

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Tese de Doutorado

# Propagação e Amplificação de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Supertérmicos Magnetizados \*

*Propagation and Amplification of Electromagnetic  
Waves in Superthermal Magnetized Plasmas*

Anelise Ramires Meneses  
Orientador: Prof. Dr. Rudi Gaelzer

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Rudi Gaelzer e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Física.

Porto Alegre  
15 de fevereiro de 2019

---

\* Trabalho financiado pela Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

## RESUMO

A anisotropia de temperatura de elétrons e íons no Vento Solar é um fenômeno que evidencia o papel de processos não térmicos que ocorrem no sistema Sol-Vento-Solar-Magnetosfera Terrestre (SVSM). Distribuições com dispersões de velocidade distintas, nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético ambiente, possuem energia livre disponível para gerar instabilidades, as quais irão transferir parte desta energia livre para ondas, relaxando desta forma a distribuição em sentido ao equilíbrio termodinâmico. A fim de investigar as condições marginais de instabilidade, os modelos de funções de distribuição de velocidade supertérmicas com anisotropia de temperatura mais empregados na literatura e que são baseados num comportamento tipo lei de potência, são a distribuição bi-kappa (BK) e a distribuição produto-bi-kappa (PBK). Do ponto de vista puramente matemático, o cálculo do tensor dielétrico é mais simples com a distribuição PBK; isto porque esta já possui as dependências em  $v_{\perp}$  e  $v_{\parallel}$  fatoradas, simplificando o cálculo das integrais ressonantes, a exemplo do que ocorre com a distribuição bi-Maxwelliana (BM). No presente trabalho desenvolvemos um formalismo matemático geral que permite a descrição analítica dos mais diversos fenômenos presentes em plasmas supertérmicos descritos por distribuições bi-kappa. Aplicamos este formalismo matemático na descrição da propagação e amplificação/absorção de ondas eletromagnéticas/eletrostáticas em plasmas supertérmicos e na presença de anisotropia de temperatura.

## ABSTRACT

The temperature anisotropy of electrons and ions in the Solar Wind is a phenomenon that highlights the role of non-thermal processes occurring in the Sun-Solar Wind-Terrestrial Magnetosphere system (SSVM). Distributions with distinct velocity dispersions, both in the parallel and perpendicular directions relative to the ambient magnetic field, have free energy available to generate instabilities, which will transfer part of the free energy into waves, thereby relaxing the distribution towards the thermodynamic equilibrium. In order to investigate the marginal conditions for instability, the models of superthermal velocity distribution functions more frequently employed in the literature, which feature a power-law dependence on the high-energy particles, are the bi-kappa (BK) and product-bi-kappa (PBK) distributions. From a purely mathematical point of view, the calculation of the dielectric tensor is simpler with the PBK distribution, since its dependence on the  $v_{\perp}$  and  $v_{\parallel}$  velocity components is already factored, similar to what occurs with a bi-Maxwellian (BM) distribution. In this work we develop a general mathematical formalism that provides the analytical description of various phenomena present in superthermal plasmas described by bi-kappa distribution functions. We apply this mathematical formalism to the study of the propagation and amplification/damping of electromagnetic/electrostatic waves in superthermal plasmas and in the presence of temperature anisotropy.

# Agradecimentos

- Ao Dr. Rudi Gaelzer, por sua paciência, ajuda, constante presença e dedicação, cruciais para a realização deste trabalho;
- Aos meus pais, minha base, os quais sempre me incentivaram, compreenderam as ausências e deram apoio nos momentos de angústias;
- À minha irmã, Lisiane, por ser minha fonte de inspiração, por estar sempre na torcida para que tudo dê certo e que trouxe à vida nossa Luísa, tornando nossos dias mais doces;
- Ao meu marido Thiago, que suportou TODAS as fases ao longo dos anos deste trabalho e entendeu a importância de cada etapa para que este projeto fosse possível;
- Ao meu cunhado Maurício, que sempre esteve ao meu lado, incentivando e estimulando o sucesso das minhas empreitadas;
- À Dra. Aline, que assumiu de pronto algumas das minhas funções no IFSul, para que eu pudesse me dedicar à edição do texto da tese;
- Ao CNPQ, que através do fomento, torna possível a pesquisa no Brasil.
- Aos professores do IFM-UFPEL e do IF-UFRGS que, em diferentes momentos, contribuíram significativamente na minha formação;
- A todos aqueles que de uma forma ou de outra possibilitaram que este trabalho fosse realizado.

## SUMÁRIO

1. <i>Introdução</i> . . . . .	1
2. <i>Formalismo descritivo para o Espaço de Plasmas</i> . . . . .	17
2.1 <i>Introdução</i> . . . . .	17
2.2 <i>Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs e a Mecânica Não-Aditiva de Tsallis</i> . . . . .	17
2.3 <i>Distribuições Kappa no Contexto da Mecânica Estatística de Tsallis</i> . . . . .	19
2.4 <i>Versões para Distribuição Kappa</i> . . . . .	25
3. <i>Tensor Dielétrico Geral para Plasmas Bi-kappa Magnetizados</i> . . . . .	27
3.1 <i>Introdução</i> . . . . .	27
3.2 <i>Tensor Dielétrico para uma Função de Distribuição Bi-kappa</i> . . . . .	27
3.3 <i>Novas Expressões para as Funções Kappa Especiais</i> . . . . .	31
3.3.1 <i>Função de Larmor ou raio de giro para plasma supertérmico</i> . . . . .	31
3.3.1.1 <i>Derivadas</i> . . . . .	32
3.3.1.2 <i>Regra da Soma</i> . . . . .	33
3.3.1.3 <i>A função associada de Larmor de plasma supertérmico</i> . . . . .	33
3.3.2 <i>Função de Dispersão de Plasma Supertérmico</i> . . . . .	34
3.3.2.1 <i>Representação em termos da Função <math>G</math> de Meijer</i> . . . . .	34
3.3.2.2 <i>Função de Dispersão de Plasma Supertérmico Associada</i> . . . . .	35
3.3.3 <i>Funções Kappa Plasma de duas Variáveis</i> . . . . .	35
3.3.3.1 <i>Outras representações integrais</i> . . . . .	35
3.3.3.2 <i>Representações em séries</i> . . . . .	36
3.3.3.2.1 <i>Séries para <math> \xi  &lt; \sqrt{\kappa}</math></i> . . . . .	36
3.3.3.2.2 <i>Séries gerais</i> . . . . .	36
4. <i>Ondas de Alfvén Dispersivas em Plasmas Supertérmicos com Anisotropia de Temperatura</i> . . . . .	38
4.1 <i>Introdução</i> . . . . .	38
4.2 <i>Ondas de Alfvén Dispersivas</i> . . . . .	38
4.3 <i>Funções de Distribuição Anisotrópicas</i> . . . . .	39

---

4.4	Tensor Dielétrico para um Plasma Magnetizado . . . . .	40
4.5	Resultados Encontrados na Literatura . . . . .	41
5.	<i>Equação de Dispersão para ondas de baixa frequência em plasmas do tipo Bi-kappa</i>	44
5.1	O tensor Dielétrico e a Equação de Dispersão . . . . .	44
5.2	Equação de Dispersão . . . . .	52
6.	<i>Instabilidade firehose oblíqua em um plasma bi-kappa magnetizado</i>	56
6.1	Equação de Dispersão tipo bi-kappa para plasmas de alto beta . . . . .	56
6.2	Novas expressões para as funções especiais de plasmas kappa . . . . .	60
6.2.1	Propriedades de simetria . . . . .	61
6.2.2	Expansão em série de $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ para o caso inteiro . . . . .	61
6.2.3	Expansões em série de potências para $ \xi  > \sqrt{\kappa}$ . . . . .	62
6.3	Solução Numérica da Equação de Dispersão . . . . .	63
7.	<i>Conclusão</i> . . . . .	70
	<i>Referências Bibliográficas</i> . . . . .	72
A.	<i>Cálculo dos componentes do tensor dielétrico para Ondas de Alfvén Cinéticas</i> . . .	86
B.	<i>Artigo publicado</i> . . . . .	100
C.	<i>Artigo publicado</i> . . . . .	115

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

Um dos grandes temas estudados pela Física de Plasmas nas últimas décadas é a interação Sol-Vento Solar-Magnetosfera Terrestre (SVSM), cuja importância ganha destaque na evolução do conhecimento acerca dos processos físicos e fenômenos presentes no sistema SVSM, os quais geram consequências relevantes para o bioma e clima terrestres, interferindo economicamente no cotidiano da sociedade, sendo esta tão dependente da geração e transmissão de energia em grande escala e a longas distâncias, assim como de um sistema de comunicações baseado em satélites orbitando a Terra.

Fenômenos relacionados a SVSM foram observados já no começo do século XX. Estudos iniciais utilizavam instrumentos posicionados na superfície da Terra. Entretanto, foi a partir de 1957 (considerado o Ano Internacional Geofísico pela ONU) e através do lançamento de satélites e sondas interplanetárias que observações mais importantes passaram a ser realizadas. O dia 4 de outubro de 1957 foi um marco para a história mundial; nesta data a União Soviética colocou o satélite Sputnik 1 em órbita espacial, primeiro satélite artificial lançado ao espaço, o qual auxiliou estudiosos de astronomia na identificação das camadas da alta atmosfera da Terra. Dado o grande sucesso no lançamento deste satélite, outros seriam lançados e, já em novembro do mesmo ano, o satélite Sputnik II fora lançado, desta vez tripulado pela cadelinha Laika. Em 1958 houve o lançamento do Sputnik III que permaneceu em órbita por dois anos e se tratava de um laboratório com o objetivo de estudar o campo magnético terrestre e seu cinturão radioativo. Permitindo assim, investigações mais aprofundadas e baseadas em dados reais sobre SVSM.

Os processos físicos que ocorrem no sistema SVSM ocorrem no interior da *heliosfera*, a qual compreende todo o espaço em torno do Sol e que é dominado pelo campo magnético interplanetário e pelo vento solar. A figura 1.1 é uma ilustração que mostra a concepção moderna da heliosfera à medida que a mesma se desloca pelo meio interestelar.

O ambiente de plasma na heliosfera é dominado pelo vento solar, o qual consiste em um fluxo contínuo de partículas completamente ionizadas que são ejetadas no espaço interplanetário a partir da fotosfera e/ou cromosfera solares [1]. Embora o vento solar seja

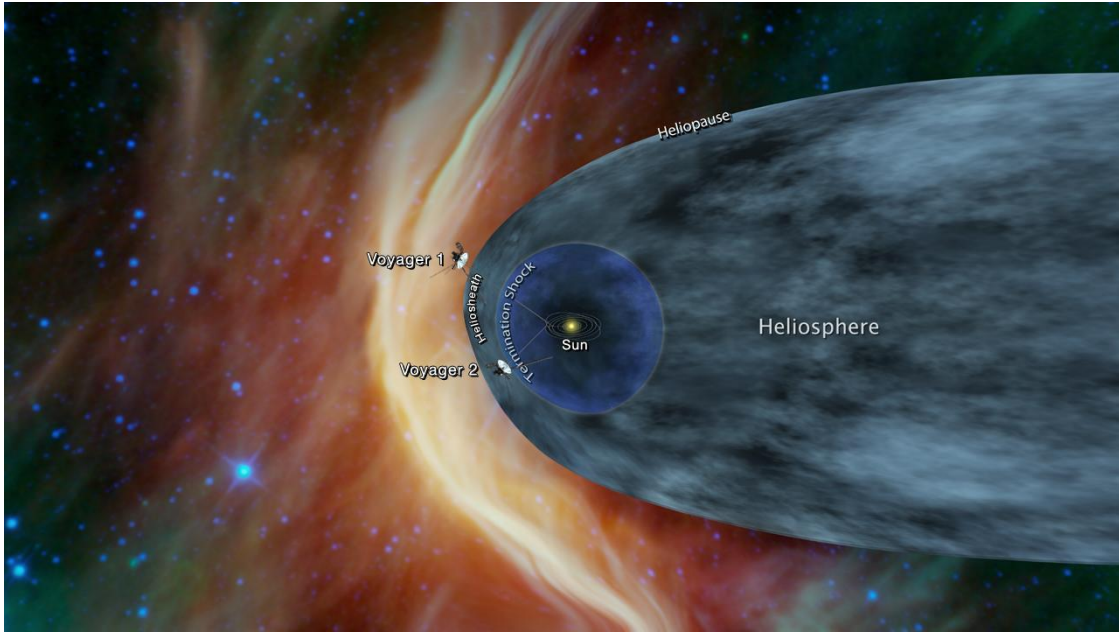


Fig. 1.1: Diagrama ilustrando a heliosfera e algumas de suas componentes à medida que esta se desloca através do espaço interestelar.

majoritariamente composto por elétrons e prótons, uma pequena fração (menos de 4%) da massa total do vento solar é composta por partículas alfa e íons mais massivos, com uma concentração ainda menor de grãos de poeira carregados [2, 3].

No sistema SVSM, a matéria encontra-se em estado de plasma. Portanto, o conhecimento na área da física de plasmas torna-se um requisito fundamental para que se alcance a evolução do desenvolvimento científico. O estudo da dinâmica de um plasma composto por partículas ionizadas (elétrons + íons positivos + íons negativos) e campos eletromagnéticos pode ser abordado de duas formas diferentes: pelas equações da Magnetohidrodinâmica - Teoria MHD (larga escala), ou pela Teoria Cinética de Plasmas - TCP (escala microscópica).

De acordo com a TCP, a dinâmica de plasmas é descrita por um conjunto de equações íntegro-diferenciais acopladas, composto pelas equações de Maxwell, descrevendo a dinâmica dos campos, cujos termos de fontes são as densidades de carga e correntes das partículas e um conjunto de equações cinéticas, que descrevem as funções de distribuição de partículas. A sucessão de funções  $f_\alpha, f_{\alpha\beta} \dots$  satisfaz um conjunto de equações estatístico acopladas conhecido como Hierarquia BBGKY, por terem sido derivadas independentemente por Bogolyubov, Born e Green, Kirkwood e Yvon [4]. A primeira e mais simples das equações desta hierarquia descreve a evolução da função de distribuição de uma partícula  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , sendo que

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$$

consiste na probabilidade de uma partícula da espécie  $\alpha$  ser encontrada no instante  $t$  e no



ponto  $(\vec{r}, \vec{v})$  do espaço de fase do sistema, dentro do elemento de volume  $d^3r d^3v$ . A equação cinética para  $f_\alpha$  é conhecida na mecânica estatística de não-equilíbrio como a equação de Boltzmann, a qual depende de uma forma auto-consistente dos campos e, através de um operador integral de colisão, da função de distribuição de duas partículas  $f_{\alpha\beta}$ . Esta última também determinada por uma equação cinética e, tendo como termo de colisão, um operador dependente da distribuição de três partículas,  $f_{\alpha\beta\gamma}$ . A sequência de equações progride de forma complexa, de modo a existir tantas equações cinéticas quanto partículas no plasma.

No meio interplanetário, o plasma encontra-se em estado extremamente rarefeito, de modo que o tempo médio decorrido entre colisões binárias entre partículas é, em geral, grande comparado com os tempos de evolução dos fenômenos relevantes ocorridos. Deste modo, as correlações entre partículas podem ser desprezadas. Com isto, a equação para  $f_\alpha$  não possui mais o termo de colisão e todas as interações entre as partículas são de longo alcance. A equação cinética resultante é também denominada equação de Boltzmann não colisional, ou ainda Equação de Vlasov. Desta forma, a dinâmica do plasma passa a ser descrita pelo Sistema Vlasov-Maxwell de equações (SVME) [4–6].

O SVME consiste em um conjunto de equações íntegro-diferenciais não lineares e acopladas, cuja solução exata, em geral, é impossível de ser obtida. O mais simples processo de aproximação para obtenção de soluções é a linearização do sistema, considerando pequenas quaisquer flutuações em torno dos valores de equilíbrio e, desprezando-se assim termos de segunda ordem ou ordens mais altas.

Os resultados mais importantes dessas soluções são as relações de dispersão de ondas, as quais mostram quais são os modos normais de oscilação permitidos no plasma. Simultaneamente às relações de dispersão, a teoria cinética fornece, para cada modo normal, a correspondente taxa espectral de amortecimento/amplificação  $\gamma(\vec{k})$  do mesmo [6].

As relações de dispersão e as taxas de absorção/amplificação são importantes porque servem de condição inicial para a evolução dinâmica do plasma. Esta evolução será responsável por diversos fenômenos observados no sistema SVSM, dentre os quais se destacam a aceleração e aquecimento de partículas, ou os fenômenos de emissão de radiação que ocorrem tanto na cromosfera e coroa solares quanto nas magnetosferas planetárias. Portanto, a obtenção tanto das relações de dispersão quanto das taxas de absorção/amplificação é uma tarefa importante para a correta descrição dos processos físicos que ocorrem no plasma do sistema SVSM.

Existem dois estados básicos para o vento solar: o *vento solar rápido* e o *vento solar lento*, os quais podem ser melhor caracterizados pelas suas distintas velocidades características [2,3,7]. O vento solar lento caracteriza-se por uma alta variabilidade e sua origem está associada

a regiões ativas que ocorrem sobre a fotosfera solar e não está necessariamente relacionado aos chamados *solar streamers* [8]. A sua velocidade de fluxo é observada no intervalo 250 – 400 km/s. As temperaturas típicas dos prótons e dos elétrons são, respectivamente,  $T_p \simeq 3,4 \times 10^4$  K e  $T_e \simeq 1,3 \times 10^5$  K ( $T_p < T_e$ ), com  $T_p \propto R^{-1,21}$ , como é o comportamento esperado de um fluxo adiabático [8], sendo  $R$  a distância heliocêntrica, usualmente medida em Unidades Astronômicas (UA).

Por sua vez, o vento solar rápido é caracterizado por velocidades de fluxo no intervalo 400 – 800 km/s, temperaturas  $T_p \simeq 2,3 \times 10^5$  K e  $T_e \simeq 10^5$  K ( $T_p > T_e$ ), com  $T_p \propto R^{-0,69}$ , indicando a existência de fontes de calor adicionais no espaço interplanetário. As partículas do vento rápido são observadas originando-se de buracos coronais, aparentemente oriundas de laços magnéticos que se situam a cerca de  $10^3$  km sobre a fotosfera e aceleradas devido a reconexões magnéticas que ocorrem nesses laços [3].

Contudo, o aspecto que é mais relevante para este trabalho são as funções de distribuição de velocidades típicas das espécies majoritárias no vento solar. As distribuições de velocidade observadas por satélites e espaçonaves mostram características topológicas distintas, dependendo da espécie da partícula e do local da observação. Dentre as características mais comuns observadas nas funções de distribuição de velocidades (FDV) locais destacam-se: feixes de partículas energéticas, anisotropia entre as velocidades médias nas direções paralela e perpendicular em relação ao campo magnético local e cones-de-perda. Será realizada agora uma breve discussão a respeito das características gerais das FDV das espécies majoritárias presentes no vento solar (elétrons e prótons) e a respeito do contexto no qual as mesmas se encaixam neste trabalho.

