



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física

Pós-graduação em Física

**Relaxação Não-Colisional em Plasmas  
Não-Neutros**

Tarcísio Nunes Teles

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre  
Junho de 2008



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física

Tarcísio Nunes Teles

## **Relaxação Não-Colisional em Plasmas Não-Neutros**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Orientador: *Dr. Yan Levin*  
Co-orientador: *Dr. Renato Pakter*

Porto Alegre  
Junho de 2008



*À minha família.*



# Agradecimentos

Agradeço a Deus, porque sem ele nada do que foi feito se fez, e aos meus irmãos em Cristo pelo apoio durante a realização deste trabalho. Agradeço aos professores Yan Levin e Renato Pakter pela orientação e ao CNPQ pelo apoio financeiro na realização deste trabalho. Sou grato também aos colegas da *M201* e ao professor Felipe Rizzato pelas discussões interessantes relacionadas ao tema.



# Resumo

Neste trabalho um modelo é apresentado que permite-nos prever quantitativamente o estado estacionário atingido por um plasma não-neutro durante um processo de relaxação não-colisional. Como uma aplicação específica, a teoria é usada para estudar a relaxação de feixes de partículas carregadas na qual, mostra-se que, um feixe inicialmente casado relaxa para a distribuição de Lynden-Bell. No entanto, quando existe um descasamento inicial, o mesmo oscila e ressonâncias paramétricas conduzem-no a uma separação de fases: caroço e halo. A abordagem desenvolvida vale tanto para a densidade como para a distribuição de velocidade no estado final estacionário.

**Palavras-chave:** Plasmas não-neutros, Relaxação não-colisional, Estados quasi-estacionários.



# Abstract

In this work a theoretical framework is presented which allows us to quantitatively predict the final stationary state achieved by a non-neutral plasma during a process of collisionless relaxation. As a specific application, the theory is used to study relaxation of charged-particle beams. It is shown that a fully matched beam relaxes to the Lynden-Bell distribution. However, when a mismatch is present and the beam oscillates, parametric resonances lead to a core-halo phase separation. The approach developed accounts for both the density and the velocity distributions in the final stationary state.

**Keywords:** Non-neutral plasmas, Collisionless relaxation, Quasi-stationary states.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação	1
1.2	O Problema	3
<b>2</b>	<b>Modelagem do Problema</b>	<b>5</b>
2.1	Tratamento Estatístico	5
2.1.1	Extensividade	6
2.2	Plasmas Não-Neutros	12
2.3	Tratamento Numérico	15
2.3.1	Dinâmica Molecular	15
2.3.2	Cálculo Numérico	19
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>21</b>
3.1	Feixes Não-Oscilantes	22
3.2	Feixes Oscilantes	24
3.2.1	Distribuição Semi-Gaussiana	30
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>33</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>35</b>



# Lista de Figuras

- |     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Feixe de Partículas carregadas propagando-se uniformemente ao longo do eixo $\hat{z}$ e focalizadas por um campo magnético externo $\mathbf{B}^{ext}$ . As oscilações resultam da competição entre as forças elétrica $\mathbf{F}_E$ e magnética $\mathbf{F}_B$ . O sinal + é apenas ilustrativo no sentido de representar um sistema não neutro. | 1  |
| 1.2 | Visão frontal do Feixe: (a) distribuição inicial; (b) distribuição final.   | 2  |
| 2.1 | Evolução, em termo das variável de ação-ângulo $(\epsilon, \phi)$ da função de distribuição na dinâmica de Vlasov: A função de distribuição filamenta-se no espaço de fase preservando o volume inicial (figura retirada de [Lynden-Bell, 1967]).   | 9  |
| 2.2 | Distribuição inicial, macroscópica e microscópica, para a função de distribuição de um nível $\eta$ com $d = 1$ .   | 10 |
| 2.3 | Distribuição final, macroscópica e microscópica, para a função de distribuição de um nível “ $\eta$ ” com $d = 1$ .   | 11 |
| 2.4 | Feixe de partículas carregadas com raio característico $r_b$ propagando-se ao longo da direção longitudinal $\hat{z}$ com velocidade constante $V_b$ . As partículas são confinadas por um campo magnético $\mathbf{B}^{ext} = B_0\hat{z}$ sendo o feixe isolado do meio externo através de uma parede cilíndrica condutora localizada em $r_w$ . | 13 |
| 2.5 | Mudança de referenciais: “ $O$ ” representa o referencial do laboratório enquanto “ $O'$ ” o referencial de Larmor.   | 14 |
| 2.6 | Distribuição inicial da energia $\mathcal{E}_0$ , $r_b$ e $v_b$ .   | 18 |
| 3.1 | (a) Espaço de fase inicial para o feixe com $r_b$ na condição de feixe casado; (b) Espaço de fase inicial do feixe com $r_b$ arbitrário; (c) Espaço de fase final para o feixe na condição de feixe casado; (d) Espaço de fase final para o feixe com $r_b$ arbitrário;   | 21 |
| 3.2 | Evolução da envoltória de um feixe de partículas em função do comprimento longitudinal $s$ .  | 22 |
| 3.3 | Espaço de fase inicial (a) e final (b) para um feixe casado com $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$ e $r_b = 1.48371\sqrt{K/\kappa_z}$  | 23 |
| 3.4 | Distribuição em posição (a) e velocidade (b) para um feixe casado com $r_b = 1.48371\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela teoria de relaxação violenta eq.(2.34) e os pontos representam o resultado da simulação de dinâmica molecular com $N_b = 5000$ .   | 23 |

- 3.5 Distribuição em posição (a) e velocidade (b) para um feixe casado com  $r_b = 2.16552\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela teoria de relaxação violenta eq. (2.34) e os pontos representam o resultado da simulação de dinâmica molecular com  $N_b = 5000$ . 24
- 3.6 Exemplo de interação ressonante entre uma bola de massa  $m$  e uma superfície oscilante. Admitimos que o sistema não apresenta dissipação de energia e que a superfície presa à mola oscila sempre com frequência  $\omega$ . 25
- 3.7 (a) Seção de Poincaré de uma partícula teste movendo-se em um potencial oscilante controlado pela eq. de envelope (3.1). (b) Espaço de fase final resultante da dinâmica molecular para o sistema com oscilação. 25
- 3.8 Espaço de fase inicial (a) e final (b) para um feixe descasado com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$ . 26
- 3.9 Feixe descasado com  $r_{bmax} = 3\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 2.9\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela teoria de relaxação violenta e os pontos representam o resultado da dinâmica molecular. 27
- 3.10 Feixe descasado com  $r_{bmax} = 2r_{bmin}$  e  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela eq.(3.7) e os pontos representam o resultado da dinâmica molecular. 28
- 3.11 Distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica assumindo que a distribuição do estado estacionário é dado pela eq.(3.8) e os pontos são resultados da dinâmica molecular. 28
- 3.12 Cálculo numérico da eq.(3.8) e distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 3\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.75\sqrt{K/\kappa_z}$ . 29
- 3.13 Cálculo numérico da eq.(3.8) e distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.98\sqrt{K/\kappa_z}$ . 29
- 3.14 Cálculo numérico da eq.(3.8) e distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 3\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 2.9\sqrt{K/\kappa_z}$ . 30
- 3.15 Feixe semi-gaussiano descasado com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.0\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica, eq. (3.8), e os pontos representam o resultado da dinâmica molecular. 31

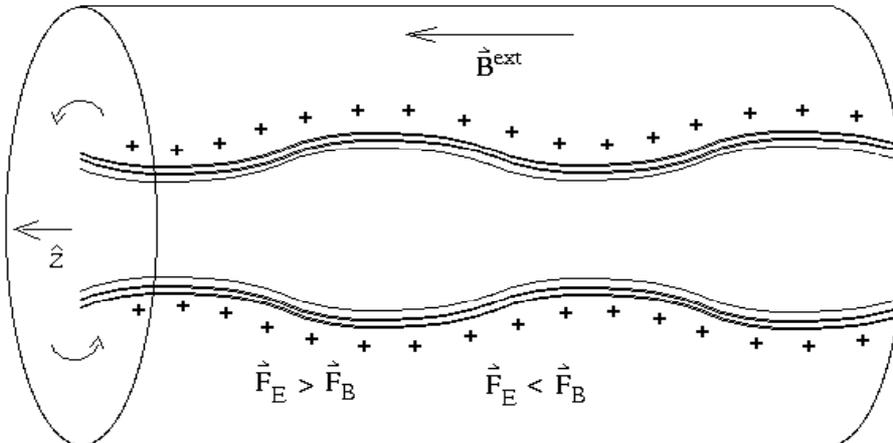
# CAPÍTULO 1

## Introdução

A proposta deste trabalho é construir uma teoria estatística que descreva o estado final atingido por um feixe de partículas carregadas, confinadas por campo magnético, após sofrer um processo de relaxação. Este trabalho foi publicado recentemente [Levin et al., 2008] e neste capítulo, apresentaremos em linhas gerais o problema e quais métodos teóricos foram utilizados para tratar esses sistemas.

### 1.1 Motivação

Um feixe consiste em um conjunto de partículas carregadas, propagando-se paralelo a uma direção  $\hat{z}$ , confinadas por um campo magnético externo  $\mathbf{B}^{ext}$ . Esse campo externo, conhecido como campo focalizador, tem o mesmo sentido de propagação do feixe Fig. 1.1.

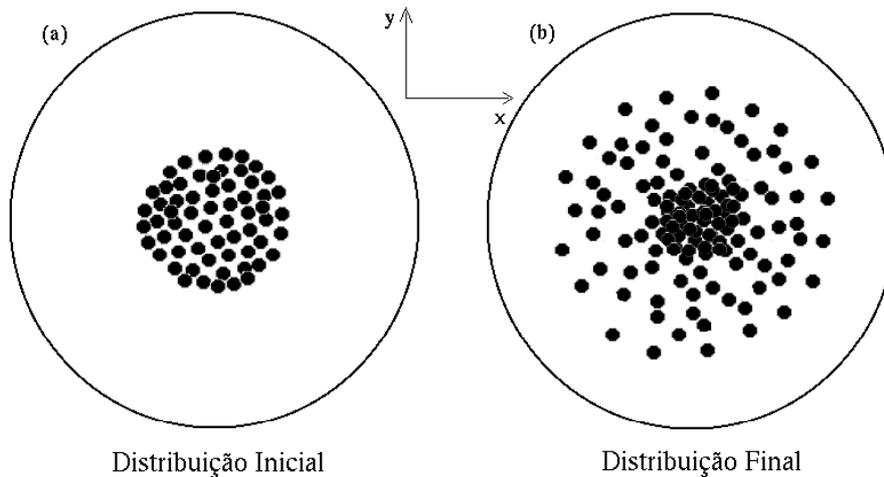


**Figura 1.1** Feixe de Partículas carregadas propagando-se uniformemente ao longo do eixo  $\hat{z}$  e focalizadas por um campo magnético externo  $\mathbf{B}^{ext}$ . As oscilações resultam da competição entre as forças elétrica  $\vec{F}_E$  e magnética  $\vec{F}_B$ . O sinal + é apenas ilustrativo no sentido de representar um sistema não neutro.

As aplicações de feixes de partículas carregadas aparecem em vários campos tais como aceleradores nucleares para produção de trítio, em medicina nuclear, e até mesmo para o tratamento de lixo atômico [Allen et al., 2002]. Nessas aplicações, é de fundamental importância que o feixe se propague de maneira coesa sem formação de halo, ou que ao menos, haja alguma forma de controlar tal produção. Esse halo é constituído de partículas que se afastam muito do

centro do feixe e constitui um problema do ponto de vista experimental, pois pode levar à perda de partículas e à ativação das paredes em aceleradores. Nesse sentido, o conhecimento da função de distribuição final das partículas no feixe é de fundamental importância, pois determina todas as propriedades do feixe. Outras formas de controlar a formação desse halo têm sido tema de pesquisa [Muggli et al., 2008].

As partículas no feixe interagem através do potencial eletromagnético e são confinadas pelo campo focalizador externo  $\mathbf{B}^{ext}$ . Esse campo, atuando nas cargas faz com que elas iniciem um movimento giratório em torno do eixo de propagação  $\hat{z}$ . Como a força magnética  $\mathbf{F}_M$  neste caso é sempre perpendicular à velocidade, ela tende a contrabalançar a força eletrostática  $\mathbf{F}_E$  de modo que as partículas, como um todo, iniciam um movimento oscilatório, Fig. 1.1. A dinâmica relevante nesse sistema passa a ser somente no plano transversal uma vez que na direção de propagação o movimento é uniforme e a variação do potencial eletrostático é praticamente desprezível.



**Figura 1.2** Visão frontal do Feixe: (a) distribuição inicial; (b) distribuição final.

Em geral, partindo de uma distribuição inicial bem definida, o feixe tende a dividir-se em dois subsistemas, uma distribuição central e um halo. Essa distribuição central, doravante denominada caroço, é pouco energética e contém a maior quantidade de partículas do feixe. O halo contém uma quantidade menor de partículas, porém bem mais energéticas Fig. 1.2. A proposta fundamental deste trabalho é construir uma teoria estatística preditiva para a distribuição final do feixe ao longo de sua seção transversal. Na próxima seção faremos uma breve revisão dos métodos de Mecânica Estatística (ME) que são aplicáveis ao tratamento desses sistemas.

