainda não incluem as componentes devidas ao atrito do atuador. Como estas forças dependem dos atuadores escolhidos, elas são calculadas posteriormente.

Para o cálculo das velocidades, pode-se usar a seguinte equação:

$$\dot{P}_{i_{max}} = \max\left(\frac{dP_i}{dt}\right) = \max\left(\frac{dP_i}{dq_i} \frac{dq_i}{dt}\right) = \max\left(\frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i\right), \quad (5.1)$$

onde  $\dot{P}_{i_{max}}$  é a velocidade máxima do atuador  $i$ ,  $\frac{dP_i}{dq_i}$  é o inverso de  $\frac{dq_i}{dP_i}$ , definido na Equação 3.19, e  $\dot{q}_i$  é a velocidade angular da junta  $i$ . Estes valores devem ser calculados para todos os pontos e casos de carregamento, com os valores máximos sendo armazenados para uso posterior.

## 5.2 Escolha teórica dos diâmetros dos êmbolos

É possível afirmar que os diâmetros dos êmbolos definem as áreas onde o fluido hidráulico pode realizar o trabalho de deslocamento dos atuadores, e a potência mecânica necessária é o produto da força de atuação multiplicada da velocidade do êmbolo, ou o produto da pressão pela vazão volumétrica do fluido. Embora o produto destes fatores seja



constante, a relação entre eles não é. Uma área maior para um êmbolo faz com que a pressão máxima necessária seja menor, mas aumenta a vazão máxima necessária. Devido a isto, a escolha dos diâmetros dos êmbolos está atrelada à escolha da bomba hidráulica do sistema; se atuadores com áreas menores forem utilizados, será necessário uma bomba com uma pressão mais alta, mas a sua vazão poderá ser menor. O oposto também é válido.

Idealmente, o diâmetro do atuador  $i$  deve ser escolhido de modo que o atuador seja capaz de aplicar a força máxima necessária durante a operação do robô (definida na Seção 5.1) ao receber fluido com a pressão máxima da bomba escolhida. Assim, a seguinte equação pode ser usada para determinar este valor:

$$\frac{\pi}{4} d_{ei}^2 = A_{i_{embolo}}(\Delta P_{pump}) = \max \left( \frac{Fl_{i_{ext}}/\Delta P_{pump}}{Fl_{i_{ret}}/\Delta P_{pump} + A_{i_{haste}}} \right), \quad (5.2)$$

onde  $d_{ei}$  é o diâmetro do êmbolo do atuador  $i$ ,  $A_{i_{embolo}}$  é a área de extensão do êmbolo do atuador  $i$ ,  $\Delta P_{pump}$  é a pressão máxima de operação da bomba, e  $A_{i_{haste}}$  é a área transversal da sua haste, dada por:

$$A_{i_{haste}} = \frac{\pi}{4} d_{hi}^2, \quad (5.3)$$

onde  $d_{hi}$  é diâmetro da haste do atuador  $i$ . Este diâmetro é um parâmetro do projeto estrutural do atuador, e deve ser escolhido de forma a impedir que a haste sofra flambagem quando carregada. Catálogos de fabricantes de atuadores geralmente mostram uma forma de determinar este valor em função do comprimento e pressão de operação do atuador. A forma de cálculo deste diâmetro, para o caso em que um novo atuador está sendo projetado, encontra-se fora do escopo deste trabalho.

Com a área calculada para uma dada pressão de operação, deve-se calcular a estimativa para vazão necessária. Isto pode ser feito por meio da seguinte equação:

$$\dot{V}_{est}(\Delta P_{pump}) = A_{1_{embolo}}(\Delta P_{pump}) \dot{P}_{1_{max}} + A_{2_{embolo}}(\Delta P_{pump}) \dot{P}_{2_{max}}, \quad (5.4)$$

onde  $\dot{V}_{est}$  é a estimativa para a vazão volumétrica necessária da bomba em função da pressão  $\Delta P_{pump}$ . Esta estimativa é conservadora, pois assume que a vazão máxima para o primeiro atuador,  $\dot{P}_{1_{max}}$ , ocorre no mesmo caso onde é obtida a vazão máxima para o segundo atuador,  $\dot{P}_{2_{max}}$ , o que não ocorre necessariamente na prática.

Se forem calculados valores de  $\dot{V}_{est}(\Delta P_{pump})$  para diversas pressões, pode-se obter um gráfico pressão *versus* vazão que mostra uma estimativa para a vazão que a bomba deve ter em função da sua pressão de atuação, se forem consideradas as áreas ideais para os êmbolos.

Neste mesmo gráfico, se pode imprimir pontos referentes às pressões e vazões máximas de vários modelos de bombas. Desta forma, é possível escolher o modelo da bomba mais adequada. Se o ponto de operação de uma determinada bomba estiver acima da curva dos requisitos, então esta bomba pode ser usada para atuar o braço, e as áreas ideais dos êmbolos podem ser calculadas usando a pressão de operação desta bomba. Um exemplo é mostrado na Figura 5.3, onde são mostradas 4 curvas, cada uma referente à diâmetros diferentes para as hastes dos atuadores.

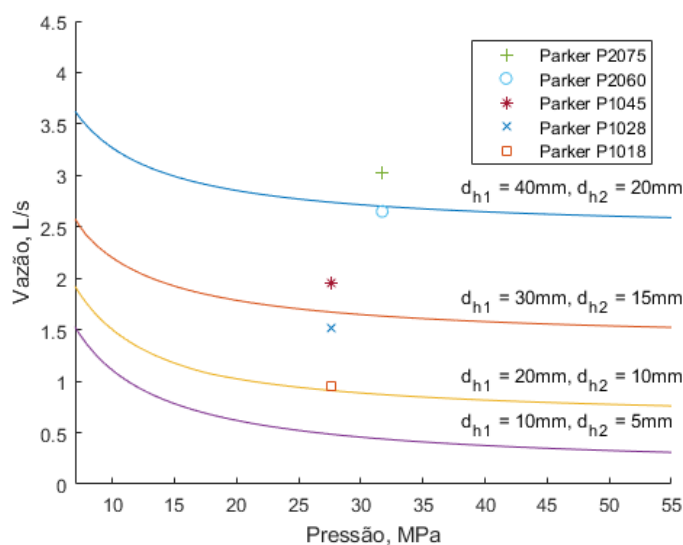


Figura 5.3 – Exemplo de um gráfico pressão x vazão necessária para um braço.  $d_{h1}$  e  $d_{h2}$  representam os diâmetros das hastes dos atuadores 1 e 2 respectivamente.

No exemplo da Figura 5.3, são apresentados os pontos de operação de cinco bombas da Parker®, cujas especificações foram obtidas no catálogo HY28-2673-01/HPD/US. Neste gráfico, é possível observar, por exemplo, que a bomba hidráulica P1028 poderia ser utilizada com o braço do exemplo se fossem utilizados atuadores com diâmetros de haste de  $d_{h1} = 20\text{mm}$  e  $d_{h2} = 10\text{mm}$ . Neste caso, os diâmetros dos êmbolos deveriam ser  $d_{e1} = 24,5\text{mm}$  e  $d_{e2} = 11,8\text{mm}$  para que a pressão necessária seja a igual à fornecida pela bomba, de 27,6 MPa. Existe uma chance que esta mesma bomba possa também ser utilizada no caso em que  $d_{h1} = 30\text{mm}$  e  $d_{h2} = 15\text{mm}$ , sabendo-se que o gráfico é conservativo e a vazão desta bomba não se encontra muito abaixo da curva, mas quase certamente ela não poderia ser utilizada no caso em que  $d_{h1} = 40\text{mm}$  e  $d_{h2} = 20\text{mm}$ , sendo mais adequada a utilização da bomba P2075. Para confirmar se uma bomba pode ser utilizada ou não, deve-se graficar a curva pressão *versus* vazão detalhada do braço, como mostrado na Seção 5.5, e verificar se a bomba considerada supera os respectivos requisitos.

A escolha da bomba hidráulica, dentre possíveis opções, deve ser feita de modo a minimizar o custo do sistema hidráulico. Este custo envolve o valor da bomba em si, e também o custo das servoválvulas, acumuladores, atuadores e motor elétrico, o qual geralmente é vendido separadamente. A forma usual de determinar estes custos é por meio dos fabricantes e revendas. Também deve ser levado em consideração outros fatores, como, por exemplo, o *duty-cycle* da bomba, que é a parcela do tempo que ela pode permanecer ligada, e a oscilação da pressão de trabalho, que deve ser a menor possível para que os movimentos do braço sejam suaves (as especificações detalhadas do sistema hidráulico estão fora do escopo deste trabalho).

As áreas dos êmbolos calculadas nesta seção são ideais, e podem ser utilizadas para a especificação de atuadores customizados para o braço. Durante a fabricação destes novos atuadores, pode ser necessário truncar as dimensões calculadas para os diâmetros. Neste caso, os diâmetros usados na fabricação devem ser maiores do que os calculados, para que a pressão máxima do sistema mantenha-se suficiente para que os atuadores apliquem suas forças máximas necessárias. No entanto, nesta análise não é considerado o atrito dos atuadores e nem é mostrada uma forma de cálculo para o diâmetro das hastes, pois estes valores dependem do projeto detalhado dos atuadores, estando, assim, fora do escopo deste trabalho. Se possível, deve ser utilizado um atuador comercial escolhido por meio de um catálogo. Neste caso, a forma de especificação é mostrada na Seção 5.3.

### **5.3 Escolha dos atuadores com base em um catálogo**

Na seção anterior foi apresentado como calcular os diâmetros ideais para os êmbolos dos atuadores em função das forças máximas que eles podem aplicar durante a operação do braço e a pressão máxima da bomba escolhida. Nesta seção, é mostrado como deve ser feita a escolha de um atuador dentre as opções de em um catálogo, visando à redução dos custos de fabricação e eliminar a necessidade de desenvolvimento de um novo modelo. Ao se usar um catálogo, também é possível calcular valores aproximados para o atrito, massa e comprimento morto de um dado atuador, sem precisar realizar uma análise detalhada do seu projeto, pois catálogos geralmente apresentam formas de estimar estes valores para um dado atuador.

Assim como na Seção 5.2, também é preciso definir uma bomba hidráulica juntamente com os atuadores. No entanto, devido aos valores discretos para o diâmetro do êmbolo e da haste definidos nos catálogos, não é possível imprimir um gráfico como o da Figura 5.3. Assim, ao invés de escolher um modelo de bomba específico, deve-se apenas pré-definir uma

pressão de operação máxima,  $\Delta P_{pump_{max}}$ , e a escolha dos atuadores será feita de forma que a pressão necessária seja igual ou inferior à esta pressão, sendo a escolha do modelo específico da bomba feita posteriormente.

Como exemplo, nesta seção será usado o catálogo HY08-1320-3/NA da Parker® (PARKER HANNIFIN CORPORATION, 2014). Outros catálogos podem apresentar seus dados de formas diversas, porém, normalmente devem apresentar as mesmas informações para que a especificação dos atuadores seja feita de forma adequada.

Primeiramente, deve-se calcular o comprimento básico  $L_{basico}$ , que depende do tipo de fixação usado com o atuador. No caso do presente trabalho, a fixação dos atuadores é feita com pinos em ambas as extremidades, e, portanto, este comprimento básico é igual ao comprimento máximo do atuador,  $P_{imax}$ .

Com  $L_{basico}$  deve-se calcular o comprimento do tubo de parada,  $L_{tubo}$ . O tubo de parada é uma peça acoplada à haste que limita a extensão máxima do atuador, reduzindo os esforços sofridos pelos rolamentos lineares, devido à maior distância entre os rolamentos da tampa do cilindro e do êmbolo. Estes carregamentos são causados por forças transversais, como o peso próprio no caso em que o atuador não é montado verticalmente. O valor adequado para seu comprimento é dado em uma tabela no catálogo, em função do comprimento  $L_{basico}$ . Define-se, então, o comprimento  $L_{ajustado}$  como a soma do comprimento básico e do comprimento do tubo de parada do atuador.

Para verificar se um dado atuador, caracterizado por uma combinação de um diâmetro de êmbolo e um diâmetro de haste, pode ser utilizado ou não, devem ser aplicados dois testes, apresentados a seguir.

### 1. Verificação da pressão máxima necessária

A pressão máxima necessária em um atuador pode ser calculada por intermédio da seguinte equação:

$$\Delta P_{atuador_i} = \max \left( \frac{F'_{i_{ext}}/A_{i_{ext}}}{F'_{i_{ret}}/A_{i_{ret}}} \right), \quad (5.5)$$

onde  $F'_{i_{ext}}$  e  $F'_{i_{ret}}$  são as forças máximas aplicadas pelo atuador  $i$ , ajustadas para considerar o atrito, e  $A_{i_{ext}}$  e  $A_{i_{ret}}$  são as áreas de extensão e retração do atuador, expressas por:

$$A_{i_{ext}} = \frac{\pi}{4} d_{ei}^2, \quad (5.6)$$

e

$$A_{i_{ret}} = \frac{\pi}{4} (d_{ei}^2 - d_{hi}^2). \quad (5.7)$$

A pressão  $\Delta P_{atuador_i}$  deve ser menor do que a pressão máxima escolhida,  $\Delta P_{pump_{max}}$ , e do que a pressão máxima admissível para o atuador, definida no catálogo. Se estas condições forem atendidas, então o atuador escolhido passa neste teste.

Para calcular  $Fl'_{i_{ext}}$  e  $Fl'_{i_{ret}}$  deve-se usar a equação aproximada para o atrito apresentada no catálogo utilizado. No catálogo de exemplo a seguinte equação é utilizada:

$$F_{atrito_i} = \begin{cases} 12d_{hi} + 12F_L d_{hi} + 24F_L d_{ei} & \text{para selamento padrão} \\ 12d_{hi} + 30F_P d_{hi} + 6F_P d_{ei} & \text{para selamento de baixo atrito} \end{cases} \quad (5.8)$$

onde  $F_L$  é o fator de atrito para selamento padrão e  $F_P$  é o fator de atrito para selamento de baixo atrito. Estes fatores dependem da pressão do atuador, e seus valores aproximados são apresentados no gráfico mostrado na Figura 5.4. Assim, o valor para o atrito é uma função da pressão,  $F_{atrito_i}(\Delta P)$ , e os valores de  $Fl'_{i_{ext}}$  e  $Fl'_{i_{ret}}$  podem ser expressos por meio das seguintes equações:

$$Fl'_{i_{ext}} = F_{atrito_i}(Fl'_{i_{ext}}/A_{i_{ext}}) + Fl_{i_{ext}}, \quad (5.9)$$

e

$$Fl'_{i_{ret}} = F_{atrito_i}(Fl'_{i_{ret}}/A_{i_{ret}}) + Fl_{i_{ret}}. \quad (5.10)$$

Estas equações são recursivas, pois não é possível isolar os valores de  $Fl'_{i_{ext}}$  e  $Fl'_{i_{ret}}$  devido às características dos fatores de atrito. No entanto, é possível calcular aproximações para eles com o uso de iterações, até se obter uma precisão arbitrária, por exemplo de 0,1%. Evidentemente, esta fórmula consiste de uma aproximação para o atrito, e, portanto, a precisão adotada aqui não necessita ser muito elevada.

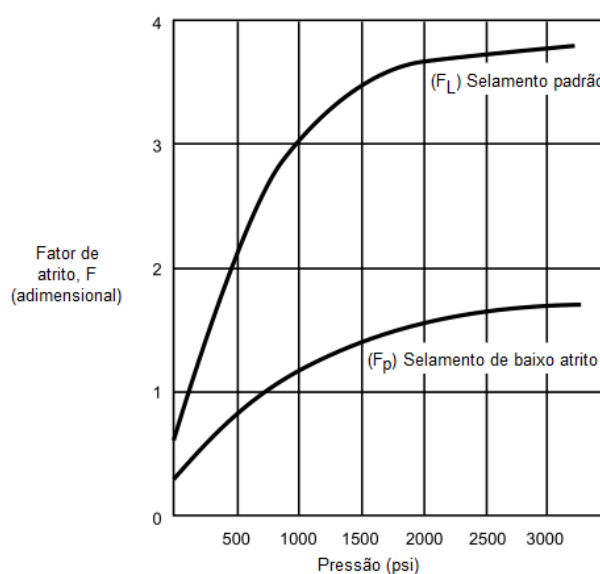


Figura 5.4 – Gráfico mostrando os valores para os coeficientes de atrito, para atuadores da série RDH da Parker®. [adaptado de PARKER HANNIFIN CORPORATION, 2014].

## 2. Verificação da flambagem da haste do atuador

Para verificação da resistência à flambagem da haste, são necessários dados, fornecidos pelo fabricante, que relacionem os diâmetros do êmbolo e da haste do atuador escolhido, a pressão de operação, e valores máximos para  $L_{ajustado}$ . Se o valor de  $L_{ajustado}$  calculado anteriormente for menor do que o valor correspondente na tabela, o atuador passa no teste. Se não, outro atuador deve ser escolhido e testado.

A pressão de utilização deve ser a máxima do sistema hidráulico, para garantir que a haste nunca sofra flambagem mesmo em caso de um acidente. Idealmente deve-se limitar a pressão máxima a um valor igual ou não muito maior do que o valor  $\Delta P_{atuador}$ , que é o maior dentre os valores de  $\Delta P_{atuador_1}$  e  $\Delta P_{atuador_2}$  calculados para o teste anterior, pois esta é a maior pressão necessária para a movimentação do braço. Esta limitação pode ser executada fisicamente através de válvulas de alívio, ou usando uma bomba hidráulica com uma pressão de operação já próxima ao valor de  $\Delta P_{atuador}$ . Se a pressão máxima do sistema hidráulico for muito elevada, então será necessário o uso de hastes com diâmetros maiores para os atuadores, o que tende a aumentar a massa e o custo do braço.

Após a escolha dos diâmetros dos êmbolos e hastes dos atuadores, deve-se obter a medida do comprimento morto dos atuadores. Geralmente o comprimento do atuador retraído mostrado em catálogos é composto por um valor fixo mais o curso do atuador, sendo este valor fixo o comprimento morto.

O curso dos atuadores pode ser customizado mais facilmente do que os diâmetros, de forma que alguns fabricantes, inclusive a Parker®, fabricam atuadores com qualquer curso requisitado pelo cliente, dentro de certos limites de viabilidade. Para calcular o curso que os atuadores devem ter, pode-se usar a seguinte equação:

$$C'_i = \frac{(P_{imax} + P_{imin} - 2D'_{li})}{3}, \quad (5.11)$$

onde  $C'_i$  é o curso do atuador físico  $i$ , e  $D'_{li}$  é o seu comprimento morto, obtido em catálogo. Estes valores podem ser comparados com os valores  $C_i$  e  $D_{li}$  usados na Seção 3.2.2, que são o curso e o comprimento do atuador assumido  $i$ , respectivamente. A Equação 5.11 só pode ser utilizada caso  $D'_{li} < D_{li}$ . Caso contrário, o curso pode ser calculado pela diferença entre  $P_{imax}$  e  $P_{imin}$ .

Os valores de  $D'_{li}$  e  $D_{li}$  devem ser levemente diferentes, com  $D_{li}$  sendo maior do que  $D'_{li}$ . Isto se deve ao fato de que um dado atuador  $A$  com um comprimento morto menor pode substituir um atuador  $B$  com um comprimento morto maior ( $D_{li_A} < D_{li_B}$ ), desde que o

atuador  $A$  possua um comprimento mínimo menor do que o atuador  $B$  e um comprimento máximo maior ( $P_{\min_A} < P_{\min_B}$  e  $P_{\max_A} > P_{\max_B}$ ), o que garante que o atuador  $A$  é capaz de alcançar todos os pontos alcançáveis pelo atuador  $B$ . No entanto, o atuador  $B$  não é capaz de alcançar todos os pontos alcançáveis por um atuador com um comprimento morto menor do que o seu, e portanto não pode substituir o atuador  $A$ . Assim, se  $D'_{li} < D_{li}$ , então o atuador escolhido pode ser utilizado com o braço, mas caso  $D'_{li} > D_{li}$  então o atuador escolhido não será capaz de alcançar ambos os pontos  $P_{\min}$  e  $P_{\max}$  calculados na Seção 3.2.2. Caso isto ocorra, então toda a análise de definição dos parâmetros do braço deverá ser refeita com um valor maior para  $D_{li}$ .

Os valores de massa, centro de gravidade e momento de inércia de massa do cilindro e da haste de cada atuador também devem ser calculados. No catálogo utilizado é informada a massa total do atuador em função dos diâmetros do êmbolo e da haste e do curso, mas os outros parâmetros não são informados. Neste caso, devem ser calculados valores aproximados para uma análise inicial, e, posteriormente, deve-se entrar em contato com o fabricante ou representante para se obter parâmetros mais precisos para os atuadores escolhidos.

Após a especificação e escolha dos atuadores, se deve usar os valores do seu comprimento morto e peso nos procedimentos apresentados nas Seções 3.2.2 e 4.2.3, respectivamente, e toda a análise deve ser refeita. Se os mesmos atuadores forem escolhidos nesta segunda análise, então se pode prosseguir para a próxima etapa. Caso contrário, deve-se continuar realizando iterações até que esta condição seja satisfeita, usando os novos valores calculados para os atuadores em cada iteração.

#### **5.4 Estimativa dos parâmetros inerciais de um atuador**

Para que seja possível a utilização das equações dinâmicas propostas para os atuadores, apresentadas na Seção 4.2.3, são necessários não apenas os valores da massa, momento de inércia e centro de gravidade dos atuadores, mas também os dos cilindros e das hastes individualmente. Estes valores geralmente não são informados nos catálogos, e assim idealmente deve-se entrar em contato com o fabricante para obter informações precisas. No entanto, durante a utilização da metodologia proposta para o desenvolvimento do braço é interessante a utilização de um método capaz de estimar os parâmetros necessários para os atuadores, reduzindo assim a dependência com o fabricante e permitindo que a análise possa ser concluída mais rapidamente. Nesta seção será exposto o método proposto para tal.

O cilindro do atuador pode ser aproximado como um cilindro oco com tampas, cujas paredes laterais possuem a mesma espessura das tampas. O seu comprimento externo  $L_{ai_{cil}}$  deve ser informado no catálogo, e o diâmetro da parede interna é igual ao diâmetro do êmbolo. Foi estimado, visualmente, que 70% da massa básica  $m_{ai_{basica}}$ , que é um valor informado pelo catálogo e é referente à massa do comprimento morto do atuador, é devido ao cilindro, sendo os outros 30% devido à haste e êmbolo, pois é esperado que as paredes do cilindro sejam espessas. Para obtenção de valores mais precisos seriam necessários os modelos tridimensionais completos dos atuadores. A massa por comprimento da haste,  $m_{ai_{hcurso}}$ , é informado no catálogo, bem como a densidade do material utilizado na fabricação do atuador,  $\rho_{act}$ . Com estes valores, é possível estimar a massa do cilindro:

$$m_{i_{cil}} = 0,7m_{ai_{basica}} + C'_{i_b}(m_{ai_{curso}} - m_{ai_{hcurso}}) - L_{haste_w} m_{ai_{hcurso}}, \quad (5.12)$$

onde  $C'_{i_b}$  é o curso bruto do atuador, composto pela soma do curso  $C'_i$  e do comprimento do tubo de parada,  $m_{ai_{curso}}$  é a massa específica do atuador, referente à massa por unidade de comprimento do curso, sendo informada pelo catálogo, e  $L_{haste_w}$  é a parte da haste que permanece fora do cilindro mesmo quando completamente recolhido (informação do catálogo).

A massa de um cilindro oco com tampas pode ser calculada através da diferença entre a massa de um cilindro sólido, com as dimensões externas do cilindro oco, e a massa de um cilindro que representa a sua cavidade, através da seguinte expressão:

$$m_{i_{cil}} = m_{i_{cil_{ext}}} - m_{i_{cil_{int}}}, \quad (5.13)$$

onde  $m_{i_{cil_{ext}}}$  é a massa do cilindro sólido, com diâmetro  $(d_{ei} + 2t_{ai_{cil}})$  e comprimento  $L_{ai_{cil}}$ , dada por:

$$m_{i_{cil_{ext}}} = \frac{\pi}{4}(d_{ei} + 2t_{ai_{cil}})^2 L_{ai_{cil}} \rho_{act}, \quad (5.14)$$

$m_{i_{cil_{int}}}$  é a massa do cilindro que representa a cavidade, com diâmetro  $d_{ei}$  e comprimento  $(L_{ai_{cil}} - 2t_{ai_{cil}})$ , dada por:

$$m_{i_{cil_{int}}} = \frac{\pi}{4}d_{ei}^2(L_{ai_{cil}} - 2t_{ai_{cil}}) \rho_{act}, \quad (5.15)$$

e  $t_{ai_{cil}}$  é a espessura das paredes, inclusive das tampas. Combinando as Equações 5.13, 5.14 e 5.15 e isolando  $t_{ai_{cil}}$ , chega-se à seguinte expressão para o cálculo da espessura:



$$t_{ai_{cil}} = \frac{-\left(d_{ei} + \frac{d_{ei}^2}{2L_{ai_{cil}}}\right) + \sqrt{d_{ei}^2 + \frac{d_{ei}^3}{L_{ai_{cil}}} + \frac{d_{ei}^4}{L_{ai_{cil}}^2} + \frac{4m_{i_{cil}}}{L_{ai_{cil}} \rho_{act} \pi}}{2}. \quad (5.16)$$

O centro de gravidade do cilindro é estimado como sendo igual à metade do comprimento  $L_{ai_{cil}}$ , e o seu momento de inércia pode ser aproximado pela seguinte equação, obtida com base na equação para cálculo do momento de inércia de um cilindro sólido, menos o momento de inércia do cilindro que representa a cavidade:

$$I_{i_{cil}} = \frac{1}{12} m_{i_{cil_{ext}}} \left[ \frac{3}{4} (d_{ei} + 2t_{ai_{cil}})^2 + L_{ai_{cil}}^2 \right] - \frac{1}{12} m_{i_{cil_{int}}} \left[ \frac{3}{4} d_{ei}^2 + (L_{ai_{cil}} - 2t_{ai_{cil}})^2 \right]. \quad (5.17)$$

A massa da haste pode ser estimada pela diferença entre a massa total do atuador,  $m_{i_{total}}$  obtida por  $m_{i_{total}} = m_{ai_{basica}} + C'_{i_b} m_{ai_{curso}}$ , e a massa estimada para o cilindro pela Equação 5.12:

$$m_{i_{haste}} = m_{i_{total}} - m_{i_{cil}}. \quad (5.18)$$

A haste pode ser aproximada por um cilindro maciço para o cálculo do momento de inércia, o que permite que a seguinte equação também seja utilizada para calcular a sua massa, obtida através da equação do volume de um cilindro:

$$m_{i_{haste}} = \frac{\pi}{4} d'_{hi}{}^2 (C'_{i_b} + L_{haste_w} + 0,4D'_{li}) \rho_{act}, \quad (5.19)$$

onde  $d'_{hi}$ , que é o diâmetro ajustado da haste, é diferente de  $d_{hi}$ , pois o cilindro usado para a aproximar a haste deve levar em consideração não apenas a massa da haste, que seria obtida se  $d'_{hi} = d_{hi}$ , mas também a massa do êmbolo. Assim,  $d'_{hi}$  deve ser maior do que  $d_{hi}$ . Além disto, o termo  $(C'_{i_b} + L_{haste_w} + 0,4D'_{li})$  se refere à estimativa para o comprimento da haste. O fator  $0,4D'_{li}$ , ou 40% do comprimento morto, é uma estimativa visual para o comprimento da parte da haste e êmbolo que permanece sempre dentro do cilindro, mesmo quando o atuador encontra-se estendido.

A Equação 5.19 não é utilizada diretamente, pois a Equação 5.18 já estima a massa da haste. Ao invés disto, ela é utilizada para isolar  $d'_{hi}$ , obtendo-se assim a seguinte equação:

$$d'_{hi} = \sqrt{\frac{4m_{i_{haste}}}{\pi(C'_{i_b} + L_{haste_w} + 0,4D'_{li})\rho_{act}}}. \quad (5.20)$$

O centro de massa da haste é estimado como estando na metade do cilindro:

$$CG_{i_{haste}} = \frac{C'_{i_b} + L_{haste_w} + 0,4D'_{li}}{2}. \quad (5.21)$$

O momento de inércia de massa pode ser calculado através da equação para o cálculo do momento de inércia de um cilindro sólido:

$$I_{i_{haste}} = \frac{1}{12}m_{i_{haste}} \left[ \frac{3}{4}d'_{hi}{}^2 + (C'_{i_b} + L_{haste_w} + 0,4D'_{li})^2 \right]. \quad (5.22)$$

As estimativas propostas nesta seção não são muito precisas, mas fornecem valores que podem ser usados durante o processo de análise do braço. Antes da construção do braço, no entanto, devem ser obtidos valores mais precisos com o fabricante, para verificar os resultados obtidos com os valores aproximados.

## 5.5 Curva pressão x vazão necessária de um sistema

Com os diâmetros dos êmbolos  $d_{e1}$  e  $d_{e2}$  e das hastes  $d_{h1}$  e  $d_{h2}$  definidos, é possível especificar a bomba necessária com maior precisão do que o método apresentado na Seção 5.2, que fornecia apenas uma aproximação para a vazão necessária. Para tanto, deve-se usar um método similar ao apresentado na Seção 5.1, onde vários pontos sobre o volume de trabalho e casos de carregamento são considerados para calcular as forças e velocidades dos atuadores. A diferença é que, no presente caso, com os valores dos diâmetros dos atuadores conhecidos, é possível calcular a pressão e vazão necessárias para cada caso, através das seguintes equações:

$$\Delta P_{caso} = \max \left( \begin{array}{l} \Delta P_{caso1} \\ \Delta P_{caso2} \end{array} \right), \quad (5.23)$$

$$\Delta P_{caso_i} = \begin{cases} Fl_i/A_{i_{ext}} & se Fl_i \geq 0 \\ -Fl_i/A_{i_{ret}} & se Fl_i < 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\dot{V}_{caso} = \dot{V}_{caso1} + \dot{V}_{caso2}, \quad (5.25)$$

e

$$\dot{V}_{caso_i} = \begin{cases} \dot{P}_i/A_{i_{ext}} & se \dot{P}_i \geq 0 \\ -\dot{P}_i/A_{i_{ret}} & se \dot{P}_i < 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

onde  $\Delta P_{caso}$  é a pressão da bomba necessária para o caso considerado,  $\Delta P_{caso_i}$  é a pressão necessária para o atuador  $i$ ,  $Fl_i$  é a força que o atuador  $i$  aplica sobre a estrutura neste caso,  $A_{i_{ext}}$  é a área do êmbolo na direção de extensão do atuador  $i$ ,  $A_{i_{ret}}$  é a sua área na direção de retração,  $\dot{V}_{caso}$  é a vazão total necessária,  $\dot{V}_{caso_i}$  é a vazão necessária para o atuador  $i$ , e  $\dot{P}_i$  é a

velocidade do atuador  $i$  no caso considerado. Se houver uma função para determinação da força de atrito nos atuadores, então esta pode ser usada para calcular as forças totais  $FL'_{i_{ext}}$  e  $FL'_{i_{ret}}$ , por exemplo, como mostrado nas Equações 5.9 e 5.10, e assim as pressões nos atuadores podem ser calculadas através da Equação 5.5 ao invés da 5.24. No entanto, mesmo neste caso, não estão sendo consideradas as perdas de carga no sistema hidráulico, e, portanto, é indicado que a bomba escolhida possua uma pressão superior à calculada.

Realizando estes cálculos para vários casos, é obtida uma nuvem de pontos, com coordenadas  $(\Delta P_{caso}, \dot{V}_{caso})$ , que pode ser impressa em um gráfico pressão *versus* vazão. É então possível traçar uma curva que envolva todos os pontos obtidos, como mostrado na Figura 5.5. A bomba escolhida deve ter uma curva superior à calculada para o sistema, para garantir que seu desempenho seja suficiente para atender todos os casos no domínio de operação do robô.

