UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CO-TUTELA COM A UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

C*-ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A CERTAS DINÂMICAS E SEUS ESTADOS KMS

Tese de Doutorado

Gilles Gonçalves de Castro

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2009.

Tese submetida por Gilles Gonçalves de Castro[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professores Orientadores:

Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS)
Dr. Jean Renault (Université d'Orléans)
Dr. Ruy Exel (UFSC)

Banca Examinadora:

Dr. Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)
Dr. Danilo Royer (UFSC)
Dr. José Afonso Barrionuevo (UFRGS)
Dr. Sandra Denise Prado (UFRGS)

Data da Defesa: 18 de dezembro de 2009.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus três professores orientadores, Artur, Jean e Ruy, por todas as discussões, as ideias e o apoio nesses quatro anos. Agradeço a minha noiva Aishameriane, pela comapanhia, amor e paciência. Agradeço a minha família por estarem sempre disponíveis. Agradeço a todos os professores que fizeram parte de minha formação matemática. Agradeço aos amigos por todas as conversas e momentos juntos. Agradeço à UFRGS pelo curso de doutorado e pela estrutura. Agradeço à Universidade de Orléans e ao laboratório MAPMO pela excelente hospitalidade. Agradeço aos colegas franceses por criarem um ambiente de trabalho agradável. Agradeço ao gato Lilo pelos arranhões de brincadeira e o pêlo na roupa depois de sair do colo. Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro tanto no Brasil quanto na França.

Resumo

Primeiramente, estudamos três formas de associar uma C*-álgebra a uma transformação contínua. Em seguida, damos uma nova definição de entropia. Relacionamos, então, os estados KMS das álgebras anterioremente definidas com os estados de equílibro, vindos de um princípio variacional. Na segunda parte, estudamos as álgebras de Kajiwara-Watatani associadas a um sistema de funções iteradas. Comparamos tais álgebras com a álgebra de Cuntz e a álgebra do produto cruzado. Finalmente, estudamos os estados KMS das álgebras de Kajiwara-Watatani para ações vindas de um potencial e relacionamos tais estados KMS com medidas encontradas numa versão do teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para sistemas de funções iteradas.

Palavras-Chave: *C*-álgebras, sistemas dinâmicos, entropia, estados KMS, sistemas de funções iteradas.*

Abstract

First, we study three ways of associating a C*-algebra to a continuous map. Then, we give a new definition of entropy. We relate the KMS states of the previously defined algebras with the equilibrium states, given by a variational principle. In the second part, we study the Kajiwara-Watatani algebras associated to iterated function system. We compare these algebras with the Cuntz algebra and the crossed product. Finally, we study the KMS states of the Kajiwara-Watatani algebras for actions coming from a potential and we relate such states with measures found in a version of the Ruelle-Perron-Frobenius theorem for iterated function systems.

Keywords: *C*-algebras, dynamical systems, entropy, KMS states, iterated function systems.*

Résumé

D'abord, on étudie trois façons d'associer une C*-algèbre à une transformation continue. Ensuite, nous donnons une nouvelle définition de l'entropie. Nous trouvons des relations entre les états KMS des algèbres préalablement définies et les états d'équilibre, donné par un principe variationnel. Dans la seconde partie, nous étudions les algèbres de Kajiwara-Watatani associées à un système des fonctions itérées. Nous comparons ces algèbres avec l'algèbre de Cuntz et le produit croisé. Enfin, nous étudions les états KMS des algèbres de Kajiwara-Watatani pour les actions provenant d'un potentiel et nous trouvouns des relations entre ces états et les mesures trouvée dans une version de le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius pour les systèmes de fonctions itérées.

Mots-clés: *C*-algèbres, systèmes dynamiques, entropie, étas KMS, systèmes de fonctions itérées.*

Conteúdo

Introdução

A interação entre álgebra de operadores e sistemas dinâmicos existe desde a década de 1930, quando Murray e von Neumann construíram uma álgebra, o produto cruzado, a partir de um automorfismo de um espaço de medidas [32]. Esperava-se que a estrutura algébrica desse informações a respeito da dinâmica em questão. Tal teoria foi amplamente estudada e generalizada de diversas formas.

O tipo de álgebra contruída por Murray e von Neumann é do tipo que hoje é conhecida como álgebra de von Neumann. São álgebras de operadores limitados num espaço de Hilbert H que são fechadas em $B(H)$ na topologia fraca de operadores. Quando ela é fechada na topologia uniforme, temos uma C*-álgebra, que foi descrita de forma abstrata na década de 1940 por Gelfand e Naimark [19].

O produto cruzado foi generalizado para o caso de um homeomorfismo resultando numa C*-álgebra. Também para os casos de um automorfismo de uma álgebra ao invés de uma transformação, e finalmente para o caso de uma ação de um grupo na álgebra. Ver por exemplo [34] para diversos resultados na área.

Quando a transformação não é bijetora, as técnicas utilizadas não funcionam diretamente. Existem várias tentativas de generalizar tanto a construção da álgebra a partir de uma transformação quanto a construção de produto cruzado para o caso de endomorfismos. Ver [15] para uma descrição mais detalhada do histórico da teoria assim como algumas referências.

Neste trabalho, vamos nos focar em três das abordagens. O produto cruzado por endomorfismo de Exel [11], a C*-álgebra de uma relação de equivalência aproximadamente própria [14] e a C*-álgebra de um grupoide

[37], [9]. Nas três técnicas, para lidar com a falta de reversibilidade do sistema, utilizamos uma medida (de probabilidade) para a imagem inversa de cada ponto. Isso pode ser interpretado como termos uma probabilidade de estarmos em cada um dos possíveis passos anteriores.

Tal abordagem está intimamente relacionada com o operador de Ruelle, também conhecido como operador de transferência, vindo do formalismo termodinâmico. O estudo desse operador permitiu generalizar o teorema de Perron-Frobenius, além de auxiliar no problema de encontrar medidas invariantes para algumas transformações e de medidas de equilíbrio para determinados sistemas.

Um problema de grande interesse em álgebra de operadores é o estudos dos estados KMS, que estão intimamente ligados aos estados de equilíbrio em mecânica quântica estatística [3]. Os estados KMS das álgebras vindas de uma transformação estão ligadas com as medidas vindas do formalismo termodinâmico [13], [14], [26].

Em [31], Lopes mostrou que, em certos casos, podemos calcular a entropia de uma medida através de um operador de transferência. O princípio variacional fica reescrito como um princípio min-max.

O primeiro objetivo da tese é dar uma nova definição de entropia baseado em operadores de transferência e relacionar os estados KMS com o princípio variacional.

Numa outra direção, estudamos as álgebras de Kajiwara-Watatani vindas de um sistema de funções iteradas (IFS) [23]. Tais sistemas nasceram da teoria de fractais e vários exemplos conhecidos caem nesse contexto.

Jorgensen e colaboradores juntaram as teorias de sistema de funções iteradas, álgebra de operadores e ondeletas [2], [28]. Entre outros resultados, eles definiram certas represenções da álgebra de Cuntz a partir de um IFS e partir daí construíram uma base de ondeletas através do formalismo de multi-resoluções.

A álgebra de Cuntz é um exemplo de uma C*-álgebra de grupoide, cuja teoria de representações está bem estabelecida [37]. Ionescu e Muhly utlizaram a teoria de grupoides para tentar generalizar os resultados de Jorgensen et al. [21]. Para o caso de um IFS, eles sugerirarm levantar o sistema para um que satisfaz a condição de separação forte. Neste caso o sistema são os ramos inversos de um homeomorfismo local e podemos considerar a álgebra de grupoide. Acontece que tal álgebra nada mais é que a álgebra de Cuntz.

O segundo objetivo da tese é relacionar as álgebras de Kajiwara-Watatani com as álgebras de Cuntz via o levantamento de um IFS.

Para ligar com as álgebras acima, podemos pensar que o sistema de funções iteradas funciona como a dinâmica quando revertemos a flecha do tempo. Isso não é sempre verdade, mas, em alguns casos, os ramos inversos de uma transformação formam um IFS.

O terceiro objetivo da tese é mostrar que, nesse caso, as álgebras de Kajiwara-Watatani e o produto cruzado de Exel são isomorfas.

Izumi, Kajiwara e Watatani estudaram os estados KMS das álgebras provenientes de sistemas de funções iteradas para o caso da ação de gauge [24], [20]. Eles mostraram que certas obstruções na dinâmica estão refeletidas na estrutura do espaço dos estados KMS.

O quarto objetivo da tese é generalizar os resultados de estados KMS das álgebras de Kajiwara-Watatani para ações provenientes de um potencial e relacionar com as medidas vindas de teorema análogo ao de Ruelle-Perron-Frobenius para o caso de IFS.

A tese segue a seguinte estrutura. O primeiro capítulo contém alguns pré-requisitos tanto da teoria de sistemas de funções iteradas como da teoria de C*-álgebras. No segundo capítulo, revemos três das formas de associar uma C*-álgebra a uma transformação contínua. Na última seção estudamos os estados KMS e como relacioná-los com o princípio variacional. No terceiro capítulo estudamos as álgebras de Kajiwara-Watatani e mostramos os resultados mencionados acima. O quarto capítulo é um resumo substancial em francês de acordo com a convenção de co-tutela para obtenção de dupla diplomação.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, revisaremos as definições e resultados que serão utilizados ao longo da tese. Começamos com a teoria de sistemas de funções iteradas. Na segunda seção revemos algumas partes da teoria de C*-álgebras e seus estados KMS. Na última seção, estudamos as álgebras de Cuntz-Pimsner, que apresenta uma técnica bastante utilizada para a construção de C*-álgebras.

1.1 Sistemas de funções iteradas

Nesta seção, revemos uma parte da teoria básica de sistemas de funções iteradas e conjuntos auto-similares (veja por exemplo [1], [10] e [16]). Fixe (X, ρ) um espaço métrico compacto.

Definição 1.1.1 *Dizemos que uma função $\gamma : X \to X$ é*

- *uma contração se $\exists c \in (0,1)$ tal que $\rho(\gamma(x), \gamma(y)) \leq c\rho(x,y)$;*
- *uma contração própria se $\exists c_1, c_2 \in (0,1)$ tal que $c_1\rho(x,y) \leq \rho(\gamma(x), \gamma(y)) \leq c_2\rho(x,y)$;*
- *uma similaridade se $\exists c > 0$ tal que $\rho(\gamma(x), \gamma(y)) = c\rho(x,y)$.*

Definição 1.1.2 *Um sistema de funções iteradas (IFS - do inglês: Iterated Function System) sobre X é um conjunto finito de funções contínuas $\{\gamma_i : X \to X\}_{i=1}^d$. Dizemos que o sistema é hiperbólico se todas as funções do IFS são contrações.*

Neste trabalho, vamos sempre assumir que o IFS é hiperbólico a menos que dito o contrário.

Proposição 1.1.3 *Dado um IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$, existe um único subespaço compacto não vazio K of X tal que*

$$K = \cup_{i=1}^d \gamma_i(K). \tag{1.1}$$

Chamaremos tal conjunto de atrator do IFS e diremos que K é um conjunto auto-similar.

Exemplo 1.1.4 *1. Sejam $X = [0,1]$, $\gamma_1(x) = x/3$ e $\gamma_2(x) = (x+2)/3$, então o conjunto atrator K é o conjunto de Cantor.*

2. Seja X o triângulo cheio no plano complexo cujos vértices são 1, $e^{2\pi i/3}$ e $e^{4\pi i/3}$. Defina as funções $\gamma_1(z) = (z+1)/2$, $\gamma_2(z) = (z + e^{2\pi i/3})/2$ e $\gamma_3(z) = (z + e^{4\pi i/3})/2$. O atrator K é o triângulo de Sierpinski.

Note que por causa de (1.1) o atrator é invariante por todos γ_i e podemos restringir o IFS para seu atrator. De agora em diante, assumiremos que $X = K$.

Definição 1.1.5 *Dizemos que um IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ satisfaz:*

- *a condição de separação forte se a união em (1.1) é uma união disjunta;*
- *a condição do conjunto aberto se $\exists U \subseteq K$ aberto e denso tal que*

$$U \subseteq \dot{\cup}_{i=1}^d \gamma_i(U)$$

onde a união acima é disjunta.