## 1.2 O Problema

O feixe é um sistema onde seus constituintes interagem através de um potencial de longo alcance, ou seja, uma interação  $V(r)$  tal que,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b V(r) d^d \mathbf{r} \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

sendo  $d$  a dimensão do espaço do sistema. Para potenciais do tipo  $V(r) = 1/r^\alpha$ , a condição dada pela eq. (1.1) resume-se a  $\alpha \leq d$ . Como casos mais comuns temos: a interação gravitacional e a interação Coulombiana. No caso coulombiano na presença de cargas positivas e negativas é possível que o potencial de longo alcance seja limitado (por efeito de blindagem) e se reduza a um potencial de curto alcance, por exemplo, do tipo “Yukawa”. Esse comportamento é comum em plasmas de duas componentes onde os métodos da ME de equilíbrio são aplicáveis e descrevem perfeitamente esses sistemas [Levin, 2002].

Os métodos da ME são eficientes para tratar sistemas com um número grande de constituintes, contudo, sua aplicabilidade depende fortemente do tipo de interação a que essas partículas estão submetidas. Quando as interações são de curto alcance, ou de longo alcance com blindagem, o sistema evolui de uma condição inicial arbitrária para o equilíbrio termodinâmico. Nessa condição de equilíbrio, definindo-se ensembles estatísticos, a ME de equilíbrio é completamente determinada. Já quando as interações são de longo alcance, esses sistemas não evoluem para uma forma de equilíbrio termodinâmico e portanto, a definição de ensembles estatísticos perde completamente o sentido, comprometendo toda a teoria [Gibbs, 1902]. Como a ME de equilíbrio mostra-se ineficiente para descrever esses sistemas, a solução é analisá-lo do ponto de vista dinâmico. Nesse caso, sabe-se que a forma natural de um sistema atingir o equilíbrio termodinâmico é através das colisões entre as partículas, relaxação colisional, que direcionam o sistema para a distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann (MB)<sup>1</sup>.

Sistemas com interação de longo alcance em que o potencial é ilimitado comportam-se, do ponto de vista da ME, de forma muito distinta daqueles com interação de curto alcance. Entre outras características, apresentam distribuições finais não gaussianas [Chavanis, 2006], inequivalência de ensembles [Barré et al., 2001], etc. A relaxação colisional conduz o sistema para o equilíbrio termodinâmico somente em um tempo que diverge com o número de partículas. Dessa forma, no limite Termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ), esse equilíbrio nunca é atingido uma vez que a relaxação é essencialmente não-colisional.

Esse tipo de relaxação, por sua vez, conduz o sistema a estados quasi-estacionários onde, em geral, as condições típicas do equilíbrio termodinâmico não se verificam [Klein, 1955] invalidando assim o uso da Termodinâmica e da ME de equilíbrio para tratar esses estados. É importante salientar que, mesmo não estando em equilíbrio termodinâmico, alguns sistemas mostram-se bastante regulares quanto ao seu comportamento macroscópico. Por exemplo, aglomerados estelares, em que o tempo de relaxação colisional é maior que o tempo de vida do universo  $\approx 10^{10}$  anos; apresentam uma grande regularidade quanto ao seu comportamento dinâmico [Padmanabhan, 2002]. Nesses casos, o sistema encontra-se em estados

---

<sup>1</sup>É importante salientar que existem casos em que a distribuição de equilíbrio não é do tipo MB mesmo existindo equilíbrio no sistema, como no caso dos Férmions e Bósons.

quasi-estacionários que podem ter sido atingidos rapidamente. Essa forma de relaxação foi estudada estatisticamente em [Lynden-Bell, 1967] que denominou-a de relaxação violenta, termo inspirado no fato de que o tempo em que ocorre é muito menor que o tempo colisional do sistema. Em sistemas coulombianos, essa forma de relaxação também existe e foi estudada por [Kadomtsev and Pogutse, 1970].

Enfim, os métodos da ME de equilíbrio não são suficientes para descrever sistemas com potencial de longo alcance e ilimitado. Sendo esse justamente o caso dos feixes constituídos por partículas carregadas, somos, portanto, forçados a voltar e analisar a dinâmica nesses sistemas que é governada pela equação de Boltzmann não colisional, mais conhecida como equação de Vlasov [Braun and Hepp, 1977, Antoniazzi et al., 2007].

## Modelagem do Problema

Neste capítulo, exporemos a modelagem do problema apresentando os métodos que serão utilizados na abordagem tanto analítica quanto numérica. Esperamos mostrar todo o ferramental necessário para resolver o problema em questão.

### 2.1 Tratamento Estatístico

Do ponto de vista dinâmico, pode-se tratar um sistema hamiltoniano constituído por  $N$  partículas, através da hierarquia BBGKY [Isihara, 1971]. A dinâmica do sistema nessa hierarquia é definida em um espaço de dimensão  $2Nd$  pela função de distribuição individual  $f_1$ , mais as funções de distribuição reduzida  $f_s$  das partículas ( $s > 1$ )<sup>1</sup>. Para um sistema de partículas interagindo por um potencial  $\mathcal{V}$  e submetidas a um potencial externo  $U$ , essa hierarquia é dada por:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^s \left[ \mathbf{v}_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_n} - \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_n} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^s \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_l)}{\partial \mathbf{r}_n} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_n} \right] \right\} f_s = \sum_{n=1}^s \int d^d \mathbf{r}_{s+1} d^d \mathbf{v}_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{s+1})}{\partial \mathbf{r}_n} \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \mathbf{p}_n}. \quad (2.1)$$

Nessa equação, todos os termos entre colchetes têm dimensão de  $(tempo)^{-1}$  de modo que podemos estimar suas magnitudes relativas usando escalas de velocidades e de comprimento típicas.

1. Os termos proporcionais a

$$\frac{1}{\tau_U} \sim \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \sim \frac{v}{L} \quad (2.2)$$

estão relacionados a variações espaciais do potencial *extrínseco* sobre distâncias macroscópicas  $L$ , sendo  $v$  a velocidade típica de uma partícula no sistema.

2. Para termos proporcionais ao potencial *intrínseco* do sistema, pode-se extrair duas escalas de tempo, uma relacionada com a duração das colisões

$$\frac{1}{\tau_c} \sim \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \sim \frac{v}{\lambda}, \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup> Sendo  $d$  o número de graus de liberdade das partículas no sistema.

e outra relacionada com a probabilidade de encontrar uma partícula por unidade de volume

$$\frac{1}{\tau_x} \sim \int d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{p} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \mathbf{p}} \sim \frac{1}{\tau_c} n \lambda^3, \quad (2.4)$$

$\lambda$  está relacionado com o alcance da interação e  $n$  é a densidade das partículas do sistema.

Podemos, nesse ponto, analisar as hierarquias em duas regiões bastantes distintas do ponto de vista de  $n\lambda^3$ . Para sistemas com interação de curto alcance,  $n\lambda^3 \ll 1 \Leftrightarrow \tau_c \ll \tau_x$  de modo que as correlações mais significativas no sistema são as relacionadas a pares de partículas (colisões binárias). Conseqüentemente, pode-se simplificar a hierarquia (2.1) às duas primeiras equações e a dinâmica do sistema é governada pela equação de Boltzmann,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right] f_1 = \int d^d \mathbf{r}_2 d^d \mathbf{p}_2 \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_1}, \quad (2.5)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \right] f_2 = 0, \quad (2.6)$$

na qual assume-se que o potencial de interação entre as partículas é simétrico. A solução única dessa equação é a distribuição de Maxwell-Boltzmann (2.7), [Huang, 1987].

$$f_{MB}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C n(\mathbf{r}) e^{-\beta(|\mathbf{p}| - p_0)^2 / 2\sigma^2}, \quad (2.7)$$

em que  $C$  é a constante de normalização, o que comprova, a existência de equilíbrio termodinâmico para sistemas com interação de curto alcance.

Para sistemas com interações de longo alcance,  $n\lambda^3 \gg 1 \Leftrightarrow \tau_c \gg \tau_x$  e a dinâmica já não é mais governada pela equação de Boltzmann (2.5), mas sim pela equação de Vlasov.

### 2.1.1 Extensividade

Antes de apresentar a equação de Vlasov, discutiremos a questão da extensividade nos sistemas com interação de longo alcance. Um dos problemas do ponto de vista estatístico em tratar esses sistemas está relacionado com a não-extensividade da energia,  $E \propto N^2$ , decorrente do fato de uma partícula do sistema interage com todas as outras. Pode-se contornar este problema reescalando o potencial de interação entre as partículas  $\mathcal{V}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  de modo que  $E \propto N$  [Kac et al., 1963]. Esta escala garante a existência de limite Termodinâmico, porém não muda o caráter não aditivo do sistema [Mukamel et al., 2005]. Particularmente para os feixes esta reescala é feita na carga das partículas do sistema  $q \rightarrow q/\sqrt{N}$  assim,

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathcal{V}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.8)$$

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \propto N \frac{v^2}{2} + q^2 N^2, \quad (2.9)$$

$$q^2 \rightarrow q^2/N, \quad (2.10)$$

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \propto N, \quad (2.11)$$

onde  $v$  é a velocidade característica e  $q$  a carga de uma partícula. Assumiremos também, sem perda de generalidade, que a massa individual das partículas do sistema é unitária. Logo, utilizaremos a velocidade  $v$  ao invés do momento  $p$  como variável canônica conjugada do sistema.

Voltando à hierarquia (2.1) percebemos que as funções de distribuição reduzida podem ser reescritas como,

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left\langle \sum_{i=1}^N \delta^d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta^d(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \right\rangle = N \int \prod_{i=2}^N d^d \mathbf{r}_i d^d \mathbf{v}_i \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, t), \quad (2.12)$$

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) = N(N-1) \int \prod_{i=3}^N d^d \mathbf{r}_i d^d \mathbf{v}_i \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, t), \quad (2.13)$$

⋮

$$f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!} \int \prod_{i=s+1}^N d^d \mathbf{r}_i d^d \mathbf{v}_i \rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t), \quad (2.14)$$

onde  $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$  é a densidade de probabilidade de encontrar qualquer uma das  $N$  partículas nas posições  $\mathbf{r}_i$  com velocidade  $\mathbf{v}_i$ . Neste limite em que  $n\lambda^3 \gg 1$  pode-se assumir que a densidade  $\rho$  das  $N$  partículas é igual ao produto das densidades de uma partícula,  $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \prod_{i=1}^N \rho_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$  que consiste exatamente na aproximação de campo médio, exata no limite Termodinâmico [Braun and Hepp, 1977]. Desta forma obtemos que,

$$\frac{f_{s+1}}{f_s} = (N-s) \rho_1(\mathbf{r}_{s+1}, \mathbf{v}_{s+1}, t). \quad (2.15)$$

Portanto, voltando à hierarquia BBGKY (2.1) temos,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^s \left( \mathbf{v}_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_n} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n} \right) \right] f_s \\ &= \sum_{n=1}^s \left( \int d^d \mathbf{r}_{s+1} d^d \mathbf{v}_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{s+1})}{\partial \mathbf{r}_n} \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \mathbf{v}_n} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^s \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_l)}{\partial \mathbf{r}_n} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\approx \sum_{n=1}^s \int d^d \mathbf{r}_{s+1} d^d \mathbf{v}_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{s+1})}{\partial \mathbf{r}_n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n} [(N-s) f_s \rho_1(\mathbf{r}_{s+1}, \mathbf{v}_{s+1}, t)] \quad (2.17)$$

$$\approx \sum_{n=1}^s N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_n} \left[ \int d^d \mathbf{r}_{s+1} d^d \mathbf{v}_{s+1} \rho_1(\mathbf{r}_{s+1}, \mathbf{v}_{s+1}, t) \mathcal{V}(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{s+1}) \right] \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_n}, \quad (2.18)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^s \left( \mathbf{v}_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_n} - \frac{\partial U_{eff}}{\partial \mathbf{r}_n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n} \right) \right] f_s \approx 0, \quad (2.19)$$

onde,

$$U_{eff} = U(\mathbf{r}) + N \int d^d \mathbf{r}' d^d \mathbf{v}' \mathcal{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_1(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t). \quad (2.20)$$

Para passar de (2.16) para (2.17) usamos o fato de que  $\tau_c \gg \tau_x$  e de (2.17) para (2.18) assumimos que  $N \gg s$ . Assim, no limite Termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ), todas as equações da hierarquia BBGKY são equivalentes à equação para a função de distribuição de uma partícula e a equação (2.19) passa a ser exata

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_{eff}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (2.21)$$

Note que nesse limite a interação de par perde sentido e a dinâmica do sistema é governada por processos coletivos representados na interação de campo médio  $U_{eff}$ . Isso significa que um sistema de partículas com interações de longo alcance no limite ( $N \rightarrow \infty$ ) pode ser tratado como um fluido, onde uma partícula, agora sendo um elemento de fluido, sente um potencial médio devido ao restante do sistema.