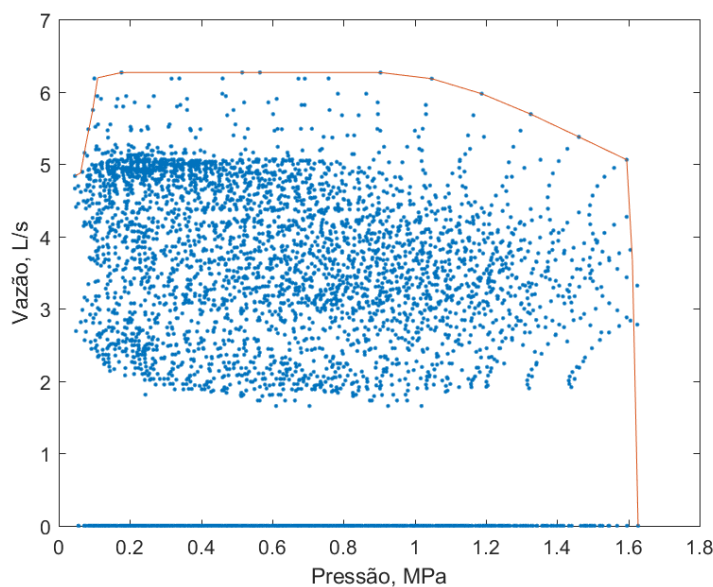


Figura 5.5 – Exemplo de nuvem de pontos dos requerimentos de pressão e vazão do braço considerado, e curva vazão x pressão mínima da bomba hidráulica.

A análise mostrada nesta seção leva em consideração apenas os dois atuadores do braço. No caso do robô completo, os atuadores da base e do punho também devem ser levados em consideração, o que aumentará o requisito de vazão. Esta análise está fora do escopo deste trabalho, mas o método aqui proposto pode ser expandido facilmente para um número qualquer de atuadores.

## **6 RESULTADOS: ESTUDO DE CASO**

Neste capítulo são mostrados os resultados obtidos quando o método proposto neste trabalho é utilizado para encontrar os parâmetros ótimos para um braço manipulador hidráulico de 2 elos. Dois casos foram estudados, cada um composto por um determinado conjunto de dados que descreve uma tarefa ou conjunto de tarefas. O propósito destes estudos é exemplificar a utilização do método, através do estudo de casos representativos de situações que podem ser encontrados em uma planta industrial. O primeiro caso é apresentado na Seção 6.1, enquanto que o segundo caso é mostrado no Apêndice F.

A metodologia proposta neste trabalho foi implementada em um programa computacional desenvolvido no ambiente Matlab®. Assim, após o usuário informar os valores de entrada, o programa retorna os resultados de uma forma automática. Este programa não possui uma interface gráfica, sendo controlado por linhas de comando, mas gráficos como os mostrados na Figura 6.2 são impressos por ele.

Para cada otimização realizada, é informado o tempo necessário para a sua conclusão. O computador utilizado possui um processador Intel® Core i5™ 4690K, com quatro núcleos, 4.0 GHz de frequência, e 8 Gb de memória RAM.

### **6.1 Caso 1: robô para movimentação de objetos pesados entre linhas de fabricação**

#### **6.1.1 Definição do problema e dos valores nominais**

Neste exemplo, a metodologia proposta é aplicada para projetar um braço hidráulico para um robô que pode ser usado para movimentação e manipulação de objetos pesados. Este caso não é baseado em uma situação específica encontrado na indústria, sendo, ao invés, um caso genérico usado para demonstrar o funcionamento do método.

Um desenho conceitual deste braço é mostrado na Figura 6.1, sendo que a base é apenas ilustrativa. Como é possível verificar, este robô possui dois volumes de trabalho de interesse, com a intenção de que um seja para carga e outro para descarga, mas é possível considerar apenas um deles para realização dos cálculos, pois para que o segundo seja alcançado é necessário apenas rotacionar o braço em torno do eixo da base.

A primeira parte no desenvolvimento de um robô hidráulico, segundo o método proposto, consiste na análise do problema, isto é, das tarefas que o robô deve realizar. Isto resulta na definição do espaço de trabalho, velocidade, aceleração e capacidade de carga que o robô

deve apresentar. Esta análise depende de muitos fatores, e está fora do escopo deste trabalho. Neste caso, como o problema é fictício, estes valores são apenas informados, sendo os valores utilizados mostrados na Tabela 6.1.

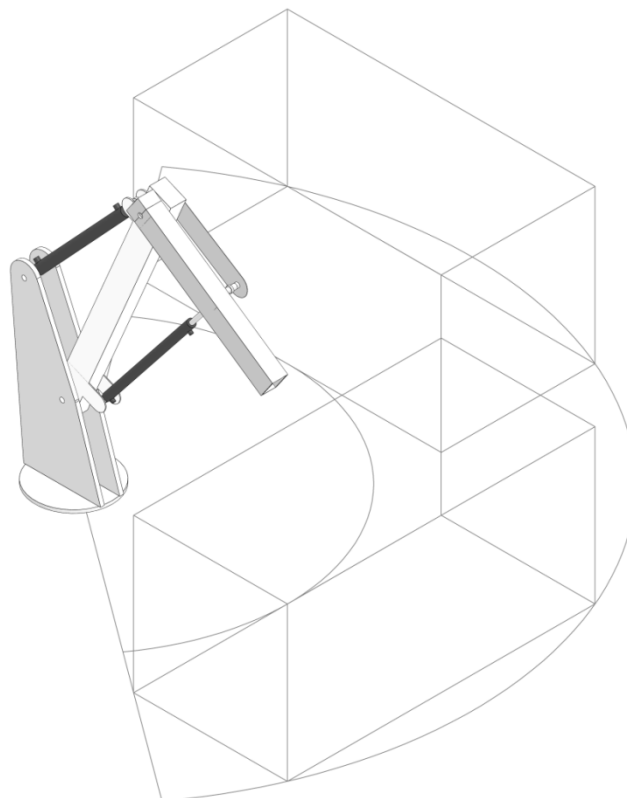


Figura 6.1 – Desenho tridimensional mostrando o conceito do braço utilizado, bem como o volume de trabalho desejado.

Tabela 6.1 – Características de desempenho que o robô deve possuir para o caso 1

Descrição	Variável	Valor
Volume de trabalho:		
Profundidade do volume de trabalho	$V_x$	1 m
Largura do volume de trabalho	$V_z$	2 m
Altura do volume de trabalho	$V_y$	1 m
Massa total da ferramenta e objeto	$m_{end}$	40 kg
Offset da ferramenta e objeto	$d_{end}$	0,3 m
Momento de inércia de massa da ferramenta e objeto	$I_{end}$	5 kg.m <sup>2</sup>
Velocidade nominal da extremidade do braço	$V_{max}$	2 m/s
Aceleração nominal da extremidade do braço	$A_{max}$	5 m/s <sup>2</sup>
Flecha máxima aceitável	$ \vec{u} _{projeto}$	0,5 mm
Pesos dos valores estatísticos, para a otimização cinemática	$P_\alpha$	[1 -1 -0,1 -0,1]
Pesos dos índices de desempenho, para a otimização cinemática	$P_\beta$	[-0,1 -0,1 1 1]
Peso do custo de fabricação, para a otimização cinemática	$P_c$	1

Na Tabela 6.2 estão apresentados os parâmetros de entrada que devem ser definidos pelo projetista, considerando fatores específicos da aplicação a que o braço se destina. Além desses fatores “locais”, estes parâmetros dependem também de decisões do projetista, baseadas no seu conhecimento e experiência profissional.

Tabela 6.2 – Parâmetros de entrada usados para o caso 1

Descrição	Variável	Valor	Notas
Disposição do Atuador 1	$Ori_1$	Externo	
Disposição do Atuador 2	$Ori_2$	Interno	
Densidade do material	$\rho$	7800 kg/m <sup>3</sup>	
Módulo de Young do material	E	210 GPa	Aço
Coefficiente de Poisson do material	$\nu$	0,3	
Primeiro ponto de fixação do Atuador 1	$B_1$	$\begin{bmatrix} -0,15\text{m} & 1 & 0 \\ 0,12\text{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	um pouco antes da extremidade do Elo 1
Primeiro ponto de fixação do Atuador 2	$A_2$	$\begin{bmatrix} 0,15\text{m} & 0 & 0 \\ -0,16\text{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	um pouco após o começo do Elo 2
Reforço da Junta 1	$w_{ref_1}$	0,08 m	$d_{luva_1}$ 0,05 m
	$tb_{ref_1}$	0,003 m	$d_{pin_1}$ 0,03 m
Reforço $A_2$	$w_{A_2}$	0,10 m	
	$tb_{A_2}$	0,004 m	
Reforço $B_1$	$w_{B_1}$	0,10 m	
	$tb_{B_1}$	0,007 m	
Reforço da Junta 2 no Elo 1	$w_{ref_{2_1}}$	0,08 m	$d_{luva_{2_1}}$ 0,05 m
	$tb_{ref_{2_1}}$	0,006 m	$d_{pin_{2_1}}$ 0,03 m
Reforço da Junta 2 no Elo 2	$w_{ref_{2_2}}$	0,08 m	$d_{luva_{2_2}}$ 0,05 m
	$tb_{ref_{2_2}}$	0,003 m	$d_{pin_{2_2}}$ 0,03 m
Reforço $B_2$	$w_{B_2}$	0,10 m	
	$tb_{B_2}$	0,008 m	
Reforço da ponta do Elo 2	$w_{ref_{end}}$	0,05 m	
Largura da viga Elo 1	$b_1$	0,1 m	
Largura da viga Elo 2	$b_2$	0,1 m	
Offset entre os elos	$d_{off}$	0,1 m	
Tamanho dos elementos	$e_{length}$	0,01 m	

Para realizar a otimização estrutural, é necessário definir os limites para os valores a serem otimizados. A Tabela 6.3 mostra os limites adotados, escolhidos arbitrariamente, com exceção dos valores máximos para  $H_{A_2}$  e  $H_{B_1}$  e o valor mínimo de  $H_{B_2}$ , os quais foram escolhidos para que os pontos  $A_2$  e  $B_1$  estejam obrigatoriamente fora da viga do Elo 1, sendo utilizado garfos para fixação, e o ponto  $B_2$  dentro da viga do Elo 2, sendo utilizado um pino lateral. Ambos os atuadores operam sobre o plano do Elo 1, mas não possuem risco de colisão pois estão em lados opostos do elo. Também é necessário escolher os valores iniciais para a otimização, sendo que, no caso, foram usadas as médias dos limites de cada parâmetro.

Tabela 6.3 – Limites para os parâmetros da otimização estrutural

Parâmetro	Variável	Valor mínimo	Valor máximo
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,060 m	0,300 m
	$H_{A_2}$	0,060 m	0,290 m
	$H_{B_1}$	0,060 m	0,210 m
	$H_{J_{2_1}}$	0,060 m	0,300 m
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,060 m	0,300 m
	$H_{B_2}$	0,119 m	0,300 m
	$H_{ponta}$	0,060 m	0,300 m
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,0010 m	0,0050 m
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,0010 m	0,0050 m

Por último, é necessário definir os parâmetros dos atuadores. Apesar de os atuadores indicados para uso com o braço serem definidos no final do procedimento, como a metodologia proposta depende destes parâmetros em uma etapa anterior, é necessário usar estimativas iniciais. Os valores utilizados são apresentados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Valores iniciais assumidos para os atuadores

Parâmetro	Variável	Atuador 1	Atuador 2
Comprimento morto	$D_{li}$	0,15 m	0,15 m
Massa do cilindro do atuador $i$	$m_{i_{cil}}$	10 kg	10 kg
Massa da haste do atuador $i$	$m_{i_{haste}}$	8 kg	8 kg
CG do cilindro do atuador $i$	$CG_{i_{cil}}$	0,6 m	0,6 m
CG da haste do atuador $i$	$CG_{i_{haste}}$	0,5 m	0,5 m
Momento de inércia do cilindro do atuador $i$	$I_{i_{cil}}$	3 kg.m <sup>2</sup>	3 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia da haste do atuador $i$	$I_{i_{haste}}$	2 kg.m <sup>2</sup>	2 kg.m <sup>2</sup>

### 6.1.2 Resultado da definição dos parâmetros cinemáticos

Através do procedimento de otimização apresentado na Seção 3.2.3, os cursos angulares ideais para as juntas foram calculados. Um gráfico do  $GPI_r$  em função destes cursos é mostrado na Figura 6.2, onde também é mostrado o ponto ótimo encontrado, em  $\psi_1 = 1,175$  rad e  $\psi_2 = 1,533$  rad. A região branca da figura demarca configurações impossíveis para o braço. Foram necessários 10,9 segundos para a computação desta otimização.

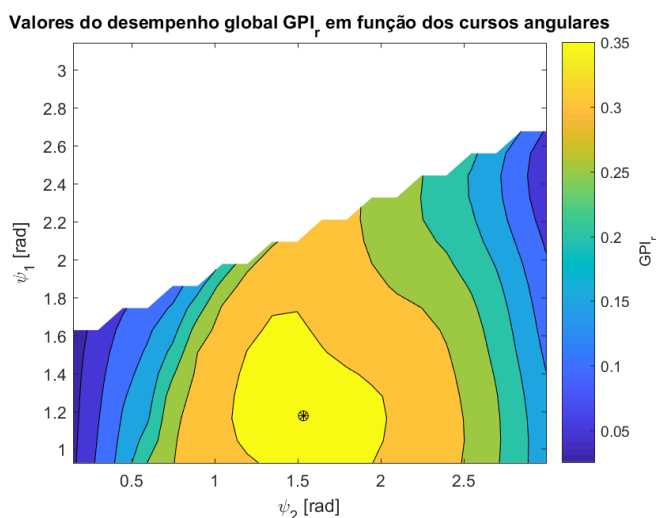


Figura 6.2 – Gráfico do  $GPI_r$  em função dos cursos angulares das juntas

Usando as Equações 3.24 e 3.25 com os valores dos cursos angulares ideais, foram calculados os valores para os comprimentos dos elos,  $a_1 = 1,41146$  m e  $a_2 = 0,99731$  m. Estes valores foram então truncados para  $a_1 = 1,411$  m e  $a_2 = 0,997$  m, o que modificou os cursos angulares para  $\psi_1 = 1,175$  rad e  $\psi_2 = 1,534$  rad. Com a Equação 3.23 foi possível calcular o valor  $Lmin' = 0,7511$  m. Com isso, foi possível calcular os valores de  $Lmin$  e  $Vx'$  usando as Equações 3.22 e 3.21, respectivamente, encontrando-se  $Lmin = 0,7577$  m e  $Vx' = 1,2686$  m. Estes resultados podem ser visualizados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Resultados da definição dos parâmetros cinemáticos na primeira iteração

Parâmetro	Variável	Valor
Comprimento do Elo 1	$a_1$	1,411 m
Comprimento do Elo 2	$a_2$	0,997 m
Curso angular da Junta 1	$\psi_1$	1,175 rad
Curso angular da Junta 2	$\psi_2$	1,534 rad
Distância entre a Junta 1 e o começo da área de trabalho	$Lmin'$	0,7511 m
Largura da área de trabalho	$Vx'$	1,2686 m
Distância entre a Junta 1 e o começo do volume de trabalho	$Lmin$	0,7577 m



### 6.1.3 Resultado da definição do curso e pontos de fixação dos atuadores

Após a definição dos parâmetros cinemáticos do braço, tanto os pontos de fixação dos atuadores, quanto seus comprimentos mínimos e máximos, foram definidos segundo a metodologia descrita na Seção 3.2.2. Os resultados são mostrados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Resultados da definição dos parâmetros dos atuadores na primeira iteração

Parâmetro	Variável	Valor
Ponto de fixação A do Atuador 1	$A_1$	$[-0,272 \quad 0,543]^T$ m
Ponto de fixação B do Atuador 1	$B_1$	$[1,261 \quad 0,120]^T$ m
Ponto de fixação A do Atuador 2	$A_2$	$[0,150 \quad -0,160]^T$ m
Ponto de fixação B do Atuador 2	$B_2$	$[0,509 \quad 0,052]^T$ m
Comprimento mínimo do Atuador 1	$P_{1min}$	0,825 m
Comprimento máximo do Atuador 1	$P_{1max}$	1,499 m
Comprimento mínimo do Atuador 2	$P_{2min}$	0,861 m
Comprimento máximo do Atuador 2	$P_{2max}$	1,572 m

### 6.1.4 Resultado da otimização estrutural

Para que a otimização estrutural fosse concluída, foram necessárias 327 iterações, o que levou 1031,8 segundos. A Figura 6.3 mostra os valores da função objetivo ao longo das iterações. Após a iteração de número 190 a otimização foi considerada com convergência satisfatória. O valor inicial para a função objetivo foi de 5739,52, e o valor final foi de 4831,88, caracterizando uma melhoria de 15,8%. Os parâmetros otimizados são mostrados na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Valores otimizados para os parâmetros

Parâmetro	Variável	Valor
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,208 m
	$H_{A_2}$	0,290 m
	$H_{B_1}$	0,202 m
	$H_{J_{21}}$	0,086 m
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{22}}$	0,089 m
	$H_{B_2}$	0,197 m
	$H_{ponta}$	0,070 m
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,0011 m
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,0010 m

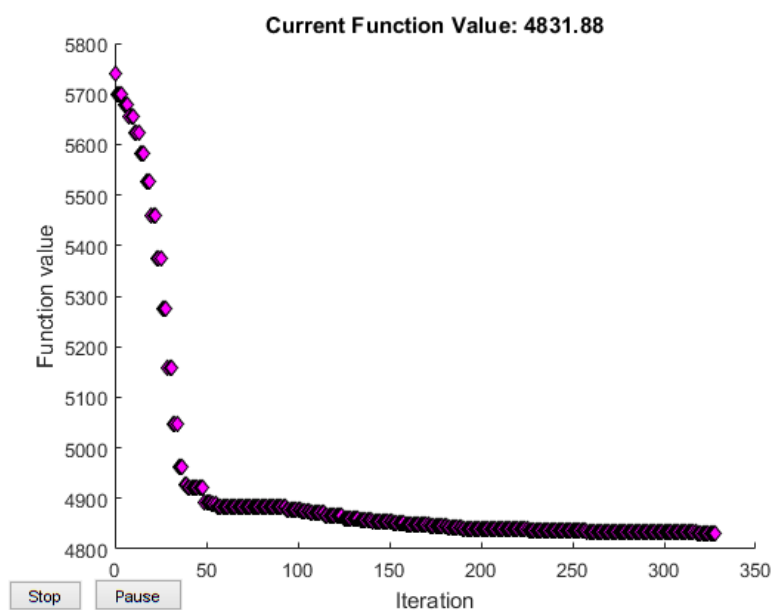


Figura 6.3 – Gráfico mostrando o valor da função objetivo ao longo das iterações da otimização estrutural

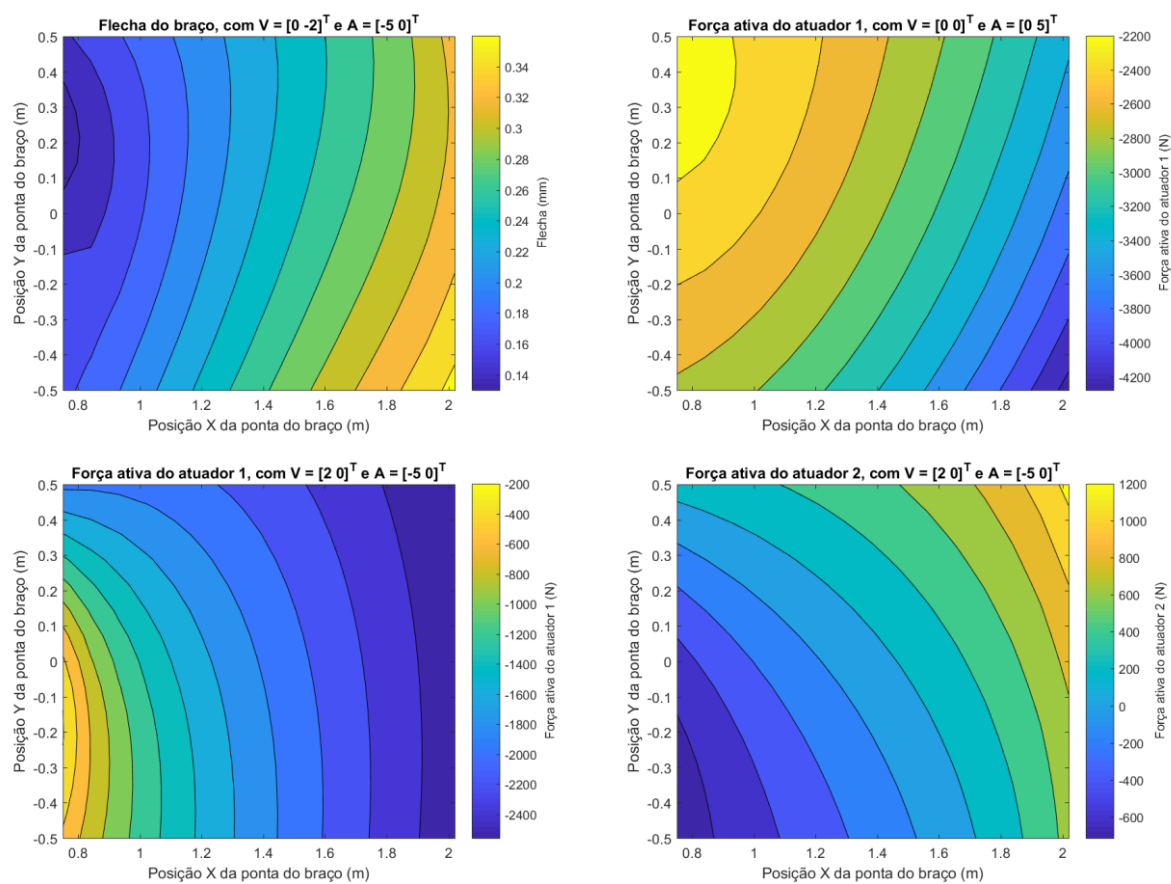


Figura 6.4 – Exemplos dos casos de carregamento analisados

Neste caso, foram considerados 20 casos de carregamento e apenas 8 pontos de análise, como descrito na Seção 4.4.2. Após a otimização, no entanto, foram analisados 225 pontos

sobre a área de trabalho, formando 60 gráficos devido aos 20 casos e 3 grandezas calculadas, dos quais quatro são mostrados na Figura 6.4. Analisando estes gráficos foi possível constatar que os pontos extremos ocorrem próximos aos cantos da área de trabalho, que são os pontos utilizados durante a otimização. Como descrito na Seção 4.4.2, esta é uma condição necessária para que a otimização seja válida.

### 6.1.5 Escolha dos atuadores

Conforme descrito na Seção 5.1, primeiramente foram calculadas as forças máximas que os atuadores devem aplicar em cada direção. Para tanto, foram considerados 225 pontos calculados sobre a área de trabalho e 20 casos de carregamento, sendo os maiores valores encontrados registrados na Tabela 6.8. Nas análises dinâmica e estrutural não há diferença conceitual entre forças de retração e extensão, pois as equações lineares utilizadas permitem o uso de forças com valor negativo, como pode ser observado na Figura 6.4. Para a escolha dos atuadores, no entanto, existe uma diferença devido às áreas efetivas do êmbolo, como descrito na Seção 5.1. Assim, uma força com valor negativo calculada pela análise dinâmica é considerada uma força de retração, enquanto que uma força com valor positivo é considerada uma força de extensão.

Tabela 6.8 – Máximas forças aplicadas pelos atuadores calculadas nos pontos e casos considerados

Parâmetro	Variável	Valor
Máxima força de extensão do Atuador 1	$Fl_{1ext}$	481,7 N
Máxima força de retração do Atuador 1	$Fl_{1ret}$	4274,5 N
Máxima força de extensão do Atuador 2	$Fl_{2ext}$	2245,5 N
Máxima força de retração do Atuador 2	$Fl_{2ret}$	871,4 N

Foi então utilizada a metodologia descrita na Seção 5.3 para a escolha dos diâmetros dos êmbolos e das hastes dos atuadores. Para tanto, utilizou-se o catálogo HY08-1320-3/NA da Parker®. Foram escolhidos arbitrariamente atuadores com finalizações tipo SB, ou rolamentos de esfera, sendo que o tipo SBM também poderia ser utilizado. Para os selamentos o tipo padrão S foi escolhido, com a alternativa sendo selamentos de baixo atrito, tipo F. Geralmente, os atuadores com baixo atrito são mais indicados, porém também são mais caros, sendo que a escolha vai depender das tarefas que o robô deve desempenhar e do custo máximo do braço.

A pressão de trabalho máxima,  $\Delta P_{pump_{max}}$ , foi escolhida como sendo 4000 psi, ou 27,58 MPa. Os resultados são apresentados na Tabela 6.9. É possível observar que a pressão máxima necessária para estes atuadores é significativamente menor do que a pressão de trabalho escolhida; isto se deve ao fato de que os atuadores com diâmetros menores disponíveis não seriam capazes de suportar a força necessária para operação do braço sem que a haste flambasse.

Tabela 6.9 – Parâmetros da escolha dos diâmetros dos êmbolos e das hastes dos atuadores

Parâmetro	Variável	Valor	
		Atuador 1	Atuador 2
Comprimento básico	$L_{basico}$	1,499 m	1,572 m
Comprimento do tubo de parada	$L_{tubo}$	50,8 mm	76,2 mm
Comprimento ajustado	$L_{ajustado}$	1,500 m	1,648 m
Diâmetro do êmbolo	$d_{ei}$	50,8 mm	38,1 mm
Diâmetro da haste	$d_{hi}$	25,4 mm	25,4 mm
Pressão máxima suportada	$\Delta P_{a_{max_i}}$	4,36 MPa	6,22 MPa
Pressão máxima necessária	$\Delta P_{atuador_i}$	3.40 MPa	2.52 MPa

Os comprimentos mortos destes atuadores são  $D'_{l1} = 0,2540$  m e  $D'_{l2} = 0,2347$  m, respectivamente, incluindo o comprimento do tubo de parada. Como estes comprimentos são maiores do que os assumidos inicialmente na Seção 6.1.1, estes atuadores não podem ser utilizados com a configuração do braço atual, conforme o exposto no final da Seção 5.3. Assim, a análise deve ser refeita usando os valores dos atuadores calculados. Antes disto, é necessário também calcular os parâmetros inerciais, o curso e o comprimento morto dos atuadores.

O catálogo informa a massa dos atuadores como uma massa base,  $m_{ai_{basica}}$ , referente ao comprimento morto, e uma massa por comprimento,  $m_{ai_{curso}}$ , que deve ser multiplicada pelo curso. A Equação 5.11 não pode ser usada para calcular o curso, pois o comprimento morto dos atuadores físicos é maior do que o assumido, sendo então usada a diferença entre  $P_{imax}$  e  $P_{imin}$ . Deve-se também somar o comprimento do tubo de parada, calculando um curso bruto, como indicado pelo fabricante. A Tabela 6.10 mostra as massas totais dos atuadores, bem como os valores usados para o seu cálculo.

Para obtenção dos valores da massa, momento de inércia e centro de gravidade dos cilindros e das hastes dos atuadores, foi utilizada a metodologia descrita na Seção 5.4. A

Tabela 6.11 mostra os resultados obtidos, bem como alguns valores intermediários. Estes valores devem então ser usados como entrada para a próxima iteração do método.

Tabela 6.10 – Parâmetros usados para o cálculo da massa total dos atuadores, e resultado.

Parâmetro	Variável	Valor	
		Atuador 1	Atuador 2
Curso (com o tubo de parada)	$C'_{ib}$	0,724 m	0,786 m
Massa básica	$m_{ai_{basica}}$	2,99 kg	1,63 kg
Massa por comprimento do curso	$m_{ai_{curso}}$	10,54 kg/m	8,93 kg/m
Massa total do atuador	$m_{i_{total}}$	10,62 kg	8,79 kg

Tabela 6.11 – Resultados para a massa, centro de gravidade e momento de inércia para o cilindro e para a haste dos atuadores, bem como os parâmetros usados para os cálculos.

Parâmetro	Variável	Valor	
		Atuador 1	Atuador 2
Massa estimada para o cilindro	$m_{i_{cil}}$	6,81 kg	5,10 kg
Comprimento externo do cilindro	$L_{ai_{cil}}$	0,878 m	0,905 m
Espessura da parede do cilindro aproximado	$t_{ai_{cil}}$	5,48 mm	5,21 mm
Centro de gravidade estimado para o cilindro	$CG_{i_{cil}}$	0,439 m	0,453 m
Momento de inércia estimado para o cilindro	$I_{i_{cil}}$	0,462 kg.m <sup>2</sup>	0,362 kg.m <sup>2</sup>
Massa estimada para a haste	$m_{i_{haste}}$	3,81 kg	3,69 kg
Parte da haste que permanece sempre fora do cilindro	$L_{haste_w}$	0,049 m	0,039 m
Centro de gravidade estimado para a haste	$CG_{i_{haste}}$	0,417 m	0,437 m
Momento de inércia estimado para a haste	$I_{i_{haste}}$	0,221 kg.m <sup>2</sup>	0,235 kg.m <sup>2</sup>

### 6.1.6 Iteração 2 – novos valores de entrada para os dados dos atuadores

No início da segunda iteração os parâmetros dos atuadores utilizados são mostrados na Tabela 6.12. Os valores são baseados naqueles apresentados na Tabela 6.11, porém truncados. Os comprimentos mortos, em especial, foram ajustados para cima, pois não ocorre problema se o comprimento  $D_{li}$  assumido for maior do que o valor  $D'_{li}$  encontrado no final da análise (há problema apenas se ele for menor, como descrito na Seção 5.3).

Com esta iteração, a análise ainda não pode ser considerada terminada, pois o comprimento morto final do Atuador 1 foi de 0,279 m, maior do que o valor de 0,26 m utilizado como valor de entrada. Isto ocorreu porque o tubo de parada do Atuador 1 especificado nesta iteração foi de 76,2 mm ao invés do valor de 50,8 mm encontrado na iteração anterior. Os diâmetros permaneceram os mesmos. Os valores encontrados para os

atuadores nesta iteração são mostrados na Tabela 6.13 (os demais resultados desta iteração foram omitidos visando a simplificar a apresentação).

Tabela 6.12 – Valores dos parâmetros dos atuadores no início da segunda iteração do método

Descrição	Variável	Atuador 1	Atuador 2
Comprimento morto	$D_{li}$	0,26 m	0,24 m
Massa do cilindro do atuador $i$	$m_{i_{cil}}$	6,8 kg	5,1 kg
Massa da haste do atuador $i$	$m_{i_{haste}}$	3,8 kg	3,7 kg
CG do cilindro do atuador $i$	$CG_{i_{cil}}$	0,44 m	0,45 m
CG da haste do atuador $i$	$CG_{i_{haste}}$	0,42 m	0,44 m
Momento de inércia do cilindro do atuador $i$	$I_{i_{cil}}$	0,46 kg.m <sup>2</sup>	0,36 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia da haste do atuador $i$	$I_{i_{haste}}$	0,22 kg.m <sup>2</sup>	0,24 kg.m <sup>2</sup>

Tabela 6.13 – Parâmetros dos atuadores especificados pelo método no final da segunda iteração

Descrição	Variável	Atuador 1	Atuador 2
Comprimento morto	$D'_{li}$	0,2794 m	0,2347 m
Massa estimada para o cilindro	$m_{i_{cil}}$	6,76 kg	5,06 kg
Massa estimada para a haste	$m_{i_{haste}}$	3,78 kg	3,65 kg
Centro de gravidade estimado para o cilindro	$CG_{i_{cil}}$	0,436 m	0,448 m
Centro de gravidade estimado para a haste	$CG_{i_{haste}}$	0,414 m	0,432 m
Momento de inércia estimado para o cilindro	$I_{i_{cil}}$	0,452 kg.m <sup>2</sup>	0,352 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia estimado para a haste	$I_{i_{haste}}$	0,216 kg.m <sup>2</sup>	0,228 kg.m <sup>2</sup>

### 6.1.7 Iteração 3 – atuadores com os valores finais

Os valores utilizados para os parâmetros dos atuadores na terceira iteração são os mostrados na Tabela 6.13, porém truncados da mesma forma que a mencionada na segunda iteração.

