

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

## **Um Estudo sobre Invariantes Espectrais**

por

Paola Rossato Bernardo

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan  
Orientador

Porto Alegre, Março de 2019.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rossato Bernardo, Paola

Um Estudo sobre Invariantes Espectrais / Paola Rossato Bernardo.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2019.

70 p.: il.

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2019.

Orientador: Trevisan, Vilmar

Dissertação: Matemática Aplicada  
Teoria Espectral de Grafos, Grafos Determinados pelo Espectro, Matriz de Adjacência

# Um Estudo sobre Invariantes Espectrais

por

Paola Rossato Bernardo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria Espectral de Grafos

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Colman Tura  
DEPMAT - UFSM

Profa. Dra. Juliane Golubinski Capaverde  
Instituto de Matemática - UFRGS

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem  
Instituto de Matemática - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
Março de 2019.

Prof. Dr. Esequia Sauter  
Coordenador

# Sumário

|   |     |
|---|-----|
| LISTA DE FIGURAS . . . . .  | v   |
| LISTA DE TABELAS . . . . .  | vi  |
| LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .                                       | vii |
| RESUMO . . . . .  | ix  |
| ABSTRACT . . . . .  | x   |
| <br>  |     |
| 1 INTRODUÇÃO . . . . .  | 1   |
| <br>  |     |
| 2 CONCEITOS BÁSICOS . . . . .                                     | 7   |
| 2.1 Teoria de Grafos . . . . .                                    | 7   |
| 2.2 Conceitos Preliminares de Álgebra Linear . . . . .            | 17  |
| <br>  |     |
| 3 INVARIANTES ESPECTRAIS . . . . .                                | 22  |
| <br>  |     |
| 4 GRAFOS DETERMINADOS PELO SEU ESPECTRO - <i>SURVEY</i> . . . . . | 33  |
| <br>  |     |
| 5 GRAFOS DETERMINADOS PELO SEU ESPECTRO . . . . .                 | 43  |
| 5.1 Grafo Completo, Bipartido e Ciclo . . . . .                   | 43  |
| 5.2 Caminho . . . . .   | 44  |
| 5.3 Grafo $Z_n$ . . . . .   | 48  |
| 5.4 Lollipop Graph $L(p, k)$ , com $k$ ímpar . . . . .            | 49  |
| 5.5 Pineapple Graph $K_p^2$ . . . . .                             | 51  |
| <br>  |     |
| 6 PRODUTOS DE GRAFO . . . . .                                     | 56  |
| <br>  |     |
| 7 CONCLUSÃO . . . . .   | 63  |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .                              | 66  |

## Lista de Figuras

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 2.1  | Problema das três casas . . . . .                             | 7  |
| Figura 2.2  | Grafo de Thomsem . . . . .                                    | 8  |
| Figura 2.3  | Exemplo de Grafo Desconexo . . . . .                          | 10 |
| Figura 2.4  | Exemplo de Caminho . . . . .                                  | 10 |
| Figura 2.5  | $C_3$ . . . . .   | 11 |
| Figura 2.6  | $CP(3)$ . . . . .   | 13 |
| Figura 2.7  | Exemplo de Árvore . . . . .                                   | 13 |
| Figura 2.8  | Exemplo de Grafo . . . . .                                    | 14 |
| Figura 2.9  | $G = C_3$ . . . . .   | 21 |
| Figura 2.10 | $H$ Subgrafo induzido de $G$ . . . . .                        | 21 |
| Figura 3.1  | Exemplo de Grafos Coespectrais . . . . .                      | 31 |
| Figura 4.1  | $C_5$ . . . . .   | 33 |
| Figura 4.2  | Sun Graph $Sun_5$ . . . . .                                   | 35 |
| Figura 4.3  | A esquerda o Grafo $G$ e a direita um clique de $G$ . . . . . | 35 |
| Figura 5.1  | Grafo com dois vértices de grau 3 . . . . .                   | 46 |
| Figura 5.2  | $Z_n$ . . . . .   | 48 |
| Figura 5.3  | Lollipop Graph $L_{3,1}$ . . . . .                            | 49 |
| Figura 5.4  | Pineapple $K_4^4$ . . . . .                                   | 52 |
| Figura 6.1  | $C_4 \circ P_2$ . . . . .                                     | 57 |
| Figura 6.2  | $C_3 \times P_2$ . . . . .                                    | 58 |
| Figura 6.3  | $P_3 \circ P_2$ . . . . .                                     | 59 |

## Lista de Tabelas

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Tabela 2.1 | Exemplos de Grafos Completos . . . . .  | 10 |
| Tabela 4.1 | Grafos Fortemente Regulares que são DS . . . . .                                | 34 |
| Tabela 4.2 | Grafos distância-regulares DS com diâmetro 3 . . . . .                          | 39 |
| Tabela 4.3 | Grafos distância-regulares Bipartidos DS com diâmetro maior que 4 . . . . .     | 42 |
| Tabela 4.4 | Grafos distância-regulares Não-Bipartidos DS com diâmetro maior que 4 . . . . . | 42 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| $G = (V, E)$                       | Grafo $G$ com conjunto $V$ de vértices e $E$ de arestas     |
| $K_n$                              | Grafo completo de $n$ vértices                              |
| $C_n$                              | Ciclo de $n$ vértices                                       |
| $P_n$                              | Caminho de $n$ vértices                                     |
| $d(u, v)$                          | Distância entre os vértices $u$ e $v$                       |
| $K_{p,q}$                          | Grafo Bipartido Completo                                    |
| $L(G)$                             | <i>Line Graph</i> de $G$                                    |
| $CP(n)$                            | <i>Cocktail Party Graph</i>                                 |
| $L(H; a_1, \dots, a_n)$            | <i>Line Graph</i> Generalizado                              |
| $S_n$                              | Estrela de $n$ vértices                                     |
| $d_v$                              | Grau do vértice $v$   |
| $tr(A)$                            | Traço da matriz $A$   |
| $spec(A)$                          | Espectro da matriz de adjacência $A$ associada ao grafo $G$ |
| $A$                                | Matriz de Adjacência de um grafo $G$                        |
| $L$                                | Matriz Laplaciana de um grafo $G$                           |
| $Q$                                | Matriz Laplaciana sem sinal de um grafo $G$                 |
| $\vec{x}$                          | Vetor $\vec{x}$   |
| $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ | Produto Interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$                 |
| $Z_n$                              | Anel dos Inteiros módulo $n$                                |

$L(p, k)$  *Lollipop Graph*

$K_p^q$  *Pineapple Graph*

$\nabla$  Símbolo que denota a junção (*join*)

$\circ$  Produto Cartesiano

$\otimes$  Produto Direto

$\times$  Produto de Kronecker



# RESUMO

Uma crescente e importante dúvida na Teoria Espectral de Grafos é como saber quando dois grafos são determinados pelo espectro (DS), em particular, da matriz de adjacência, e se quase todos os grafos são DS. Este trabalho retrata o alguns resultados que temos até o momento dos grafos que são determinados pelo seu espectro, isto é, quando um espectro está associado a apenas um grafo, mostrando quais métodos foram utilizados e quais autores foram os responsáveis pelo estudo. Também abordaremos algumas afirmações acerca de grafos DS realizadas por alguns matemáticos que, ao longo dos anos, foram descobertas serem falsas. Apresentamos também um estudo sucinto sobre as invariantes espectrais de um grafo, que são utilizados em todas as presentes demonstrações de grafos que são determinados pelo espectro.

Palavras-chave: Teoria Espectral de grafos, Matriz de Adjacência, Grafos Determinados pelo seu Espectro, Invariantes Espectrais.

# ABSTRACT

A growing and important question on Spectral Graph Theory is how to know when two graphs are determined by the spectrum (DS) of a matrix, particularly, their adjacency matrix, and if mostly all graphs are DS. This work portraits what we have so far about the graphs that are determine by their spectrum, meaning when a spectrum is associated with only one graph, showing which methods were used and which authors were responsible for the study. We also approach a few affirmations about DS graphs made by some mathematicians that over the years were discovered to be false. We present a succinct study about a graph's spectral invariable elements, which are used in every shown demonstration on graphs determined by the spectrum.

Keywords: Spectral Graph Theory, Adjacency Matrix, Graphs Determined by their Spectrum, Spectral Invariables.

# 1 INTRODUÇÃO

Não é novidade que a Matemática é uma das portas de entrada para entender o mundo. E, para compreender essa imensidão, existem diversos campos de estudo que analisam a singularidade de cada uma das partes de nosso universo. Dentre todas estas partes se encontra a Teoria de Grafos e a Álgebra Linear. Neste trabalho, estudamos a intersecção entre estas duas áreas: a Teoria Espectral de Grafos (TEG). Ela teve origem na Química Quântica quando, em 1931, Huckel [23] produziu um modelo teórico para um problema no qual certos elétrons eram representados por autovalores de um grafo.

Quase todo ser humano já foi apresentado às ferramentas da Teoria de Grafos, seja ela através de uma rede de conhecidos, como *Facebook*, *Instagram*, *e-mail*, *Linkedin*, etc., através de um GPS ou mapa, estudando qual ônibus pegar para ir a um determinado local, sendo abastecido com a água de uma certa região, e assim por diante, diversos exemplos que utilizam grafos em sua estrutura.

Dentro da Teoria de Grafos, temos a Teoria Espectral de Grafos (abreviada como TEG), que nada mais é do que uma teoria que estuda as propriedades de um grafo através de suas representações matriciais e de seus respectivos espectros (conjunto dos autovalores das matrizes). O início de sua fundamentação teórica foi em 1957, com um artigo de Collatz e Sigogowitz [39], sedimentada em 1971, com a tese de doutorado de Cvetkovic [8], bem como com o primeiro livro sobre o assunto *Spectra of Graphs* [9]. Nesses trabalhos foram demonstrados alguns resultados elementares para o estudo de grafos.

No início do estudo deste tema pensava-se e esperava-se que o espectro de um grafo o caracterizasse, isto é, que cada espectro estivesse associado a um único grafo. A pergunta principal deste trabalho teve início com Günthard e Primas [17], em 1956: *Quais grafos são determinados pelo seu espectro(DS)?* Existem espectros

associados a apenas um grafo? [34] Quando dois grafos são isomorfos? Isto é, existe uma lista completa de parâmetros capaz de decidir se dois grafos são isomorfos? Ainda não existe, mas tais parâmetros são conhecidos como invariantes do grafo.

Como as diversas outras áreas da Matemática, o estudo de Grafos também possui diversas ramificações que contemplam parte da Matemática Discreta. Um dos problemas mais celebrados atualmente na área de teoria da complexidade é o de *isomorfismo de grafos*. Mais precisamente a questão é determinar a complexidade de se verificar se dois grafos dados são isomorfos. A relação desse problema com TEG pode ser construída da seguinte maneira: se dois grafos são isomorfos, ou seja, existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices de modo que as adjacências são preservadas, eles têm o mesmo polinômio característico e, portanto, o mesmo espectro (para qualquer matriz associada). Assim, se dois grafos têm diferentes espectros, então eles não são isomorfos. Se a recíproca fosse verdadeira, isto é, se grafos não isomorfos tivessem espectros diferentes, então o problema do isomorfismo de grafos seria polinomial, uma vez que o polinômio característico da matriz associada pode ser calculado em tempo polinomial.

É bastante conhecido, no entanto, que existem grafos não isomorfos que têm o mesmo espectro. Estes grafos são chamados de *coespectrais*. Logo, a questão da complexidade do isomorfismo de grafos a partir de invariantes espectrais não é trivial. Por exemplo, Schwenk [30] provou que praticamente todas as árvores têm uma outra árvore (não isomorfas) com o mesmo espectro com relação à matriz de adjacência.

Uma das questões mais importantes atualmente na TEG e que está diretamente relacionada ao problema do isomorfismo de grafos é saber se *quase todos* os grafos são determinados pelo espectro. Foi então que, em 2016, van Dam e Haemers enunciaram a seguinte Conjectura:

**Conjectura 1.** [18] *Quase todos os grafos são determinados pelo seu espectro.*

Tal Conjectura tornou-se nossa maior motivação para o estudo de grafos determinados pelo espectro, isto é, saber, dentre os estudos antigos e atuais, quais grafos são determinados pelo espectro, se existe alguma relação entre eles e quais parâmetros foram utilizados para se provar tais argumentos.

Segundo Brouwer e Haemers [6], são muito mais conhecidos os grafos que não são DS do que o contrário, visto que as ferramentas que são utilizadas para provar que um dado grafo é DS parecem funcionar apenas para aquele grafo com aquela determinada estrutura especial, e se a Conjectura 1 de van Dam e Haemers for verdadeira, então será um problema complicado provar isso, com os métodos conhecidos.

No decorrer da história do estudo deste problema surgiram diversas conjecturas e afirmações falsas sobre alguns grafos serem determinados pelo espectro. Citamos por exemplo a *união disjunta de  $k$  caminhos*  $P_{n_1} + P_{n_2} + \dots + P_{n_k}$ . Segundo [19], [34] e [41] a união disjunta é DS com relação ao espectro da matriz de adjacência. Porém esta afirmação é falsa, assim como mostrado em [31], segundo o contra-exemplo de que  $P_7 + P_1$  é coespectral com  $Z_3 + P_3$ .

Em 2009, Xiaoling e Heping [43] mostraram que *Pineapple Graph*  $K_p^q$  é determinado pelo espectro da matriz de adjacência: 1) No Teorema 2.8 do artigo temos que o complemento do *Pineapple Graph*  $K_p^q$  é determinado pelo espectro de matriz de adjacência; 2) No Teorema 2.9 do artigo temos que o *Pineapple Graph*  $K_p^q$  é determinado pelo espectro de matriz de adjacência;

Porém, em 2016, Topcu, Sorgun e Harmers [33], mostraram que isto não é verdade, esta afirmação só vale para alguns casos, como mostrado na seção 5.5. Eles mostram, em forma de corolário, a falsidade dos teoremas supracitados, construindo grafos que são coespectrais e não isomorfos com  $K_p^q$ , sempre que  $p$  é par e  $q = (\frac{p}{2})^2$ : No corolário 2.2 temos que se  $p = 2k \geq 4$  e  $q = k^2$ , então  $K_p^q$  não é determinado pelo espectro da matriz de adjacência.

Em [24] é mostrado que *Para  $k = 1$  temos que  $G = P_2 + P_2 + \dots + P_2 = mP_2$ , portanto  $G \times K_2 = 2mP_2$ . Então  $G \times K_2 = 2mP_2$  é DS, porém, como mostrado em [31], a união disjunta de  $m$  caminhos não é determinado pelo espectro, portanto a hipótese para a demonstração do Teorema é falsa, tornando o Teorema falso.*

Até acreditou-se que uma matriz específica podia determinar mais grafos DS do que as demais. Segundo Cvetkovic [7], existiria uma *forte base* para se acreditar que o estudo de grafos através da matriz laplaciana sem sinal facilitaria a determinação de grafos pelo espectro, sendo mais eficiente do que pela matriz de adjacência. Seus estudos se firmaram na hipótese de que esta matriz tinha menos pares coespectrais. Porém, ao longo da história, foi mostrado que existem diversas famílias com pares coespectrais mesmo se utilizando esta matriz. Podemos perceber este fato em estudos recentes realizados por Souza [32].

Segundo Haemers é muito mais fácil determinar pares de grafos não isomorfos e coespectrais do que demonstrar que um único grafo é DS. Notamos ao longo do trabalho que cada demonstração de grafos DS é única e singular, não se estendendo para outros grafos. O que talvez explique a dificuldade de se encontrar grafos DS. Porém, ainda assim, acredita-se que quase todos os grafos são determinados pelo seu espectro. Podemos formalizar esta noção da seguinte maneira:

**Definição 1.** [2] *Se dois grafos  $G$  e  $H$  são não isomorfos e coespectrais com respeito a uma matriz  $M$  então eles formam um par coespectral com respeito a  $M$ . Seja  $\zeta_n$  um conjunto finito de grafos de ordem  $n$ , e  $\zeta_n^*$  um subconjunto em que cada grafo tem um par coespectral em  $\zeta_n - \zeta_n^*$  com respeito a  $M$ . A razão  $\frac{|\zeta_n^*|}{|\zeta_n|}$  é chamada de incerteza coespectral de ordem  $n$  com respeito a  $M$ .*

Mais especificamente, qual o comportamento do limite desta razão quando  $n$  tende ao infinito? A Conjectura de Haemers é formalizada ao dizer que este limite é igual a *zero*, o que significa que quase todos os grafos são DS. Em uma

linguagem mais coloquial, o limite zero significa que a proporção de grafos que têm um par coespectral é pequena comparada ao total de grafos.