A eq. (2.21), conhecida como equação de Vlasov, descreve exatamente a dinâmica de sistemas sujeitos a interação de longo alcance [Antoniuzzi et al., 2007] embora tenha sido derivada originalmente por Vlasov de uma forma diferente [Vlasov, 1968]. A evolução dinâmica desta equação é similar à de um fluido incompressível onde  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  a função de distribuição é similar à densidade do fluido no espaço de fase <sup>2</sup>, e  $U_{eff}$  é o potencial efetivo sentido por um elemento de fluido localizado em  $\mathbf{r}$ . Dentre outras características, a equação de Vlasov evolui preservando um número infinito de invariantes dinâmicos denominados integrais de Cassimir ou simplesmente Cassimir  $C(f)$  [Chavanis, 2006],

$$C(f) = \int s(f) d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v}, \quad (2.22)$$

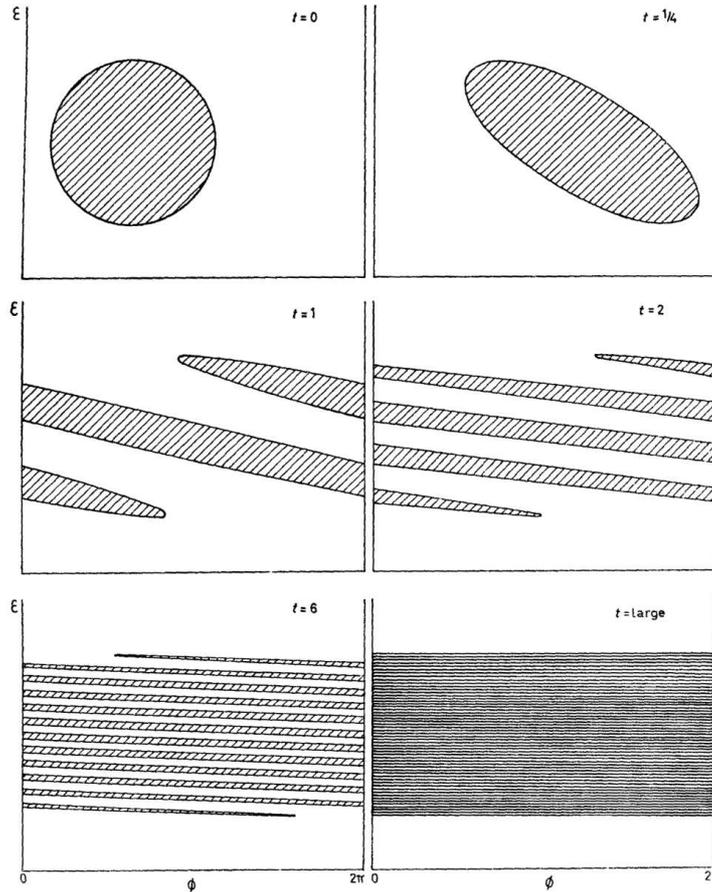
onde  $s(f)$  é uma função arbitrária da função de distribuição. Alguns exemplos com ênfase física são:

- $s(f) = 1 \Leftrightarrow C(f) \Rightarrow$  hipervolume no espaço de fase
- $s(f) = f \ln f \Leftrightarrow C(f) \Rightarrow$  entropia de Boltzmann.

Dentre estes Cassimirs notamos que a entropia de Boltzmann permanece constante durante a dinâmica de Vlasov. De fato se tratamos um sistema finito a dinâmica não é governada exatamente pela equação de Vlasov uma vez que permanece um termo de ordem  $1/N$  na equação (2.18). Neste caso a equação de Vlasov tem um comportamento similar à de Boltzmann onde as colisões são completamente mapeadas em efeitos de  $N$  finito e, portanto, a entropia de Boltzmann cresce com o tempo. Este efeito também é percebido ao se resolver numericamente a equação de Vlasov onde por efeito de grade verifica-se um crescimento de entropia [Cheng and Knorr, 1976]. Contudo no limite Termodinâmico a entropia permanece constante não havendo portanto razão para maximizá-la o que justifica a inexistência de equilíbrio termodinâmico nesses sistemas.

<sup>2</sup>Doravante referir-nos-emos simplesmente à função de distribuição, subtendendo portanto que trata-se da função de distribuição de uma partícula.

O hipervolume no espaço de fase também é preservado, e a evolução da função de distribuição se dá seguida de uma filamentação em uma escala cada vez menor, como ilustrado na Fig. 2.1.



**Figura 2.1** Evolução, em termo das variável de ação-ângulo  $(\varepsilon, \phi)$  da função de distribuição na dinâmica de Vlasov: A função de distribuição filamenta-se no espaço de fase preservando o volume inicial (figura retirada de [Lynden-Bell, 1967]).

Se inicialmente a função de distribuição  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  for discretizada em  $p$  níveis  $\eta_j$ , a dinâmica de Vlasov para esse sistema  $d$  dimensional preserva o hipervolume de cada nível  $C(\eta_j) = \int \delta[f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \eta_j] d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v}$ . Neste trabalho analisaremos somente distribuições inicialmente normalizadas de um nível do tipo

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \eta \Theta(r_b - r) \Theta(v_b - v), \quad (2.23)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função de Heaviside e  $v_b$  e  $r_b$  representam os valores máximos de posição e velocidade que inicialmente uma partícula do sistema pode assumir.  $\eta = 1 / (\pi^2 r_b^2 v_b^2)$  representa densidade normalizada no espaço de fase.

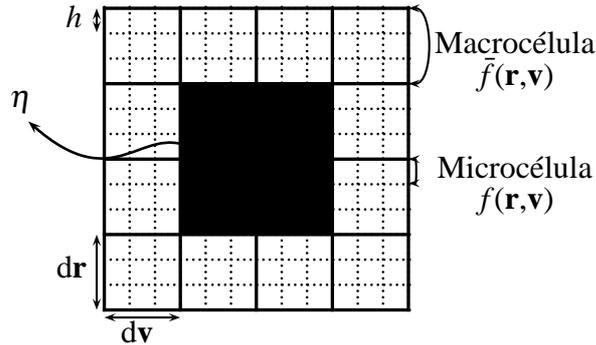
Observando a Fig. 2.1 em uma escala macroscópica (de grão grosso) percebe-se a função de distribuição parece deixar de evoluir no tempo chegando num estado macroscopicamente

estacionário. Rigorosamente esse estado é quasi-estacionário pois, a função de distribuição na escala microscópica (de grão fino) continua evoluindo.

A idéia de observar sistemas nesta escala macroscópica foi utilizado por Lynden-Bell(1967) para tratar sistemas gravitacionais. Fisicamente, essa granulação implica que para o estado quasi-estacionário, as flutuações sentidas na velocidade e posição de uma partícula do sistema não são relevantes para determinar o comportamento macroscópico do sistema. Desta forma, Lynden-Bell substituiu a função de distribuição microscópica  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  por uma macroscópica  $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , a qual é a média de  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  sobre uma macrocélula de tamanho  $d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v}$  (vide figura 2.2). Como o sistema relaxa para um estado estacionário, então  $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  deve também relaxar para uma função de distribuição final  $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ .

Para sistemas gravitacionais, esse processo foi denominado de relaxação violenta pois acontecia sobre uma escala de tempo muito menor que o tempo dinâmico do sistema. Lynden-Bell assumiu que durante esse processo além da função de distribuição evoluir preservando os hipervolumes de cada nível, a mistura no espaço de fase se dá de maneira completa (ergódica)<sup>3</sup>. Portanto  $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  pode ser determinada em uma escala macroscópica utilizando um processo de contagem similar ao micro-canônico na ME de equilíbrio.

Para tal dividimos o espaço de fase em  $\xi$  macrocélulas sendo essas, por sua vez, divididas em  $\nu$  microcélulas de volume  $h^d$ , conforme ilustrado na Fig. 2.2.



**Figura 2.2** Distribuição inicial, macroscópica e microscópica, para a função de distribuição de um nível  $\eta$  com  $d = 1$ .

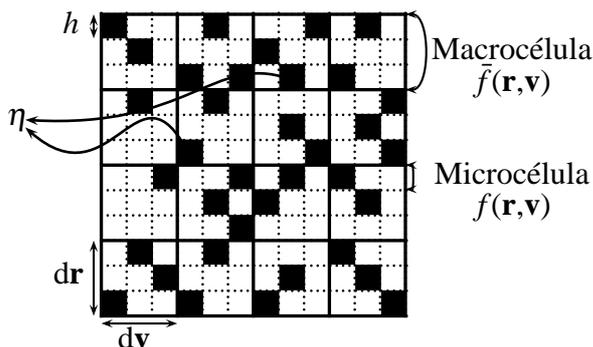
Após o sistema evoluir no tempo, a função de distribuição que inicialmente só ocupava algumas macrocélulas, sofre um processo de mistura e tende a ocupar outras macrocélulas espalhando-se no espaço de fase conforme a Fig. 2.3.

Para a  $\xi$ -ésima macrocélula,  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v})/\eta$  é definido como o número  $n_i$  de microcélulas ocupadas pelo nível  $\eta$  dividido por  $\nu$ ,

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{n_i}{\nu}. \quad (2.24)$$

Devido a incompressibilidade na dinâmica de Vlasov, observando as Figs. 2.2 e 2.3, fica evidente que em cada macrocélula  $\xi$  uma condição a ser mantida é que cada microcélula tenha

<sup>3</sup>Como na ME de equilíbrio essa premissa é assumida *a priori* sem nenhuma justificativa rigorosa.



**Figura 2.3** Distribuição final, macroscópica e microscópica, para a função de distribuição de um nível “ $\eta$ ” com  $d = 1$ .

no máximo um nível  $\eta$ , ou seja, a densidade

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq 1. \quad (2.25)$$

Se a mistura no espaço de fase se dá de maneira completa, pode-se assumir que o nível  $\eta$  da distribuição tem igual probabilidade de ocupar todas as microcélulas do espaço de fase. Desta forma podemos utilizar a análise combinatória para definir a entropia macroscópica deste sistema, similarmente ao que fazemos no ensemble micro-canônico na ME de equilíbrio. Examinando uma dada macrocélula  $\xi$ , contendo  $v$  microcélulas das quais  $n_i$  estão ocupadas, o número de formas distintas dessas  $n_i$  microcélulas serem ocupadas é dada por

$$\frac{v!}{(v - n_i)!}. \quad (2.26)$$

sendo que o número total  $N$  de microcélulas ocupadas permanece constante

$$N = \sum_i n_i. \quad (2.27)$$

O número de formas distintas dessas  $N$  microcélulas se dividirem sobre as  $\xi$  macrocélulas é dado por

$$\frac{N!}{\prod_i n_i!}, \quad (2.28)$$

dessa forma, o número total de microestados  $W$  que o sistema pode ter é dado por,

$$W = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \prod_i \frac{v!}{(v - n_i)!}. \quad (2.29)$$

A entropia macroscópica do sistema é dada por  $S_{lb} \equiv -k_B \ln W(n_i)$  onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann [Chavanis, 2006]. No limite em que  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  varia infinitesimalmente na escala de uma macrocélula a entropia assume a forma

$$S_{lb} = -k_B \int \frac{d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v}}{h^d} \{ \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \ln[\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})] + [1 - \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \ln[1 - \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \}, \quad (2.30)$$

e portanto  $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \eta \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  é completamente determinada <sup>4</sup>.

A relaxação não-colisional conduz o sistema para um estado estacionário no qual a densidade  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  é a mais provável. Além da conservação do volume outros vínculos são impostos pela dinâmica: conservação de energia, *momentum* e *momentum* angular. Particularmente neste trabalho os vínculos relevantes à dinâmica serão: a conservação da energia e do volume no espaço de fase

$$\int E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v} = \mathcal{E}_0, \quad (2.31)$$

$$\int \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v} = 1. \quad (2.32)$$

onde definimos  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  normalizada ao número de partículas sendo  $\mathcal{E}_0$  a energia inicial do sistema. Dessa forma maximizando a entropia macroscópica, o estado estacionário é completamente determinado em termos da densidade  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ,

$$\delta(S_{lb}) + \alpha \delta \left( \int \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v} \right) + \beta \delta \left( \int E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v} \right) = 0. \quad (2.33)$$

A função de distribuição para esse estado quasi-estacionário é dada por,

$$f_{lb}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\eta}{1 + e^{\beta(\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mu)}} \quad (2.34)$$

sendo  $\beta$  e  $\mu = \alpha/\beta$  os multiplicadores de Lagrange que para sistemas em equilíbrio estão relacionados com o inverso da temperatura e potencial químico <sup>5</sup>. A expressão (2.34) é similar à função de distribuição de Férmions para sistemas em equilíbrio. Isso é natural haja visto que uma dada microcélula só pode ser ocupada por um nível  $\eta$ , o que introduz um vínculo de exclusão no espaço de fase do sistema.

Enfim podemos determinar a distribuição final, para sistemas onde ocorre relaxação violenta, sem necessariamente acompanhar a evolução da função de distribuição no tempo governada pela equação de Vlasov. É importante salientar que a teoria da relaxação violenta apresenta algumas falhas como o próprio Lynden-Bell notara, particularmente quando a mistura se dá de forma incompleta. Em nosso trabalho mostraremos dois limites um onde a teoria de relaxação violenta funciona e outro onde ela falha drasticamente. Adicionalmente para este último caso, baseado no comportamento dinâmico do sistema de feixes de partículas carregadas, construiremos uma nova teoria [Levin et al., 2008].