Primeiramente, a otimização cinemática resultou em um ponto ótimo em  $\psi_1 = 1,081$  rad e  $\psi_2 = 1,502$  rad após um tempo de computação de 13,9 segundos. A Figura 6.5 mostra os diferentes valores do  $GPI_r$  em função dos cursos angulares das juntas, para o caso analisado, bem como o ponto ótimo mencionado. Isto resultou em um braço com os parâmetros cinemáticos mostrados na Tabela 6.14, com os comprimentos já truncados para o valor inteiro em milímetros mais próximo. Os pontos de fixação dos atuadores foram calculados para esta configuração do braço, sendo mostrados na Tabela 6.15.

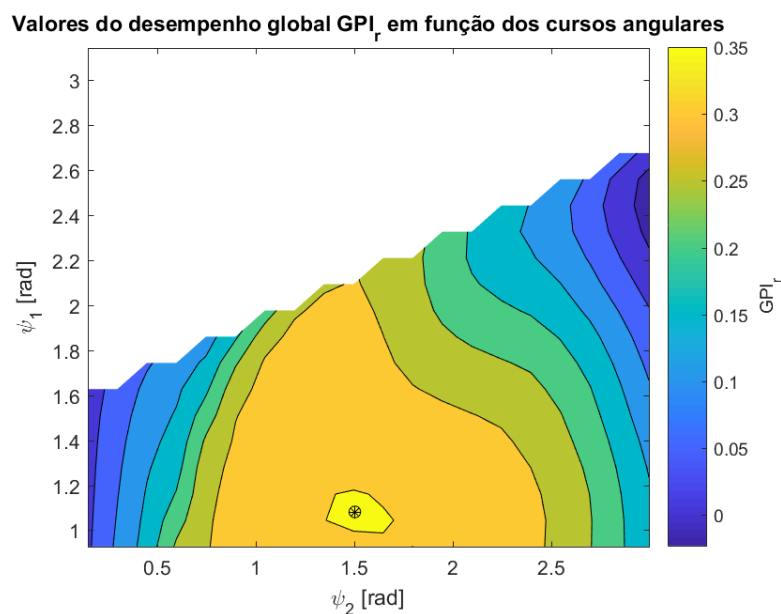


Figura 6.5 - Gráfico do  $GPI_r$  em função dos cursos angulares das juntas, para a terceira iteração.

Tabela 6.14 - Resultados da definição dos parâmetros cinemáticos na terceira iteração

Parâmetro	Variável	Valor
Comprimento do Elo 1	$a_1$	1,488 m
Comprimento do Elo 2	$a_2$	1,000 m
Curso angular da Junta 1	$\psi_1$	1,081 rad
Curso angular da Junta 2	$\psi_2$	1,503 rad
Distância entre a Junta 1 e o começo da área de trabalho	$L_{min}'$	0,8332 m
Largura da área de trabalho	$Vx'$	1,2579 m
Distância entre a Junta 1 e o começo do volume de trabalho	$L_{min}$	0,8392 m

Tabela 6.15 – Resultados da definição dos parâmetros dos atuadores na terceira iteração

Parâmetro	Variável	Valor
Ponto de fixação A do Atuador 1	$A_1$	$[-0,247 \ 0,565]^T m$
Ponto de fixação B do Atuador 1	$B_1$	$[1,338 \ 0,120]^T m$
Ponto de fixação A do Atuador 2	$A_2$	$[0,150 \ -0,160]^T m$
Ponto de fixação B do Atuador 2	$B_2$	$[0,511 \ 0,049]^T m$
Comprimento mínimo do Atuador 1	$P_{1min}$	0,917 m
Comprimento máximo do Atuador 1	$P_{1max}$	1,552 m
Comprimento mínimo do Atuador 2	$P_{2min}$	0,943 m
Comprimento máximo do Atuador 2	$P_{2max}$	1,645 m

A otimização estrutural foi então realizada, precisando de 1288 segundos para completar. A Figura 6.6 mostra o comportamento da função objetivo ao longo das iterações da

otimização, enquanto que os resultados são mostrados na Tabela 6.16. Para verificar que as posições de máximo esforço do braço ocorrem sobre ou próximos aos 8 pontos considerados durante a otimização, todos os 60 gráficos gerados pelo método foram analisados, como já mencionado na Seção 6.1.4, sendo essa hipótese novamente confirmada. A Figura 6.7 mostra quatro destes gráficos, exemplificando o que foi verificado em todo o conjunto. As propriedades inerciais dos elos deste braço são mostradas na Tabela 6.17.

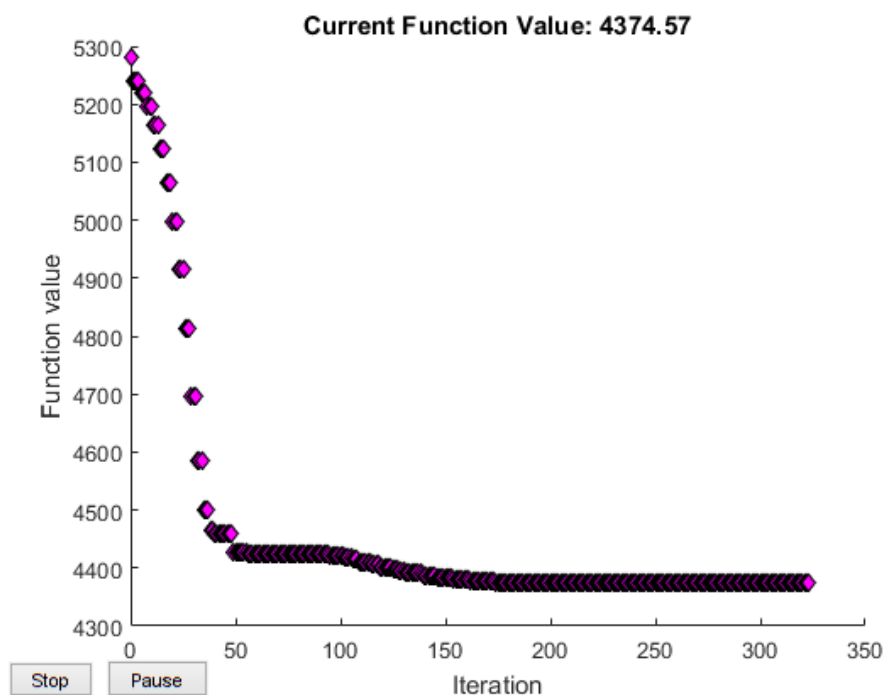


Figura 6.6 – Gráfico mostrando o valor da função objetivo ao longo das iterações da otimização estrutural para a terceira iteração do caso 1

Tabela 6.16 – Valores otimizados para os parâmetros de altura das vigas dos elos, para a terceira iteração do caso 1.

Parâmetro	Variável	Valor
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,252 m
	$H_{A_2}$	0,289 m
	$H_{B_1}$	0,203 m
	$H_{J_{2_1}}$	0,099 m
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,087 m
	$H_{B_2}$	0,209 m
	$H_{ponta}$	0,064 m
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,0010 m
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,0010 m



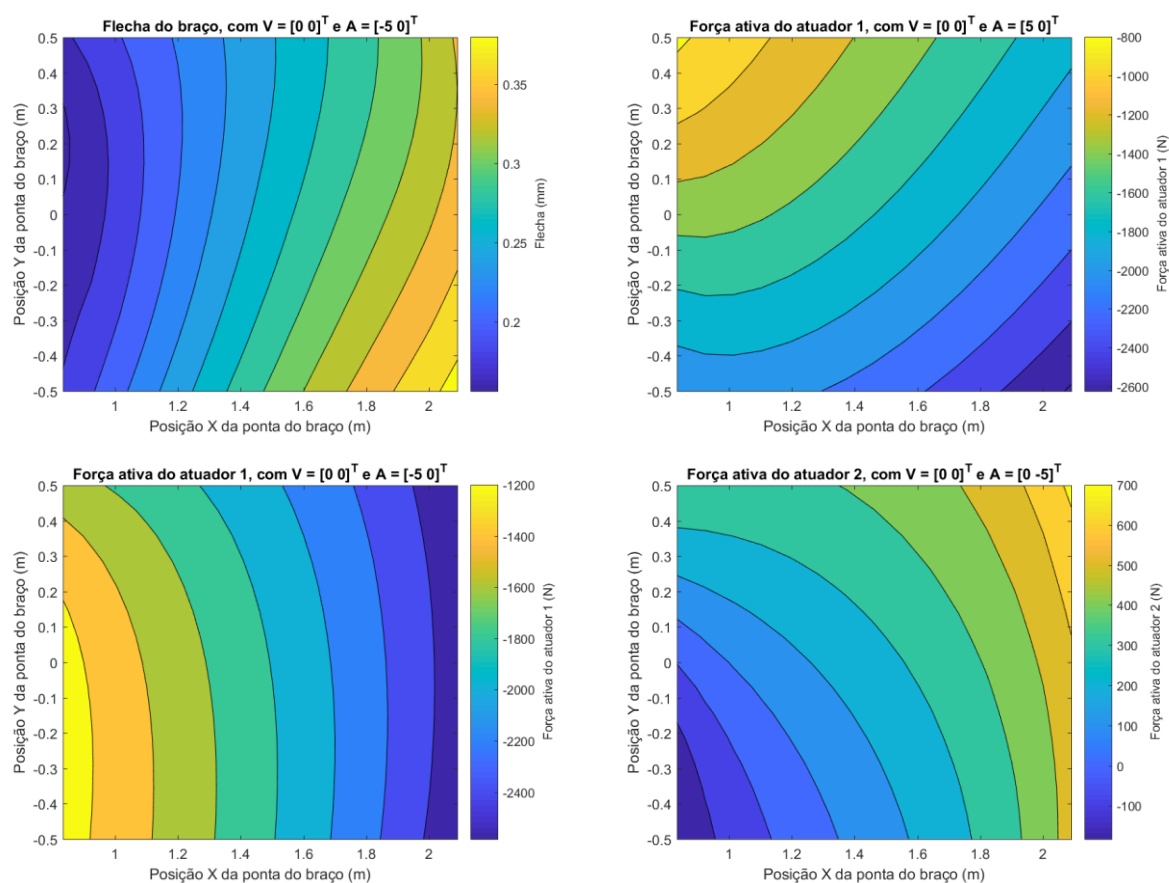


Figura 6.7 – Exemplos dos casos de carregamento analisados

Tabela 6.17 – Parâmetros inerciais dos elos do braço final para o caso 1

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
CG do elo $i$	$cg_i$	0,705 m	0,41 m
Massa do elo $i$	$m_i$	19,22 kg	9,89 kg
Momento de inércia do elo $i$	$I_i$	6,71 kg.m <sup>2</sup>	0,807 kg.m <sup>2</sup>

Para a especificação dos atuadores, foram primeiramente calculadas as máximas forças que eles precisam aplicar, sendo os resultados mostrados na Tabela 6.18. Com isso, foram especificados os atuadores ideais com o catálogo HY08-1320-3/NA, usando terminações tipo SB e selamento padrão tipo S, cujos parâmetros são mostrados na Tabela 6.19.

Tabela 6.18 – Máximas forças aplicadas pelos atuadores

Parâmetro	Variável	Valor
Máxima força de extensão do Atuador 1	$Fl_{1ext}$	120,2 N
Máxima força de retração do Atuador 1	$Fl_{1ret}$	3827,6 N
Máxima força de extensão do Atuador 2	$Fl_{2ext}$	2110,4 N
Máxima força de retração do Atuador 2	$Fl_{2ret}$	802,8 N

Tabela 6.19 – Parâmetros dos atuadores especificados para a configuração do braço da terceira iteração do caso 1

Parâmetro	Variável	Valor	
		Atuador 1	Atuador 2
Comprimento morto	$D'_{li}$	0,2794 m	0,2347 m
Comprimento do tubo de parada	$L_{tubo}$	76,2 mm	76,2 mm
Diâmetro do êmbolo	$d_{ei}$	50,8 mm	38,1 mm
Diâmetro da haste	$d_{hi}$	25,4 mm	25,4 mm
Pressão máxima suportada	$\Delta P_{a\ max\ i}$	3,79 MPa	5,83 MPa
Pressão máxima necessária	$\Delta P_{atuador\ i}$	3,08 MPa	2,38 MPa
Curso bruto (com o tubo de parada)	$C'_{ib}$	0,7132 m	0,7822 m
Curso líquido (sem o tubo de parada)	$C_i$	0,637 m	0,706 m
Massa total do atuador	$m_{i\ total}$	10,51 kg	8,75 kg
Massa estimada para o cilindro	$m_{i\ cil}$	6,74 kg	5,08 kg
Massa estimada para a haste	$m_{i\ haste}$	3,77 kg	3,67 kg
Centro de gravidade estimado para o cilindro	$CG_{i\ cil}$	0,433 m	0,451 m
Centro de gravidade estimado para a haste	$CG_{i\ haste}$	0,412 m	0,435 m
Momento de inércia estimado para o cilindro	$I_{i\ cil}$	0,446 kg.m <sup>2</sup>	0,357 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia estimado para a haste	$I_{i\ haste}$	0,213 kg.m <sup>2</sup>	0,231 kg.m <sup>2</sup>

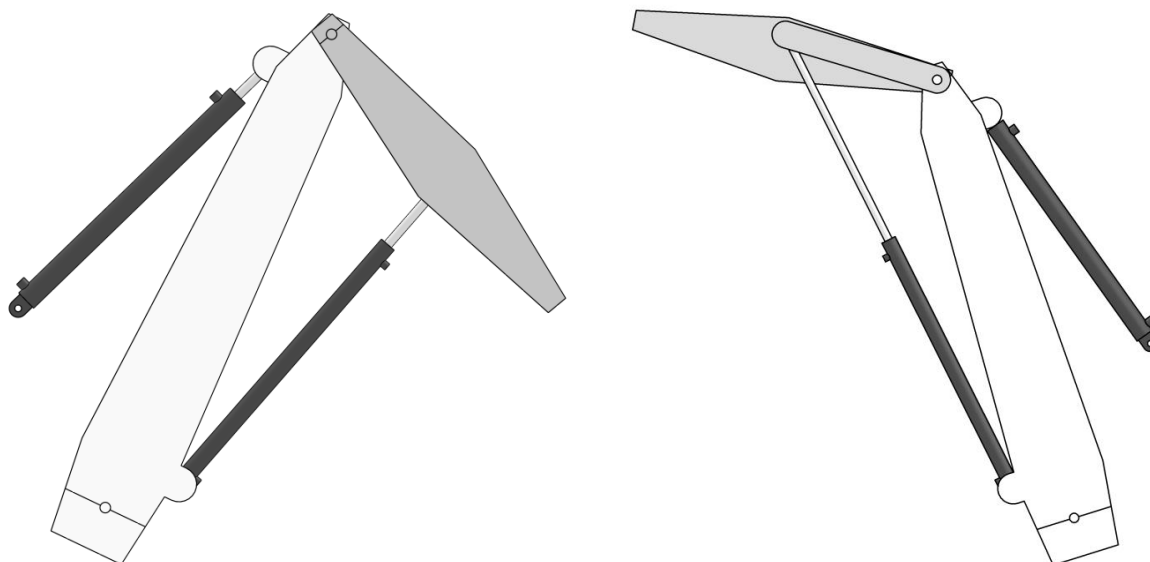


Figura 6.8 – Desenhos esquemáticos mostrando o braço final especificado para o caso 1, em duas poses diferentes.

Como os comprimentos mortos destes atuadores são menores do que os assumidos no começo desta terceira iteração, estes atuadores mostraram-se adequados para utilização.

Foram então determinados os códigos de pedido destes atuadores: “2SBRDHBTS17A28.08” para o Atuador 1, e “1.5SBRDHBTS29A30.80” para o Atuador 2, com uma nota especificando um tubo de parada de três polegadas para cada atuador. Desta forma o braço, que pode ser visto na Figura 6.8, está completamente especificado.

### 6.1.8 Especificação da unidade de potência hidráulica

Com os atuadores especificados, é possível obter a curva pressão *versus* vazão que a bomba hidráulica do sistema deve ter, como descrito na Seção 5.5. A curva obtida para o braço da terceira iteração é mostrada na Figura 6.9. Como é possível verificar, a vazão máxima da bomba deve ser de pelo menos 3,15 litros por segundo, ou 50 GPM, e a pressão máxima deve ser de pelo menos 3,1 MPa, ou 450 psi. A bomba de pistões da Parker® modelo PAVC65, com pressão de 21 MPa e vazão de 3,3 L/s, poderia ser utilizada, por exemplo.

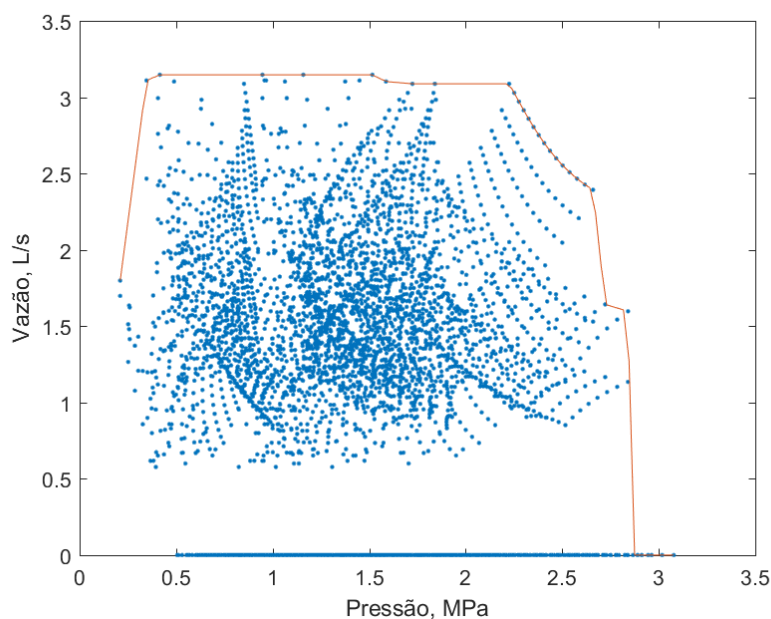


Figura 6.9 – Nuvem de pontos dos requerimentos de pressão e vazão do braço da terceira iteração do caso 1, e curva vazão x pressão mínima da bomba hidráulica.

### 6.1.9 Gráfico do erro de posicionamento

O braço especificado possui um erro de posicionamento máximo estimado de 4,87mm dentro da área de trabalho de interesse, com a distribuição mostrada na Figura 6.10. Este gráfico foi elaborado de acordo com os procedimentos apresentados na Seção 3.3. Foi assumido um valor de 1mm para os erros de posição dos atuadores  $A_{ep_1}$  e  $A_{ep_2}$ . Caso o erro

dos atuadores for menor, então o erro final da extremidade do braço também será proporcionalmente menor.

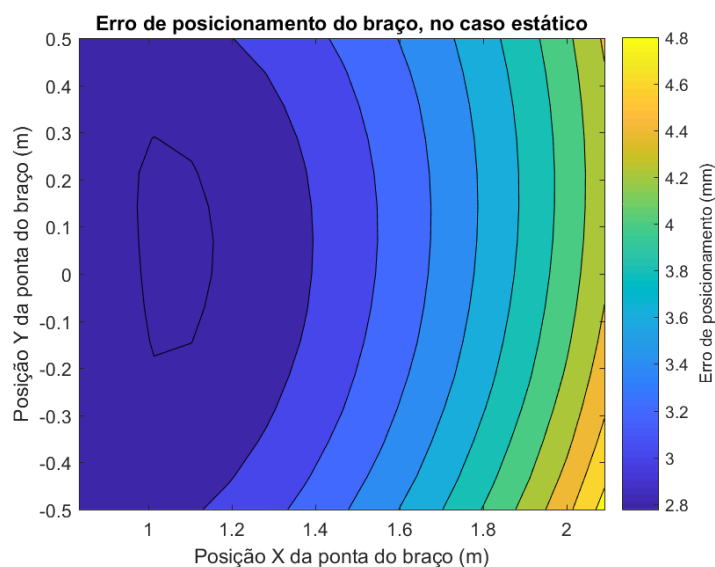


Figura 6.10 – Gráfico do erro de posicionamento da extremidade do braço projetado para o caso 1 em função da sua posição

## 6.2 Discussão

No caso analisado, o método resultou em um braço de aproximadamente 2,5 m, o que é esperado para um mecanismo que deve alcançar pelo menos uma região de 1 m x 2 m x 1 m. O braço possui uma massa total de aproximadamente 48 kg, já contando com os atuadores, e sua capacidade nominal é de 40 kg. A relação capacidade/massa deste braço é de 0,83, mostrando-se significativamente superior aos valores típicos de 0,3 a 0,4 dos robôs elétricos convencionais, segundo Rivin, 1987. Esta relação demonstra uma vantagem dos robôs hidráulicos, e a capacidade do método em especificar um braço. Máquinas mais modernas, como o robô elétrico Kuka® LWR, podem alcançar relações até maiores do que 1:1, mas os fabricantes não oferecem maiores informações sobre os mesmos.

Os atuadores especificados para o braço requerem uma pressão relativamente baixa, muito inferior às pressões máximas da maioria das bombas hidráulicas industriais. Isto se deve ao fato de que a haste dos atuadores precisa ter um diâmetro elevado para não sofrer flambagem, o que leva a um diâmetro elevado para o êmbolo. Os atuadores especificados são os de menor diâmetro dentre os que podem ser utilizados. De qualquer forma, estas bombas de alta pressão especificadas podem ser utilizadas como unidade de potência hidráulica do braço.

A especificação mostrada para a bomba hidráulica não leva em consideração a perda de carga das servoválvulas e das canalizações, e nem outros atuadores do robô. Assim, a pressão

da bomba utilizada deve ser maior do que os valores definidos. Foram calculados apenas a pressão e vazão que a bomba hidráulica deve ter, existindo outras características que devem ser definidas, como temperatura de trabalho, tipo de controle de pressão e modelo do motor elétrico usado para atuar a bomba. Assim como ocorre com as outras características do sistema hidráulico, estas definições estão fora do escopo deste trabalho.

O erro de posicionamento encontrado para o braço é relativamente alto para robôs antropomórficos, mas depende principalmente do erro dos atuadores. Se for possível controlá-los com uma maior precisão, isto é, com um erro de posicionamento inferior a 1mm, então o erro de posicionamento do braço pode ser diminuído.

## 7 CONCLUSÃO

O trabalho aborda o desenvolvimento de uma metodologia para a determinação de parâmetros de projeto de uma classe de robôs industriais hidráulicos com atuadores lineares diretamente acoplados aos elos. Baseado nos resultados apresentados no presente documento, é possível concluir que o método proposto neste trabalho é capaz de determinar vários dos parâmetros construtivos do braço, tendo, assim, atingido o objetivo principal, de poder ser aplicado como ferramenta de apoio ao projetista no desenvolvimento de um robô hidráulico.

Os parâmetros definidos pelo método proposto são calculados com base nas necessidades das tarefas que o robô deve realizar, como as dimensões do volume de trabalho, a carga que o robô deve manipular, as velocidades e acelerações lineares, e o máximo deslocamento aceitável da extremidade do braço devido à deformação elástica. Desta forma, aplicando a metodologia, é possível especificar um braço apropriado para as funções que ele deve realizar.

Todas as hipóteses e algoritmos utilizados pelo método são apresentadas neste trabalho, permitindo a reprodução de todos os seus resultados. Além disso, como os mesmos dependem apenas dos valores usados como entrada, é possível afirmar que o método proposto é sistemático em termos de aplicação.

Outra propriedade do método proposto é sua característica modular, a qual permite que partes dele sejam usadas para outras finalidades. Em especial, o cálculo da dinâmica do braço com atuadores lineares pode ser usado no desenvolvimento de um sistema de controle, pois foi utilizada uma formulação que convencionalmente é utilizada para robôs. Além disto, um ou mais módulos do método podem ser futuramente modificados ou substituídos, potencialmente melhorando os resultados finais obtidos. Por exemplo, pode-se modificar a análise estrutural dos elos para considerar os carregamentos laterais, que ocorrem devido à inércia dos elos quando a base do robô é rotacionada, permitindo assim a definição da largura da seção transversal das vigas dos elos customizada para determinada tarefa.

Os parâmetros cinemáticos dos elos foram calculados pelo primeiro módulo. Os comprimentos dos elos, os limites angulares das juntas e um dos pontos de fixação de cada atuador foram determinados através de métodos que focam na minimização da transmissão do erro de posicionamento dos atuadores, buscando-se assim um braço o mais preciso possível, pois a maximização desta característica é importante para aumentar a gama de possíveis aplicações de robôs hidráulicos. Também foram consideradas outras características de desempenho, no caso a manipulabilidade, isotropia de velocidades, velocidade mínima e

destreza, cujos índices foram considerados durante uma otimização. Desta forma, o desempenho do braço ao longo do seu volume de trabalho também é maximizado.

A estrutura dos elos do braço foi parcialmente dimensionada pelo segundo módulo. O método proposto é capaz de definir os valores para as alturas das seções das vigas dos elos e as espessuras das chapas, obtendo-se assim um braço com uma melhor relação rigidez/massa. A deformação elástica dos elos foi mantida abaixo de um valor limite pré-definido, mesmo no caso onde carregamentos dinâmicos são aplicados. Entretanto, existem atualmente outras características dos elos que não são dimensionadas por meio da metodologia proposta, como a largura das vigas ou as espessuras dos reforços utilizados nas regiões próximas aos pontos de acoplamento. Isto ocorre devido às limitações do modelo simplificado utilizado no processo de otimização.

Os atuadores e a unidade de potência hidráulica adequados para o braço foram definidos pelo terceiro módulo. Esta definição foi feita com base em uma análise que considera diversos pontos sobre o volume de trabalho e diversos carregamentos dinâmicos. Assim, os componentes especificados devem ser capazes de operar adequadamente em qualquer situação encontrada durante a operação do robô, desde que não sejam ultrapassados os valores nominais do carregamento, velocidade e aceleração.

O método foi implementado em um programa computacional desenvolvido no ambiente Matlab®, tendo sido este programa capaz de fornecer de forma automática os parâmetros calculados pela aplicação do método.

A dinâmica e a cinemática do braço foram analisadas e verificadas por meio de comparações com outras estratégias. Foram considerados os efeitos da inércia, Coriolis, peso próprio e atrito viscoso linear, tendo sido desconsiderados efeitos como atrito estático, deformação elástica ou dilatação térmica. Como já mencionado, as equações propostas podem inclusive ser utilizadas para facilitar o desenvolvimento de um sistema de controle para o braço.

## **7.1 Trabalhos futuros**

O projeto de um robô hidráulico é bastante amplo, e devido a isto, o escopo deste trabalho não permitiu a inclusão de todos os detalhes identificados envolvidos nesta tarefa. Desta forma, são sugeridos alguns tópicos para trabalhos futuros, de forma que seus resultados possam ser posteriormente integrados à metodologia proposta no presente trabalho:

1. Estabelecer uma metodologia de projeto para o desenvolvimento da base do robô

2. Estabelecer uma metodologia de projeto para o desenvolvimento do punho.
3. Analisar detalhadamente as juntas, especificando inclusive os componentes de rolamento necessários.
4. Analisar a dinâmica do sistema hidráulico, especificando as válvulas, linhas hidráulicas e acumuladores necessários.
5. Calcular as matrizes dinâmicas do robô considerando os seis graus de liberdade do robô completo.
6. Analisar a deflexão lateral da estrutura do braço quando este é rotacionado em torno do eixo da base.
7. Fazer uma análise vibracional da estrutura do braço, para maximizar a menor frequência natural.
8. Fazer o balanceamento estático e dinâmico da estrutura do braço, por meio de contrapesos ou molas, para reduzir os esforços sobre os componentes e facilitar o controle.
9. Projetar o controlador do braço ou do robô completo.
10. Analisar o atrito nas juntas e nos atuadores de forma mais detalhada.
11. Construir um protótipo do robô, permitindo realizar testes experimentais.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albers, A.; Brudniok, S.; Ottndad, J.; Sauter, C.; Sedchaicharn, K. **Upper body of a new humanoid robot - the design of AMAR III**. 6th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. Genova, Italy: IEEE. 2006.

Albers, A.; Ottndad, J.; Weiler, H.; Haeussler, P. **Methods for lightweight design of mechanical components in humanoid robots**. IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. Pittsburgh, PA, USA: IEEE. 2007.

Allen, D. H. **How Mechanics Shaped the Modern World**. [S.l.]: Springer, 2013.

Bergamaschi, P. R.; Saramago, S. F. P.; Nogueira, A. C. An optimal design of 3R manipulators taking into account regular workspace boundary. **ABCM Symposium Series in Mechatronics**, vol. 1, p. 86-94, 2004.

Borges, F. A. P.; Perondi, E. A.; Cunha, M. A. B.; Sobczyk, M. R. **A Hybrid Feedback Linearization + Neural Network Control Algorithm Applied to a Hydraulic Actuator**. FPNi Ph.D. Symposium on Fluid Power. Florianópolis: ASME. 2016.

Cunha, M. A. B. **Controle em Cascata com Adaptação de Parâmetros Aplicado a um Atuador Hidráulico**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1997. Dissertação de Mestrado.

Das, J.; Das, K. C.; Saha, S.; Mookherjee, S.; Sanyal, D. **Modeling and Simulation of an Electro-Hydraulic Actuation System through Subsystem Characterization**. 2008 Annual IEEE India Conference. Kanpur, India: IEEE. 2008.

Dumas, C.; Caro, S.; Mehdi, C.; Garnier, S.; Furet, B. Joint stiffness identification of industrial serial robots. **Robotica**, p. 1-20, 2011.

Friedman, Z.; Kosmatka, J. B. An Improved Two-node Timoshenko Beam Finite Element. **Computers & Structures**, vol. 47, n. 3, p. 473-481, 1993.

Gosselin, C. M. **Dexterity Indices for Planar and Spatial Robotic Manipulators**. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Cincinnati, OH, USA: IEEE. 1990.

Greenway, B. Robot accuracy. **Industrial Robot: An International Journal**, vol. 27, p. 257-265, 2000.

IFR. Executive Summary World Robotics 2017 Industrial Robots. **International Federation of Robotics**, 2017. Disponivel em: <[https://ifr.org/downloads/press/Executive\\_Summary\\_WR\\_2017\\_Industrial\\_Robots.pdf](https://ifr.org/downloads/press/Executive_Summary_WR_2017_Industrial_Robots.pdf)>. Acesso em: 15 Junho 2018.

Ispas, V.; Detesan, O.-A. **The energy method of constructive optimization for the serial modular robots with three degrees of freedom**. 20th International DAAAM Symposium. Vienna, Austria, EU: DAAAM International. 2009. p. 1633.

Jensen, J. J. On The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 87, n. 4, p. 621-635, 1982.

Kevac, L.; Filipovic, M. **Trajectory tracking algorithm for elastic robotic mechanism**. 10th Jubille International Symposium on Intelligent Systems and Informatics. Subotica, Serbia: IEEE. 2012.

Kim, B. J.; Yun, D. K.; Lee, S. H.; Jang, G.-W. Topology optimization of industrial robots for system-level stiffness maximization by using part-level metamodels. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 54, p. 1061-1071, 2016.

Kim, J.-O.; Khosla, P. K. **Dexterity Measures for Design and Control of Manipulators**. IEEE/RJS International Workshop on Intelligent Robots and Systems. Osaka, Japan: IEEE. 1991.

Kubela, T.; Pochyly, A.; Vladislav, S. **Investigation of position accuracy of industrial robots and online methods for accuracy improvement in machining processes**. International Conference on Electrical Drives and Power Electronics. Tatranska Lomnica, Slovakia: IEEE. 2015.

Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; Wright, P. E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. **SIAM**, vol. 9, n. 1, p. 112-147, 1998.

Li, X.; Wang, G.; Li, X. Optimal design of a hydraulic excavator working device based on parallel particle swarm optimization. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, vol. 39, n. 10, p. 3793-3805, April 2017.