O que fizemos neste trabalho foi revisar acerca da Conjectura de van Dam e Haemers [18] observando e revendo em outras fontes quais os grafos conhecidos são Determinados pelo seu Espectro e quais as técnicas utilizadas pelos autores. Dentro destas técnicas destacamos as *invariantes espectrais* de um grafo, como a regularidade, o grau da regularidade, números de arestas e de vértices, etc., que foram os argumentos mais utilizados dentro das demonstrações. É importante ressaltar que neste trabalho não iremos determinar novos grafos DS, mas iremos fazer um *survey* de alguns grafos que já são conhecidos serem DS.

Esta dissertação de mestrado está organizada da seguinte forma:

Encontraremos no Capítulo 2 deste trabalho um estudo sucinto sobre a Teoria de Grafos e Álgebra Linear, isto é, resultados que iremos precisar para compreender os estudos realizados neste trabalho, que facilitam a sua leitura e interpretação.

No Capítulo 3, temos um estudo sobre Invariantes Espectrais dos Grafos, no qual apresentamos a importância deste estudo e definições e teoremas elementares para compreender os resultados acerca de grafos DS. Dentro deste capítulo também trazemos uma breve discussão sobre grafos coespectrais, como encontrá-los e algumas obras relevantes que estudam a construção de pares de grafos coespectrais.

No Capítulo 4 deste trabalho apresentamos alguns dos grafos que são conhecidos serem Determinados pelo seu Espectro, porém sem demonstrações que tornam tais teoremas verdadeiros. Nesta lista encontram-se: o caminho e seu complemento, grafos regulares, completos, bipartidos, ciclo, *odd sun graphs*, *lollipop graph*, *multicone graph*, *pineapple graph*, grafos  $Z_n$ , *t-shape trees*, grafos fortemente regulares, grafos distância-regulares, entre outros.

No Capítulo 5 apresentamos as demonstrações que foram escolhidas (por serem significativas para a evolução do tema) sobre grafos determinados pelo espectro. São eles: grafo completo, bipartido e ciclo; caminho; grafo  $Z_n$ ; *lollipop graph*; *t-shape trees*; grafo regular; *pineapple graph*.

No capítulo 6 apresentamos alguns produtos entre grafos que são determinados pelo espectro, de modo que tais produtos preservam o fato deles serem determinados pelo espectro, mostrando a definição dos produtos e os respectivos produtos realizados.

Por último, encontramos a conclusão do trabalho no capítulo 7.



## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo iremos apresentar a Teoria de Grafos, mostrando um problema motivacional e introduzindo os conceitos básicos de grafos nos quais iremos trabalhar ao longo da dissertação, bem como apresentamos as matrizes que são associadas a um grafo. Também abordamos alguns conceitos preliminares acerca de Álgebra Linear, que permeiam o estudo sobre grafos determinados pelo espectro. Tal capítulo tem como principal objetivo familiarizar o leitor com os conceitos que serão trabalhados ao longo da dissertação e facilitar a sua leitura. Tais conceitos, definições e teoremas foram retiradas de: [2, 12, 13, 18, 22, 23, 27, 29, 34, 36].

### 2.1 Teoria de Grafos

Iniciamos este capítulo apresentando o seguinte problema: temos que ligar três fios de telefone à três casas sem que os fios se interceptem. Será possível?



Figura 2.1: Problema das três casas

Note que podemos tentar resolver este problema usando um conjunto de pontos, para representar as casas e os telefones, e um conjunto de ligações entre eles. Chamamos esta estrutura de *Grafo*.

Especificamente, vamos representar os telefones e as casas por pontos e os fios de energia elétrica por linhas. Chamamos, na *Teoria de Grafos*, os pontos de **vértices** e as linhas de **arestas**. Em termos mais elementares, um grafo  $G$  pode ser descrito como qualquer objeto que envolva uma conexão entre pontos.

Muitos problemas podem ser resolvidos através da abstração deste conceito. Matematicamente, podemos dizer que um grafo  $G = (V, E)$  consiste em dois conjuntos, nos quais  $V$  é um conjunto de vértices e  $E$  é o conjunto das arestas que consiste em subconjuntos de dois elementos de  $V$ , pois cada aresta irá possuir um par de vértices associada a ela. Podemos representar um grafo por uma lista, que indicará a relação entre os vértices, ou por uma representação gráfica.

Voltando ao problema inicial, apesar de ser um problema muito conhecido, não possui uma solução, mas iremos utilizá-lo para explicar os conceitos iniciais na Teoria de Grafos.

O grafo que representa o problema enunciado é chamado de *Grafo de Thomsem*, apesar de o mesmo não resolver o problema, visto que os fios não podem se interceptar:

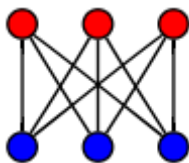


Figura 2.2: Grafo de Thomsem

Este problema foi uma das motivações para o estudo da planaridade de grafos e, de uma maneira vagamente diferente, proposto por Henry Dudeney [12, 13],

em 1913, apesar do mesmo afirmar que este é um problema muito mais antigo que a própria luz.

No exemplo apresentado, vimos que cada vértice tem três arestas conectando ele a outro vértice: chamamos de grau do vértice  $v$  o número de vezes que as arestas incidem ao vértice, ele é denotado por  $d_v$ . Portanto o grau de cada vértice deste problema é três.

Podemos ter também o que chamamos de **laço**, que é quando uma aresta liga o vértice a ele mesmo. Deste modo, o grau do vértice é dois, isto é, um grau para cada extremidade da aresta. Também podemos ter dois vértices sendo ligados por mais de uma aresta, o chamado **multigrafo**, que possui **arestas múltiplas**.

Grafos sem laços ou arestas múltiplas são chamados de **grafos simples**, que é o que iremos estudar neste trabalho.

Agora vamos definir o que é um *subgrafo*. Dizemos que  $G' = (V', E')$  é um **subgrafo** de  $G = (V, E)$  se  $V' \subset V$  e  $E' \subset E$ . Quando  $G'$  é subgrafo de  $G$  é tal que dois vértices são adjacentes em  $G'$  se e somente se eles são adjacentes em  $G$ , dizemos então que  $G'$  é um **subgrafo induzido** de  $G$ .

Um **passeio** de comprimento  $n$  de um grafo  $G = (V, E)$  é uma sequência de vértices  $v_1, \dots, v_n$  tal que  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ , para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Um **caminho** é um passeio sem repetições de vértices. Um caminho fechado, que começa e termina no mesmo vértice, é denominado **ciclo**.

Vimos até então propriedades básicas de um grafo qualquer. Como algumas famílias de grafos possuem características distintas e são importantes para o estudo de nosso trabalho, iremos explaná-las agora.

Dizemos que um grafo é **conexo** Se existe um caminho entre quaisquer par de vértices. Vejamos um caso em que isto não ocorre, observe o grafo da Figura 2.3:

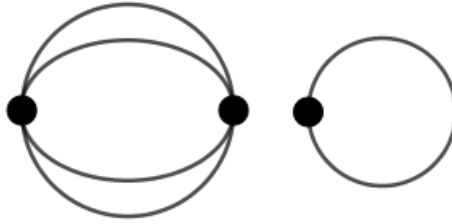


Figura 2.3: Exemplo de Grafo Desconexo

Ele recebe o nome de **grafo desconexo**, de modo que cada parte sem ligação entre os vértices é chamada de **componente conexa** do grafo.

Um grafo é dito **completo** se quaisquer pares de vértices são adjacentes. Denotamos o grafo completo de  $n$  vértices por  $K_n$ . Vemos na Tabela 2.1 os grafos completos de  $n = 1$  até 5.

Um grafo é **regular** quando todos os vértices possuem o mesmo grau. Um grafo em que todos os vértices têm grau  $k$  é denominado  $k$ -regular. O *Grafo de Thomsem* é um grafo 3-regular.

Denotamos por  $P_n$  um caminho com  $n$  vértices. Vejamos na Figura 2.4 o  $P_2$ .



Figura 2.4: Exemplo de Caminho

Um ciclo de  $n$  vértices é denotado por  $C_n$ . Veja na Figura 2.5 o exemplo do  $C_3$ , particularmente chamado de triângulo.

| $K_1$ : 0 arestas | $K_2$ : 1 arestas | $K_3$ : 3 arestas | $K_4$ : 6 arestas | $K_5$ : 10 arestas |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| •                 | • — •             |                   |                   |                    |

Tabela 2.1: Exemplos de Grafos Completos

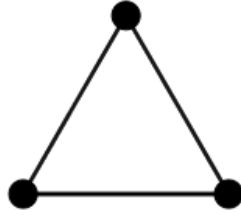


Figura 2.5:  $C_3$

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , a **distância** entre dois vértices  $u$  e  $v \in V$  é denotada por  $d(u, v)$  e é o comprimento do menor caminho que liga  $u$  e  $v$ . O máximo das distâncias entre dois vértices de  $G$  é chamada de **diâmetro** e denotado por  $d(G)$ .

Grafo **bipartido** é um grafo em que podemos particionar o conjunto  $V$  de vértices em dois subconjuntos disjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , de modo que toda aresta com extremidade em algum vértice de  $V_1$  tem a outra extremidade em  $V_2$ , não havendo vértices adjacentes em um mesmo conjunto.

A generalização desta definição pode ser feita e chamamos de grafo  $k$ -partido, no qual  $V$  pode ser repartido em  $k$  subconjuntos não vazios e disjuntos dois a dois. O grafo **bipartido completo** é um grafo bipartido em que todos os vértices de  $V_1$  estão ligados a todos de  $V_2$ , como na Figura 2.1 . Sua representação é dada por  $K_{p,q}$ ,  $|V_1| = p$  e  $|V_2| = q$ . A representação do grafo de Thomsem é  $K_{3,3}$ .

Um dos objetivos desta dissertação é apresentar algumas *invariantes espectrais* de um grafo, que serão definidas posteriormente. Dentre tais invariantes, podemos deduzir do espectro de um grafo se ele é bipartido. Para demonstrar tal resultado, precisaremos do seguinte Teorema:

**Teorema 1.** *Um grafo é bipartido se e somente se não possui caminhos fechados de comprimento ímpar.*

*Demonstração.* Suponhamos que um grafo  $G$  seja bipartido, então podemos separar os vértices em dois subconjuntos distintos  $V_1$  e  $V_2$ . Se  $G$  possuir um caminho fechado

de tamanho  $n$ , ele será  $C_n = v_0v_1v_2\dots v_n$ . Suponhamos também, sem perda de generalidade, que  $v_0 \in V_1$  então  $v_1 \in V_2$  e, novamente,  $v_2 \in V_1$ . Temos que  $v_i \in V_2$  se e somente se  $i$  é ímpar. Para fechar o caminho, precisamos que  $v_n = v_0 \in V_1$ , ou seja,  $n$  é par. Portanto os caminhos fechados tem tamanho par.

Vamos supor agora que  $G$  é um grafo conexo sem caminhos fechados de tamanho ímpar e seja  $v_0 \in V_1$  um vértice de  $G$ . Vamos definir que  $v \in V_1$  se e somente se existe um caminho de tamanho par entre  $v_0$  e  $v$  e que  $v \in V_2$  se e somente se existe um caminho de tamanho ímpar entre  $v_0$  e  $v$ .

Se existir  $w \in V_1 \cap V_2$  então existe um caminho  $P_1$  de tamanho par entre  $v_0$  e  $w$  e existe um caminho  $P_2$  de tamanho ímpar entre  $w$  e  $v_0$ . Unindo esses caminhos, temos que  $P_1P_2$  é um caminho de  $v_0$  a  $v_0$  de tamanho ímpar, ou seja, o grafo contém um caminho de tamanho ímpar. Portanto  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , o que nos dá a bipartição. No caso de  $G$  ser desconexo, basta verificar que, para cada componente conexa, o grafo é bipartido, e unir o subconjuntos de vértices das componentes conexas. □

Dado um grafo  $G$ , o **Line Graph** de  $G$ , denotado por  $L(G)$ , é o grafo obtido através do grafo  $G$  tomando as arestas de  $G$  como vértices de  $L(G)$  e ligando dois vértices em  $L(G)$  se, e somente se, as arestas correspondentes em  $G$  possuírem um vértice comum.

Um grafo  $G$  é chamado de **unicíclico** se for conexo e contiver apenas um ciclo.

O **Cocktail Party Graph** [29] em  $2n$  vértices, denotado por  $CP(n)$ , é um grafo regular de  $2n$  vértices de grau  $2n - 2$ . Vejamos o exemplo do  $CP(3)$  na Figura 2.6.

Um **Line Graph** generalizado [29], denotado por  $L(H; a_1, \dots, a_n)$ , é construído a partir de um grafo  $H$  com  $n$  vértices  $v_1, \dots, v_n$  e números naturais

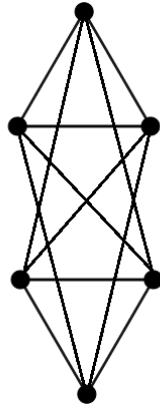


Figura 2.6:  $CP(3)$

$a_1, \dots, a_n$  da seguinte maneira: é uma união de cópias disjuntas de  $L(H)$  e  $CP(a_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), com arestas adicionais unindo um vértice em  $L(H)$  com um vértice em  $CP(a_i)$  se o vértice em  $L(H)$  corresponde a uma aresta em  $H$  que tem  $v_i$  como vértice final.

Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo em que todas as componentes conexas são árvores é chamado de **floresta** e o vértice pendente (vértice de grau 1) é chamado de **folha**. Se uma árvore  $G$  tem  $n$  vértices e  $n - 1$  folhas, então  $G$  é uma **estrela**. Denotamos uma estrela de  $n$  vértices por  $S_n$ . Vejamos como um exemplo de árvore a Figura 2.7:

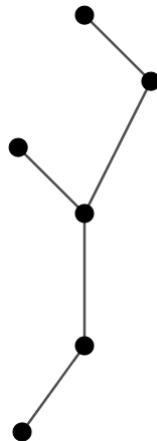


Figura 2.7: Exemplo de Árvore

Além da representação de um grafo através de uma lista ou de um gráfico, temos também sua representação matricial. Focaremos neste trabalho apenas na Matriz de Adjacência. Esta matriz é construída a partir da relação de adjacência entre os vértices do grafo.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices. A **matriz de adjacência**  $A = (a_{ij})$  de  $G$ , muitas vezes denotada por  $A(G)$ , é a matriz quadrada de ordem  $n$  cujas entradas são 0 ou 1, como mostrado a seguir:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \text{ para } v_i, v_j \in V \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.1)$$

Veamos abaixo um exemplo de uma matriz de adjacência que representa o grafo a seguir:

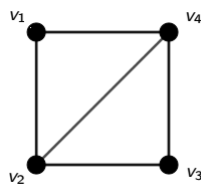


Figura 2.8: Exemplo de Grafo

A matriz de adjacência correspondente a este grafo é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Apesar de que, como já dito anteriormente, focaremos neste trabalho apenas na matriz de adjacência, iremos agora, definir as demais matrizes associadas aos grafos.