Denotemos $\Omega = \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto, $\sigma : \Omega \to \Omega$ a translação à esquerda e $\sigma_i : \Omega \to \Omega$ a função dada por

$$\sigma_i(i_0, i_1, \ldots) = (i, i_0, i_1, \ldots)$$

onde $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Proposição 1.1.6 *Seja* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *um IFS e* K *seu atrator, então existe uma sobrejeção contínua* $F : \Omega \to K$ *tal que* $F \circ \sigma_i = \gamma_i \circ F$*. Esta aplicação é dada pela fórumla*

$$F(i_0, i_{1,} \dots) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{i_0} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}(x)$$

para $x \in K$ *arbitrário. Se o IFS satisfaz a condição de separação forte então* F *é um homeomorfismo. A aplicação* F *é chamada de aplicação de codificação.*

Observação 1.1.7 *Note que sob a condição de separação forte, podemos definir a função* $\gamma = F \circ \sigma \circ F^{-1}$ *e neste caso as funções* γ_i *são exatamente os ramos inversos de* γ*. Além disso* F *nos dá uma conjugação topológica entre* γ *e o shift* σ*.*

Para um IFS arbitrário $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$, podemos sempre construir um novo IFS satisfazendo a condição de separação forte e que compartilha algumas propriedades com o original [1]. Definimos $\widetilde{X} = K \times \Omega$ e as funções $\widetilde{\gamma}_i : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ por $\widetilde{\gamma}_i(x, \omega) = (\gamma_i(x), \sigma_i(\omega))$. Seja $\widetilde{K} = \{(x, \omega) \in X \times \Omega | F(\omega) = x\}$ então

$$\widetilde{K} = \cup_{i=1}^d \widetilde{\gamma}_i(\widetilde{K}).$$

É fácil checar que $\{\widetilde{\gamma}_i : \widetilde{K} \to \widetilde{K}\}_{i=1}^d$ satisfaz a condição de separação forte.

Definição 1.1.8 *O IFS* $\{\widetilde{\gamma}_i\}_{i=1}^d$ *como acima é chamado de sistema levantado de* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$*.*

1.2 C*-álgebras e estados KMS

Definição 1.2.1 *Uma C*-álgebra* A *é uma álgebra de Banach complexa munida de uma involução* $* : A \to A$ *satisfazendo:*

- $(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*$;
- $(ab)^* = b^* a^*$;
- $\|aa^*\| = \|a\|^2$,

para $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Uma C*-álgebra que estaremos interessados em particular é a álgebra de Cuntz [8].

Definição 1.2.2 *Tome $d \in \mathbb{N} \backslash 0$. A álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_d$ é a C*-álgebra gerada por d isometrias S_i sujeitas a relação $\sum_{i=1}^{d} S_i S_i^* = 1$.*

Definição 1.2.3 *Um estado numa C*-álgebra A é um funcional linear positivo $\phi : A \to \mathbb{C}$ de norma 1. Se A tem unidade então $\phi(1) = 1$.*

Definição 1.2.4 *Um grupo a um parâmetro de automorfismos em uma C*-álgebra A é uma família de automorfismos $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tal que $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(A)$ é um homomorfismo de grupos fortemente contínuo. Dizemos que elemento $a \in A$ é analítico se a função $t \mapsto \sigma_t(a)$ pode ser estendida para uma função analítica em $\mathbb{C}$*

Pode-se provar que o conjunto dos elementos analíticos para σ é denso em A [34].

Definição 1.2.5 *Dado um grupo a um parâmetro de automorfismos σ de A e um número $\beta \in \mathbb{R}$, dizemos que um estado $\phi : A \to \mathbb{C}$ é um estado (σ, β)-KMS se*

$$\phi(ab) = \phi(b\sigma_{i\beta}(a))$$

para todo $b \in B$ e a elemento analítico.

Para mais detalhes a respeito dos estados KMS e suas relações com a mecânica quântica estatística ver [3].

Definição 1.2.6 *Sejam A uma C*-álgebra com unidade e B uma sub-C*-álgebra também com unidade. Uma esperança condicional $E : A \to B$ é uma aplicação linear positiva sobrejetora que satisfaz:*

(i) $E(ab) = E(a)b$;

(ii) $E(ba) = bE(a)$;

(iii) $E(b) = b$;

(iv) $E(a)^* = E(a^*)$,

para $a \in A$ *e* $b \in B$. *Dizemos que* E *é fiel se* $E(a^*a) = 0$ *implica que* $a = 0$.

Definição 1.2.7 *Uma esperança condicional é de índice finito se existe um conjunto finito* $\{u_i\}_{i=1,\dots,n}$ *de elementos de* A *tal que para todo* $a \in A$ *vale*

$$a = \sum_{i=1}^{n} E(au_i)u_i^*.$$

O índice de E *é dado por* $\mathrm{Ind}(E) = \sum_i u_i u_i^*$.

Pode-se mostrar que o índice pertence ao centro de A e não depende da escolha dos u_i.

1.3 Álgebras de Cuntz-Pimsner

Fixe A uma C*-álgebra.

Definição 1.3.1 *Um* C*-módulo de Hilbert (à direita) sobre A *é um* A-*módulo (à direita)* M *com uma aplicação sesquilinear* $\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to A$ *tal que:*

(i) $\langle \xi, \eta a\rangle = \langle \xi, \eta\rangle a$;

(ii) $(\langle \xi, \eta\rangle)^* = \langle \eta, \xi\rangle$;

(iii) $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$;

(iv) M *é completo com respeito à norma* $||\xi||_2 = ||\langle \xi, \xi\rangle||^{1/2}$

para $a \in A$ *e* $\xi, \eta \in M$. *Dizemos que* M *é* cheio *se* $\langle M, M\rangle$ *é denso em* A.

Seja M um C*-módulo de Hilbert e denote por $\mathcal{L}(M)$ o espaço dos operadores em M que possuem adjunto. Temos que $\mathcal{L}(M)$ é uma C*-álgebra [30]. Para $\xi, \eta \in M$ definimos o operador $\theta_{\xi,\eta} : M \to M$ por $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi\langle \eta, \zeta\rangle$. Estes operadores possuem adjunto e denotamos por $\mathcal{K}(M)$ o subespaço fechado de $\mathcal{L}(M)$ gerado por todos $\theta_{\xi,\eta}$.

Definição 1.3.2 *Uma C*-correspondência sobre A é um C*-módulo de Hilbert M junto com um C*-homomorfismo $\phi : A \to \mathcal{L}(M)$.*

Seja (M,ϕ) uma C*-correspondência sobre A e por simplicidade suponha que ϕ é fiel. Denote por J_M o ideal $\phi^{-1}(\mathcal{K}(M))$.

Definição 1.3.3 *Um par (ι, ψ) de aplicações $\iota : A \to B$, $\psi : M \to B$, onde B é uma C*-álgebra e ι um C*-homomorfismo, é dito ser uma* representação covariante de M *se:*

(i) $\psi(\phi(a)\xi b) = \iota(a)\psi(\xi)\iota(b)$;

(ii) $\psi(\xi)^*\psi(\eta) = \iota(\langle \xi, \eta \rangle)$;

(iii) $(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(c)) = \iota(c)$ *onde a aplicação* $(\psi, \iota)^{(1)} : \mathcal{K}(M) \to B$ *é dada por* $(\psi, \iota)^{(1)}(\theta_{\xi,\eta}) = \psi(\xi)\psi(\eta)^*$,

para $a, b \in A$, $\xi, \eta \in M$ *e* $c \in J_M$.

Para uma C*-correspondência (M,ϕ), existe uma álgebra $\mathcal{O}(M)$ e uma representação covariante (k_A, k_M) que é universal, no sentido que se (ι, ψ) é uma representação covariante de M numa C*-álgebra B, exite um único C*-homomorfismo $\iota \times \psi : \mathcal{O}(M) \to B$ tal que $\iota = (\iota \times \psi) \circ k_A$ e $\psi = (\iota \times \psi) \circ k_M$.

Definição 1.3.4 ([35], [22]) *A álgebra $\mathcal{O}(M)$ é chamada de álgebra de Cuntz-Pimsner de M.*

Para o estudo de estados KMS nas álgebras de Cuntz-Pimsner, vamos rever alguns dos resultados de [29] para o caso de ações de gauge genereliza-das, as quais logo definiremos. Seguiremos tanto [29] quanto as simplificações feitas em [20]. Seja (M, ϕ) uma C*-correspondência fiel e cheia sobre A. Precisamos de um grupo a um parâmetro de automorfismos δ_t de A e de um grupo a um parâmetro de isometrias υ_t of M tal que $\upsilon_t(a\xi) = \delta_t(a)\upsilon_t(\xi)$ e $\langle \upsilon_t(\xi), \upsilon_t(\eta) \rangle = \delta_t(\langle \xi, \eta \rangle)$.

Em nosso caso, iremos supor que $\delta_t(a) = a$ e $\upsilon_t(\xi) = h^{it}\xi$ onde h é um elemento positivo e inversível do centro de A. Esses igredientes nos dão um grupo a um parâmetro de automorfismos σ_t de $\mathcal{O}(M)$. Vamos denotar por $K_\beta(\sigma)$ para $\beta \geq 0$ o conjunto dos estados (σ, β)-KMS.

Definição 1.3.5 *Defina a aplicação $\mathcal{F} : A^* \to A^*$ por*

$$\mathcal{F}(\omega)(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\xi\in I_k} \omega(\langle \xi, a\xi \rangle)$$

onde $\{e_k = \sum_{\xi\in I_k} \theta_{\xi,\xi}\}$ é uma unidade aproximada de $\mathcal{K}(M)$. Para h elemento positivo e inversível no centro de A e $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, definimos $\mathcal{F}_{h,\beta} : A^* \to A^*$ por

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\omega)(a) = \mathcal{F}(\omega)(h^{-\beta} a).$$

Segue de [29] que as aplicações acima estão bem definidas e não dependem da escolhar da unidade aproximada.

Teorema 1.3.6 *Nas condições acima, existe um isomorfismo entre $K_\beta(\sigma)$ e o conjunto $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ dos estados traciais τ de A satisfazendo as seguintes condições:*

(K1) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(a)$ para $a \in J_M$;

(K2) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) \leq \tau(a)$ para $a \in A^+$.

A correspondência de $K_\beta(\sigma)$ para $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ é dada pela restrição.

Definição 1.3.7 *Dizemos que um traço finito positivo τ é do tipo finito (com respeito a (h, β)) se existe um traço finito τ_0 tal que $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$ na topogia fraca*. Dizemos que τ é do tipo infinito (com respeito a (h, β)) se $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau) = \tau$.*

Definição 1.3.8 *Dizemos que $\phi \in K_\beta(\sigma)$ é do tipo finito (resp. infinito) se $\phi|_A$ é do tipo finito (resp. infinito). Denotamos por $K_\beta(\sigma)_f$ (resp. $K_\beta(\sigma)_i$) o conjunto dos estados (σ, β)-KMS do tipo finito (resp. infinito).*

Proposição 1.3.9 *Todo elemento de $\tau \in \mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ pode ser decomposto de forma única como $\tau = \tau_1 + \tau_2$ onde τ_1 é do tipo finito e τ_2 é do tipo infinito. Temos que τ_1 é dado por $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$ onde $\tau_0 = \tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)$ e $\tau_2 = \lim \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau)$ na topologia fraca*.*

Corolário 1.3.10 *Se $\phi \in K_\beta(\sigma)$ então existe uma única combinação convexa $\phi = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2$ onde $\phi_1 \in K_\beta(\sigma)_i$ e $\phi_2 \in K_\beta(\sigma)_f$.*

Segue do corolário que para estudar o conjunto dos estados (σ, β)-KMS, é suficiente estudar os conjuntos $K_\beta(\sigma)_i$ e $K_\beta(\sigma)_f$.

Capítulo 2

C*-álgebras associadas a uma transformação contínua

Neste capítulo começamos com três das formas para construírmos uma C*-álgebra a partir de um transformação contínua. A primeira seção lida com o produto cruzado, a segunda com relações de equivalência aproximadamente próprias e o terceiro com grupoides. Na terceira seção, também estudamos como a álgebra de Cuntz pode ser vista como uma álgebra de grupoide, o que nos facilitará em algumas provas do capítulo seguinte.