### Elétrons

Os elétrons do vento solar apresentam diversas características não térmicas. Suas FDV's são tipicamente compostas por 3 populações distintas: um núcleo denso (*core*) de baixa energia, que contém cerca de 96% dos elétrons presentes no vento solar, combinado com duas populações adicionais mais tênues (com cerca de 4% dos elétrons), cujos perfis não podem ser adequadamente descritos por combinações de Maxwellianas. Uma destas populações é o *halo*, o qual se apresenta em todos os ângulos de arremesso (*pitch angle*) e é composto por elétrons com energias da ordem  $\sim 10^3$  eV. A outra população é denominada *Strahl*, a qual consiste em um feixe de elétrons, altamente anisotrópico, com velocidade de deriva alinhada com  $\mathbf{B}_0$  e que se propaga no sentido de afastamento do Sol [2, 9–18]. Uma descoberta mais recente foi a população denominada *superhalo* [19, 20], também isotrópica mas composta por elétrons com energias da ordem de  $10^4 - 10^5$  eV. A figura 1.2 mostra alguns exemplos de

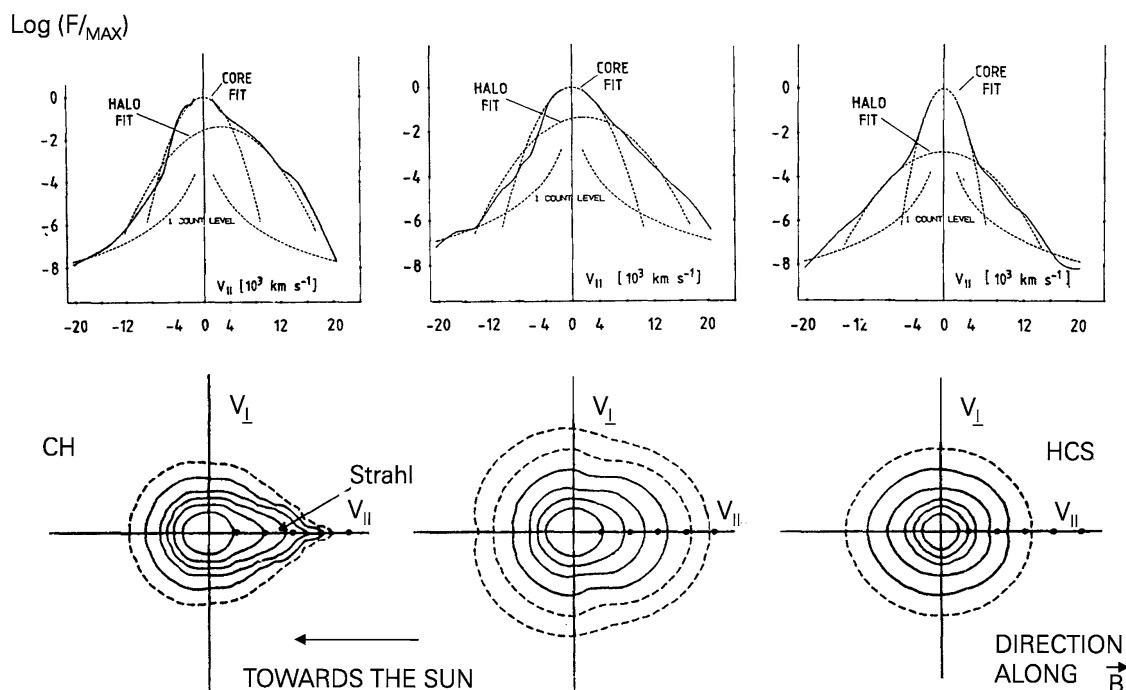


Fig. 1.2: Exemplos de funções de distribuição de velocidades de elétrons observadas no vento solar rápido (esquerda), lento (direita) e com velocidades intermediárias (centro). Os painéis superiores mostram espectros de energia revelando a estrutura core-halo, bem como a assimetria do Strahl no sentido contrário ao Sol. Os painéis inferiores são isocontornos das FDV eletrônicas [18].

FDV eletrônicas em três regimes de velocidades do vento solar.

A origem dos distintos aspectos característicos das FDV's eletrônicas foi inicialmente descrita pela teoria exosférica dos elétrons do vento solar [12, 15]. De acordo com esta teoria, a população do núcleo é composta por elétrons de baixa temperatura aprisionados pelo poço de potencial termo-elétrico ambipolar da heliosfera, ao passo que as populações do halo e do Strahl são compostas por elétrons de alta energia que escaparam desta barreira. A forte anisotropia do Strahl é entendida como o resultado do efeito de focagem em ângulo de arremesso que ocorre à medida que seus elétrons derivam ao longo das linhas de força magnética, no sentido oposto ao Sol, conservando o momento magnético.

Contudo, a relativa isotropia do halo não é bem compreendida e, além disso, a distribuição em ângulo de arremesso do Strahl aumenta com a distância heliocêntrica, ao invés de se colimar, como seria o esperado pela conservação dos invariantes adiabáticos. Estas observações não podem ser explicadas simplesmente com base em colisões Coulombianas, uma vez que estas distribuições são basicamente não colisionais nas regiões onde as espaçonaves realizam suas observações [13, 17, 21, 22].

Efeitos cinéticos associados ao espalhamento onda-partícula são necessários para dar conta das distintas populações eletrônicas no vento solar. Há fortes indícios de que a forma-

ção do halo e Strahl está associada ao espalhamento ocasionado pela instabilidade de dois feixes atuando na faixa das ondas de Alfvén cinéticas ou *whistler* [23–25]. É neste ponto que se faz necessária uma descrição cinética da dinâmica de ondas e partículas no plasma do vento solar.

Portanto, uma característica comumente observada nas distribuições eletrônicas do vento solar é o afastamento das mesmas de uma distribuição mais provável em um sistema em equilíbrio termodinâmico, a distribuição de Maxwell-Boltzmann  $f_M(v)$ , para a qual  $f_M(v) \propto e^{-v^2/v_{T\alpha}^2}$ , sendo  $v_{T\alpha}^2 = 2T/m_\alpha$  a velocidade térmica da espécie  $\alpha$ , onde  $m_\alpha$  é a massa da partícula e  $T$  é a temperatura (em unidades de energia).

Nos últimos anos, as pesquisas acerca da origem e propriedades do plasma contido no meio interplanetário têm empregado as funções de velocidade de partículas do tipo *super-térmico* ou *kappa* (da letra grega kappa:  $\kappa$ ) [26–29]. A versão isotrópica mais usada destas distribuições é a função  $f_\kappa(v)$ , sendo

$$f_\kappa(v) = \frac{n_\alpha}{\pi^{3/2}\theta_\alpha^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 3/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa\theta_\alpha^2}\right)^{-(\kappa+1)},$$

onde  $\kappa > 3/2$ . A descrição das demais quantidades que compõe  $f_\kappa(v)$  será realizada na seção 2.4. Estas distribuições apresentam justamente as características observadas pelas sondas interplanetárias: um caroço (*core*) Maxwelliano, juntamente com uma cauda ( $v \gg v_{Ta}$ ) com perfil de lei de potência, isto é,  $f_a(\mathbf{v}) \propto v^{-2\kappa}$ . Estas características tornam as distribuições kappa ideais para o estudo dos fenômenos que ocorrem no plasma interplanetário e por esta razão as mesmas têm sido empregadas em um número ainda crescente de publicações na área [26–29].

Uma distribuição do tipo kappa pode ser caracterizada pelo índice  $\kappa$ , o qual é uma medida do afastamento desta de uma distribuição térmica (Maxwelliana), sendo que esta última é restabelecida quando  $\kappa \rightarrow \infty$ . *Maksimovic et al. (1997, 2005)* [30, 31], *Štverák et al. (2009)* [32] e *Livadiotis et al. (2018)* [33] mediram o índice  $\kappa$  da FDV ( $\kappa$ FDV) eletrônica através de um ajuste não linear a partir dos dados obtidos por espaçonaves no intervalo 0,3 – 4 UA. Exemplos dos valores obtidos para o índice  $\kappa$  que melhor se ajusta às FDV eletrônicas, tanto para o halo quanto para o Strahl, para ambos os regimes de velocidades do vento solar são apresentados na figura 1.3.

Os resultados mostram que o índice  $\kappa$  cai monotonicamente com a distância radial tanto para as populações do halo quanto do Strahl e também para ambos os tipos de vento solar, com  $10 \lesssim \kappa \lesssim 16$  para  $R \simeq 0,3$  UA e  $\kappa \simeq 2$  para  $R \simeq 4$  UA, o que implica que os processos físicos operando no vento solar, à medida que este se afasta do Sol, contribuem para um afastamento gradual de suas propriedades termo-estatísticas em relação à termodinâmica

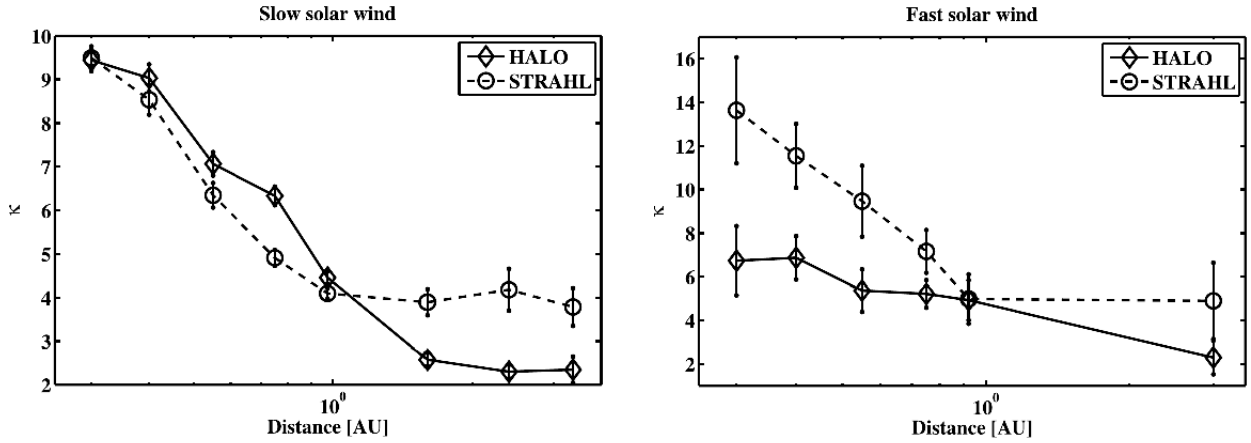


Fig. 1.3: Valores medidos para os índices  $\kappa$  em função da distância heliocêntrica para ambas as populações supertérmicas (halo e Strahl) da FDV eletrônica. Painel esquerdo: resultados para o vento solar lento. Painel direito: resultados para o vento rápido [32].

de Boltzmann-Gibbs tradicional. Mesmo a distâncias relativamente próximas ao Sol (em  $R = 0,3$  UA), a FDV é visivelmente distinta da Maxwelliana, com o vento rápido exibindo dois regimes claramente diferentes ( $\kappa \simeq 7$  para o halo e  $\kappa \simeq 14$  para o Strahl), enquanto que ambas as populações estão no mesmo estado ( $\kappa \simeq 9,5$ ) para o vento solar lento.

Distribuições supertérmicas que são adequadamente modeladas por funções kappa, tanto para elétrons quanto para íons, também são observadas nas magnetosferas planetárias; em particular, em diversas regiões da magnetosfera terrestre, tais como na bainha de plasma (*plasma sheet*), na plasmaesfera (*plasma sphere*) e na cauda magnetosférica [34–38]. Em diversas observações foram encontrados indícios de existência de fontes de energia livre presentes na  $\kappa$ FDV, tais como anisotropias de temperatura, as quais indicam a importância dessas distribuições no nível de turbulência do plasma e nos processos de aceleração de partículas que ocorrem particularmente na cauda magnetosférica.

Estas evidências têm atraído bastante a atenção da comunidade de física solar e também são de interesse para a física básica, uma vez que fornecem credibilidade ao formalismo da mecânica estatística não aditiva [39, 40]. Uma distribuição kappa corresponde à FDV que descreve o equilíbrio termo-estatístico quando o sistema físico está sujeito a interações de longo alcance (como em um plasma não colisional) ou possui fortes efeitos de memória (como em um meio altamente dispersivo) [41–43], de tal forma que este não pode ser adequadamente descrito pela termo-estatística de Boltzmann-Gibbs, estritamente válida quando o sistema está sujeito a interações de curto alcance (tais como colisões Coulombianas) [26–28, 44–47]. Este é justamente o caso de um plasma típico do vento solar, de uma magnetosfera planetária, ou de outros sistemas astrofísicos. Devido ao grande número de partículas na esfera de Debye, estes sistemas são geralmente submetidos a interações de longo alcance.

*Tsallis (1988)* [39] propôs uma expressão alternativa para a entropia associada com um sistema estatístico deste tipo. A entropia generalizada proposta por *Tsallis (1988)* possui a maior parte das propriedades da expressão usual para a entropia, mas é não aditiva ( $S(A) + S(B) \neq S(A+B)$ ), sendo que a entropia de Tsallis é caracterizada pelo *índice entrópico*  $q$ , de tal forma que  $S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$ . Quando  $q \rightarrow 1$ , a propriedade aditiva usual da entropia é restabelecida. Considerando o equilíbrio termodinâmico de um gás diluído, *Silva et al. (1998)* [41] e *Tsallis et al. (1998)* [42] derivaram a FDV no contexto da termo-estatística de Tsallis a qual, após a substituição  $q \rightarrow 1 - 1/\kappa$ , torna-se a distribuição kappa usualmente empregada nas modelagens atuais do plasma do vento solar. Uma análise mais aprofundada da mecânica estatística não-aditiva de Tsallis no contexto específico da física dos plasmas será realizada no capítulo 2.

### Prótons

Funções de distribuição de velocidades da componente protônica do vento solar foram medidas em diversos pontos no espaço interplanetário pelas espaçonaves Wind, Helios e Ulysses, majoritariamente no plano da eclíptica em distâncias heliocêntricas entre 0,3 UA a 1,0 UA [2, 18]. A figura 1.4 mostra exemplos de FDV protônicas medidas pela espaçonave Helios, organizados em uma sequência crescente de velocidade do vento solar ao longo das colunas e em ordem decrescente em distância heliocêntrica ao longo das linhas. Observa-se claramente na maioria dos exemplos ilustrados a presença de uma anisotropia nas FDV protônicas, medida pela razão  $T_{\parallel p}/T_{\perp p}$ , onde  $T_{\parallel p}$  e  $T_{\perp p}$  são, respectivamente, as temperaturas das distribuições de prótons nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético ambiente, cuja direção local é indicada pelas retas tracejadas. Cabe mencionar que, de acordo com o jargão usual na física dos plasmas, o termo “temperatura” aqui não se refere à medida termodinâmica de temperatura, a qual somente faz sentido quando o sistema está em equilíbrio térmico, o que evidentemente não ocorre com as FDV ilustradas na figura 1.4. Os termos “temperatura paralela” ou “perpendicular” aqui se referem ao valor do segundo momento da função de distribuição de velocidades, de tal forma que se  $f_a(\mathbf{v})$  é a função de distribuição da espécie  $a = e, p, \dots$ , então

$$T_{\perp a} = \frac{1}{2}m_a \langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{2}m_a \int d^3v v_{\perp}^2 f_a(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T_{\parallel a} = m_a \langle v_{\parallel}^2 \rangle = m_a \int d^3v v_{\parallel}^2 f_a(\mathbf{v})$$

são as medidas das temperaturas perpendicular e paralela em relação a  $\mathbf{B}_0$ .

De uma forma geral, a anisotropia das FDV medidas aumenta quanto mais próxima a espaçonave se encontra do Sol, mas observa-se também uma tendência de maior anisotropia no regime de vento rápido. Em diversas observações (painéis B, H e J), ocorre também a



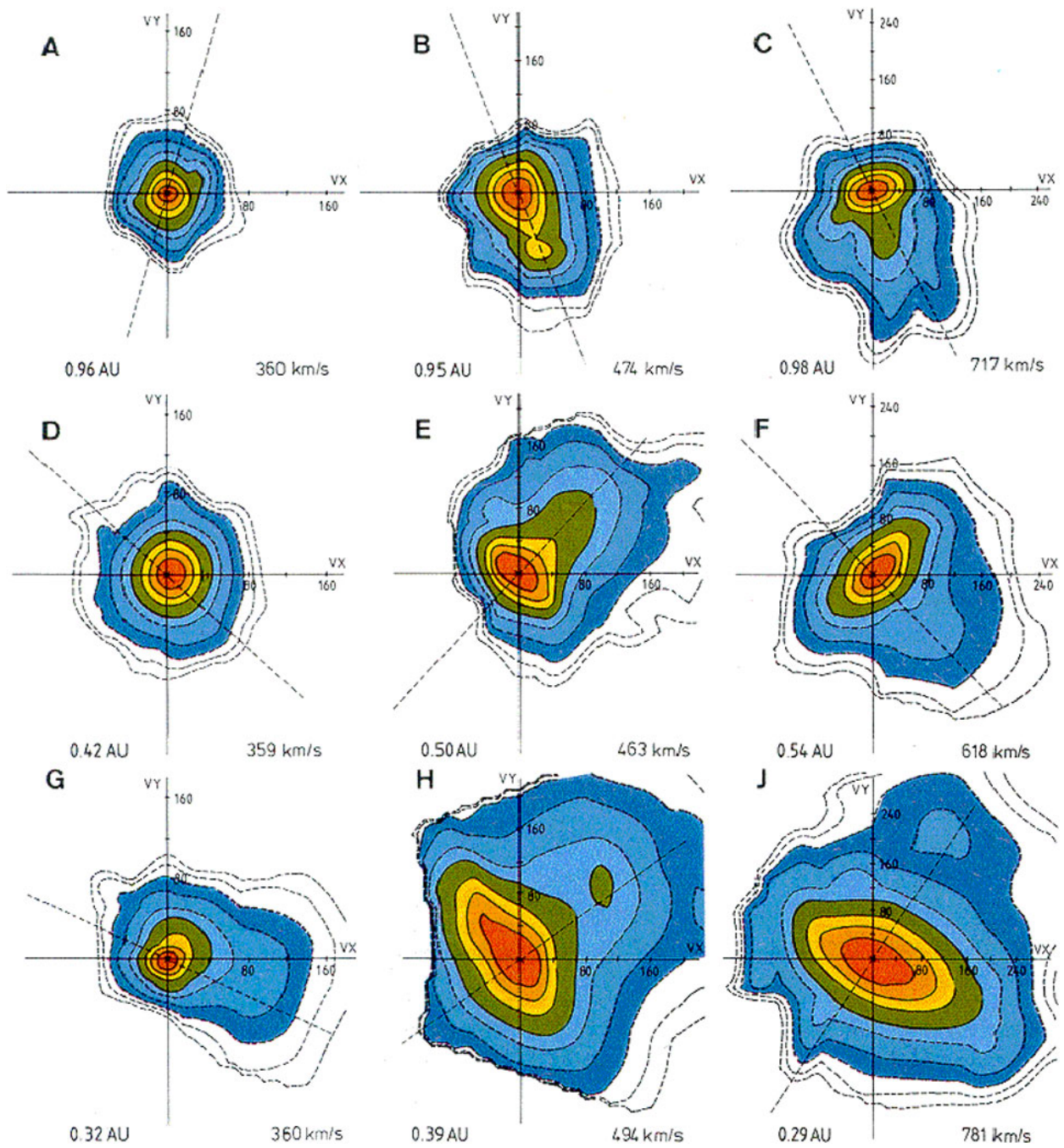


Fig. 1.4: Distribuições de velocidades de prótons medidas pela espaçonave Helios para três regimes de velocidades do vento solar: lento (coluna da esquerda), velocidades intermediárias (coluna central) e vento rápido (coluna da direita). A direção local do campo magnético interplanetário é indicada pelas retas tracejadas. As distâncias heliocêntricas das observações decrescem da linha superior para a linha inferior. Os maiores desvios da isotropia ocorrem nas menores distâncias do Sol, mas também ocorrem nas maiores velocidades. Os painéis B, H e J mostram também a presença de um feixe adicional de prótons, com velocidade média próxima ao valor local da velocidade de Alfvén. [18].

presença de um feixe adicional de prótons, alinhado com o campo  $\mathbf{B}_0$  local e com velocidade média próxima ao valor local da velocidade de Alfvén  $v_A = B_0/\sqrt{4\pi n_p m_p}$ , sendo  $n_p$  a densidade de número dos prótons.