Lin, Y.; Zhao, H.; Ding, H. Posture optimization methodology of 6R industrial robots for machining using performance evaluation indexes. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, vol. 48, p. 59-72, 2017.

Liu, G. R.; Quek, S. S. **The Finite Element Method - a Practical Course**. 1ª. ed. Oxford: Elsevier Science, 2003.

Machado, C. L. D. **Compensação de Atrito em Atuadores Hidráulicos Utilizando Redes Neurais**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2003. Dissertação de Mestrado.

Myers, J. A. **Handbook of Equations for Mass and Area Properties of Various Geometrical Shapes**. China Lake, California: US Naval Ordnance Test Station, 1962.

Oliveira, M. F. **Projeto de um robô cartesiano com acionamento pneumático**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007. Dissertação de mestrado.

Ouyang, P. R.; Li, Q.; Zhang, W. J. Integrated design of robotic mechanisms for force balancing and trajectory tracking. **Mechatronics**, vol. 13, p. 887-905, 2003.

Pade, B.; Sastry, S. Optimal kinematic design of 6R manipulators. **The International Journal of Robotics Research**, vol. 7, p. 43-61, 1988.

Panda, S.; Mishra, D.; Biswal, B. B.; Choudhury, B. B. Robot workspace optimization using a novel modified differential evolutionary technique. **International Journal of Computational Methods**, vol. 9, n. 3, 2012.

PARKER HANNIFIN CORPORATION. **Catalog HY08-1320-3/NA**. Des Plaines. 2014.

Pazos, F. **Automação de sistemas e robótica**. 1ª. ed. [S.l.]: AXCEL Books, 2002.

Pereira, P. I. I. **Análise Teórico-Experimental de Controladores para Sistemas Hidráulicos**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006. Dissertação de Mestrado.

Pereira, P. I. I.; Guenther, R.; De Negri, V. J. **Tracking Control in Hydraulic Actuators Using Slow Proportional Directional Valves**. ABCM Symposium Series in Mechatronics. [S.l.]: ABCM. 2008. p. 66-75.

Petyt, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. 1<sup>a</sup>. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Rivin, E. I. **Mechanical design of robots**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987.

Saravanan, R.; Ramabalan, S.; Babu, P. D. Optimum static balancing of an industrial robot mechanism. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, vol. 21, p. 824-834, 2008.

Schneider, U.; Drust, M.; Ansaloni, M. Improving robotic machining accuracy through experimental error investigation and modular compensation. **Int J Adv Manuf Technol**, p. 3-15, 2016.

Sciavicco, L.; Siciliano, B. **Modelling and control of robot manipulators**. 1st. ed. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2000.

Siciliano, B.; Sciavicco, L.; Villani, L.; Oriolo, G. **Robotics modelling, planing and control**. Londres: Springer, 2009.

Slotine, J.-J. E.; Asada, H. **Robot Analysis and Control**. 1st. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1986.

Slotine, J.-J. E.; Li, W. **Applied Nonlinear Control**. 1st. ed. [S.l.]: Prentice-Hall, 1991.

Spong, M. W.; Hutchinson, S.; Vidyasagar, M. **Robot Modeling and Control**. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2005.

Taylor, J. R. **Classical Mechanics**. Sausalito: University Science Books, 2005.

Timoshenko, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, vol. 41, n. 245, p. 774-746, 1921.

Valdiero, A. C. **Controle de robôs hidráulicos com compensação de atrito**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2005.

Ying, M.; Mo, X.; Jiang, J. **Multi-objective performance optimization of robotic mechanism**. IEEE Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference. Chongqing, China: IEEE. 2016.

Young, W. C.; Budynas, G. R.; Sadegh, A. M. **Roark's Formulas for Stress and Strain**. 8<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: MCGraw-Hill, 2012.

Zhang, P.; Yao, Z.; Du, Z. Global Performance Index System for Kinematic Optimization of Robotic Mechanism. **Journal of Mechanical Design**, 2013.

## APÊNDICE A – Deduções das equações

### A.1 Seção 3.1.1

Os parâmetros de Denavit-Hartenberg usados para o braço são mostrados na Tabela A.1, onde  $a_1$  e  $a_2$  representam os comprimentos dos elos do braço e  $q_1$  e  $q_2$  representam os ângulos de junta. O parâmetro  $\alpha_2$  seria usado se fosse considerado um punho, mas neste caso o resultado não é afetado. Não é usado um *offset* entre os braços, pois esta cinemática é feita apenas para o caso bidimensional, calculado sobre o plano de deslocamento da extremidade do braço.

Tabela A.1 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o braço mostrado na Figura 3.1

elo	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	$a_1$	0
2	0	$q_2$	$a_2$	$\alpha_2$

Com estes parâmetros são montadas as matrizes de transformação homogêneas:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & a_1 \cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & a_1 \text{sen}(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

e

$$H_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) \cos(\alpha_2) & \text{sen}(q_2) \text{sen}(\alpha_2) & a_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) \cos(\alpha_2) & -\cos(q_2) \text{sen}(\alpha_2) & a_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & \text{sen}(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Estas matrizes podem ser multiplicadas para formar a matriz de transformação homogênea total, expressa por:

$$H = H_1 H_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_{12}) & -\cos(\alpha_2) \text{sen}(q_{12}) & \text{sen}(\alpha_2) \text{sen}(q_{12}) & a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_{12}) \\ \text{sen}(q_{12}) & \cos(\alpha_2) \cos(q_{12}) & -\text{sen}(\alpha_2) \cos(q_{12}) & a_1 \text{sen}(q_1) + a_2 \text{sen}(q_{12}) \\ 0 & \text{sen}(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $q_{12} = q_1 + q_2$ . Da parte translacional da matriz  $H$  é obtida a equação para o ponto  $(X_p, Y_p)$  da extremidade do braço em função dos ângulos de junta:

$$X_p = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_{12}), \quad e \quad Y_p = a_1 \text{sen}(q_1) + a_2 \text{sen}(q_{12}). \quad (3.1)$$

Para o cálculo dos ângulos de junta em função do comprimento dos atuadores, na junta do elo  $i$  com o elo  $i - 1$  podem ser definidos os ângulos  $q_i$ ,  $\phi_{Ai}$ ,  $\beta_i$  e  $\phi_{Bi}$ , como mostrado na Figura 3.2.

Ao se observar as relações entre os ângulos, é possível definir as seguintes relações:

$$q_i + \beta_i + \phi_{Bi} = \phi_{Ai} \quad \rightarrow \quad q_i = \phi_{Ai} - \beta_i - \phi_{Bi}, \quad (\text{A.4})$$

sendo que os ângulos  $\beta_i$ ,  $\phi_{Ai}$  e  $\phi_{Bi}$  podem ser calculados da seguinte forma:

$$\beta_i = \text{acos} \left( \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2}{2\|A_i'\|\|B_i\|} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\phi_{Ai} = \text{atan} \left( \frac{A_{iy}}{A_{ix} - a_{i-1}} \right), \quad (\text{A.6})$$

e

$$\phi_{Bi} = \text{atan} \left( \frac{B_{iy}}{B_{ix}} \right). \quad (\text{A.7})$$

Combinando a Equação A.4 com as Equações A.5, A.6 e A.7 chega-se à equação final, expressa por:

$$q_i = \phi_{Ai} - \phi_{Bi} - \text{acos} \left( \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2}{2\|A_i'\|\|B_i\|} \right). \quad (\text{3.3})$$

## A.2 Seção 3.1.2

Primeiramente, o parâmetro  $P_i$  deve se isolado na Equação 3.3, o que resulta em:

$$P_i^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi}). \quad (\text{3.11})$$

Para o cálculo de  $q_i$  em função do ponto  $(X_p, Y_p)$  da extremidade do braço, deve-se considerar os ângulos  $q_1$  e  $q_2$  separadamente. Elevando ao quadrado e somando as duas partes da Equação 3.1, obtém-se a seguinte equação:

$$X_p^2 + Y_p^2 = L^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(q_1) \cos(q_{12}) + 2a_1a_2 \sin(q_1) \sin(q_{12}), \quad (\text{A.8})$$

o que leva à

$$L^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(q_{12} - q_1). \quad (\text{A.9})$$

Por consequência da definição de  $q_{12} = q_1 + q_2$ , pode-se escrever que  $q_2 = q_{12} - q_1$ . Substituindo esta definição na Equação A.9 e isolando  $q_2$ , obtém-se:

$$q_2 = \text{acos} \left( -\frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2} \right). \quad (\text{A.10})$$

Como a função  $acos$  não é capaz de estabelecer o quadrante do ângulo representado por  $q_2$ , usa-se a função  $atan2$  ao invés para o cálculo:

$$\begin{aligned} q_2 &= atan2(\text{sen}(q_2), \text{cos}(q_2)) \\ &= atan2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2}\right)^2}, -\frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde o sinal  $\pm$  é usado para escolher a pose do braço. Deve ser positivo para cotovelo para baixo ou negativo para cotovelo para cima. No caso do braço estudado neste trabalho, o robô não é capaz de assumir uma pose com o cotovelo para baixo, como já mencionado. Levando isto em consideração, o valor de  $q_2$  pode ser calculado através da seguinte equação:

$$q_2 = atan2\left(-\sqrt{1 - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2}\right)^2}, -\frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2a_1a_2}\right). \quad (\text{3.8})$$

Para a determinação de  $q_1$ , é usada novamente a Equação 3.1, que pode ser expandida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_p &= a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_{12}) \\ &= a_1 \cos(q_1) + a_2 [\cos(q_1) \cos(q_2) - \sin(q_1) \sin(q_2)], \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e

$$\begin{aligned} Y_p &= a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_{12}) \\ &= a_1 \sin(q_1) + a_2 [\sin(q_1) \cos(q_2) + \cos(q_1) \sin(q_2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para ser possível determinar o valor de  $q_1$  é preciso calcular os valores de  $\cos(q_1)$  e  $\sin(q_1)$ , que podem ser obtidos resolvendo-se o sistema de equações dado pelas Equações A.12 e A.13. Na forma matricial, este sistema pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \cos(q_2) & -a_2 \sin(q_2) \\ a_2 \sin(q_2) & a_1 + a_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Isolando o vetor de funções trigonométricas, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \cos(q_2) & -a_2 \sin(q_2) \\ a_2 \sin(q_2) & a_1 + a_2 \cos(q_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Resolvendo a inversa da matriz, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(q_2)} \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \cos(q_2) & a_2 \sin(q_2) \\ -a_2 \sin(q_2) & a_1 + a_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Combinando com a Equação A.8:



$$\begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \cos(q_2) & a_2 \sin(q_2) \\ -a_2 \sin(q_2) & a_1 + a_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Com esta definição para, é possível determinar  $q_1$  usando a função atan2, de modo que:

$$q_1 = \text{atan2}(\sin(q_1), \cos(q_1)) = \text{atan2}\left(\frac{[a_1 + a_2 \cos(q_2)]Y_p - a_2 \sin(q_2)X_p}{L^2}, \frac{[a_1 + a_2 \cos(q_2)]X_p + a_2 \sin(q_2)Y_p}{L^2}\right). \quad (\text{3.10})$$

### A.3 Seção 3.1.3

A Equação 3.1 descreve a cinemática direta do braço. Expressando esta equação na forma matricial, e considerando o ângulo final do braço,  $q_{12}$ , é obtida a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ q_{12} \end{bmatrix} = \vec{X} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ q_1 + q_2 \end{bmatrix} = \vec{Q}(\vec{q}), \quad (\text{A.18})$$

onde  $\vec{q}$  é um vetor com os parâmetros dos ângulos de junta, e possui como suas componentes os parâmetros  $q_1$  e  $q_2$ . Derivando em relação ao tempo, para obter as velocidades, obtém-se:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{Q}(\vec{q})}{dt} = \frac{d\vec{Q}(\vec{q})}{d\vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt}, \quad (\text{A.19})$$

o que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{\vec{X}} = \mathbf{J} \dot{\vec{q}}, \quad (\text{3.12})$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana comum, e pode ser referente a um braço genérico qualquer, bastando modificar o vetor  $\vec{Q}(\vec{q})$ . No caso do braço estudado, ela pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ q_1 + q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dq_1} & \frac{d}{dq_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_1 \sin(q_1) - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{3.14})$$

Para o cálculo da relação entre as velocidades angulares das juntas e as velocidades lineares dos atuadores, pode-se começar com a seguinte definição:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{d\vec{P}} \frac{d\vec{P}}{dt} = \bar{\mathbf{J}} \dot{\vec{P}}, \quad (\text{A.20})$$

onde  $\bar{\mathbf{J}}$  é a matriz que relaciona as velocidades dos atuadores lineares com as velocidades dos ângulos de junta. Esta matriz pode ser expressa por:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dP_1} & \frac{d}{dP_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dP_1} & \frac{dq_1}{dP_2} \\ \frac{dq_2}{dP_1} & \frac{dq_2}{dP_2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Como cada ângulo de junta depende unicamente de seu respectivo atuador, os termos fora da diagonal são nulos, o que leva à:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dP_1} & 0 \\ 0 & \frac{dq_2}{dP_2} \end{bmatrix}. \quad (\text{3.18})$$

Como a relação entre o parâmetro  $q_i$  e o respectivo parâmetro  $P_i$  não depende de fatores externos, é possível generalizar esta matriz para um braço qualquer com  $n$  elos, de modo que:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dP_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dq_2}{dP_2} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{dq_i}{dP_i} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{dq_{n-1}}{dP_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{dq_n}{dP_n} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

onde a expressão para  $\frac{dq_i}{dP_i}$  é obtida derivando-se os dois lados da Equação 3.11 com relação à  $P_i$ :

$$\frac{dq_i}{dP_i} \text{sen}(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi}) = \left[ \frac{d(P_i^2)}{dP_i} + \frac{d(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2)}{dP_i} \right] \left( \frac{1}{2\|A_i'\|\|B_i\|} \right), \quad (\text{A.23})$$

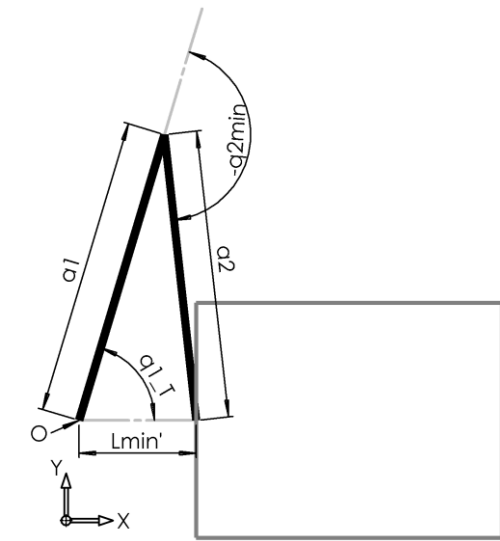
o que resulta na seguinte expressão, ao se isolar  $\frac{dq_i}{dP_i}$  e resolver as derivadas:

$$\frac{dq_i}{dP_i} = \bar{J}_{i,i} = \frac{-P_i}{\|A_i'\|\|B_i\| \text{sen}(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})}. \quad (\text{3.19})$$

#### A.4 Seção 3.2.1

Na Tabela A.2 são mostradas as equações que podem ser derivadas das condições 2-6 apresentadas na Seção 3.2.1.2:

Tabela A.2 – Equações definidas pelas relações definidas entre a área de trabalho natural do braço e a área de trabalho retangular desejada

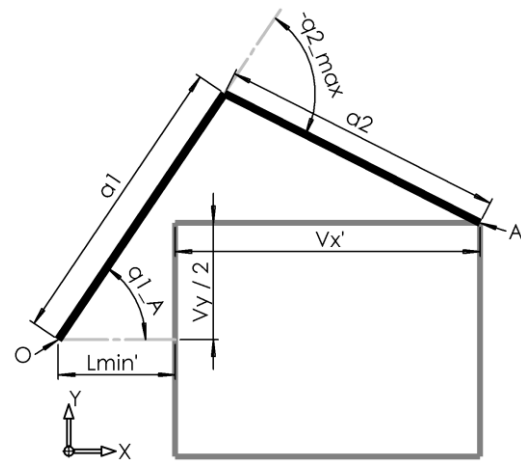


Condição 2 (tangente):

Lei dos cossenos:

$$L_{min}'^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\pi + q_{2min})$$

$$\rightarrow q_{2min} = \arccos\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - L_{min}'^2}{2a_1a_2}\right) - \pi$$



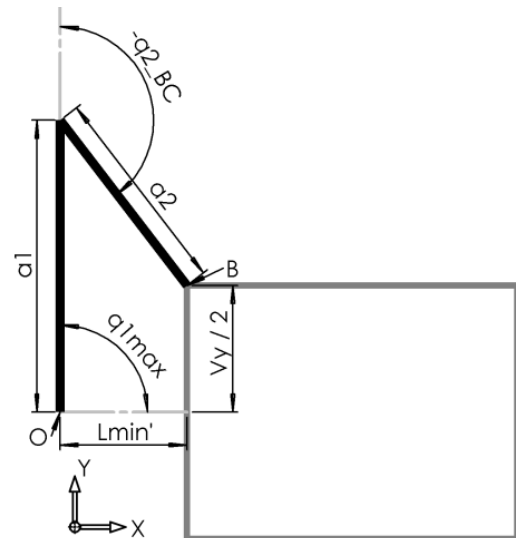
Condição 3 (ponto A):

$$L_{max}'^2 = \overline{OA}^2 = \left(\frac{V_y}{2}\right)^2 + (V_x' + L_{min}')^2$$

$$\rightarrow L_{max}'^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\pi + q_{2max})$$

$$q_{2max} = q_{2min} + \psi_2$$

$$\rightarrow q_{2max} = \arccos\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - L_{max}'^2}{2a_1a_2}\right) - \pi$$

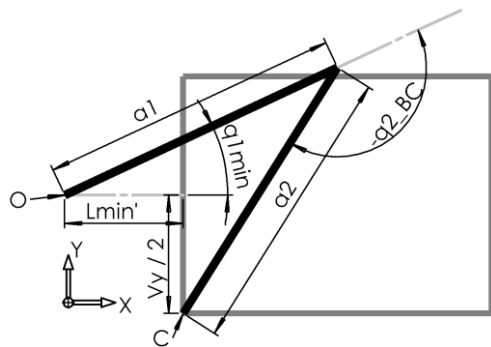


Condição 4 (ponto B):

$$Y: a_1 \sin(q_{1max}) + a_2 \sin(q_{2_{BC}} + q_{1max}) = \frac{V_y}{2}$$

$$X: a_1 \cos(q_{1max}) + a_2 \cos(q_{2_{BC}} + q_{1max}) = L_{min}'$$

Tabela A.2 (Continuação) – Equações definidas pelas relações definidas entre a área de trabalho natural do braço e a área de trabalho retangular desejada

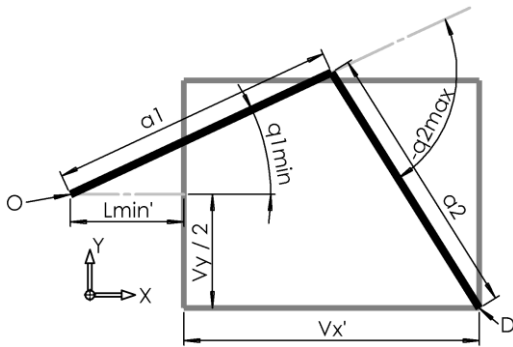


Condição 5 (ponto C):

$$Y: a_1 \sin(q_{1min}) + a_2 \sin(q_{2_{BC}} + q_{1min}) = -\frac{Vy}{2}$$

$$X: a_1 \cos(q_{1min}) + a_2 \cos(q_{2_{BC}} + q_{1min}) = Lmin'$$

$$q_{1min} = q_{1max} - \psi_1$$



Condição 6 (ponto D):

$$Y: a_1 \sin(q_{1min}) + a_2 \sin(q_{2max} + q_{1min}) = -\frac{Vy}{2}$$

$$X: a_1 \cos(q_{1min}) + a_2 \cos(q_{2max} + q_{1min}) = Lmin' + Vx'$$

Combinando-se as equações das condições 4 e 5 é possível constatar que, ao se rotacionar a primeira junta de  $q_{1min}$  para  $q_{1max}$ , a extremidade do braço se desloca uma distância vertical  $Vy$ , enquanto se mantém a uma distância horizontal de  $Lmin'$ . Com isso, a seguinte equação pode ser definida:

$$\frac{1}{2} \frac{Vy}{Lmin'} = \tan\left(\frac{q_{1max} - q_{1min}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\psi_1}{2}\right), \quad (A.24)$$

onde é possível isolar  $Lmin'$  para obter a seguinte expressão:

$$Lmin' = \frac{Vy}{2 \tan\left(\frac{\psi_1}{2}\right)}. \quad (3.23)$$

Observando as condições 3 e 6 é possível constatar que, rotacionando a segunda junta do braço, a ponta deve ser capaz de alcançar os pontos C e D, como mostrado na Figura A.1.

O ângulo formado pelo movimento do elo entre os pontos C e D não é  $\psi_2$ , mas sim  $\psi'_2$  tal que  $\psi'_2 + \psi''_2 = \psi_2$ . Como é formado um triângulo isósceles com base de dimensão  $\overline{CD}$  e lados de dimensão  $a_2$  pode-se determinar que o vértice superior deste triângulo, chamado de ponto E, possui coordenada horizontal  $X = Lmin' + \frac{Vx'}{2}$ . A o valor da dimensão representada

por  $L_2$  é igual à  $2a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$ , e possui um ângulo  $\alpha_{Bl}$  com a horizontal. Como  $L_2$  é também a distância entre um ponto sobre um círculo de raio  $Lmin'$  centrado na origem e o ponto D,  $\alpha_{Bl}$  pode, portanto, ser calculado por meio da equação de intersecção de círculos:

$$L_2 = 2 a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\psi_2}{2}\right), \quad (\text{A.25})$$

com

$$x^2 + y^2 = L_2^2, \quad (x - \overline{OD})^2 + y^2 = Lmin'^2, \quad e \quad \overline{OD} = Lmax', \quad (\text{A.26})$$

que, quando combinadas, resultam em:

$$x = \frac{Lmax'^2 - Lmin'^2 + L_2^2}{2Lmax}, \quad y = \frac{\sqrt{4Lmax'^2 L_2^2 - (Lmax'^2 - Lmin'^2 + L_2^2)^2}}{2Lmax'}, \quad (\text{A.27})$$

sendo que  $\alpha_{Bl}$  pode ser calculado por:

$$\alpha_{Bl} = \operatorname{atan}\left(\frac{Vy/2}{Lmin' + Vx'}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (\text{A.28})$$

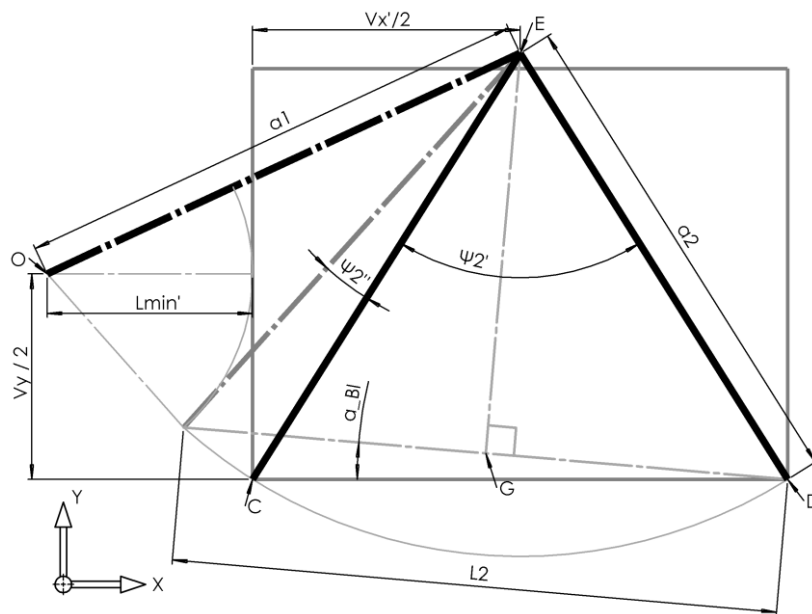


Figura A.1 – Desenho esquemático mostrando a relação entre os pontos C, D, E, G e O, além do ângulo  $\alpha_{Bl}$ .

A reta  $\overline{GE}$  possui comprimento de  $a_2 \cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$ , e conhecendo a coordenada X do ponto E e o ângulo  $\alpha_{Bl}$  é possível definir a seguinte expressão:

$$\frac{B_l}{2} \cos(\alpha_{Bl}) - a_2 \cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right) \operatorname{sen}(\alpha_{Bl}) = \frac{Vx'}{2}. \quad (\text{A.29})$$

Como  $L_2$  e  $L_{max}'$  dependem de  $a_2$ , é possível isolar  $a_2$  na Equação A.29, o que leva à um sistema de equações, que quando resolvido, permite expressar o parâmetro  $a_2$ , em função unicamente dos parâmetros arbitrários de entrada:

$$a_2 = \sqrt{\frac{(L_{min}'^2 - L_{max}'^2)}{2 \sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right)^2} + \frac{C - \left[(Vx' + L_{min}') \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right) + \frac{Vy}{2}\right] D}{2}}, \quad (3.24)$$

$$C = \left[(Vx' + L_{min}') \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right) + \frac{Vy}{2}\right]^2 + Vx' \left[(Vx' + L_{min}') - \frac{Vy}{2} \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right)\right],$$

$$D = \cot g\left(\frac{\psi_2}{2}\right) \sqrt{L_{min}'^2 + Vz L_{min}' \operatorname{tg}\left(\frac{\psi_2}{2}\right) - \frac{Vy^2}{4}}.$$

Com o valor de  $a_2$  calculado é possível calcular o comprimento  $a_1$  através da seguinte expressão:

$$a_1 = \overline{OE}, \quad (A.30)$$

o que é equivalente à:

$$\rightarrow a_1^2 = E_x^2 + E_z^2, \quad (A.31)$$

onde

$$E_x = L_{min}' + \frac{Vx'}{2}, \quad E_z = H - \frac{Vy}{2}, \quad (A.32)$$

e

$$H^2 + \left(\frac{Vx'}{2}\right)^2 = a_2^2, \quad \text{ou} \quad H = \sqrt{a_2^2 - \left(\frac{Vx'}{2}\right)^2}. \quad (A.33)$$

Substituindo as Equações A.32 e A.33 em A.31, chega-se à seguinte expressão para o cálculo do valor de  $a_1$ :

$$a_1 = \sqrt{\left(L_{min}' + \frac{Vx'}{2}\right)^2 + \left[\sqrt{a_2^2 - \left(\frac{Vx'}{2}\right)^2} - \frac{Vy}{2}\right]^2}. \quad (3.25)$$

Com isso também é possível definir os ângulos  $q_{1min}$  e  $q_{1max}$ , através das seguintes expressões:

$$q_{1min} = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{a_2^2 - \left(\frac{Vx'}{2}\right)^2} - \frac{Vy}{2}}{L_{min}' + \frac{Vx'}{2}}\right), \quad (3.26)$$

e

$$q_{1max} = q_{1min} + \psi_1, \quad (3.27)$$

lembrando que os ângulos  $q_{2min}$  e  $q_{2max}$  já foram definidos na Tabela A.2.

### A.5 Seção 3.2.2

O equacionamento foi feito de forma genérica, podendo assim ser usado para um elo  $i$  qualquer. Na Seção 3.1.2 foi definida a seguinte equação:

$$P_i^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi}). \quad (3.11)$$

Com a Equação 3.11 é possível definir os limites máximos e mínimos para o atuador:

$$P_{imax}^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_{ilim1} - \phi_{Bi}), \quad (3.31)$$

e

$$P_{imin}^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - q_{ilim2} - \phi_{Bi}), \quad (3.32)$$

onde  $q_{ilim1}$  e  $q_{ilim2}$  representam  $q_{imin}$  e  $q_{imax}$ . A atribuição depende da orientação do atuador: se estiver por cima da junta então  $q_{ilim1} = q_{imin}$  e  $q_{ilim2} = q_{imax}$ , e se estiver por baixo então  $q_{ilim1} = q_{imax}$  e  $q_{ilim2} = q_{imin}$ .

Podem ser isolados os parâmetros  $(\phi_{Ai} - \phi_{Bi})$ , o que resulta na seguinte expressão:

$$(\phi_{Ai} - \phi_{Bi}) = \pm \arccos\left(\frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_{imin}^2}{2\|A_i'\|\|B_i\|}\right) + q_{ilim2}, \quad (3.45)$$

sendo que o sinal  $\pm$  aparece porque  $\cos(x) = \cos(-x)$ . Deve ser positivo se o atuador estiver por cima da junta, ou negativo se estiver por baixo.

É possível calcular o curso linear que o atuador deve possuir em função do curso angular e dos outros parâmetros. Usando a propriedade  $q_{ilim1} = q_{ilim2} \pm \psi_i$  na Equação 3.31, tem-se que:

$$P_{imax}^2 = \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(\phi_{Ai} - \phi_{Bi} - q_{ilim2} \pm \psi_i), \quad (A.34)$$

Separando o termo  $\pm\psi_i$ , chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} P_{imax}^2 &= \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 \\ &\quad - 2\|A_i'\|\|B_i\| \cos(-q_{ilim2} + (\phi_{Ai} - \phi_{Bi})) \cos(\pm\psi_i) \\ &\quad + 2\|A_i'\|\|B_i\| \sin(-q_{ilim2} + (\phi_{Ai} - \phi_{Bi})) \sin(\pm\psi_i). \end{aligned} \quad (A.35)$$

Substituindo a Equação 3.45, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P_{imax}^2 &= \|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 \\
&\quad - 2 \|A_i'\| \|B_i\| \left[ \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_{imin}^2}{2 \|A_i'\| \|B_i\|} \cos(\psi_i) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_{imin}^2}{2 \|A_i'\| \|B_i\|} \right)^2} \sin(\psi_i) \right].
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Simplificando, chega-se a:

$$\begin{aligned}
P_{imax}^2 + \|A_i'\|^2 (\cos(\psi_i) - 1) + \|B_i\|^2 (\cos(\psi_i) - 1) - P_{imin}^2 \cos(\psi_i) \\
= \pm \sqrt{4 \|A_i'\|^2 \|B_i\|^2 - (\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_{imin}^2)^2} \sin(\psi_i).
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Elevando os dois lados ao quadrado e agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
P_{imax}^4 + P_{imin}^4 + 2(\|A_i'\|^4 + \|B_i\|^4)(1 - \cos(\psi_i)) \\
- 2(P_{imax}^2 + P_{imin}^2)(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2)(1 - \cos(\psi_i)) - 2P_{imax}^2 P_{imin}^2 \cos(\psi_i) \\
- 4\|A_i'\|^2 \|B_i\|^2 (1 - \cos(\psi_i)) \cos(\psi_i) = 0.
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Substituindo  $P_{imax}$  e  $P_{imin}$  por  $P_{imed}$  e  $C_i$ , que são o comprimento médio e o curso do atuador  $i$ , respectivamente, de modo que:

$$P_{imax} = P_{imed} + \frac{C_i}{2}, \tag{3.38}$$

$$P_{imin} = P_{imed} - \frac{C_i}{2}, \tag{3.39}$$

$$P_{imax}^2 + P_{imin}^2 = 2P_{imed}^2 + \frac{C_i^2}{2}, \tag{A.39}$$

$$P_{imax}^2 P_{imin}^2 = P_{imed}^4 - \frac{P_{imed}^2 C_i^2}{2} + \frac{C_i^4}{16}, \tag{A.40}$$

e

$$P_{imax}^4 + P_{imin}^4 = 2P_{imed}^4 + 3P_{imed}^2 C_i^2 + \frac{C_i^4}{8}, \tag{A.41}$$

chega-se à seguinte expressão:



$$\begin{aligned}
& 2P_{imed}^4 + 3P_{imed}^2 C_i^2 + \frac{C_i^4}{8} + 2(\|A_i'\|^4 + \|B_i\|^4)(1 - \cos(\psi_i)) \\
& - (4P_{imed}^2 + C_i^2)(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2)(1 - \cos(\psi_i)) \\
& - \left( 2P_{imed}^4 - P_{imed}^2 C_i^2 + \frac{C_i^4}{8} \right) \cos(\psi_i) \\
& - 4\|A_i'\|^2 \|B_i\|^2 (1 - \cos(\psi_i)) \cos(\psi_i) = 0.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Agrupando os termos e multiplicando por  $\frac{8}{1 - \cos(\psi_i)}$ :

$$\begin{aligned}
& C_i^4 + C_i^2 \left[ 8P_{imed}^2 \left( \frac{3 + \cos(\psi_i)}{1 - \cos(\psi_i)} \right) - 8(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2) \right] \\
& + 16 \left[ P_{imed}^2 - (\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2) \right]^2 - 32\|A_i'\|^2 \|B_i\|^2 (1 + \cos(\psi_i)) = 0.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Aplicando a fórmula da equação de 2º grau e agrupando os termos, encontra-se:

$$\begin{aligned}
C_i^2 = & -4P_{imed}^2 \frac{3 + \cos(\psi_i)}{1 - \cos(\psi_i)} + 4(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2) \\
& \pm 4 \sqrt{\left[ \frac{8P_{imed}^4}{(1 - \cos(\psi_i))^2} - \frac{4P_{imed}^2 (\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2)}{1 - \cos(\psi_i)} + 2\|A_i'\|^2 \|B_i\|^2 \right] (1 + \cos(\psi_i))}.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Assim, chega-se à uma expressão para o curso do atuador  $i$  em função do seu comprimento médio  $P_{imed}$ , do seu curso  $\psi_i$  e dos seus pontos de fixação  $A_i$  e  $B_i$ .