Na útlima seção apresentamos uma nova definição de entropia e vemos como relacionar os estados KMS com o princípio variacional. Os resultados dessa seção foram publicados em [6].

2.1 Produto cruzado

Seja A uma C*-álgebra com unidade e suponha que sejam dados:

- Um endomorfismo unital injetor $\alpha : A \to A$.
- Um operador de transferência $L : A \to A$ para α, isto é, um aplicação linear positiva contínua tal que $L(\alpha(a)b) = aL(b)$ para $a, b \in A$. Supomos que $L(1) = 1$.

Seja $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ a C*-álgebra universal gerada por uma cópia de A e um elemento $\widehat{S}$ com as relações:

(i) $\widehat{S}a = \alpha(a)\widehat{S}$,

(ii) $\widehat{S}^*a\widehat{S} = L(a)$,

para $a \in A$. Note que a aplicação canônica de A em $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$ é injetiva.

Definição 2.1.1 *Uma redundância é um par* $(a,k) \in A \times \overline{A\widehat{S}\widehat{S}^*A}$ *tal que* $ab\widehat{S} = kb\widehat{S}$ *para todo* $b \in A$.

Definição 2.1.2 *O produto cruzado de Exel* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *é o quociente de* $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$ *pelo ideal bi-lateral fechado gerado pelo conjunto de todas as diferenças* $a-k$ *onde* (a,k) *é uma redundância.*

Uma outra maneira de constuir o produto cruzado é através das álgebras de Cuntz-Pimsner. Seja A_L a álgebra A vista como um pré módulo de Hilbert à direita cujos elementos serão denotatos por $\overline{a}$. A multiplicação por escalar à direita é dada por $\overline{a}\cdot b = \overline{a\alpha(b)}$, e defina o produto interno A-valuado $\langle , \rangle_L : A_L \times A_L \to A$ por $\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle_L = \overline{L(a^*b)}$.

Seja $N = \{\overline{a} \in A_L | \left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle_L = 0\}$ e defina o módulo de Hilbert $M_L = A_L/N$. Considerando o homorfismo $\phi : A \to \mathcal{L}(M_L)$ dado por $\phi(a)(\overline{b}+N) = \overline{ab}+N$, temos uma C*-correspondência (M_L, ϕ).

Teorema 2.1.3 ([4]) *As álgebras* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{O}(M_L)$ *são isomorfas.*

Uma das álgebras que podemos associar a uma transformação contínua é o produto cruzado.

Sejam X um espaço compacto Hausdorff e $T : X \to X$ um homeomorfismo local sobrejetivo. Definimos $A = C(X)$ e $\alpha : A \to A$ por $\alpha(f) = f \circ T$. Dada a função contínua $\rho : X \to (0,\infty)$, podemos definir o operador de transferência $L_\rho : C(X) \to C(X)$ por

$$L_\rho(f)|_x = \sum_{T(y)=x} \rho(y)f(y)$$

para $f \in C(X)$ e $x \in X$ [27]. Como queremos que $L_\rho(1) = 1$, supomos que $\sum_{T(y)=x} \rho(y) = 1$ para todo $x \in X$. Para a transformação T, associamos a álgebra $A \rtimes_{\alpha,L_\rho} \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.4 *A álgebra $A \rtimes_{\alpha,L_\rho} \mathbb{N}$ acima não depende de ρ.*

Demonstração. Se $\widetilde{\rho} : X \to (0, \infty)$ é outra função contínua tal que $\sum_{T(y)=x} \widetilde{\rho}(y) = 1$ então

$$L_{\widetilde{\rho}}(f) = L_\rho(\rho^{-1}\widetilde{\rho}f).$$

Segue que a aplicação $\Phi : A \rtimes_{\alpha,L_{\widetilde{\rho}}} \mathbb{N} \to A \rtimes_{\alpha,L_\rho} \mathbb{N}$ que manda os elementos de A neles mesmos e $\widetilde{S}$ em $\rho^{-1/2}\widetilde{\rho}^{1/2}S$ é um isomorfismo. ■

Fixe ρ como acima e vamos denotar L_ρ simplesmente por L.

Suponha agora que exista uma medida μ que é positiva nos abertos e que satisfaz $L^*(\mu) = \mu$ onde L^* é operador dual de L. Neste caso podemos construir uma representação π em $B(L^2(X, \mu))$ por:

- $\pi(f)(\xi) = f\xi$ para $f \in C(X)$ e $\xi \in L^2(X, \mu)$;
- $\pi(S)(\xi)(x) = \xi(T(x))$ para $\xi \in L^2(X, \mu)$ e $x \in X$.

Pensando em $f, g \in C(X)$ como elementos de $L^2(X, \mu)$, temos que $\pi(S)(f) = \alpha(f)$ e

$$\langle \pi(S)(f), g\rangle = \int \alpha(f)g d\mu = \int L(\alpha(f)g)d\mu = \int fL(g)d\mu,$$

ou seja, $\pi(S^*)(g) = L(g)$.

2.2 Álgebra de relações de equivalência aproximadamente próprias

Uma outra álgebra que podemos associar a uma transformação é a definida em [14].

Fixe A uma C*-álgebra com unidade.

Definição 2.2.1 *Uma relação de equivalência aproximadamente própria em A é uma sequência decrescente de subálgebras com unidade $\mathcal{R} = \{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Para a construção a seguir, precisamos também de uma sequência de esperanças condicionais fiéis $\mathcal{E} = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $E_n(A) = R_n$ e $E_{n+1} \circ E_n = E_{n+1}$ para todo n.

Definimos $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ como sendo a C*-álgebra universal gerada por A e um conjunto de projeções $\{\hat{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sujeitos a:

(i) $\hat{e}_0 = 1$,

(ii) $\hat{e}_{n+1}\hat{e}_n = \hat{e}_{n+1}$,

(iii) $\hat{e}_n a \hat{e}_n = E_n(a)\hat{e}_n$

para todo $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$. Pode-se mostrar que a inclusão canônica de A em $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ é injetora.

Para cada n defina o conjunto $\hat{K}_n = \overline{\text{span}}\{a\hat{e}_n b : a, b \in A\}$. Temos que, se $i \leq n$, então $\hat{K}_i\hat{K}_n$ e $\hat{K}_n\hat{K}_i$ estão contidos em $\hat{K}_n$ e, em particular, $\hat{K}_n$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Definição 2.2.2 *Para $n \in \mathbb{N}$, uma n-redundância é um elemento $(k_0, \ldots, k_n) \in \prod_{i=0}^n \hat{K}_i$ tal que $\sum_i k_i x = 0$ para todo $x \in \hat{K}_n$. O ideal bi-lateral fechado de $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ gerado pelos elementos $\sum_i k_i$ para todas n-redundâncias $(k_0, \ldots, k_n)$ e todo n é chamado de ideal das redundâncias.*

Definição 2.2.3 *A álgebra $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ é o quociente de $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ pelo ideal das redundâncias.*

Um caso particular da construção acima se dá quando temos um endomorfismo injetivo $\alpha : A \to A$ e um operador de transferência $L : A \to A$. Nesse caso, definimos $R_n = \alpha^n(A)$ e $E_n = \alpha_n \circ L^n$. Se $\gamma : \mathbb{S}^1 \to A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ é a ação de gauge dada por $\gamma_z(a) = a$ e $\gamma_z(S) = zS$, então $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ é exatamente a sub-C*-álgebra de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ dos pontos fixos de γ.

Suponha agora que X é um espaço Hausdorff compacto, $T : X \to X$ é um homeomorfismo local sobrejetivo e $\rho : X \to (0, \infty)$ é uma função contínua tal que $L_\rho(1) = 1$. Se $\alpha(f) = f \circ T$ e $L = L_\rho$, então podemos construir a álgebra $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Se existir uma medida μ que é positiva nos abertos e que satisfaz $L^*(\mu) = \mu$, podemos construir a representação $\pi : A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to B(L^2(X,\mu))$ como na seção anterior e restringi-lá para $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$. Teremos neste caso que $\pi(e_n) = \pi(S^n)\pi(S^n)^*$.

2.3 A álgebra de uma transformação via grupoides

Para facilitar algumas provas no capítulo seguinte, vamos rever a construção da álgebra de Cuntz como uma C*-álgebra de grupoide [9], [37]. Esse construção é um caso particular da álgebra de um grupoide para um homeomorfismo local.

Definição 2.3.1 *Um grupoide é um conjunto G munido de uma aplicação $^{-1} : G \to G$, chamada de inversa, e uma uma operação parcialmente definida $* : G^{(2)} \to G$ chamada produto, onde $G^{(2)}$ é um subconjunto de $G \times G$, satisfazendo:*

(i) Se $(a,b) \in G^{(2)}$ e $(b,c) \in G^{(2)}$ então $(a*b,c) \in G^{(2)}$ e $(a,b*c) \in G^{(2)}$. Além disso $(a*b)*c = a*(b*c)$.

(ii) $(a,a^{-1}) \in G^{(2)}$ para todo $a \in G$.

(iii) Se $(a,b) \in G^{(2)}$ então $a^{-1}*a*b = b$ e se $(b,a) \in G^{(2)}$ então $b*a*a^{-1} = b$.

Um grupoide topológico é um grupoide munido de uma topologia de forma que a inversa e o produto sejam contínuos.

Sejam agora X um espaço compacto Hausdorff e $T : X \to X$ um homeomorfismo local. Defina

$$G = \{(\omega, m-n, \tau) \in X \times \mathbb{Z} \times X : m,n \in \mathbb{N}; T^m(\omega) = T^n(\tau)\}$$

com produto e inversa dados por

$$(\omega, m-n, \tau)(\tau, k-l, \nu) = (\omega, (m+k)-(n+l), \nu)$$

$$(\omega, m-n, \tau)^{-1} = (\tau, n-m, \omega).$$

A base para a topologia em G é dada pelos conjuntos

$$B(U, V, m, n) := \{(\omega, m-n, \tau) \in G : \omega \in U, \tau \in V\}$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ e U e V são abertos de X tais que $T^m|_U$, $T^n|_V$ são homeomorfismos com $T^m(U) = T^n(V)$.

A multiplicação em $C_c(G)$ é dada por

$$(p * q)(\omega, m-n, \tau) = \sum p(\omega, k-l, \nu) q(\nu, (n+k)-(m+l), \tau)$$

onde a soma é sobre todos $k, l \in \mathbb{N}$ and $\nu \in X$ tais que $T^k(\omega) = T^l(\nu)$ e $T^{n+k}(\nu) = T^{m+l}(\tau)$; e a involução é dada por

$$p^*(\omega, m-n, \tau) = \overline{p(\tau, n-m, \omega)}$$

para $p, q \in C_c(G)$.

Ver a referência [37] para a construção da norma em $C_c(G)$. Para nós, é suficiente saber que tal norma existe e que o completamento de $C_c(G)$ é a C*-álgebra do grupoide G denotada por $C^*(G)$.

Dada $h \in C(X)$ definimos a função $h \in C_c(G)$ por

$$h(\omega, m-n, \tau) = [m = n][\omega = \tau] h(\omega)$$

onde $[\cdot]$ é a função booleana que vale 1 se seu argumento é verdadeiro e 0 caso contrário.

Também definimos a função $S \in C_c(G)$ por

$$S(\omega, m-n, \tau) = [m-n = 1][T(\omega) = \tau].$$

Teorema 2.3.2 ([15]) *Nas condições desta seção, se $\alpha : C(X) \to C(X)$ é dado por $\alpha(f) = f \circ T$ e $L : C(X) \to C(X)$ é um operador de transferência para α, então $C(X) \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ é isomorfa a $C^*(G)$.*

Um outro grupoide que podemos construir a partir de T é o grupoide da relação de equivalência

$$R_\infty = \{(x, y) \in X \times X | \, \exists n \in \mathbb{N} : T^n(x) = T^n(y)\}$$

cujo produto é dado por $(x,y)(y,z) = (x,z)$ e inversa dada por $(x,y)^{-1} = (y,x)$. A álgebra $C^*(R_\infty)$ é a sub-C*-álgebra dos pontos fixos pela ação de gauge e portanto isomorfa a $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$.

Agora, para acharmos a álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_d$, tomamos por X, o conjunto $\Omega = \{1,\ldots,d\}^{\mathbb{N}}$ e por T, a translação à esquerda $\sigma(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots) = (\omega_1,\omega_2,\ldots)$.