A dependência da anisotropia de temperatura das VDF protônicas observadas no vento solar é melhor caracterizada na figura 1.5, a qual mostra esta dependência em função da distância heliocêntrica onde as medidas foram realizadas. Os diferentes regimes do vento solar são agrupados em seis intervalos distintos de velocidades e as medidas realizadas em cada intervalo estão conectadas por linhas retas. As medidas nas três curvas inferiores foram realizadas no regime de vento rápido e mostram uma clara tendência de aumento da razão  $T_{\parallel p}/T_{\perp p}$  com a distância. Nos casos de maior velocidade, a razão típica de temperaturas é  $T_{\parallel p}/T_{\perp p} < 1$ . Por outro lado, as duas curvas superiores foram obtidas quando o vento solar estava no regime lento ou intermediário. Não há uma clara tendência de aumento ou redução com a distância, mas em todos os casos a razão típica é  $T_{\parallel p}/T_{\perp p} > 1$ . Portanto, as observações realizadas indicam que as anisotropias típicas das FDV dos prótons do vento solar são:  $T_{\parallel p}/T_{\perp p} > 1$  para o vento solar lento e  $T_{\parallel p}/T_{\perp p} < 1$  para o vento rápido.

Distribuições com dispersão de velocidade distintas nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético ambiente  $\mathbf{B}_0$  possuem energia livre disponível para gerar instabilidades as quais irão transferir parte dessa energia livre para ondas, relaxando desta forma a distribuição em sentido ao equilíbrio termodinâmico. Historicamente, observações da anisotropia de temperatura dos prótons do vento solar foram inicialmente associadas com a sua dinâmica no interior da bainha magnética (*magnetosheath*) da magnetosfera terrestre. Ao entrar nesta região, o plasma do vento solar sofre uma compressão, resultando em um aumento na temperatura medida da FDV protônica na direção perpendicular a  $\mathbf{B}_0$  ( $T_{\perp}$ ) em relação

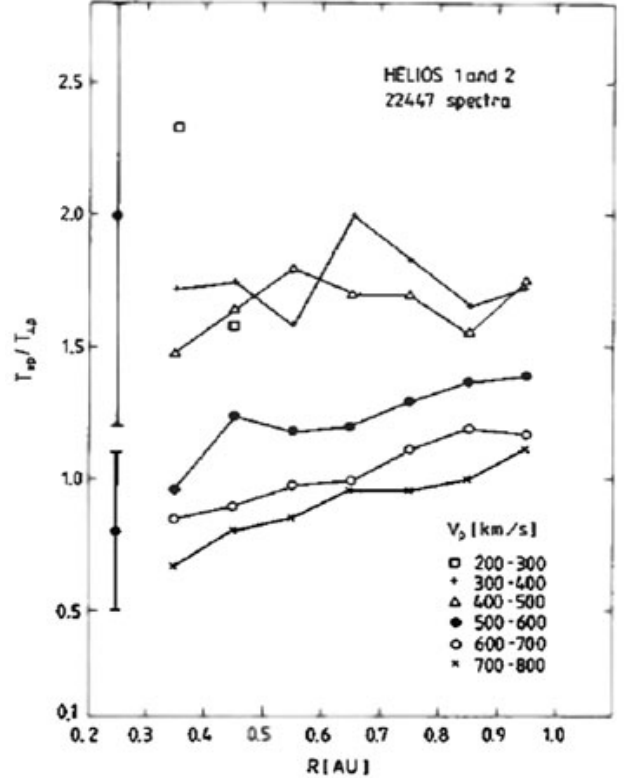


Fig. 1.5: Dependência da anisotropia de temperatura das funções de distribuição de prótons ( $T_{\parallel p}/T_{\perp p}$ ) no vento solar com a distância heliocêntrica. Os pontos experimentais estão agrupados em diferentes intervalos de velocidade do vento solar [18].



à temperatura paralela ( $T_{\parallel}$ ). Modelos iniciais baseados somente no movimento adiabático dos íons ao longo das linhas de  $\mathbf{B}_0$  não foram capazes de reproduzir os valores observados da razão  $T_{\perp}/T_{\parallel}$ , o que implica que efeitos cinéticos são os responsáveis por esta anisotropia, haja visto a baixa colisionalidade do plasma nesta região; em outras palavras, a interação dos prótons do vento solar com o campo de turbulência Alfvénica presente no local promove o aquecimento dos prótons preferencialmente na direção perpendicular a  $\mathbf{B}_0$  [48].

De acordo com a teoria cinética de plasmas, uma anisotropia de temperatura ( $T_{\perp}/T_{\parallel} \neq 1$ ) na FDV de uma determinada espécie de partículas indica a existência de energia livre, capaz de excitar certas instabilidades nas oscilações presentes no plasma [49, 50]. De forma recíproca, a presença dessas instabilidades indica a existência e impõe vínculos ao grau de anisotropia presente na FDV. Quando  $T_{\perp p} > T_{\parallel p}$  na FDV protônica, as instabilidades excitadas são a instabilidade próton-cíclotron (ou íon-cíclotron eletromagnética, EMIC), a qual ocorre na preferencialmente na direção paralela a  $\mathbf{B}_0$ , e a instabilidade de espelho (*mirror*), a qual ocorre na direção quase-perpendicular a  $\mathbf{B}_0$ . Por consequência, o esforço teórico e observacional se concentrou no estabelecimento da correlação inversa entre a anisotropia de temperatura  $T_{\perp p}/T_{\parallel p}$  e o parâmetro beta paralelo dos prótons  $\beta_{\parallel} = 8\pi n_p T_{\parallel p}/B_0$ , de forma a se estabelecer as condições marginais de instabilidade associadas com esta anisotropia.

Dentre as diversas publicações com este intuito estão os trabalhos de *Gary et al. (1994, 1997)* [51, 52]. Utilizando a teoria linear de instabilidades em um plasma bi-Maxwelliano e simulações híbridas em 1D e 2D e denotando por  $\gamma$  ( $> 0$ ) a taxa de crescimento da instabilidade normalizada pela frequência (angular) de plasma  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$ , os autores estabeleceram as condições marginais ( $\gamma_{\max} = 10^{-3}$ ) para a ocorrência das mencionadas instabilidades através da fórmula semiempírica

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 1 + \frac{S}{\beta_{\parallel}^{\alpha}}, \quad (1.1)$$

sendo  $S$  e  $\alpha$  parâmetros de ajuste. Para a EMIC, *Gary et al. (1997)* obtiveram  $(S, \alpha) \simeq (0, 43; 0, 42)$ , ao passo que para a instabilidade *mirror* obtiveram  $(S, \alpha) \simeq (0, 87; 0, 56)$ , sendo ambos os conjuntos válidos para a FDV protônica.

Por outro lado, no espaço interplanetário distante da bainha magnética, o plasma pode sofrer uma expansão, ao invés de uma compressão. Neste caso, a teoria adiabática prevê que a anisotropia se inverte, isto é,  $T_{\perp p}/T_{\parallel p} < 1$ . Nesta situação, ao invés das instabilidades EMIC e *mirror*, a teoria linear prevê a excitação das instabilidades *firehose* paralela ou oblíqua. Para estas, a condição marginal de instabilidade segue uma relação de proporcionalidade  $T_{\perp p}/T_{\parallel p} \propto \beta_{\parallel p}^{-\alpha}$  como em (1.1), porém agora a tendência é oposta. Para as instabilidades *firehose*, a condição marginal ( $\gamma_{\max} = 10^{-3}$ ) pode ser obtida, por exemplo, do

trabalho de *Hellinger et al. (2006)* [53],

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 1 - \frac{S}{(\beta_{\parallel} - \beta_0)^{\alpha}}, \quad (1.2)$$

com  $(S, \alpha, \beta_0) \simeq (0, 47; 0, 53; 0, 59)$  para a instabilidade firehose paralela e  $(S, \alpha, \beta_0) \simeq (1, 4; 1, 0; 0, 11)$  para a instabilidade firehose oblíqua. Cabe ressaltar mais uma vez que os processos recém mencionados não são os únicos fatores relevantes para a determinação de  $T_{\perp p}/T_{\parallel p}$ . Existem também as correlações da anisotropia de temperatura com distância e com o regime do vento solar ilustradas nas figuras 1.4 e 1.5. *Yoon (2017)* [54] fornece uma revisão recente das observações, dos processos relevantes e das consequências da anisotropia de temperatura das FDV protônicas na evolução das próprias distribuições e da turbulência presente no vento solar.

No trabalho de *Hellinger et al. (2006)* [53] foi realizado também um levantamento estatístico das FDV's protônicas observadas pela espaçonave WIND, com dados colhidos durante o período 1995–2001, tanto para o vento solar lento quanto para o vento solar rápido. A figura 1.6 mostra os resultados obtidos para o caso de vento solar lento. A escala logarítmica de cor indica a frequência de observações em um determinado ponto do par ordenado  $(\beta_{\parallel p}, T_{\perp p}/T_{\parallel p})$ . As curvas sobrepostas correspondem aos valores teóricos para a taxa de emissão máxima ( $\gamma_{\max}$ ), obtidos a partir da teoria linear de instabilidades para valores fixos dos parâmetros do diagrama, variando-se todos os outros parâmetros do plasma. A figura 1.6 mostra que em um ponto do espaço interplanetário suficientemente distante da bainha magnética, é possível observar, em diferentes períodos, tanto FDV protônicas com  $T_{\perp p}/T_{\parallel p} > 1$  quanto na razão oposta. A distribuição de observações é, a grosso modo, simétrica em relação  $T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 1$ , com uma ligeira preponderância de observações com  $T_{\perp p}/T_{\parallel p} < 1$ . As evidências apresentadas por *Hellinger et al. (2006)* mostraram que as instabilidades presentes no vento solar apresentam uma melhor correlação com as instabilidades mirror e firehose oblíqua (painel direito da figura 1.6) do que com as outras instabilidades.

Os dados observacionais mostraram também que, a despeito do fato de que uma FDV protônica típica muito provavelmente seja anisotrópica, é também muito provável que a mesma se encontre em um estado marginalmente estável, uma vez que as bordas direitas do diagrama “Brasil” na figura 1.6 correlacionam-se muito bem com as condições marginais de instabilidade  $\gamma_{\max} = 10^{-3}$  e, portanto, a FDV se encontrará em um ponto entre as curvas superiores e inferiores, ao invés de se encontrar acima ou abaixo das mesmas, como aconteceria se a distribuição possuísse uma anisotropia de temperatura grande o suficiente para excitar significativamente uma das instabilidades mencionadas.

Contudo, simultaneamente às observações das FDV, também observa-se usualmente um

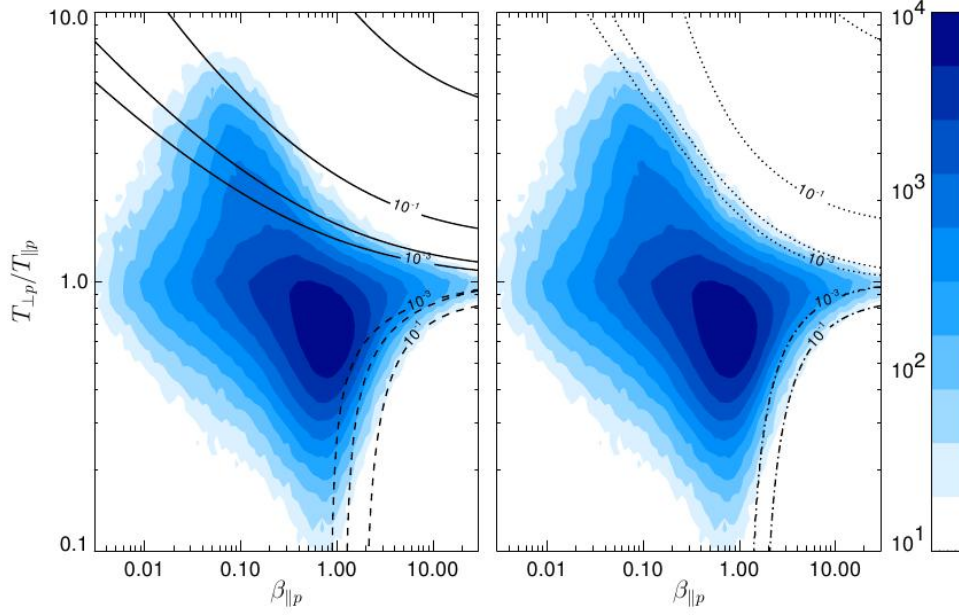


Fig. 1.6: (Escala de cor): frequência relativa de observações em  $(\beta_{\parallel}, T_{\perp}/T_{\parallel})$  obtidas no vento solar lento pela espaçonave WIND. As curvas superimpostas representam as taxas de amplificação máximas ( $\gamma_{\max}/\omega_p$ ) para as instabilidades. (Esquerda): (curvas contínuas) EMIC, (tracejadas) firehose paralela. (Direita): (pontilhadas) mirror, (ponto-tracejadas) firehose oblíquas [53].

nível ligeiramente elevado de turbulência eletromagnética Alfvénica presente no vento solar, acima do nível previsto por um plasma em equilíbrio termodinâmico. Esse fato indica que o nível observado de turbulência foi obtido a partir da relaxação da FDV protônica para o estado marginalmente estável por meio de interações onda-partícula não lineares. A determinação de qual é o processo físico por trás dessas evidências constitui-se em um problema importante para a física do vento solar. As referências [55–58] são apenas alguns poucos exemplos de trabalhos recentes encontrados na literatura. Uma lista e discussão mais extensas são fornecidas por Yoon (2017) [54].

Um outro aspecto até o momento inexplicado é também aparente na figura 1.6. As flutuações observadas no vento solar apresentam limites, para valores de  $\beta_{\parallel} > 1$  (borda direita do diagrama Brasil), aparentemente bem delimitados pelas condições de instabilidade (1.1) e (1.2). Contudo, observam-se também na figura 1.6 limites bem definidos para  $\beta_{\parallel} < 1$ , na borda esquerda do diagrama. Estes limites, até o momento, não possuem explicação teórica, uma vez que não são previstos pela teoria linear de instabilidades no plasma. É oportuno mencionar também que a mesma discussão envolvendo as FDV protônicas a respeito da relação entre as observações da anisotropia de temperatura com os critérios marginais das instabilidades excitadas pela anisotropia também tem sido realizada com relação às distribuições eletrônicas [59].

Para o presente trabalho, o aspecto relevante das pesquisas até o momento realizadas com relação à evolução das FDV e da turbulência no vento solar está no fato de que a vasta maioria das mesmas assume que as funções de distribuição de velocidades típicas no vento solar podem ser adequadamente descritas por uma combinação de FDV Maxwellianas ou bi-Maxwellianas. Como exemplos, além das referências já fornecidas pode-se citar também os trabalhos recentes de *Klein et al. (2015, 2018)* [60–62]. Porém, da mesma forma que já está bem estabelecido que as populações de alta energia das FDV eletrônicas são melhor ajustadas por distribuições kappa [31, 32, 63], trabalhos recentes têm reportado investigações referentes às distribuições das populações iônicas majoritárias do vento solar empregando distribuições kappa [33, 64–68]. Uma das evidências mais relevantes obtidas por estes trabalhos está no fato de que as distribuições iônicas são adequadamente ajustadas por distribuições kappa com índice  $\kappa_i \lesssim 5$ . De fato, a tabela 1.1 de *Livadiotis (2017)* [69] mostra valores típicos do parâmetro  $\kappa$  para diversos ambientes espaciais e astrofísicos (ver também [27]). Portanto, deve-se concluir que para se realizar uma análise completa e fisicamente relevante dos processos físicos relacionados com as funções de distribuição de velocidades presentes no vento solar e em outros ambientes espaciais e astrofísicos, é necessário levar em conta a natureza supertérmica dessas distribuições.

A vasta maioria dos trabalhos publicados na literatura que estudam a geração de instabilidades a partir da anisotropia de temperaturas foram realizados assumindo que as funções de distribuição de velocidades observadas em ambientes espaciais são adequadamente modeladas por combinações de distribuições Maxwellianas ou bi-Maxwellianas [54, 60, 61]. Contudo, de acordo com os argumentos apresentados acima referentes tanto às FDV eletrônicas quanto protônicas, essa suposição usualmente não é correta. Por esta razão, nos últimos anos começaram a surgir trabalhos destinados a estudar a geração dessas instabilidades a partir de distribuições do tipo kappa ou bi-kappa.

Até o presente momento, essa análise estava restrita às instabilidades que se propagam paralelas a  $\mathbf{B}_0$ : a EMIC e a firehose paralela. As referências [70–79] formam uma lista representativa de publicações envolvendo geração de instabilidades tanto em plasmas convencionais quanto em plasmas empoeirados. Uma revisão detalhada dos aspectos teóricos envolvendo a excitação de instabilidades paralelas ao campo magnético ambiente devido à anisotropias nas temperaturas de distribuições do tipo kappa é realizada por *Viñas et al. (2017)* [80].

Em comparação, há poucos estudos envolvendo instabilidades excitadas por  $\kappa$ VDF e que se propagam obliquamente a  $\mathbf{B}_0$ . Uma linha de pesquisa está focada no desenvolvimento de códigos computacionais que determinam as relações de dispersão e as taxas de cresci-

mento/amortecimento para os modos normais em um plasma supertérmico por meio de um procedimento numérico *ab initio*; isto é, a implementação computacional já se inicia pela descrição das funções de dispersão de velocidades por meio de tabelas numéricas, a partir das quais os cálculos dos componentes do tensor dielétrico e das soluções da equação de dispersão são todos realizados também numericamente [81–83].

Uma outra linha de pesquisa foi adotada pelo grupo de física dos plasmas do IF-UFRGS, a qual enfatiza a derivação de expressões analíticas fechadas para o tensor dielétrico de um plasma supertérmico ( $\kappa$  ou bi- $\kappa$ ). Uma primeira publicação considerou o efeito de uma  $\kappa$ VDF na propagação e amortecimento de ondas de Alfvén dispersivas que se propagam em ângulos muito oblíquos na magnetosfera terrestre [84]. Posteriormente, foram desenvolvidas expressões analíticas exatas para os tensores dielétricos de distribuições  $\kappa$  [85] e bi- $\kappa$  [86]. Estas representações são completamente gerais, por descreverem o tensor dielétrico frente a quaisquer combinações de espécies de partículas e de frequência, polarização e direção de propagação das ondas eletrostáticas e/ou eletromagnéticas em um plasma supertérmico magnetizado. Mais recentemente, a formulação de *Gaelzer et al. (2016)* [86] foi aplicada no estudo da geração da instabilidade firehose oblíqua em um plasma descrito por distribuições bi- $\kappa$  [87].

No presente trabalho buscamos estudar as condições de surgimento de instabilidades de anisotropia de temperatura empregando-se distribuições supertérmicas e comparar os resultados obtidos anteriormente com as observações realizadas por sondas interplanetárias e publicadas na literatura.

Os demais capítulos desta tese estão organizados da seguinte forma: no capítulo 2 analisamos a origem do formalismo atualmente utilizado para descrever plasmas supertérmicos, empregando funções  $\kappa$ ; no capítulo 3 introduzimos a formulação matemática para ondas eletromagnéticas/eletrostáticas na versão oblíqua; no capítulo 4 fazemos uma rápida discussão de uma abordagem inicial do trabalho, envolvendo ondas de Alfvén cinéticas propagando-se em plasmas supertérmicos. Essa abordagem foi posteriormente abandonada. No capítulo 5 desenvolvemos um formalismo geral que possibilitou a obtenção do tensor dielétrico de um plasma que contém populações de partículas descritas por funções de distribuição de velocidades na forma de distribuições bi- $\kappa$  (ou bi-Maxwellianas, como caso particular). Finalmente, no capítulo 6 fazemos a análise da instabilidade que surge no modo de propagação oblíqua, resultado final do trabalho.

Cabe ressaltar que os resultados obtidos ao longo do trabalho foram publicados em 2 artigos de revista indexada de circulação internacional.

Este texto é complementado por três apêndices, nos quais encontram-se os detalhes dos

---

cálculos envolvidos na derivação de alguns componentes do tensor dielétrico e os artigos publicados.

## Capítulo 2

# FORMALISMO DESCRITIVO PARA O ESPAÇO DE PLASMAS

### 2.1 Introdução

Neste capítulo analisamos a generalização feita na literatura para o formalismo de Boltzmann-Gibbs, através da teoria não-extensiva de Tsallis. E, na sequência, analisamos a relação existente entre as funções kappa e o parâmetro  $q$  da teoria de Tsallis. Por fim, abordamos os diferentes tipos de distribuição kappa presentes na descrição de fenômenos ligados aos fenômenos que ocorrem em plasmas espaciais.