Para determinar a posição de um ponto de fixação, começa-se definindo a transmissão mecânica, que pode ser definida da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta p_i}{\Delta P_i} = \frac{dp_i}{dP_i} = \sqrt{\left( \frac{dX_p}{dP_i} \right)^2 + \left( \frac{dY_p}{dP_i} \right)^2}, \tag{3.33}$$

onde  $X_p$  e  $Y_p$  são as coordenadas da extremidade do braço. As derivadas podem ser calculadas da seguinte maneira:

$$\frac{dX_p}{dP_i} = \frac{dX_p}{dt} \frac{dt}{dP_i} = \frac{\dot{X}_p}{\dot{P}_i} = J_{T_{1,i}} = J_{1,i} \bar{J}_{i,i}, \tag{A.45}$$

e

$$\frac{dY_p}{dP_i} = \frac{dZ_p}{dt} \frac{dt}{dP_i} = \frac{\dot{Y}_p}{\dot{P}_i} = J_{T_{2,i}} = J_{2,i} \bar{J}_{i,i}, \tag{A.46}$$

onde  $J_T$  é a matriz Jacobiana total,  $J$  é a matriz Jacobiana convencional e  $\bar{J}$  é a matriz Jacobiana devido ao uso de atuadores lineares, como pode ser visto na Seção 3.1.3. Assim, a transmissibilidade de erro do braço, ou sensibilidade, pode ser calculada pela seguinte equação:

$$\frac{dp_i}{dP_i} = \bar{J}_{i,i} \sqrt{(J_{1,i})^2 + (J_{2,i})^2}. \quad (\text{A.47})$$

Da Equação 3.14 pode ser constatado que  $(J_{1,i})^2 + (J_{2,i})^2 = l_i$ , onde  $l_i$  é a distância entre o ponto  $(X_p, Z_p)$  e a junta  $i$  que é atuada pelo atuador  $i$ . Assim, tem-se que:

$$\frac{dp_i}{dP_i} = \bar{J}_{i,i} l_i = \frac{l_i}{F_{pi}}, \quad (3.34)$$

onde  $F_{pi}$  é a inversa de  $\bar{J}_{i,i}$ .

O erro nominal do braço devido ao erro de posicionamento do atuador  $i$  pode ser calculado pela seguinte equação, sendo o maior erro encontrado no volume de trabalho:

$$\Delta p_i = \Delta P_i \max \left( \frac{l_{imax}}{F_{pi}(P_{imax})}, \frac{l_{imax}}{F_{pi}(P_{imin})} \right). \quad (3.35)$$

Assim, para minimizar a sensibilidade de posicionamento, e assim melhorar a repetibilidade,  $F_{pi}(P_{imax})$  deve ser igual a  $F_{pi}(P_{imin})$ . Há também uma restrição sobre o curso do atuador, que deve ser escolhido de modo a ser possível alcançar o curso angular da junta. Assim, a sensibilidade é minimizada, para um dado curso  $C_i$ , se  $F_{pi}(P_{imax}) = F_{pi}(P_{imin}) = F_{pimin}$ .

Para calcular o parâmetro  $F_{pimin}$ , pode-se começar expandindo a Equação 3.34 com a definição de  $\bar{J}_{i,i}$  da Equação 3.19:

$$\frac{-P_i l_i}{\|A_i'\| \|B_i\| \text{sen}(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})} = \frac{l_i}{F_{pimin}}. \quad (\text{A.48})$$

Fazendo o caminho inverso, pode ser calculado o comprimento que o atuador deve ter para ser obtida a sensibilidade mínima:

$$P_i = - \frac{\|A_i'\| \|B_i\| \text{sen}(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})}{F_{pimin}}. \quad (\text{A.49})$$

Porém,  $q_i$  depende de  $P_i$ . Assim, deve-se elevar ao quadrado e usar a Equação 3.11, onde se isola  $\cos(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})$ . Substituindo na Equação A.49, com  $\text{sen}(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})^2 = 1 - \cos(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi})^2$ :

$$P_i^2 = \frac{\|A_i'\|^2 \|B_i\|^2}{F_{pimin}^2} \left[ 1 - \left( \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2}{2\|A_i'\| \|B_i\|} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.50})$$

Expandindo e agrupando os termos:

$$-P_i^4 + 2P_i^2(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2) - (\|A_i'\|^2 - \|B_i\|^2)^2 = 4F_{pimin}^2 P_i^2. \quad (\text{A.51})$$

Resolvendo pela fórmula da equação de 2º grau chega-se à seguinte expressão:

$$\rightarrow P_i^2 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2}, \text{ com} \quad (\text{A.52})$$

$$b_1 = 4F_{pimin}^2 - 2(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2), \quad e \quad c_1 = (\|A_i'\|^2 - \|B_i\|^2)^2,$$

sendo que esta equação fornece dois resultados devido ao sinal  $\pm$ , e estes são referentes à  $P_{imax}$  e  $P_{imin}$ , ambos calculados para possuírem a mesma transmissão mecânica  $\left(\frac{dp_i}{dP_i}\right)$ :

$$P_{imax}^2 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2}, \quad e \quad P_{imin}^2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2}. \quad (\text{A.53})$$

Pode-se escrever os limites do comprimento em termos do comprimento médio  $P_{imed}$  e do curso  $C_i$  das seguintes formas:

$$P_{imed} = \frac{P_{imax} + P_{imin}}{2}, \quad (\text{A.54})$$

e

$$C_i = P_{imax} - P_{imin}. \quad (\text{A.55})$$

Combinando as Equações A.54 e A.55 pode-se escrever:

$$P_{imax}^2 - P_{imin}^2 = 2P_{imed} C_i = \sqrt{b_1^2 - 4c_1}, \quad (\text{A.56})$$

o que leva à

$$C_i = \frac{\sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2P_{imed}}, \quad (\text{A.57})$$

e

$$P_{imax}^2 + P_{imin}^2 = 2P_{imed}^2 + \frac{C_i^2}{2} = -b_1. \quad (\text{A.58})$$

Reescrevendo em função apenas de  $P_{imed}$ :

$$P_{imed}^4 + \frac{P_{imed}^2 b_1}{2} + \frac{b_1^2 - 4c_1}{16} = 0. \quad (\text{A.59})$$

Aplicando a fórmula para encontrar as raízes de uma equação de 2º grau:

$$\begin{aligned}
P_{imed}^2 &= \frac{-\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - \frac{b_1^2 - 4c_1}{4}}}{2} = -\frac{b_1}{4} \pm \frac{\sqrt{c_1}}{2} \\
&= -F_{pimin}^2 + \frac{(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2)}{2} \pm \frac{(\|A_i'\|^2 - \|B_i\|^2)}{2}.
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Simplificando, pode-se escrever:

$$\rightarrow P_{imed} = \sqrt{\|A_i'\|^2 - F_{pimin}^2} \text{ ou } \sqrt{\|B_i\|^2 - F_{pimin}^2}. \tag{A.61}$$

Existe mais de uma possibilidade para  $P_{imed}$  devido ao uso da fórmula, mas apenas uma das definições é válida. Alternativamente, partindo da Equação A.54 é possível escrever:

$$(2P_{imed} - P_{imax})^2 = P_{imin}^2. \tag{A.62}$$

Expandindo:

$$4P_{imed}^2 - 4P_{imed}P_{imax} + P_{imax}^2 = P_{imin}^2. \tag{A.63}$$

Isolando  $4P_{imed}P_{imax}$  e elevando ao quadrado:

$$(4P_{imed}^2 + P_{imax}^2 - P_{imin}^2)^2 = (4P_{imed}P_{imax})^2. \tag{A.64}$$

Expandindo:

$$\begin{aligned}
16P_{imed}^4 + P_{imax}^4 + P_{imin}^4 - 8P_{imed}^2P_{imax}^2 - 8P_{imed}^2P_{imin}^2 \\
- 2P_{imax}^2P_{imin}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Finalmente, chega-se em:

$$P_{imed}^2 = \frac{P_{imax}^2 + P_{imin}^2}{4} \pm \sqrt{\frac{4P_{imax}^2P_{imin}^2}{4}}, \tag{A.66}$$

que pode ser simplificado para:

$$\rightarrow P_{imed} = \sqrt{\frac{P_{imax}^2 + P_{imin}^2 \pm 2P_{imax}P_{imin}}{4}} = \frac{P_{imax} \pm P_{imin}}{2}. \tag{A.67}$$

Como é possível ver na Equação A.67, o uso da fórmula para encontrar as raízes de uma equação de 2º grau leva a um resultado correto e a um resultado errôneo, pois sabe-se que  $P_{imed} = \frac{P_{imax} + P_{imin}}{2}$ . Também é possível ver que o resultado correto é maior do que o resultado errado. Similarmente, na Equação A.61, deve ser escolhida a maior das opções, o que resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\rightarrow P_{imed} &= \sqrt{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2}, \text{ com} \\
\|Max_i\| &\equiv \max(\|A_i'\|, \|B_i\|).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Definindo-se também  $\|Min_i\| \equiv \min(\|A_i'\|, \|B_i\|)$  e substituindo na Equação A.57, chega-se à:

$$\rightarrow C_i = 2 \sqrt{\frac{F_{pimin}^4 - F_{pimin}^2(\|Max_i\|^2 + \|Min_i\|^2) + \|Max_i\|^2\|Min_i\|^2}{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2}}. \quad (A.68)$$

A Equação A.44 também define o curso  $C_i$ . Ambas devem resultar no mesmo valor, o que só é possível para valores de  $\|A_i'\|$  e  $\|B_i\|$  específicos. Desta forma, é possível combinar as equações para deduzir uma equação que resulte em um destes valores. Igualando as equações:

$$\begin{aligned} & 4 \frac{F_{pimin}^4 - F_{pimin}^2(\|Max_i\|^2 + \|Min_i\|^2) + \|Max_i\|^2\|Min_i\|^2}{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2} = \\ & -4P_{imed}^2 \frac{3 + \cos(\psi_i)}{1 - \cos(\psi_i)} + 4(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2) \\ & \pm 4 \sqrt{\left[ \frac{8P_{imed}^4}{(1 - \cos(\psi_i))^2} - \frac{4P_{imed}^2(\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2)}{1 - \cos(\psi_i)} + 2\|A_i'\|^2\|B_i\|^2 \right] (1 + \cos(\psi_i))}. \end{aligned} \quad (A.69)$$

Dividindo por 4 ambos os lados, substituindo a definição de  $P_{imed}$ ,  $\|Max_i\|$  e  $\|Min_i\|$  da Equação 3.37 e redistribuindo os termos:

$$\begin{aligned} & 4F_{pimin}^4 - 2F_{pimin}^2\|Max_i\|^2(3 + \cos(\psi_i)) + 2\|Max_i\|^4(1 + \cos(\psi_i)) \\ & = (\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2)\sqrt{(1 + \cos(\psi_i)) \cdot A}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A \equiv & 4\|Max_i\|^4(1 + \cos(\psi_i)) - 4F_{pimin}^2\|Max_i\|^2(3 + \cos(\psi_i)) + 8F_{pimin}^4 \\ & + \|Min_i\|^2[-2\|Max_i\|^2(1 - \cos(\psi_i))^2 + 4F_{pimin}^2(1 - \cos(\psi_i))]. \end{aligned} \quad (A.70)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e redistribuindo os termos:

$$\begin{aligned} & 8F_{pimin}^8(1 - \cos(\psi_i)) + F_{pimin}^6\|Max_i\|^2[-20 + 16\cos(\psi_i) + 4\cos(\psi_i)^2] \\ & + F_{pimin}^4\|Max_i\|^4[16 - 8\cos(\psi_i) - 8\cos(\psi_i)^2] \\ & + F_{pimin}^2\|Max_i\|^6[-4 + 4\cos(\psi_i)^2] = \\ & \|Min_i\|^2[-2\|Max_i\|^2(1 - \cos(\psi_i))^2 + 4F_{pimin}^2(1 - \cos(\psi_i))][1 \\ & + \cos(\psi_i)][\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^6]^2. \end{aligned} \quad (A.71)$$

Dividindo ambos os lados por  $(1 - \cos(\psi_i))$ :

$$\begin{aligned} & 8F_{pimin}^8 - 4F_{pimin}^6\|Max_i\|^2[5 + \cos(\psi_i)] + 8F_{pimin}^4\|Max_i\|^4[2 + \cos(\psi_i)] \\ & - 4F_{pimin}^2\|Max_i\|^6[1 + \cos(\psi_i)] = \\ & \|Min_i\|^2[-2\|Max_i\|^2(1 + \cos(\psi_i)) + 4F_{pimin}^2][1 \\ & + \cos(\psi_i)][\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^6]^2. \end{aligned} \quad (A.72)$$

Expandindo o lado direito da equação:

$$\begin{aligned}
& 8F_{pimin}^8 - 4F_{pimin}^6 \|Max_i\|^2 [5 + \cos(\psi_i)] + 8F_{pimin}^4 \|Max_i\|^4 [2 + \cos(\psi_i)] \\
& - 4F_{pimin}^2 \|Max_i\|^6 [1 + \cos(\psi_i)] = \\
& \|Min_i\|^2 (1 + \cos(\psi_i)) [4F_{pimin}^6 - 2F_{pimin}^4 \|Max_i\|^2 [5 + \cos(\psi_i)] \\
& + 4F_{pimin}^2 \|Max_i\|^4 [2 + \cos(\psi_i)] - 2\|Max_i\|^6 [1 + \cos(\psi_i)]] .
\end{aligned} \tag{A.73}$$

Isolando  $\|Min_i\|$ :

$$\|Min_i\| = \sqrt{\frac{2F_{pimin}^2}{1 + \cos(\psi_i)}} = F_{pimin} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos(\psi_i)}} = \frac{F_{pimin}}{\cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)}. \tag{3.40}$$

Substituindo esta definição na Equação A.68 é possível se obter uma nova definição para  $C_i$ :

$$C_i = 2 \sqrt{\frac{F_{pimin}^2 \left[ F_{pimin}^2 \left( 1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2} \right) - \|Max_i\|^2 \left( 1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2} \right) \right]}{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2}}, \tag{A.74}$$

ou

$$C_i = 2 \sqrt{\frac{F_{pimin}^2 \left[ -\|Max_i\|^2 + F_{pimin}^2 \right] \left[ 1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2} \right]}{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2}} = 2F_{pimin} \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{\psi_i}{2}\right)^2}}. \tag{A.75}$$

Simplificando, a equação final pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
\rightarrow C_i &= 2F_{pimin} \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) = 2l_{imax} \left(\frac{dP_i}{dp_i}\right) \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right), \text{ ou} \\
C_i &= 2 \|Min_i\| \operatorname{sen}\left(\frac{\psi_i}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

As equações propostas para o cálculo do curso do atuador, do comprimento médio e do ponto de fixação dependem do valor  $F_{pimin}$ . Para encontrar o maior valor possível para  $F_{pimin}$ , que resulta no menor valor para  $\bar{J}_{i,i}$  e a menor transmissão mecânica, é necessário uma restrição extra. Esta restrição é o comprimento morto do atuador,  $D_{li}$ , usado na seguinte restrição:

$$C_i \leq P_{imin} - D_{li}, \tag{A.76}$$

e

$$P_{imax} \leq 2P_{imin} - D_{li}, \quad (\text{A.77})$$

Para ser obtida a menor transmissão mecânica deve ser usado o maior curso possível, o que resulta em:

$$C_i = P_{imin} - D_{li}. \quad (\text{A.78})$$

Para calcular o maior valor de  $F_{pimin}$  possível para um dado braço, primeiro se deve escrever  $C_i$  em função de  $P_{imed}$  e  $D_{li}$ , resultando em:

$$P_{imin} = P_{imed} - \frac{C_i}{2}, \quad (\text{3.39})$$

ou

$$C_i = \frac{2}{3}(P_{imed} - D_{li}). \quad (\text{A.79})$$

Substituindo na Equação 3.41 e usando a definição de  $P_{imed}$  da Equação 3.37:

$$2F_{pimin} \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) = \frac{2}{3} \left( \sqrt{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2} - D_{li} \right), \quad (\text{A.80})$$

ou

$$\rightarrow 3F_{pimin} \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + D_{li} = \sqrt{\|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2}. \quad (\text{A.81})$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação encontra-se:

$$9F_{pimin}^2 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + 6F_{pimin} \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) D_{li} + D_{li}^2 = \|Max_i\|^2 - F_{pimin}^2, \quad (\text{A.82})$$

ou

$$F_{pimin}^2 \left( 9 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + 1 \right) + 6F_{pimin} \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) D_{li} + D_{li}^2 - \|Max_i\|^2 = 0. \quad (\text{A.83})$$

Usando a fórmula para encontrar as raízes de uma equação de 2º grau para isolar  $F_{pimin}$ :

$$F_{pimin} = \frac{-6 \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) D_{li} \pm \sqrt{36 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) D_{li}^2 - 4 \left( 9 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + 1 \right) (D_{li}^2 - \|Max_i\|^2)}}{2 \left( 9 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + 1 \right)}. \quad (\text{A.84})$$

Simplificando a Equação A.84 chega-se à equação final:

$$F_{pimin} = \frac{-3 \tan\left(\frac{\psi_i}{2}\right) D_{li} \pm \sqrt{\|Max_i\|^2 \left( 9 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + 1 \right) - D_{li}^2}}{\left( 9 \tan^2\left(\frac{\psi_i}{2}\right) + 1 \right)}. \quad (\text{3.36})$$

A Equação 3.36 expressa a relação entre o erro de posicionamento do atuador  $i$  e o erro da extremidade do braço, em função do curso angular  $\psi_i$  da junta, do comprimento morto  $D_{li}$  do atuador, e do ponto de fixação do atuador pré-definido. É válida apenas quando o segundo ponto de fixação for o ideal, calculado pela Equação 3.40, e as Equações 3.37 e 3.41 forem utilizadas para calcular o comprimento médio e o curso, respectivamente, do atuador  $i$ .

#### A.6 Seção 4.2.2

A ferramenta aplica forças de peso e inércia sobre a extremidade do braço. O valor da força de peso da ferramenta pode ser calculada pela seguinte equação:

$$\vec{F}_{g_{end}} = m_{end} \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_{end} g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.85})$$

onde as três componentes do vetor representam, de cima para baixo, a força horizontal, vertical, e o momento em torno do eixo  $z$ .

As forças de inércia que atuam sobre o ponto de massa que representa a ferramenta dependem da sua aceleração. Para tal, deve ser calculada a matriz Jacobiana referente a este ponto:

$$J_{end}(q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} -a_1 \text{sen}(q_1) - a_2 \text{sen}(q_{12}) - d_{end_s} & -a_2 \text{sen}(q_{12}) - d_{end_s} & -d_{end_s} \\ a_1 \text{cos}(q_1) + a_2 \text{cos}(q_{12}) + d_{end_c} & a_2 \text{cos}(q_{12}) + d_{end_c} & d_{end_c} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.86})$$

onde  $d_{end_s} = d_{end} \text{sen}(q_{13})$ ,  $d_{end_c} = d_{end} \text{cos}(q_{13})$ ,  $q_{12} = q_1 + q_2$ , e  $q_{13} = q_1 + q_2 + q_3$ .

A aceleração pode então ser calculada pela seguinte equação:

$$\vec{A}_{end} = J_{end} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \dot{J}_{end} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.87})$$

onde  $\dot{J}_{end}$  é a derivada da matriz Jacobiana com relação ao tempo. Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{A}_{end} = J'_{end} \vec{\ddot{q}} + \dot{J}'_{end} \vec{\dot{q}} + J''_{end} \ddot{q}_3 + J'''_{end} \dot{q}_3, \quad (\text{A.88})$$

onde  $J'_{end}$  contém as duas primeiras colunas de  $J_{end}$  e  $J''_{end}$  contém a terceira.

Durante uma simulação, os valores  $q_3$ ,  $\dot{q}_3$  e  $\ddot{q}_3$  são definidos pela trajetória de modo a se obter o ângulo de orientação  $q_{13}$  desejado, bem como suas derivadas, sendo assim dados de entrada. Portanto, as seguintes equações podem ser utilizadas:



$$q_3 = q_{13} - q_1 - q_2, \quad (\text{A.89})$$

$$\dot{q}_3 = \dot{q}_{13} - \dot{q}_1 - \dot{q}_2, \quad (\text{A.90})$$

e

$$\ddot{q}_3 = \ddot{q}_{13} - \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2. \quad (\text{A.91})$$

Aplicando estas equações na Equação A.88 obtém-se:

$$\vec{A}_{end} = (\mathbf{J}'_{end} - \mathbf{J}'''_{end})\vec{q} + (\dot{\mathbf{J}}'_{end} - \dot{\mathbf{J}}'''_{end})\dot{q} + \mathbf{J}''_{end}\ddot{\theta}_3 + \dot{\mathbf{J}}''_{end}\dot{\theta}_3, \quad (\text{A.92})$$

onde  $\mathbf{J}'''_{end}$  e  $\dot{\mathbf{J}}'''_{end}$  são matrizes 2 x 2 com a terceira coluna de  $\mathbf{J}_{end}$  e  $\dot{\mathbf{J}}_{end}$  repetidas duas vezes.

Avaliando o resultado dos termos  $(\mathbf{J}'_{end} - \mathbf{J}'''_{end})$  e  $(\dot{\mathbf{J}}'_{end} - \dot{\mathbf{J}}'''_{end})$  é possível constatar que o resultado é similar à matriz Jacobiana do braço,  $\mathbf{J}$ , e sua derivada  $\dot{\mathbf{J}}$ , mas com a terceira linha zerada. Assim, pode-se escrever:

$$\vec{A}_{end} = \mathbf{J}'\vec{q} + \dot{\mathbf{J}}\dot{q} + \mathbf{J}''_{end}\ddot{\theta}_3 + \dot{\mathbf{J}}''_{end}\dot{\theta}_3, \quad (\text{4.11})$$

onde

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} -a_1 \text{sen}(q_1) - a_2 \text{sen}(q_{12}) & -a_2 \text{sen}(q_{12}) \\ a_1 \text{cos}(q_1) + a_2 \text{cos}(q_{12}) & a_2 \text{cos}(q_{12}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{4.12})$$

e

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -a_1 \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 - a_2 \text{cos}(q_{12}) \dot{q}_{12} & -a_2 \text{cos}(q_{12}) \dot{q}_{12} \\ -a_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - a_2 \text{sen}(q_{12}) \dot{q}_{12} & -a_2 \text{sen}(q_{12}) \dot{q}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.93})$$

Com a aceleração é possível calcular as forças de inércia:

$$\vec{F}_{I_{end}} = \begin{bmatrix} -m_{end} & 0 & 0 \\ 0 & -m_{end} & 0 \\ 0 & 0 & -I_{end} \end{bmatrix} \vec{A}_{end} = -\mathbf{M}_{end} \vec{A}_{end}. \quad (\text{A.94})$$

As forças calculadas são aplicadas sobre o ponto de massa, mas este se encontra à uma distância  $d_{end}$  da extremidade do braço. É simples, no entanto, aplicá-las diretamente sobre a extremidade do braço, caso seja também aplicado o momento equivalente:

$$\vec{F}_{end} = \mathbf{T}_{end}(\vec{F}_{I_{end}} + \vec{F}_{g_{end}}), \quad (\text{A.95})$$

onde

$$\mathbf{T}_{end} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d_{end} \text{sen}(q_{13}) & d_{end} \text{cos}(q_{13}) & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{4.9})$$

sendo que esta equação é equivalente à Equação 4.8.

Para compatibilidade com a Equação 4.7, devem ser calculados os torques provocados por esta força sobre as juntas do braço. Isto pode ser feito por meio da seguinte equação:

$$\vec{\tau}_{end} = \mathbf{J}^T \vec{F}_{end}, \quad (\text{A.96})$$

onde a transposta do jacobiano,  $\mathbf{J}^T$ , é igual à distância entre a extremidade do braço e as juntas.

Substituindo as Equações A.85, A.94 e A.95 na Equação A.96, obtém-se:

$$\vec{\tau}_{end} = \mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} (-\mathbf{M}_{end} \vec{A}_{end} + m_{end} \vec{g}). \quad (\text{A.97})$$

Usando a Equação 4.14 é possível reescrever a Equação A.97 da seguinte forma:

$$\vec{\tau}_{end} = \mathbf{H}_{end} \vec{q} + \mathbf{C}_{end} \dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_{g_{end}}, \quad (4.15)$$

onde

$$\mathbf{H}_{end} = -\mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} \mathbf{M}_{end} \mathbf{J}', \quad (4.16)$$

$$\mathbf{C}_{end} = -\mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} \mathbf{M}_{end} \dot{\mathbf{J}}, \quad (4.17)$$

e

$$\vec{\tau}_{g_{end}} = \mathbf{J}^T \mathbf{T}_{end} [m_{end} \vec{g} - \mathbf{M}_{end} (\mathbf{J}''_{end} \ddot{q}_{13} + \mathbf{J}'_{end} \dot{q}_{13})]. \quad (4.18)$$

Neste caso, o vetor de torques gravitacionais  $\vec{\tau}_{g_{end}}$  também contém o torque devido à velocidade e acelerações angulares da junta do punho.

## A.7 Seção 4.2.3

### A.7.1 Forças ativas

A Equação 4.19 também pode ser deduzida a partir de uma análise das forças sendo aplicadas sobre cada elemento do braço, os quais são mostrados na Figura A.2 (a). Estas forças são mostradas na Figura A.2 (b) e na Figura A.3, sobre o elo  $i$  e  $i - 1$ .

Pela lei dos senos se pode definir um valor  $S_i$ :

$$\frac{\text{sen}(p\alpha_i)}{\|B_i\|} = \frac{\text{sen}(p\beta_i)}{P_i} = \frac{\text{sen}(p\zeta_i)}{\|A_i'\|} = S_i. \quad (\text{A.98})$$

O momento nos elos não é zero, pois o braço não está em equilíbrio. Para o elo  $i$ , o momento em torno da junta  $i$  é dado pela seguinte equação:

$$M_i = -\|B_i\| F_l \text{sen}(p\zeta_i) = -F_l \|B_i\| \|A_i'\| S_i, \quad (\text{A.99})$$

enquanto que para o elo  $i - 1$ , a seguinte equação calcula o momento em torno da junta  $i$ :

$$M_{i-1} = \|A_i\| F_l \text{sen}(p\alpha_i) = F_l \|B_i\| \|A_i'\| S_i = -M_i. \quad (\text{A.100})$$

O mesmo resultado é obtido se for calculado o momento em torno de algum outro ponto, mas isto requer o cálculo de  $F_{R1}$  e  $F_{R2}$ , o que pode ser feito por balanço de forças em x e y para cada elo.

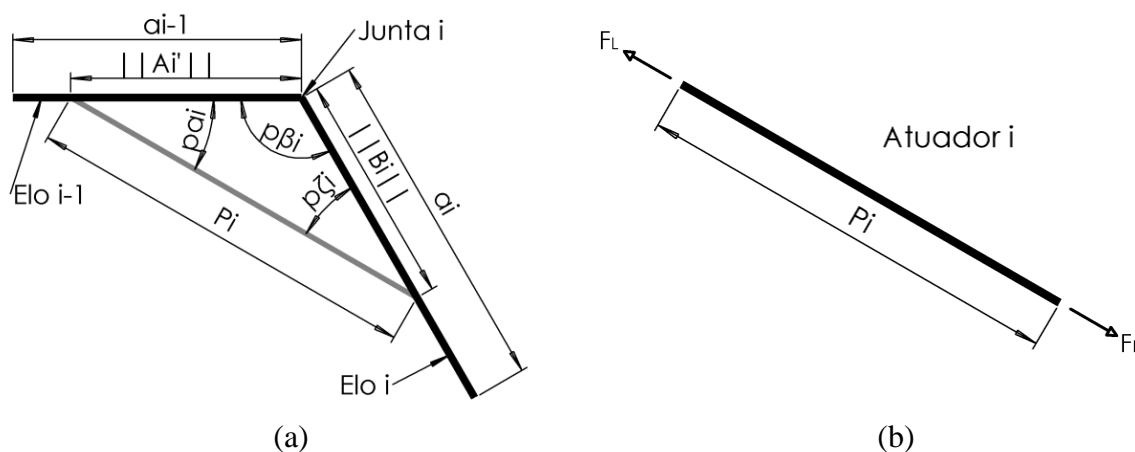


Figura A.2 – Desenhos esquemáticos mostrando (a) os elos ligados ao atuador  $i$  à, inclusive os ângulos e dimensões envolvidas, e (b) a força axial  $F_L$  aplicada pelo atuador  $i$ .

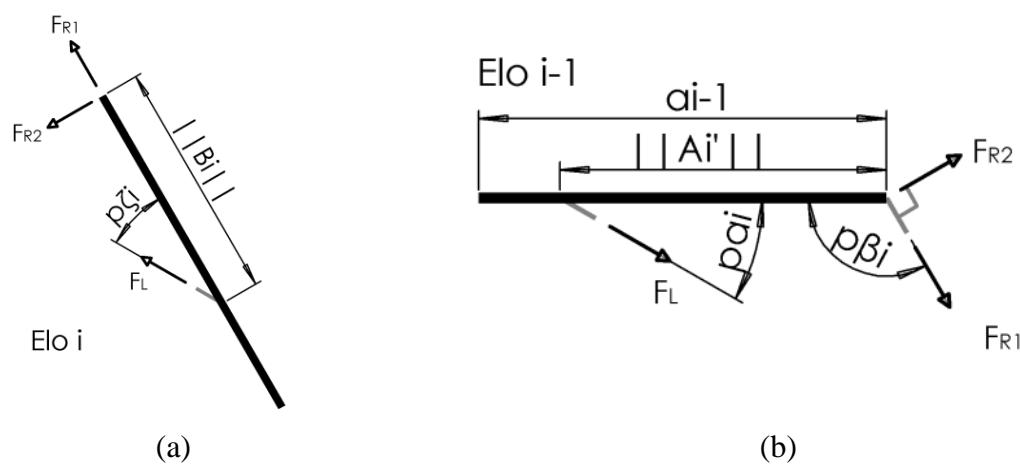


Figura A.3 – Desenhos esquemáticos mostrando as forças que atuam: (a) sobre o elo  $i$ , e (b) sobre o elo  $i - 1$ .