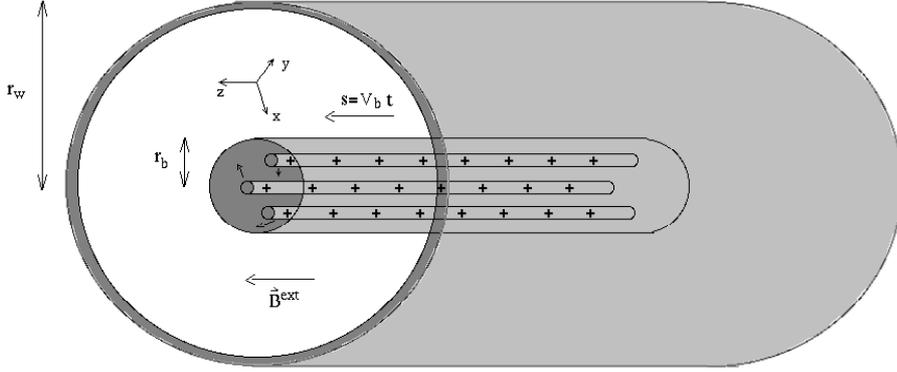
## 2.2 Plasmas Não-Neutros

Uma vez que já apresentamos a teoria estatística geral para tratar esses sistemas voltamos ao nosso sistema em particular. Detalhadamente, o feixe consiste em partículas carregadas

<sup>4</sup>No caso em que distribuição inicial tem “ $p$ ” níveis pode-se, equivalentemente, mostrar que a entropia é dada por  $S_{lb} = -k_B \int \frac{d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{v}}{h^d} \{ \sum_{j=1}^p \rho_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \ln[\rho_j(\mathbf{r}, \mathbf{v})] + [1 - \sum_{j=1}^p \rho_j(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \ln[1 - \sum_{j=1}^p \rho_j(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \}$ .

<sup>5</sup>As energias  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^2/2 + \psi(r) + \kappa_z r^2/2$  e  $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^2/2 + \psi(r)/2 + \kappa_z r^2/2$  são distintas por um fator 2 no termo do potencial. A diferença existe porque  $E$  está relacionada com a energia total do feixe enquanto  $\mathcal{E}$  está relacionada com a energia de uma partícula.

interagentes, confinados por um campo magnético externo  $\mathbf{B}^{ext}(\mathbf{r}) = B_0\hat{z}$ , propagando-se ao longo de uma direção axial  $\hat{z}$  com velocidade de módulo constante  $V_b$ . O feixe tem um raio característico  $r_b$ , e é circundado por uma parede cilíndrica condutora de raio  $r_w$ , que introduz uma condição de contorno para o potencial elétrico de interação entre as partículas do feixe  $\phi^s(\mathbf{r})$ .



**Figura 2.4** Feixe de partículas carregadas com raio característico  $r_b$  propagando-se ao longo da direção longitudinal  $\hat{z}$  com velocidade constante  $V_b$ . As partículas são confinadas por um campo magnético  $\mathbf{B}^{ext} = B_0\hat{z}$  sendo o feixe isolado do meio externo através de uma parede cilíndrica condutora localizada em  $r_w$ .

Supomos que o feixe tem simetria axial e o movimento ao longo da direção  $\hat{z}$  é uniforme de modo que a dinâmica relevante acontece somente no plano transversal. A variável temporal  $t$  pode ser substituída pela variável de posição longitudinal  $s$ , onde  $s = V_b t$  e  $V_b = \beta_b c$  sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo, conforme ilustrado na Fig. 2.4. A carga de uma partícula do feixe é dada por  $Z_i e$  sendo  $Z_i$  o número atômico da partícula e  $e$  a carga do elétron.  $N_b = \int n_b(r, s) d^2 r$  é o número de partículas por unidade de comprimento axial sendo  $n_b(r, s)$  a densidade de partículas. Supomos ainda que a velocidade transversal das partículas do feixe é, muito menor que a velocidade na direção longitudinal e que a dinâmica ao longo do plano transversal é não relativística.

Os campos elétrico  $\mathbf{E}^s$  e magnético  $\mathbf{B}^s$  de interação entre as partículas são determinados utilizando-se as equações de Maxwell [Davidson and Qin, 2001]. O potencial elétrico é obtido da equação de Poisson

$$\nabla_{\perp}^2 \phi^s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi^s(r, s) = -4\pi Z_i e n_b \quad (2.35)$$

com a condição de contorno  $\phi(r_w) = 0$ . O potencial vetor é determinado supondo-se que a corrente devido ao movimento das cargas no feixe é  $Z_i e n_b V_{zb}$ , sendo que a velocidade longitudinal média do feixe,  $V_{zb}(r, s)$ , pode ser aproximada por  $V_b$ :

$$\nabla_{\perp}^2 A_z^s(r, s) = -4\pi Z_i e n_b \beta_b. \quad (2.36)$$

<sup>6</sup>A aproximação  $\nabla^2 \approx \nabla_{\perp}^2$  é consistente pois no feixe a variação do potencial ao longo da direção longitudinal é desprezível frente às variações sobre o plano transversal.

Comparando as eqs. (2.35) e (2.36), percebemos que os potenciais elétricos e magnéticos estão relacionados por

$$A_z^s = \beta_b \phi^s. \quad (2.37)$$

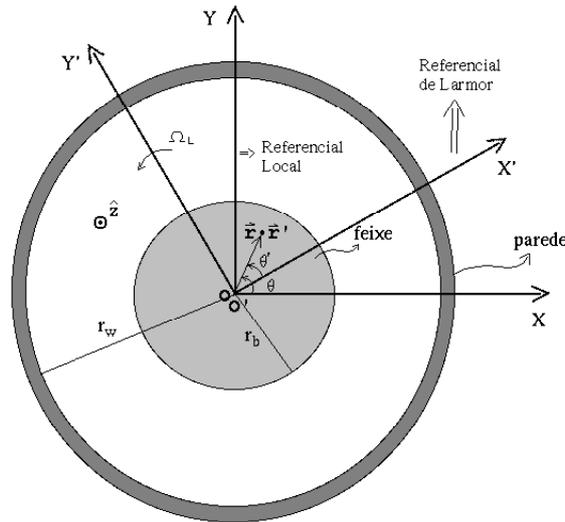
Assim, resolvendo-se unicamente a eq. de Poisson (2.35) os campos que atuam sobre uma dada partícula são completamente determinados e dados por

$$\mathbf{E}^s = -\nabla \phi^s(r, s), \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{ext} + \beta_b \nabla \phi^s(r, s) \times \hat{z}. \quad (2.39)$$

Por uma questão de conveniência [Davidson et al., 1998], estudaremos o sistema no referencial de Larmor que gira com relação ao referencial do laboratório com uma velocidade angular  $\Omega_L = -Z_i e B_0 / 2 \gamma_b m \beta_b c^2$  onde  $\beta_b = V_b / c$ ,  $\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-1/2}$  e  $m$  a massa de uma partícula no sistema, vide Fig. 2.5.

Convenientemente o potencial é também redefinido para  $\psi(r, s) = (Z_i e / \gamma_b^3 m \beta_b^2 c^2) \phi^s(r, s)$  que passa a ser uma grandeza adimensional. Nesse referencial, a focalização devido ao campo magnético,  $\mathbf{B}^{ext}$ , tem somente componente radial.



**Figura 2.5** Mudança de referenciais: “O” representa o referencial do laboratório enquanto “O'” o referencial de Larmor.

A mudança para o referencial de Larmor é feita por uma mudança nas coordenadas  $(r, \theta) \rightarrow (r', \theta')$  com

$$\begin{aligned} r' &= r, \\ \theta' &= \theta - \Omega_L s, \end{aligned} \quad (2.40)$$

conforme representado na Fig. 2.5. Com isso, a evolução do sistema é governada pelo sistema de equações Vlasov-Poisson,

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} + \mathbf{v}' \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{r}'} - \left( \kappa_z \mathbf{r}' + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}'} \right) \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{v}'} = 0, \quad (2.41)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial}{\partial r'} \right) \psi = -\frac{2\pi K}{N_b} \int F_b d^2 \mathbf{v}', \quad (2.42)$$

sendo  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ,  $v' = \sqrt{\left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds}\right)^2}$ , e  $\kappa_z = \Omega_L^2$  o parâmetro focalizador do campo magnético.  $K$  é a perveância e está associada com a intensidade do feixe, levando em conta os efeitos eletrostáticos e magnetostáticos de interação entre as partículas do sistema,

$$K = \frac{2N_b Z_i^2 e^2}{\gamma_b^3 m \beta_b^2 c^2}. \quad (2.43)$$

Neste trabalho assumiremos, sem resolver a equação de Vlasov, que a forma assintótica da função de distribuição  $F_b$  no limite em que  $s \rightarrow \infty$  é conhecida e dada por  $F_b = \bar{f}(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$  que no fundo implica que o sistema atingiu o estado estacionário descrito pela eq. (2.34). Portanto, o problema reduz-se a resolver a equação de Poisson para o potencial adimensional  $\psi(\mathbf{r}')$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}') = -\frac{2\pi K}{N_b} \int \bar{f}(\mathbf{r}', \mathbf{v}') d^2 \mathbf{v}', \quad (2.44)$$

com os vínculos de conservação de energia e número de partículas impostos pela dinâmica, (2.31) e (2.32).

## 2.3 Tratamento Numérico

Do ponto de vista numérico faremos uso de simulações de dinâmica molecular para evoluir o feixe de uma distribuição inicial para uma final. Admitiremos que no referencial de Larmor o sistema corresponde a um plasma bidimensional de pseudo partículas de massa unitária e carga  $q = \sqrt{K/N_b}$  interagindo por um potencial logarítmico  $\phi(r) = -q^2 \ln(r/r_w)$ .

No tratamento teórico também utilizaremos métodos numéricos para resolver de forma auto-consistente a equação de Poisson (2.44) com os vínculos (2.31)-(2.32).

### 2.3.1 Dinâmica Molecular

Na dinâmica molecular, como o sistema equivale a um gás coulombiano bidimensional onde as partículas interagem por um potencial de campo médio, a hamiltoniana efetiva do sistema é dada por  $\mathcal{H}_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$

$$\mathcal{H}_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_b} \frac{p_{rj}^2}{2} + \frac{p_{\theta j}^2}{2r_j^2} - Q_j \ln(r_j/r_w) + \kappa_z \frac{r_j^2}{2} \quad (2.45)$$

$$Q_j = q^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_b} \Theta(r_j - r_i), \quad (2.46)$$

onde  $Q_j$  é a carga total no interior da superfície gaussiana de raio  $r_j$ . Observando  $\mathcal{H}_{eff}$  percebemos que a dinâmica molecular corresponde à de um conjunto de cascas cilíndricas carregadas com carga  $q$  uma vez que o potencial de interação entre as partículas é de campo médio<sup>7</sup>. A justificativa para esta aproximação é que, conforme já foi exposto, sistemas com interação de longo alcance relaxam para estados quasi-estacionários devido à ausência de colisões. Portanto, como queremos estudar esse estado quasi-estacionário procuramos evitar ao máximo a influência das colisões no feixe. Poderíamos fazê-lo aproximando o potencial de interação entre as partículas por *soft-core* porém, por uma questão de rentabilidade computacional, resolvemos fazê-lo através da Lei de Gauss que é exata quando  $N \rightarrow \infty$ .

A equação de movimento para uma dada partícula  $j$  do sistema é obtida usando as equações canônicas de Hamilton,

$$\ddot{r}_j + \kappa_z r_j - \frac{Q_j}{r_j} - \frac{p_{\theta_j}^2}{r_j^3} = 0, \quad (2.47)$$

a equação para a variável  $\theta_j$  é desnecessária pois sendo esta uma coordenada cíclica do sistema simplesmente implica que  $p_{\theta_j}(t) = p_{\theta_j}(0)$ <sup>8</sup>.

As partículas são distribuídas inicialmente de maneira uniforme no espaço de fase usando a eq. (2.23). Como a média de uma função arbitrária  $A(s)$  é dada em termos da função de distribuição

$$\langle A(s) \rangle = \frac{\int A(s) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) d^2r d^2v}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) d^2r d^2v} \quad (2.48)$$

podemos computar em todo instante as grandezas médias do sistema. Usando a distribuição inicial  $f_0$  temos condições de calcular inicialmente as energias magnéticas, elétrica e cinética do feixe.

A energia potencial magnética do feixe devido ao campo externo confinante,  $\langle U_B \rangle$ , é dada em função do raio quadrático médio por:

$$\langle U_B \rangle = \frac{\kappa_z}{2} \langle r^2 \rangle \quad (2.49)$$

logo,

$$\langle U_B \rangle = \frac{\kappa_z}{2} \frac{\int r^2 f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^2r d^2v}{\int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^2r d^2v}. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.23) em (2.50) encontramos a energia magnética inicial por partícula

$$\langle U_B \rangle = \frac{\kappa_z}{4} r_b^2, \quad (2.51)$$

similarmente, a energia de interação eletromagnética entre as partículas é dada por

$$\langle U_E \rangle = \frac{1}{4\pi K} \int E^2 d^2r, \quad (2.52)$$

<sup>7</sup>Sem a aproximação de campo médio, o potencial de interação de pares seria dado por  $\phi(\mathbf{r}) = q^2 \ln(|r_i - r_j|/rw)$ .

<sup>8</sup>Para integrar todas equações de movimento auto-consistentemente utilizamos o pacote *LSODE* (Livermore Solver for Ordinary Differential Equations) que utiliza o método de Adams para resolver equações diferenciais ordinárias.

onde  $E = -\nabla\psi$  é o campo eletromagnético [Davidson and Qin, 2001]. Lembremos que o termo eletromagnético é devido ao fato de que como a força magnética entre as partículas tem a mesma direção da força eletrostática, o campo  $\mathbf{E}$  em si inclui os efeitos de  $\mathbf{E}^s$  e  $\mathbf{B}^s$  através da perveância  $K$ .