### 2.2 Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs e a Mecânica Não-Aditiva de Tsallis

A posição ocupada pela estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) no cenário científico é incontestável, cuja aplicabilidade é bastante abrangente. Contudo, muitos fenômenos físicos não podem ser completamente descritos por esse formalismo. Isso se deve, em parte, ao fato de que a estatística de BG trata de fenômenos que se encontram no equilíbrio termodinâmico. Em regiões onde o equilíbrio térmico não prevalece, outros formalismos estatísticos devem ser utilizados. Um dos formalismos bastante utilizado e também criticado, tendo em vista o fato de seus pilares se basearem na aditividade e a extensividade de certas grandezas físicas, é o então chamado  $q$ -estatístico, desenvolvido por Constantino Tsallis no final da década de 80.

Para tanto, neste capítulo, será realizada a generalização da teoria BG através da teoria de Tsallis.

Como dito anteriormente, sistemas clássicos em equilíbrio há anos vem sendo descritos de forma satisfatória pela Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs (BG), cuja abordagem entrópica extensiva pode ser dada por [41, 88]:

$$S = k \ln W = -k \sum_i p_i \ln p_i, \quad (2.1)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $W$  representa o número de estados do sistema e  $p_i$  denota as probabilidades de configurações microscópicas.

No entanto, o equilíbrio térmico não é o único estado que muitos sistemas podem atingir. O espaço de plasmas presente no vento solar, magnetosfera terrestre e heliosfera, por exemplo, são sistemas altamente não-colisionais de partículas, com interações de longo alcance, os quais podem assumir estados meta-estáveis de não equilíbrio. Portanto, o formalismo de Boltzmann-Gibbs não descreve adequadamente fenômenos que ocorrem em plasmas espaciais, havendo assim, a necessidade de uma descrição teórica mais generalizada. Foi então que Tsallis [43], com o intuito de minimizar as dificuldades relacionadas a não extensividade, postulou a generalização a seguir:

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (x > 0; \ln_1 x = \ln x) \quad (2.2)$$

reescrevendo, conseqüentemente, a definição de entropia de BG na forma:

$$S_q = k \ln_q W \quad (S_1 = S_{BG}) \quad (2.3)$$

Vamos abordar o próximo caso geral, isto é,  $p_i$  arbitrária. Podemos expressar  $S_{BG}$  como o valor médio de  $\ln(1/p_i)$ . Desta forma, reescrevemos:

$$S_q = k \langle \ln_q(1/p_i) \rangle. \quad (2.4)$$

Onde, usando a definição

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x \quad (x > 0; \ln_1 x = \ln x), \quad (2.5)$$

obteremos:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}. \quad (2.6)$$

Esta função é considerada uma generalização da Mecânica Estatística de BG. Esta forma entrópica já havia sido descoberta na literatura com um fator de multiplicação diferente e está diretamente relacionada com a métrica desenvolvida por Hardy, Littlewood e Polya, em 1952, cujo caso particular  $q = 2$  recai na métrica de Pitágoras [43]. Existem diversas formas de provar que  $S_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{BG}$ . Por exemplo, dado um sistema composto  $A + B$ , constituído por 2 subsistemas (A) e (B), que são independentes em termos da fatorização das probabilidades dos microestados, isto é  $P_{ij}^{(A+B)} = P_i^{(A)} P_j^{(B)}$ , tal que [41]:

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B). \quad (2.7)$$



Tab. 2.1: Entropia  $S_{BG}$  e Entropia  $S_q$ , [43].

Entropia	Igual Probabilidade ( $p_i = 1/W, \forall i$ )	Probabilidades Genéricas ( $\forall p_i$ )
$S_{BG}$	$k \ln W$	$-k \sum_{i=1}^W p_i \ln_{2-q} p_i = k \sum_{i=1}^W p_i \ln(1/p_i)$
$S_q (q \in \mathbb{R})$	$k \ln_q W$	$k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} = k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q(1/p_i)$ $= -k \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q p_i$ $= -k \sum_{i=1}^W p_i \ln_{2-q} p_i$

no limite  $q \rightarrow 1$ ,  $S_q$  recai na formulação de BG para entropia aditiva, conforme (2.8). Segundo [41], um número crescente de evidências sugerem que a  $q$ -entropia descreve, de forma adequada, diversos sistemas físicos. A termoestatística não-extensiva, como definida em [41], possui propriedades matemáticas interessantes e tem tido aceitação de parte da comunidade Estatística, na qual muitos consideram sua generalização bastante adequada.

Nos detivemos, nesta seção, apenas ao entendimento da relação entre o parâmetro  $q$  e a dinâmica microscópica básica.

### 2.3 Distribuições Kappa no Contexto da Mecânica Estatística de Tsallis

A fim de modelar distribuições eletrônicas fora do equilíbrio termodinâmico observadas na magnetosfera, Vasyliūnas, em seu trabalho [89], adotou a distribuição kappa, assim conhecida devido ao parâmetro  $\kappa$  (kappa) utilizado em sua formulação, justificando um melhor ajuste para a descrição fenomenológica e, a partir daí, inúmeros trabalhos tem embasado a descrição do espaço de plasmas sob este formalismo [46]. A figura 2.1 mostra o número de artigos publicados na literatura entre 1980 e 2010. Observa-se um aumento quase exponencial no número de publicações ao longo destes trinta anos.

A distribuição de Maxwell-Boltzmann é amplamente conhecida como a base da teoria cinética dos gases. E, fazendo uso da associação do formalismo de Tsallis com distribuição Maxwelliana de velocidades frente a transformação dos índices:  $q = 1 + 1/\kappa$ , faremos nesta seção uma análise da vinculação entre as distribuições kappa e o formalismo de Tsallis.

Iniciaremos a análise Maxwelliana descrevendo a distribuição de velocidades  $\vec{u}$  das partículas de um gás, a qual pode ser derivada substituindo-se a energia cinética  $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu.u^2$  de um gás com partículas de massa  $\mu$  na distribuição de energias de Boltzmann:

$$p(\varepsilon; T) \sim e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \quad (2.8)$$

resultando em

$$p(u; \theta) \sim e^{-\left(\frac{u}{\theta}\right)^2}, \quad \frac{1}{2}\mu\theta^2 \equiv kT \quad (2.9)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura e  $\theta$  é o parâmetro característico da escala de rapidez. Uma das definições formais da função exponencial é dada pelo limite:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

ou equivalentemente,

$$e^x = (e^{-x})^{-1} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right]^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \quad (2.11)$$

Realizaremos a partir de agora a associação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty}.$$

Assim, teremos:

$$e^x = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)^{-\kappa}, \quad \kappa \in \mathbb{R}^+ \quad (2.12)$$

e, substituindo  $x = -(u/\theta)^2$ , reescrevemos a distribuição de Maxwell na forma:

$$p(u; \theta) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\frac{u}{\theta}\right)^2\right]^{-\kappa}. \quad (2.13)$$

Ao considerar o parâmetro escala de rapidez ( $\theta$ ) dependente de  $\kappa$ , ele torna-se denotado por  $\theta_\kappa$ . E o parâmetro  $\theta$  pode ser restaurado no limite:  $\theta = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \theta_\kappa$ . Assim, temos:

$$p(u; \theta_\kappa; \kappa) \sim \left[1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\frac{u}{\theta_\kappa}\right)^2\right]^{-\kappa}, \quad p(u; \theta) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} p(u; \theta_\kappa; \kappa). \quad (2.14)$$

onde  $p(u; \theta_\kappa; \kappa)$  fornece a deformação da distribuição de Maxwell em termos do índice  $\kappa$ .

A forma de (2.14) foi introduzida de forma empírica por Vasyliuñas [89] a fim de descrever distribuição de energia em todo o espectro, tanto para de baixas energias (Maxwellianas) quanto para altas energias (lei de potência). Entretanto, uma forma mais geral para diferentes gamas de kappa, introduzida por [89] caracteriza-se pela forma:

$$p^{(2)}(u; \theta_\kappa; \kappa) \sim \left[1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_\kappa}\right)^2\right]^{-\kappa-1}$$

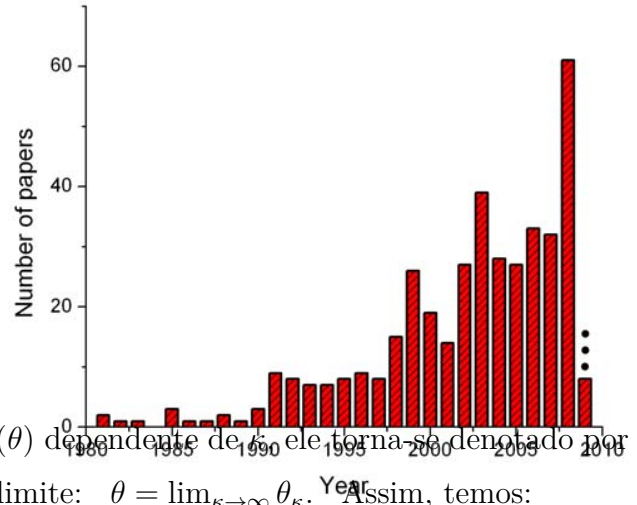


Fig. 2.1: Distribuição de artigos relacionados a distribuições kappa ou citam essas distribuições em seus títulos [46].

Consideramos a transformação do índice  $\kappa$  [43] abaixo:

$$\kappa \equiv \frac{1}{q-1}, \quad \text{ou} \quad q \equiv 1 + \frac{1}{\kappa} \quad (2.15)$$

da mesma forma para índices com (\*). A partir dela, os dois tipos de distribuição kappa em (2.13) e (2.15) tornam-se:

$$\begin{aligned} p^{(1)}(u; \theta_\kappa^*; \kappa^*) &\sim \left[ 1 + \frac{1}{\kappa^*} \cdot \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_\kappa^*} \right)^2 \right]_+^{-\kappa^*} \Rightarrow \\ p^{(1)}(u; \theta_q^*; q^*) &\sim \left[ 1 - (1 - q^*) \cdot \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_q^*} \right)^2 \right]_+^{\frac{1}{1-q^*}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} p^{(2)}(u; \theta_\kappa; \kappa) &\sim \left[ 1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_\kappa} \right)^2 \right]_+^{-\kappa-1} \Rightarrow \\ p^{(2)}(u; \theta_q; q) &\sim \left[ 1 - (1 - q) \cdot \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_q} \right)^2 \right]_+^{\frac{q}{1-q}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $\theta_q \equiv \theta_\kappa$  e  $\theta_q^* \equiv \theta_\kappa^*$ . No formalismo da Mecânica Estatística de Tsallis, existe uma forma fechada para a função

$$f(x; q) = [1 + (1 - q) \cdot x]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (2.18)$$

a qual é chamada de exponencial  $q$ -deformada, denotada por  $\exp_q(x)$ . Assim, escrevemos as funções kappa de primeira e segunda espécie da forma:

$$p^{(1)}(\vec{u}; \theta_\kappa^*; \kappa^*) \sim \exp_{q^*} \left[ - \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_\kappa^*} \right)^2 \right], \quad (2.19)$$

$$p^{(2)}(\vec{u}; \theta_\kappa; \kappa) \sim \exp_q \left[ - \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_\kappa} \right)^2 \right]^q, \quad (2.20)$$

onde consideramos diferentes índices  $q^*$ ,  $q$  e escalas de rapidez características  $\theta_q^*$ ,  $\theta_q$  para cada tipo de distribuição  $p^{(1)}$  e  $p^{(2)}$ , respectivamente.

Ainda, dentro do sistema da Mecânica Estatística de Tsallis, a distribuição de probabilidade canônica na descrição contínua do espectro de energia [46] é dada por:

$$p(\varepsilon; T_q; q) \sim \exp_q \left[ - \frac{1}{1_q(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\varepsilon}{k_b T_q} \right], \quad (2.21)$$

que é expressa em termos da temperatura física  $T_q$ . Onde  $1_q(u) \equiv 1 + (1 - q)u$ , que é a *função unitária  $q$ -deformada*.

Um aspecto fundamental da Mecânica Estatística de Tsallis reside na distribuição de Probabilidade  $P$ , que pode ser expressa em termos da distribuição de probabilidade ordinária  $p$  e vice-versa

$$P(\varepsilon; T_q; q) \sim p(\varepsilon; T_q; q)^q \sim \exp_q \left[ - \frac{1}{1_q(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\varepsilon}{k_B T_q} \right]^q. \quad (2.22)$$

O significado físico do momento estatístico é obtido pela distribuição de probabilidade, sendo denotada pelo símbolo  $\langle \rangle_q$ . E, no caso de uma função energia  $f(\varepsilon)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \langle f(\varepsilon) \rangle_q &= \frac{\int_0^\infty P(\varepsilon; T_q; q) f(\varepsilon) g_E(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty P(\varepsilon; T_q; q) g_E(\varepsilon) d\varepsilon} \\ &= \frac{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_q; q)^q f(\varepsilon) g_E(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_q; q)^q g_E(\varepsilon) d\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $g_E(\varepsilon)$  é a densidade de estados de energia. E a energia interna ( $U_q$ ) é estimada a partir do valor esperado da energia  $\langle \varepsilon \rangle_q$ , que é:

$$\begin{aligned} U_q = \langle \varepsilon \rangle_q &= \frac{\int_0^\infty P(\varepsilon; T_q; q) \varepsilon g_E(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty P(\varepsilon; T_q; q) g_E(\varepsilon) d\varepsilon} \\ &= \frac{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_q; q)^q \varepsilon g_E(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_q; q)^q g_E(\varepsilon) d\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e, considerando a densidade (tri-dimensional) de estados de energia, isto é  $g_E(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$ ,

$$U_q = \frac{3}{2} k_B T_q. \quad (2.25)$$

Portanto, a temperatura cinética  $T_K$ , definida por [46]

$$U_q \equiv \frac{3}{2} k_B T_K, \quad (2.26)$$

coincide com a temperatura física,  $T_K = T_q$ . Este resultado é obtido na medida em que o sistema é caracterizado pela mesma energia interna (energia cinética) ou temperatura cinética, independente do estado estacionário específico da relaxação. Isso implica que a temperatura física ( $T_q$ ) constitui a definição apropriada de temperatura, uma vez que ela é comum para todos os estados estacionários, independentemente do índice  $q$ .

Assim, as distribuições de probabilidade estacionária e *escorte* podem ser escritas como:

$$p(\varepsilon; T_q; q) \sim \exp_q \left[ - \frac{1}{1_q(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\varepsilon}{k_B T_q} \right],$$

$$P(\varepsilon; T_q; q) \sim \exp_q \left[ - \frac{1}{1_q \left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\varepsilon}{k_B T_q} \right]^q \quad (2.27)$$

ou, em termos de velocidades,

$$p(u; \theta_q; q) \sim \exp_q \left[ - \left( \frac{u}{\theta_q} \right)^2 \right], \quad P(u; \theta_q; q) \sim \exp_q \left[ - \left( \frac{u}{\theta_q} \right)^2 \right]^q, \quad (2.28)$$

com

$$\theta_q \equiv \sqrt{1_q \frac{3}{2} \cdot \frac{2k_B T_q}{\mu}}.$$

A coincidência da distribuição de probabilidade escorte em (2.28) com a distribuição kappa de 2ª espécie, em (2.20), torna-se evidente:

$$p^{(2)}(\vec{u}; \theta_q; q) = P(\vec{u}; \theta_q; q) \sim \exp_q \left[ - \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_q} \right)^2 \right]^q. \quad (2.29)$$

No entanto, se o momento estatístico for calculado em termos da distribuição de probabilidade ordinária, então (2.23) e (2.24) devem ser escritas como [46]:

$$\langle f(\varepsilon) \rangle_q = \frac{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_{q^*}; q^*) f(\varepsilon) g_E(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_{q^*}; q^*) g_E(\varepsilon) d\varepsilon} \quad (2.30)$$

e

$$U_q = \langle \varepsilon \rangle_{q^*} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty p(\varepsilon; T_{q^*}; q^*) \varepsilon g_E(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty P(\varepsilon; T_{q^*}; q^*) g_E(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{1}{1_{q^*}(1)} \cdot \frac{3}{2} k_B T_{q^*}, \quad (2.31)$$

onde, novamente, o asterisco indica parâmetros associados à distribuição de probabilidade ordinária a fim de diferenciá-la da distribuição *escorte*. E o sistema deve ser caracterizado pela mesma energia interna, independentemente da distribuição de probabilidade que está sendo considerada [46], ou seja,

$$U_{q^*} = U_q \equiv \frac{3}{2} k_B T_K \Rightarrow T_K = \frac{1}{1_{q^*}(1)} \cdot T_{q^*}. \quad (2.32)$$

Com isso, a temperatura cinética  $T_K$  coincide com a temperatura física ( $T_q$ ) somente quando valores esperados são estimados por meio da distribuição de probabilidade *escorte*. Por outro lado, quando os valores esperados são estimados por meio da distribuição de probabilidades ordinária,  $T_{q^*}$  não constitui uma temperatura bem definida, uma vez que depende do valor do índice  $q^*$ ,  $T_{q^*}(q^*) \sim 1_{q^*}(1) = (2 - q^*)$  e não coincide com  $T_K$ .

Então, a distribuição de probabilidades (ordinária) pode ser expressa em termos da temperatura cinética ( $T_K$ ), o que significa dizer que ela pode ser expressa em termos da temperatura física  $T_q$ .

$$p(\varepsilon; T_q; q^*) \sim \exp_{q^*} \left[ - \frac{1}{1_{q^*} \left(\frac{5}{2}\right)} \frac{\varepsilon}{k_B T_q} \right],$$

ou

$$p(u; \theta_q^*; q^*) \sim \left[ - \left( \frac{u}{\theta_q^*} \right)^2 \right], \quad (2.33)$$

com

$$\theta_q^* \equiv \sqrt{1_q^* \left( \frac{5}{2} \right) \frac{2k_B T_q}{\mu}}.$$

e verificamos a coincidência entre a distribuição de probabilidade ordinária (2.34) com a distribuição kappa de 1ª espécie em (2.19),

$$p^1(\vec{u}; \theta_q^*; q^*) = p(\vec{u}; \theta_q^*; q^*) \sim \exp_{q^*} \left[ - \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_q^*} \right)^2 \right]. \quad (2.34)$$

E, comparando (2.29) e (2.34), encontramos:

$$q^* = 2 - \frac{1}{q}, \quad \text{ou} \quad \kappa^* = \kappa + 1. \quad (2.35)$$

Leubner [44] em sua análise sobre a derivação da distribuição kappa a partir da Mecânica Estatística de Tsallis, mostrou que a distribuição kappa constitui a distribuição de probabilidade Canônica por extremização da entropia de Tsallis sob os vínculos do Ensemble Canônico. Contudo, em relação à 2ª limitação da energia interna, Leubner não considera o valor esperado *escorte*. Neste caso, tem-se que:

$$p(\varepsilon; T; q) \sim \left[ 1 - (1 - q) \cdot \frac{\varepsilon}{k_B T} \right]_+^{\frac{1}{q-1}}. \quad (2.36)$$

De fato, (2.36) foi a primeira distribuição obtida [39]. Entretanto, este resultado foi considerado problemático, principalmente por não ser invariante para uma seleção arbitrária de níveis de energia. Mas, em 1998 Tsallis [42] retomou este recurso e Leubner [44], usando (2.36) encontrou a distribuição kappa de 1ª espécie usando a transformação:

$$\kappa \equiv \frac{1}{1 - q}, \quad \text{ou}, \quad q \equiv 1 - \frac{1}{\kappa}, \quad (2.37)$$

a qual possui sinal oposto, se comparada a (2.15). Para Leubner [44], a distribuição kappa de 2ª espécie é uma forma reduzida da distribuição de 1ª espécie.