Note que se $\chi_{\bar{i}}$ é a função característica do cilindro $\bar{i} := \{\omega \in X : \omega_0 = i\}$ então $S_i = d^{1/2}\chi_{\bar{i}} * S$ para $i \in \{1,\ldots,d\}$ são d isometrias que satisfazem a relação de Cuntz e geram $C^*(G)$.

2.4 Estados KMS

Em [31], Lopes mostrou que em certos casos podemos definir a entropia a partir de um operador de transferência. Motivados por tais resultados, iremos dar uma nova definição de entropia.

Suponha que X é um espaço compacto Hausdorff e $T : X \to X$ é um homeomorfismo local Indicaremos por L_ρ o operador de transferencia definido por ρ e $A = C(X)$. Queremos definir uma noção de entropia para um estado $\phi : A \to \mathbb{C}$ utilizando o operador de transferência. Para isso defina $A_+ := \{a \in A \mid \sigma(a) \in (0,\infty)\}$, onde $\sigma(a)$ é o espectro de a.

Definição 2.4.1 *Dado um estado ϕ em A, definiremos a entropia de ϕ por:*

$$\mathsf{h}(\phi) = \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi \left(\ln \left(\frac{L_\rho(a)}{\rho a} \right) \right) \right\} \tag{2.1}$$

onde L_ρ é um operador de transferência para $\rho : X \to (0,\infty)$.

Note que a definição acima independe da escolha de ρ. De fato, se $\rho' : X \to (0,\infty)$ é outra função contínua, então definindo $a' = a\rho(\rho')^{-1}$ para algum $a \in A$ arbitrário, temos que $a' \in A_+$ e

$$\frac{L_{\rho'}(a')}{\rho' a'} = \frac{1}{\rho a} \sum_{y=T(x)} \rho'(x)a(x)\rho(x)\rho'(x)^{-1} = \frac{L_\rho(a)}{\rho a},$$

e portanto estamos tomando o ínfimo sobre o mesmo conjunto.

Definição 2.4.2 *Diremos que um estado ϕ é α-invariante se $\phi \circ \alpha = \phi$.*

Definição 2.4.3 *Dada um elemento $b \in A_+$, definiremos a pressão topológica de b por*

$$p(b) = \sup_{\phi \text{ inv}} \left\{ \mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) \right\}.$$

Se ϕ é um estado invariante tal que $\mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) = p(b)$, diremos que ϕ é um estado de equilíbrio.

Proposição 2.4.4 *Se $L_\rho(1) = 1$ então existe um estado ϕ tal que $\phi \circ L_\rho = \phi$.*

Demonstração. Como $L_\rho(1) = 1$, temos que $L_\rho^*(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ onde $\mathcal{S}$ é o conjunto dos estados de A. Usando o teorema de Tychonoff-Schauder, temos que $L_\rho^*|_{\mathcal{S}}$ tem um ponto fixo. ■

Proposição 2.4.5 *Se $L_\rho(1) = 1$ então $p(\rho) = 0$. Além disso os estados ϕ que satisfazem $\phi \circ L_\rho = \phi$ são estados de equilíbrio para ρ.*

Demonstração. Note que utilizando o próprio L_ρ na definição de entropia temos que

$$p(\rho) = \sup_{\phi \text{ inv}} \left\{ \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi \left(\ln \left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) \right\} \right\}.$$

Escolhendo $a = 1$ dentro do ínfimo, segue fácil que $p(\rho) \leq 0$.

Por outro lado, como L_ρ é normalizado temos que $L_\rho \circ \alpha = Id$ e se $\phi \circ L_\rho = \phi$ então $\phi \circ \alpha = \phi \circ L_\rho \circ \alpha = \phi$. Como ln é uma função côncava, temos que $\ln(L_\rho(a)) \geq L_\rho(\ln a)$ e portanto

$$\phi \left(\ln \left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) = \phi \left(\ln(L_\rho(a)) - \ln a \right) \geq \phi \left(L_\rho(\ln a) - \ln a \right).$$

Se $\phi \circ L_\rho = \phi$, o lado direito da desigualdade acima se anula e portanto $\inf_{a \in A_+} \left\{ \phi \left(\ln \left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) \right\} = 0$. Segue que $p(\rho) \geq 0$ e no caso do auto-estado, temos $h(\phi) + \phi(\rho) = \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi \left(\ln \left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) \right\} = 0 = p(\rho)$. ■

Queremos relacionar os estados KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ [12] e $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ [14] com os estados de equilíbrio (em A) do potencial $h^{-\beta}$. Como a álgebra

A é comutativa, temos únicas esperanças condicionais $F : A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to A$ e $G : C^*(\mathcal{R},\mathcal{E}) \to A$. Além disso $E := \alpha \circ L : A \to \alpha(A)$ for uma esperança condicional de índice finito, pois T é um homeomorfismo local. Neste caso, os estados KMS ψ de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ podem ser decompostos como $\psi = \phi \circ F$ onde ϕ é um estado em A satisfazendo

$$\phi(a) = \phi(L(\Lambda a)),\ \forall a \in A$$

com $\Lambda = h^{-\beta}\mathrm{ind}(E)$ e os estados KMS ψ de $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$ podem ser decompostos da forma $\psi = \phi \circ G$ onde ϕ é um estado em A satisfazendo

$$\phi(a) = \phi(\Lambda^{-[n]}E_n(\Lambda^{[n]}a)),\ \forall a \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$$

com $E_n = \alpha^n \circ L^n$ e $\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i(h^{-\beta}\mathrm{ind}(E))$.

Proposição 2.4.6 *Se $\psi = \phi \circ F$ é um estado (h,β)-KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ e $L(\Lambda 1) = 1$ então ϕ é um estado de equilíbrio (em A) para o potencial $h^{-\beta}$.*

Demonstração. A condição $L(\Lambda 1) = 1$ implica que $L_{h^{-\beta}}$ é um operador de transferência normalizado e portanto $p(h^{-\beta}) = 0$. Além disso, a condição KMS nos diz que $\phi(a) = \phi(L_{h^{-\beta}}(a))$, o que implica que $\phi(\alpha(a)) = \phi(a)$. Segue da proposição 2.4.5 que ϕ é um estado de equilíbrio para $h^{-\beta}$. ■

Como vimos nas seções anteriores, na construção das álgebras de interesse, a escolha de dois operadores de transferência normalizados nos dão álgebras isomorfas, de forma que a escolha do operador pode ser feita de forma arbitrária.

Suponha agora, que $L_\rho(k) = \lambda k$ para algum $\lambda > 0$ e $k \in A_+$. Definindo $\widetilde{\rho} = \frac{\rho k}{\lambda \alpha(k)}$ temos que $L_{\widetilde{\rho}}$ é um operador de transferência normalizado para α e portanto podemos utilizá-lo para construir $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$.

Proposição 2.4.7 *Suponha que $\psi = \phi \circ G$ seja um estado (h,β)-KMS de $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$. Seja $\rho = h^{-\beta}$ e suponha que $L_\rho(k) = \lambda k$ para algum $\lambda > 0$ e $k \in A_+$. Seja $\widetilde{\rho} = \frac{\rho k}{\lambda \alpha(k)}$ e $\widetilde{\phi}$ estado de A dado por $\widetilde{\phi}(a) = \phi(ka)$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} \left\| L^n_{\widetilde{\rho}}(a) - \widetilde{\phi}(a) \right\| = 0\ \forall a \in A$, então $\widetilde{\phi}$ é um estado de equilíbrio para $\widetilde{\rho}$.*

Demonstração. Podemos supor que a construção de $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$ foi feita a partir de $L_{\widetilde{\rho}}$, de forma que $\mathrm{ind}(E)=\widetilde{\rho}^{-1}$. Temos que

$$\Lambda^{[1]}=\left(\rho\widetilde{\rho}^{-1}\right)=\rho\frac{\lambda\alpha(k)}{\rho k}=\frac{\lambda\alpha(k)}{k}$$

e mais geralmente

$$\Lambda^{[n]}=\prod_{i=0}^{n-1}\alpha^i\left(\rho\widetilde{\rho}^{-1}\right)=\lambda^n\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\alpha^{i+1}(k)}{\prod_{i=0}^{n-1}\alpha^i(k)}=\frac{\lambda^n\alpha^n(k)}{k}$$

A condição KMS nos dá

$$\phi(a)=\phi\left(\frac{k}{\lambda^n\alpha^n(k)}\alpha^nL_{\widetilde{\rho}}^n\left(\frac{\lambda^n\alpha^n(k)}{k}a\right)\right)=$$

$$=\phi\left(k\alpha^nL_{\widetilde{\rho}}^n\left(\frac{a}{k}\right)\right)$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Segue que

$$\widetilde{\phi}(a)=\phi(ak)=\phi\left(k\alpha^nL_{\widetilde{\rho}}^n\left(\frac{a}{k}k\right)\right)=\widetilde{\phi}\left(\alpha^nL_{\widetilde{\rho}}^n\left(a\right)\right).$$

Agora,

$$\left|\widetilde{\phi}(L_{\widetilde{\rho}}(a)-a)\right|=\left|\widetilde{\phi}(\alpha^n(L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a)-L_{\widetilde{\rho}}^n(a))\right|\leq$$

$$\leq\widetilde{\phi}\left(\left\|\alpha^n(L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a)-L_{\widetilde{\rho}}^n(a))\right\|\right)\leq\widetilde{\phi}\left(\left\|L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a)-L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\right\|\right)$$

$$\leq\widetilde{\phi}\left(\left\|L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a)-\widetilde{\phi}(a)\right\|\right)-\widetilde{\phi}\left(\left\|\widetilde{\phi}(a)-L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\right\|\right)\longrightarrow_{n\to\infty}0$$

e assim $\widetilde{\phi}\circ L_{\widetilde{\rho}}=\widetilde{\phi}$. Pela proposição 2.4.5, o resultado segue. ■

Capítulo 3

C*-álgebras associadas a sistemas de funções iteradas

Neste capítulo, revisamos a construção das álgebras de Kajiwara-Watatani. Em seguida, relacionamos as álgebras de Kajiwara-Watatani com a álgebra de Cuntz e com o produto cruzado de Exel, no caso do IFS vir das imagens inversas de uma função contínua. Os resultados da primeira seção aparecem em [8].

Na última seção, ampliamos alguns dos resultados encontrados por Izumi, Kajiwara e Watatni e encontramos os estados KMS das álgebras de Kajiwara-Watani para ações mais gerais que a ação de gauge. Também relacionamos os estados KMS com auto-medidas do dual de um operador de Ruelle para o caso de IFS.

3.1 Álgebras de Kajiwara-Watatani

Seja $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^d$ um sistema de funções iteradas e K seu atrator. Vamos relembrar a C*-correspondência definida em [23]. Sejam $A = C(K)$, $E = C(\mathcal{G})$ onde

$$\mathcal{G} = \cup_{i=1}^d \mathcal{G}_i$$

com

$$\mathcal{G}_i = \{(x,y) \in K \times K : x = \gamma_i(y)\}$$

sendo os co-gráficos na terminologia de [23]. A estrutura de C*-correspondência é dada por

$$(\phi(a)\xi b)(x,y) = a(x)\xi(x,y)b(y)$$

e

$$\langle \xi, \eta \rangle_A (y) = \sum_{i=1}^{d} \overline{\xi(\gamma_i(y), y)} \eta(\gamma_i(y), y)$$

para $a, b \in A$ e $\xi, \eta \in E$.

Proposição 3.1.1 ([23]) *$(E = C(\mathcal{G}), \phi)$ é uma C*-correspondência cheia sobre $A = C(K)$ e $\phi : A \to \mathcal{L}(E)$ é fiel e unital. Além disso, a norma de módulo de Hilbert é equivalente à norma do sup em $C(\mathcal{G})$.*

Definição 3.1.2 *A álgebra de Kajiwara-Watatani $\mathcal{O}_\Gamma$ associada a Γ é a álgebra de Cuntz-Pimsner associada à C*-correspondência definida acima.*

Enxergando $\mathcal{O}_d$ como $C^*(G)$ como na seção 2.3 e recordando a aplicação de codificação F dado na proposição 1.1.6, definimos $\iota : A \to \mathcal{O}_d$ por

$$\iota(a)(\omega, m-n, \tau) = [m = n][\omega = \tau]a(F(\omega)) \tag{3.1}$$

e $\psi : E \to \mathcal{O}_d$ by

$$\psi(\xi)(\omega, m-n, \tau) = [m-n = 1][\sigma(\omega) = \tau]\xi(F(\omega), F(\tau)) \tag{3.2}$$

Note que se $\sigma(\omega) = \tau$, então $\sigma_{\omega_0}(\tau) = \omega$ and $F(\omega) = \gamma_{\omega_0}(F(\tau))$ de forma que $(F(\omega), F(\tau)) \in \mathcal{G}$ e ψ está bem definida.