Como  $M_{i-1} = -M_i$  é possível transformar a força linear aplicada pelo atuador em um torque aplicado pela junta sobre os elos. Para determinar o valor deste torque equivalente devemos calcular o valor de  $S_i$ :

$$S_i = \frac{\text{sen}(p\beta_i)}{P_i} = \frac{\sqrt{1 - \cos(p\beta_i)^2}}{P_i}. \quad (\text{A.101})$$

Aplicando a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned}
S_i &= \frac{1}{P_i} \sqrt{1 - \left[ \frac{\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2}{2\|A_i'\|\|B_i\|} \right]^2} \\
&= P_i \sqrt{\frac{4\|A_i'\|^2\|B_i\|^2 - (\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2)^2}{4\|A_i'\|^2\|B_i\|^2}},
\end{aligned} \tag{A.102}$$

ou

$$S_i = \frac{\sqrt{4\|A_i'\|^2\|B_i\|^2 - (\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2)^2}}{\pm 2P_i\|A_i'\|\|B_i\|}. \tag{A.103}$$

Substituindo na Equação A.99:

$$M_i = -\|B_i\|F_l \operatorname{sen}(p\zeta_i) = -F_l \cdot \frac{\sqrt{4\|A_i'\|^2\|B_i\|^2 - (\|A_i'\|^2 + \|B_i\|^2 - P_i^2)^2}}{\pm 2P_i}. \tag{A.104}$$

Pela definição de  $\bar{J}_{i,i}$  dada na Equação 3.19 pode-se então escrever:

$$M_i = \frac{F_l}{\bar{J}_{i,i}}, \tag{A.105}$$

o que é equivalente à Equação 4.19 pois a matriz  $\bar{J}$  só contém elementos na diagonal.

### A.7.2 Forças passivas

Pela segunda lei de Newton, considerando a gravidade, é possível definir as seguintes equações:

$$FA_{i_x} = m_{i_{cil}} [\ddot{x}_{i_{cil}} + g \operatorname{sen}(a\theta_i)], \tag{A.106}$$

$$FB_{i_x} = m_{i_{haste}} [\ddot{x}_{i_{haste}} + g \operatorname{sen}(a\theta_i)], \tag{A.107}$$

$$FA_{i_y} + FB_{i_y} = m_{i_{total}} [\ddot{y}_{i_{cg}} + g \cos(a\theta_i)], \tag{A.108}$$

e

$$M_{i_{cg}} = -FA_{i_y} CG_{i_{total}} + FB_{i_y} (P_i - CG_{i_{total}}) = I_{i_{total}} \ddot{a}\theta_i + I_{i_{total}} \dot{a}\theta_i. \tag{A.109}$$

A Equação A.106 relaciona a aceleração horizontal do cilindro com a força horizontal que ele aplica sobre o ponto  $A_i$ , considerando também a componente da aceleração da gravidade. Similarmente, a Equação A.107 relaciona a aceleração horizontal da haste com a força horizontal que ela aplica sobre o ponto  $B_i$ . Estas duas equações consideram o cilindro e a haste como se fossem elementos separados porque eles podem deslizar um em relação ao outro na direção  $x$ . Na direção  $y$ , no entanto, as partes não podem se deslocar entre si, e por

isso o atuador deve ser tratado como um único corpo. Assim, a Equação A.108 relaciona a aceleração vertical do centro de gravidade do atuador com o somatório de forças em  $y$ , considerando a componente vertical da gravidade. Por fim, a Equação A.109 relaciona o momento sobre o centro de gravidade do atuador, causado pelas forças verticais, com a sua aceleração angular. Também aparece um termo  $I_{i_{total}} \dot{a}\theta_i$  pois o momento de inércia do atuador depende do seu comprimento, que é variável.

Resolvendo o sistema de equações dado pelas Equações A.108 e A.109 chega-se à:

$$FA_{iy} = \frac{m_{i_{total}} [\ddot{y}_{i_{cg}} + g \cos(a\theta_i)] (P_i - CG_{i_{total}}) - \ddot{a}\theta_i I_{i_{total}} - \dot{a}\theta_i \dot{I}_{i_{total}}}{P_i}, \quad (\text{A.110})$$

e

$$FB_{iy} = \frac{m_{i_{total}} [\ddot{y}_{i_{cg}} + g \cos(a\theta_i)] CG_{i_{total}} + \ddot{a}\theta_i I_{i_{total}} + \dot{a}\theta_i \dot{I}_{i_{total}}}{P_i}. \quad (\text{A.111})$$

Combinando as Equações A.106, A.107, A.110 e A.111 em dois vetores  $\overrightarrow{FA}_i$  e  $\overrightarrow{FB}_i$  chega-se às Equações 4.20 e 4.21.

O momento de inércia do atuador  $i$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$I_{i_{total}} = I_{i_{cil}} + I_{i_{haste}} + m_{i_{cil}} (CG_{i_{cil}} - CG_{i_{total}})^2 + m_{i_{haste}} (CG_{i_{haste}} - CG_{i_{total}})^2, \quad (\text{4.24})$$

que pode ser reescrito agrupando-se os termos quadráticos:

$$I_{a_T} = I_{a_{cil}} + I_{a_{haste}} + \frac{m_{i_{cil}} m_{i_{haste}} (P_i - CG_{i_{haste}} - CG_{i_{cil}})^2}{m_{i_{total}}}. \quad (\text{A.112})$$

Derivando em relação ao tempo, a única variável é  $P_i$ , sendo que as demais são constantes. Assim, tem-se que:

$$\frac{dI_{a_T}}{dt} = 2 \frac{m_{i_{cil}} m_{i_{haste}}}{m_{i_{total}}} (P_i - CG_{i_{haste}} - CG_{i_{cil}}) \frac{dP_i}{dt}, \quad (\text{A.113})$$

que pode ser reescrito usando a propriedade  $\frac{dP_i}{dt} = \frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i$ :

$$\dot{I}_{i_{total}} = 2 \frac{m_{i_{cil}} m_{i_{haste}}}{m_{i_{total}}} (P_i - CG_{i_{haste}} - CG_{i_{cil}}) \frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i. \quad (\text{4.25})$$

Para o cálculo do ângulo entre atuador  $i$  e o plano horizontal,  $a\theta_i$ , são usadas relações trigonométricas com base nos ângulos e dimensões mostrados na Figura 4.4:

$$a\theta_i = q_{(i-1)} + p\alpha_i - (\pi - \phi_{Ai}), \quad (\text{4.26})$$

com a lei dos cossenos:

$$\cos(p\alpha_i) = \frac{\|A_i'\|^2 + P_i^2 - \|B_i\|^2}{2\|A_i'\|P_i}, \quad (\text{A.114})$$

e com a lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(p\alpha_i)}{\|B_i\|} = \frac{\sin(\phi_{A_i} - q_i - \phi_{B_i})}{P_i}, \quad (\text{A.115})$$

lembrando que, para  $i = 1$   $q_{(i-1)} = 0$ , e para  $i = 2$ ,  $q_{(i-1)} = q_1$ . Caso houvesse um terceiro atuador, para  $i = 3$  então  $q_{(i-1)} = q_1 + q_2$ , mas isto não é utilizado no presente trabalho.

Combinando esta última equação com a Equação 3.19 pode-se escrever:

$$\text{sen}(p\alpha_i) = \frac{1}{\|A_i'\|} \left( -\frac{dP_i}{dq_i} \right). \quad (\text{A.116})$$

Combinando as Equações A.114 e A.116, e multiplicando ambas por  $\|A_i'\|$ , é possível definir um valor para  $p\alpha_i$ , que pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$p\alpha_i = \text{atan2}(\text{sen}(p\alpha_i), \cos(p\alpha_i)) = \text{atan2} \left( -\frac{dP_i}{dq_i}, \frac{\|A_i'\|^2 + P_i^2 - \|B_i\|^2}{2P_i} \right). \quad (\text{4.27})$$

Derivando a Equação 4.26 com relação ao tempo, encontra-se:

$$a\theta_i = p\dot{\alpha}_i + \dot{q}_{i-1}. \quad (\text{A.117})$$

A derivada de  $p\alpha_i$  pode ser calculada usando a seguinte fórmula:

$$\frac{d}{dt} [\text{atan2}(A(t), B(t))] = \frac{A(t)\dot{B}(t) - \dot{A}(t)B(t)}{A(t)^2 + B(t)^2}, \quad (\text{A.118})$$

que quando aplicada resulta em:

$$p\dot{\alpha}_i = \frac{\frac{\|B_i\|^4 - \|A_i'\|^4}{4P_i^2} + \frac{P_i^2}{4} - \frac{\|B_i\|^2}{2} + \left(\frac{dP_i}{dq_i}\right)^2}{\|A_i'\|^2} q_i, \quad (\text{A.119})$$

que pode ser reescrito de forma que:

$$p\dot{\alpha}_i = J_{ai} \dot{q}_i, \quad (\text{A.120})$$

onde  $J_{ai}$  pode ser simplificado ainda mais e reescrito da seguinte forma:

$$J_{ai} = \frac{\|B_i\|^2 - \|A_i'\|^2}{2P_i^2} + \frac{1}{2}. \quad (\text{4.29})$$

Assim, a velocidade angular do atuador  $i$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$a\theta_i = J_{ai} \dot{q}_i + \dot{q}_{i-1}. \quad (\text{4.28})$$

A aceleração angular pode ser encontrada mais facilmente, bastando derivar  $\dot{a}\theta_i$  novamente:

$$p\ddot{\alpha}_i = J_{\alpha i} \ddot{q}_i + \dot{J}_{\alpha i} \dot{q}_i, \quad (\text{A.121})$$

o que resulta em:

$$\ddot{a}\theta_i = p\ddot{\alpha}_i + \ddot{q}_{i-1} = J_{\alpha i} \ddot{q}_i + \dot{J}_{\alpha i} \dot{q}_i + \ddot{q}_{i-1}, \quad (\text{4.30})$$

onde  $\dot{J}_{\alpha i}$  é a derivada de  $J_{\alpha i}$ :

$$\dot{J}_{\alpha i} = \frac{\|A_i'\|^2 - \|B_i\|^2}{P_i^3} \frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i. \quad (\text{4.31})$$

Para calcular as forças de reação do atuador ainda é necessário calcular as acelerações  $\ddot{x}_{a_{cil}}$ ,  $\ddot{x}_{a_{haste}}$  e  $\ddot{y}_{a_{CG}}$ . Para tal se pode continuar usando como referência o sistema de coordenadas local do atuador para simplificar algumas equações, mas quando o braço é movimentado os atuadores se rotacionam, e portanto o seu sistema de coordenadas local constitui um referencial rotacional ao invés de um referencial inercial. Portanto, as equações para o cálculo das acelerações são baseadas na seguinte expressão, dada por Taylor, 2005:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_r + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}, \quad (\text{A.122})$$

onde  $\vec{a}_I$  é a aceleração em um sistema inercial, usada para o cálculo das forças inerciais,  $\vec{a}_r$  é a aceleração no sistema rotacional,  $\vec{\Omega}$  é a velocidade de rotação do referencial rotacional em relação ao referencial inercial,  $\vec{v}_r$  é a velocidade no sistema rotacional, e  $\vec{r}$  é a posição no sistema rotacional.

Como é necessário o cálculo de  $\ddot{x}_{i_{cil}}$  e  $\ddot{x}_{i_{haste}}$  separadamente, a Equação A.122 deve ser usada em dois casos, um para calcular a aceleração do cilindro e outro a da haste. A velocidade angular  $\vec{\Omega}$  em ambos os casos é a mesma, no entanto, e é dada por:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{a}\theta_i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.123})$$

enquanto que a sua derivada pode ser expressa por:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{a}\theta_i \end{bmatrix}. \quad (\text{A.124})$$

Para o cilindro, os outros termos da equação são dados por:

$$\vec{r}_{cil} = \begin{bmatrix} \|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + CG_{i_{cil}} \\ \|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.125})$$

$$\vec{v}_{r_{cil}} = \frac{d(\vec{r}_{cil})}{dt} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \\ \|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} (-p\dot{\alpha}_i), \quad (\text{A.126})$$

e

$$\vec{a}_{r_{cil}} = \frac{d^2(\vec{r}_{cil})}{dt^2} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \\ \|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} (-p\ddot{\alpha}_i) + \begin{bmatrix} -\|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) \\ -\|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} (-p\dot{\alpha}_i)^2, \quad (\text{A.127})$$

onde

$$\zeta_{ai} = \phi'_{Ai} - a\theta_i + \dot{q}_{i-1} = \phi'_{Ai} - p\alpha_i - \phi_{Ai} + \pi. \quad (\text{4.35})$$

Resolvendo a Equação A.122 com estes parâmetros, e usando as definições de  $p\dot{\alpha}_i$  e  $p\ddot{\alpha}_i$  dadas pelas Equações A.120 e A.121, obtém-se:

$$\vec{a}_{i_{cil}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{i_{cil}} \\ \ddot{y}_{i_{cil}} \end{bmatrix} = J_{i_{cil}} \vec{\ddot{q}} + J'_{i_{cil}} \vec{\dot{q}}, \quad (\text{4.32})$$

onde

$$J_{i_{cil}} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) & 0 \\ \|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + CG_{i_{cil}} & J_{ai} CG_{i_{cil}} \end{bmatrix}, \quad (\text{4.33})$$

e

$$J'_{i_{cil}} = \begin{bmatrix} -[\|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + CG_{i_{cil}}] \dot{q}_{i-1} & -J_{ai} CG_{i_{cil}} (J_{ai} \cdot \dot{q}_i + 2\dot{q}_{i-1}) \\ -\|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \dot{q}_{i-1} & J_{ai} CG_{i_{cil}} \end{bmatrix}, \quad (\text{4.34})$$

onde a terceira linha foi removida pois o interesse é apenas nas acelerações translacionais, pois a aceleração rotacional já foi calculada. Assim,  $\vec{a}_{i_{cil}}$  é um vetor com dois componentes onde o superior,  $\ddot{x}_{i_{cil}}$ , representa a aceleração na direção  $x$  local, e o inferior,  $\ddot{y}_{i_{cil}}$ , representa a aceleração em  $y$ . Similarmente, para a haste pode ser escrito:

$$\vec{r}_{haste} = \begin{bmatrix} \|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) + (P_i - CG_{i_{haste}}) \\ \|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.128})$$

$$\vec{v}_{r_{haste}} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \text{sen}(\zeta_{ai}) \\ \|A_i\| \cos(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} (-p\dot{\alpha}_i) + \begin{bmatrix} \frac{dP_i}{dq_i} \dot{q}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.129})$$

e



$$\begin{aligned} \vec{a}_{r_{haste}} = & \begin{bmatrix} -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) \\ \|A_i\| \operatorname{cos}(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} (-p\ddot{\alpha}_i) + \begin{bmatrix} -\|A_i\| \operatorname{cos}(\zeta_{ai}) \\ -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} (-p\dot{\alpha}_i)^2 \\ & + \begin{bmatrix} \frac{d^2 P_i}{dq_i^2} \dot{q}_i^2 + \frac{dP_i}{dq_i} \ddot{q}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

onde  $\frac{d^2 P_i}{dq_i^2}$  pode ser obtido pela seguinte equação:

$$\frac{d^2 P_i}{dq_i^2} = -\frac{dP_i}{dq_i} \tan(\phi_{Ai} - q_i - \phi_{Bi}) - \left(\frac{dP_i}{dq_i}\right)^2 / P_i, \quad (4.41)$$

o que resulta em:

$$\vec{a}_{i_{haste}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{i_{haste}} \\ \ddot{y}_{i_{haste}} \end{bmatrix} = J_{i_{haste}} \vec{\ddot{q}} + J'_{i_{haste}} \vec{\dot{q}}, \quad (4.38)$$

onde

$$J_{i_{haste}} = \begin{bmatrix} -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) & \frac{dP_i}{dq_i} \\ \|\|A_i\| \operatorname{cos}(\zeta_{ai}) + P'_i & J_{ai} P'_i \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

onde  $P'_i = P_i - CG_{i_{haste}}$ , e

$$J'_{i_{haste}} = \begin{bmatrix} -[\|A_i\| \operatorname{cos}(\zeta_{ai}) + P'_i] \dot{q}_{i-1} & -J_{ai} P'_i (J_{ai} \dot{q}_i + 2\dot{q}_{i-1}) + \frac{d^2 P_i}{dq_i^2} \dot{q}_i \\ -\|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) \dot{q}_{i-1} & J_{ai} P'_i + 2 \frac{dP_i}{dq_i} (J_{ai} \dot{q}_i + \dot{q}_{i-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Para calcular os torques equivalentes sobre as juntas do braço, os momentos sobre as juntas  $i$  e  $i - 1$  devem ser calculados:

$$g\tau_{ai} = FB_x \|B_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{bi}) - FB_y \|B_i\| \operatorname{cos}(\zeta_{bi}), \quad (\text{A.131})$$

e

$$g\tau_{ai-1} = (FA_x + FB_x) \|A_i\| \operatorname{sen}(\zeta_{ai}) - (FA_y + FB_y) \|A_i\| \operatorname{cos}(\zeta_{ai}) - FB_y P_i, \quad (\text{A.132})$$

onde

$$\phi'_{Ai} = \operatorname{atan}(A_{iy}/A_{ix}), \quad (4.36)$$

e

$$\|A_i\| = \sqrt{A_{ix}^2 + A_{iy}^2}. \quad (4.37)$$

Substituindo os valores de  $FA_x$ ,  $FA_y$ ,  $FB_x$  e  $FB_y$  que podem ser calculados pelas Equações 4.20 e 4.21, calculando para ambos os atuadores e agrupando os termos que dependem de  $\vec{q}_i$  e  $\vec{\dot{q}}_i$ , chega-se à seguinte equação:

$$\vec{\tau}_{ai} = (\mathbf{M}_{a_1} + \mathbf{M}_{a_2})\ddot{\vec{q}} + (\mathbf{C}_{a_1} + \mathbf{C}_{a_2})\dot{\vec{q}} + \vec{\tau}_{ag_1}(\vec{q}) + \vec{\tau}_{ag_2}(\vec{q}), \quad (4.46)$$

que calcula o torque equivalente causado pelas forças de peso próprio e inércia dos atuadores sobre ambas as juntas do braço. Para calcular os componentes das matrizes e vetores desta equação, deve-se expandir e simplificar o resultado das Equações A.131 e A.132, usando aritmética básica. Isto não é mostrado aqui devido à extensão dos cálculos necessários, mas é possível usar um software de manipulação algébrica, como o Mathcad®, para verificar os resultados obtidos e mostrados na Seção 4.2.3.2.

## APÊNDICE B – Modelo detalhado do braço

Como pode ser visto na Figura 4.8, a estrutura do elo não termina sobre os pontos de acoplamento das juntas. Existe uma continuação para que os rolamentos dos pinos de acoplamento possam ser incorporados ao elo. Esta continuação é feita de modo que a distância extra adicionada seja igual à metade da altura da seção na junta correspondente, como mostrado na Figura B.1. Desta forma, estas finalizações possuem um formato trapezoidal. Finalizações com formato circular também poderiam ser utilizadas, porém isto dificultaria a fabricação e por isso não estão sendo consideradas.

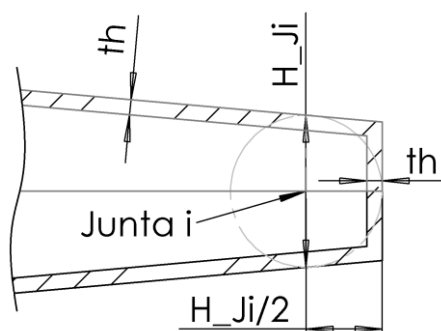


Figura B.1 – Desenho esquemático mostrando as dimensões usadas para uma ponta qualquer de um elo que faça o acoplamento com uma das juntas.

No caso em que a componente  $x$  do ponto  $B_2$  seja negativa, o segundo elo possui um projeto básico diferente ao apresentado na Seção 4.3.2, o qual é mostrado na Figura B.2.

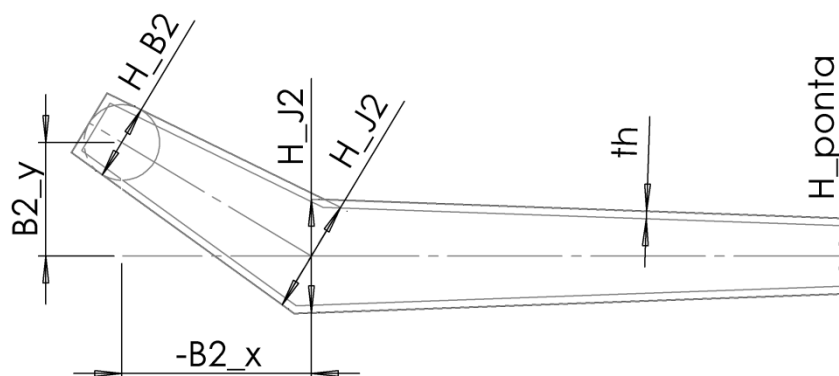


Figura B.2 – Desenho esquemático mostrando o projeto da estrutura básica do segundo elo no caso em que a componente  $x$  do ponto  $B_2$  seja negativa

A região das juntas deve ser reforçada para que o esforço do pino possa ser transmitido à estrutura. No modelo, este reforço consiste em uma “luva” para o pino, e uma região em torno da junta onde a espessura das chapas laterais é aumentada, por exemplo através da soldagem de chapas extras. Esta espessura extra é importante, pois a tensão cisalhante é grande na região próxima às juntas e conexões, e são as chapas laterais verticais que resistem este

esforço. Existem três parâmetros para cada junta que definem este reforço:  $d_{luva_i}$ ,  $w_{ref_i}$ , e  $tb_{ref_i}$ , além do diâmetro do pino  $d_{pin_i}$ . Um desenho esquemático mostrando o projeto deste reforço no Elo 1 pode ser visto na Figura B.3. A junta do Elo 2 é reforçada da mesma forma, com os parâmetros  $d_{luva_2}$ ,  $w_{ref_2}$  e  $tb_{ref_2}$  para a Junta 2, e  $w_{ref_{end}}$  e  $tb_{ref_{end}}$  para a ponta.

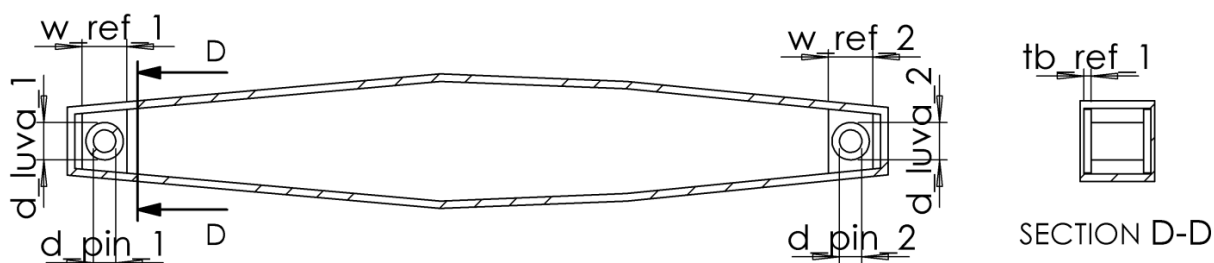


Figura B.3 – Desenho esquemático mostrando os parâmetros usados no projeto do reforço das juntas no Elo 1

A conexão com os atuadores pode ser feita de duas formas: em linha, através de um garfo de conexão, ou lateralmente, através de um pino. A escolha de qual forma utilizar depende da componente  $y$  do ponto de acoplamento correspondente, isto é, de  $B_{1y}$ ,  $A_{2y}$  ou  $B_{2y}$ . Se o absoluto desta componente for maior do que metade da altura da seção transversal da viga naquele ponto, ou seja, se o ponto de acoplamento se encontra fora da viga, então um garfo é utilizado; caso contrário o acoplamento é feito com um pino lateral. Existe uma exceção para o Elo 2 no caso em que  $B_{2x}$  for negativo: neste caso a escolha do uso de um garfo ou pino lateral é arbitrária.

Os acoplamentos devem ser reforçados com chapas laterais extras, assim como nos acoplamentos com as juntas. Estes reforços são centrados sobre os pontos  $B_{1x}$ ,  $A_{2x}$  ou  $B_{2x}$ , e são definidos por dois parâmetros cada, um para a largura e outro para a espessura. Eles são  $w_{B_1}$ ,  $tb_{B_1}$ ,  $w_{A_2}$  e  $tb_{A_2}$  para o Elo 1, como mostrado na Figura B.4, e  $w_{B_2}$  e  $tb_{B_2}$  para o Elo 2. Além disto, o segundo elo também possui um reforço na sua extremidade, com os parâmetros  $w_{end}$  e  $tb_{end}$ . A Figura B.5 mostra um modelo do Elo 1 com os reforços das conexões com os atuadores.

Caso um garfo seja utilizado para a conexão, então as chapas laterais, incluindo o reforço, são estendidos até o ponto de acoplamento, onde um pino faz a conexão com o atuador. Desta forma, o único parâmetro utilizado é a própria componente  $y$  do ponto correspondente, além do diâmetro do pino de acoplamento. A Figura B.6 mostra o projeto para o caso em que o acoplamento no ponto  $B_2$  é feita através de um garfo, pois  $B_{2y} > \frac{H_{B_2}}{2}$ .

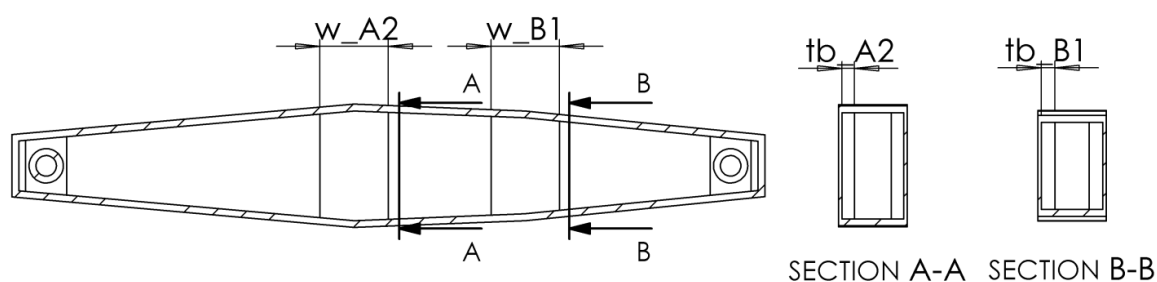


Figura B.4 – Desenho esquemático mostrando o projeto dos reforços dos pontos de acoplamento com os atuadores

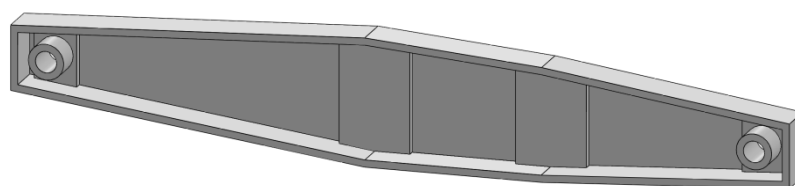


Figura B.5 – Modelo 3D de um corte do Elo 1, mostrando os reforços nos pontos de acoplamento com os atuadores.

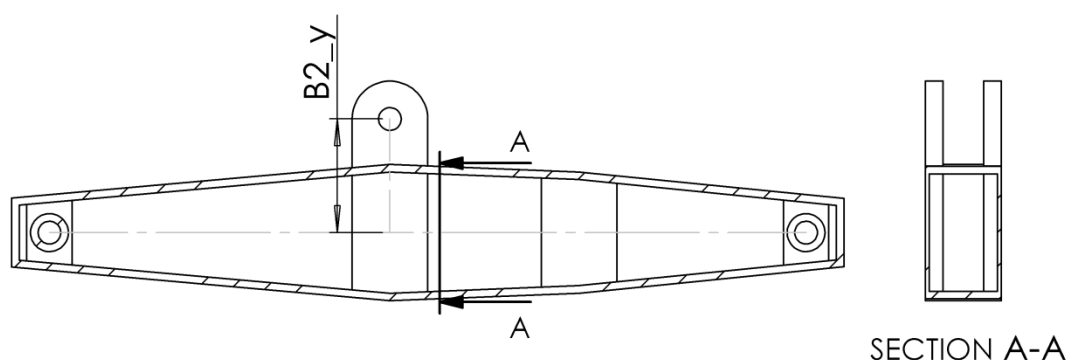


Figura B.6 – Desenho esquemático mostrando o projeto do garfo de acoplamento para o ponto  $B_2$ , no caso em que  $B_{2y} > \frac{H_{B_2}}{2}$ .

Caso um pino lateral seja utilizado, este deve ser fixado em ambas as paredes da viga, isto é, deve continuar por dentro da viga até alcançar a parede oposta. A posição vertical do pino é definida pela componente  $y$  do ponto correspondente, enquanto que o comprimento da parte externa do pino é igual à largura do outro elo. Ou seja, a parte externa de um pino lateral no primeiro elo terá um comprimento igual à largura do segundo elo, enquanto que um pino no segundo elo terá como comprimento a largura do primeiro elo. O seu diâmetro é definido pelo parâmetro  $d_{pin_{A_2}}$ ,  $d_{pin_{B_1}}$  ou  $d_{pin_{B_2}}$ , dependendo do ponto de acoplamento. Para aumentar a rigidez à flexão da parte externa de uma chapa de reforço é fixada à sua ponta, e esta se estende até a segunda junta, onde é fixada ao pino da junta por meio de um rolamento. A altura da chapa de reforço é igual à altura da seção transversal da viga na Junta 2, e a sua

espessura é igual à espessura das chapas laterais da viga, isto é,  $tb$ . Um projeto mostrando um caso em que um pino lateral é usado no ponto  $A_2$ , pois neste caso  $A_{2x} < \frac{H_{A_2}}{2}$ , é mostrado na Figura B.7. A Figura B.8 mostra um modelo tridimensional deste elo.

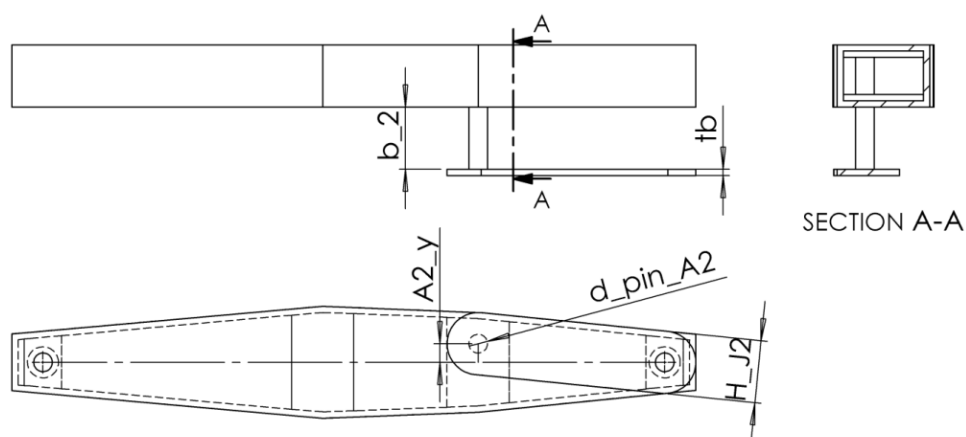


Figura B.7 – Desenho esquemático mostrando o projeto de um pino lateral, no caso em que  $A_{2y} < \frac{H_{A_2}}{2}$ .

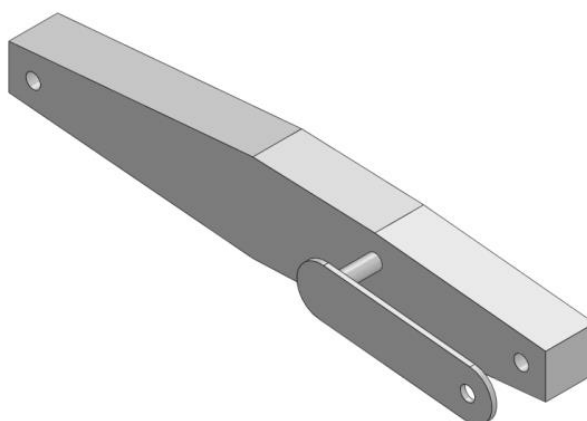


Figura B.8 – Modelo 3D com um pino lateral para acoplamento com um atuador, juntamente com a chapa de reforço

No caso em que  $B_{2x} < 0$ , então o acoplamento neste ponto pode ser feito em linha ou lateralmente. Se for escolhido um acoplamento lateral, então é utilizado o mesmo pino de acoplamento já mencionado. Se for escolhido um acoplamento em linha, no entanto, então deve ser feito um corte no elo de modo a formar um garfo para o acoplamento. O comprimento deste corte,  $L_{cut_2}$ , deve ser escolhido de modo a evitar que o atuador colida com as paredes do elo durante a operação do braço. A Figura B.9 mostra um modelo tridimensional em vista isométrica deste elo, mostrando este corte, enquanto que o desenho da Figura B.10 mostra as dimensões dos reforços utilizados no segundo elo.