Utilizando a lei de Gauss e admitindo que o campo tem simetria radial, que constitui a aproximação de campo médio, obtemos da Eq. (2.42) o campo eletromagnético inicial,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{K}{r_b^2} \mathbf{r} & \text{para } r \leq r_b \\ \frac{K}{r^2} \mathbf{r} & \text{para } r_b \leq r < r_w \end{cases}$$

Logo, a energia eletromagnética é dada por,

$$\langle U_E \rangle = \frac{K}{8} + \frac{K}{2} \ln\left(\frac{r_w}{r_b}\right). \quad (2.53)$$

A energia potencial total será portanto

$$\langle U_T \rangle = \langle U_B \rangle + \langle U_E \rangle = \frac{\kappa_z}{4} r_b^2 + \frac{K}{8} + \frac{K}{2} \ln\left(\frac{r_w}{r_b}\right). \quad (2.54)$$

Por sua vez, a energia cinética inicial é

$$\langle U_K \rangle = \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle, \quad (2.55)$$

$$\langle U_K \rangle = \frac{1}{4} v_b^2. \quad (2.56)$$

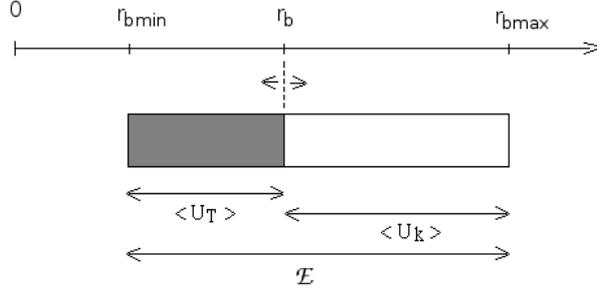
Admitiremos, que as partículas inicialmente têm momento angular. Contudo, como as partículas são distribuídas aleatoriamente no feixe, o momento angular total do sistema é nulo. A energia total inicial do feixe  $\mathcal{E}_0$  é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\kappa_z}{4} r_b^2 + \frac{K}{8} + \frac{K}{2} \ln\left(\frac{r_w}{r_b}\right) + \frac{1}{4} v_b^2. \quad (2.57)$$

Do ponto de vista físico, quando o sistema não evolui para o equilíbrio termodinâmico, a distribuição do estado quasi-estacionário deve depender, além da energia, das condições iniciais do feixe  $r_b$  e  $v_b$ . Esse fato não existe para sistemas que evoluem para o equilíbrio termodinâmico, quando a distribuição final só depende da energia inicial do sistema. Dessa forma, na dinâmica molecular fixamos um valor de energia  $\mathcal{E}_0$  e variamos os valores de  $r_b$  e  $v_b$  do feixe. Se de fato o feixe não evolui para o equilíbrio termodinâmico, a distribuição para o estado quasi-estacionário deve depender de  $\mathcal{E}_0$ ,  $r_b$  e  $v_b$ .

Assim, dado um valor de energia  $\mathcal{E}_0$  particionamos esta em cinética  $\langle U_K \rangle$  e potencial  $\langle U_T \rangle$ . Como  $\langle U_K \rangle$  depende essencialmente de  $v_b$  e  $\langle U_T \rangle$  de  $r_b$  podemos controlar as condições iniciais do feixe simplesmente controlando a energia potencial e cinética que o feixe tem inicialmente. Dessa forma, admitimos um intervalo para a variação do raio  $r_b$  do feixe  $r_b \in [r_{bmin}, r_{bmax}]$  quando  $r_b \rightarrow r_{max}$ ,  $\langle U_K \rangle \rightarrow 0$  e a energia potencial tende ao valor máximo, quando  $r_b = r_{bmin}$

a energia cinética é máxima e a energia potencial mínima. Assim, o valor de  $r_{bmax}$  determina a energia total do feixe  $\mathcal{E}_0 = \langle U_T \rangle|_{r=r_{bmax}}$ , quanto maior for o intervalo  $[r_{bmin}, r_{bmax}[$  maior é a energia inicial do feixe, Fig. 2.6. Na dinâmica molecular simularemos distribuições que inicialmente tenham energia cinética  $\langle U_K \rangle$  maior que a energia potencial  $\langle U_T \rangle$  e vice-versa.



**Figura 2.6** Distribuição inicial da energia  $\mathcal{E}_0$ ,  $r_b$  e  $v_b$ .

O valor de  $r_{bmax}$  é arbitrário enquanto que  $r_{bmin}$  é definido, no caso de um feixe frio (energia cinética inicial nula), como o valor para o qual o potencial total não varia com o raio  $r_b$

$$\frac{d}{dr_b} \langle U_T \rangle = 0 \rightarrow r_{bmin} = \sqrt{\frac{K}{\kappa_z}}, \quad (2.58)$$

de fato, esta condição está associada à condição virial no sistema de modo que qualquer outro valor de  $r_b$  faz o sistema iniciar um movimento oscilatório. Como  $\mathcal{E}_0 = \langle U_T \rangle|_{r=r_{bmax}}$ , a outra parcela de energia  $\Delta \mathcal{E}$  será distribuída na energia cinética das partículas em que

$$\Delta \mathcal{E} = \langle U_T \rangle_{r=r_{bmax}} - \langle U_T \rangle_{r=r_b}, \quad (2.59)$$

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\kappa_z}{4} r_b^2 (b^2 - 1) - \frac{K}{2} \ln(b), \quad (2.60)$$

sendo  $b = r_{bmax}/r_b > 1$ .

Usando a eq. (2.56), sabemos a relação entre o módulo máximo da velocidade das partículas e a energia cinética do feixe. Fazendo  $\langle U_K \rangle = \Delta \mathcal{E}$ , determinamos o maior módulo da velocidade que as partículas podem ter inicialmente,  $v_b$ .

$$v_b = \sqrt{\kappa_z r_b^2 (b^2 - 1) - 2 K \ln(b)} \quad (2.61)$$

Desta forma, construímos o espaço de fase para um dado valor de energia  $\mathcal{E}_0$  com distribuição uniforme em  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  dada pela eq. (2.23).

Simulamos, computacionalmente, a evolução no tempo deste feixe até o estado estacionário ser atingido. Para verificar quando o sistema atinge este estado, observamos a evolução do raio quadrático médio  $R_{rms} = \langle r^2 \rangle$ , da velocidade quadrática média  $V_{rms} = \langle v^2 \rangle$  e da emitância  $\epsilon_{rms}$  do feixe definida como,

$$\epsilon_{rms}^2(s) = 4[\langle r^2 \rangle \langle v^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \rangle^2]. \quad (2.62)$$

que é um parâmetro associado à área no espaço de fase. Em suma, o algoritmo utilizado para simular dinâmica consiste em

- 1 - Definir os parâmetros de entrada ( $N_b, r_b, r_{max}, K, \kappa_z$ );
- 2 - Distribuir as partículas no feixe segundo  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ;
- 3 - Calcular a Energia inicial do feixe  $\mathcal{E}_0$ , emitância  $\epsilon_{rms}, R_{rms}, V_{rms}$ ;
- 4 - Integrar as equações de movimento;
- 5 - Calcular a Energia do feixe  $\mathcal{E}$ , emitância  $\epsilon_{rms}, R_{rms}, V_{rms}$ ;
- 6 - Voltar ao passo 4;
- $\vdots$

sendo que simulação termina quando  $\epsilon_{rms}, R_{rms}$  e  $V_{rms}$  atingem um valor estacionário.

A dinâmica sendo hamiltoniana preserva a energia assim, utilizaremos  $\mathcal{H}_{eff}$  para computá-la ao longo da dinâmica molecular de modo a garantir um controle no processo de integração numérica. Da mesma forma, os valores médios  $\epsilon_{rms}, R_{rms}$  e  $V_{rms}$  serão calculados como média aritmética de  $\epsilon_{rms_i}, R_{rms_i}$  e  $V_{rms_i}$  sobre todas as partículas do sistema.

### 2.3.2 Cálculo Numérico

Uma vez tendo os resultados da simulação, verificamos se a teoria estatística construída é de fato suficiente para descrever esses sistemas. Conforme já foi dito, teoricamente a função de distribuição  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  pode ser obtida simplesmente resolvendo a equação de Poisson com os vínculos impostos pela dinâmica. Relembrando:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}) = -2\pi K \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \beta, \mu) d^2 \mathbf{v}, \quad (2.63)$$

$$\int E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \beta, \mu) d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{v} = \mathcal{E}_0, \quad (2.64)$$

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \beta, \mu) d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{v} = 1, \quad (2.65)$$

onde omitimos a barra sobre  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  e colocamos explicitamente em (2.63) os parâmetros  $(\beta, \mu)$  para lembrar que estes expressam o vínculo dinâmico de que a energia e o número de partículas deve ser conservado.

Substituindo nas eqs. (2.63) e (2.65) a função de distribuição dada pela eq. (2.34) e integrando o lado direito da eq. (2.63) sobre a velocidade obtemos,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + \frac{4\pi^2 K \eta}{\beta} \ln \left[ e^{-\beta(\psi(r) + \kappa_z r^2/2 - \mu)} + 1 \right] = 0, \quad (2.66)$$

$$4\pi^2 \int \frac{\eta E(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{1 + e^{\beta(\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mu)}} r dr v dv - \mathcal{E}_0 = 0, \quad (2.67)$$

$$4\pi^2 \int \frac{\eta}{1 + e^{\beta(\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mu)}} r dr v dv - 1 = 0, \quad (2.68)$$

em que pela simetria do problema utilizamos as coordenadas cilíndricas.

Resolver o problema consiste em encontrar as três grandezas  $(\psi(r), \beta, \mu)$  que resolvem as equações (2.66-2.68) simultaneamente. Para isso usamos o seguinte algoritmo:

- Discretizamos o espaço em  $r$ ;
- Definimos um perfil de densidade tentativa  $\rho_i(\mathbf{r})$ ;
- Encontramos  $\psi_i(r)$  resolvendo a Equação de Poisson para a densidade  $\rho_i(\mathbf{r})$ ;
- Encontramos  $\beta_i$  e  $\mu_i$  resolvendo as eqs. (2.67 e 2.68);
- Redefinimos a densidade  $\rho_{i+1} = (1 - \gamma) \rho_i(\mathbf{r}) + \gamma \frac{2\pi\eta}{\beta} \ln \left[ e^{-\beta_i(\psi(r) + \kappa_z r^2/2 - \mu_i)} + 1 \right]$ , com  $\gamma \in ]0; 1[$ ;
- Reencontramos  $\psi_{i+1}(r)$  resolvendo a Equação de Poisson para a densidade  $\rho_{i+1}(\mathbf{r})$ ;
- Reencontramos  $\beta_{i+1}$  e  $\mu_{i+1}$  resolvendo as eqs. (2.67 e 2.68);
- $\vdots$

Iteramos até o parâmetro de convergência

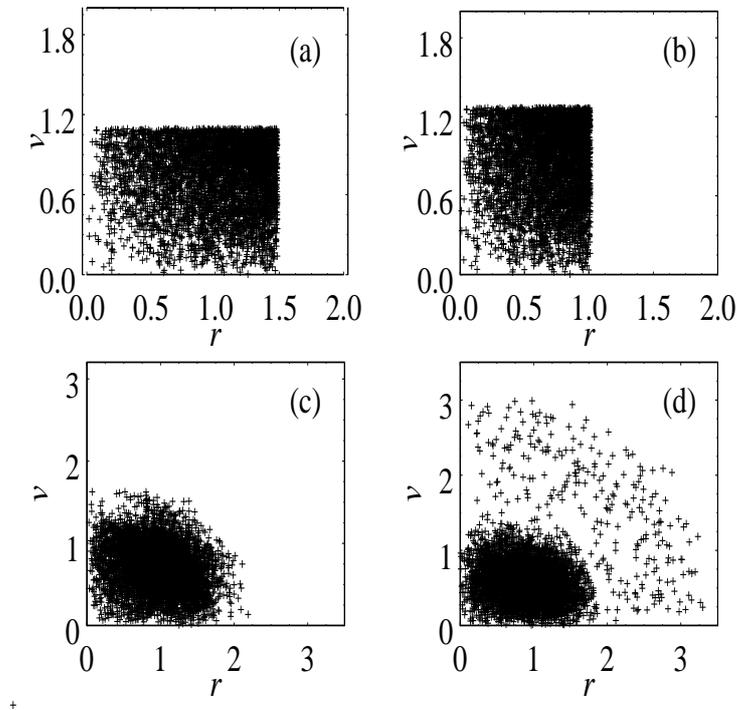
$$\zeta^2 = (\beta_{i+1} - \beta_i)^2 / \beta_i^2 + (\mu_{i+1} - \mu_i)^2 / \mu_i^2 \quad (2.69)$$

satisfazer a condição  $\zeta < 10^{-12}$ .

## CAPÍTULO 3

# Resultados

Na dinâmica do feixe, analisando os resultados das simulações verificam-se dois comportamentos bastante distintos em que, dependendo do valor de  $r_b$  o feixe desenvolvia ou não oscilações, e conseqüentemente formava ou não halos. Quando o feixe não desenvolve oscilações o feixe encontra-se na condição de feixe não-oscilante (casado).