Começaremos com a definição de matriz laplaciana e da laplaciana sem sinal:

Segundo [2] a matriz laplaciana desempenha um relevante papel em diversas aplicações, além do mais, é uma importante ferramenta para grafos determinados pelo espectro. Sua definição é a seguinte:

**Definição 2.** *Seja  $D$  a matriz diagonal dos graus dos vértices de um grafo  $G$  e seja  $A$  a matriz de adjacência de  $G$ . Dizemos que a matriz:*

$$L = D - A \tag{2.2}$$

*é a **matriz laplaciana** do grafo  $G$ .*

Vejamos no exemplo do grafo da Figura 2.8 qual a matriz diagonal dos graus que teremos:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz laplaciana do grafo  $G$  será dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos agora à definição da matriz laplaciana sem sinal:

**Definição 3.** *Seja  $D$  a matriz diagonal dos graus dos vértices de um grafo  $G$  e seja  $A$  a matriz de adjacência de  $G$ . A matriz dada por:*

$$Q = D + A \tag{2.3}$$

*é chamada matriz **laplaciana sem sinal** de  $G$ .*

No exemplo do grafo da Figura 2.8 a matriz laplaciana sem sinal é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Por último vamos à definição de matriz de adjacência do complemento. Para compreender esta definição precisamos saber o que é o complemento. Diz-se por **complemento** o grafo complementar de um grafo  $G$ . Segue sua definição:

**Definição 4.** *Chamamos de complemento de um grafo  $G$  o grafo  $G'$  tal que dois vértices são adjacentes em  $G'$  se, e somente se, eles não são adjacentes em  $G$ .*

Ou seja, para encontrar o complementar  $G'$  de um grafo  $G$ , basta preencher em  $G'$  todas as arestas que faltavam para se obter um grafo completo, e remove-se todas as arestas que já estavam em  $G$  de  $G'$ . Para obter a matriz de adjacência do complemento, basta fazer a matriz de adjacência do grafo  $G'$ .

A sessão seguinte trata dos conceitos preliminares de Álgebra Linear que necessitaremos para a compreensão de algumas demonstrações do decorrer da dissertação.

## 2.2 Conceitos Preliminares de Álgebra Linear

Sabemos que existem diversas interações entre a Teoria Espectral de Grafos e outros ramos da Matemática. Esta teoria está completamente baseada na Álgebra Linear. Praticamente tudo que aprendemos efetuando um curso inicial de Álgebra Linear é utilizado como aplicação na Teoria Espectral de Grafos.

Para iniciarmos as definições que utilizaremos, começaremos com algumas notações primordiais para esta seção.

Seja  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  o conjunto de todas as matrizes de ordem  $m \times n$  com entradas no corpo  $\mathbb{R}$ . No caso em que  $m = n$  chamamos a matriz de *quadrada*. Em particular, denotamos por  $I$  a **matriz identidade** de ordem  $n$ . Agora vejamos o que é o determinante de uma matriz  $A$ :

**Definição 5.** *Dada uma matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , o determinante de  $A$ , denotado por  $\det A$  é o número real*

$$\det A = \sum_{\pi} \left( \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)} \right),$$

no qual a soma é sobre todas as  $n!$  permutações de  $\pi$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  e  $\operatorname{sgn} \pi = +1$  ou  $-1$ , dependendo se a quantidade mínima de transposições necessárias para transformar  $\pi$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$  for par ou ímpar, respectivamente.

Olharemos agora para o produto de uma matriz  $A$  por um vetor  $\vec{x}$  de modo a procurar um escalar  $\lambda$  tal que:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

O estudo de matrizes está diretamente ligado ao estudo do **polinômio característico, autovalores e autovetores** de uma matriz, como veremos a seguir:

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Um **autovetor** de  $A$  é um vetor (não nulo)  $\vec{x}$  tal que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , para algum escalar  $\lambda$ . Chamamos  $\lambda$  de **autovalor** de  $A$ , se existir uma solução não trivial  $\vec{x}$  de  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ .

Chamamos

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

de polinômio característico da matriz  $A$ . Desta forma, a ordem da matriz indica o número de autovalores associados à ela. Tais autovalores são determinados através das raízes do polinômio característico e, portanto, uma matriz pode não possuir todos os autovalores distintos, o que nos leva à próxima definição: *multiplicidade* de um autovalor.

A **multiplicidade** de um autovalor  $\lambda$  é o número de vezes em que  $\lambda$  é raiz do polinômio característico. Isto nos indica a quantidade de vezes que os autovalores se repetem, uma definição fundamental da Teoria Espectral de Grafos.

E, como já mencionado informalmente na seção anterior: O conjunto de autovalores, juntamente com suas multiplicidades, de uma matriz  $A$  é chamado de **espectro** de  $A$ .

O traço de uma matriz quadrada é uma função que associa a matriz à soma dos elementos da sua diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \quad (2.4)$$

Os seguintes resultados sobre o traço são conhecidos e serão utilizados para alguns resultados dos próximos capítulos:

**Proposição 1.** *As seguintes afirmações sobre o traço de matrizes quadradas  $A$  e  $B$  são verdadeiras:*

1. *O traço é linear:*

$$(a) \operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

$$(b) \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A), \lambda \in \mathbb{R}$$

2. O traço de uma matriz é igual ao traço da sua transposta:

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T) \quad (2.5)$$

$$3. \operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, k \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_i \text{ autovalor de } A$$

4. O traço de uma matriz é igual à soma dos seus autovalores.

5. O traço de um produto de matrizes quadradas não depende da ordem do produto:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad (2.6)$$

Vamos ver agora o conceito de menores principais. Para entendê-lo, precisamos da definição de *submatriz principal*: Seja  $A \in M_{n \times n}$ . Uma submatriz  $A_r \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  de  $A$ , com  $r < n$ , é dita **submatriz principal** de  $A$  se  $A_r$  é obtida da matriz de  $A$  removendo-se  $n - r$  linhas e suas respectivas colunas. Dada uma matriz  $A \in M_{n \times n}$ , um menor principal de  $A$  de ordem  $r$  é o determinante de qualquer submatriz principal  $A_r$  de  $A$ , para  $1 \leq r < n$ .

Vejamos o exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Os menores principais de ordem 1 serão:

1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

O Teorema abaixo é uma das versões do chamado de **Teorema do Entrelaçamento**. Esta versão do Teorema nos fornece uma possível relação entre os autovalores de um grafo  $G$  e os autovalores de um subgrafo induzido de  $G$ . A sua demonstração pode ser encontrada em [2].

**Teorema 2.** [2, 34](Teorema do Entrelaçamento): *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices e autovalores tais que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  e seja  $H = (V', E')$  um subgrafo induzido de  $G$  com  $m$  vértices. Se os autovalores de  $H$  são  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$  então, para cada  $i$  tal que  $1 \leq i \leq m$  vale  $\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ . Em particular, se  $v \in V$  e  $V' = V - v$  então  $\lambda_{i+1} \leq \mu_i \leq \lambda_i$  para cada  $i$ , tal que  $1 \leq i \leq n - 1$*

O entrelaçamento dos autovalores dos grafos nos mostram como o espectro de um grafo se relaciona com o espectro de um subgrafo induzido, isto é, após a aplicação de uma *operação*, em particular de um subgrafo obtido pela retirada de um vértice.

Notamos que retirar um vértice do grafo  $G$  significa retirar a linha e a coluna da matriz  $A(G)$  associada a ele, ou seja, removemos da matriz os elementos que relacionavam as adjacências deste com os outros vértices de  $G$ . Logo  $A(H)$  (sendo  $H$  o subgrafo induzido de  $G$ ) é uma submatriz de ordem  $n - 1$  de  $A(G)$ , fazendo com que os autovalores de  $A(H)$  estejam entre os autovalores de  $A(G)$ . Vejamos no exemplo da Figura 2.9 abaixo a aplicação do Teorema:

Seja  $G = C_3$ :

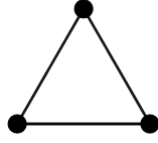


Figura 2.9:  $G = C_3$

Sua matriz de adjacência é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E seus autovalores são:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ .

Seja  $H$  o subgrafo induzido de  $G$  ao removermos um vértice, como podemos ver na Figura 2.10.



Figura 2.10:  $H$  Subgrafo induzido de  $G$

Sua matriz de adjacência é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E seus autovalores são:  $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$ .

Como podemos ver:  $\lambda_1 = 2 \geq \mu_1 = 1 \geq \mu_2 = -1 \geq \lambda_2 = -1 \geq \lambda_3 =$   
 $-1$ .

### 3 INVARIANTES ESPECTRAIS

Além de representar um grafo através de gráficos e listas, podemos também representá-lo por uma matriz, como já vimos anteriormente. O estudo da Teoria Espectral de Grafos, em termos elementares e como já explicitado anteriormente, relaciona as propriedades algébricas de algumas matrizes associadas a um grafo com as propriedades estruturais de tal grafo.

Apesar da representação gráfica de um grafo ser útil para o estudo de suas propriedades, se mostrou mais eficiente o estudo de grafos através de sua estrutura, isto é, através da análise das informações contidas nas matrizes associadas ao grafo, por exemplo, a adjacência entre os vértices do grafo, o grau de cada vértice, etc.

Para dissertar sobre as informações contidas nas matrizes associadas aos grafos, lembramos que a matriz de adjacência do grafo mostrado na Figura 2.8 é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Algo que está diretamente ligado às matrizes associadas aos grafos é o seu *espectro*. Isto nos mostra que também podemos associar um grafo ao seu espectro. O espectro de uma matriz  $A$ , como já supracitado, é o conjunto de seus autovalores e é denotado por  $\text{spec}(A)$ .

O polinômio característico da matriz de adjacência do exemplo 2.8 é



$$p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$$

O seu espectro é:

$$\text{spec}(A) = \left\{ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}), -1, 0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \right\}$$

Enfim chegamos ao nosso objetivo deste trabalho: Matrizes de adjacência diferentes podem ter o mesmo espectro e representar grafos diferentes. Então, *quando um grafo é Determinado pelo seu Espectro (DS)?* Isto é, quando um espectro está associado a apenas um grafo? Apenas se pudermos definir unicamente suas propriedades a partir do seu espectro. O que acontece quando dois grafos são aparentemente diferentes mas representam a mesma situação? Chamamos tais grafos de isomorfos. Matematicamente:

**Definição 6.** *Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são grafos isomorfos se existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices, de modo que as adjacências sejam preservadas. Isto é, dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G_1$  são adjacentes se e somente se os vértices correspondentes de  $u$  e  $v$  em  $G_2$  são adjacentes.*

Como podemos ver, o isomorfismo entre grafos preserva a sua estrutura. Se dois grafos são isomorfos, então eles têm o mesmo espectro: eles precisam ter o mesmo número de vértices e arestas e, além disso, possuir uma mesma sequência de graus dos vértices. Mas estas três condições não são suficientes para que dois grafos sejam isomorfos.

Chamamos de invariantes espectrais de um grafo os parâmetros que podem ser determinados a partir do espectro do grafo, isto é, que são preservados por isomorfismos.

As três invariantes mais conhecidas são o número de vértices, de arestas e o número de triângulos. Podemos ver através do Teorema abaixo o que é determinado a partir do espectro de um grafo:

**Teorema 3.** [6, 25, 34, 42] *Seja  $G$  um grafo. Podemos deduzir do espectro da matriz de adjacência  $A$  de  $G$  o que se segue:*

- i) O número de vértices;*
- ii) O número de arestas;*
- iii) Se  $G$  é regular;*
- iv) O número de passeios fechados de qualquer comprimento fixo;*
- v) Se  $G$  é bipartido;*
- vi) O número de triângulos;*
- vii) O grau da regularidade de  $G$ .*

*Demonstração.* Dado o polinômio característico  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$  da matriz de adjacência  $A(G)$  e seja  $m$  o número de arestas.

*i)* Podemos deduzir do espectro da matriz de adjacência de um grafo o número de vértices, pois ele está vinculado ao número de autovalores, ou seja, o grau do polinômio característico nos diz a quantidade de vértices existentes.

*ii)* [2, 15]  $a_2 = -m$  é o número de arestas: Por [22], temos que para cada  $i, 1 \leq i \leq s$ , a soma dos menores principais da matriz de adjacência  $A$  com  $i$  linhas e  $i$  colunas é igual a  $(-1)^i a_i$ .

Tomando os menores principais de duas linhas e duas colunas, só haverá duas opções possíveis, visto que a matriz de adjacência de  $G$  é simétrica. A primeira opção é a matriz 2x2 nula de determinante zero e a outra é a submatriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que possui determinante  $-1$ .

Isto só acontece com linhas e colunas associadas a vértices adjacentes e cada menor principal contará uma aresta de  $G$ . Então, somando todos os menores principais, teremos que:  $(-1)^2 a_2 = (-1) \cdot |E| = -1m$ , sendo  $|E|$  o número de arestas. Portanto  $a_2 = -m$ .

*iii)* [34] Ideia da demonstração: suponhamos que  $G$  seja um grafo com  $n$  vértices e com matriz de adjacência  $A$ . Seja  $J$  a matriz de  $1$ 's,  $I$  a matriz identidade e  $D$  a matriz diagonal dos graus de  $G$ . Seja  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ , com  $\alpha \neq 0$ . Com respeito a matriz  $Q = \alpha A + \beta J + \gamma D + \delta I$  um grafo regular não pode ser coespectral com a um grafo não regular, exceto quando  $\gamma = 0$  e  $-1 < \beta/\alpha < 0$ .

*iv)* Se  $G$  é um grafo com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e  $A$  sua matriz de adjacência, então para cada número natural  $k$ , o elemento  $i, j$  da matriz  $A^k$  é o número de passeios de comprimento  $k$  de  $v_i$  a  $v_j$ .

Demonstraremos este Teorema por indução no número de vértices  $k$ . Para  $k = 1$  temos que  $A^k = A$ , isto é, a própria matriz de adjacências, portanto o elemento  $i, j$  da matriz é o número de passeios de comprimento 1.

Por indução, suponhamos que o elemento  $i, j$  da matriz  $A^k$  é o número de passeios de comprimento  $k$  de  $v_i$  a  $v_j$ . Temos que mostrar que o número de passeios de comprimento  $k + 1$  de  $v_i$  a  $v_j$  é o elemento  $i, j$  da matriz  $A^{k+1}$ .

Seja  $A = (a_{i,j})$  e  $A^k = (b_{i,j})$ . O elemento  $i, j$  de  $A^{k+1}$  é

$$A^{k+1} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,m}b_{m,j}$$

Note que  $a_{i,1}b_{1,j}$  é o número de arestas de  $v_i$  a  $v_1$ , ou seja, o número de passeios de  $v_1$  a  $v_j$  de comprimento  $k$ , que é o número de passeios de comprimento  $k + 1$  de  $v_i$  a  $v_j$  passando por  $v_1$ .

v) Vamos mostrar que  $G$  é bipartido se, e somente se, tem espectro simétrico.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um grafo bipartido e  $V_1$  e  $V_2$  seus dois conjuntos disjuntos de vértices. Vamos enumerar quem são os  $k$  vértices de  $V_1$  e os  $w$  vértices de  $V_2$ . A matriz de adjacência de  $G$  será da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

Seja  $(\lambda, \vec{x})$  um autopar de  $A(G)$  (ou seja,  $\lambda$  é o autovalor associado ao autovetor  $\vec{x}$ ) no qual:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_w).$$

Devemos mostrar que  $\lambda$  é autovalor de  $A$  com  $\vec{x}' = (x_1, \dots, x_k, -y_1, \dots, -y_w)$ :

$$A\vec{x}' = (B \cdot (-y_1, \dots, -y_w)^T, B^T(x_1, \dots, x_k)^T) = (-\lambda x_1, \dots, -\lambda x_k, \lambda y_1, \dots, \lambda y_w) = -\lambda \vec{x}'$$

Ou seja, se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  com multiplicidade  $m$ , então  $-\lambda$  é autovalor de  $A$  com multiplicidade  $m$ . Portanto, o espectro de  $G$  é simétrico.

( $\Leftarrow$ ) Seja o grafo  $G = (V, E)$  um grafo de espectro simétrico e  $A$  a sua matriz de adjacência. Seja  $\text{spec}(A)$  um multiconjunto simétrico  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1]$ . Então, se tivermos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m+1}$ , ou seja, uma quantidade ímpar, então teremos  $\{-\lambda_{2m+1}, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  que também é uma quantidade ímpar, portanto o total de autovalores é par. O mesmo ocorre se tivermos uma quantidade par entre as duas partes. Portanto o número de autovalores diferente de zero é par, ou seja,  $2k, k \in \mathbb{N}$ . Seja  $w$  o número de autovalores nulos. Então temos que o número de autovalores  $n$  é  $n = 2k + w$ . Como o espectro é simétrico, então para todo  $\lambda_i$  temos que seu correspondente é dado por  $-\lambda_{n-i+1}$ , se  $i \leq k$ .