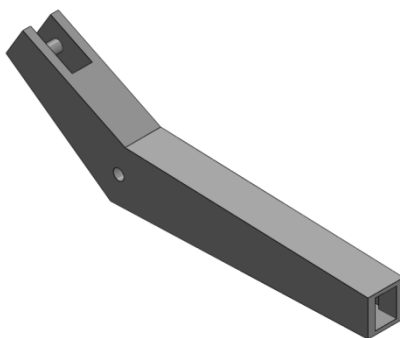


Figura B.9 – Modelo 3D do segundo elo com um acoplamento em linha tipo garfo no ponto  $B_2$  com  $B_{2x} < 0$

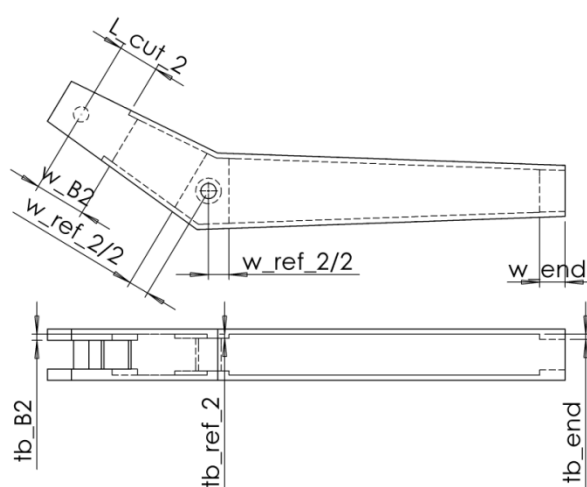


Figura B.10 – Desenho esquemático mostrando a região onde é feito o corte para o acoplamento com o atuador no ponto  $B_2$  com  $B_{2x} < 0$

Os pinos de acoplamento das juntas e dos atuadores podem ser modelados como corpos separados, incorporados ao modelo do braço através de contatos deslizantes. No entanto, isto provoca dificuldades numéricas na solução do sistema, o que aumenta em várias vezes o tempo necessário para seu processamento. Como o modelo desenvolvido está focado na determinação da flexibilidade da estrutura, e não na flexibilidade ou tensões nas juntas, os pinos podem ser incorporados diretamente na estrutura. Como os pinos devem ser feitos de um material com propriedades muito próximas de densidade e módulo de elasticidade ao utilizado para estrutura, sendo ambos de aço, esta incorporação é feita simplesmente adicionando material nos elos nos espaços que seriam ocupados por eles. No caso das juntas 1 e 2 é deixado apenas um espaço pequeno próximo às paredes dos elos para que exista uma geometria onde possa ser aplicada uma conexão do tipo pino do SolidWorks®, como pode ser visto na Figura B.11. Com isto o sistema pode ser resolvido muito mais rapidamente, embora os resultados próximos aos pinos possam ser pouco precisos.

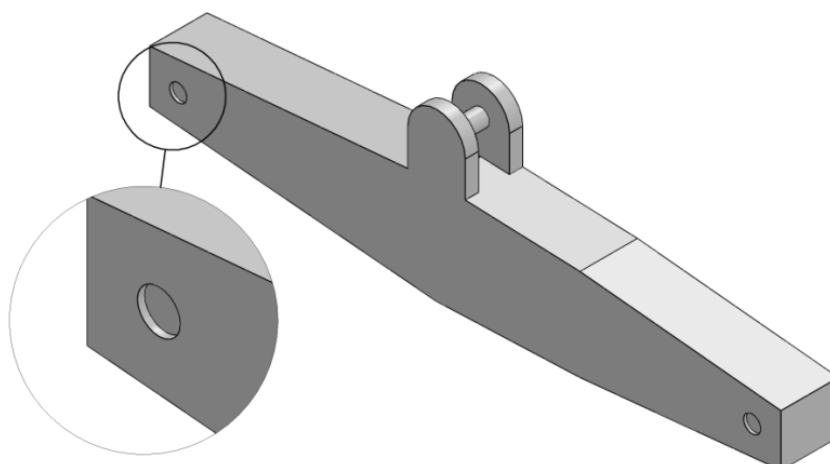


Figura B.11 – Modelo 3D de um Elo 1 com os pinos incorporados ao modelo. A vista do detalhe mostra a região da Junta 1 usada para aplicar a condição de pino do SolidWorks®.

Em um trabalho futuro onde seja de interesse os detalhes das regiões de acoplamento, pode-se utilizar a mesma metodologia apresentada aqui para o modelo do braço completo, e então usar os resultados desta simulação para determinar carregamentos de simulações menores, cada uma focada apenas na região próxima à um dos acoplamentos. Com isto é possível a obtenção de resultados precisos sem aumentar demasiadamente o tempo de processamento.

Os atuadores aplicam apenas forças axiais, pois são conectados à estrutura utilizando rolamentos esféricos, como pode ser visto na Figura B.12. Devido a limitações na análise por FEM do SolidWorks® isto é aproximado no modelo por 3 conjuntos de conexões do tipo pino, orientadas de modo que todos os eixos de rotação converjam sobre o ponto de acoplamento, similarmente ao utilizado no punho de robôs, onde três conexões rotacionais são utilizadas para aproximar um punho esférico, como pode ser visto na Figura B.13.



Figura B.12 – Foto mostrando o rolamento esférico em uma das extremidades de um cilindro hidráulico. [Parker®, 2018].



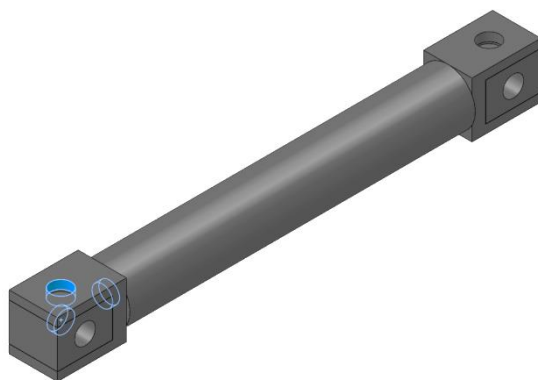


Figura B.13 – Modelo 3D de um atuador, mostrando as três conexões rotacionais utilizadas para aproximar uma junta esférica.

## APÊNDICE C – Modelo simplificado do braço

Os parâmetros de massa das extremidades dos elos são usados para a criação de elementos pontuais de massa. Para que seja possível o cálculo destes parâmetros, cada ponta é decomposta em três trapezoides isósceles, como mostrado na Figura C.1. O cálculo da massa, centro de gravidade e momento de inércia de massa de cada um destes trapezoides é feita por meio das Equações C.1, C.2 e C.3, dadas por Myers, 1962.

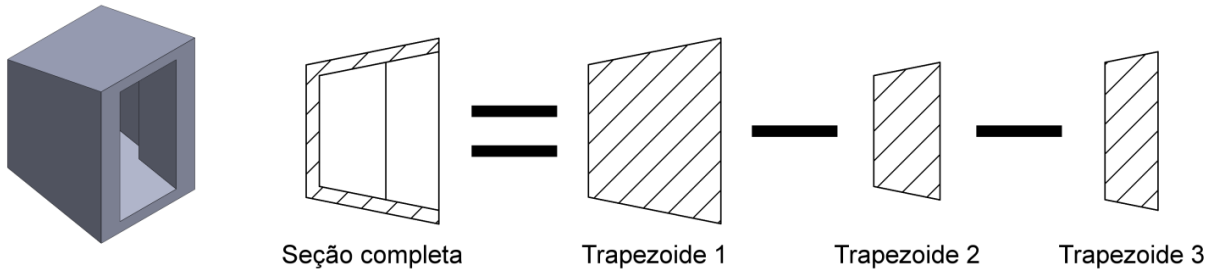


Figura C.1 – Desenho esquemático mostrando a composição da ponta de um elo através do uso de três trapezoides

$$m_{trap} = h_{trap} \frac{a_{trap} + b_{trap}}{2} w_{trap} \rho_{trap}, \quad (C.1)$$

$$CG_{x_{trap}} = \pm \frac{h_{trap}}{3} \frac{2a_{trap} + b_{trap}}{a_{trap} + b_{trap}} + x_{trap}, \quad (C.2)$$

$$I_{z_{trap}} = m_{trap} \left[ \frac{h_{trap}^2}{18} \left( 1 + \frac{2a_{trap}b_{trap}}{(a_{trap} + b_{trap})^2} \right) + \frac{a_{trap}^2 + b_{trap}^2}{24} \right], \quad (C.3)$$

onde  $h_{trap}$ ,  $a_{trap}$  e  $b_{trap}$  são as dimensões da seção do trapezoide, como mostrado na Figura C.2,  $w_{trap}$  é a sua profundidade,  $\rho_{trap}$  é a sua densidade,  $x_{trap}$  é a posição do lado  $b_{trap}$  do trapezoide em relação à origem do sistema local do elo,  $m_{trap}$  é a sua massa,  $CG_{x_{trap}}$  é a posição de seu centro de massa, onde o sinal  $\pm$  é escolhido dependendo da orientação da extremidade do braço, esquerda ou direita, e  $I_{z_{trap}}$  é o seu momento de inércia de massa em torno do seu centro de massa. Como o trapezoide 2 e 3 representam material removido das pontas, a sua densidade é considerada negativa; fora isto eles são tratados como corpos normais.

A Tabela C.1 mostra os valores usados para as dimensões de cada um dos trapézios que constituem a ponta de um elo.  $H_p$  é a altura da seção transversal da viga sobre a junta, podendo ser  $H_{J_1}$  ou  $H_{J_2}$ ,  $w_p$  é a largura do reforço da junta, podendo ser  $w_{ref_1}$  ou  $w_{ref_2}$ ,  $b_i$  é a largura do elo,  $td_p$  é a espessura do reforço,  $\rho$  é a densidade do material das chapas, e  $P_x$  é a coordenada  $x$  da junta, podendo ser 0 ou  $a_1$ .

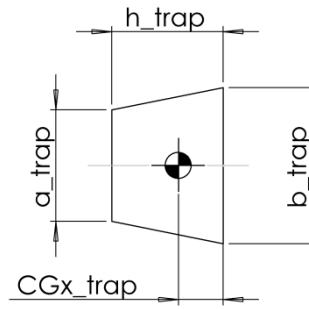


Figura C.2 – Desenho esquemático mostrando as dimensões da seção lateral de um trapézio, bem como a posição de seu centro de massa.

Tabela C.1 – Parâmetros das dimensões usadas para o cálculo da massa, centro de gravidade e momento de inércia de massa dos três trapézoides.

Trapezoide	$h_{trap}$	$a_{trap}$	$b_{trap}$	$w_{trap}$	$\rho_{trap}$	$x_{trap}$
1	$H_p/2$	$H_p(1 - \tan(\alpha_s))$	$H_p$	$b_i$	$\rho$	$P_x$
2	$H_p/2 - th$ $- w_p$	$H_p(1 - \tan(\alpha_s))$ $- 2 th \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_s}{2})$	$H_p - w_p \tan(\alpha_s)$ $- 2 th/\cos(\alpha_s)$	$b_i - 2tb$	$-\rho$	$P_x$ $\pm w_p$
3	$w_p$	$H_p - w_p \tan(\alpha_s)$ $- 2 th/\cos(\alpha_s)$	$H_p - 2 th/\cos(\alpha_s)$	$b_i - 2tb$ $- tb_p$	$-\rho$	$P_x$

Também é necessário calcular a massa da luva e do pino das juntas. Como o diâmetro interno da luva é igual ao diâmetro externo do pino,  $d_{pin_i}$ , podemos calcular a massa, o centro de gravidade e o momento de inércia dos dois juntos, usando as seguintes equações:

$$m_{lp} = \frac{\pi d_{luva_i}^2}{4} (b_i - 2tb - 2tb_p) \rho, \quad (C.4)$$

$$CG_{lp_x} = P_x, \quad (C.5)$$

$$I_{z_{lp}} = \frac{m_{lp}}{8} d_{luva_i}^2, \quad (C.6)$$

Com a massa, o centro de gravidade e o momento de inércia de massa de todos estes quatro componentes é possível calcular os valores para a ponta  $i$  como um todo. Para isso, podem ser usadas as seguintes equações, dadas por Myers, 1962:

$$m_{ponta_i} = \sum m_{partes}, \quad (C.7)$$

$$CG_{ponta_i} = \frac{\sum(m_{partes} CG_{partes})}{m_{ponta_i}}, \quad (C.8)$$

$$I_{ponta_i} = \sum I_{partes} + \sum m_{partes} (|CG_{partes} - CG_{ponta_i}|)^2, \quad (C.9)$$

onde, no caso,  $m_{partes}$  é o conjunto de massas das quatro partes que compõe a ponta,  $CG_{partes}$  é o conjunto de seus centros de gravidade, e  $I_{partes}$  é o conjunto de seus momentos de inércia de massa.

Existe uma exceção quando  $B_{2x} < 0$ . Neste caso, a Junta 2 do Elo 2 não está na extremidade do elo. Portanto, toma-se as massas dos trapezoides como sendo igual à zero, sendo considerada apenas a massa, centro de gravidade e momento de inércia da luva e do pino.

Com os valores de  $m_{ponta_i}$ ,  $CG_{ponta_i}$  e  $I_{ponta_i}$  calculados, as pontas são aplicadas no modelo como elementos de massa concentrada sobre os nós das juntas dos elos. Os carregamentos provocados por seus pesos e inércias são calculados nas seções 4.3.6 e 4.3.7, juntamente com os outros elementos.

A seguir, serão calculados os parâmetros de massa para a geometria extra dos pontos de acoplamento. Para os garfos, as partes extras são compostas pelos meio círculos em sua ponta e pelo pino de acoplamento, como mostrado na Figura C.3. As Equações C.10 à C.13, de Myers, 1962, mostram o cálculo dos parâmetros de inércia de ambos os semicírculos juntos, enquanto que o cálculo dos parâmetros do pino é feito pelas Equações C.14 à C.17. Os resultados obtidos podem ser combinados usando as Equações C.7, C.8 e C.9, e utilizados para criar um elemento de massa concentrada na ponta da viga do garfo.

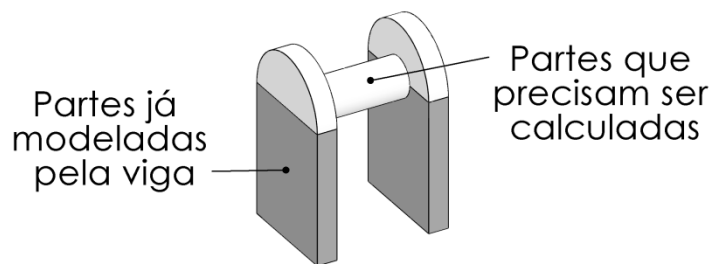


Figura C.3 – Modelo 3D mostrando as partes dos garfos que são modeladas diretamente, em cinza escuro, e as partes que têm seus parâmetros calculados separadamente, em cinza claro.

$$m_{sc} = \frac{\pi w_P^2}{8} (2 t_b + 2 t_{bP}) \rho, \quad (C.10)$$

$$CG_{scx} = P_x, \quad (C.11)$$

$$CG_{scy} = P_y + \frac{2 w_P}{3 \pi} \approx P_y + 0.2122 w_P, \quad (C.12)$$

$$I_{zsc} = \frac{m_{sc}}{8} w_P^2 - m_{sc} \left( \frac{2 w_P}{3 \pi} \right)^2 \approx 0.0800 m_{sc} w_P^2, \quad (C.13)$$

$$m_{pin} = \frac{\pi d_{pin}^2}{4} (b_i - 2tb - 2tb_p) \rho, \quad (C.14)$$

$$CG_{pin_x} = P_x, \quad (C.15)$$

$$CG_{pin_y} = P_y, \quad (C.16)$$

$$I_{z_{pin}} = \frac{m_{pin}}{8} d_{pin}^2. \quad (C.17)$$

Para os pinos laterais, as partes extras são compostas pelos semicírculos nas pontas da chapa de reforço e pela parte do pino que fica dentro da viga do elo, como mostrado na Figura C.4. As equações usadas para o cálculo dos parâmetros mássicos destas partes são as mesmas usadas para o cálculo dos parâmetros do garfo, sendo modificada apenas a espessura utilizadas no cálculo da massa dos semicírculos, como mostrado na Equação C.18.

$$m_{sc} = \frac{\pi w_P^2}{8} t_b \rho, \quad (C.18)$$

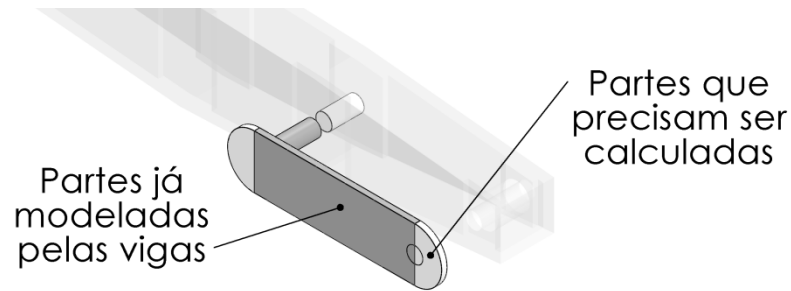


Figura C.4 - Modelo 3D mostrando as partes dos pinos laterais modeladas diretamente, em cinza escuro, e as partes que têm seus parâmetros calculados separadamente, em cinza claro.

## APÊNDICE D – Elemento de viga de Timoshenko de dois nós e 12 GDLs

Com elementos de viga, é possível definir uma matriz de rigidez paramétrica, que depende apenas das propriedades do material, da seção transversal, e do comprimento do elemento. Esta matriz é definida sobre um sistema de coordenadas local à cada elemento, possibilitando que a mesma matriz geral seja usada para elementos em qualquer orientação. Neste sistema local, o elemento está disposto ao longo do eixo  $x$ , o eixo  $y$  aponta para cima e o eixo  $z$  para a direita. Para cada elemento é calculada uma matriz de rigidez elementar,  $12 \times 12$ , que é então rotacionada para se alinhar com o sistema global antes de ser combinada com as outras matrizes, formando a matriz de rigidez global.

A matriz de rigidez elementar pode ser dividida em quatro partes: a rigidez axial, a rigidez torcional, a rigidez flexional vertical e a rigidez flexional horizontal. As matrizes de rigidez axial e torcional, dadas por Liu e Quek, 2003, são mostradas abaixo:

$$\mathbf{K}_a = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{K}_t = \frac{JG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento,  $E$  e  $G$  são o módulo de elasticidade e o módulo de cisalhamento do material, e  $A$  e  $J$  são a área e o momento de inércia polar da seção transversal da viga, sendo que a forma de cálculo destes parâmetros, para uma seção retangular, é apresentada por Myers, 1962, e por Young et al., 2012.

As matrizes de rigidez flexionais, dadas por Friedman e Kosmatka, 1993, são mostradas abaixo:

$$\mathbf{K}_{fy} = \frac{EI_z}{(1 + \phi_z)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ (4 + \phi_z)L^2 & -6L & (2 - \phi_z)L^2 & \\ \text{sym.} & 12 & -6L & \\ & & (4 + \phi_z)L^2 & \end{bmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{K}_{fz} = \frac{EI_y}{(1 + \phi_y)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ (4 + \phi_y)L^2 & -6L & (2 - \phi_y)L^2 & \\ \text{sym.} & 12 & -6L & \\ & & (4 + \phi_y)L^2 & \end{bmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

onde  $\mathbf{K}_{fy}$  e  $\mathbf{K}_{fz}$  são as matrizes elementares de rigidez flexional vertical e horizontal respectivamente,  $I_z$  e  $I_y$  são os momentos de inércia de área da seção transversal da viga em torno dos eixos horizontal e vertical respectivamente; as fórmulas para estes valores também pode ser encontrada nas referências onde são encontradas a área e o momento de inércia polar.  $\phi_z$  e  $\phi_y$  são dados por Friedman e Kosmatka, 1993:

$$\phi_y = \frac{12}{L^2} \left( \frac{EI_y}{k_z GA} \right), \quad (\text{D.5})$$

$$\phi_z = \frac{12}{L^2} \left( \frac{EI_z}{k_y GA} \right), \quad (\text{D.6})$$

onde  $k_y$  e  $k_z$  são os coeficientes de cisalhamento de Timoshenko na direção vertical e horizontal respectivamente.

O coeficiente de cisalhamento de Timoshenko depende da geometria da seção transversal da viga. Geralmente, para seções sólidas a seguinte aproximação é usada, dada por Friedman e Kosmatka, 1993:

$$k_y = k_z = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}, \quad (\text{D.7})$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material. No entanto, para seções onde a tensão de cisalhamento é mais significativa perto à tensão axial, como é o caso da seção do tipo caixão com paredes finas utilizada nos elos do braço, esta aproximação resulta em um valor de rigidez muito maior ao esperado, sendo necessária a busca para uma expressão mais precisa.

Em seu artigo, Jensen, 1982, compara diversas formas para a determinação do coeficiente de uma dada seção transversal. As equações mais precisas envolvem uma análise detalhada da seção, mas para seções do tipo caixão com paredes finas, mesmo uma aproximação mais simples fornece resultados adequados. Portanto, as seguintes equações foram utilizadas:

$$k_y = \frac{A_v}{A} = \frac{\int_A \cos(\theta_y)^2 dA}{A}, \quad (\text{D.8})$$

$$k_z = \frac{A_h}{A} = \frac{\int_A \cos(\theta_z)^2 dA}{A}, \quad (\text{D.9})$$

onde  $\theta_y$  e  $\theta_z$  são os ângulos entre os eixos  $y$  e  $z$  respectivamente e a tangente das paredes da seção transversal. Aplicando estas equações à geometria da seção tipo caixão, usando o fato de que as paredes são somente horizontais ou verticais, resulta em:

$$k_y = \frac{2h_s t b_s}{A}, \quad (\text{D.10})$$

$$k_z = k_y = \frac{2b_s t h_s}{A}, \quad (\text{D.11})$$

onde  $h_s$ ,  $b_s$ ,  $t b_s$  e  $t h_s$  são as dimensões da seção transversal, como pode ser visto na Figura 4.13.

A matriz elementar completa é formada pela combinação das quatro submatrizes mencionadas, de modo que ela pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}
 K_{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{a_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & K_{fy_{11}} & 0 & 0 & 0 & K_{fy_{12}} & 0 & K_{fy_{13}} & 0 & 0 & 0 & K_{fy_{14}} \\
 & & K_{fz_{11}} & 0 & K_{fz_{12}} & 0 & 0 & 0 & K_{fz_{13}} & 0 & K_{fz_{14}} & 0 \\
 & & & K_{t_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{t_{12}} & 0 & 0 \\
 & & & & K_{fz_{22}} & 0 & 0 & 0 & K_{fz_{23}} & 0 & K_{fz_{24}} & 0 \\
 & & & & & K_{fy_{22}} & 0 & K_{fy_{23}} & 0 & 0 & 0 & K_{fy_{24}} \\
 & & & & & & K_{a_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & K_{fy_{33}} & 0 & 0 & 0 & K_{fy_{34}} \\
 & & & & & & & & K_{fz_{33}} & 0 & K_{fz_{34}} & 0 \\
 & & & & & & & & & K_{t_{22}} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & K_{fz_{44}} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & K_{fy_{44}}
 \end{bmatrix} \quad (D.12)$$

onde cada uma das doze linhas e colunas da matriz está relacionada à um grau de liberdade do elemento. A ordem é mostrada a seguir, pelo vetor de forças  $\vec{F}_e$ :

$$\mathbf{K}_e \vec{u}_e = \vec{F}_e, \quad (D.13)$$

com

$$\vec{u}_e = [u_{x_1} \quad u_{y_1} \quad u_{z_1} \quad r_{x_1} \quad r_{y_1} \quad r_{z_1} \quad u_{x_2} \quad u_{y_2} \quad u_{z_2} \quad r_{x_2} \quad r_{y_2} \quad r_{z_2}]^T, \quad (D.14)$$

onde  $u$  simboliza deslocamento rotacional e  $r$  deslocamento rotacional,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os eixos do sistema local do elemento, e os índices 1 e 2 simbolizam o nó 1 e 2 do elemento.

A matriz apresentada na Equação D.12, baseada no sistema local do elemento, é válida no sistema global apenas para o caso em que o elemento se encontra ao longo do eixo  $x$  global. Para ser possível utilizar a matriz para um elemento com uma orientação qualquer é possível rotacioná-la, usando a seguinte equação:

$$\mathbf{K}_{e_g} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_e \mathbf{R}, \quad (D.15)$$

com

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{R}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{R}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}' & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}'
 \end{bmatrix}, \quad (D.16)$$

onde  $\mathbf{R}'$  é uma matriz de rotação 3D 3 x 3.

A matriz  $\mathbf{R}'$  é composta por 3 rotações, uma sobre cada eixo, como mostrado na seguinte equação:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x. \quad (D.17)$$



O objetivo destas rotações é rotacionar o sistema de coordenadas global para criar o sistema local onde a matriz elementar é definida, onde o elemento está ao longo de  $x$  e orientado de modo que o eixo  $y$  seja vertical. As equações apresentadas aqui, usadas para o cálculo dos ângulos das rotações, foram deduzidas pelo autor do presente trabalho, e testadas para garantir sua funcionalidade.

A primeira rotação é em torno do eixo  $z$ , e para determinar o ângulo é necessário um vetor que define a orientação do elemento, dada por:

$$\vec{d}_e = \frac{(\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{|\vec{n}_2 - \vec{n}_1|}, \quad (\text{D.18})$$

onde  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são os vetores com as coordenadas, nas três dimensões, do nó 1 e 2 do elemento. Com este vetor, é possível calcular o ângulo entre o elemento e o plano XY global, e com isso a rotação em torno do eixo  $z$ , através da seguinte equação:

$$\theta_e = \text{atan2}(d_{e_y}, d_{e_x}), \quad (\text{D.19})$$

o que é usado na matriz de rotação da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & -\text{sen}(\theta_e) & 0 \\ \text{sen}(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

Após a rotação em torno do eixo  $z$ , o elemento se encontra sobre o plano XZ local. A segunda rotação é em torno do eixo  $y$  local, e para determinar o ângulo de rotação é preciso considerar a projeção do elemento sobre este plano XZ local. Assim, a seguinte expressão pode ser usada para o cálculo do valor deste ângulo:

$$\phi_e = -\text{atan2}(d_{e_z}, \sqrt{d_{e_x}^2 + d_{e_y}^2}), \quad (\text{D.21})$$

o que é usado na matriz de rotação da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\phi_e) & 0 & \text{sen}(\phi_e) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\phi_e) & 0 & \cos(\phi_e) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

Com as rotações em  $z$  e  $y$ , o elemento se encontra sobre o eixo  $x$  local, como é necessário para o cálculo da matriz de rigidez elementar. No entanto, a sua orientação vertical ainda não está alinhada com o eixo  $y$  local. O vetor  $\vec{d}_e$  não fornece informações sobre qual lado do elemento aponta na direção vertical, então é necessário definir um segundo vetor para cada elemento,  $\vec{Ori}$ , que forneça esta informação. Este vetor deve ser unitário e ortogonal ao vetor  $\vec{d}_e$ .

Com o vetor  $\overrightarrow{Ori}$  definido, primeiramente deve-se rotacioná-lo para o sistema local das rotações em  $z$  e  $y$  já calculadas, através da seguinte expressão:

$$\overrightarrow{Ori'} = \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_z^T \overrightarrow{Ori}. \quad (\text{D.23})$$

Com isso, o vetor  $\overrightarrow{Ori'}$  pertence ao plano  $YZ$  local e aponta para a direção vertical do elemento. Deve-se então calcular o ângulo entre este vetor e o eixo  $y$ , e usar este ângulo para definir a última rotação, em torno do eixo  $x$  local, o que pode ser feito por meio da seguinte expressão:

$$\psi_e = \text{atan2}(Ori'_z, Ori'_y), \quad (\text{D.24})$$

o que é usado na matriz de rotação da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_e) & -\text{sen}(\psi_e) \\ 0 & \text{sen}(\psi_e) & \cos(\psi_e) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.25})$$

Com todas as três matrizes de rotação calculadas, é possível usar a Equação D.17 para rotacionar a matriz de rigidez elementar do sistema local para o sistema global. Cada matriz de rigidez elementar global é então adicionada à matriz de rigidez global, que é então utilizada para calcular os deslocamentos da estrutura devido à deformação elástica linear.