É importante destacar que todas as análises anteriores foram restritas aos intervalos  $\kappa^* > 0$  ou  $q^* > 1$ . As análises de Leubner e Vörös [90], para as distribuições bi-kappa, foram desenvolvidas para o intervalo  $\kappa^* < 0$  ou  $q^* < 1$ , em termos do índice  $q$ , tal que:

$$p^{bk}(\vec{u}; \theta_q^{**}; q^{**}) \sim \exp_{q^{**}} \left[ - \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_q^{**}} \right)^2 \right] + \exp_{2-q^{**}} \left[ - \left( \frac{|\vec{u} - \vec{u}_b|}{\theta_q^{**}} \right)^2 \right]. \quad (2.38)$$

Por fim, após a abordagem realizada, verificamos que existe conexão entre as distribuições kappa, derivadas empiricamente, e a Mecânica Estatística de Tsallis. De modo que a Estatística de Tsallis possibilita o entendimento das propriedades de várias distribuições de partículas e energia observadas em fenômenos observados em plasmas espaciais.

## 2.4 Versões para Distribuição Kappa

A distribuição  $p(u; \theta_\kappa; \kappa)$  descreve sistemas não somente para valores de  $\kappa \rightarrow \infty$  coincidentes com a Maxwelliana clássica, mas também para outros valores finitos de  $\kappa$ . Sendo a descrição Maxwelliana deformada dada por  $p(u; \theta_\kappa; \kappa)$ , esta é então chamada distribuição kappa.

Existem estudos voltados para a descrição de sistemas espaciais que empregam funções kappa isotrópicas, tal como [91, 92]:

$$f_\beta^\kappa(r, v) = \frac{n_\beta}{2\pi(\kappa w_{\kappa\beta}^2)^{3/2}} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 1/2)\Gamma(3/2)} \left(1 + \frac{v_\beta^2}{\kappa w_{\kappa\beta}^2}\right)^{-(\kappa+1)} \quad (2.39)$$

onde  $w_{\kappa\beta} = \sqrt{(2\kappa - 3)kT_\beta/\kappa m_\beta}$ , sendo que  $v_{T_\beta} = \sqrt{2kT_\beta/m_\beta}$  é a velocidade térmica,  $m_\beta$  é a massa da partícula da espécie  $\beta$ ,  $n_\beta$  é o número de densidade,  $T$  é a temperatura cinética,  $v$  é a velocidade das partículas e  $\Gamma(x)$  é a função Gama. E, novamente, no limite  $\kappa \rightarrow \infty$ , a função recai na forma Maxwelliana, enquanto que, para valores de  $\kappa$  finitos, apresenta um excedente na população supertérmica. Para representações unidimensionais, a função kappa apresenta uma cauda supertérmica característica, o que pode ser visto na figura 2.2.

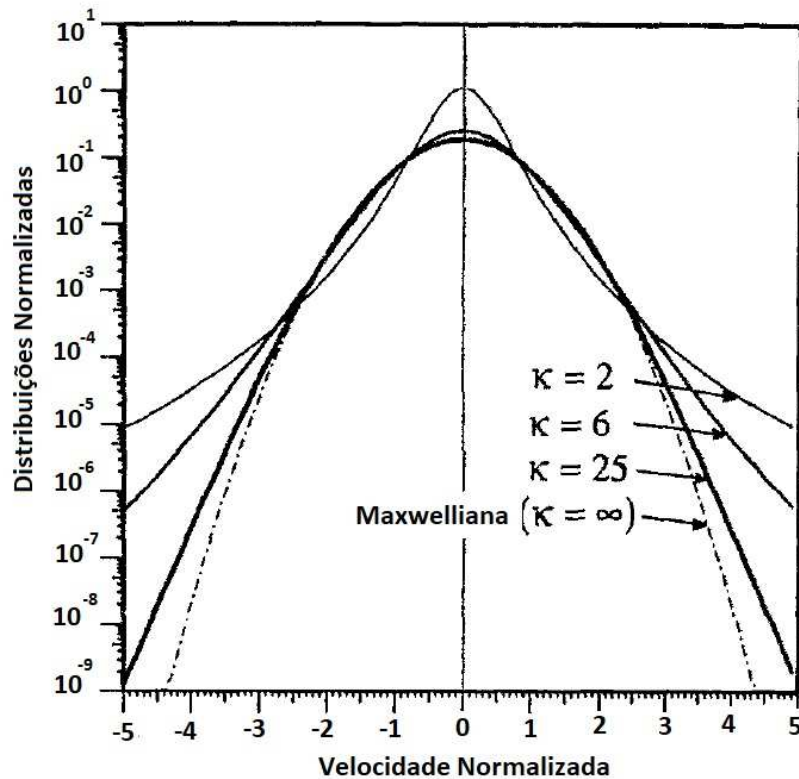


Fig. 2.2: Comportamento da Função kappa, para diferentes valores do índice  $\kappa$ , em comparação com a distribuição Maxwelliana ( $\kappa \rightarrow \infty$ ).

Outra forma variante da função kappa, denominada função bi-kappa traz a possibilidade

de anisotropia na temperatura efetiva [93]. Uma das primeiras versões para a distribuição bi-kappa, foi proposta por Summers e Thorne em 1991 [91]. A função bi-kappa permanece expressa em termos de um valor único para  $\kappa$ , porém admite valores distintos para temperaturas paralela e perpendicular

$$f_{\kappa\beta} = \frac{1}{\pi^{3/2}\Theta_{\beta\perp}^2\Theta_{\beta\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-1/2)} \left(1 + \frac{v_{\beta\parallel}^2}{\kappa\Theta_{\beta\parallel}^2} + \frac{v_{\beta\perp}^2}{\kappa\Theta_{\beta\perp}^2}\right)^{-(\kappa+1)} \quad (2.40)$$

onde

$$\Theta_{\beta\perp} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa}\right)^{1/2} v_{T_{\beta\perp}}, \quad \Theta_{\beta\parallel} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa}\right)^{1/2} v_{T_{\beta\parallel}}$$

e

$$v_{T_{\beta\perp}}^2 = \frac{2k_B T_{\beta\perp}}{m_\beta}; \quad v_{T_{\beta\parallel}}^2 = \frac{2k_B T_{\beta\parallel}}{m_\beta}.$$

Outra generalização da função kappa, chamada produto-bi-kappa ou PBK, permite a introdução da anisotropia tanto na temperatura quanto no valor do índice  $\kappa$ . Estas características tornam a função PBK mais flexível para descrição da influência do plasma na presença de instabilidades associadas à anisotropia. A função PBK é dada por

$$f_{\beta,\kappa}(\vec{v}) = \frac{n_{\beta 0}}{\pi^{3/2}\kappa_\perp\kappa_\parallel^{1/2}v_{\beta\perp}^2v_{\beta\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_\perp)\Gamma(\kappa_\parallel)}{\Gamma(\kappa_\perp-1)\Gamma(\kappa_\parallel-1/2)} \left(1 + \frac{v_\parallel^2}{\kappa_\parallel v_{\beta\parallel}^2}\right)^{-\kappa_\parallel} \left(1 + \frac{v_\perp^2}{\kappa_\perp v_{\beta\perp}^2}\right)^{-\kappa_\perp},$$

onde

$$v_{\beta\parallel}^2 = \frac{2k_B T_{\beta\parallel}}{m_\beta}, \quad v_{\beta\perp}^2 = \frac{2k_B T_{\beta\perp}}{m_\beta}.$$

As formas de distribuição tipo kappa, descritas acima, são objeto de estudo do grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, do qual este trabalho faz parte. E, nesta tese, abordaremos a derivação do tensor dielétrico para um plasmas contendo partículas descritas pela função de distribuição de velocidades supertérmicas do tipo bi-kappa.



## Capítulo 3

# TENSOR DIELÉTRICO GERAL PARA PLASMAS BI-KAPPA MAGNETIZADOS

### 3.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos o desenvolvimento da formulação matemática destinada ao estudo de ondas eletromagnéticas/eletrostáticas (e suas instabilidades) se propagando a ângulos oblíquos em uma plasma magnetizado quente, no qual as partículas são descritas por funções de distribuição de velocidades (VDFs) supertérmicas assimétricas, ou bi-kappas. A formulação apresentada aqui emprega a teoria cinética linear de plasmas e é uma extensão da generalização do tratamento desenvolvido nos artigos [84] e [85]. Esta formulação será posteriormente aplicada, no capítulo 4, para o estudo de ondas de Alfvén em plasmas supertérmicos com anisotropia de temperatura. O artigo, no qual os resultados apresentados neste capítulo foram publicados, encontra-se anexado ao final do texto.

### 3.2 Tensor Dielétrico para uma Função de Distribuição Bi-kappa

O tensor dielétrico para um plasma supertérmico do tipo bi-kappa é obtido da função de distribuição de velocidades cuja função, descrita abaixo, é semelhante à forma introduzida no capítulo 2,

$$f_s^{(\alpha)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = A_s^{(\sigma_s)} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_s w_{\parallel s}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_s w_{\perp s}^2} \right)^{-\sigma_s}, \quad (3.1)$$

a qual é válida para  $\sigma_s > 3/2$ , onde  $\sigma_s = \kappa_s + \alpha_s$  e

$$A_s^{(\sigma_s)} = \frac{1}{\pi^{3/2} w_{\parallel s} w_{\perp s}^2} \frac{\kappa_s^{-3/2} \Gamma(\sigma_s)}{\Gamma(\sigma_s - 3/2)} \quad (3.2)$$

é a constante de normalização. As quantidades  $w_{\parallel s}$  e  $w_{\perp s}$  são proporcionais às velocidades térmicas paralela e perpendicular, respectivamente.

A VDF (3.1) é uma generalização anisotrópica da distribuição isotrópica ( $w_{\parallel} = w_{\perp} = w$ ) adotada nas referências [84] e [85]. Nestes trabalhos, mostrou-se como escolhas adequadas dos parâmetros  $\alpha$  e  $w$  reproduzem e unificam formalmente funções de distribuição de

velocidades ( $\kappa$ ) aparentemente diferentes. Por exemplo, no caso anisotrópico, se estabelecemos  $\alpha = 1$  e

$$w_{\parallel,\perp}^2 = \theta_{\parallel,\perp}^2 = \left(1 - \frac{3}{2\kappa}\right) \left(\frac{2T_{\parallel,\perp}}{m}\right), \quad (3.3)$$

a função (3.1) se reduz à distribuição *bi-Lorentziana* introduzida por Summers e Thorne [91], a qual nomeamos de modelo ST91. Todas as expressões obtidas abaixo irão se reduzir aos resultados obtidos pelos modelo ST91 caso estas escolhas sejam feitas.

Contudo, o parâmetro  $\alpha$  pode ser também útil quando a função  $f_s^{(\alpha)}(v_{\parallel}, v_{\perp})$  descreve a função de distribuição de uma partícula com um número arbitrário de graus de liberdade. Se (3.1) descreve a probabilidade da função de distribuição de uma partícula com  $f$  graus de liberdade, pode-se definir, no caso isotrópico  $T_{\parallel} = T_{\perp} = T$ , o índice  $\kappa = \kappa_o$ , onde  $\kappa_o$  é o parâmetro kappa invariante introduzido por Livadiotis e McComas [47],  $\alpha = 1 + f/2$ ,  $w^2 = \theta^2 = 2T/m$ ,  $v^2 = \sum_{i=1}^f v_i^2$ , e a constante de normalização é  $A^{(f)} = \Gamma(\kappa_o + 1 + f/2)(\pi\kappa_o\theta^2)^{-f/2}/\Gamma(\kappa_o + 1)$ , obtendo assim a equação (22c) da referência [47].

Formas particulares da VDF bi-kappa (3.1) ou seu caso limite Maxwelliano (quando  $\kappa_s \rightarrow \infty$ ) tem sido frequentemente aplicadas na literatura a fim investigar instabilidades oriundas da anisotropia de temperatura que amplificam os auto-estados de propagação paralela ou oblíqua em um plasma magnetizado. De importância particular para o presente trabalho estão os efeitos de raio de giro finitos das partículas (raio de Larmor) na dispersão e amplificação/amortecimento dos modos de propagação oblíqua. Por exemplo, Yoon *et al* [94] descobriu a instabilidade Firehose oblíqua, que é uma instabilidade não propagante excitada em um plasma bi-Maxwelliano de alto beta quando os elétrons apresentam temperatura anisotrópica (com  $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ ) e que está continuamente conectada com o ramo esquerdo das ondas de Alfvén com o raio de giro dos íons tendendo a zero. A mesma instabilidade foi novamente encontrada por Hellinger e Matsumoto [95]. Outros estudos subsequentes consideraram a excitação de instabilidades de baixa-frequência para ângulos arbitrários em plasmas bi-Maxwellianos para outras situações, tais como plasmas de baixo beta [96], ou com fontes de energia livre adicionais tais como anisotropia de temperatura eletrônica [97], correntes paralelas ao campo magnético [98], cones de perda [99] e inhomogeneidades de densidade [100].

Estudos similares empregando distribuições supertérmicas são raros. Summers *et al.* [101] obteve as primeiras expressões para o tensor dielétrico geral de uma distribuição bi-kappa (ou bi-Lorentziana). Entretanto, suas expressões finais não são escritas sob uma forma fechada, isto é, para cada componente do tensor, permanece uma integral ao longo de  $v_{\perp}$  que deve ser numericamente calculada. Uma aproximação semelhante foi adotada posteriormente por Basu [102], Liu *et al.* [103] e Astfalk *et al.* [82].

Expressões analíticas, de forma totalmente fechada para as componentes do tensor dielétrico de um plasma supertérmico foram primeiro obtidas por Gaelzer e Ziebell [84, 85] ainda para o caso particular de distribuições isotrópicas ( $w_{\parallel s} = w_{\perp s}$ ). Aqui, obteremos o tensor dielétrico para a VDF bi-kappa dada por (3.1).

A forma geral do tensor dielétrico pode ser escrita como [4, 5, 85]:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \sum_s \chi_{ij}^{(s)}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.4a)$$

$$\chi_{ij}^{(s)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} (\Xi_{ns})_i (\Xi_{ns}^*)_j \mathcal{L}f_s}{\omega - n\Omega_s - k_{\parallel} v_{\parallel}} + \delta_{iz} \delta_{jz} \int d^3v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} Lf_s \right] \quad (3.4b)$$

onde  $\chi_{ij}^{(s)}$  é o tensor de suscetibilidade associado com partículas de espécie  $s$ , o conjunto  $\{i, j\} = \{x, y, z\}$  identifica as componentes cartesianas (no espaço  $E^3$ ) do tensor, com  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$  sendo a base em  $E^3$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f_s &= \omega \frac{\partial f_s}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} Lf_s, \\ Lf_s &= v_{\perp} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\perp}}, \\ \Xi_{ns} &= \frac{n}{\varrho_s} J_n(\varrho_s) \hat{\mathbf{x}} - i J'_n(\varrho_s) \hat{\mathbf{y}} + \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(\varrho_s) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

onde  $J_n(z)$  é a função de Bessel de primeiro tipo,

$$\varrho_s = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_s}, \quad \omega_{ps} = \sqrt{\frac{4\pi n_s q_s^2}{m_s}}, \quad \Omega_s = \frac{q_s B_0}{m_s c},$$

onde  $\omega_{ps}$  e  $\Omega_s$  são as frequências de plasma e cíclotron da espécie  $s$ , respectivamente,  $\omega$  e  $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{\mathbf{x}} + k_{\parallel} \hat{\mathbf{z}}$  são a frequência angular e o vetor de onda,  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$  ( $B_0 > 0$ ) é a indução magnética ambiente e os símbolos  $\parallel$  ( $\perp$ ) denotam as componentes paralela (perpendicular) dos vetores/tensores, em relação a  $\mathbf{B}_0$ .

Inserindo a função (3.1) em (3.4b) obtivemos o tensor suscetibilidade para um plasma bi-kappa. Maiores detalhes da derivação de  $\chi_{ij}$  são dados no Apêndice do artigo [86], o qual é também reproduzido no apêndice B. Aqui mostraremos apenas a forma final das expressões, dadas por:

$$\chi_{xx}^{(s)} = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} \left[ \xi_{os} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (3.5a)$$

$$\chi_{xy}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} n \left[ \xi_{os} \partial_{\mu_s} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (3.5b)$$

$$\chi_{xz}^{(s)} = -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n \Omega_s}{k_{\perp} w_{\perp s}} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (3.5c)$$

$$\chi_{yy}^{(s)} = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left[ \xi_{os} \mathcal{W}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{W}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (3.5d)$$

$$\chi_{yz}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \frac{k_{\perp} w_{\perp s}}{2\Omega_s} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (3.5e)$$

$$\chi_{zz}^{(s)} = -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \xi_{ns} \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3.5f)$$

onde

$$\mathcal{W}_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(\mu, \xi) = \frac{n^2}{\mu} \mathcal{Z}_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(\mu, \xi) - 2\mu \mathcal{Y}_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(\mu, \xi). \quad (3.6)$$

Os elementos fora da diagonal principal de  $\chi_{ij}$  obedecem relações de simetria usuais  $\chi_{xy} = -\chi_{yx}$ ,  $\chi_{xz} = \chi_{zx}$  e  $\chi_{yz} = -\chi_{zy}$ .

Nas equações (3.5a) a (3.5f), definimos os parâmetros

$$\mu_s = k_{\perp}^2 \rho_s^2, \quad \rho_s^2 = \frac{w_{\perp s}^2}{2\Omega_s^2}, \quad \xi_{ns} = \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{\parallel} w_{\parallel s}}.$$

O parâmetro  $\rho_s$  é o raio de giro (raio de Larmor) da partícula  $s$ , o qual depende do índice kappa. Assim,  $\mu_s$  é o raio de giro normalizado, proporcional à razão entre  $\rho_s$  e  $\lambda_{\perp}$ , o qual é a projeção perpendicular do comprimento de onda. A magnitude de  $\mu_s$  quantifica os efeitos do raio de Larmor finito na propagação da onda. Por outro lado, o parâmetro  $\xi_{ns}$  quantifica as interações lineares onda-partícula em um plasma de temperatura finita. Também em (3.5a) a (3.5f), a quantidade

$$A_s = 1 - \frac{w_{\perp s}}{w_{\parallel s}}$$

é o parâmetro de anisotropia que quantifica os efeitos do afastamento da VDFs de uma distribuição anisotrópica, devido a anisotropia de temperatura.

Finalmente, as funções  $\mathcal{Z}_{n, \kappa}(\alpha, \beta)$  e  $\mathcal{Y}_{n, \kappa}(\alpha, \beta)$  são chamadas *funções especiais de duas variáveis de plasma supertérmico*. Inicialmente definidas por Gaelzer e Ziebell [85], estas são dadas por

$$\mathcal{Z}_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(\mu, \xi) = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu x)}{(1 + x^2/\kappa)^{\lambda-1}} \mathcal{Z}_{\kappa}^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + x^2/\kappa}}\right), \quad (\nu^2 = 2\mu) \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{Y}_{n, \kappa}^{(\alpha, \beta)}(\mu, \xi) = \frac{2}{\mu} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{(1 + x^2/\kappa)^{\lambda-1}} \mathcal{Z}_{\kappa}^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + x^2/\kappa}}\right), \quad (\nu^2 = 2\mu), \quad (3.7b)$$

sendo  $\alpha$  o mesmo parâmetro introduzido em (3.1),  $\beta$  um novo parâmetro real e  $\lambda = \sigma + \beta$ , lembrando que  $\sigma = \kappa + \alpha$ . Adicionalmente, a função

$$\mathcal{Z}_{\kappa}^{(\alpha, \beta)}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa^{1/2 + \beta}} \frac{\Gamma(\lambda - 1)}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1 + s^2/\kappa)^{-(\lambda-1)}}{s - \xi}, \quad (\lambda > 1), \quad (3.8)$$

é denominada a *função de dispersão de plasma supertérmico generalizada* ( $\kappa$ PDF), tendo sido também definida por [85].