Antes de mostrarmos que isto nos dá uma representação covariante de Cuntz-Pimsner, vamos relembrar algumas definições e resultados de [23] and [24].

Definição 3.1.3 *Seja $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ um IFS, definimos os seguintes conjuntos*

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{x \in K | \exists y \in K \ \exists i \neq j : x = \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\};$$

$$C(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{y \in K | \exists i \neq j : \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\}.$$

$$I(x) := \{i \in \{1, ..., d\}; \exists y \in K : x = \gamma_i(y)\}.$$

Chamamos os pontos de $B(\Gamma)$ pontos ramificados e os pontos de $C(\Gamma)$ valores ramificados. E dizemos que Γ satisfaz a condição dos ramos finitos se $C(\Gamma)$ é finito.

Temos que $B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ é um subconjunto fechado, pois

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) = \cup_{i \neq j}\{x \in \gamma_i(K) \cap \gamma_j(K); \gamma_i^{-1}(x) = \gamma_j^{-1}(x)\}$$

e cada conjunto da união é claramente fechado.

Lemma 3.1.4 ([23]) *Na situação acima, se $x \in K \backslash B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$, então existe uma vizinhança aberta U_x of x satisfazendo:*

(i) $U_x \cap B = \emptyset$;

(ii) Se $i \in I(x)$, então $\gamma_j(\gamma_i^{-1}(U_x)) \cap U_x = \emptyset$ para $j \neq i$;

(iii) Se $i \notin I(x)$, então $U_x \cap \gamma_i(K) = \emptyset$.

Lemma 3.1.5 ([23],[24]) *Se Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto e $J_E = \phi^{-1}(\mathcal{K}(E))$ é definido como na seção 1.3, então $J_E = \{a \in A = C(K); a \text{ se anula em } B(\gamma_1, ..., \gamma_d)\}$.*

Observação 3.1.6 *Na prova a seguir, precisaremos de uma descrição explícita de $\phi(a)$ para certos elementos de J_E. Fazemos como em [23]. Seja $B = B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ e tomemos $a \in A$ tal que $Y := \mathrm{supp}(a) \subseteq K \backslash B$. Claramente $a \in J_E$.*

Para cada $x \in Y$ escolha uma vizinhaça aberta U_x como no lema 3.1.4. Uma vez que Y é compacto, existe um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_m\}$ tal que $Y \subseteq \cup_{k=1}^m U_{x_k}$. Seja $U_k = U_{x_k}$ para $k = 1, \dots, m$ e $U_{m+1} = K \backslash Y$, então $\{U_k\}_{k=1}^{m+1}$ é uma cobertura aberta de K. Seja $\{\varphi_k\}_{k=1}^{m+1} \subseteq C(K)$ uma partição da unidade subordinada a essa cobertura aberta. Defina $\xi_k, \eta_k \in C(\mathcal{G})$ por $\xi_k(x, y) = a(x)\sqrt{\varphi_k(x)}$ e $\eta_k(x, y) = \sqrt{\varphi_k(x)}$ então $\phi(a) = \sum_{k=1}^m \theta_{\xi_k, \eta_k}$ (o somatório vai somente até m pois $\xi_{m+1} = 0$).

Observação 3.1.7 *Por causa do lema 3.1.5, nossos resultados vão precisar que o IFS satisfaça a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto, e note que essas condições são independentes.*

Proposição 3.1.8 *Se o IFS Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto, então o par (ι, ψ) definido pelas equações (3.1) é (3.2) é uma representação covariante de Cuntz-Pimsner de (A, E) em $\mathcal{O}_d$.*

Demonstração. A maior parte dos cálculos são parecidos então mostraremos apenas alguns deles. Seja $a \in A$ e $\xi \in E$. Temos que

$$\psi(a\xi)(\omega, m-n, \tau) = [m-n=1][\sigma(\omega)=\tau]a(F(\omega))\xi(F(\omega), F(\tau)) \tag{3.3}$$

Por outro lado

$$(\iota(a) * \psi(\xi))(\omega, m-n, \tau) = \sum \iota(a)(\omega, k-l, \nu)\psi(\xi)(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$a(F(\omega))\psi(\xi)(\omega, m-n, \tau) \tag{3.4}$$

onde a segunda igualdade é verdadeira pelo fato que $\iota(a)$ é zero a não ser que $k = l$ e $\omega = \nu$. Podemos facilmente ver que (3.3) e (3.4) coincidem.

Para o produto escalar A-valuado, seja $\xi, \eta \in E$. Então

$$\iota(\langle \xi, \eta \rangle_A)(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau] \langle \xi, \eta \rangle_A (F(\omega)) =$$

$$[m=n][\omega=\tau] \sum_{i=1}^{d} \overline{\xi(\gamma_i(F(\omega)), F(\omega))}\eta(\gamma_i(F(\omega)), F(\omega)) \tag{3.5}$$

e por outro lado

$$(\psi(\xi)^* * \psi(\eta))(\omega, m-n, \tau) = \sum \psi(\xi)^*(\omega, k-l, \nu)\psi(g)(\nu, (m+l)-(n+k), \eta) =$$

$$\sum \overline{\psi(\xi)(\nu, l-k, \omega)}\psi(g)(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$[m=n][\omega=\tau] \sum_{\sigma(\nu)=\omega} \overline{\xi(F(\nu), F(\omega))}\eta(F(\nu), F(\omega)) \tag{3.6}$$

e note que $\sigma(\nu) = \omega$ se e somente se $\nu = \sigma_i(\omega)$ para algum $i = 1, \ldots, d$ e neste caso $F(\nu) = \gamma_i(F(\omega))$. Segue que podemos reescrever (3.6) como (3.5).

Finalmente, temos que mostrar que $(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a)) = \iota(a)$ para $a \in J_E$ onde $J_E = \left\{a \in A : a|_{B(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)} = 0\right\}$ pelo lema 3.1.5. Tome $a \in J_E$ tal que $Y := \mathrm{supp}(a) \subseteq K\backslash B$ e ξ_k e η_k como na observação 3.1.6, então

$$(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a))(\omega, m-n, \tau) = \sum_k (\psi(\xi_k) * \psi(\eta_k)^*)(\omega, m-n, \tau) =$$

$$\sum_k \sum \psi(\xi_k)(\omega, k-l, \nu)\psi(\eta_k)^*(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$[m=n][\sigma(\omega)=\sigma(\tau)] \sum_k \xi_k(F(\omega), F(\sigma(\omega)))\eta_k(F(\tau), F(\sigma(\omega))) =$$

$$[m=n][\sigma(\omega)=\sigma(\tau)] \sum_k a(F(\omega))\sqrt{\varphi_k(F(\omega))}\sqrt{\varphi_k(F(\tau))}. \tag{3.7}$$

Note que $F(\omega) = \gamma_{\omega_0}(F(\sigma(\omega)))$ e $\sigma(\omega) = \sigma(\tau)$ implica que $F(\tau) = \gamma_{\tau_0}(F(\sigma(\omega)))$ onde ω_0, τ_0 são as coordenadas zero de ω e τ respectivamente. Agora, se $F(\omega) \in U_{x_k}$ então $\omega_0 \in I(x_k)$ por causa da propriedade (iii) do lema 3.1.4 e $F(\sigma(\omega) \in \gamma_{\omega_0}^{-1}(U_{x_k})$. Temos que $F(\tau) \in \gamma_{\tau_0}(\gamma_{\omega_0}^{-1}(U_{x_k}))$ e se $\omega_0 \neq \tau_0$ então pela propriedade (ii) do lema 3.1.4, temos que $F(\tau) \notin U_{x_k}$. Como o suporte de φ_k está contido em U_{x_k} e se $\omega_0 = \tau_0$ então $\omega = \tau$, temos de (3.7) que

$$(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a))(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau]a(F(\omega)) =$$

$$\iota(a)(\omega, m-n, \tau).$$

Como o conjunto dos elementos $a \in C(K)$ tais que $\mathrm{supp}(a) \subseteq K\backslash B$ é denso em J_E, a igualdade $(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a)) = \iota(a)$ é válida para $a \in J_E$ arbitrário. ∎

Lemma 3.1.9 ([18]) *Suponha que (ψ,ι) é uma representação covariante isométrica de E numa C^*-álgebra B. Então $\psi \times \iota$ é fiel se e somente se ι é fiel e existe uma ação (fortemente contínua) $\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(B)$ tal que $\beta_z \circ \iota = \iota$ e $\beta_z \circ \psi = z\psi$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$.*

Proposição 3.1.10 *Se o IFS Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto, então homomorfismo $\psi \times \iota$ dado pela representação covariante definida por (3.1) and (3.2) é fiel.*

Demonstração. Dado $a \in C(K)$,

$$(\iota(a)^* * \iota(a))(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau]|a(F(\omega))|^2$$

e como F é sobrejetiva, temos que ι é fiel. Seja $\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_d)$ a ação de gauge dada por

$$\beta_z(f)(\omega, m-n, \tau) = z^{m-n} f(\omega, m-n, \tau)$$

então $\beta_z(\iota(a)) = \iota(a)$ pois $\iota(a)$ é zero para $m \neq n$; e dado $\xi \in E$, $\beta_z(\psi(\xi)) = z\psi(\xi)$ pois $\psi(\xi)$ é zero para $m - n \neq 1$. ■

Concluímos com essa proposição que $\mathcal{O}_\Gamma$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{O}_d$.

Observação 3.1.11 *Como $\mathcal{G}$ é um subconjunto fechado, e portanto compacto, de $K \times K$, todas funções contínuas em $\mathcal{G}$ podem ser vistas como restrições de funções contínuas de $K \times K$. E observando que $C(K \times K) = C(K) \otimes C(K)$, temos que toda função contínua em $\mathcal{G}$ pode ser escrita como um limite de somas de elementos do tipo $a \otimes b$ onde $a, b \in C(K)$. Podemos fazer isso tanto com respeito à norma do sup quanto à norma de módulo de Hilbert por causa da proposição 3.1.1.*

Também notamos que a aplicação de codificação $F : \Omega \to K$ definida na proposição1.1.6 induz uma injeção de $C(K)$ em $C(\Omega)$.

Proposição 3.1.12 *Se o IFS Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conunto aberto, então $\mathcal{O}_\Gamma$ é a sub-C*-álgebra de $\mathcal{O}_d$ gerada por $C(K)$ e S.*

Demonstração. Como uma álgebra de Cuntz-Pimsner é gerada por cópias dos elementos da álgebra e cópias dos elementos do módulo, temos que $\mathcal{O}_\Gamma$ é gerado por todos elementos $a \in C(K)$ e $\xi \in C(\mathcal{G})$. Basta notar que $\psi(\mathbf{1}) = S$ onde $\mathbf{1}$ é a identidade de $C(\mathcal{G})$ e $\psi(a \otimes b) = \iota(a)\psi(\mathbf{1})\iota(b)$ para $a, b \in C(K)$. ■

Vamos relembrar algumas definições de [23] e dar uma prova diferente para isomorfismo entre $\mathcal{O}_\Gamma$ e $\mathcal{O}_d$ para uma certa classe de IFS.

Definição 3.1.13 *Dizemos que o IFS* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *satisfaz a condição de separação dos co-gráficos se os co-gráficos definidos por*

$$\mathcal{G}_i = \{(\gamma_i(y), y) \in K \times K : y \in K\}$$

são disjuntos.

Note que os co-gráficos de um IFS são sempre subconjuntos fechados de $\mathcal{G}$ e se o IFS satisfaz a condição de separação dos co-gráficos então eles também são subconjuntos abertos. Neste caso, não existem pontos ramificados e em particular, o IFS satisfaz a condição dos ramos finitos.