Então, para qualquer  $r \in w$  ímpar vale que o traço de  $A^r$  será:

$$T^r(A^r) = \lambda_1^r + \lambda_2^r + \dots + \lambda_k^r + \lambda_{k+1}^r + \dots + \lambda_{k+w}^r + \lambda_{k+w+1}^r + \dots + \lambda_n^r = \lambda_1^r + \lambda_2^r + \dots - \lambda_2^r - \lambda_1^r = 0$$

Logo  $G$  não possui caminhos fechados de comprimento ímpar e, portanto,  $G$  é bipartido.

*vi)*[15]  $a_3 = -2t$  no qual  $t$  é número de triângulos: Existem seis possibilidades para menores principais de 3 linhas e 3 colunas. Dessas, apenas uma tem determinante não nulo que é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa situação representa três vértices mutuamente adjacentes, isto é, um triângulo. Como o valor do determinante dessa submatriz é 2, temos que  $(-1)^3 a_3 = 2t$ , pois, segundo [22], a soma dos menores principais da matriz de adjacência  $A$  do grafo  $G$  com  $i$  linhas e  $i$  colunas é igual a  $(-1)^i a_i$ , então  $a_3 = -2t$ .

*vii)* [2, 15] Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas, regular de grau  $k$ ,  $T_2$  o número total de passeios fechados de comprimento 2 e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os seus autovalores. Então  $T_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = kn$ , pois  $kn = 2m$  (cada um dos  $n$  vértices possui  $k$  arestas incidentes, somando todas teremos duas vezes o número de arestas, pois cada uma conta duas vezes, logo  $kn = 2m$ )

□

A demonstração de que um grafo é determinado pelo seu espectro pode envolver diversos argumentos, dentre eles se encontram: número de vértices, número de arestas, o maior autovalor, o segundo maior autovalor e o entrelaçamento. O segundo maior autovalor de um grafo regular se tornou, desde 1976, uma ferramenta importante para determinar a estrutura de um grafo, segundo [10].

Segundo [35] e o Teorema 3 acima, a regularidade de um grafo é determinada pelo espectro. Já sabemos desde, no mínimo, 1980 [9] que todos grafos regulares com menos de 10 vértices são DS, sendo que com 10 vértices existe quatro pares de grafos coespectrais não isomorfos.

Apresentamos um Teorema importante para os resultados dos capítulos seguintes e do próximo Teorema:

**Teorema 4.** [28] *Seja  $G$  um grafo regular de grau  $k$ , então*

- (a)  $k$  é um autovalor de  $G$ ;
- (b)  $G$  é um grafo conexo se e somente se a multiplicidade de  $k$  é 1
- (c) qualquer autovalor  $\lambda$  de  $G$  satisfaz  $|\lambda| \leq k$

*Demonstração.* [28] (a) Seja  $\vec{1}$  o vetor coluna  $[1, 1, \dots, 1]^T$ . Como a soma das entradas de cada linha da matriz de adjacência  $A$  de  $G$  é  $k$ , o grau de cada vértice, temos que  $A\vec{1} = k\vec{1}$ , ou seja,  $k$  é um autovalor de  $G$ .

(b)( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um grafo conexo e  $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  um autovetor associado ao autovalor  $k$  de  $G$ , isto é,  $A\vec{x} = k\vec{x}$ . Suponhamos que  $x_j$  é uma entrada de  $\vec{x}$  com valor absoluto máximo. Temos que  $(A\vec{x})_j = \sum x_i$ , no qual o somatório é considerado sobre os  $k$  vértices  $v_i$  que são adjacentes a  $v_j$ . Logo,  $\sum x_i = kx_j$ . Então temos que, para cada  $l$  tal que  $v_l$  é adjacente a  $v_j$ :

$$|x_j| + (k-1)|x_j| = \left| \sum x_i \right| \leq \sum |x_i| \leq |x_l| + (k-1)|x_j|$$

Então temos que  $|x_j| \leq |x_l|$  e, portanto,  $x_l = x_j$  para todos estes  $k$  vértices. Como  $G$  é conexo, podemos prosseguir sucessivamente desta maneira até mostrar que todas as entradas de  $\vec{x}$  são iguais. Então  $\vec{x}$  é múltiplo de  $\vec{1}$  e o autoespaço associado ao autovalor  $k$  tem dimensão 1.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $k$  possua multiplicidade 1. Suponhamos por absurdo que  $G$  é desconexo, tomemos então  $G_1, G_2, \dots, G_m$  as componentes conexas de  $G$ . Como cada uma é um grafo conexo  $k$ -regular então  $k$  é um autovalor de multiplicidade 1 para cada  $G_i$ . Pela proposição 2.6 de [28] temos que  $p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \dots p_{G_m}(\lambda)$ , então segue que  $k$  é um autovalor de  $G$  de multiplicidade  $m$ , o que contraria a hipótese. Logo,  $G$  é conexo.

(c) Seja  $\vec{y}$  um vetor não nulo de  $G$  associado a um autovalor  $\lambda$  de  $G$  e seja  $y_j$  uma entrada de  $\vec{y}$  com valor absoluto máximo. Como em (ii), temos que  $\sum y_i = \lambda y_j$  e  $|\lambda| |y_j| = |\sum y_i| \leq k |y_j|$ . Logo,  $|\lambda| \leq k$   $\square$

**Teorema 5.** [6, 34, 37, 41] *Para grafos regulares, ser DS é equivalente para as matrizes de adjacência, laplaciana, matriz de adjacência do complemento e laplaciana sem sinal.*

A estratégia utilizada pelo autor para a demonstração deste corolário foi reconhecer os autovalores de cada matriz, mostrando que eles não diferem totalmente (são deslocamentos) do espectro da matriz de adjacência.

*Demonstração.* [6] Para cada uma dessas matrizes, o teorema acima nos diz que a regularidade pode ser reconhecida, como já mostrado no Teorema 3. Resta encontrar o grau da regularidade de  $k$ . Para cada uma dessas matrizes temos que o maior autovalor é  $k, 2k, n - 1 - k$ , respectivamente. Para a laplaciana sem sinal, o traço é  $nk$ .  $\square$

Nosso único problema é que nem sempre o espectro de uma matriz associada ao grafo o representa unicamente, pois para que haja a caracterização de um grafo a partir de seu espectro, é necessário que todos os grafos daquela família possuam o mesmo espectro e as mesmas características.

Vimos anteriormente sobre o problema de isomorfismo entre grafos: se dois grafos são isomorfos, então eles possuem o mesmo espectro. A recíproca desta afirmação não é verdadeira, ou seja, se dois grafos possuem o mesmo espectro eles podem não ser isomorfos, e então entramos no assunto da coespectralidade entre grafos.

O problema de existirem grafos coespectrais e que não são isomorfos significa que algumas propriedades da estrutura dos grafos não podem ser caracterizadas pelo seu espectro. Já sabemos, por exemplo, que a conexidade [38] de um grafo não depende do espectro, bem como a existência de ciclos de comprimento 4 e o grau dos vértices [38].

Mas o que são, de fato, grafos coespectrais?

**Definição 7.** *Diz-se que dois grafos  $G$  e  $H$  são coespectrais em relação a alguma matriz  $M$  se  $\text{spect}(M(G)) = \text{spect}(M(H))$ , ou seja, se os autovalores da matriz associada  $M$  são iguais para ambos os grafos.*

Em 1971 [30] foi provado que quase todas as árvores são coespectrais em relação à matriz de adjacência, matriz foco neste trabalho. Isto nos mostra que, quando se trata da família das árvores, dificilmente teremos grafos que são determinados pelo espectro. Este resultado se torna claro ao longo do trabalho, sobre o que temos até hoje demonstrado de grafos que são determinados pelo espectro.

Vejamos na Figura 3.1 um exemplo clássico de grafos coespectrais em relação à matriz de adjacência.

Os grafos da Figura 3.1 possuem o mesmo polinômio característico  $p(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$ , e, portanto, o mesmo espectro  $\text{spec}(A) = \{0^{(3)}, 2^{(2)}\}$ , mas, apesar disto, não são isomorfos. Um dos motivos é pelo fato de que o primeiro possui vértices com grau máximo igual a dois e o segundo possui um vértice de grau quatro,



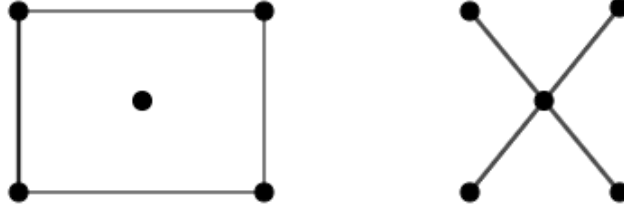


Figura 3.1: Exemplo de Grafos Coespectrais

podemos observar também que um contém um ciclo de comprimento 4 e o outro não contém ciclos.

Mas como podemos mostrar que dois grafos são coespectrais? Uma das maneiras mais utilizadas é mostrando que suas respectivas matrizes de adjacência são *similares*:

**Definição 8.** *Uma matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é similar a uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se existe uma matriz  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não singular, ou seja, que admite matriz inversa, tal que  $B = S^{-1}AS$ .*

Desta definição, vamos direto ao seguinte Teorema, que nos mostra que se os grafos possuírem matrizes similares então eles são coespectrais:

**Teorema 6.** *[32] Sejam  $A$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Se  $B$  é similar a  $A$ , então os polinômios característicos  $p_A(x)$  de  $A$  e  $p_B(x)$  de  $B$  são iguais.*

Deste Teorema, decorre o corolário de que, se  $A$  e  $B$  são similares, então possuem o mesmo polinômio característico, logo possuem os mesmos autovalores e, então, possuem o mesmo espectro: são coespectrais.

**Corolário 1.** *[32] Se  $A$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são similares, então  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores, contando suas multiplicidades.*

Podemos verificar a demonstração destes Teorema e Corolário em [32]. Encontramos no decorrer da história diversos estudos que apresentam a construção

de pares de grafos coespectrais. Dentre eles citamos: Godsil [16], Haemers [20, 21], Schwenk [30] e Souza [32].

Em particular, Schwenk [30] mostrou que, na incerteza coespectral (Definição 1 na página 4), para  $n$  suficientemente grande, quase toda árvore  $T$  com  $p$  vértices tem um par coespectral.

Mostraremos a seguir um Lema importante sobre grafos coespectrais.

**Lema 1.** [34] *Para matrizes  $n \times n$   $A$  e  $B$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  *$A$  e  $B$  são coespectrais.*
2.  *$A$  e  $B$  tem o mesmo polinômio característico.*
3.  *$tr(A^i) = tr(B^i)$  para  $i = 1, \dots, n$ .*

## 4 GRAFOS DETERMINADOS PELO SEU ESPECTRO - *SURVEY*

Neste capítulo iremos apresentar alguns grafos que foram determinados pelo espectro ao longo da história, mas sem mostrar as demonstrações que tornam isto verdadeiro. Por tal motivo, nomeamos o capítulo de *survey*.

Começaremos mostrando alguns grafos específicos:

### Caminho

Sabemos por [6, 34, 37] que o caminho  $P_n$ , com  $n$  vértices, é determinado pelo espectro da matriz de adjacência. Já por [11], sabemos que o complemento do caminho é determinado pelo espectro da matriz de adjacência.

### Grafos Fortemente Regulares

Agora vejamos os *Grafos Fortemente Regulares*, começando por sua definição: Um Grafo  $G$  é *Fortemente Regular* se é um Grafo não nulo e não completo com parâmetros  $(n, k; a, c)$  tais que:  $G$  é  $k$ -regular ( $k > 1$ ), com vértices  $n > 3$ , todo o par de vértices adjacentes tem  $a$  vértices adjacentes em comum e todo o par de vértices não adjacentes tem  $c$  vértices adjacentes em comum. O ciclo com 5 vértices,  $C_5$ , é um grafo fortemente regular com parâmetros  $(5, 2; 0, 1)$ :

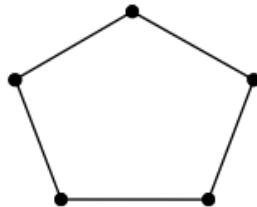


Figura 4.1:  $C_5$

Sabemos por [6] que o espectro de um grafo  $G$  determina se  $G$  é fortemente regular: se um grafo regular tem espectro  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$  então ele é fortemente regular se, e somente se,  $|\theta_i|2 \leq i \leq n = 2$ .

Segundo [6] existem muitas famílias de Grafos fortemente regulares que não são DS. São DS se, segundo [6, 34],  $n \neq 8$  e  $m \neq 4$  os grafos  $aK_\nu, L(K_n)$  (grafo triangular  $T(n)$ ) e  $L(K_{m,n})$  e seus complementos são grafos fortemente regulares DS. Para os casos em que  $n = 8$  e  $m = 4$  temos que o grafo  $L(K_{4,4})$  tem um par coespectral com *Shrikhande graph*, e existem três pares coespectrais com  $L(K_8)$ , os chamados *Chang graphs*.

Abaixo temos alguns grafos fortemente regulares, com seus complementos, que são DS segundo Haemers [6]:

| $\nu$ | Nome                   |
|-------|------------------------|
| 5     | Pentágono              |
| 13    | Paley                  |
| 17    | Paley                  |
| 16    | Folded 5-Cube          |
| 27    | $GQ(2,4)$              |
| 520   | Hoffman-Singleton      |
| 56    | Gewirtz                |
| 77    | $M_{22}$               |
| 81    | Brouwer-Haemers        |
| 100   | Higman-Sims            |
| 105   | flags of $PG(2,4)$     |
| 112   | $GQ(3,9)$              |
| 120   | $001\dots inS(5,8,24)$ |
| 126   | Goethals               |
| 162   | local McLaughlin       |
| 176   | $01\dots inS(5,8,24)$  |
| 275   | McLaughlin             |

Tabela 4.1: Grafos Fortemente Regulares que são DS

### Odd Sun Graphs

Agora vejamos um outro tipo de grafo: *Odd Sun Graphs*. Ele é um grafo obtido anexando um vértice pendente a cada vértice de ciclo ímpar. Veja na Figura abaixo o  $Sun_5$ , no qual são anexados 5 vértices pendentes.

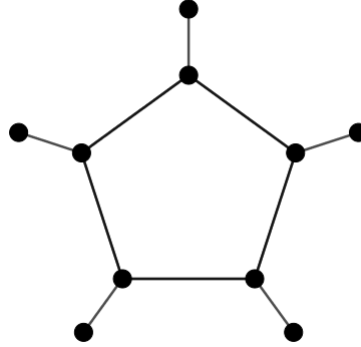


Figura 4.2: Sun Graph  $Sun_5$

Boulet [3] provou em 2009 que o Sun Graph ímpar é determinado pelo espectro, bem como os grafos  $CBSun_{p,q}$ ,  $p$  ímpar. As demonstrações destes Teoremas se encontram no artigo de Boulet.

### Pineapple Graph

Agora, vejamos o *Pineapple Graph*: Segundo [33] o Pineapple Graph  $K_p^2$  é determinado pelo espectro.

### Multicone Graph

Um *Multicone Graph* é definido pela junção (*join* denotado por  $\nabla$ ) de um *clique* e um grafo regular. Seja  $G$  um grafo  $G = (V, E)$ , um *clique* é um subconjunto de vértices  $V_1 \in V$ , tal que para cada dois vértices em  $V_1$ , existe uma aresta os conectando, isto é, é um subgrafo induzido de  $G$ .

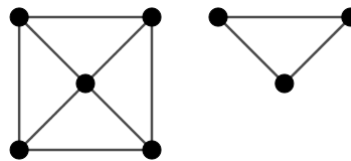


Figura 4.3: A esquerda o Grafo  $G$  e a direita um clique de  $G$

**Corolário 2.** [42] *Seja  $G$  um grafo. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1.  $G \approx K_w \nabla CP(n)$ ;
2.  $spec(G) = spec(K_w \nabla CP(n))$ ;
3.  $spec(L(G)) = spec(L(K_w \nabla CP(n)))$ ;

Sabemos por [1] que: 1) qualquer grafo coespectral com um Multicone Graph  $K_1 \nabla P$  é isomorfo com  $K_1 \nabla P$ . 2) Multicone Graph  $K_w \nabla P$  é DS.