Em Gaelzer e Ziebell [85] foram deduzidas diversas propriedades matemáticas e representações fechadas da função  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ , algumas das quais serão reproduzidas mais adiante. No mesmo trabalho, foram deduzidas também algumas expansões das funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  em termos da função  $\kappa$ PDF e da *função de Larmor de plasma supertérmico* ou *função de raio de giro de plasma supertérmico*,

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(yx)}{(1+x^2/\kappa)^{\lambda-1}}, \quad (\text{com } y^2 = 2z). \quad (3.9)$$

Para o primeiro trabalho publicado [86], cuja cópia encontra-se no apêndice B, diversas novas propriedades e representações foram obtidas para todas as funções especiais envolvidas no cálculo do tensor dielétrico de um plasma bi-kappa. Estas novas propriedades serão apresentadas na próxima seção.

### 3.3 Novas Expressões para as Funções Kappa Especiais

#### 3.3.1 Função de Larmor ou raio de giro para plasma supertérmico

A função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  quantifica os efeitos físicos na propagação da onda devido ao raio de giro finito das partículas quando sua função de distribuição de probabilidade é descrita por uma  $\kappa$ FDV. Por esta razão, ela foi chamada em [85] como função de Larmor ou de raio de giro de plasma supertérmico ( $\kappa$ PGF - *kappa plasma gyroradius function*). A sua definição básica foi apresentada em (3.9) e diversas propriedades já foram obtidas por Gaelzer e Ziebell [85]. Nesta seção, novas propriedades serão deduzidas, as quais foram divulgadas por Gaelzer *et al.* [86].

O limite Maxwelliano desta função é a representação bem conhecida em termos da função de Bessel modificada do primeiro tipo,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \mathcal{H}_n(z) = e^{-z} I_n(z). \quad (3.10)$$

Uma forma de representação de  $\mathcal{H}$  em termos da função  $G$  de Meijer é dada por:

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\pi^{-1/2} \kappa}{\Gamma(\lambda-1)} G_{1,3}^{2,1} \left[ 2\kappa z \left| \begin{array}{c} 1/2 \\ \lambda-2, n, -n \end{array} \right. \right], \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\pi^{-1/2} \kappa}{\Gamma(\lambda-1)} G_{3,1}^{1,2} \left[ \frac{1}{2\kappa z} \left| \begin{array}{c} 3-\lambda, 1-n, 1+n \\ 1/2 \end{array} \right. \right]. \quad (3.11b)$$

A definição da função  $G$  de Meijer, bem como algumas de suas propriedades, podem ser consultadas no apêndice B de Gaelzer e Ziebell [85], onde também podem ser encontradas outras representações para esta função.

Embora a representação (3.11) para a função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  em termos da função  $G$  de Meijer seja completamente geral, do ponto de vista prático, visando-se uma implementação numérica de alto desempenho, a mesma não é particularmente útil. Até o presente momento, a função  $G$  é suportada somente por programas de computação algébrica, os quais, além de serem usualmente proprietários, também são muito mais lentos que programas compilados em linguagens de alto desempenho como Fortran Moderno ou C. Por outro lado, a função  $G$  é suportada pela excelente biblioteca MPMath [104], escrita em Python. Contudo, funções em Python ainda são lentas em comparação com Fortran ou C. Por estas razões, buscou-se outras representações para a função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  que possibilitassem sua implementação com linguagens de alto desempenho.

A função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  possui duas representações distintas dependendo se o parâmetro  $\lambda = \kappa + \alpha + \beta$  é inteiro ou não. Se  $\lambda \neq 2, 3, \dots$  [85],

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\pi^{-1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} \left[ \frac{\Gamma(n+2-\lambda)\Gamma(\lambda-3/2)}{\Gamma(\lambda-1+n)} (2\kappa z)^{\lambda-2} {}_1F_2 \left( \begin{matrix} \lambda-3/2 \\ \lambda-1-n, \lambda-1+n \end{matrix}; 2\kappa z \right) + \frac{\Gamma(\lambda-n-2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)} (2\kappa z)^n {}_1F_2 \left( \begin{matrix} n+1/2 \\ n+3-\lambda, 2n+1 \end{matrix}; 2\kappa z \right) \right], \quad (3.12a)$$

onde  ${}_1F_2 \left( \begin{matrix} a \\ b, c \end{matrix}; z \right)$  é uma função hipergeométrica generalizada. Maiores detalhes sobre essas funções podem ser vistos no apêndice B da referência [85].

Por outro lado, se  $\lambda = 2, 3, \dots$ , a função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  possui uma singularidade logarítmica na origem e, por isso, não pode ser representada por meio de séries de potências. Uma representação de  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  em termos de funções de Bessel modificadas foi obtida na referência [85], sendo

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{2\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} \left( \frac{\kappa z}{2} \right)^{\lambda/2-1} \sum_{s=0}^{\lambda-2} (-z)^s \binom{\lambda-2}{s} K_{n-(\lambda-2)+s}(\sqrt{2\kappa z}) I_{n+s}(\sqrt{2\kappa z}). \quad (3.12b)$$

### 3.3.1.1 Derivadas

Também é possível obter representações das derivadas de  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  em qualquer ordem. Aplicando o operador  $D^\kappa \equiv d^\kappa/dz^\kappa$  ( $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ ) na equação (3.11a), obtém-se

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(z) = \frac{\pi^{1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} (-z)^\kappa G_{3,1}^{2,4} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} 1/2, 0 \\ \kappa, \lambda-2, n, -n \end{matrix} \right. \right], \quad (3.13)$$

onde  $\mathcal{H}^{(k)} = d^k \mathcal{H}/dz^k$  e onde foi empregada a identidade

$$\frac{d^k}{dz^k} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] = (-z)^{-k} G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p), 0 \\ k, (b_q) \end{matrix} \right. \right].$$

A fórmula acima é válida para qualquer  $z$  e  $k \geq 0$ , mas o valor de  $\mathcal{H}$  na origem deve ser tratado separadamente. Aplicando o operador  $D^k$  na definição (3.9), podemos empregar a expansão em série de potência da função  $J_n^2(yx)$  dada, por exemplo, pela eq. (10.8.3) da ref. [105], de forma a ser possível o cálculo da integral no limite  $y \rightarrow 0$ . Este procedimento fornece

$$\frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(0)}{(2k)! \kappa} = \left(-\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{(\lambda-2)_{-k}}{\lambda-2} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-)^\ell \delta_{|n|,\ell}}{(k+\ell)!(k-\ell)!}, \quad (3.14a)$$

o qual é válido para  $\lambda > 2 + k$ . Nesta expressão,  $\delta_{n,m}$  é o símbolo (delta) de Kronecker e  $(a)_\ell = \Gamma(a+\ell)/\Gamma(a)$  é o símbolo de Pochhammer. Verifica-se facilmente que no caso  $k=0$  obtém-se

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(0) = \frac{\kappa}{\lambda-2} \delta_{n,0}, \quad (\lambda > 2), \quad (3.14b)$$

resultado este já apresentado na ref. [85].

Assim como com a função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , a sua derivada em qualquer ordem tem duas diferentes representações em termos das funções mais usuais, dependendo se  $\lambda$  é inteiro ou não. O caso de  $\lambda$  não inteiro encontra-se discutido no apêndice B, no artigo [86] anexo.

### 3.3.1.2 Regra da Soma

Se somamos (3.9) sobre todos os números harmônico e usamos a identidade [105, eq. 10.12.1]:

$$\sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} J_n^2 = 1,$$

a integral restante pode ser calculada pela definição da função beta  $B(a,b)$  [106, eq. 5.12.1], resultando:

$$\sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\kappa}{\lambda-2}. \quad (3.15)$$

Diversas outras regras de soma podem ser encontradas na mesma forma.

### 3.3.1.3 A função associada de Larmor de plasma supertérmico

A função a seguir também aparece nas expansões para as funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$ :

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \frac{\pi^{-1/2} \kappa}{\Gamma(\lambda-1)} G_{1,3}^{2,1} \left[ 2\kappa\mu \left| \begin{array}{c} 1/2 - k \\ \lambda - 2, n, -n \end{array} \right. \right], \quad (3.16)$$

a qual claramente se reduz à função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  quando  $k=0$ .

Quando  $k \neq 0$ , as seguintes relações entre  $\widetilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  e  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  são válidas:

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\mu^\ell \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(\ell)}(\mu)}{\Gamma(\ell + 1/2)}$$

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(\mu) = \mu^k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{2} - k\right)_{k-\ell} \widetilde{\mathcal{H}}_{n,\ell,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu).$$

A dedução destas relações recíprocas pode ser vista no apêndice B.

### 3.3.2 Função de Dispersão de Plasma Supertérmico

A função de dispersão de plasmas supertérmicos (kappa) foi definida no artigo que precede este trabalho [85], no qual é feita uma discussão de suas propriedades. Esta definição foi repetida em (3.8). Aqui apresentaremos algumas propriedades adicionais que são importantes para o trabalho em questão.

#### 3.3.2.1 Representação em termos da Função $G$ de Meijer

Tomando a representação (1.15) de [85] para  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  e (1.B15a) do mesmo artigo para a função de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = & - \frac{\pi^{1/2} \kappa^{-\beta-1} \xi}{\Gamma(\sigma - 3/2)} G_{2,2}^{1,2} \left[ \begin{matrix} \xi^2 \\ \kappa \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0, 3/2 - \lambda \\ 0, -1/2 \end{matrix} \right] \\ & + \frac{i\pi^{1/2} \Gamma(\lambda - 1)}{\kappa^{\beta+1/2} \Gamma(\sigma - 3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

O limite Mawelliano desta representação reduz-se a

$$Z(\xi) = -\sqrt{\pi} \xi G_{1,2}^{1,1} \left[ \begin{matrix} 0 \\ \xi^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0, -1/2 \end{matrix} \right] + i\sqrt{\pi} e^{-\xi^2},$$

expressão esta que corresponde à conhecida representação da função de Fried e Conte em termos das série hipergeométrica confluyente de Kummer [107].

Outra representação mais compacta é obtida se primeiro modificamos os limites da integral (I.11) em [85] no intervalo  $0 \leq s < \infty$ , definimos uma nova variável de integração  $s = \sqrt{u}$  e identificamos a integração resultante com a identidade (I.B12) de [85]. Procedendo desta forma, obtemos a representação equivalente:

$$Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = -\frac{\pi^{1/2} \kappa^{-\beta-1} \xi}{\Gamma(\sigma - 3/2)} G_{2,2}^{1,2} \left[ \begin{matrix} \xi^2 \\ \kappa \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0, 3/2 - \lambda \\ 0, -1/2 \end{matrix} \right]. \quad (3.18)$$

Tomando o limite  $\kappa \rightarrow \infty$  de (3.18), obtemos:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = Z(\xi) = \xi U \left( \begin{matrix} 1 \\ 3/2; -\xi^2 \end{matrix} \right),$$

onde  $U(\dots; z)$  é a função hipergeométrica confluyente de Tricomi. Esta é outra conhecida representação da função de Fried e Conte [107].



### 3.3.2.2 Função de Dispersão de Plasma Supertérmico Associada

Da mesma maneira que a  $\kappa$ PGF possui uma função associada, a  $\kappa$ PDF possui associada a si a função

$$\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\kappa^{-(k+\beta+1/2)}\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\sigma-3/2)} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^{2k} (1+s^2/\kappa)^{-(\lambda-3/2+k)}}{s-\xi}, \quad (3.19)$$

a qual possui a propriedade trivial

$$\tilde{Z}_{0,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{\kappa}\Gamma(\lambda-3/2)} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta-1/2)}(\xi).$$

A seguinte relação é deduzida no apêndice B:

$$\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\kappa^{-1/2}\Gamma(\lambda-1)}{2^k\Gamma(\lambda-3/2+k)} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k+\ell)}{2^\ell\Gamma(k-\ell)\ell!} (-\xi)^{k-\ell} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta-1/2)(k-\ell)}(\xi),$$

onde  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)(n)}(\xi) = d^n Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}/d\xi^n$ .

### 3.3.3 Funções Kappa Plasma de duas Variáveis

O tensor dielétrico de um plasma supertérmico (kappa) é escrito em termos das funções especiais  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  e  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ , coletivamente chamadas de funções kappa-Plasma de duas variáveis (2VKPs - *two-variables kappa plasma functions*), como pode ser verificado nas expressões (3.4a) – (3.6) para os componentes do tensor dielétrico de um plasma bi-kappa.

O limite Maxwelliano das 2VKPs recai em:

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \mathcal{H}_n(\mu)Z(\xi) \\ \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \mathcal{H}_n'(\mu)Z(\xi), \end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{H}_n(z)$  a função de Larmor de um plasma Maxwelliano, dada em (3.10), enquanto que  $Z(\xi)$  é a função de Fried e Conte.

#### 3.3.3.1 Outras representações integrais

As definições originais das funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  são dadas por (3.7a,b), em termos de uma integral simples envolvendo a função de dispersão de plasma  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  ( $\kappa$ PDF). Representações equivalentes, em termos de integrais duplas, também são possíveis, sendo dadas por

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{2\pi^{-1/2}}{\kappa^{1/2+\beta}} \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{x J_n^2(\nu x)}{s-\xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)} \quad (3.20a)$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{2\pi^{-1/2}}{\kappa^{1/2+\beta}} \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{s-\xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)}, \quad (3.20b)$$

onde  $\nu^2 = 2\mu$ ,  $\lambda = \sigma + \beta$  e  $\sigma = \kappa + \alpha$ .

Outras definições em termos de uma integral simples podem ser obtidas. Se trocarmos a ordem das integrações em (3.20a) e (3.20b) e definirmos novas variáveis de integração por  $x = \sqrt{\chi}t$ , onde  $\chi = 1 + s^2/\kappa$ , a integral em  $t$  pode ser identificada com (3.9), de onde se obtém

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{\pi^{-1/2}}{\kappa^{\beta+1/2}} \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1+s^2/\kappa)^{-(\lambda-2)}}{s-\xi} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa} \right) \right] \quad (3.21a)$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{\pi^{-1/2}}{\kappa^{\beta-1/2}} \frac{\Gamma(\lambda-2)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1+s^2/\kappa)^{-(\lambda-4)}}{s-\xi} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa} \right) \right]. \quad (3.21b)$$

### 3.3.3.2 Representações em séries

Diversas propriedades, representações, derivações, expansões e outras formas das funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  podem ser encontradas na referência [85] e no apêndice B. Serão destacadas aqui algumas expansões em séries destas funções, as quais permitem a implementação numérica do cálculo das mesmas.

**3.3.3.2.1 Séries para  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$ .** Expansões em séries úteis para o cálculos das funções  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  e  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  quando  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$  são:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{2\Gamma(\lambda-1/2)\xi}{\kappa^{\beta+1}\Gamma(\sigma-3/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1/2)_k}{(3/2)_k} \left( -\frac{\xi^2}{\kappa} \right)^k \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+k+1/2)}(\mu) \\ &\quad + \frac{i\pi^{1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}[\mu(1+\xi^2/\kappa)]}{(1+\xi^2/\kappa)^{\lambda-2}}, \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{2\Gamma(\lambda-3/2)\xi}{\kappa^{\beta}\Gamma(\sigma-3/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-3/2)_k}{(3/2)_k} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+k-1/2)'}(\mu) \left( -\frac{\xi^2}{\kappa} \right)^k \\ &\quad + \frac{i\pi^{1/2}\Gamma(\lambda-2)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'}[\mu(1+\xi^2/\kappa)]}{(1+\xi^2/\kappa)^{\lambda-4}}, \end{aligned} \quad (3.22b)$$

ambas em termos da  $\kappa$ PGF definida em (3.9).

**3.3.3.2.2 Séries gerais.** Para valores arbitrários das variáveis  $\mu$  e  $\xi$ , as expansões em séries ficam:

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widetilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) \widetilde{\mathcal{Z}}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi), \quad (3.23a)$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widetilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'}(\mu) \widetilde{\mathcal{Z}}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)}(\xi), \quad (3.23b)$$

ambas em termos da  $\kappa$ PGF associada (3.16) e da  $\kappa$ PDF associada (3.19).

Este capítulo mostrou um estudo e o desenvolvimento de diversas funções especiais envolvidas na descrição física de plasmas supertérmicos. Primeiramente derivamos o tensor que

está sendo empregado no estudo da propagação e amplificação/amortecimento em plasmas anisotrópicos supertérmicos.

As componentes do tensor foram escritas em termos das funções kappa plasma especiais, que devem ser calculadas numericamente para aplicações práticas. O formalismo desenvolvido neste capítulo será aplicado para problemas específicos que envolvem instabilidades em plasmas tipo kappa, o que será discutido nos próximos capítulos.

## Capítulo 4

# ONDAS DE ALFVÉN DISPERSIVAS EM PLASMAS SUPERTÉRMICOS COM ANISOTROPIA DE TEMPERATURA

### 4.1 Introdução

Neste capítulo fizemos o cálculo das componentes do tensor dielétrico para ondas de Alfvén Dispersivas em plasmas supertérmicos. Todavia, como não havíamos encontrado instabilidades, optamos por um redirecionamento do trabalho, o qual culminou no conteúdo apresentado nos capítulos 5 e 6. O mesmo trabalho foi desenvolvido por Liu, Wang e Hu [108], cujos resultados são equivalentes aos que já haviam sido obtidos por Gaelzer e Ziebell [84].

### 4.2 Ondas de Alfvén Dispersivas

Ondas de Alfvén Dispersivas (DAW - *Dispersive Alfvén Waves*) são ondas eletromagnéticas de baixa frequência que se propagam obliquamente a campos magnéticos com grande componente perpendicular do vetor de onda ( $k_{\perp}$ ) em relação ao campo magnético ambiente  $\mathbf{B}_0$ . Estas ondas consistem em uma modificação das ondas de Alfvén transversais (*shear Alfvén waves*) para o caso de propagação quase-perpendicular. Essa modificação ocorre através do acoplamento do modo magnetosônico quando a componente perpendicular do vetor de onda é muito maior que a componente paralela [109].

Quando a escala espacial perpendicular das DAW fica perto do raio de giro do íon  $\rho_i$  e o plasma se encontra em um regime de plasma beta moderado ( $m_e/m_i \ll \beta_e \ll 1$ , onde  $\beta_e$  é a razão da pressão térmica dos elétrons do plasma sobre a pressão magnética, e  $m_e$  e  $m_i$  são as massas do elétron e do íon, respectivamente), as DAW são denominadas ondas de Alfvén cinéticas (KAW - *kinetic Alfvén wave*), o que enfatiza a relativa importância de efeitos cinéticos na propagação das ondas. Por outro lado, quando a escala espacial das DAW fica próxima do comprimento de inércia do elétron  $\lambda_e = c/\omega_{pe}$  e o plasma está no regime de beta pequeno ( $\beta_e \ll m_e/m_i$ ), os efeitos mais importantes sobre a propagação das

ondas ocorrem devido à inércia dos elétrons e, por esta razão, a onda é chamada de onda de Alfvén inercial (IAW - *inertial Alfvén wave*).

Hasegawa [110] foi o primeiro a sugerir que campos elétricos paralelos associados a KAWs poderiam ser um mecanismo eficiente para acelerar partículas ao longo de linhas de campo magnético. Muitos trabalhos com DAWs foram realizados ao longo do tempo, mas estes se limitavam a uma descrição através da distribuição de velocidades de plasma assumindo que no estado de equilíbrio a forma é a de uma Maxwelliana isotrópica. Entretanto, muitas observações, nos últimos anos, indicam que as partículas no espaço e plasma astrofísico têm uma melhor descrição de suas velocidades através de uma lei de potência. Sendo assim, como já mencionado, distribuições tipo kappa são utilizadas ao longo deste capítulo a fim de descrever DAWs.