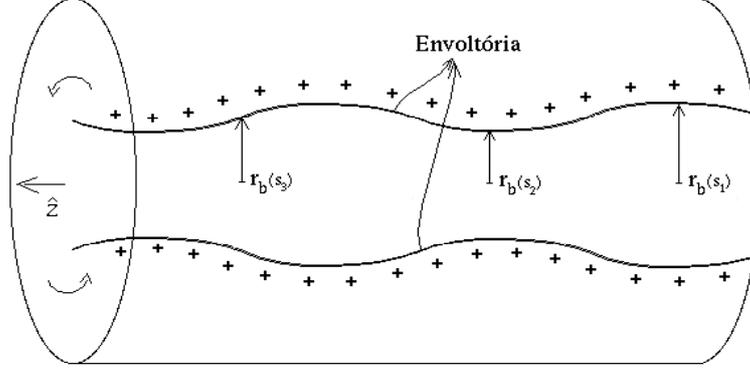


**Figura 3.1** (a) Espaço de fase inicial para o feixe com  $r_b$  na condição de feixe casado; (b) Espaço de fase inicial do feixe com  $r_b$  arbitrário; (c) Espaço de fase final para o feixe na condição de feixe casado; (d) Espaço de fase final para o feixe com  $r_b$  arbitrário;

A relação entre a presença de oscilações e a formação de halo é estudada detalhadamente em [Gluckstern, 1994]. O valor de  $r_b$  que determina este comportamento é obtido utilizando-se a equação de envelope do feixe [Davidson et al., 1998]

$$\frac{d^2 r_b(s)}{ds^2} + \kappa_z r_b(s) - \frac{K}{r_b(s)} - \frac{\varepsilon^2(s)}{r_b^3(s)} = 0. \quad (3.1)$$

A equação de envelope determina como a envoltória do feixe evolui no tempo, ou melhor ao longo de  $s$  conforme representado na Fig. 3.2.



**Figura 3.2** Evolução da envoltória de um feixe de partículas em função do comprimento longitudinal  $s$ .

Para que o feixe não oscile  $r_b(s) = cte$ , como  $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle r^2 \rangle = 0$ , temos que  $\varepsilon_{rms}^2(s) = 4(\langle r^2 \rangle \langle v^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \rangle) = 4\langle r^2 \rangle \langle v^2 \rangle$ . Adicionalmente, usando (2.49 e 2.51) temos que  $r_b^2 = 2\langle r^2 \rangle$  e portanto,  $\varepsilon_{rms}^2 = 2r_b^2 \langle v^2 \rangle$ . Dessa forma, usando a eq. 3.1 temos

$$\kappa_z r_b - \frac{K}{r_b} - \frac{2\langle v^2 \rangle}{r_b} = 0, \quad (3.2)$$

$$\kappa_z r_b - \frac{(K + 4\langle U_K \rangle)}{r_b} = 0, \quad (3.3)$$

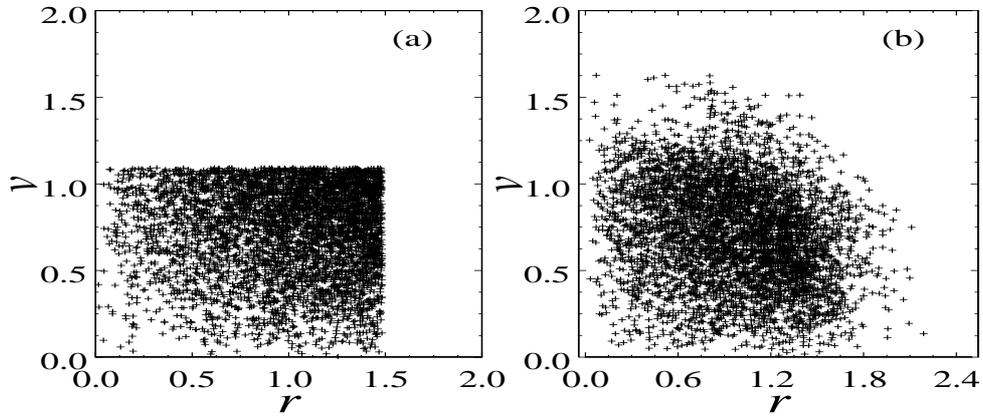
$$\kappa_z r_b^2 (2 - b^2) + K(\ln(b^2) - 1) = 0, \quad (3.4)$$

onde utilizamos a eq.(2.60) para passar de (3.3) para (3.4). Assim resolvendo a eq.(3.4) encontramos o valor no qual o feixe não desenvolve oscilações que corresponde exatamente à condição virial do sistema.

Portanto se para um dado valor de energia a distribuição inicial do feixe for tal que  $r_b$  seja raiz da eq. (3.4) diz-se que o feixe está na condição de feixe casado (*beam matched*), e o sistema não desenvolve oscilações. Caso contrário, o sistema desenvolve as oscilações e a dinâmica é completamente distinta do caso anterior. Dividiremos a análise dos resultados em dois casos: Feixes oscilantes (descasados) e Feixes não-oscilantes(casados).

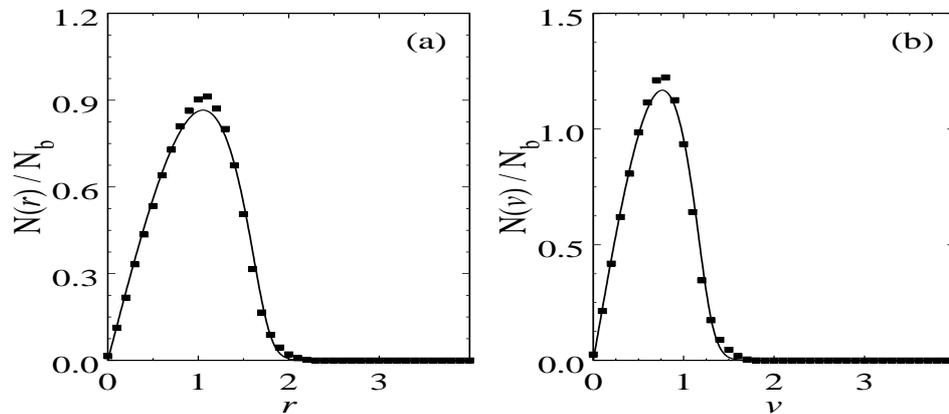
### 3.1 Feixes Não-Oscilantes

Simulamos um feixe, constituído de 5000 partículas, distribuídas no espaço de fase ( $N_b = 5000$ ) obedecendo à eq.(2.23), cujo raio  $r_b$  é solução da eq. (3.4)  $r_b \approx 1.48371 \sqrt{K/\kappa_z}$ , e aguardamos o sistema ir para o estado quasi-estacionário Fig. 3.3. O número  $N(r)$  das partículas com posições entre  $r$  e  $r + dr$  e  $N(v)$  com velocidade entre  $v$  e  $v + dv$  podem ser obtidas construindo o histograma em posição e velocidade do espaço de fase final. Assumamos que teoricamente



**Figura 3.3** Espaço de fase inicial (a) e final (b) para um feixe casado com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.48371\sqrt{K/\kappa_z}$

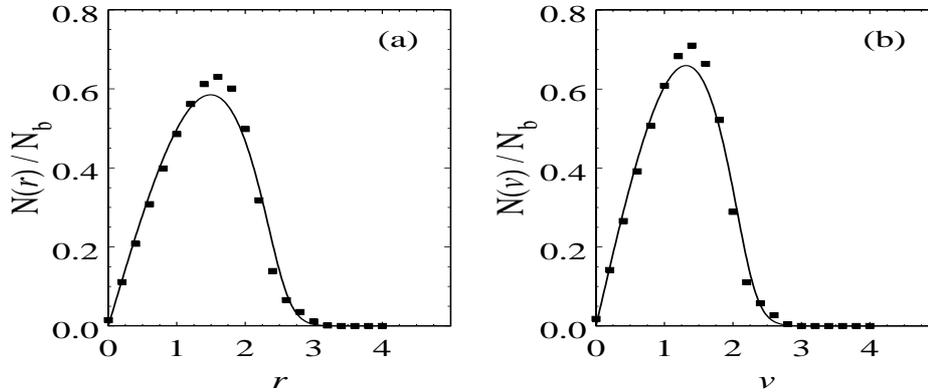
a distribuição neste estado final seja simplesmente a proposta pela teoria de relaxação violenta eq.(2.34). Assim, resolvendo o sistema (2.63)-(2.65) para esta distribuição determinamos os parâmetros  $\mu$ ,  $\beta$ , e  $\psi(\mathbf{r})$ . Comparando com a simulação, encontramos uma boa concordância Fig. 3.4. Repetindo o mesmo procedimento para  $r_b \approx 2.16552\sqrt{K/\kappa_z}$  verificamos que a



**Figura 3.4** Distribuição em posição (a) e velocidade (b) para um feixe casado com  $r_b = 1.48371\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela teoria de relaxação violenta eq.(2.34) e os pontos representam o resultado da simulação de dinâmica molecular com  $N_b = 5000$ .

distribuição final é igualmente bem descrita, conforme representado na Fig. 3.5.

Em suma verificamos uma boa descrição do sistema com a teoria utilizada. Ou seja, quando o feixe é casado a teoria baseada na relaxação violenta funciona bem e descreve a distribuição



**Figura 3.5** Distribuição em posição (a) e velocidade (b) para um feixe casado com  $r_b = 2.16552\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela teoria de relaxação violenta eq. (2.34) e os pontos representam o resultado da simulação de dinâmica molecular com  $N_b = 5000$ .

final do estado quasi-estacionário sem nenhum parâmetro de ajuste.

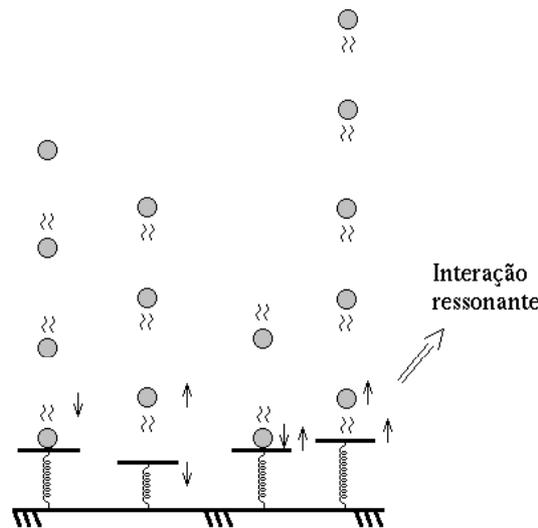
Isto é um ganho significativo contudo, a condição de feixe casado é muito específica. Em geral para um valor  $r_b$  arbitrário o feixe desenvolve oscilações e nesse caso a teoria falha drasticamente, conforme veremos na próxima seção.

### 3.2 Feixes Oscilantes

Quando o feixe inicialmente tem um raio  $r_b$  diferente do valor de feixe casado, a dinâmica do sistema é bastante diferente do caso anterior. O feixe começa a desenvolver oscilações onde algumas partículas do sistema tendem a entrar em ressonância com o restante do feixe. Esse comportamento ressonante pode ser entendido de uma forma simples. Imaginemos uma bola de massa  $m$  caindo sobre uma superfície que por sua vez está presa numa mola de constante elástica  $k$  que oscila com frequência  $\omega$ , Fig. (3.6). Admitindo que a colisão seja perfeitamente elástica entre a bola e a parede, dependendo do valor de  $k$ , em algum momento a bola entra em ressonância com a superfície e ganha um quantidade de energia maior que a sua energia inicial.

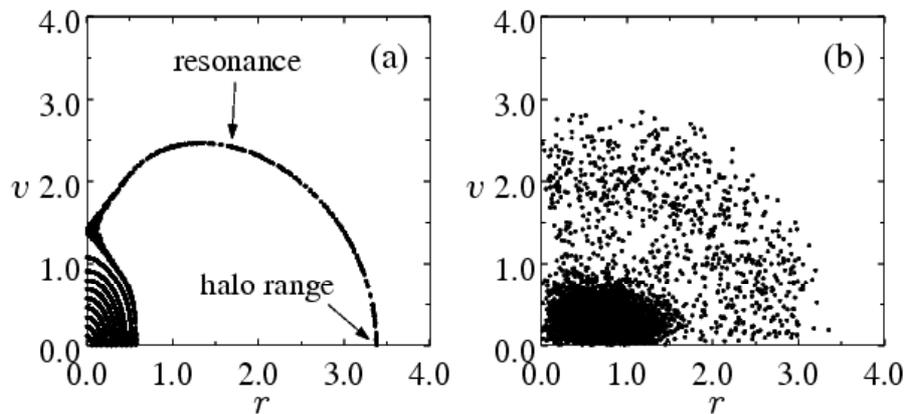
Em feixes o comportamento é similar e foi estudado por [Gluckstern, 1994], que determinou o alcance máximo das partículas que vão para essa região mais energética devido às oscilações do feixe; sendo esta região mais energética é denominada halo do sistema. Como a energia total do feixe deve permanecer constante, à medida que partículas são ejetadas por ressonância para o halo, as partículas que ficam no caroço tendem a esfriar. Esse processo repete-se até uma forma de equilíbrio dinâmico ser atingido.

Percebemos sem dificuldade que a primeira partícula que for ejetada do caroço tende a ir para a região mais energética do espaço de fase, uma vez que ela irá sentir a oscilação de um caroço com um máximo de energia. Dizemos assim que ela delimita a maior amplitude de



**Figura 3.6** Exemplo de interação ressonante entre uma bola de massa  $m$  e uma superfície oscilante. Admitimos que o sistema não apresenta dissipação de energia e que a superfície presa à mola oscila sempre com frequência  $\omega$ .

oscilação para a interação ressonante. Desta forma simulamos a interação de uma partícula teste com um feixe oscilante e determinamos o alcance máximo desta partícula no espaço de fase quando esta entra em ressonância com o feixe, conforme Fig. 3.7 (a) [Wangler et al., 1998].