Sabemos também, mas por [42], que: 1) Qualquer grafo coespectral com um Multicone Graph  $K_1 \nabla CP(n)$  é DS. 2) Multicone Graph  $K_w \nabla CP(n)$  é DS. 3) Multicone Graph  $K_w \nabla C_4 = K_w \nabla CP(2)$  são DS.

### **Lollipop Graph**

Segundo [19] o Lollipop Graph  $L(p, k)$ , com  $k$  ímpar, é determinado pelo espectro. E segundo [4] o Lollipop Graph  $L(p, k)$ , com  $k$  par, é determinado pelo espectro. Ou seja, todos Lollipop Graphs são DS.

### **$Z_n$**

De acordo com [31] a família  $Z_n$ , anel dos inteiros módulo  $n$ , é caracterizada pelo espectro da matriz de adjacência. Além disto, estes mesmos autores mostraram que o grafo  $Z_{n_1} + Z_{n_2} + \dots + Z_{n_k}$  é determinado pelo espectro da matriz de adjacência, quando todos  $n_1, n_2, \dots, n_k$  são maiores que 1. Encontramos a demonstração deste Teorema em [31].

### **T-Shape Trees**

Van Dam e Haemers em [34] fez a pergunta que iremos responder neste momento "quais árvores são DS"? Encontramos esta resposta em [40].

Um *T-Shape* é uma árvore com exatamente em um de seus vértices grau máximo 3. Denotaremos por  $T(l_1, l_2, l_3)$  a única T-shape tree tal que  $T(l_1, l_2, l_3) - v = P_{l_1} \cup P_{l_2} \cup P_{l_3}$  no qual  $P_{l_i}$  é um caminho com  $l_i$  vértices ( $i = 1, 2, 3$ ), e  $v$  o vértice de grau 3.

Segundo [40], seja  $G = T(l_1, l_2, l_3)$  com  $(l_1 \leq l_2 \leq l_3)$  um grafo. Então  $G$  é unicamente determinada pelo seu espectro se  $(l_1, l_2, l_3) \neq (l, l, 2l - 2)$  para qualquer inteiro positivo. Sugerimos a leitura da demonstração em [40], por tratar de uma demonstração que necessita algumas técnicas envolvendo propriedades de autovalores de grafos.

Ainda segundo [40] temos um conjectura que diz: Seja  $G = T(l_1, l_2, l_3)$  com  $(l_1 \leq l_2 \leq l_3)$  um grafo. Então o complemento de  $G$  é unicamente determinada pelo seu espectro se  $(l_1, l_2, l_3) \neq (l, l, 2l - 2)$  para qualquer inteiro positivo  $a \geq 2$ .

### **Grafos Regulares**

Segundo [6, 34, 37, 41] para grafos regulares, ser DS é equivalente para as matrizes de Adjacência, Laplaciana, matriz de Adjacência do Complemento e Laplaciana sem sinal.

### **Grafos Completos, Bipartidos e o Ciclo**

De acordo com [6, 37] os grafos completos, bipartidos e o ciclo são caracterizados pelo espectro. Segundo [24], se  $m$  e  $n$  são inteiros primos e distintos, então o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  é DS. E, segundo [24], se  $m$  e  $n$  são inteiros primos e distintos tal que  $\sqrt{mn}$  é inteiro, então o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  não é DS.

### **Grafos Distância-Regulares**

Agora, vamos estudar um pouco sobre grafos distância-regulares, através de sua definição encontrada em [36]: Um Grafo conexo  $G$  com diâmetro  $D$  é chamado

de *distância-regular* se existem constantes  $C_i, a_i, b_i$  tais que, para todo  $i = 0, 1, \dots, D$ , e para todos vértices  $v$  e  $w$  a uma distância  $i = d(v, w)$ , entre os vértices adjacentes de  $w$ ,  $c_i$  está a uma distância  $i - 1$  de  $v$ ,  $a_i$  a uma distância  $i$  e  $b_i$  a uma distância  $i + 1$ .

Em geral, de acordo com Van Dam e Koolen [5], grafos distância-regular não são determinados pelo espectro. Segundo [6] os seguintes Grafos Distância-Regular são DS: polígonos  $C_n$ , grafo bipartido completo menos o matching, grafo obtido removendo no máximo cinco arestas de grafos DS, grafos ímpares e *Folded*( $2d + 1$ ) - *cubes*.

**Teorema 7.** [6] *Se  $\Gamma$  é um grafo distância-regular com diâmetro  $d$  e circunferência  $g$  satisfazendo uma das seguintes propriedades, então todo grafo coespectral com  $\Gamma$  é também distância-regular, com os mesmos parâmetros que  $\Gamma$ :*

1.  $g \geq 2d - 1$ .
2.  $g \geq 2d - 2$  e  $\Gamma$  é Bipartido.
3.  $g \geq 2d - 2$  e  $c(d - 1)d_d < -(c^{d-1} + 1)(\theta_1 + \dots + \theta_d)$ .

Vemos na Tabela 4.2 alguns grafos Distância-Regulares que são DS segundo Haermers [6].

Vemos na Tabela 4.3 alguns grafos Distância-Regulares Bipartidos que são DS segundo Haermers [6].

Vemos na Tabela 4.4 alguns grafos Distância-Regulares Não-Bipartidos que são DS segundo Haermers [6].

Para finalizar esta parte sobre grafos-distância regulares, deixamos como curiosidade que se tem observado por Haemers e autores [35], que o complemento da união disjunta de grafos bipartidos e completos é sempre DS, porém ainda não se há nada que comprove esta teoria.



| $\nu$ | Nome                                   |
|-------|--|
| 12    | Icosaedro                              |
| 14    | Heawood; $GH(1, 2)$                    |
| 14    | $IG(7, 4, 2)$                          |
| 15    | $L(\text{Petersen})$                   |
| 21    | $GH(2, 1)$                             |
| 22    | $IG(11, 5, 2)$                         |
| 22    | $IG(11, 6, 3)$                         |
| 26    | $GH(1, 3)$                             |
| 26    | $IG(13, 9, 6)$                         |
| 36    | Sylvester                              |
| 42    | antipodal 6-cover of $K_7$             |
| 42    | $GH(1, 4)$                             |
| 42    | $IG(21, 16, 12)$                       |
| 52    | $GH(3, 1)$                             |
| 57    | Perkel                                 |
| 62    | $GH(1, 5)$                             |
| 62    | $IG(31, 25, 20)$                       |
| 63    | antipodal 7-cover of $K_9$             |
| 105   | $GH(4, 1)$                             |
| 114   | $GH(1, 7)$                             |
| 114   | $IG(57, 49, 42)$                       |
| 146   | $GH(1, 8)$                             |
| 146   | $IG(73, 64, 56)$                       |
| 175   | $L(\text{HoSi})$                       |
| 186   | $GH(5, 1)$                             |
| 456   | $GH(7, 1)$                             |
| 506   | grafo $M_{23}$                         |
| 512   | Grafo coconjunto de $\mathcal{G}_{21}$ |
| 657   | $GH(8, 1)$                             |
| 729   | Grafo coconjunto de $\mathcal{G}_{12}$ |
| 819   | $GH(2, 8)$                             |
| 2048  | Grafo coconjunto de $\mathcal{G}_{23}$ |
| 2457  | $GH(8, 2)$                             |

Tabela 4.2: Grafos distância-regulares DS com diâmetro 3

## Grafo Triangular

Veamos um novo tipo de grafo: o grafo triangular  $T(n)$ . O grafo triangular  $T(n)$  pode ser definido como  $T(n) \simeq L(K_n)$  e é caracterizado pelo espectro, segundo [9], se  $n \neq 8$ . Se  $n = 8$  temos exatamente três grafos excepcionais.

## Line Graph

O *Line graph*, segundo [9], denominado por  $L(G)$  de um grafo indireto  $G$  sem loops ou arestas múltiplas é o grafo cujo conjunto de vértices corresponde 1 para 1 com o conjunto de arestas do grafo  $G$ , com dois vértices de  $L(G)$  adjacentes se, e somente se, as arestas correspondentes em  $G$  tem um vértice em comum.

Consideramos agora um grafo linha de um grafo regular completo e bipartido:  $L(K_{n,n}) = K_n + K_n$ , então, segundo [9], ao menos que  $n = 4$ ,  $L(K_{n,n})$  é caracterizado pelo seu espectro. Se  $n=4$  há exatamente um grafo excepcional.

## BIBD

Descobrimos em [9] que o único grafo conexo e bipartido com três autovalores distintos é um grafo completo e bipartido. Existe, no entanto, muitos grafos bipartidos com quatro autovalores distintos e, diferente do caso de três autovalores, nem todos são caracterizados pelo espectro. Para construir os que são definiremos primeiramente o que é BIBD (*balanced incomplete block design*)

**Definição 9.** [9] Um BIBD consiste em  $v$  elementos e  $b$  subconjuntos destes elementos chamados de blocos tais que:

1. Cada elemento está contido em  $r$  blocos;
2. Cada bloco contém  $k$  elementos;
3. Cada par de elementos é simultaneamente contido em  $\lambda$  blocos.

Os inteiros  $v, b, r, k, \lambda^*$  são chamados de parâmetros do design. No caso particular em que  $r = k$  o design é chamado de simétrico.

**Definição 10.** [9] Dado um BIBD, o grafo design é formado da seguinte maneira: os  $b + v$  vértices do grafo correspondem aos blocos e elementos do design com dois vértices adjacentes se, e somente se, um corresponde a um bloco e o outro corresponde a um elemento contido naquele bloco. Então, o grafo é bipartido com cada vértice de grau  $r$  ou  $k$  se corresponde a um elemento ou um bloco.

Utilizando essas definições e segundo [9], temos que o grafo de um design simétrico é caracterizado pelo seu espectro. Também temos segundo [9], que a menos que  $v, k, \lambda^* = 4, 3, 2$ , o grafo linha de um BIBD simétrico é caracterizado pelo seu espectro. Se  $v, k, \lambda^* = 4, 3, 2$  há exatamente um grafo excepcional. Se  $r + k > 18$ , então o grafo linha de um BIBD com parâmetros  $v, b, r, k, 1$  é caracterizado pelo seu espectro.

### Produto de Grafos

E por último, temos a lista de grafos que surgem através de um produto entre grafos que são determinados pelo espectro, segundo [24]:

- Os produtos  $K_n \circ k_2, k_n \times k_2, k_n \otimes k_2$  são determinados pelo espectro
- Seja  $G$  um grafo bipartido  $k$ -regular de ordem  $2m$ . Se  $k=2, m-1, m$ , então o produto  $G \times K_2$  é DS.
- O produto  $C_n \times K_2$  é determinado pelo espectro.
- O grafo completo e bipartido  $K_{m,n}$  é DS se, e somente se,  $K_{m,n} \times K_2$  é DS.
- O produto  $K_{m,n} \times K_2$  é DS se, e somente se, para qualquer inteiro  $k$ , com  $m < k < n$ ,  $k$  não é um fator de  $mn$ .

| $\nu$ | Nome                       |
|-------|----------------------------|
| 18    | Pappus; Biaff(3)           |
| 30    | Tutte's 8-cage; $GO(1, 2)$ |
| 32    | Biaff(4)                   |
| 50    | Biaff(5)                   |
| 80    | $GO(1, 3)$                 |
| 98    | Biaff(7)                   |
| 126   | $GD(1, 2)$                 |
| 128   | Biaff(8)                   |
| 170   | $GO(1, 4)$                 |

Tabela 4.3: Grafos distância-regulares Bipartidos DS com diâmetro maior que 4

| $\nu$ | Nome                   |
|-------|------------------------|
| 20    | Dodecaedro             |
| 28    | Coxeter                |
| 45    | $GO(2, 1)$             |
| 102   | Biggs-Smith            |
| 160   | $GO(3, 1)$             |
| 189   | $GD(2, 1)$             |
| 330   | Grafo $M_{22}$         |
| 425   | $GO(4, 1)$             |
| 990   | Ivanov-Ivanoc-Faradjev |

Tabela 4.4: Grafos distância-regulares Não-Bipartidos DS com diâmetro maior que

4

## 5 GRAFOS DETERMINADOS PELO SEU ESPECTRO

Neste capítulo apresentamos alguns grafos relevantes que são determinados pelo espectro e as demonstrações que tornam este fato verdadeiro. Apresentamos também os autores responsáveis pelo estudo de cada um dos grafos apresentados, juntamente com as principais ideias de cada demonstração, como por exemplo, utilizar as invariantes espectrais de um grafo e o Teorema do Entrelaçamento.

### 5.1 Grafo Completo, Bipartido e Ciclo

Vamos iniciar esta seção com uma proposição que nos diz que estas três famílias de grafos são determinadas pelo espectro da matriz de adjacência:

**Proposição 2.** [6, 37] *O grafo completo, o grafo bipartido completo  $K_{m,m}$  e o ciclo são DS.*

A estratégia utilizada pelo autor para demonstrar esta proposição é apresentar as arestas e vértices de cada um dos grafos (Teorema 3), invariantes dos grafos reconhecidas na matriz de adjacência, mostrando, através da regularidade destes grafos, que um grafo regular só pode ser coespectral com outro grafo regular.

*Demonstração.* [6] Um grafo coespectral com  $K_n$  necessita ter  $n$  vértices e  $\frac{n(n-1)}{2}$  arestas e, portanto por definição de  $K_n$  e por que um grafo regular não pode ser coespectral com com grafo não regular [35], é igual a  $K_n$ . O mesmo acontece com um grafo bipartido completo, isto é, um grafo coespectral com  $K_{m,m}$  precisa ser

também regular e bipartido com  $2m$  vértices e  $m^2$  arestas, então é isomorfo a  $K_{m,m}$ . Um grafo coespectral a  $C_n$  é 2-regular com circunferência  $n$ , então é igual a  $C_n$ , portanto todos são determinados pelo seu espectro.  $\square$

Vamos agora a outra proposição sobre outros tipos de grafos DS:

**Proposição 3.** [6, 19, 34] *A união disjunta de  $k$  grafos completos,  $K_{m_1} + \dots + K_{m_k}$ , é DS, com respeito à matriz de adjacência.*

*Demonstração.* [6]

O espectro da matriz de adjacência  $A$  de qualquer grafo coespectral com  $K_{m_1} + \dots + K_{m_k}$  é igual a  $\{[m_1 - 1]^1, \dots, [m_k - 1]^1, [-1]^{n-k}\}$ , no qual  $n = m_1 + \dots + m_k$ . Isto significa que  $A + I$  é positivo e semi-definido de posto  $k$  e, portanto,  $A + I$  é a matriz de produtos internos de  $n$  vetores em  $\mathbb{R}^k$ . Todos esses vetores são unitários, e os produtos internos são 0 ou 1. Assim, dois desses vetores coincidem ou são ortogonais. Isto implica que os vértices podem ser ordenados de tal forma que  $A + I$  seja uma matriz bloco diagonal com todos os blocos diagonais iguais a 1. Os tamanhos desses blocos são autovalores diferentes de zero de  $A + I$ .  $\square$

## 5.2 Caminho

No ano de 2002 foi demonstrado por Edwin R. van Dam e Wille H. Haemers [34] que o caminho é determinado pelo espectro da matriz de adjacência. Neste mesmo ano, Haemers e Michael Doob [11], mostraram que o complemento do caminho com  $n$  vértices é também determinado pelo espectro da matriz de adjacência.

Veremos primeiramente temas iniciais que abordam conceitos que serão necessários para a demonstração principal desta seção, que é demonstrar que o caminho é determinado pelo seu espectro.