### 4.3 Funções de Distribuição Anisotrópicas

As distribuições bi-kappa (BK) e produto bi-kappa (PBK) são, respectivamente, dadas por:

$$f_{\kappa}^{BK}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\theta_{\perp}^2 \theta_{\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\kappa^{3/2} \Gamma(\kappa - 1/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa \theta_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa \theta_{\parallel}^2} \right)^{-(\kappa+1)}$$

$$f_{\kappa_{\perp}, \kappa_{\parallel}}^{PBK}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\theta_{\perp}^2 \theta_{\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\kappa_{\parallel}^{1/2} \Gamma(\kappa + 1/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_{\perp} \theta_{\perp}^2} \right)^{-(\kappa+1)} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_{\parallel} \theta_{\parallel}^2} \right)^{-(\kappa+1)},$$

onde  $\theta_{\perp}^2 = (1 - 3/2\kappa)(2T_{\perp, \parallel}/m)$  para a distribuição BK, enquanto  $\theta_{\perp}^2 = (1 - 1/\kappa_{\perp})(2T_{\perp}/m)$  e  $\theta_{\parallel}^2 = (1 - 1/2\kappa_{\parallel})(2T_{\perp, \parallel}/m)$  para a distribuição PBK. Ambas as distribuições acima, reduzem-se à FDV bi-Maxwelliana (BM), no limite  $\kappa \rightarrow \infty$ :

$$f^{BM}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n}{\pi^{3/2}} \frac{1}{v_{T\perp}^2} \frac{1}{v_{T\parallel}} \exp \left( -\frac{v_{\perp}^2}{v_{T\perp}^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{v_{T\parallel}^2} \right),$$

onde  $v_{T(\perp, \parallel)} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \theta_{\perp, \parallel}$ .

As distribuições supertérmicas BK e PBK serão empregadas para a obtenção das relações de dispersão e taxas de absorção/amplificação em cada caso, seguindo procedimentos padrões da teoria cinética de plasmas [4, 5]. De acordo com os mesmos, é necessário realizar-se o cálculo das componentes do tensor dielétrico do plasma para cada FDV, a partir do qual as relações de dispersão e as taxas  $\gamma(\mathbf{k})$  são calculadas. Este procedimento envolve a integração das distribuições ao longo de contornos de integração que envolvem denominadores ressonantes, os quais descrevem matematicamente o processo de integração linear onda-partícula [4, 5].

Contribuições recentes encontradas na literatura [71, 72, 92, 111–114] dedicaram-se ao mesmo problema, fazendo o emprego da distribuição BK e apenas na direção paralela ao campo magnético ambiente ( $k_{\perp} = 0$ ), sendo  $k_{\perp}$  a componente perpendicular do vetor de onda. Vale ressaltar que o grupo de física de plasmas do IF-UFRGS também contribuiu para o estudo da propagação e instabilidade de ondas em plasmas tanto Maxwelliano quanto supertérmicos, com ênfase em plasmas empoeirados [70, 74–77, 115–119]. E como mencionado no início deste capítulo a mesma problemática discutida aqui foi abordada por [84, 108]

#### 4.4 Tensor Dielétrico para um Plasma Magnetizado

Em nossos cálculos adotamos a forma geral das componentes do tensor dielétrico:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0} (\Pi_{n\alpha}^*)_i (\Pi_{n\alpha})_j}{\omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right] + \delta_{iz} \delta_{jz} \int d^3v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} L f_{\alpha 0},$$

sendo

$$\begin{aligned} \Pi_{n\alpha} &= \frac{n}{\rho_{\alpha}} J_n(\rho_{\alpha\alpha}) \hat{x} + i J'_n(\rho_{\alpha\alpha}) \hat{y} + \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(\rho_{\alpha}) \hat{z} \\ L f_{\alpha 0} &= v_{\perp} \frac{\delta f_{\alpha 0}}{\delta v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\delta f_{\alpha 0}}{\delta v_{\perp}} \\ \mathcal{L} f_{\alpha 0} &= \omega \frac{\delta f_{\alpha 0}}{\delta v_{\perp}} + k_{\parallel} f_{\alpha 0} = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\delta f_{\alpha 0}}{\delta v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\delta f_{\alpha 0}}{\delta v_{\parallel}} \\ \omega_{p\alpha}^2 &= \frac{4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \\ \Omega_{\alpha} &= \frac{q_{\alpha} B_0}{m_{\alpha} c} \\ \rho_{\alpha} &= \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \\ J_n(\rho_{\alpha}) &= \frac{\rho_{\alpha}^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (\rho_{\alpha}/2)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \\ J_{-n}(\rho_{\alpha}) &= (-)^n J_n(\rho_{\alpha}), \end{aligned}$$

sendo  $J_n(\rho)$  a função de Bessel de ordem  $n$ .

Seja a distribuição tipo Bi-kappa abaixo,

$$f_{\alpha, \kappa}^{(\alpha)}(\vec{v}) = \frac{1}{\pi(3/2) \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-\kappa_a + \alpha_a}, \quad (4.1)$$

com  $(\kappa_a + \alpha_a > 3/2)$ . De acordo com a metodologia de Lysak e Lotko [120] para ondas de Alfvén dispersivas (DAW), na qual adota-se ondas de baixa frequência ( $\omega \ll \Omega_{\alpha}$ ) com propagação quase-perpendicular ( $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ) em um plasma de baixo  $\beta_e \ll 1$ , a equação de

dispersão para ondas de Alfvén dispersivas se reduz a [84, 108, 120]:

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - N_{\parallel}^2 & N_{\perp} N_{\parallel} \\ N_{\perp} N_{\parallel} & \varepsilon_{zz} - N_{\perp}^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2)$$

com  $\varepsilon_{yy} E_y = 0$ , a qual determina o modo rápido. Assim, para as DAW:

$$\varepsilon_{zz} \left( \varepsilon_{xx} - \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} \right) - \varepsilon_{xx} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} = 0.$$

Consequentemente, calculemos somente as componentes  $\varepsilon_{xx}$  e  $\varepsilon_{zz}$  do tensor dielétrico.

Para  $\varepsilon_{xx}$ ,

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{v_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0} (\Pi_{n\alpha}^*)_x (\Pi_{n\alpha})_x}{\omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right]$$

Substituindo  $\Pi_{n\alpha}$ , resulta

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{v_{\perp} [n J_n(r_a)/(r_a)]^2 \mathcal{L} f_{\alpha 0}}{\omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}}.$$

E, para a componente  $\varepsilon_{zz}$ ,

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{v_{\parallel}^2 J_n^2(r_a) \mathcal{L} f_{\alpha 0}}{v_{\perp} \omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} + \int d^3 v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \mathcal{L} f_{\alpha 0}.$$

Aplicando os operadores diferenciais, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f_a &= \omega \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} L f_{\alpha 0} = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \\ L f_{\alpha 0} &= v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}}. \end{aligned}$$

Com a forma genérica da distribuição Bi-kappa dada por (4.1) e após a realização dos cálculos mostrados no apêndice A, as componentes tomam a forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_a} \left[ \xi_{oa} \mathcal{Z}_{n, \kappa_a}^{(\alpha_a, 2)}(\mu_a, \xi_{\eta a}) + \frac{1}{2} A_a \partial_{\xi_{\eta a}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{\eta a}) \right] \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{(\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \xi_{na}}{1 - A_a} \xi_{na} \partial_{\xi_{na}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{na}). \end{aligned}$$

É importante mencionar que estas expressões para  $\varepsilon_{xx}$  e  $\varepsilon_{zz}$  já aparecem nas equações (3.4a), (3.5a) e (3.5f).

## 4.5 Resultados Encontrados na Literatura

Em seu artigo intitulado "Ondas de Alfvén Dispersivas em Plasmas com partículas anisotrópicas supertérmicas", Liu, Wang e Hu [108] calculam a relação de dispersão e a taxa de amortecimento das DAWs para um plasma com elétrons e íons anisotrópicos não-extensivos,

no contexto da relação de dispersão cinética para plasma de baixo  $\beta$ , com baixa frequência e assumindo comprimento de onda curto. Os autores assumem a forma da distribuição bi- $q$  abaixo:

$$f_\alpha(\mathbf{v}) = A_{q_\alpha} \left[ 1 - \frac{q_\alpha - 1}{5q_\alpha - 3} \left( \frac{v_\parallel^2}{\sigma_{\alpha\parallel}^2} + \frac{v_\perp^2}{\sigma_{\alpha\perp}^2} \right) \right]^{\frac{1}{q_\alpha - 1}} \quad \left( \frac{3}{5} < q < 1 \right),$$

que é normalizada por  $\int f_\alpha(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$  e cuja constante de normalização é dada na forma:

$$A_{q_\alpha} = \frac{1}{\pi}^{3/2} \left( \frac{1 - q_\alpha}{5q_\alpha - 3} \right)^{3/2} \frac{1}{\sigma_{\alpha\perp} \sigma_{\alpha\parallel}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1 - q_\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1 - q_\alpha} - \frac{3}{2}\right)}.$$

Aqui Liu adota a mesma relação de dispersão para KAW em um plasma uniforme que utilizamos no início deste capítulo:

$$D = \epsilon_{zz} \left( \epsilon_{xx} - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \right) - \epsilon_{xx} \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} = 0$$

As expressões para os elementos do tensor dielétrico já feitas as aproximações tomam a forma:

$$\epsilon_{xx} \approx \frac{c^2}{v_A^2} \left( 1 - \frac{3}{4} k_\perp^2 \sigma_{i\perp}^2 \right) - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \beta_\parallel \zeta$$

onde  $\zeta$  revela efeitos de anisotropia de temperatura das espécies e  $k_\perp \sigma_{i\perp}$  tem origem nos efeitos do raio de giro dos íons.

$$\epsilon_{zz} \approx \frac{1}{k_\parallel^2 \lambda_{De}^2} \left( \frac{3q_e - 1}{5q_e - 3} - k_\perp^e \sigma_{e\perp}^2 \right) + \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} \beta_\perp \eta + i\delta_e$$

Liu testa alguns limites da equação de dispersão, dentre os quais está o Cinético, mostrado abaixo:

$$\left[ \frac{1}{k_\parallel^2 \lambda_{De}^2} \left( \frac{3q_e - 1}{5q_e - 3} - k_\perp^e \sigma_{e\perp}^2 + \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} \beta_\perp \eta \right) \right] \left[ \frac{c^2}{v_A^2} \left( 1 - \frac{3}{4} k_\perp^2 \sigma_{i\perp}^2 \right) - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \beta_\parallel \zeta - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \right] - \left[ \frac{c^2}{v_A^2} \left( 1 - \frac{3}{4} k_\perp^2 \sigma_{i\perp}^2 \right) - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \beta_\parallel \zeta \right] \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} = 0.$$

Em seus cálculos Liu encontraram que para as IAW, os efeitos da temperatura anisotrópica terão um efeito significativo somente quando  $\zeta \sim 1/\beta_\parallel \gg m_i/m_e$  e este estado extremo raramente ocorre. Portanto, a mudança mais relevante ocorre para KAW quando  $\zeta \sim 1$  e, por isso, consideram apenas a natureza das KAW e analisando numericamente a frequência e taxa de amortecimento na figura 4.1.

Da análise realizada acima Liu, Wang e Hu [108] encontraram que em plasmas de baixo  $\beta$ , a temperatura anisotrópica dos elétrons não gera instabilidades em KAW, enquanto Chen e Wu [97] encontraram que a anisotropia de temperatura dos elétrons conduz a instabilidades de KAW para plasmas de alto  $\beta$ .



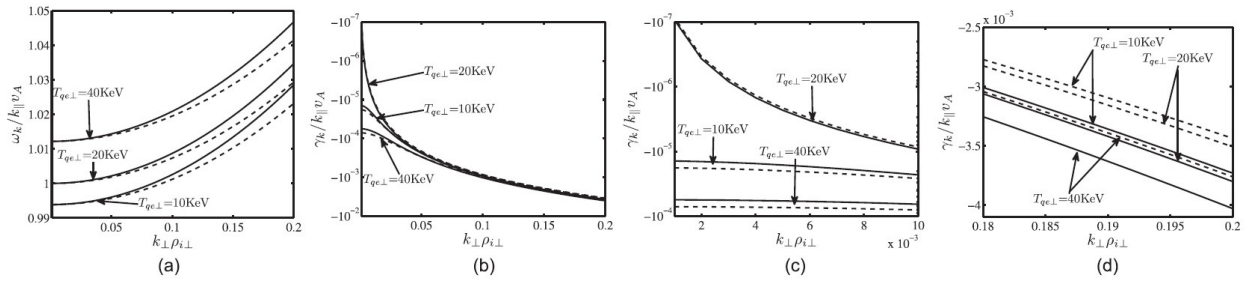


Fig. 4.1: Frequência e taxa de amortecimento de KAW versus  $k_{\perp}\rho_{i\perp}$  são mostradas em (a) e (b) e taxas de amortecimento em regimes de pequeno e grande número de onda são mostradas em (c) e (d) [108].

## Capítulo 5

### EQUAÇÃO DE DISPERSÃO PARA ONDAS DE BAIXA FREQUÊNCIA EM PLASMAS DO TIPO BI-KAPPA

Este capítulo apresenta a primeira etapa do trabalho: a álgebra das equações, das quais apresentaremos uma descrição dos cálculos que foram implementados a fim de encontrarmos a equação de dispersão e a subsequente análise dos modos de instabilidade no limite Maxwelliano.

#### 5.1 O tensor Dielétrico e a Equação de Dispersão

Dadas as componentes do tensor dielétrico na forma abaixo, tal como fora expresso em termos da suscetibilidade nas equações (3.4a,b) e (3.5a-f), temos:

$$\varepsilon_{xx}^{(s)} = 1 + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} \left[ \xi_{os} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (5.1a)$$

$$\varepsilon_{xy}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} n \left[ \xi_{os} \partial_{\mu_s} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (5.1b)$$

$$\varepsilon_{xz}^{(s)} = -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n \Omega_s}{k_{\perp} w_{\perp s}} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (5.1c)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(s)} = 1 + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left[ \xi_{os} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (5.1d)$$

$$\varepsilon_{yz}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \frac{k_{\perp} w_{\perp s}}{2 \Omega_s} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (5.1e)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(s)} = 1 - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \xi_{ns} \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (5.1f)$$

com  $\mathcal{W}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  dado por (3.6). Iremos nos restringir agora ao caso particular

$$\alpha = 1, \quad w_{\parallel(\perp)s}^2 = \left( 1 - \frac{3}{2\kappa_s} \right) v_{T\parallel(\perp)s}^2,$$

o que significa que será adotado o modelo ST91 para a  $\kappa$ FDV.

Neste caso, as funções kappa plasma especiais e suas derivadas, nas representações de

dupla integração (3.20a,b), serão escritas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{2}{\pi^{1/2}\kappa^{1/2+\beta}} \frac{\Gamma(\kappa + \beta)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \frac{x J_n^2(\nu x)}{s - \xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\kappa+\beta)} \\ \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{2}{\pi^{1/2}\kappa^{1/2+\beta}} \frac{\Gamma\kappa + \beta}{\mu \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \\ &\quad \times \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \frac{x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{s - \xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\kappa+\beta)} \\ \partial_\xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{4\pi^{-1/2}}{\kappa^{3/2+\beta}} \frac{\Gamma(\kappa + \beta + 1)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \frac{s x J_n^2(\nu x)}{s - \xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-\kappa-\beta-1} \\ \partial_\mu \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{4\pi^{-1/2}}{\kappa^{1/2+\beta}} \frac{\Gamma(\kappa + \beta)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\nu} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \frac{x^2 J_n(\nu x) J'_n(\nu x)}{s - \xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\kappa+\beta)} \\ \partial_\xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{4\pi^{-1/2}}{\kappa^{3/2+\beta}} \frac{\Gamma(\kappa + \beta + 1)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\mu} \\ &\quad \times \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \frac{s x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{s - \xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-\kappa-\beta-1} \\ \partial_\mu \partial_\xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{8\pi^{-1/2}}{\kappa^{3/2+\beta}} \frac{\Gamma(\kappa + \beta + 1)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\nu} \\ &\quad \times \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \frac{s x^2 J_n(\nu x) J'_n(\nu x)}{s - \xi} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-\kappa-\beta-1}. \end{aligned}$$

Desenvolvimentos em séries que permitem a implementação numérica do cálculo das funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  foram encontradas por [85] e são também apresentadas na seção 3.3.3.2 e no apêndice B.

Podemos reescrever as componentes do tensor acima, seguindo a formatação proposta por Yoon *et al.* [94]:

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow 1}^\infty \frac{n^2}{\mu_s} (A_{ns,\kappa} + A_{-ns,\kappa}) \quad (5.2a)$$

$$\varepsilon_{xy} = i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow 1}^\infty n \partial_{\mu_s} (A_{ns,\kappa} - A_{-ns,\kappa}) \quad (5.2b)$$

$$\varepsilon_{xz} = - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{k_\perp w_{\parallel s}}{2\Omega_s} \sum_{n \rightarrow 1}^\infty \frac{n}{\mu_s} (B_{ns,\kappa} - B_{-ns,\kappa}) \quad (5.2c)$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[ C_{0s,\kappa} + \sum_{n \rightarrow 1}^\infty (C_{ns,\kappa} - C_{-ns,\kappa}) \right] \quad (5.2d)$$

$$\varepsilon_{yz} = i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{k_\perp w_{\parallel s}}{2\Omega_s} \partial_{\mu_s} \left[ B_{0s,\kappa} + \sum_{n \rightarrow 1}^\infty (B_{ns,\kappa} + B_{-ns,\kappa}) \right] \quad (5.2e)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{v_{T\parallel s}^2}{v_{T\perp s}^2} \left[ \xi_{0s} B_{0s,\kappa} + \sum_{n \rightarrow 1}^\infty (\xi_{ns} B_{ns,\kappa} + \xi_{-ns} B_{-ns,\kappa}) \right], \quad (5.2f)$$

onde

$$\mu_s = \frac{k_{\perp}^2 w_{\perp s}^2}{2\Omega_s^2} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa_s}\right) \frac{k_{\perp}^2 v_{T\perp s}^2}{2\Omega_s^2} \quad \text{e} \quad \xi_{ns} = \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{\parallel} w_{\parallel s}} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{\parallel} v_{T\parallel s}}.$$

Além disso,

$$A_{ns,\kappa} = \xi_{0s} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (5.3a)$$

$$B_{ns,\kappa} = (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (5.3b)$$

$$C_{ns,\kappa} = \xi_{0s} \left[ \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(2)}(\mu_s, \xi_{ns}) - 2\mu_s \mathcal{Y}_{n,\kappa_s}^{(2)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] + \frac{1}{2} A_s \left[ \frac{n^2}{\mu_s} \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}) - 2\mu_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Y}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right]. \quad (5.3c)$$

Note que, como foi mostrado no capítulo 3, dentre as propriedades das funções especiais, no limite Maxwelliano temos:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu_s, \xi_{ns}) = \mathcal{H}_n(\mu_s) Z(\xi_{ns}),$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu_s, \xi_{ns}) = \mathcal{H}'_n(\mu_s) Z(\xi_{ns}),$$

de onde resulta também

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} A_{ns,\kappa} = \mathcal{H}_n(\mu_s) \left[ \xi_{0s} Z(\xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s Z'(\xi_{ns}) \right] = \mathcal{H}_n(\mu_s) A_{ns}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} B_{ns,\kappa} = (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \mathcal{H}_n(\mu_s) Z'(\xi_{ns}) = \mathcal{H}_n(\mu_s) B_{ns}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} C_{ns,\kappa} = \left[ \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{H}_n(\mu_s) - 2\mu_s \mathcal{H}'_n(\mu_s) \right] A_{ns}.$$

Assim, as componentes do tensor se reduzem a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{H}_n(\mu_s) (A_{ns} + A_{-ns}) \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{H}'_n(\mu_s) (A_{ns} - A_{-ns}) \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp} v_{T\parallel s}}{2\Omega_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mu_s} \mathcal{H}_n(\mu_s) (B_{ns} - B_{-ns}) \\ \varepsilon_{yy} &= 1 + 2 \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \mu_s \mathcal{H}'_0(\mu_s) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}} Z'(\xi_{0s}) \right) \\ &\quad + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{H}_n(\mu_s) - 2\mu_s \mathcal{H}'_n(\mu_s) \right] (A_{ns} + A_{-ns}) \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = i \frac{k_{\perp}}{2k_{\parallel}} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}} \mathcal{H}'_0(\mu_s) Z'(\xi_{0s}) \\ &\quad + i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp} v_{T\parallel s}}{2\Omega_s} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}'_n(\mu_s) (B_{ns} + B_{-ns}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_{\parallel}^2 v_{T\parallel s}^2} \mathcal{H}_0(\mu_s) Z'(\xi_{0s}) \\ &- \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{v_{T\parallel s}^2}{v_{T\perp s}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(\mu_s) (\xi_{ns} B_{ns} + \xi_{-ns} B_{-ns}).\end{aligned}$$