**Figura 3.7** (a) Seção de Poincaré de uma partícula teste movendo-se em um potencial oscilante controlado pela eq. de envelope (3.1). (b) Espaço de fase final resultante da dinâmica molecular para o sistema com oscilação.

A partir da Fig.3.7(b), percebe-se que as partículas do halo tendem a distribuir-se uniformemente no espaço de fase até o alcance determinado pela ressonância. A partir do alcance máximo que uma partícula atinge no espaço de fase, determinamos o valor máximo  $\mathcal{E}_R$  da

energia dessa partícula

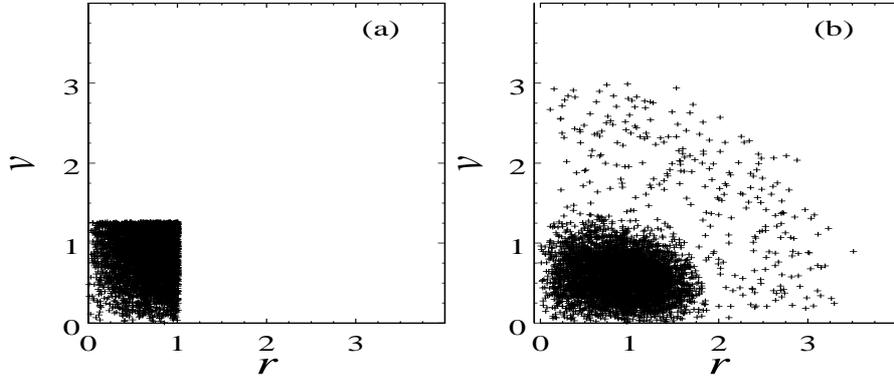
$$\mathcal{E}_R = -K \ln(r_R/r_w) + \kappa_z r_R^2/2 \quad (3.5)$$

onde  $r_R$  é o ponto de intersecção da trajetória da partícula ressonante com o eixo  $v = 0$ , *halo range* na Fig. 3.7(a).

Assim, simulamos um feixe com a energia total dada pelo parâmetro  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$ ,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\kappa_z}{4} r_{bmax}^2 + \frac{K}{8} + \frac{K}{2} \ln(r_w/r_{bmax}), \quad (3.6)$$

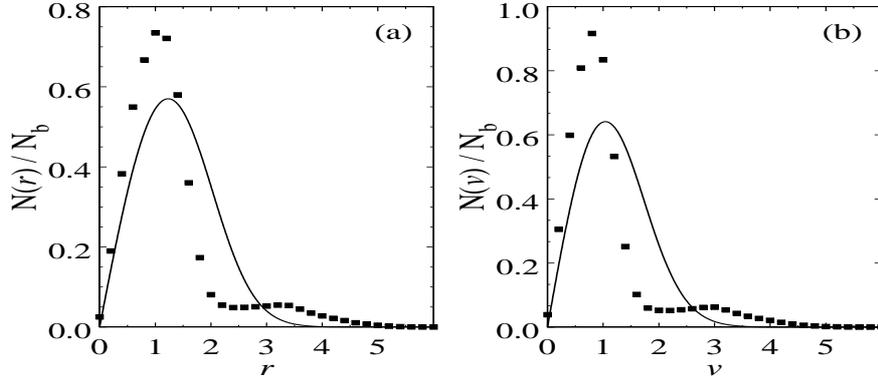
em que fazemos inicialmente  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$  de modo que o feixe esteja descasado. Distribuimos uniformemente 5000 partículas no espaço de fase ( $N_b = 5000$ ) obedecendo à eq.(2.23). O sistema evolui e, após atingir o estado estacionário, a distribuição das partículas no espaço de fase é diferente do caso sem oscilações, Fig. 3.8. Se usarmos a eq. (2.34) como função de



**Figura 3.8** Espaço de fase inicial (a) e final (b) para um feixe descasado com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$ .

distribuição para o estado final do sistema, ou seja, assumindo que exista relaxação violenta também nesse caso, verificamos que a teoria falha drasticamente como mostrado na Fig.3.9. Isso mostra que a teoria da relaxação violenta dada pela eq.(2.34) é bastante restrita e não descreve o sistema quando o feixe desenvolve oscilações. A razão estatística disto está no fato de que quando esse comportamento oscilante está presente, a mistura no espaço de fase não é completa. Nesse caso, existem ondas de densidade que acabam conduzindo o sistema para um outro estado quasi-estacionário. Precisamos então, construir uma teoria que de fato descreva esse estado quasi-estacionário para um feixe descasado nas mais diversas condições iniciais.

Inicialmente notamos que o processo de ejetar partículas do caroço tende a resfriá-lo até um mínimo de energia ser atingido. Como o volume no espaço de fase é mantido constante, devido à incompressibilidade da dinâmica de Vlasov, o sistema não pode congelar completamente, ou seja, colapsar para o mínimo de energia potencial. Também vimos que a forma assintótica da função de distribuição prevista pela relaxação violenta é similar a uma distribuição de Fermi-Dirac. Então, no limite em que a *temperatura* do caroço tende a zero  $T \rightarrow 0$ , este deve ir para



**Figura 3.9** Feixe descasado com  $r_{bmax} = 3\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 2.9\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela teoria de relaxação violenta e os pontos representam o resultado da dinâmica molecular.

um estado de máxima ocupação tendo uma energia de Fermi  $\mathcal{E}_F$ . Quanto ao halo, percebemos que o mesmo tende a uniformizar-se até a energia  $\mathcal{E}_R$ . Baseado nessa análise, propomos que a distribuição final para o feixe descasado seja dada por:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \eta \Theta[\mathcal{E}_F - \mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v})] + \chi \Theta[\mathcal{E}_R - \mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \Theta[\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mathcal{E}_F]. \quad (3.7)$$

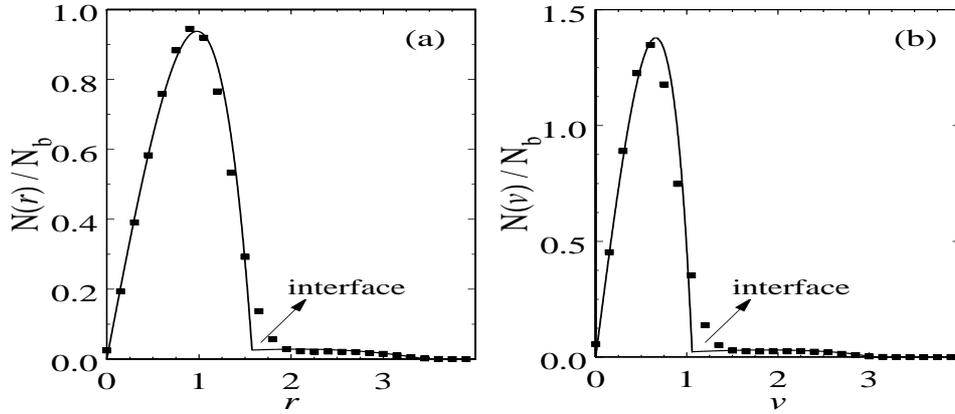
Utilizando essa função como a distribuição final do feixe, juntamente com as equações para a conservação do número de partículas e de energia, determinamos de forma auto-consistente os parâmetros  $\mathcal{E}_F$  e  $\chi$ , similar ao que fazíamos com  $\beta$  e  $\mu$  na teoria de relaxação violenta. Comparando o resultado da dinâmica molecular para um feixe descasado com a previsão teórica dada pela eq. (3.7), vemos que o estado quasi-estacionário é bem descrito Fig. 3.10. A diferença que existe na região de interface entre o caroço e o halo aponta para o fato de que o sistema atinge uma forma de equilíbrio no qual o caroço não colapsa para um estado de máxima ocupação com  $T = 0$ <sup>1</sup>.

*A priori*, não sabemos quando esse equilíbrio dinâmico é atingido pois, neste estado estacionário não existem parâmetros termodinâmicos como na ME de equilíbrio. Contudo, empiricamente notamos que quando  $T/T_F \approx 1/40$ , ou seja,  $\beta\mu \approx 40$ , esse equilíbrio é estabelecido. Assumimos desta forma, que a distribuição de equilíbrio para o sistema com oscilações seja dada simplesmente por

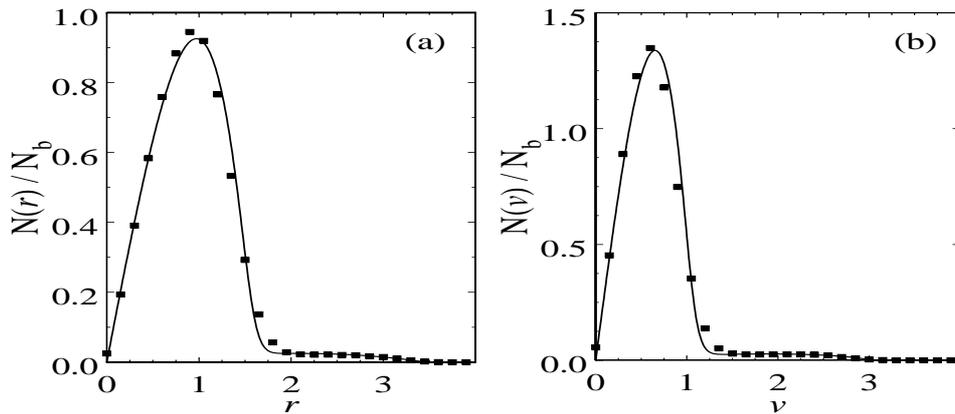
$$f_{ch}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\eta}{e^{\beta\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - 40} + 1} + \chi \Theta[\mathcal{E}_R - \mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v})]. \quad (3.8)$$

Na Fig. 3.11, mostramos o mesmo resultado de dinâmica molecular que da Fig. 3.10, porém agora utilizando a eq. (3.8) na previsão teórica. Vemos que há uma boa concordância entre a

<sup>1</sup>É importante salientar que a temperatura a que se refere no texto não tem relação alguma com a temperatura usualmente conhecida e associada com a energia cinética média das partículas do sistema.



**Figura 3.10** Feixe descasado com  $r_{bmax} = 2r_{bmin}$  e  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica dada pela eq.(3.7) e os pontos representam o resultado da dinâmica molecular.

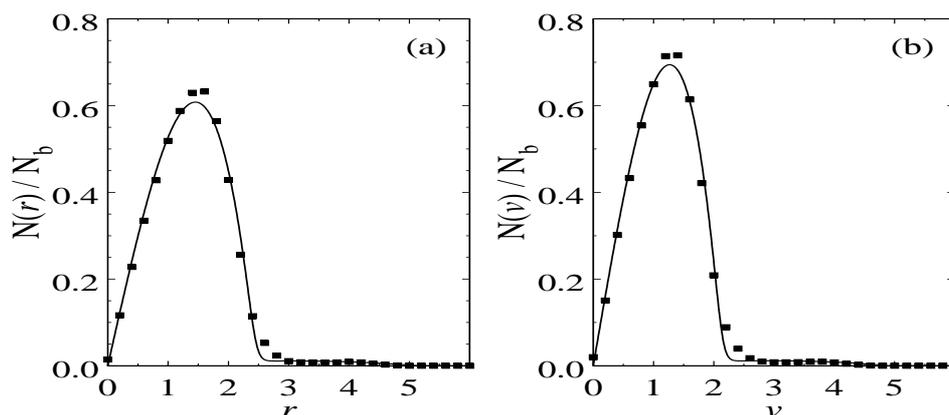


**Figura 3.11** Distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.01\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica assumindo que a distribuição do estado estacionário é dado pela eq.(3.8) e os pontos são resultados da dinâmica molecular.

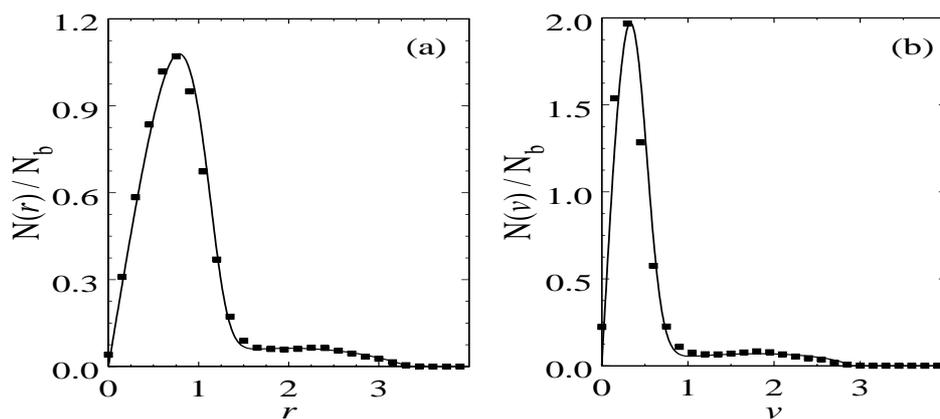
previsão teórica e o resultado da dinâmica molecular sobretudo, na região de interface entre o caroço e o halo.