Proposição 3.1.14 *Se o IFS* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *satisfaz a condição de separação dos co-gráficos então* $\mathcal{O}_\gamma \simeq \mathcal{O}_d$.

Demonstração. Se $\chi_{\mathcal{G}_i}$ é a função característica de $\mathcal{G}_i$ então ela pertence a $C(\mathcal{G})$ e note que $\psi(\chi_{\mathcal{G}_i}) = \chi_{\bar{i}} * S$ onde $\chi_{\bar{i}}$ é a função característica do cilindro $\bar{i}$. Como vimos na seção 2.3, os elementos $S_i = d^{1/2}\chi_{\bar{i}} * S = d^{1/2}\psi(\chi_{\mathcal{G}_i})$ são d isometrias que satisfazem as relações de Cuntz e geram $\mathcal{O}_d$. ■

3.2 Estados KMS nas álgebras de Kajiwara-Watatani

Sejam $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}$ um IFS sobre seu atrator K, $\mathcal{O}_\Gamma$ a álgebra definida na seção anterior, $h \in C(K)$ uma função estritamente positiva e σ o grupo a um parâmetro de automorfismos definido a partir de h como na seção 1.3. Sejam $B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ e $C(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ os conjuntos definidos em (3.1.3) e suponha que Γ satisfaça a condição dos ramos finitos, isto é, B e C são finitos.

Para um ponto $(x, y) \in K \times K$ defina

$$e(x, y) = \#\{j \in \{1, \ldots, d\} : \gamma_j(y) = x\}$$

e para $a \in C(K)$, seja $\widetilde{a}$ a função definida por

$$\widetilde{a}(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{e(\gamma_j(x), x)} a(\gamma_j(x)).$$

Note que a função $\widetilde{a}$ não precisa ser contínua.

Proposição 3.2.1 *Se μ é uma medida positiva não nula em K então*

$$\mathcal{F}(\mu)(a) = \int_K \widetilde{a} d\mu$$

para todo $a \in C(K)$.

Se $\omega \in C(K)^*$ é dado pela medida μ, iremos abusar a notação e escreveremos o lado direito da equação acima como $\omega(\widetilde{a})$.

Definição 3.2.2 *Para cada número real $\beta > 0$, definimos o operador de Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}_{h,\beta} : C(K) \to C(K)$ por*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x) = \sum_{j=1}^{d} h^{-\beta}(\gamma_j(x))a(\gamma_j(x)).$$

Para $x \in K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, temos que $e(\gamma_j(x), x) = 1$ para todo $j = 1, \ldots, d$ e neste caso $\mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x) = \widetilde{h^{-\beta}a}(x)$.

Lemma 3.2.3 *Se $a \in J_E$ então $\widetilde{h^{-\beta}a}(x) = \mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x)$ para todo $x \in K$.*

Demonstração. A igualdade é trivial para $x \in K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Então suponha que $x \in C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Para $i \in \{1, \ldots, d\}$, se $\exists j \neq i$ tal que $\gamma_i(x) = \gamma_j(x)$ então $\gamma_i(x) \in B(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ e neste caso $a(\gamma_i(x)) = 0$. Se não existe tal j então $e(\gamma_i(x), x) = 1$. Comparando as fórmulas, é fácil ver que a igualdade também é válida para $x \in C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. ■

Proposição 3.2.4 *Seja $\tau \in C(K)^*$ estado tracial, se $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ então τ satisfaz (K1) e (K2) do teorema (1.3.6). Além disso, se* $\mathrm{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *então $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ se e somente se τ é do tipo infinito com repeito a (h, β).*

Demonstração. Tome $a \in J_E$, então pelo lema anterior

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) = \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a)) = \tau(a)$$

o que mostra (K1). Agora, tome $a \in A^+$, então

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) \leq \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a)) = \tau(a)$$

o que prova (K2).

Se $\mathrm{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ então

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) = \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a))$$

para todo $a \in C(K)$, e a equivalência entre $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ e ser do tipo infinito segue. ■

Agora, vamos restringir nossa atenção a uma certa classe de funções h para a qual temos um resultado análogo ao teorema de Ruelle-Perron-Frobenius [17].

Definição 3.2.5 *Para uma função $f : K \to \mathbb{R}$ definimos o módulo de continuidade por $\omega(f,t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x,y) \leq t\}$. E diremos que f satisfaz a condição de Dini se*

$$\int_0^1 \frac{\omega(f,t)}{t} dt < \infty.$$

Note que se h satisfaz a condição de Dini então $h \circ \gamma_i$ também satisfaz pois γ_i é uma contração.

Denote por $\rho(\beta)$ o raio espectral de $\mathcal{L}_{h,\beta}$. Como $\mathcal{L}_{h,\beta}$ é um operador positivo, então $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$ também o é e seus raios espectrais coincidem. Também temos a seguinte fórmula:

$$\rho(\beta) = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{L}^n_{h,\beta}\|^{1/n}.$$

Teorema 3.2.6 ([17]) *Suponha que $\log h$ satisfaz a condição de Dini, então para cada β existe uma única função positiva $k_\beta = k \in C(K)$ e um único estado $\tau_\beta = \tau \in C(K)^*$ tal que*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(k) = \rho(\beta)k, \qquad \mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \rho(\beta)\tau, \qquad \tau(k) = 1.$$

Além disso, para cada $a \in C(K)$, $\rho(\beta)^{-n}\mathcal{L}^n_{h,\beta}(a)$ converge uniformemente para $\tau(a)k$ e para todo estado $\theta \in C(K)^*$, $\rho(\beta)^{-n}(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\theta)$ converge para $\theta(k)\tau$ na topologia fraca. Em particular, $\rho(\beta)$ é o único auto-valor tanto para $\mathcal{L}_{h,\beta}$ como para $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$.*

Proposição 3.2.7 ([17]) *Suponha que* $\log h$ *satisfaz a condição de Dini, então a função real* $\beta \mapsto \log(\rho(\beta))$ *é analítica e portanto estritamente decrescente.*

Dividiremos o estudo dos estados KMS para β tal que $\rho(\beta) < 1$, $\rho(\beta) = 1$ e $\rho(\beta) > 1$.

Lemma 3.2.8 *Para cada funcional positivo não nulo* $\omega \in C(K)^*$*,* $a \in C(K)^+$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, temos que*

$$\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\omega)(a) \leq (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\omega)(a).$$

Demonstração. Como $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$ é um operador positivo, é suficiente mostrar para $n = 1$, mas neste caso

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\omega)(a) = \omega(\widetilde{h^{-\beta}a}) \leq (\mathcal{L}^*_{h,\beta})(\omega)(a).$$

■

Proposição 3.2.9 *Se* $\rho(\beta) < 1$*, então* $K_\beta(\sigma)_i = \emptyset$ *e existe uma correspondência biunívoca entre os pontos extremos de* $K_\beta(\sigma)$ *e os pontos de* $B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$*.*

Demonstração. Seguimos algumas das ideias de [20]. Primeiro mostramos que $K_\beta(\sigma)_i = \emptyset$. Suponha que τ é um estado tracial do tipo infinito com respeito a (h, β), então pelo lema anterior

$$1 = \tau(1) = \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau)(1) \leq (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau)(1) = |(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau)(1)| \leq$$

$$\|(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n\|\|\tau\|\|1\| = \|(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n\|$$

e assim

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n\|^{1/n} = \rho(\beta) < 1$$

o que é uma contradição.

Segue que $K_\beta(\sigma)_f = K_\beta(\sigma)$.

Seja $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ o conjunto dos estados traciais que se anulam em J_E que é igual a $\{a \in A = C(K); a \text{ se anula em } B(\gamma_1, ..., \gamma_d)\}$ pelo lema 3.1.5.

Segue que um elemento τ de $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ deve ter o suporte contido em $B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$, que é finito como suposto no início desta seção. Podemos facilmente ver que neste caso os pontos extremos de $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ são exatamente os deltas de Dirac δ_y para $y \in B$.

É suficiente mostrar agora que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ e $K_\beta(\sigma)_f$ preservando os pontos extremos. Dado $\phi \in K_\beta(\sigma)_f$, seja $\tau = \phi|_A$ então $\tau_0 = (\tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau))/(\tau(1) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(1)) \in \mathcal{T}(C(K)/J_E)$ pela condição (K1) do teorema (1.3.6).

Para a recíproca, vamos mostrar que dado $\tau_0 \in \mathcal{T}(C(K)/J_E)$, temos que a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$ converge para um elemento $\omega \in C(K)^*$ na topologia fraca*. Tome um elemento $a \in C(K)^+$, então pelo lema anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}_{h,\beta}^*)^n(\tau_0)(a).$$

Agora

$$\lim_{n\to\infty} (|(\mathcal{L}_{h,\beta}^*)^n(\tau_0)(a)|)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{L}_{h,\beta}^*)^n\|^{1/n} \|a\|^{1/n} = \rho(\beta) < 1$$

e pelo teste da raiz, a séria acima converge. Para uma função $a \in C(K)$ arbitrária, podemos escrevê-la como a diferença entre a parte positiva e a parte negativa.

Se $\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$, então o estado tracial do tipo finito $\tau = \omega/\omega(1)$ satisfaz as condições (K1) and (K2) do teorema (1.3.6) e desta forma podemos associar a ele um elemento $\phi \in K_\beta(\sigma)_f$.

As construções acima, τ_0 a partir de ϕ e a recíproca, são inversas uma da outra. Vejamos que os pontos extremos são preservados nessas construções.

Suponha que $\phi = \lambda\phi' + (1-\lambda)\phi''$ para $\lambda \in (0,1)$ e $\phi, \phi', \phi'' \in K_\beta(\sigma)_f$. Sejam τ, τ' e τ'' as restrições em A e C, C' e C'' as constantes dadas por $C^{()} = \tau^{()}(1) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau^{()})(1)$ onde $()$ pode ser substituído por nada, $'$ ou $''$. Então

$$\tau_0 = \frac{\tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)}{\tau(1) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(1)} =$$

$$\frac{\lambda(\tau' - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau')) + (1-\lambda)(\tau'' - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau''))}{C} =$$

$$\frac{\lambda C'(\tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau))}{CC'} + \frac{(1-\lambda)C''(\tau'' - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau''))}{CC''} =$$

$$\frac{\lambda C'}{C}\tau_0' + \frac{(1-\lambda)C''}{C}\tau_0''.$$

Note que

$$\frac{\lambda C'}{C} + \frac{(1-\lambda)C''}{C} = \frac{\lambda C' + (1-\lambda)C''}{C} = \frac{C}{C} = 1$$

e portanto τ_0 é uma combinação convexa de dois elementos de $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$.

De maneira similar, podemos provar que se τ_0 pode ser escrita como uma combinação convexa, então o ϕ correspondente também pode. ■

Para $\rho(\beta) \geq 1$, imporemos uma condição extra como feito em [20]. Se $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a n-ésima orbita de x por

$$O_n(x) = \{\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x) \in K : 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d\}$$

e definimos a órbita por

$$O(x) = \cup_{n=0}^{\infty} O_n(x).$$

Lemma 3.2.10 *Sejam τ um estado tracial satisfazendo (K2) e μ a medida definida por τ. Se μ tem massa pontual em x então tem massa pontual em y para todo $y \in O(x)$.*

Demonstração. Se μ satisfaz (K2) então, $\mu \geq \mathcal{F}_{h,\beta}(\mu) \geq \mu(\{x\})\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x)$. Para $a \in C(K)$, temos

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x)(a) = \delta_x(\widetilde{h^{-\beta}a}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{h^{-\beta}(\gamma_i(x))}{e(\gamma_i(x), x)} a(\gamma_i(x))$$

de forma que

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{h^{-\beta}(\gamma_i(x))}{e(\gamma_i(x), x)} \delta_{\gamma_i(x)}.$$

Segue que

$$\mu(\{\gamma_j(x)\}) \geq \mu(\{x\})\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x)(\{\gamma_j(x)\}) = \mu(\{x\})\frac{h^{-\beta}(\gamma_j(x))}{e(\gamma_j(x), x)}$$

de forma que se $\mu(\{x\}) > 0$ então $\mu(\{\gamma_j(x)\}) > 0$. ■

Lemma 3.2.11 *Se $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$ então*

$$\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\delta_x) = (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\delta_x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$ então para todo $y \in O(x)$ temos que $e(\gamma_i(y), y) = 1$. Por causa disso, podemos calcular ambos os lados da equação do enunciado e chegamos a

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{d} h^{-\beta}(\gamma_{i_1}(x))h^{-\beta}(\gamma_{i_1} \circ \gamma_{i_2}(x)) \cdots h^{-\beta}(\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x))\delta_{\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x)}.$$

■

Lemma 3.2.12 *Se $\mu(C) = 0$ então $\mathcal{F}_{h,\beta}(\mu)(C) = 0$.*

Proposição 3.2.13 *Suponha que para todo $y \in K$ existe $x \in O(y)$ tal que $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$. Então*

(i) Se $\rho(\beta) > 1$ então $K_\beta(\sigma) = \emptyset$.