**Lema 2.** [25] *Seja  $P_n$  o caminho com  $n$  vértices. Os autovalores de  $P_n$  são autovalores simples  $\lambda_i = 2\cos(\frac{\pi i}{n+1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que possui um autovetor  $w(j) = (w_i)$  cuja  $i$ -ésima coordenada é definida por  $w_i = \text{sen}(\frac{\pi ij}{n+1}) \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

**Lema 3.** [14] *O Ciclo  $C_n$  tem maior autovalor igual a 2.*

**Lema 4.** [31, 34] *Em um grafo sem 4-ciclos, o número de passeios de comprimento 4 é igual a duas vezes o número de arestas mais quatro vezes o número de caminhos induzidos de comprimento 2.*

**Teorema 8.** [6, 37, 34] *O caminho  $P_n$ , com  $n$  vértices, é determinado pelo espectro da matriz de adjacência.*

A estratégia utilizada pelo autor [34] para demonstrar este Teorema é supor por absurdo que o caminho tem um par coespectral, verificar quais os possíveis grafos candidatos para serem esses pares coespectrais através dos autovalores dele e, pelo Teorema do Entrelaçamento, mostrar que estes autovalores desclassificam os candidatos, restando apenas o próprio caminho.

*Demonstração.* Os autovalores de  $P_n$  são  $\lambda_i = 2\cos(\frac{\pi i}{n+1})$ , e, portanto, como cosseno admite no máximo valor 1, temos que  $\lambda_1 < 2$ .

Suponhamos por absurdo que um grafo  $\psi$  é coespectral com  $P_n$  com respeito ao espectro da matriz de adjacência. Então  $\psi$  também tem  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas, como já mostrado no Teorema 3.

Como  $\psi$  pode ser conexo ou desconexo, vamos supor que seja desconexo. Se  $\psi$  tiver um ciclo, ele tem um subgrafo induzido  $C_k$  e tem maior autovalor menor ou igual a 2, o que, pelo Teorema do Entrelaçamento, não pode ocorrer, visto que o maior autovalor de  $P_n$  é menor que 2. Portanto  $\psi$  não tem ciclos e tem  $n - 1$  arestas, logo é conexo.

Suponhamos agora que  $\psi$  tenha um vértice de grau 4, isto é, tenha a estrela  $K_{1,4}$  como subgrafo induzido. Vamos calcular os autovalores desta estrela.

Sabemos que a matriz de adjacência da estrela  $K_{1,4}$  é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

Seu respectivo polinômio característico é dado por  $p(\lambda) = 4\lambda^3 - \lambda^5$ . Então seu espectro é  $\text{spec}(A) = \{-2, 2, 0^{(3)}\}$ . Portanto, seu maior autovalor é 2. Então  $\psi$  não tem  $K_{1,4}$  como subgrafo induzido pelo Teorema do Entrelaçamento. Portanto, nenhum vértice de  $\psi$  pode ter grau maior ou igual a 4 e, então, todos seus vértices têm grau menor ou igual a 3.

Suponhamos que  $\psi$  tenha, no mínimo, dois vértices de grau 3, como mostrado na Figura abaixo:



Figura 5.1: Grafo com dois vértices de grau 3

Se  $\psi$  tem no mínimo dois vértices de grau 3, então  $\psi$  possui um subgrafo induzido  $\psi'$ , com apenas dois vértices de grau 3, formado por um caminho  $P_k$ ,  $k \geq 2$



com duas folhas em cada extremidade. Seja  $A = A(\psi')$  a matriz de adjacência de  $\psi'$ . Notamos que, como cada extremidade de  $P_k$  possui duas folhas, tais extremidades serão dois vértices de grau 3. Afirmamos que o vetor  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+4})$  dado por

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é folha para } 1 \leq i \leq k+4 \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.1)$$

é autovetor de  $A$  associado a  $\lambda = 2$ . De fato, quando efetuamos o produto de  $A$  por  $\vec{x}$ , encontramos as seguintes possibilidades:

- i) Se  $v_i$  for uma folha, sua única adjacência será algum vértice  $v_j$  de grau 3 e, portanto, temos  $A_i\vec{x} = x_j = 2 = 2x_i$ .
- ii) Se  $v_i$  for um vértice de grau 2, suas duas adjacências são vértices  $v_j$  e  $v_l$ , que não são folhas. Ou seja,  $A_i\vec{x} = x_j + x_l = 2 + 2 = 2x_i$ .
- iii) Se  $v_i$  for um vértice de grau 3, então é adjacente a duas folhas e outro vértice  $v_j$  de grau 2. Logo  $A_i\vec{x} = 2 \cdot 1 + x_j = 2 + 2 = 2x_i$ . Assim concluímos que  $A\vec{x} = 2\vec{x}$ .

Então  $\psi$  tem um subgrafo induzido no qual seu maior autovalor é 2. Mas, pelo Teorema do Entrelaçamento  $\psi$  não pode ter um subgrafo induzido com maior autovalor igual a 2. Portanto,  $\psi$  tem no máximo um vértice de grau três.

Suponhamos que seja movido um ramo deste vértice de grau três para o  $n$ -ésimo vértice de  $\psi$ . Então, tínhamos um vértice de grau 3 que se tornou de grau 2, fazendo com que o grafo tenha no máximo vértices de grau 2, tornando  $\psi$  em  $P_n$ . Como  $\psi$  e  $P_n$  são coespectrais, esta operação não pode mudar o número de passeios de comprimento 4, o que não acontece, segundo Lema 4. Portanto  $\psi$  não tem vértice de grau 3 e, portanto, é isomorfo a  $P_n$ .  $\square$

### 5.3 Grafo $Z_n$

Consideramos  $Z_n$ , o anel dos inteiros módulo  $n$ .

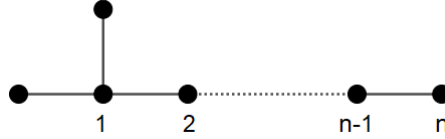


Figura 5.2:  $Z_n$

**Teorema 9.** [26] *Não há duas starlike trees não-isomorfas que sejam coespectrais com relação às suas matrizes de adjacência.*

**Teorema 10.** [31] *O grafo  $Z_n$  é determinado pelo espectro da matriz de adjacência.*

*Demonstração.* Os autovalores da matriz de adjacência de  $Z_n$ , segundo [9], são 0 e  $2\cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Então, como cosseno admite no máximo valor 1, temos que  $\lambda_1(Z_n) < 2$ . Para realizar esta demonstração, vamos separar  $Z_n$  em dois casos: se  $n = 1$  ou se  $n > 1$ .

Para  $n = 1$ , teremos que o grafo  $Z_n$  é igual a  $P_3$  e, como já mostrado anteriormente, o caminho é determinado pelo espectro. Portanto, para  $n = 1$ ,  $Z_n$  é determinado pelo espectro.

Vejamos agora para  $n > 1$ . Suponhamos por absurdo que exista um grafo  $T$  coespectral com  $Z_n$  com respeito ao espectro da matriz de adjacência. Portanto,  $T$  é um grafo com  $n + 2$  vértices e  $n + 1$  arestas.

Sabemos que  $T$  pode ser conexo ou desconexo, vamos supor que seja desconexo. Se  $T$  tiver um ciclo, ele tem um subgrafo induzido  $C_k$  e, pelo Teorema do Entrelaçamento, tem maior autovalor menor ou igual a 2, o que não pode ocorrer,

visto que o maior autovalor de  $Z_n$  é menor que 2. Portanto  $T$  não tem ciclos e tem  $n + 1$  arestas, logo é conexo.

Então  $T$  é uma árvore. Suponhamos agora que  $T$  tenha um vértice de grau 4, isto é, tenha a estrela  $K_{1,4}$  como subgrafo induzido. Seu espectro é  $\{-2, 2, 0^{(3)}\}$ , como já calculado anteriormente. Portanto, seu maior autovalor é 2. Então  $T$  não tem  $K_{1,4}$  como subgrafo induzido, pois pelo Teorema do Entrelaçamento, os autovalores dos subgrafos induzidos de  $T$  devem ter autovalores menores que 2. Portanto, nenhum vértice de  $T$  pode ter grau maior ou igual a 4 e, então, todos seus vértices têm grau menor ou igual a 3.

Como o caminho é determinado pelo espectro e  $T$  é coespectral com  $Z_n$ ,  $T$  não é um caminho. Então  $T$  é uma árvore *starlike* com vértice de maior grau 3. Logo, pelo Teorema 9,  $T$  é isomorfo a  $Z_n$ .  $\square$

## 5.4 Lollipop Graph $L(p, k)$ , com $k$ ímpar

Um *lollipop graph*  $L_{p,k}$  é obtido *anexando* um ciclo  $C_p$ , com  $p \geq 3$  vértices, a um vértice pendente de um caminho  $P_{k+1}$ , com  $k = 1 \geq 2$  vértices. Por exemplo, o Lollipop Graph  $L_{p,0}$  é um ciclo  $C_p$ . Vejamos na imagem abaixo o exemplo do Lollipop Graph  $L_{3,1}$ :

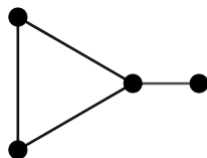


Figura 5.3: Lollipop Graph  $L_{3,1}$

Em 2006, Haemers, Liu e Zhang [19] mostraram em seu artigo que o lollipop graph  $L(p, k)$ , com  $k$  ímpar, e seu complemento, são determinados pelo seu espectro e ainda era desconhecido se todos Lollipop Graphs eram DS. Porém, em 2008 foi mostrado por Boulet e Jouve [4] que todos lollipop graphs são DS, baseados

em um método de contar caminhos fechados. Não falaremos deste método neste trabalho, mais informações são encontradas em [4]. Ao invés disto, escolhemos uma demonstração para apresentar nesta seção: o lollipop graph  $L(p, k)$ , com  $k$  ímpar, é DS. Para isto, utilizaremos o Lema e o Teorema a seguir.

**Lema 5.** [19] *O segundo maior autovalor de um lollipop Graph é estritamente menor que 2.*

**Teorema 11.** [4, 19] *Não há lollipop graphs coespectrais que não sejam isomorfos.*

A demonstração deste Teorema é encontrada nos dois artigos [4] e [19], porém em [4] é mostrada em uma prova mais sucinta, utilizando o método de contar caminhos fechados.

**Teorema 12.** [19] *O lollipop graph  $L(p, k)$ , com  $k$  ímpar, é determinado pelo espectro.*

A estratégia utilizada pelo autor para realizar a demonstração deste Teorema é utilizar o número de vértices, arestas e caminhos fechados (Teorema 3)(chamados de  $t$ -tour pelo autor) para a suposição da existência de um grafo coespectral com o lollipop e também o Teorema do Entrelaçamento, Teorema 2, para supor que existe ciclo, que também é determinado pelo espectro.

*Demonstração.* [19]

Seja  $G$  um grafo coespectral com  $L = L_{n,k}$ , com  $k$  ímpar. Então  $G$  tem o mesmo número de vértices, arestas e caminhos fechados de comprimento  $t$  que  $L$ . Detonamos estes caminhos fechados de  $t$ -tour. Sabemos pelo lema anterior que o segundo maior autovalor de  $G$  é menor que 2. Então, se  $G$  for desconexo, o

Teorema do Entrelaçamento, Teorema 2, nos diz que apenas um componente pode ter autovalor 2 e, portanto, contém o ciclo.

Vamos mostrar por indução em  $i$  ( $1 \leq i \leq n - p$ ) que, na verdade,  $G$  é um Lollipop Graph  $L = L_{p+i,p}$  com o vértice pendente substituído por algum grafo em  $n - p - i + 1$  vértices. Para  $i = n - p$  temos que  $G$  é isomorfo a  $L$ .

Base de indução: Caso  $i = 1$  Sabemos que  $G$  têm  $t$ -tours com  $k < p$ ,  $k$  ímpar, que  $G$  tem  $2p$ -tours e um ciclo  $C$  de comprimento  $p$  e  $G$  e  $L$  têm o mesmo número de  $(p+2)$ -tours. Em  $L$  existem dois tipos de  $(p+2)$ -tours: ao redor do ciclo em que uma aresta é usada três vezes, e passeios em torno de  $C$  que vão um passo para cima e para baixo na *cauda* do Lollipop Graph. Então  $G$  tem o mesmo número de  $(p+2)$ -tours.

Podemos observar que  $G$  tem os  $2p^2(p+2)$ -tours em torno de  $C$ . Se  $C$  é um componente, então todos os outros componentes não tem ciclos e, portanto,  $G$  não tem outros  $(p+2)$ -tours: contradição. Portanto, deve haver pelo menos uma aresta entre  $C$  e os outros vértices de  $G$ . Se houver mais de uma aresta,  $G$  tem muitos  $(p+2)$ -tours, portanto existe exatamente uma dessas arestas.

Caso  $i \geq 2$ . Nossa hipótese de indução é que  $G$  contém  $L_{p+i-1,p}$ , no qual apenas o vértice pendente, denotado por  $v$ , pode ser incidente com outras arestas de  $G$ . Agora,  $G$  tem o mesmo número de  $(p+2)$ -tours que  $L$ . É impossível que  $L_{p+i-1,p}$  seja um componente de  $G$ , pois os componentes restantes não tem ciclo. Se  $v$  tem grau 3 ou mais,  $G$  tem mais  $(p+2i)$ -tours do que  $L$ . Portanto  $v$  tem grau 2, o que comprova a afirmação. Então  $G$  é isomorfo a  $H$ .  $\square$

## 5.5 Pineapple Graph $K_p^2$

Obtemos um *pineapple graph*  $K_p^q$  acrescentando  $q$  arestas pendentes a um vértice de um grafo completo  $K_{p,q} \geq 1, p \geq 3$ .

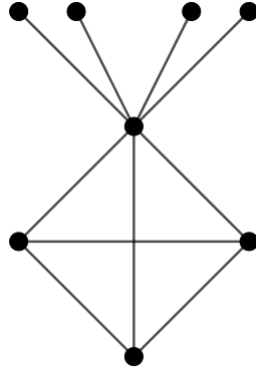


Figura 5.4: Pineapple  $K_4^4$

Sabemos por [33],  $K_p^q$  tem  $n = p + q$  vértices,  $\binom{p}{2} + q$  arestas e  $\binom{p}{3}$  triângulos.

**Proposição 4.** [33] *O polinômio característico  $p(x) = \det(xI - A)$  do pineapple graph  $K_p^q$  é igual*

$$p(x) = x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2))$$

**Lema 6.** [33] *Seja  $G$  um grafo conexo com o menor autovalor maior que  $-2$ . Então, uma das afirmações abaixo acontece:*

1.  $G$  tem sete vértices e  $d_G = 2$ .
2.  $G$  é um line graph de um grafo unicíclico com um ciclo de comprimento ímpar e  $d_G = 4$
3.  $G$  é um line graph generalizado de uma árvore do tipo  $(1, 0, \dots, 0)$  e  $d_G = 4$

Vamos agora aos pineapple graphs que são determinados pelo espectro:

**Teorema 13.** [33] *O pineapple graph  $K_p^2$  é determinado pelo espectro.*

A estratégia utilizada pelo autor para a demonstração deste Teorema é utilizar o número de vértices, arestas e triângulos (invariantes do grafo no Teorema 3) para as possíveis escolhas de um grafo coespectral com o pineapple, e novamente o Teorema do Entrelaçamento 2 para encontrar a contradição.

*Demonstração.* [33] Suponhamos que  $G$  é um grafo coespectral com  $K_p^2$ . Então, por [33],  $G$  tem  $n = p + 2$  vértices,  $\binom{p}{2} + 2$  arestas e  $\binom{p}{3}$  triângulos e, pela Proposição 4, tem polinômio característico:

$$p(x) = x(x + 1)^{p-2}(x^3 - (p - 2)x^2 - x(p + 1) + 2(p - 2))$$

Portanto, segue que  $\lambda_2(G) < 1$ , e  $\lambda_{p+2}(G) > -2$ .

Suponhamos que  $G$  seja desconexo. Se existe dois componentes com ao menos uma aresta, então  $2K_2$  é um subgrafo induzido de  $G$ . Pelo Teorema do Entrelaçamento 2 nos dá que  $1 = \lambda_2(2K_2) < \lambda_2(G) < 1$ , uma contradição. Então apenas uma componente de  $G$  tem arestas. A multiplicidade do autovalor 0 é igual a 1, portanto  $G$  tem dois componentes, um para cada vértice isolado.