A distribuição caroço-halo (3.8) descreve muito bem feixes com oscilação, de modo que podemos, preditivamente, conhecendo a distribuição inicial do feixe, determinar a sua distribuição final. Podemos agora tratar, estatisticamente, esse sistema determinando todos os parâmetros finais do feixe tais como emitância e raio rms, bem como determinar a distribuição e o número das partículas que escapam para o halo.

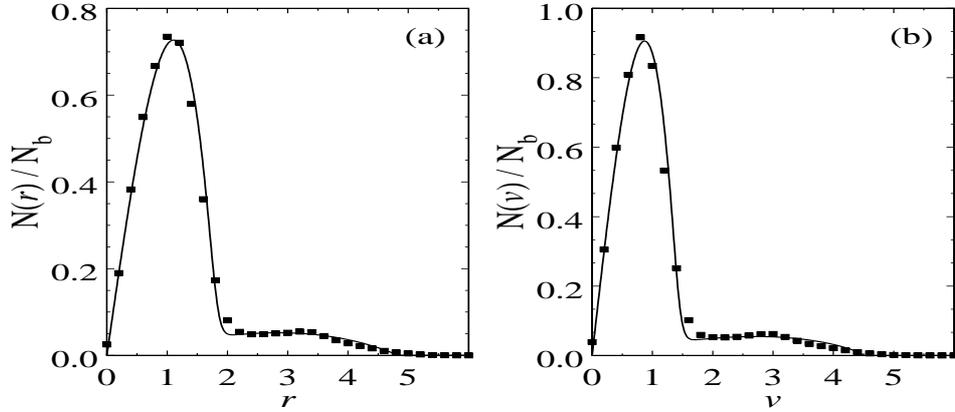
Entendemos que a forma de equilíbrio dinâmico descrita em (3.8) é universal na descrição de feixes oscilantes. Para comprovar essa teoria simulamos feixes com outras condições iniciais. Os resultados são mostrados nas figuras (3.12), (3.13) e (3.14) e em todos os casos verifica-se uma ótima concordância tanto para feixes pouco descasados como para feixes com grande descasamento conforme ilustrado nas figuras (3.13) e (3.14).



**Figura 3.12** Cálculo numérico da eq.(3.8) e distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 3\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.75\sqrt{K/\kappa_z}$ .



**Figura 3.13** Cálculo numérico da eq.(3.8) e distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.98\sqrt{K/\kappa_z}$ .



**Figura 3.14** Cálculo numérico da eq.(3.8) e distribuição final para um feixe com  $r_{bmax} = 3\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 2.9\sqrt{K/\kappa_z}$ .

### 3.2.1 Distribuição Semi-Gaussiana

Uma distribuição bastante utilizada no estudo do transporte de feixes é a distribuição semi-gaussiana [Davidson et al., 1998]. Nela, a distribuição no espaço de configuração é uniforme até um certo raio  $r_b$  porém no espaço de velocidade ela é térmica, ou seja,

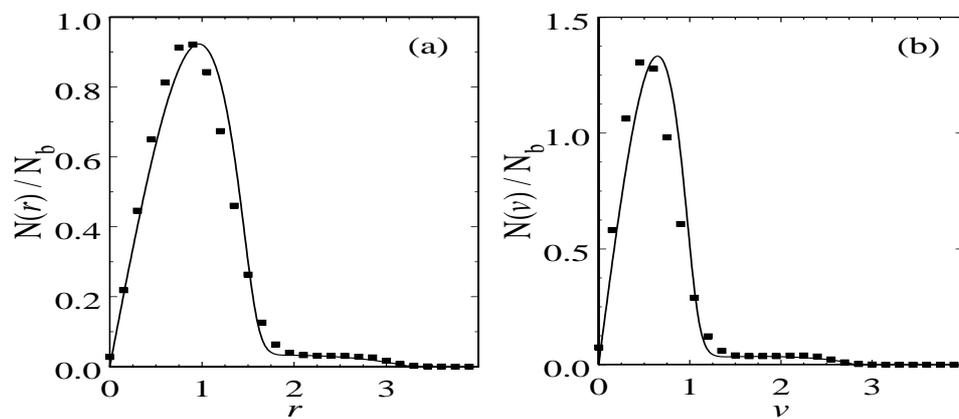
$$f_{0G}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi^2\sigma^2 r_b^2} \Theta(r_b - r) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.9)$$

Essa distribuição é uma aproximação utilizada para descrever feixes intensos emitidos por catodos quentes [Davidson et al., 1998]. Vamos aproximar a distribuição semi-gaussiana por uma distribuição de um nível exigindo que

$$f_{0G}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \eta \Theta(r_b - r) \Theta(v_b - v). \quad (3.10)$$

Esperamos que com essa condição a distribuição para o estado quasi-estacionário seja bem descrita baseando-se em distribuições uniformes de um nível. Para tanto, exigimos que (3.9) e (3.10) tenham a mesma, normalização e energia média. Assim, determinamos os parâmetros  $\eta$  e  $v_b$  para a distribuição de um nível,  $\eta = 1/4\pi^2\sigma^2 r_b^2$  e  $v_b = 2\sigma$ . Simulamos na dinâmica molecular um feixe com a distribuição inicial dada pela eq. (3.9) e comparamos com a previsão teórica da eq. (3.8). O resultado está representado na Fig. 3.15 e mostra uma razoável aproximação para a distribuição final de um feixe inicialmente termalizado.

Embora a expectativa inicial não fosse de uma boa concordância como no caso das distribuições uniformes, verificamos que mesmo neste caso a distribuição caroço-halo descreve bem o sistema. A descrição completa, provavelmente deve ser obtida levando-se em conta a possibilidade de mais de um nível na distribuição inicial do cálculo estatístico. Tal desdobramento está além do escopo desse trabalho e possivelmente será desenvolvido durante meu doutoramento.



**Figura 3.15** Feixe semi-gaussiano descasado com  $r_{bmax} = 2\sqrt{K/\kappa_z}$  e  $r_b = 1.0\sqrt{K/\kappa_z}$ ; A linha cheia representa a previsão teórica, eq. (3.8), e os pontos representam o resultado da dinâmica molecular.



## Conclusão

Neste trabalho, mostramos que sistemas com interações de longo alcance comportam-se de maneira muito distinta dos com interação de curto alcance. De fato, diferentemente de gases com interação de curto alcance, plasmas não-neutros não evoluem para o equilíbrio termodinâmico. No sistema que estudamos, plasmas confinados por campo magnético, especificamente feixes de partículas carregadas, a relaxação não-colisional conduz o sistema para um estado estacionário no qual as condições típicas do equilíbrio termodinâmico não se verificam. Em feixes descasados, por exemplo, o *equilíbrio* dinâmico é atingido; mesmo estando o caroço e o halo em *temperaturas* completamente distintas, diferente da condição usual de equilíbrio termodinâmico. Outra característica notável está no fato de que esse estado estacionário ainda apresenta memória das condições iniciais, fato que não acontece em sistemas colisionais onde a distribuição de Boltzmann é um atrator global. Enfim, usando propriedades dinâmicas relacionadas à equação de Vlasov, encontramos um método estatístico adequado para descrever feixes que não desenvolvam um comportamento oscilante. Essa metodologia proposta pelo Lynden-Bell é bastante restrita e só descreve o feixe na condição virial. Quando o feixe sai da condição virial, o sistema como um todo desenvolve oscilações macroscópicas e a teoria do Lynden-Bell falha drasticamente. Desta forma, baseado no conhecimento da física do sistema, construímos uma teoria preditiva para a função de distribuição do estado estacionário [Levin et al., 2008]. Para tanto, levamos em conta não só os vínculos dinâmicos ligados à equação de Vlasov, mas também à teoria das ressonâncias paramétricas [Gluckstern, 1994]. O estado final nestes casos oscilantes é atingido quando o sistema alcança uma forma de equilíbrio dinâmico. A teoria construída prevê, dada a distribuição inicial, qual a distribuição final atingida por feixes homogêneos de partículas carregadas. A validade da teoria aqui construída foi testada para diversas condições iniciais e mesmo quando não homogeneidades estão presentes na distribuição das velocidades, a teoria funciona de maneira bastante consistente. Desdobramentos futuros certamente estarão relacionados à aplicação da teoria construída para, de forma preditiva, determinar parâmetros importantes na dinâmica de feixes de partículas carregadas em condições de interesse tecnológico. Outro desdobramento está também relacionado com a construção de uma teoria mais geral que descreva completamente as distribuições iniciais não homogêneas nas quais outros efeitos não considerados nessa teoria estão presentes [Rizzato et al., 2007].



## Referências Bibliográficas

- [Allen et al., 2002] Allen, C. K., Chan, K. C. D., Colestock, P. L., Crandall, K. R., Garnett, R. W., Gilpatrick, J. D., Lysenko, W., Qiang, J., Schneider, J. D., Schulze, M. E., Sheffield, R. L., Smith, H. V., and Wangler, T. P. (2002). Beam-Halo Measurements in High-Current Proton Beams. *Physical Review Letters*, 89(21):214802.
- [Antoniazzi et al., 2007] Antoniazzi, A., Califano, F., Fanelli, D., and Ruffo, S. (2007). Exploring the Thermodynamic limit of hamiltonian models: Convergence to the Vlasov equation. *Physical Review Letters*, 98(15):150602.
- [Barré et al., 2001] Barré, J., Mukamel, D., and Ruffo, S. (2001). Inequivalence of Ensembles in a System with Long-Range Interactions. *Physical Review Letters*, 87(3):030601.
- [Braun and Hepp, 1977] Braun, W. and Hepp, K. (1977). The Vlasov dynamics and its fluctuations in the  $1/n$  limit of interacting classical particles. *Communications in Mathematical Physics*, 56:125–146.
- [Chavanis, 2006] Chavanis, P.-H. (2006). Coarse-grained distributions and superstatistics. *Physica A*, 359:177–212.
- [Cheng and Knorr, 1976] Cheng, C. and Knorr, G. (1976). The integration of the vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22(3):330 – 351.
- [Davidson et al., 1998] Davidson, R. C., li Lee, W. W., and Stoltz, P. (1998). Statistically averaged rate equations for intense non-neutral beam propagation through a periodic solenoidal focusing field based on the nonlinear Vlasov–Maxwell equations. *Physics of Plasmas*, 5(1):279–291.
- [Davidson and Qin, 2001] Davidson, R. C. and Qin, H. (2001). *Physics of Intense Charged Particle Beams in High Energy Accelerators*. (World Scientific, Singapore, 2001).
- [Gibbs, 1902] Gibbs, J. W. (1902). *Elementary principles in statistical mechanics*. (Scribner’s sons, New York).
- [Gluckstern, 1994] Gluckstern, R. L. (1994). Analytic model for halo formation in high current ion linacs. *Physical Review Letters*, 73(9):1247–1250.
- [Huang, 1987] Huang, K. (1987). *Statistical Mechanics*. (MIT, John Wiley & Sons).
- [Isihara, 1971] Isihara, A. (1971). *Statistical Physics*. (State University of New York, Buffalo).

- [Kac et al., 1963] Kac, M., Uhlenbeck, G. E., and Hemmer, P. C. (1963). On the Van der Waals Theory of the Vapor-Liquid Equilibrium. i. discussion of a one-dimensional model. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2):216–228.
- [Kadomtsev and Pogutse, 1970] Kadomtsev, B. B. and Pogutse, O. P. (1970). Collisionless Relaxation in Systems with Coulomb Interactions. *Physical Review Letters*, 25(17):1155–1157.
- [Klein, 1955] Klein, M. J. (1955). Principle of Detailed Balance. *Physical Review*, 97(6):1446–1447.
- [Levin, 2002] Levin, Y. (2002). Electrostatic correlations: from plasma to biology. *Report on Progress in Physics*, 65:1577–1632.
- [Levin et al., 2008] Levin, Y., Pakter, R., and Teles, T. N. (2008). Collisionless Relaxation in Non-Neutral Plasmas. *Physical Review Letters*, 100(4):040604.
- [Lynden-Bell, 1967] Lynden-Bell, D. (1967). Statistical Mechanics of Violent Relaxation in Stellar Systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136(1):101–168.
- [Muggli et al., 2008] Muggli, P., Blue, B. E., Clayton, C. E., Decker, F. J., Hogan, M. J., Huang, C., Joshi, C., Katsouleas, T. C., Lu, W., Mori, W. B., O’Connell, C. L., Siemann, R. H., Walz, D., and Zhou, M. (2008). Halo Formation and Emittance Growth of Positron Beams in Plasmas. *Physical Review Letters*, 101(5):055001.
- [Mukamel et al., 2005] Mukamel, D., Ruffo, S., and Schreiber, N. (2005). Breaking of Ergodicity and Long Relaxation Times in Systems with Long-Range Interactions. *Physical Review Letters*, 95(24):240604.
- [Padmanabhan, 2002] Padmanabhan, T. (2002). Statistical mechanics of gravitating systems. *Physics Reports*, 188(285).
- [Rizzato et al., 2007] Rizzato, F. B., Pakter, R., and Levin, Y. (2007). Wave breaking and particle jets in intense inhomogeneous charged beams. *Physics of Plasmas*, 14(11):110701.
- [Vlasov, 1968] Vlasov, A. A. (1968). The vibrational properties of an electron gas. *Soviet Physics Uspekhi*, 93(3):721–733.
- [Wangler et al., 1998] Wangler, T. P., Crandall, K. R., Ryne, R., and Wang, T. S. (1998). Particle-core model for transverse dynamics of beam halo. *Physical Review ST Accelerator Beams*, 1(8):084201.