(ii) Se $\rho(\beta) = 1$ então existe único estado (σ, β)-KMS, que é do tipo infinito e é dado pelo único τ tal que $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$.

Demonstração. (i) Vamos mostrar primeiro que se $\rho(\beta) > 1$ e se τ satisfaz (K1) e (K2) então $\mathrm{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Como C é finito, se supormos que $\mathrm{supp}(\tau)$ não está contido em $K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ então τ teria massa pontual em algum $y \in C$. Tome $x \in O(y)$ tal que $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$, seja μ a medida associada a τ e seja k dado como no teorema (3.2.6), então pelo lema anterior

$$\tau(k) \geq \mu(\{x\})\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\delta_x)(k) = \mu(\{x\})(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\delta_x)(k) = \mu(\{x\})\delta_x(\mathcal{L}^n_{h,\beta}(k)) =$$

$$\mu(\{x\})\delta_x(\rho(\beta)^n k) = \rho(\beta)^n \mu(\{x\})k(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$$

o que é uma contradição.

Agora, se τ é do tipo infinito, então pela proposição (3.2.4), $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$, o que não é possível uma vez que $\rho(\beta) > 1$ é o único auto-valor de $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$.

Se τ é do tipo finito então $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)$ onde τ_0 é um traço finito. Note que $\tau_0(C) = 0$, então pelo lema anterior aplicado n vezes, $\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)(C) = 0$ e isso implica que $\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0) = (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau_0)$ para todo n. Agora, aplicando τ em k, temos

$$\tau(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau_0)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_0(\mathcal{L}^n_{h,\beta}(k)) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_0(\rho(\beta)^n k) = \tau_0(k) \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\beta)^n = \infty \tag{3.8}$$

de modo que não temos convergência na topologia fraca*, o que é uma contradição.

(ii) Primeiro note que a equação (3.8) também é válida para $\rho(\beta) = 1$ de modo que não temos estados KMS to tipo finito neste caso. Agora, mostremos que se τ satisfaz $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ então ele nos dá um estado KMS, que necessariamente é do tipo infinito.

Para (K1), seja $a \in J_E$ e note que

$$\widetilde{h^{-\beta} a}(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{e(\gamma_i(x), x)} h^{-\beta}(\gamma_i(x)) a(\gamma_i(x)) = \mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x)$$

porque ou $e(\gamma_i(x), x) = 1$ ou $\gamma_i(x) \in B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ e neste caso $a(\gamma_i(x)) = 0$.

Para (K2), tome $a \in A^+$, então

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta} a}) \le \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a)) = \tau(a).$$

Finalmente, temos que mostrar que a restrição de τ em A de um estado KMS do tipo infinito satisfaz $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$. Isso segue facilmente uma vez que mostrarmos que neste caso $\tau(C) = 0$. Para k a auto-função de $\mathcal{L}_{h,\beta}$, temos

$$0 = \tau(k) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(k) = \tau(k - \widetilde{h^{-\beta} k}) = \tau(\mathcal{K}_{h,\beta}(k) - \widetilde{h^{-\beta} k}) =$$

$$\int \sum_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{1}{e(\gamma_j(x), x)}\right) h^{-\beta}(\gamma_j(x)) k(\gamma_j(x)) d\tau(x)$$

o que implica que $\tau(C) = 0$ e assim $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$. $\blacksquare$

Capítulo 4

Résumé en Français

Le but de la thèse est d'étudier des algèbres issues de certaines dynamiques et leurs états KMS. On va rappeler quelques définitions et les résultats principaux obtenus.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Systèmes des fonctions itérées

Soit (X, ρ) un espace métrique compact.

Définition 4.1.1 *Un système des fonctions itérées (IFS) sur X est un ensemble fini des fonctions continues $\{\gamma_i : X \to X\}_{i=1}^d$. On dit que le système est hyperbolique si toutes les fonctions sont des contractions, c'est-à-dire, il existe une constante $c \in (0,1)$ telle que $\rho(\gamma_i(x), \gamma_i(y)) \leq c\rho(x,y)$ $\forall x, y \in X$.*

Proposition 4.1.2 *Soit $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ un IFS, alors il existe un seul sous-espace compact non vide K de X tel que*

$$K = \cup_{i=1}^d \gamma_i(K). \tag{4.1}$$

On appelle l'attracteur du IFS.

Définition 4.1.3 *On dit que le IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ satisfait*

- *la condition de séparation forte si l'union en 4.1 est disjointe.*

- *la condition de l'ensemble ouvert si* $\exists U \subseteq K$ *ouvert et dense tel que*

$$U \subseteq \dot{\cup}_{i=1}^{d} \gamma_i(U)$$

où $\dot{\cup}$ *représente l'union disjointe.*

4.1.2 Algèbres de Cuntz-Pimsner

Soit A une C*-algèbre.

Définition 4.1.4 *Un C*-module de Hilbert (à droite) sur* A *est un* A*-module (à droite)* M *avec une application sesquilinéaire* $\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to A$ *tel que:*

(i) $\langle \xi, \eta a \rangle = \langle \xi, \eta \rangle a$;

(ii) $(\langle \xi, \eta \rangle)^* = \langle \eta, \xi \rangle$;

(iii) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$;

(iv) M *est complet avec la norme* $||\xi||_2 = ||\langle \xi, \xi \rangle||^{1/2}$

pour $a \in A$ *et* $\xi, \eta \in M$. *On dit que* M *est plein si* $\langle M, M \rangle$ *est dense dans* A.

Soit M un C*-module de Hilbert, on note par $\mathcal{L}(M)$ l'espace des opérateurs dans M qui ont un adjoint. L'espace $\mathcal{L}(M)$ est une C*-algèbre /citeLan1. Pour $\xi, \eta \in M$, on définit l'opérateur $\theta_{\xi,\eta} : M \to M$ par $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi \langle \eta, \zeta \rangle$.Ces opérateurs ont un adjoint et on note par $\mathcal{K}(M)$ l'espace fermé de $\mathcal{L}(M)$ engendré par tous $\theta_{\xi,\eta}$.

Définition 4.1.5 *Une C*-correspondance sur* A *é un C*-module de Hilbert* M *avec un C*-homomorphisme* $\phi : A \to \mathcal{L}(M)$.

Soit (M, ϕ) une C*-correspondance sur A et on suppose que ϕ est fidèle. Note par J_M l'idéal $\phi^{-1}(\mathcal{K}(M))$.

Définition 4.1.6 *Une paire* (ι, ψ) *des application* $\iota : A \to B$, $\psi : M \to B$, *où* B *est une C*-algèbre et* ι *un C*-homomorphisme, est une représentation covariante de* M *si:*

(i) $\psi(\phi(a)\xi b) = \iota(a)\psi(\xi)\iota(b)$;

(ii) $\psi(\xi)^*\psi(\eta) = \iota(\langle\xi,\eta\rangle)$;

(iii) $(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(c)) = \iota(c)$ *où l'application* $(\psi,\iota)^{(1)} : \mathcal{K}(M) \to B$ *est donnée par* $(\psi,\iota)^{(1)}(\theta_{\xi,\eta}) = \psi(\xi)\psi(\eta)^*$,

pour $a, b \in A$, $\xi, \eta \in M$ *et* $c \in J_M$.

Etant donnée une C*-correspondance (M,ϕ), il existe une C*-algèbre $\mathcal{O}(M)$ et une représentation covariante (k_A, k_M) qui est universelle, au sens que si (ι,ψ) est une représentation covariante de M dans une C*-algèbre B, il existe un seul C*-homomorphisme $\iota\times\psi : \mathcal{O}(M) \to B$ tel que $\iota = (\iota\times\psi)\circ k_A$ et $\psi = (\iota\times\psi)\circ k_M$.

Définition 4.1.7 ([35], [22]) *L'algèbre* $\mathcal{O}(M)$ *est appelée l'algèbre de Cuntz-Pimsner de* M.

4.2 C*-algèbres associées à une transformation continue

Soit A une C*-algèbre commutative. Motivé par [31], on va donner une nouvelle définition d'entropie.

Définition 4.2.1 *Soit* ϕ *un état dans* A, *on définit l'entropie de* ϕ *par:*

$$\mathsf{h}(\phi) = \inf_{a\in A_+}\left\{\phi\left(\ln\left(\frac{L_\rho(a)}{\rho a}\right)\right)\right\} \tag{4.2}$$

où L_ρ *est un opérateur de transfert pour* $\rho : X \to (0,\infty)$.

On note par A_+ l'ensemeble des eléments $a \in A$ auto-adjoint et tel que le spectre $\sigma(a)$ est contenu dans $(0,\infty)$.

Définition 4.2.2 *On dit qu'un état* ϕ *est* α*-invariant si* $\phi\circ\alpha = \phi$.

Définition 4.2.3 *Soit $b \in A_+$, on définit la pression topologique de b par*

$$p(b) = \sup_{\phi \text{ inv}} \left\{ \mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) \right\}.$$

Si ϕ est un état invariant tel que $\mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) = p(b)$, on dit que ϕ est un état d'équilibre de b.

Proposition 4.2.4 *Si $L_\rho(1) = 1$ alors $p(\rho) = 0$. De plus, les états ϕ qui satisfont $\phi \circ L_\rho = \phi$ sont des états d'équilibre de ρ.*

On veut trouver des relations entre les états KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ [12] et $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ [14] et les états d'équilibre (dans A) du potentiel $h^{-\beta}$. Comme on a supposé que l'algèbre A est commutative, on a des uniques espérances conditionnelles $F : A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to A$ et $G : C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E}) \to A$. De plus si $E := \alpha \circ L : A \to \alpha(A)$ est une espérance conditionnelle d'indice fini, les états KMS ψ de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ peuvent être décomposés de la façon $\psi = \phi \circ F$ où ϕ est un état dans A qui satisfait

$$\phi(a) = \phi(L(\Lambda a)), \ \forall a \in A$$

où $\Lambda = h^{-\beta}\mathrm{ind}(E)$ et les états KMS ψ de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ peuvent être décomposés de la façon $\psi = \phi \circ G$ où ϕ est un état dans A qui satisfait

$$\phi(a) = \phi(\Lambda^{-[n]} E_n(\Lambda^{[n]} a)), \ \forall a \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $E_n = \alpha^n \circ L^n$ et $\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i(h^{-\beta}\mathrm{ind}(E))$.

Proposition 4.2.5 *Si $\psi = \phi \circ F$ est un état (h, β)-KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ et $L(\Lambda 1) = 1$ alors ϕ est un état d'équilibre (dans A) du potentiel $h^{-\beta}$.*

Proposition 4.2.6 *Supposons que $\psi = \phi \circ G$ soit un état (h, β)-KMS de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Soit $\rho = h^{-\beta}$ et supposons que $L_\rho(k) = \lambda k$ pour un $\lambda > 0$ et $k \in A_+$. Soient $\widetilde{\rho} = \frac{\rho k}{\lambda \alpha(k)}$ et $\widetilde{\phi}$ un état A donné par $\widetilde{\phi}(a) = \phi(ka)$. Supposons que $\lim_{n\to\infty} \left\| L^n_{\widetilde{\rho}}(a) - \widetilde{\phi}(a) \right\| = 0 \ \forall a \in A$, alors $\widetilde{\phi}$ est un état d'équilibre de $\widetilde{\rho}$.*

4.3 C*-algèbres associées à des systèmes de fonctions itérées

4.3.1 C*-algèbres de Kajiwara-Watatani

Soit $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^d$ un système de fonctions itérées hyperbolique et K son attracteur. On rappele la C*-correspondance définie dans [23]. Soient $A = C(X)$ et $E = C(\mathcal{G})$ où

$$\mathcal{G} = \cup_{i=1}^d \mathcal{G}_i$$

et les ensembles $\mathcal{G}_i$ sont définis par

$$\mathcal{G}_i = \{(x, y) \in K \times K : x = \gamma_i(y)\}.$$

La multiplication à droite et l'homomorphisme ϕ sont donés par

$$(\phi(a)\xi b)(x, y) = a(x)\xi(x, y)b(y)$$

et le produit scalaire est donné par

$$\langle \xi, \eta \rangle_A (y) = \sum_{i=1}^{d} \overline{\xi(\gamma_i(y), y)}\eta(\gamma_i(y), y)$$

où $a, b \in A$ et $\xi, \eta \in E$.