## APÊNDICE E – Tabelas de parâmetros para a verificação da análise estrutural

Tabela E.1 – Parâmetros comuns usados em todos os casos de verificação dos deslocamentos

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$	
Comprimento do elo $i$	$a_i$	1,0 m	0,7 m	
Massa do cilindro do atuador $i$	$m_{i\text{cil}}$	30 kg	20 kg	
Massa da haste do atuador $i$	$m_{i\text{haste}}$	20 kg	10 kg	
CG do cilindro do atuador $i$	$CG_{i\text{cil}}$	0,35 m	0,25 m	
CG da haste do atuador $i$	$CG_{i\text{haste}}$	0,20 m	0,15 m	
Momento de inércia do cilindro do atuador $i$	$I_{i\text{cil}}$	3,0 kg.m <sup>2</sup>	1,5 kg.m <sup>2</sup>	
Momento de inércia da haste do atuador $i$	$I_{i\text{haste}}$	4,0 kg.m <sup>2</sup>	2,5 kg.m <sup>2</sup>	
Massa total da ferramenta e objeto	$m_{\text{end}}$	15 kg		
Offset da ferramenta e objeto	$d_{\text{end}}$	0,2 m		
Momento de inércia de massa da ferramenta e objeto	$I_{\text{end}}$	5 kg.m <sup>2</sup>		
Velocidade angular da ferramenta e objeto	$\dot{q}_{13}$	0 rad/s		
Aceleração angular da ferramenta e objeto	$\ddot{q}_{13}$	0 rad/s <sup>2</sup>		
Densidade do material	$\rho$	7800 kg/m <sup>3</sup>		
Módulo de elasticidade	$E$	200 GPa		
Reforço da Junta 1	$w_{\text{ref}1}$	0,008 m	$d_{\text{lupa}1}$	0,05 m
	$tb_{\text{ref}1}$	0,03 m	$d_{\text{pin}1}$	0,03 m
Reforço $A_2$	$w_{A_2}$	0,10 m	$d_{\text{pin}A_2}$	0,03 m
	$tb_{A_2}$	0,004 m		
Reforço $B_1$	$w_{B_1}$	0,10 m	$d_{\text{pin}B_2}$	0,03 m
	$tb_{B_1}$	0,007 m		
Reforço da Junta 2 no Elo 1	$w_{\text{ref}21}$	0,08 m	$d_{\text{lupa}21}$	0,05 m
	$tb_{\text{ref}21}$	0,006 m	$d_{\text{pin}21}$	0,03 m
Reforço da Junta 2 no Elo 2	$w_{\text{ref}22}$	0,08 m	$d_{\text{lupa}22}$	0,05 m
	$tb_{\text{ref}22}$	0,003 m	$d_{\text{pin}22}$	0,03 m
Reforço $B_2$	$w_{B_2}$	0,10 m	$d_{\text{pin}B_2}$	0,03 m
	$tb_{B_2}$	0,008 m		
Reforço da ponta do Elo 2	$w_{\text{ref}end}$	0,05 m		
	$tb_{\text{ref}end}$	0,006 m		

Tabela E.2 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 1

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,6]$ m	$[0,45; 0,15]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,7; 0,0]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	0 rad	0,3 rad
Posição angular da ferramenta e objeto	$q_{13}$	$q_1 + q_2 + 0,4$ rad	
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,15 m	
	$H_{A_2}$	0,15 m	
	$H_{B_1}$	0,15 m	
	$H_{J_{2_1}}$	0,15 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,15 m	
	$H_{B_2}$	0,15 m	
	$H_{ponta}$	0,15 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,12 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,12 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,01 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,005 m	

Tabela E.3 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 2

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,6]$ m	$[0,45; 0,15]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,7; 0,0]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	0 rad	0,3 rad
Posição angular da ferramenta e objeto	$q_{13}$	$q_1 + q_2 + 0,4$ rad	
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,15 m	
	$H_{A_2}$	0,15 m	
	$H_{B_1}$	0,15 m	
	$H_{J_{2_1}}$	0,15 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,15 m	
	$H_{B_2}$	0,15 m	
	$H_{ponta}$	0,15 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,12 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,12 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

Tabela E.4 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 3

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,6]$ m	$[0,45; 0,15]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,7; 0,0]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	0 rad	0,3 rad
Posição angular da ferramenta e objeto	$q_{13}$	$q_1 + q_2 + 0,4$ rad	
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,10 m	
	$H_{A_2}$	0,16 m	
	$H_{B_1}$	0,16 m	
	$H_{J_{2_1}}$	0,10 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,10 m	
	$H_{B_2}$	0,15 m	
	$H_{ponta}$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,10 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

Tabela E.5 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 4

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,6]$ m	$[0,45; 0,15]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,7; 0,0]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	-0,4 rad	0,6 rad
Posição angular da ferramenta e objeto	$q_{13}$	0 rad	
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,10 m	
	$H_{A_2}$	0,16 m	
	$H_{B_1}$	0,16 m	
	$H_{J_{2_1}}$	0,10 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,10 m	
	$H_{B_2}$	0,15 m	
	$H_{ponta}$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,10 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

Tabela E.6 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 5

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,4]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,9; 0,15]$ m	$[0,25; -0,15]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	1 rad	-1,2 rad
Posição angular da ferramenta e objeto	$q_{13}$	0 rad	
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,10 m	
	$H_{A_2}$	0,16 m	
	$H_{B_1}$	0,16 m	
	$H_{J_{2_1}}$	0,10 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,10 m	
	$H_{B_2}$	0,15 m	
	$H_{ponta}$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,10 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

Tabela E.7 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 6

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,4]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,9; 0,15]$ m	$[0,25; -0,15]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	0,2 rad	-0,2 rad
Posição angular da ferramenta e objeto	$q_{13}$	0 rad	
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,10 m	
	$H_{A_2}$	0,16 m	
	$H_{B_1}$	0,16 m	
	$H_{J_{2_1}}$	0,10 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,10 m	
	$H_{B_2}$	0,15 m	
	$H_{ponta}$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,10 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

Tabela E.8 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 7

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,4]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,9; 0,15]$ m	$[-0,25; 0,15]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	1,0 rad	-1,2 rad
Corte para elo de acoplamento do ponto $B_2$	$L_{cut_2}$	0,08 m	
Altura nos pontos do Elo 1	$q_{13}$	0 rad	
	$H_{J_1}$	0,10 m	
	$H_{A_2}$	0,16 m	
	$H_{B_1}$	0,16 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_1}}$	0,10 m	
	$H_{J_{2_2}}$	0,15 m	
	$H_{B_2}$	0,10 m	
	$H_{ponta}$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,10 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

Tabela E.9 – Parâmetros da estrutura do braço utilizados no caso 8

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
Ponto de fixação A do atuador $i$	$\vec{A}_i$	$[-0,3; 0,4]$ m	$[0,25; 0,0]$ m
Ponto de fixação B do atuador $i$	$\vec{B}_i$	$[0,9; 0,15]$ m	$[-0,25; 0,15]$ m
Posição angular das juntas	$q_i$	0,2 rad	-0,2 rad
Corte para elo de acoplamento do ponto $B_2$	$L_{cut_2}$	0,08 m	
Altura nos pontos do Elo 1	$q_{13}$	0 rad	
	$H_{J_1}$	0,10 m	
	$H_{A_2}$	0,16 m	
	$H_{B_1}$	0,16 m	
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_1}}$	0,10 m	
	$H_{J_{2_2}}$	0,15 m	
	$H_{B_2}$	0,10 m	
	$H_{ponta}$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 1	$b_1$	0,10 m	
Largura, ou base do Elo 2	$b_2$	0,10 m	
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,003 m	
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,003 m	

## APÊNDICE F – Segundo caso de exemplo: robô para armazenamento de objetos pesados

### F.1 Definição do problema e dos parâmetros assumidos

Neste exemplo, a metodologia proposta neste trabalho é usada para projetar um braço hidráulico para um robô genérico que pode ser usado para armazenagem, em estantes, de objetos pesados. Seu volume de trabalho deve ser grande, especialmente na vertical, mas sua precisão não precisa ser tão alta. Este caso também não é baseado em um caso específico encontrado na indústria.

Como o procedimento é o mesmo que para o caso 1, este não será tão detalhado, por brevidade. Assim, as tabelas F.1, F.2, F.3 e F.4 registram, respectivamente, os limites das alturas da seção transversal das vigas para a otimização estrutural, os parâmetros de entrada para os atuadores, os outros parâmetros de entrada, e os requisitos do projeto.

Tabela F.1 – Limites para os parâmetros da otimização estrutural

Parâmetro	Variável	Valor mínimo	Valor máximo
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,060 m	0,600 m
	$H_{A_2}$	0,060 m	0,600 m
	$H_{B_1}$	0,060 m	0,400 m
	$H_{J_{2_1}}$	0,060 m	0,600 m
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,060 m	0,600 m
	$H_{B_2}$	0,060 m	0,600 m
	$H_{ponta}$	0,060 m	0,600 m
Espessura das paredes superiores e inferiores	$th$	0,0010 m	0,0200 m
Espessura das paredes laterais	$tb$	0,0010 m	0,0200 m

Tabela F.2 – Valores dos atuadores usados como entrada para a terceira iteração do caso 2

Descrição	Variável	Atuador 1	Atuador 2
Comprimento morto	$D_{li}$	0,72 m	0,62 m
Massa do cilindro do atuador $i$	$m_{i_{cil}}$	52,46 kg	39,32 kg
Massa da haste do atuador $i$	$m_{i_{haste}}$	57,45 kg	32,65 kg
CG do cilindro do atuador $i$	$CG_{i_{cil}}$	1,17 m	1,02 m
CG da haste do atuador $i$	$CG_{i_{haste}}$	1,18 m	1,02 m
Momento de inércia do cilindro do atuador $i$	$I_{i_{cil}}$	25,08 kg.m <sup>2</sup>	14,04 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia da haste do atuador $i$	$I_{i_{haste}}$	26,89 kg.m <sup>2</sup>	11,34 kg.m <sup>2</sup>



Apenas os resultados da terceira iteração serão detalhados, pois esta foi a iteração que resultou na configuração final do braço. Os valores para os atuadores apresentados na Tabela F.2 já são os calculados na segunda iteração. A primeira iteração levou ao todo 1942 segundos para ser completada, e a segunda levou 1529 segundos.

Tabela F.3 – Parâmetros de entrada usados para o caso 1

Descrição	Variável	Valor	Notas
Disposição do Atuador 1	$Ori_1$	externa	
Disposição do Atuador 2	$Ori_2$	interna	
Densidade do material	$\rho$	7800 kg/m <sup>3</sup>	
Módulo de Young do material	E	210 GPa	Aço
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,3	
Primeiro ponto de fixação do Atuador 1	$B_1$	$\begin{bmatrix} -0,20\text{m} & 1 & 0 \\ 0,30\text{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	um pouco antes da extremidade do Elo 1
Primeiro ponto de fixação do Atuador 2	$A_2$	$\begin{bmatrix} 0,20\text{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	um pouco após o começo do Elo 2
Reforço da Junta 1	$w_{ref1}$	0,10 m	$d_{luva1}$ 0,05 m
	$tb_{ref1}$	0,009 m	$d_{pin1}$ 0,03 m
Reforço $A_2$	$w_{A_2}$	0,10 m	
	$tb_{A_2}$	0,009 m	
Reforço $B_1$	$w_{B_1}$	0,10 m	
	$tb_{B_1}$	0,009 m	
Reforço da Junta 2 no Elo 1	$w_{ref21}$	0,10 m	$d_{luva21}$ 0,05 m
	$tb_{ref21}$	0,009 m	$d_{pin21}$ 0,03 m
Reforço da Junta 2 no Elo 2	$w_{ref22}$	0,10 m	$d_{luva22}$ 0,05 m
	$tb_{ref22}$	0,009 m	$d_{pin22}$ 0,03 m
Reforço $B_2$	$w_{B_2}$	0,10 m	
	$tb_{B_2}$	0,009 m	
Reforço da ponta do Elo 2	$w_{refend}$	0,05 m	
Largura da viga do Elo 1	$b_1$	0,18 m	
Largura da viga do Elo 2	$b_2$	0,12 m	
Offset entre os elos	$d_{off}$	0,15 m	
Corte para o garfo do Elo 2	$L_{cut2}$	0,30 m	
Tamanho dos elementos	$e_{length}$	0,03 m	

Tabela F.4 – Características de dimensão e desempenho que o robô deve possuir para o caso 1

Descrição	Variável	Valor
Profundidade do volume de trabalho	$V_x$	2 m
Largura do volume de trabalho	$V_z$	2 m
Altura do volume de trabalho	$V_y$	3 m
Massa total máxima da ferramenta e objeto	$m_{end}$	30 kg
Offset da ferramenta e objeto	$d_{end}$	0,4 m
Momento de inércia de massa da ferramenta e objeto	$I_{end}$	5 kg.m <sup>2</sup>
Velocidade nominal da extremidade do braço	$V_{max}$	1 m/s
Aceleração nominal da extremidade do braço	$A_{max}$	2 m/s <sup>2</sup>
Flecha máxima aceitável	$ \vec{u} _{projeto}$	1,5 mm
Pesos dos valores estatísticos da otimização cinemática	$P_\alpha$	[1 -1 -0,1 -0,1]
Pesos dos índices de desempenho da otimização cinemática	$P_\beta$	[-1 0 1 1]
Peso do custo de fabricação da otimização cinemática	$P_c$	0,5

## F.2 Resultado da definição dos parâmetros cinemáticos

A otimização cinemática resultou em um ponto ótimo em  $\psi_1 = 1,287$  rad e  $\psi_2 = 0,709$  rad após um tempo de computação de 12,9 segundos. A Figura F.1 mostra os diferentes valores do  $GPI_r$  em função dos cursos angulares das juntas, para o caso analisado, bem como o ponto ótimo mencionado, sendo que as regiões brancas denotam configurações impossíveis para o braço. Isto resultou em um braço com os parâmetros cinemáticos mostrados na Tabela F.5, com os comprimentos já truncados para o milímetro mais próximo.

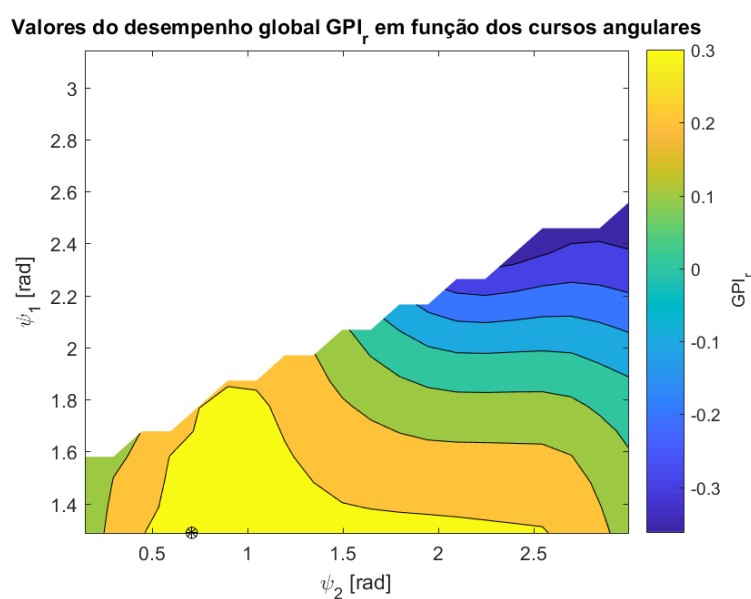


Figura F.1 - Gráfico do  $GPI_r$  em função dos cursos angulares das juntas, para a terceira iteração.

Tabela F.5 - Resultados da definição dos parâmetros cinemáticos na terceira iteração do caso 2

Parâmetro	Variável	Valor
Comprimento do Elo 1	$a_1$	3,731 m
Comprimento do Elo 2	$a_2$	3,784 m
Curso angular da Junta 1	$\psi_1$	1,287 rad
Curso angular da Junta 2	$\psi_2$	0,709 rad
Distância entre a Junta 1 e o começo da área de trabalho	$L_{min}'$	2,000 m
Largura da área de trabalho	$Vx'$	2,126 m
Distância entre a Junta 1 e o começo do volume de trabalho	$L_{min}$	2,006 m

### F.3 Resultado da definição do curso e pontos de fixação dos atuadores

Os pontos de fixação e os comprimentos mínimos e máximos dos atuadores foram definidos por meio da metodologia proposta na Seção 3.2, com os resultados sendo mostrados na Tabela F.6.

Tabela F.6 – Resultados da definição dos parâmetros dos atuadores na primeira iteração do caso 2

Parâmetro	Variável	Valor
Ponto de fixação A do Atuador 1	$A_1$	$[-1,226 \quad 0,785]^T$ m
Ponto de fixação B do Atuador 1	$B_1$	$[3,531 \quad 0,300]^T$ m
Ponto de fixação A do Atuador 2	$A_2$	$[0,200 \quad 0,000]^T$ m
Ponto de fixação B do Atuador 2	$B_2$	$[-0,597 \quad -2,086]^T$ m
Comprimento mínimo do Atuador 1	$P_{1min}$	2,473 m
Comprimento máximo do Atuador 1	$P_{1max}$	4,220 m
Comprimento mínimo do Atuador 2	$P_{2min}$	2,132 m
Comprimento máximo do Atuador 2	$P_{2max}$	3,639 m

### F.4 Resultado da otimização estrutural

A otimização estrutural precisou de 1370 segundos para ser completada. A Figura F.2 mostra o comportamento da função objetivo ao longo das iterações, enquanto que os resultados são mostrados na Tabela F.7. A Figura F.3 mostra quatro dos 60 gráficos analisados para verificar que as posições de máximo esforço do braço ocorrem sobre ou próximos aos oito pontos considerados durante a otimização, com a hipótese dos pontos críticos sendo considerada satisfeita. A Tabela F.8 mostra os parâmetros inerciais para o braço final.

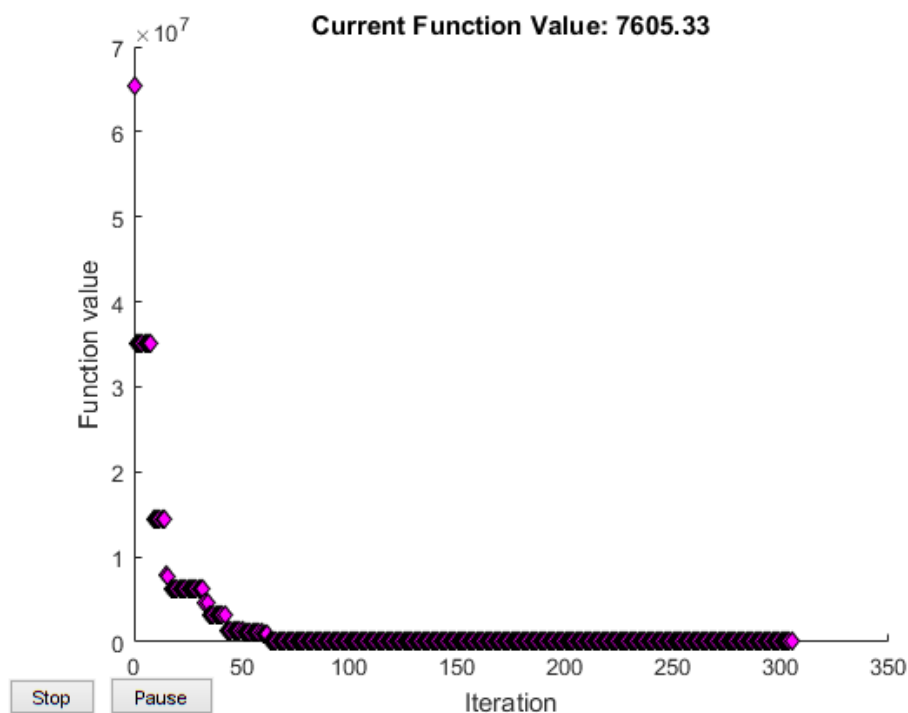


Figura F.2 – Gráfico mostrando o valor da função objetivo ao longo das iterações da otimização estrutural para a terceira iteração do caso 2

Tabela F.7 – Valores otimizados para os parâmetros de altura das vigas dos elos, para a terceira iteração do caso 2.

Parâmetro	Variável	Valor
Altura nos pontos do Elo 1	$H_{J_1}$	0,257 m
	$H_{A_2}$	0,598 m
	$H_{B_1}$	0,399 m
	$H_{J_{2_1}}$	0,135 m
Altura nos pontos do Elo 2	$H_{J_{2_2}}$	0,600 m
	$H_{B_2}$	0,277 m
	$H_{ponta}$	0,204 m
Espessura das paredes superiores e inferiores	$t_h$	0,0032 m
Espessura das paredes laterais	$t_b$	0,0012 m

Tabela F.8 – Parâmetros inerciais dos elos do braço final para o caso 2

Parâmetro	Variável	$i = 1$	$i = 2$
CG do elo $i$	$cg_i$	1,749 m	0,810 m
Massa do elo $i$	$m_i$	106,1 kg	98,35 kg
Momento de inércia do elo $i$	$I_i$	188,7 kg.m <sup>2</sup>	233,0 kg.m <sup>2</sup>

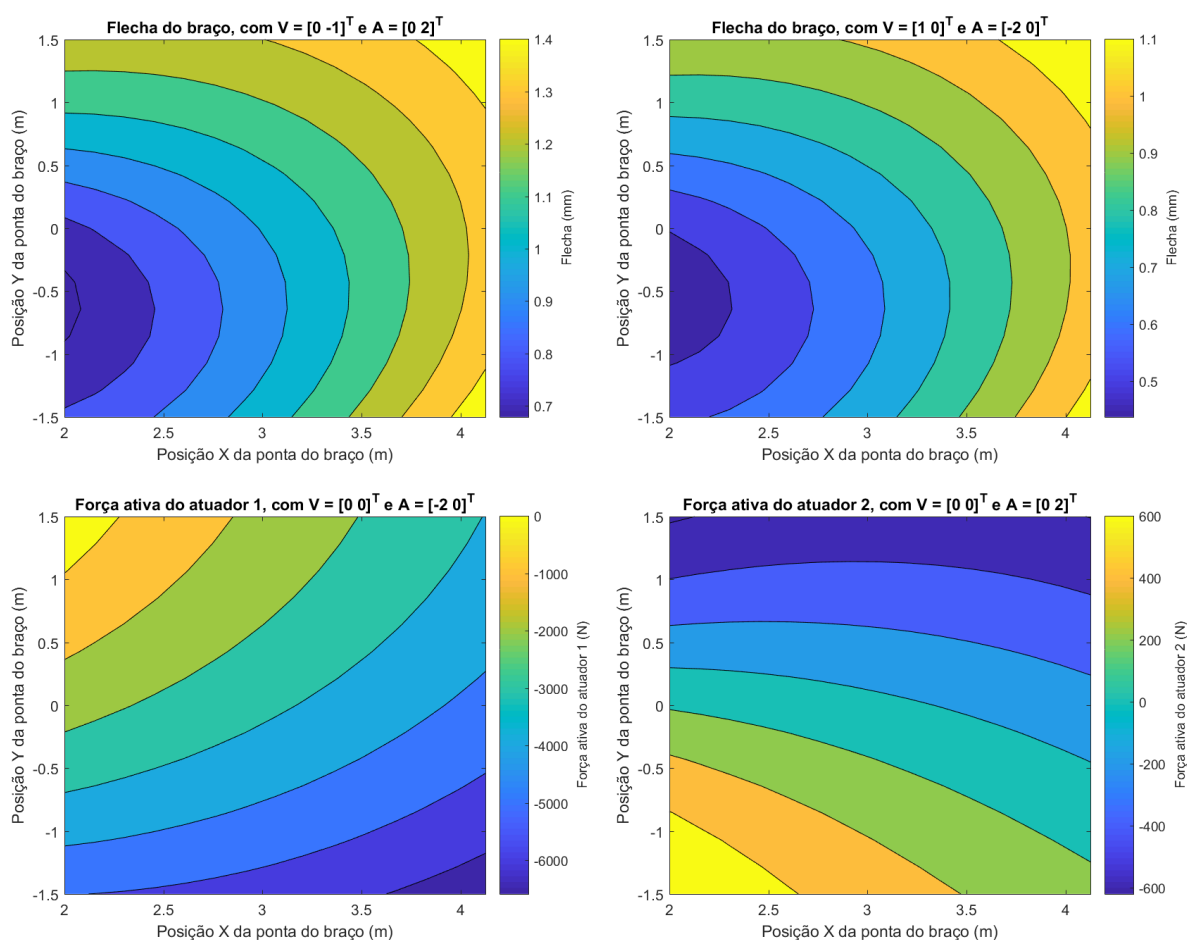


Figura F.3 – Exemplos dos casos de carregamento analisados

## F.5 Escolha dos atuadores

As forças máximas encontradas para os atuadores são mostrados na Tabela F.9. Com estes valores foi possível especificar os atuadores com o catálogo HY08-1320-3/NA, usando terminações tipo SBM e selamento padrão tipo F, ou seja, rolamentos de esfera métricos e selamentos de baixo atrito. Os parâmetros dos atuadores especificados são mostrados na Tabela F.10, estimados pela metodologia apresentada na Seção 5.4.

Tabela F.9 – Máximas forças aplicadas pelos atuadores encontradas dentre os 225 pontos e 20 casos considerados

Parâmetro	Variável	Valor
Máxima força de extensão do Atuador 1	$Fl_{1ext}$	3926,9 N
Máxima força de retração do Atuador 1	$Fl_{1ret}$	7652,4 N
Máxima força de extensão do Atuador 2	$Fl_{2ext}$	896,1 N
Máxima força de retração do Atuador 2	$Fl_{2ret}$	663,6 N

Tabela F.10 – Parâmetros dos atuadores especificados para a configuração do braço da terceira iteração do caso 2

Parâmetro	Variável	Valor	
		Atuador 1	Atuador 2
Comprimento morto	$D'_{li}$	0,7101 m	0,6102 m
Comprimento do tubo de parada	$L_{tubo}$	330,2 mm	279,4 mm
Diâmetro do êmbolo	$d_{ei}$	101,6 mm	82,5 mm
Diâmetro da haste	$d_{hi}$	63,5 mm	50,8 mm
Pressão máxima suportada	$\Delta P_{a\ max\ i}$	4,35 MPa	3,65 MPa
Pressão máxima necessária	$\Delta P_{atuador\ i}$	1,63 MPa	0,27 MPa
Curso bruto (com o tubo de parada)	$C'_{ib}$	2,088 m	1,796 m
Curso líquido (sem o tubo de parada)	$C_i$	1,758 m	1,517 m
Massa total do atuador	$m_{i\ total}$	108,3 kg	70,8 kg
Massa estimada para o cilindro	$m_{i\ cil}$	51,74 kg	38,72 kg
Massa estimada para a haste	$m_{i\ haste}$	56,58 kg	32,11 kg
Centro de gravidade estimado para o cilindro	$CG_{i\ cil}$	1,156 m	0,998 m
Centro de gravidade estimado para a haste	$CG_{i\ haste}$	1,167 m	1,003 m
Momento de inércia estimado para o cilindro	$I_{i\ cil}$	24,02 kg.m <sup>2</sup>	13,37 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia estimado para a haste	$I_{i\ haste}$	25,71 kg.m <sup>2</sup>	10,78 kg.m <sup>2</sup>

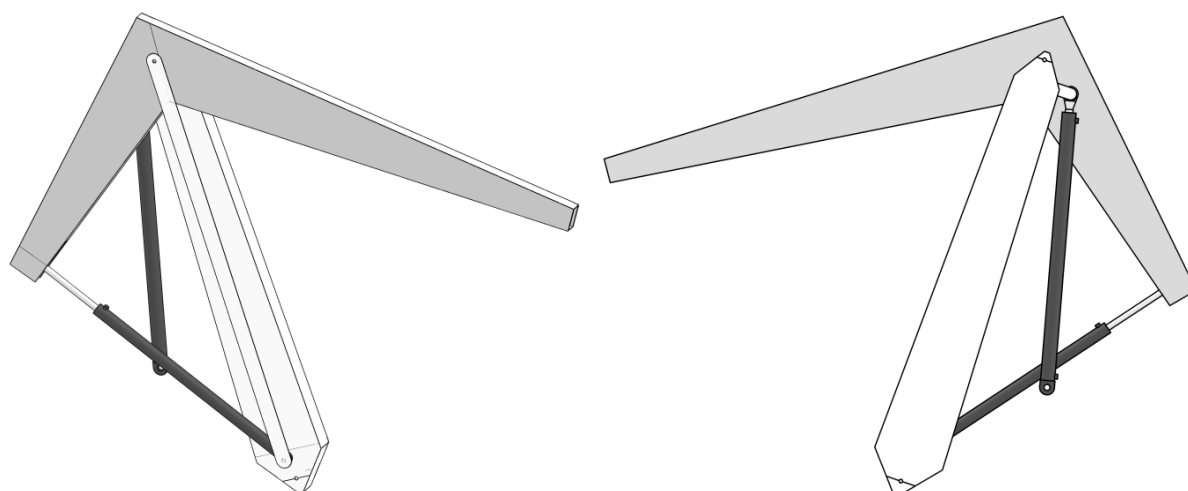


Figura F.4 – Modelo tridimensional mostrando o braço final especificado para o caso 2 em duas poses diferentes

Os comprimentos mortos destes atuadores são menores do que os assumidos no começo desta terceira iteração, e assim não é necessário uma quarta iteração. Desta forma, foram determinados os códigos de pedido destes atuadores: “4SBMRDHFTS27M82.21” para o

Atuador 1, e “3.25SBMRDHFTS27M70.72” para o Atuador 2, e o braço, que pode ser visto na Figura F.4, está completamente especificado.

### F.6 Especificação da unidade de potência hidráulica

A curva obtida para o braço da terceira iteração é mostrada na Figura F.5. Como é possível constatar, a vazão máxima da bomba deve ser de pelo menos 6,3 litros por segundo, ou 100 GPM, e a pressão máxima deve ser de pelo menos 1,73 MPa, ou 250 psi. A bomba de pistões da Parker® modelo PV270, com pressão máxima de 35 MPa e vazão de 8,07 l/s, poderia ser utilizada, por exemplo. A elevada vazão da bomba é necessária por causa dos diâmetros relativamente grandes dos atuadores, especificados desta forma devido à necessidade de uma haste reforçada para suportar o carregamento necessário sem sofrer flambagem.

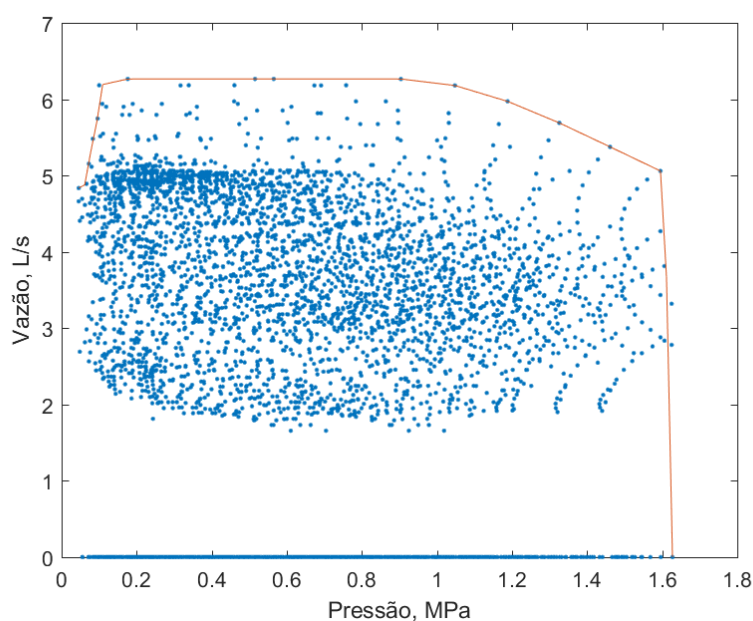


Figura F.5 – Nuvem de pontos dos requerimentos de pressão e vazão do braço da terceira iteração do caso 2, e curva vazão x pressão mínima da bomba hidráulica.

### F.7 Gráfico do erro de posicionamento

Com um erro de posicionamento de 1mm assumido para  $A_{ep1}$  e  $A_{ep2}$  foi obtido o gráfico para o erro de posicionamento da extremidade do braço mostrado na Figura F.6. O maior erro dentro da área de trabalho de interesse é de 4,38mm. Caso o erro dos atuadores for menor do que o assumido, então o erro final da extremidade do braço também será proporcionalmente menor.

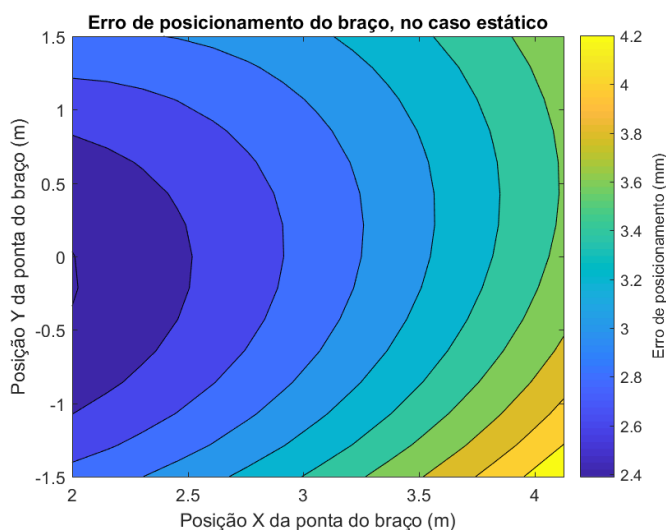


Figura F.6 - Gráfico do erro de posicionamento da extremidade do braço projetado para o caso 2 em função da sua posição

### F.8 Comentários sobre o segundo caso

Neste segundo caso o método resultou em um braço de aproximadamente 7,5m. Este grande comprimento é necessário para que o robô consiga alcançar toda a região definida por 2m x 2m x 3m. A sua massa total é de aproximadamente 385 kg, comparado com uma capacidade de 30 kg. A relação capacidade/massa é portanto significativamente menor do que o encontrado para o caso 1, com seu valor sendo 0,08. Devido à lei do quadrado-cubo, como apresentada por Allen, 2013, braços com dimensões maiores tendem a possuir um valor menor para esta relação.

A maior massa deste braço, em relação ao braço definido no caso 1, deve-se à necessidade de reforço da estrutura para que a flecha permaneça inferior à 1,5mm em um braço de 7,5m. Os atuadores usados também possuem uma grande massa, devido ao seus grandes cursos, e são responsáveis por 47% da massa do sistema. Se necessário, o projetista poderia reduzir o curso dos atuadores, mudando os valores iniciais  $B_1$  e  $A_2$ , e aumentar a flecha máxima aceitável. Com isso a massa do braço seria reduzida, mas o erro de posicionamento seria maior, sendo que apenas uma análise mais aprofundada da tarefa a ser realizada pelo robô poderia responder se isto seria aceitável.

Comparando os resultados do erro de posicionamento dos braços dos casos 1 e 2 é possível constatar que o do braço do caso 2 é menor. Este segundo braço possui um maior comprimento, e, portanto, seria esperado que o seu erro fosse maior. Porém, neste caso é possível utilizar atuadores com cursos maiores, o que reduz a transmissão de erros, devido à menor transmissão mecânica utilizada.