O maior componente  $G'$  tem polinômio característico  $\frac{p(x)}{x}$ , então  $d_{G'} = |\frac{p(-2)}{2}|$ . Consequentemente, pelo lema 6,  $G'$  tem sete vértices. Nós sabemos que  $G'$  tem 17 arestas e 20 triângulos. Verifica-se diretamente que há exatamente dez grafos conexos em sete vértices com 17 arestas, e nenhum tem 20 triângulos. Isto prova que  $G$  é conexo e  $d_G = p(-2) = 4$ . Então estamos lidando com o caso (ii) ou (iii) do lema 6.

No caso (ii),  $G$  é um *line graph* de um grafo unicyclo  $H$  com  $p + 2$  vértices. Seja  $v$  um vértice de  $H$  do grau máximo  $K$  e ponha  $\iota = p + 2 - k$ . Quando  $v$  não é um triângulo de  $H$ , toda aresta que não é incidente com  $v$  é incidente com no máximo um vizinho de  $v$ . Então há no mínimo  $\iota(k - 1) - 1$  pares de arestas disjunta em  $H$ . Se  $v$  é um triângulo  $\{u, v, w\}$  então a aresta  $\{v, w\}$  é incidente com  $u$  e  $w$  e disjunto com  $k - 2$  arestas através de  $v$ . Então nós obtemos no mínimo

$\iota(k-1) - 1$  pares de arestas disjuntas em  $H$ . As arestas disjuntas em  $H$  corresponde aos pares dos não adjacentes vértices em  $G$ . Isto implica que  $G$  tem no máximo  $\binom{p+2}{2} - \iota(k-1) - 1$  arestas. Então nós encontramos

$$\binom{p}{2} + 2 \leq \binom{p+2}{2} - \iota(k-1) + 1$$

o que nos dá

$$(\iota - 2)(k - 3) \leq 2$$

Isto implica que  $k \leq 3, k \geq p$ , ou  $(p, q) \in \{5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$ .

Se  $k \leq 3$ , então  $H$  tem no máximo  $\frac{p+2}{2}$  vértices de grau 3. Assim sendo,  $G$  tem no máximo  $1 + \frac{p+2}{2}$  triângulos, logo  $\binom{p}{3} \leq 1 + \frac{p+2}{2}$ , que nos dá  $p \leq 4$ .

O caso em que  $p = 3$  está resolvido em [43], e quando  $p = 4$ ,  $G$  tem 8 arestas e 4 triângulos e sem  $K_4$ , o que é impossível.

Se  $K = p + 1$ , então  $H = K_{p-1}^3$ , portanto  $G$  tem  $\binom{p+1}{2} + 2$  arestas, o que é falso.

Se  $k = p$ , então existe apenas duas formas de criar um ciclo ímpar em  $H$  adicionando duas arestas. Nos dois casos nós obtemos  $H = K_{p-2}^3$  com um vértice pendente anexado num vértice de no máximo grau 2, o que nos leva a mais  $\binom{p}{3}$  triângulos em  $G$ .

Suponhamos  $(p, k) \in \{(5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$ . Nós temos o número máximo de possíveis triângulos em  $G$  se  $H$  consistir em um triângulo com  $k - 2$  arestas pendentes em um vértice do triângulo e  $-k + 1$  arestas pendentes em outro vértice. Em todos três casos  $G$  tem menos triângulos que  $K_2^p$ . Então nós concluímos que não existe grafo coespectral com  $K_2^p$  no caso (ii).



Agora vamos para o caso (iii) do Lema 6.  $G$  é um *line graph* generalizado de uma árvore  $T$  com  $p + 1$  vértices e  $p$  arestas do tipo  $(1, 0, \dots, 0)$ . Seja  $H$  o *line graph* de  $T$ , seja  $v$  o vértice de  $T$  com grau no máximo  $k$ , e defina  $\iota = p + 2 - k$ . Então  $H$  tem no máximo  $\binom{k}{2} + \binom{\iota-1}{2} + 2k$  arestas, e  $G$  tem no máximo  $\binom{k}{2} + \binom{\iota-1}{2}$  arestas, portanto  $\binom{k}{2} + \binom{\iota-1}{2} + 2k \geq \binom{p}{2} + 2$  o que leva a  $(\iota - 4)(k - 1) \geq 0$ . Então  $p = k + 2$ ,  $p = k + 1$ , ou  $p = k$ .

Se  $p = k + 2$ , então mantemos a desigualdade acima, ou seja, as duas arestas de  $T$  que não são incidentes em  $v$  se cruzam. Então  $H$  é a junção de  $K_k$  e um triângulo, com a junção de  $K_k$  com  $P_3$  em um vértice pendente de  $P_3$ . Isto nos leva a sete *line graphs* generalizados do tipo  $(1, 0, \dots, 0)$ , dependendo de qual vértice tem peso 1. Porém, nenhum desses tem  $\binom{P}{3}$  triângulos.

Se  $p = k + 1$ , então  $H$  é um grafo completo  $K_k$  com uma aresta pendente. Agora há três possíveis *line graph* generalizados do tipo  $(1, 0, \dots, 0)$ , mas nenhum desses tem  $\binom{P}{3}$  triângulos.

Se  $p = k$ , então  $T = K_{1,k}$  e  $H = K_k$ . Então temos dois possíveis *line graph* generalizados, mas apenas  $K_2^p$  tem  $\binom{P}{3}$  triângulos. Então  $G = K_p^2$ .

□

## 6 PRODUTOS DE GRAFO

Neste capítulo mostraremos alguns produtos de grafos, dentre eles o produto Kronecker, por  $K_2$  que são determinados pelo seu espectro, através dos estudos de Ke Xiang, Juan YAN, Bao Gang XU e Zhi Ren [24]. Porém, conforme afirmado pelos autores [24] dos resultados, é difícil dar uma resposta exata sobre casos mais gerais. Vamos ao que sabemos de produtos de grafos DS até então, mas, primeiramente, vamos definir todos os produtos que iremos utilizar, começando com o produto cartesiano:

**Definição 11.** *Sejam os grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  tais que  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  são vértices de  $G_1$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  são os vértices de  $G_2$ . O Produto Cartesiano entre  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \circ G_2$ , é o grafo com conjunto de vértices  $V = (V_1 \times V_2)$  e  $(u_1, v_1)$  é adjacente a  $(u_2, v_2)$  se  $u_1$  é adjacente a  $u_2$  em  $G_1$  e  $v_1 = v_2$  em  $G_2$  ou  $v_1$  é adjacente a  $v_2$  em  $G_2$  e  $u_1 = u_2$  em  $G_1$ .*

Vejamos na Figura 6.1 o produto cartesiano entre os grafos  $C_4$  e  $P_2$ :

Vamos agora a definição de Produto Direto:

**Definição 12.** *Sejam os grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  tais que  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  são vértices de  $G_1$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  são os vértices de  $G_2$ . O Produto Direto entre  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $(V_1 \times V_2)$ , é o grafo com conjunto de vértices  $(V_1 \times V_2)$  e  $(u_1, v_1)$  é adjacente a  $(u_2, v_2)$  se  $u_1$  é adjacente a  $u_2$  em  $G_1$  e  $v_1$  é adjacente a  $v_2$  em  $G_2$ .*

Vejamos na Figura 6.2 o produto direto entre os grafos  $C_3$  e  $P_2$ :

Vamos agora a definição de Produto Forte, que é a união entre o Produto Cartesiano e o Produto Direto:

**Definição 13.** *Sejam os grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  tais que  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  são vértices de  $G_1$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  são os vértices de  $G_2$ . O Produto Forte entre  $G_1$  e*

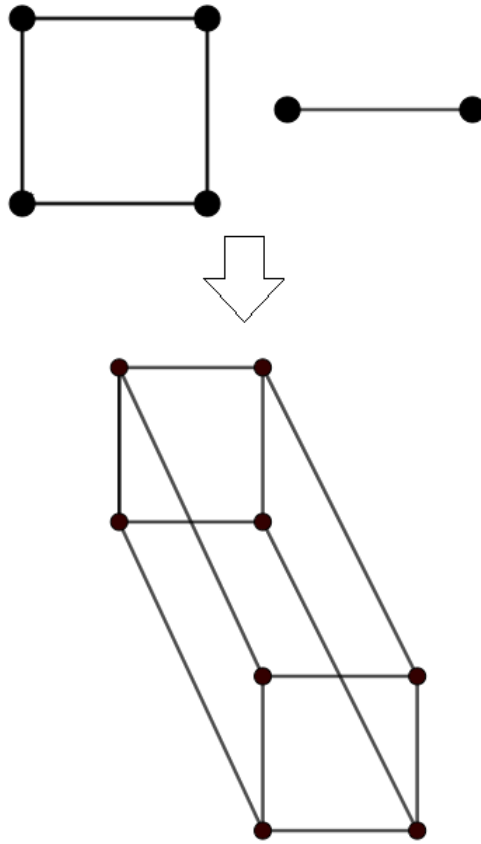


Figura 6.1:  $C_4 \circ P_2$

$G_2$ , denotado por  $G_1 \circ G_2$ , é o grafo com conjunto de vértices  $(V_1 \times V_2)$  e  $(u_1, v_1)$  é adjacente a  $(u_2, v_2)$  se  $u_1$  é adjacente a  $u_2$  em  $G_1$  e  $v_1 = v_2$  em  $G_2$  ou  $v_1$  é adjacente a  $v_2$  em  $G_2$ , se  $u_1$  é adjacente a  $u_2$  em  $G_1$  e  $u_1 = u_2$  em  $G_1$ .

Vejamos na Figura 6.3 o produto forte entre os grafos  $P_3$  e  $P_2$ :

E, por último, vamos ao Produto de Kronecker:

**Definição 14.** Sejam  $A \in \mathcal{F}^{m \times m}$  e  $B \in \mathcal{F}^{n \times n}$ , o produto de Kronecker de  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \otimes B$ , é a matriz quadrada de ordem  $mn$  definida por:

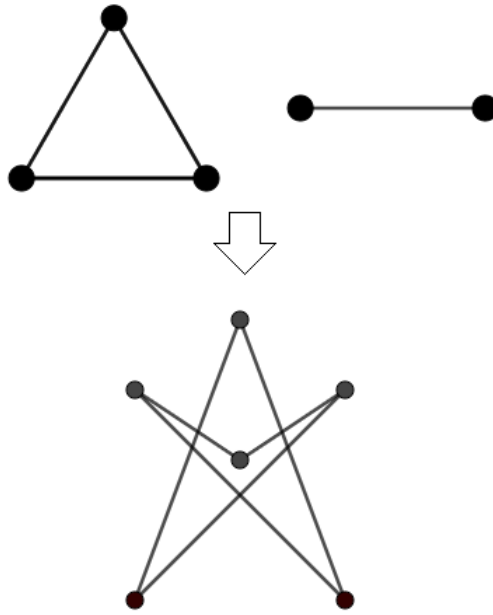


Figura 6.2:  $C_3 \times P_2$

$$A \otimes B = [a_{ij}B]_{i,j=1}^m = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}.$$

O produto à esquerda é definido por:

$$A \otimes B = [Ab_{ij}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{1n} & Ab_{2n} & \cdots & Ab_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vejamos um exemplo do Produto de Kronecker entre as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teremos então:

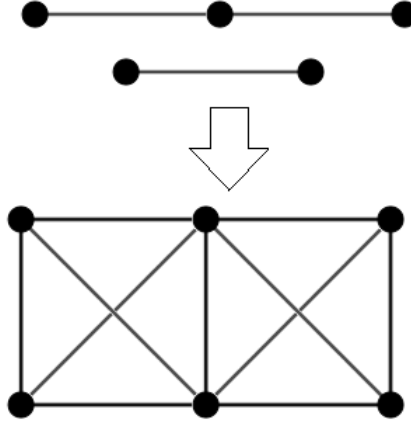


Figura 6.3:  $P_3 \circ P_2$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1. & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3. & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2. & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 4. & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1.0 & 2.1 & 2.0 \\ 1.0 & 1.1 & 2.0 & 2.1 \\ 3.1 & 3.0 & 4.1 & 4.0 \\ 3.0 & 3.1 & 4.0 & 4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora vamos as descobertas dos autores [24]

**Teorema 14.** [24] *Os produtos  $K_n \circ k_2, k_n \times k_2, k_n \otimes k_2$  são determinados pelo espectro.*

**Teorema 15.** [24] *Seja  $G$  um grafo bipartido  $K$ -regular de ordem  $2m$ . Se  $k=2, m-1, m$ , então o produto  $G \times K_2$  é DS.*

*Demonstração.* [24] Para  $k = 1$  a prova encontrada é falsa. Para  $K = 2$ ,  $G$  precisa ser a união de  $t$  mesmos ciclos:  $G = C_{2k_1}, C_{2k_2} + \dots + C_{2k_t}$ , no qual  $k_1 + k_2 + \dots + k_t = m$ . E, segundo a Proposição 3,  $G$  é determinado pelo espectro. Para  $k = m - 1$ ,  $G$  será denotado por  $K_{m,m}^1$  que nada mais é que um grafo bipartido retirando um *matching* de  $K_{m,m}$ . Temos que  $K_{m,m}^1 \times K_2 = 2K_{m,m}^1$ , pois o Produto Kronecker  $G \times K_2$  é um grafo bipartido. Suponhamos que  $H$  seja coespectral com  $K_{m,m}^1 \times K_2$ .

Então  $H$  precisa ser  $(m - 1)$  - *regular* grafo bipartido de ordem  $4m$  com dois componentes conexos. Então podemos assumir que  $H = H_1 + H_2$ , no qual  $H_i$  é um grafo bipartido e  $(m - 1)$  - *regular* de ordem  $2m$ , para  $i = 1, 2$ . Além do mais, temos que  $|V(H_1)| \neq |V(H_2)|$ , então, sem perda de generalidade,  $H_1$  é  $K_{m-1, m-1}$  e seu espectro, segundo [9], é  $m - 1, 0^{(2m - 4)}, -m + 1$ . Então  $K_{m,m}^1$  é isomorfo a  $K_m \times K_2$  pelo 14, então o espectro de  $K_{m,m}^1 \times K_2$  é  $(m - 1)^2, 1^{2m-2}, -1^{2m-2}, (-(m - 1))^2$ , o que é uma contradição visto que  $H_1 + H_2$  é coespectral com  $K_{m,m}^1 \times K_2$ . Já que  $K_n \times K_2$  é DS,  $H$  é isomorfo com  $K_{m,m}^1 \times K_2 = 2K_{m,m}^1$ . A prova para o caso em que  $k = m$  é similar ao caso em que  $k = m - 1$ .  $\square$

**Corolário 3.** [24] *O produto  $C_n \times K_2$  é determinado pelo espectro.*

*Demonstração.* [24] Pela definição do Produto de Kronecker, temos que:

$$C_n \times K_2 = \begin{cases} C_{2n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2C_n, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (6.1)$$

Portanto, pelo Teorema 15, temos que  $C_n \times K_2$  é DS.  $\square$

**Teorema 16.** [24] *O grafo bipartido completo  $K_{m,n}$ , ( $m < n$ ) é DS se, e somente se, para qualquer inteiros  $k$  com  $m < k < n$ ,  $k$  não é um fator de  $mn$ .*

*Demonstração.* [24]