Définition 4.3.1 *L'algèbre de Kajiwara-Watatani $\mathcal{O}_\Gamma$ associée à Γ est l'algèbre de Cuntz-Pimsner associée à la C*-correspondance définit ci-dessus.*

Définition 4.3.2 *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ un IFS, on définit les ensembles:*

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{x \in K | \exists y \in K \ \exists i \neq j : x = \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\};$$

$$C(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{y \in K | \exists i \neq j : \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\}.$$

On appelle les éléments de $B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ les points de branchement et les points de $C(\Gamma)$ les valeurs de branchement. On dit que Γ satisfait la conditions des branches finies si $C(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ est fini.

Théorème 4.3.3 *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ un IFS qui satisfait la condition de l'ensemble ouvert ou la condition des branches finies. Il existe un C^*-homomorphisme injectif $\Phi : \mathcal{O}_\Gamma \to \mathcal{O}_d$ tel que l'image de Φ est engendrée par $\Phi(A)$ et $\Phi(\mathbf{1})$, où $\mathbf{1} \in C(\mathcal{G})$ et la fonction constant égale à 1 et $\mathcal{O}_d$ est l'algèbre de Cuntz.*

Théorème 4.3.4 *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ un IFS qui satisfait la condition de l'ensemble ouvert ou la condition des branches finies. Supposons qu'il existe une fonction continue $\gamma : K \to K$ telle que $\gamma \circ \gamma_i = id$ pour tous $i \in \{1, \ldots, d\}$, alors $\mathcal{O}_\Gamma$ est isomorphe à $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ où $\alpha : A \to A$ est donné par $\alpha(a) = a \circ \gamma$ et $L : A \to A$ est donné par $L(a)(x) = \sum_{i=1}^{d} a(\gamma_i(x))$.*

4.3.2 États KMS dans l'algèbre de Kajiwara-Watatani

D'abord, on va rappeler quelques définitions et résultat de [29] avec les simplifications faites dans [24] et [20].

Soient $A = C(K)$ et $E = C(\mathcal{G})$ comme dans la sous-section précédente. Si $h \in A$ est une fonction strictement positive, on peut définir un groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t : \mathcal{O}_\Gamma \to \mathcal{O}_\Gamma$ par $\sigma_t(a) = a$ si $a \in A$ et $\sigma_t(\xi) = h^{it}\xi$ si $\xi \in E$.

Définition 4.3.5 *On définit l'application $\mathcal{F} : A^* \to A^*$ par*

$$\mathcal{F}(\omega)(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\xi \in I_k} \omega(\langle \xi, a\xi \rangle)$$

où $\{e_k = \sum_{\xi \in I_k} \theta_{\xi,\xi}\}$ est une unité approchée de $\mathcal{K}(M)$. Etant donnée $h \in A$ strictement positive et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $\mathcal{F}_{h,\beta} : A^* \to A^*$ par

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\omega)(a) = \mathcal{F}(\omega)(h^{-\beta}a).$$

On note $K_\beta(\sigma)$ l'ensemble des états (σ, β)-KMS de $\mathcal{O}_\Gamma$.

Théorème 4.3.6 *Il existe un isomorphisme entre $K_\beta(\sigma)$ et l'ensemble $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ des états τ de A qui satisfont les conditions*

(K1) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(a)$ pour tout $a \in J_M$;

(K2) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) \leq \tau(a)$ *pour tout* $a \in A^+$.

La correspondance entre $K_\beta(\sigma)$ *et* $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ *est donnée par la restriction.*

Définition 4.3.7 *On dit qu'une trace positive* τ *est de type fini (par rapport à* (h,β)*) s'il existe une trace* τ_0 *telle que* $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)$ *dans la topologie faible-*. On dit que* τ *est de type infini (par rapport à* (h,β)*) si* $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau) = \tau$.

Définition 4.3.8 *On dit que* $\phi \in K_\beta(\sigma)$ *est de type fini (resp. infini) si* $\phi|_A$ *est de type fini (resp. infini). On note* $K_\beta(\sigma)_f$ *(resp.* $K_\beta(\sigma)_i$*) l'ensemble des états* (σ,β)*-KMS de type fini (resp. infini).*

Définition 4.3.9 *Etant donné un nombre réel* $\beta > 0$*, on définit l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius* $\mathcal{L}_{h,\beta} : C(K) \to C(K)$ *par*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x) = \sum_{j=1}^{d} h^{-\beta}(\gamma_j(x))a(\gamma_j(x)).$$

Proposition 4.3.10 *Soit* $\tau \in C(K)^*$ *un état, si* $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ *alors* τ *satisfait (K1) et (K2) du théorème (4.3.6). De plus, si* $\operatorname{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *alors* $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ *si et seulement si* τ *est de type infini par rapport à* (h,β).

Pour les résultats suivants, on va utiliser une version du théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Définition 4.3.11 *Pour une fonction* $f : K \to \mathbb{R}$ *on définit le module de continuité par* $\omega(f,t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x,y) \leq t\}$. *On dit que* f *satisfait la condition de Dini si*

$$\int_0^1 \frac{\omega(f,t)}{t} dt < \infty.$$

Théorème 4.3.12 ([17]) *Supposons que* $\log h$ *satisfasse la condition de Dini, alors pour chaque* β *il existe une seule fonction positive* $k_\beta = k \in C(K)$ *et un seul état* $\tau_\beta = \tau \in C(K)^*$ *tels que*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(k) = \rho(\beta)k, \qquad \mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \rho(\beta)\tau, \qquad \tau(k) = 1.$$

De plus, si $a \in C(K)$ alors $\rho(\beta)^{-n}\mathcal{L}^n_{h,\beta}(a)$ converge uniformément vers $\tau(a)k$ et si $\theta \in C(K)^*$ est un état alors $\rho(\beta)^{-n}(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\theta)$ converge vers $\theta(k)\tau$ dans la topologis faible-. En particulier, $\rho(\beta)$ est le seule valeur propre de $\mathcal{L}_{h,\beta}$ et de $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$.*

Proposition 4.3.13 *Si $\rho(\beta) < 1$, alors $K_\beta(\sigma)_i = \emptyset$ et il existe une bijection entre les points extrêmes de $K_\beta(\sigma)$ et les éléments de $B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$.*

Pour $\rho(\beta) \geq 1$, on impose une autre condition comme a été fait dans [20]. Soient $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit n-ième orbite de x par

$$O_n(x) = \{\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x) \in K : 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d\}$$

et on définit l'orbite de x par

$$O(x) = \cup_{n=0}^{\infty} O_n(x).$$

Proposition 4.3.14 *Supposons que pour tout $y \in K$ il existe $x \in O(y)$ tel que $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$. Alors*

(i) Si $\rho(\beta) > 1$ alors $K_\beta(\sigma) = \emptyset$.

(ii) Si $\rho(\beta) = 1$ alors il existe un seul état (σ, β)-KMS, qui est de type infini et est donné par le seule τ tel que $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$.

Bibliografia

[1] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.

[2] O. Bratteli and P. Jorgensen *Wavelets through a looking glass. The world of the spectrum.*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser (2002).

[3] O. Bratteli; D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Second Edition.* Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag (1997). (Texts and Monographs in Physics).

[4] N. Brownlowe; I. Raeburn, *Exel's crossed product and relative Cuntz-Pimsner algebras*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **141** (2006), 497-508.

[5] G. de Castro, *C*-algebras associated with iterated function systems*, Contemp. Math. **503**, Operator Structures and Dynamical Systems (2009), 27-38.

[6] G. de Castro; A. Lopes, *KMS States, Entropy, and a Variational Principle for Pressure*, Real Anal. Exch. *34* (2009), 333-346.

[7] A. Connes *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

[8] J. Cuntz, *Simple C*-algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173-185.

[9] V. Deaconu, *Groupoids associated with endomorphisms*, Trans. Am. Math. Soc. **347** (1995), 1779-1786.

[10] G. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry. 2nd ed.*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.

[11] R. Exel, *A new look at the crossed-product of a C*-algebra by an endomorphism*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **23** (2003), 1733-1750.

[12] R. Exel, *Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 153-188.

[13] R. Exel, *KMS states for generalized gauge actions on Cuntz-Krieger algebras. (An application of the Ruelle-Perron-Frobenius theorem)*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **35** (2004), 1-12.

[14] R. Exel; A. Lopes, *C^*-algebras, approximately proper equivalence relations, and Thermodynamic Formalism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **24** (2004), 1051-1082.

[15] R. Exel; A. Vershik, *C*-algebras of irreversible dynamical systems*, Can. J. Math. **58** (2006), 39-63.

[16] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. 2nd ed.*, Wiley, 2003.

[17] A. Fan; K-S Lau, *Iterated function system and Ruelle operator*, J. Math. Anal. Appl. **231** (1999), 319-344.

[18] N. Fowler; P. Muhly; I. Raeburn, *Representations of Cuntz-Pimsner algebras*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 569-605.

[19] I. Gelfand; M. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sbornik **12** (1943), 197-213.

[20] M. Izumi; T. Kajiwara; Y. Watatani, *KMS states and branched points*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **27** (2007), 1887-1918.

[21] M. Ionescu; P. Muhly *Groupoid methods in wavelet analysis*, preprint, [arXiv:0709.2294v1].

[22] T. Katsura, *A construction of C*-algebras from C*-correspondences*, Contemp. Math. **335** (2003), 173-182.

[23] T. Kajiwara; Y. Watatani, *C*-algebras associated with self-similar sets*, J. Oper. Theory **56** (2006), 225-247.

[24] T. Kajiwara; Y. Watatani, *KMS states on C*-algebras associated with self-similar sets*, preprint [arXiv:math/0405514v1].

[25] D. Kerr and C. Pinzari, *Noncommutative pressure and the variational principle in Cuntz-Krieger-type* C^**-algebras*, J. Funct. Anal., **188** (2002), 156–215.

[26] A. Kumjian; J. Renault, *KMS states on* C^**-algebras associated to expansive maps*, Proc. Am. Math. Soc. **134** (2006), 2067-2078.

[27] Kwaśniewski, B. K. *On transfer operators for C*-dynamical systems*, preprint [arXiv:math/0703798].

[28] P. Jorgensen *Analysis and probability. Wavelets, signals, fractals.*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (2006).

[29] M. Laca; S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras*, J. Funct. Anal. **211** (2004), 457-482.

[30] E. Lance, *Hilbert C*-modules, A toolkit for operator algebraists*, Cambridge University Press (1995).

[31] A. Lopes, *An analogy of the charge distribution on Julia sets with the Brownian motion*, J. Math. Phys., **30** (1989), no. 9, 2120-2124.

[32] F.Murray; J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. Of Math. **37** (1936), 116-229.

[33] S. Neshveyev and E. Størmer, *Dynamical Entropy in Operator Algebras*, Springer-Verlag (2006).

[34] G. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press Inc. (1979).

[35] M. Pimsner, *A class of C*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by* $\mathbb{Z}$, Fields Inst. Commun. **12** (1997), 189-212.

[36] C. Pinzari; Y. Watatani; K. Yonetani, *KMS states, entropy and the variational principle in full* C^**-dynamical systems*, Comm. Math. Phys., **213** (2000), 331-379.

[37] J. Renault, *A groupoid approach to C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer-Verlag, 1980.

[38] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium.* Statistical mechanics, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 5, Addison-Wesley Publishing Company, (1978).