Seja  $f(x) = m + n - x - \frac{mn}{x}$  e seja  $f_0(x) = x + \frac{mn}{x}$ , no qual  $x$  são todos inteiros positivos. Primeiramente vamos mostrar que qualquer inteiro  $x$  tal que  $m < x < n$  não é um fator em comum com  $mn$ . Para isto, suponhamos que  $H$  seja coespectral com  $K_{m,n}$ . Visto que o espectro de  $K_{m,n}$  é  $\sqrt[2]{mn}, 0^{m+n-2}, -\sqrt[2]{mn}$ , então  $H = K_{r_1, s_1} + (m + n - r_1 - s_1)K_1$ , no qual  $r_1 s_1 = mn$ . Como  $K_{m,n}$  é DS, podemos ter que  $r_1 = m, s_1 = n$ . Já que a função  $f(x)$  tem no máximo valor 0 e alcança

esse máximo somente quando  $x = m$  ou  $x = n$ , a função  $f_0(x)$  tem no mínimo o valor  $m + n$  no intervalo  $[m, n]$  e alcança esse mínimo somente quando  $x = m$  ou  $x = n$ . E devido a função  $f_0(x)$  ser monótona nos inteiros dos intervalos  $(m, \sqrt[3]{mn})$  e  $(\sqrt[3]{mn}, n)$ , qualquer inteiro  $x$  tal que  $m < x < n$  não é um fator em comum com  $mn$ . Agora vamos mostrar que o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$ , ( $m < n$ ) é DS. Por causa da não-divisibilidade de  $mn$  por qualquer inteiro  $k$  no qual  $m < k < n$ , a função  $f_0(x)$  alcança o mínimo valor  $m + n$  somente com  $x = m$  ou  $x = n$ . Então nós temos que  $m + n - r_1 - s_1 \leq 0$  para todos inteiros positivos  $r_1, s_1$  tal que  $r_1 \leq s_1$  e  $r_1 s_1 = mn$ , sendo que a igualdade funciona somente se  $r_1 = m, s_1 = n$ . Assim sendo, qualquer grafo  $H$  coespectral com  $K_{m,n}$  é isomorfo a ele.  $\square$

**Corolário 4.** [24] *A estrela  $K_{1,n}$  é DS se, e somente se,  $n$  for 1 ou primo.*

**Corolário 5.** [24] *Seja  $m$  e  $n$  inteiros positivos com  $n - m \leq 2$ . Então o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  é DS.*

*Demonstração.* [24] É trivial se  $n - m = 0$ . Para o caso em que  $n - m = 1$ , não existe inteiro tal que  $m < k < n$  e segue do Teorema 16 que  $K_{m,n}$  é DS. Se  $n - m = 2$ ,  $m + 1$  é o único inteiro entre  $m$  e  $n$  que não é um fator de  $mn = m(m + 2)$ , e segue do Teorema 16 que  $K_{m,n}$  é DS.  $\square$

**Corolário 6.** [24] *Se  $m$  e  $n$  são inteiros primos e distintos, então o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  é DS.*

**Corolário 7.** [24] *Se  $m$  e  $n$  são inteiros primos e distintos tal que  $\sqrt{mn}$  é inteiro, então o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  não é DS.*

**Corolário 8.** [24] *Seja  $m$  e  $n$  inteiros primos e distintos tais que  $n - m > i$  para  $i = 1, 2$  e  $mn = x^2 + ix$  para um inteiro positivo  $x$ . Então o grafo completo bipartido  $K_{m,n}$  não é DS.*

**Teorema 17.** [24] *O grafo completo e bipartido  $K_{m,n}$  é DS se, e somente se,  $K_{m,n} \times K_2$  é DS.*

*Demonstração.* [24] Pelo Teorema 15, nós temos que  $K_{m,m} \times K_2 = 2K_{m,m}$ . Pelo Teorema 16 temos que o grafo  $K_{m,n}$  é DS se e somente se a função  $f_0(x) = x + \frac{mn}{x}$ , no qual  $x$  e  $\frac{mn}{x}$  são todos inteiros positivos, tem o valor mínimo  $m + n$  se  $x = m$  ou  $x = n$ . Considerando que o espectro [6] de  $2K_{m,n}$  é  $(\sqrt{mn})^2, 0^{2m+2n-4}, (-\sqrt{mn})^2$ , o grafo  $K_{m,n} \times K_2$  é DS se, e somente se, a função de duas variáveis  $g(x, y) = x + \frac{mn}{x} + y + \frac{mn}{y}$ , nos quais  $x$  e  $y$  são inteiros positivos, tem o valor mínimo  $2(m + n)$  e  $(x, y) = (m, m), (m, n), (n, m)$  ou  $(n, n)$  que é equivalente a dizer que o grafo  $K_{m,n}$  é DS se e somente se a função  $f_0(x) = x + \frac{mn}{x}$ , no qual  $x$  e  $\frac{mn}{x}$  são todos inteiros positivos, tem o valor mínimo  $m + n$  se  $x = m$  ou  $x = n$ .  $\square$

Os autores [24] propõem que, ao  $G$  ser um grafo conexo, o problema dele ser DS é mais fácil de trabalhar, apesar deles não terem obtido nenhum progresso até então. Porém, eles deixam em aberto uma pergunta, que talvez seja mais modesta de responder, do que o caso geral: 1) Dados dois grafos  $G$  e  $H$  DS, quais grafos obtidos dos três produtos supracitados são DS?



## 7 CONCLUSÃO

Trabalhamos ao longo desta dissertação com a Teoria Espectral de Grafos, empenhando-se em descobrir quais grafos que são conhecidos serem determinados pelo espectro da matriz de adjacência e quais as técnicas utilizadas pelos autores responsáveis. Vimos que este é um assunto estudado desde 1957, sendo que, atualmente, ele se tornou um dos objetivos primordiais da TEG.

O primeiro objetivo desta dissertação foi um tanto audacioso: tentar encontrar um método que pudesse ser usado para provar que várias famílias distintas de grafos são determinadas pelo espectro da matriz de adjacência. Porém, no decorrer dos estudos, percebemos que isto não foi possível, segundo diversos autores, pois o avanço neste assunto se dá em pequenos passos, de família em família, separadamente. Então fomos ao nosso segundo objetivo, também deveras ávido: encontrar e estudar todas as famílias de grafos que são determinadas pelo espectro. Porém, devido à imensidão do tema e à complexidade das demonstrações, isto também não foi possível. Enfim, resolvemos estudar as famílias de grafos mais importantes que são determinados pelo espectro e que possuem demonstrações que utilizam, em suma, os mesmos métodos:

- Grafo Completo, Bipartido e o Ciclo, no qual a estratégia utilizada pelo autor para demonstrar que estes grafos são DS foi apresentar as arestas e vértices de cada um dos grafos, que são Invariantes Espectrais mostradas no Teorema 3, mostrando, através da regularidade destes grafos, que um grafo regular só pode ser coespectral com outro grafo regular;
- Caminho, no qual a estratégia utilizada pelo autor [34] para demonstrar este Teorema foi supor por absurdo que o caminho tem um par coespectral, apresentando as arestas e vértices de cada um dos gra-

fos, que são Invariantes Espectrais mostradas no Teorema 3, verificar quais os possíveis grafos candidatos para serem esses pares coespectrais através dos autovalores dele e, pelo Teorema do Entrelaçamento, mostrar que estes autovalores desclassificam os candidatos, restando apenas o próprio caminho;

- $Z_n$ : para demonstrar que  $Z_n$  é DS, foi utilizada a mesma estratégia que a utilizada para mostrar que o caminho é determinado pelo espectro da matriz de adjacência;
- Lollipop  $L(p, k)$ , com  $k$  ímpar, no qual a estratégia utilizada pelo autor para realizar a demonstração deste Teorema foi utilizar o número de vértices, arestas e caminhos fechados, que são Invariantes Espectrais segundo o Teorema 3 para a suposição da existência de um grafo coespectral com o Lollipop e também o Teorema do Entrelaçamento, Teorema 2, para supor que existe ciclo, que também é determinado pelo espectro.
- Pineapple  $K_p^2$ , no qual a estratégia utilizada pelo autor para a demonstração deste Teorema foi utilizar o número de vértices, arestas e triângulos que são Invariantes do Grafo, segundo o Teorema 3, para as possíveis escolhas de um grafo coespectral com o Pineapple, e novamente o Teorema do Entrelaçamento 2 para encontrar a contradição.
- Produtos entre grafos DS que preservam a determinação pelo espectro.

Nosso segundo objetivo com esta dissertação foi fornecer aos leitores um resumo do que foi encontrado sobre grafos determinados pelo espectro ao longo do estudo, apresentando os autores responsáveis e onde estudar tais grafos DS, que se encontram no Capítulo 4.

Estudamos ao longo da dissertação diversas famílias de Grafos. Porém, apesar de todas as famílias de grafos relatadas no trabalho, sabemos que ainda existem famílias que já foram descobertas serem DS e que não foram mencionadas. Além disto, ainda existem as famílias que ainda não foram provadas serem determinadas pelo espectro, porém acredita-se que estas são infinitas. Portanto, ainda há muito o que se trabalhar neste assunto, pela imensidão do desconhecimento que existe neste tema.

Para muitos autores este é um dos assuntos mais difíceis de se determinar na Teoria Espectral de Grafos. Alguns estudiosos acreditam até que talvez não se tenha como resolver este problema segundo as atuais demonstrações, visto que elas usam propriedades muito específicas e particulares de cada família de grafos, não havendo métodos generalizados que aproximam uma demonstração a outra. Percebemos, no entanto, que existem técnicas que todas que estão neste trabalho compartilham: utilizar as Invariantes Espectrais dos grafos e o Teorema do Entrelaçamento, como mostrado nas estratégias das demonstrações de cada um dos grafos DS supracitados.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que não foi possível descrever que, dado um grafo qualquer ele é ou não determinado pelo espectro da matriz de adjacência. Isto nos mostra que a pergunta realizada por Harmers [34] ainda está sem resposta e a Conjectura 1 ainda segue apenas como uma conjectura. Sendo este o estado da arte do problema.

## Referências Bibliográficas

- [1] ABDIAN, A. Z. Two classes of multicone graphs determined by their spectra. *Journal of Mathematical Extension* 10 (2016), 111–121.
- [2] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., AND VINAGRE, C. Teoria espectral de grafos-uma introdução iiiio colóquio de matemática da região sul, 2014.
- [3] BOULET, R. Spectral characterizations of sun graphs and broken sun graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 11, 2 (2009), 149.
- [4] BOULET, R., AND JOUVE, B. The lollipop graph is determined by its spectrum. *arXiv preprint arXiv:0802.1035* (2008).
- [5] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. Distance-regular graphs. In *Spectra of Graphs*. Springer, 2012, pp. 177–185.
- [6] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [7] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless laplacian, i. *Publications de l'Institut Mathématique* 85, 99 (2009), 19–33.
- [8] CVETKOVIĆ, D. M. *Grafovi i Njihovi Spektri... Graphs and Their Spectra*. PhD thesis, Univerzitet u Beogradu, 1971.
- [9] CVETKOVIĆ, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs: theory and application*, vol. 87. Academic Pr, 1980.

- [10] CVETKOVIC, D. M., ROWLINSON, P., AND SIMIC, S. *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge University Press Cambridge, UK, 2010.
- [11] DOOB, M., AND HAEMERS, W. H. The complement of the path is determined by its spectrum. *Linear algebra and its applications* 356, 1-3 (2002), 57–65.
- [12] DUDENEY, H. E. *Amusements in mathematics*, vol. 473. Courier Corporation, 1958.
- [13] DUDENEY, H. E., DUDENEY, M. H., AND TRAVERS, J. *Puzzles and curious problems*. T. Nelson and sons, Limited, 1932.
- [14] FRANÇA, F. A. M. *Autovalores Principais de Grafos. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015*. 2015.
- [15] FRITSCHER, E. Propriedades espectrais de um grafo. dissertação de mestrado, universidade federal do rio grande do sul - ufrgs, 2011.
- [16] GODSIL, C. D., AND MCKAY, B. Constructing cospectral graphs. *Aequationes Mathematicae* 25, 1 (1982), 257–268.
- [17] GÜNTHARD, H. H., AND PRIMAS, H. Zusammenhang von graphentheorie und mo-theorie von molekeln mit systemen konjugierter bindungen. *Helvetica Chimica Acta* 39, 6 (1956), 1645–1653.
- [18] HAEMERS, W. *Are almost all graphs determined by their spectrum? Notices of the South African Mathematical Society*, vol. 47. 01 2016.
- [19] HAEMERS, W. H., LIU, X., AND ZHANG, Y. Spectral characterizations of lollipop graphs. *Linear Algebra and its Applications* 428, 11-12 (2008), 2415–2423.

- [20] HAEMERS, W. H., AND SPENCE, E. Graphs cospectral with distance-regular graphs. *Linear and Multilinear Algebra* 39, 1-2 (1995), 91–107.
- [21] HAEMERS, W. H., AND SPENCE, E. Enumeration of cospectral graphs. *European Journal of Combinatorics* 25, 2 (2004), 199–211.
- [22] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 1990.
- [23] KARACHALIOS, A. Erich hückel’s research agenda during the 1930s: Underpinning organic chemistry with quantum theory. In *Erich HÜckel (1896–1980)*. Springer, 2010, pp. 49–113.
- [24] KE XIANG, X., JUAN, Y., BAO GANG, X., AND ZHI REN, S. Some results on graph products determined by their spectra. In *Journal of Mathematical Research & Exposition* (2010), vol. 30, pp. 227–232.
- [25] LEE, S., AND YEH, Y. On eigenvalue and eigenvectors of graphs. *JMC*, 12 (1993), 121–35.
- [26] LEPOVIĆ, M., AND GUTMAN, I. No starlike trees are cospectral. *Discrete mathematics* 242, 1-3 (2002), 291–295.
- [27] MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*, vol. 71. Siam, 2000.
- [28] OISHI, C. M., RAFAELI, F. R., DA MOTTA JAFELICE, R. S., DE FIGUEIREDO CAMARGO, R., SEZIMÁRIA DE FÁTIMA, P. S., AND PIRANI, V. A. B. Notas em matemática aplicada issn 2175-3385.
- [29] PETROVIĆ, M., AND MILEKIĆ, B. Generalized line graphs with the second largest eigenvalue at most 1. *Publications de l’Institut Mathématique. Nouvelle Série* 68 (2000), 37–45.

- [30] SCHWENK, A. J. Almost all trees are cospectral. *New directions in the theory of graphs* (1973), 275–307.
- [31] SHEN, X., HOU, Y., AND ZHANG, Y. Graph  $zn$  and some graphs related to  $zn$  are determined by their spectrum. *Linear Algebra and its Applications* 404 (2005), 58 – 68.
- [32] SOUZA, B. S. D. *Produtos e coespectralidade de grafos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.* 2016.
- [33] TOPCU, H., SORGUN, S., AND HAEMERS, W. H. On the spectral characterization of pineapple graphs. *Linear Algebra and its Applications* 507 (2016), 267–273.
- [34] VAN DAM, E. R., AND HAEMERS, W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications* 373 (2003), 241 – 272. Combinatorial Matrix Theory Conference (Pohang, 2002).
- [35] VAN DAM, E. R., AND HAEMERS, W. H. Developments on spectral characterizations of graphs. *Discrete Mathematics* 309, 3 (2009), 576–586.
- [36] VAN DAM, E. R., KOOLEN, J. H., AND TANAKA, H. Distance-regular graphs. *arXiv preprint arXiv:1410.6294* (2014).
- [37] VERMETTE, J. R., ROSSI, L. F., AND LAZEBNIK, F. *SPECTRAL AND COMBINATORIAL PROPERTIES OF FRIENDSHIP GRAPHS, SIMPLICIAL ROOK GRAPHS, AND EXTREMAL EXPANDERS. Tese de Doutorado, Faculty of the University of Delaware.* 2015.
- [38] VINAGRE, C., MARINS, M., AND DEL-VECCHIO, R. Introduçãoa teoria espectral de grafos e aplicações. *Anais do 60o Seminário Brasileiro de Análise, SBA, UERJ* (2004).

- [39] VON COLLATZ, L., AND SINOGOWITZ, U. Spektren endlicher grafen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1957), vol. 21, Springer, pp. 63–77.
- [40] WANG, W., AND XU, C.-X. On the spectral characterization of t-shape trees. *Linear Algebra and its Applications* 414, 2-3 (2006), 492–501.
- [41] XU, K., YAN, J., XU, B., AND SUN, Z. *Some results on graph products determined by their spectra. Journal of Mathematical Research Exposition*, vol. 30. 01 2010.
- [42] ZEYDI ABDIAN, A., AND MIRAFZAL, S. M. On new classes of multicone graphs determined by their spectrums. *Algebraic Structures and Their Applications* 2, 1 (2015), 23–34.
- [43] ZHANG, X., AND ZHANG, H. Some graphs determined by their spectra. *Linear Algebra and Its Applications* 431, 9 (2009), 1443–1454.