Utilizamos também as derivadas das funções especiais  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$ , obtidas em [86] (ver apêndice B),

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \left[ \frac{\Gamma(\kappa + \beta + \frac{1}{2})}{\kappa^{\beta+1} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta+\frac{1}{2})}(\mu) + \xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta+1)}(\mu, \xi) \right] \\ \partial_{\xi} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \left[ \frac{\Gamma(\kappa + \beta - \frac{1}{2})}{\kappa^{\beta} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{1}{2})'}(\mu) + \xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta+1)}(\mu, \xi) \right].\end{aligned}$$

Como estamos considerando ondas de baixa frequência ( $\omega \ll \Omega_i$ ) e com grande comprimento de onda ( $k_{\parallel} v_T \ll \Omega_i$ ), temos que para  $n \neq 0$ ,

$$|\xi_{ns}| = \left| \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{\parallel} v_{\parallel s}} \right| \gg 1.$$

Neste caso, podemos fazer uma expansão assintótica das funções  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi)$  e  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi)$  para  $|\xi| \gg 1$ . Esta expansão pode ser vista no apêndice B, sendo reproduzida aqui:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &\simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa^{-\beta}}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \sum_{\ell=0} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa + \beta - \ell - \frac{1}{2}\right) \frac{\kappa^{\ell}}{\xi^{2\ell}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\ell-\frac{1}{2})}(\mu) \\ &= -\frac{\Gamma(\kappa + \beta - \frac{1}{2})}{\kappa^{\beta} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \left[ \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{1}{2})}(\mu) \frac{\kappa/2\xi^2}{\kappa + \beta - \frac{3}{2}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{3}{2})}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\kappa^2/4\xi^4}{(\kappa + \beta - \frac{5}{2})(\kappa + \beta - \frac{3}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{5}{2})}(\mu) + \dots \right] \\ \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &\simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa^{1-\beta} \xi^{-1}}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \sum_{\ell=0} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa + \beta - \ell - \frac{3}{2}\right) \frac{\kappa^{\ell}}{\xi^{2\ell}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\ell-\frac{3}{2})'}(\mu) \\ &= -\frac{\Gamma(\kappa + \beta - \frac{3}{2})}{\kappa^{\beta-1} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \left[ \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{3}{2})'}(\mu) + \frac{\kappa/2\xi^2}{\kappa + \beta - \frac{5}{2}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{5}{2})'}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\kappa^2/4\xi^4}{(\kappa + \beta - \frac{7}{2})(\kappa + \beta - \frac{5}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{7}{2})'}(\mu) + \dots \right].\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}A_{ns,\kappa} &\simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa_s^{-1}}{\Gamma(\kappa_s - \frac{1}{2})} \sum_{\ell=0} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell\right) \\ &\times \frac{\kappa_s^{\ell}}{\xi_{ns}^{2\ell}} \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell}{\kappa_s} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2}-\ell)}(\mu_s) - \frac{A_s}{\xi_{ns}^2} \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2}-\ell)}(\mu_s) \right],\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
 A_{ns,\kappa} + rA_{-ns,\kappa} &\simeq -\frac{\pi^{-1/2}\kappa_s^{-1}}{\Gamma\left(\kappa_s - \frac{1}{2}\right)} \sum_{\ell=0} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell\right) \kappa_s^\ell \\
 &\times \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2}-\ell)}(\mu_s) \left( \frac{\xi_{ns}^{-2\ell}}{\omega - n\Omega_s} + \frac{r\xi_{-ns}^{-2\ell}}{\omega + n\Omega_s} \right) \omega \right. \\
 &\left. - A_s \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2}-\ell)}(\mu_s) \left( \xi_{ns}^{-2(\ell+1)} + r\xi_{-ns}^{-2(\ell+1)} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Assim, se escrevemos agora

$$\begin{aligned}
 A_{ns,\kappa} + rA_{-ns,\kappa} &\simeq -\frac{\pi^{-1/2}\kappa_s^{-1}}{\Gamma\left(\kappa_s - \frac{1}{2}\right)} f(x, \epsilon_\kappa; r), \\
 f(x, \epsilon_\kappa; r) &= \sum_{\ell=0} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell\right) \kappa_s^\ell \epsilon_\kappa^{2\ell} \\
 &\times \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2}-\ell)}(\mu_s) \left[ (x-1)^{-2\ell-1} + r(x+1)^{-2\ell-1} \right] x \right. \\
 &\left. - A_s \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2}-\ell)}(\mu_s) \epsilon_\kappa^2 \left[ (x-1)^{-2(\ell+1)} + r(x+1)^{-2(\ell+1)} \right] \right],
 \end{aligned}$$

expandindo  $f(x, \epsilon_\kappa; r)$  em uma dupla série de potências em  $x$  e  $\epsilon_\kappa$  e tomando apenas termos de ordem mais baixa, resulta

$$\begin{aligned}
 f(x, \epsilon_\kappa; r) &\approx -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)}{2\kappa} \left\{ \left[ 3\kappa(1 + A_s) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 + 2\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \right] \right. \\
 &\times (r+1)x^2 - \left[ \kappa(2A_s + 1) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 + 2\mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \right] \\
 &\left. \times (r-1)x + \kappa A_s \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) (r+1) \epsilon^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 A_{ns,\kappa} + A_{-ns,\kappa} &\approx \frac{\kappa_s - \frac{1}{2}}{\kappa_s} \left\{ \left[ 3(1 + A_s) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 \right. \right. \\
 &\left. \left. + 2\frac{\kappa_s + \frac{1}{2}}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \right] x^2 + A_s \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 \right\} \\
 &\approx \frac{\kappa_s - \frac{1}{2}}{\kappa_s} \left\{ 2\frac{\kappa_s + \frac{1}{2}}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) x^2 + A_s \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 \right\} \\
 &= \frac{\kappa_s - \frac{1}{2}}{\kappa_s} \frac{2\omega^2}{n^2\Omega_s^2} \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2}}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} A_s \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{\omega^2} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ns,\kappa} - A_{-ns,\kappa} &\approx \frac{\kappa_s - \frac{1}{2}}{\kappa_s} \left[ (2A_s + 1) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 + 2 \frac{\kappa_s + \frac{1}{2}}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \right] x \\
 &= 2 \frac{\kappa_s - \frac{1}{2}}{\kappa_s} \frac{\omega}{n\Omega_s} \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2}}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} (1 + 2A_s) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{n^2 \Omega_s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Para simplificar o restante do cálculo e tornar as expressões mais compactas, definimos

$$\mathbb{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) \doteq \frac{\Gamma(\kappa + \beta)}{\kappa^{\beta+1/2} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu), \quad (5.4)$$

de onde obtemos

$$A_{ns,\kappa} + A_{-ns,\kappa} = \frac{2\omega^2}{n^2 \Omega_s^2} \left[ \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} A_s \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{\omega^2} \right], \quad (5.5a)$$

$$A_{ns,\kappa} - A_{-ns,\kappa} = \frac{2\omega}{n\Omega_s} \left[ \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} (1 + 2A_s) \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{n^2 \Omega_s^2} \right]. \quad (5.5b)$$

Após algumas generalizações e definições, obtemos também

$$\begin{aligned}
 B_{ns,\kappa} + B_{-ns,\kappa} &\approx 2(A_s + 1) \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon_{\kappa} x \\
 &= 2(A_s + 1) \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel} w_{\parallel s}}{n\Omega_s} \frac{\omega}{n\Omega_s}
 \end{aligned} \quad (5.5c)$$

$$\begin{aligned}
 B_{ns,\kappa} - B_{-ns,\kappa} &\approx 2 \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon_{\kappa} \left[ (A_s + 2) x^2 + A_s \right] \\
 &\approx 2 \mathbb{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) A_s \frac{k_{\parallel} w_{\parallel s}}{n\Omega_s}
 \end{aligned} \quad (5.5d)$$

$$\xi_{ns} B_{ns,\kappa} + \xi_{-ns} B_{-ns,\kappa} \approx -2 \mathbb{H}_{n,\kappa}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) A_s. \quad (5.5e)$$

E, ainda:

$$C_{ns,\kappa} + C_{-ns,\kappa} \approx 2 \mathbb{G}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \frac{\omega^2}{n^2 \Omega_s^2} + A_s \mathbb{G}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{n^2 \Omega_s^2}, \quad (5.5f)$$

sendo

$$\mathbb{G}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) \doteq \frac{n^2}{\mu} \mathbb{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) - 2\mu \mathbb{H}_{n,\kappa}^{(\beta-1)'}(\mu).$$

As aproximações recém obtidas para as quantidades  $A_{ns,\kappa}$ ,  $B_{ns,\kappa}$  e  $C_{ns,\kappa}$  são agora introduzidas nas componentes do tensor dielétrico em (5.2a-f). Adicionalmente, como estamos considerando ondas de baixa frequência, então

$$\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \gg \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2} = \frac{n_s m_s c^2}{n_i m_i v_A^2} \gg 1,$$

o que permite ignorar a unidade nas componentes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{zz}$ . Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2} \left[ \mathbb{H}_{1,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} A_s \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{\omega^2} \mathbb{H}_{1,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \right] \\
 \varepsilon_{xy} &= -i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \left[ \mathbb{H}_{0,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})'}(\mu_s) - \frac{1}{2} (1 + 2A_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{\Omega_s^2} \mathbb{H}_{2,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xz} &= -\frac{1}{2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel} k_{\perp} w_{\parallel s}^2}{\Omega_s^2} A_s H_{1,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \\
 \varepsilon_{yy} &= -2 \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \mu_s \left[ \xi_{0s} \mathcal{Y}_{0,\kappa_s}^{(2)}(\mu_s, \xi_{0s}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{0s}} \mathcal{Y}_{0,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{0s}) \right] \\
 &+ \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2} \left\{ H_{1,\kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) - 2\mu_s H_{2,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} A_s \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{\omega^2} \left[ H_{1,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) - 2\mu_s H_{2,\kappa_s}^{(-\frac{1}{2})}(\mu_s) \right] \right\} \\
 \varepsilon_{yz} &= i \frac{k_{\perp}}{2k_{\parallel}} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}} \partial_{\mu_s} \partial_{\xi_{0s}} \mathcal{Z}_{0,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{0s}) \\
 &+ \frac{i}{2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \frac{k_{\perp} k_{\parallel} w_{\parallel s}^2}{\Omega_s^2} (1 + A_s) H_{2,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \\
 \varepsilon_{zz} &= -\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2} \partial_{\xi_{0s}} \mathcal{Z}_{0,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{0s}) + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{T_{\parallel s}}{T_{\perp s}} A_s \mu_s H_{1,\kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s).
 \end{aligned}$$

Definindo

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = z^2 \frac{v_A^2}{c^2} \varepsilon_{ij}, \quad (5.6)$$

teremos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{xx} &= \frac{1}{2} \left[ \beta_{\parallel i, \kappa} A_i H_{1,\kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) \right. \\
 &+ \left. \beta_{\parallel e, \kappa} A_e H_{1,\kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] q_{\parallel}^2 + \left[ H_{1,\kappa_i}^{(\frac{3}{2})}(\mu_i) + \frac{m_e}{m_i} H_{1,\kappa_e}^{(\frac{3}{2})}(\mu_e) \right] z^2 \\
 \tilde{\varepsilon}_{xy} &= -iz \left\{ H_{0,\kappa_i}^{(\frac{3}{2})'}(\mu_i) - H_{0,\kappa_e}^{(\frac{3}{2})'}(\mu_e) - \frac{1}{2} \left[ (1 + 2A_i) \beta_{\parallel i, \kappa} H_{2,\kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{m_e}{m_i} (1 + 2A_e) \beta_{\parallel e, \kappa} H_{2,\kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] q_{\parallel}^2 \right\} \\
 \tilde{\varepsilon}_{xz} &= -\frac{1}{2} \left[ \beta_{\parallel i, \kappa} A_i H_{1,\kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) + \beta_{\parallel e, \kappa} A_e H_{1,\kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] \sqrt{\lambda_i} q_{\parallel} \\
 \tilde{\varepsilon}_{yy} &= -\left\{ \beta_{\perp i, \kappa} \left[ \xi_{0i} \mathcal{Y}_{0,\kappa_i}^{(2)}(\mu_i, \xi_{0i}) + \frac{1}{2} A_i \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Y}_{0,\kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \right] \right. \\
 &+ \left. \beta_{\perp e, \kappa} \left[ \xi_{0e} \mathcal{Y}_{0,\kappa_e}^{(2)}(\mu_e, \xi_{0e}) + \frac{1}{2} A_e \partial_{\xi_{0e}} \mathcal{Y}_{0,\kappa_e}^{(1)}(\mu_e, \xi_{0e}) \right] \right\} \lambda_i \\
 &+ \left[ H_{1,\kappa_i}^{(\frac{3}{2})}(\mu_i) - 2\mu_i H_{2,\kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) \right] z^2 \\
 &+ \frac{1}{2} A_i q_{\parallel}^2 \beta_{\parallel i, \kappa} \left[ H_{1,\kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) - 2\mu_i H_{2,\kappa_i}^{(-\frac{1}{2})}(\mu_i) \right] \\
 &+ \frac{m_e}{m_i} \left[ H_{1,\kappa_e}^{(\frac{3}{2})}(\mu_e) - 2\mu_e H_{2,\kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] z^2 \\
 &+ \frac{1}{2} A_e \beta_{\parallel e, \kappa} \left[ H_{1,\kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) - 2\mu_e H_{2,\kappa_e}^{(-\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] q_{\parallel}^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{yz} &= i \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2q_{\parallel}} z \left[ \frac{\beta_{\perp i, \kappa}}{\beta_{\parallel i, \kappa}} \partial_{\mu_i} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) - \frac{\beta_{\perp e, \kappa}}{\beta_{\parallel e, \kappa}} \partial_{\mu_e} \partial_{\xi_{0e}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_e}^{(1)}(\mu_e, \xi_{0e}) \right] \\
 &+ \frac{i}{2} z \left[ \beta_{\parallel i, \kappa} (1 + A_i) H_{2, \kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) - \frac{m_e}{m_i} \beta_{\parallel e, \kappa} (1 + A_e) H_{2, \kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] \sqrt{\lambda_i} q_{\parallel} \\
 \tilde{\varepsilon}_{zz} &= - \left[ \frac{1}{\beta_{\parallel i, \kappa}} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) + \frac{1}{\beta_{\parallel e, \kappa}} \partial_{\xi_{0e}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_e}^{(1)}(\mu_e, \xi_{0e}) \right] \frac{z^2}{q_{\parallel}^2} \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \beta_{\parallel i, \kappa} A_i H_{1, \kappa_i}^{(\frac{1}{2})}(\mu_i) + \beta_{\parallel e, \kappa} A_e H_{1, \kappa_e}^{(\frac{1}{2})}(\mu_e) \right] \lambda_i,
 \end{aligned}$$

onde foram definidas também as quantidades auxiliares

$$q_{(\parallel, \perp)} = \frac{k_{(\parallel, \perp)} v_A}{\Omega_i}, \quad \lambda_i = \frac{2\mu_i}{\beta_{\perp i, \kappa}} = q_{\perp}^2.$$

Definimos agora novos parâmetros, dados por:

$$\epsilon_{\kappa}^{(\beta)} = H_{1, \kappa_i}^{(\beta)}(\mu_i) \quad (5.7a)$$

$$\epsilon_{\kappa}^{(\beta)'} = \epsilon_{\kappa}^{(\beta)} - 2\mu_i H_{2, \kappa_i}^{(\beta-1)}(\mu_i) \quad (5.7b)$$

$$\hat{\epsilon}_{\kappa} = - \left[ \frac{1}{\beta_{\parallel i, \kappa}} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) + \frac{1}{\beta_{\parallel e, \kappa}} \partial_{\xi_{0e}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_e}^{(1)}(\mu_e, \xi_{0e}) \right] \frac{1}{\lambda_i} \quad (5.7c)$$

$$\gamma_{\kappa} = \frac{1}{2} \left[ \beta_{\parallel e, \kappa} A_e H_{1, \kappa_e}^{(1/2)}(\mu_e) + \beta_{\parallel i, \kappa} A_i \epsilon_{\kappa}^{(1/2)} - 2 \right] q_{\parallel}^2 \quad (5.7d)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\kappa}' &= \frac{1}{2} \left[ \beta_{\parallel e, \kappa} A_e H_{1, \kappa_e}^{(1/2)}(\mu_e) + \beta_{\parallel i, \kappa} A_i \epsilon_{\kappa}^{(1/2)'} - 2 \right] q_{\parallel}^2 \\
 &- \left\{ 1 + \beta_{\perp i, \kappa} \left[ \xi_{0i} \mathcal{Y}_{0, \kappa_i}^{(2)}(\mu_i, \xi_{0i}) + \frac{1}{2} A_i \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Y}_{0, \kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \right] \right. \\
 &\left. + \beta_{\perp e, \kappa} \left[ \xi_{0e} \mathcal{Y}_{0, \kappa_e}^{(2)}(\mu_e, \xi_{0e}) + \frac{1}{2} A_e \partial_{\xi_{0e}} \mathcal{Y}_{0, \kappa_e}^{(1)}(\mu_e, \xi_{0e}) \right] \lambda_i \right\} \quad (5.7e)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{\kappa} = -H_{0, \kappa_e}^{(3/2)'}(\mu_e) + H_{0, \kappa_i}^{(3/2)'}(\mu_i) - \frac{1}{2} (1 + 2A_i) \beta_{\parallel i, \kappa} H_{2, \kappa_i}^{(1/2)}(\mu_i) q_{\parallel}^2 \quad (5.7f)$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{\kappa}' &= \frac{\beta_{\perp e, \kappa}}{4\beta_{\parallel e, \kappa}} \partial_{\mu_e} \partial_{\xi_{0e}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_e}^{(1)}(\mu_e, \xi_{0e}) - \frac{\beta_{\perp i, \kappa}}{4\beta_{\parallel i, \kappa}} \partial_{\mu_i} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \\
 &- \frac{1}{4} \beta_{\parallel i, \kappa} (1 + A_i) H_{2, \kappa_i}^{(1/2)}(\mu_i) q_{\parallel}^2, \quad (5.7g)
 \end{aligned}$$

os quais permitem escrever:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + \epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})} z^2 = \gamma_{\kappa} + q_{\parallel}^2 + \epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})} z^2 \quad (5.8a)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{xy} = -i\varepsilon_{xy}^{(1)} z = -i\eta_{\kappa} z \quad (5.8b)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{xz} = \varepsilon_{xz}^{(0)} = - \left( \gamma_{\kappa} + q_{\parallel}^2 \right) \frac{\sqrt{\lambda_i}}{q_{\parallel}} \quad (5.8c)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yy} = \varepsilon_{yy}^{(0)} + \varepsilon_{yy}^{(2)} z^2 = \gamma_{\kappa}' + q_{\parallel}^2 + \lambda_i + \epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})'} z^2 \quad (5.8d)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yz} = i\varepsilon_{yz}^{(1)} z = -2i\eta_{\kappa}' \frac{\sqrt{\lambda_i}}{q_{\parallel}} z \quad (5.8e)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \varepsilon_{zz}^{(0)} - \varepsilon_{zz}^{(2)} z^2 = \left( \gamma_{\kappa} + q_{\parallel}^2 + \hat{\epsilon}_{\kappa} z^2 \right) \frac{\lambda_i}{q_{\parallel}^2}, \quad (5.8f)$$

sendo

$$\varepsilon_{zz}^{(0)} = (\gamma_\kappa + q_\parallel^2) \frac{\lambda_i}{q_\parallel^2}, \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} = -\hat{\varepsilon}_\kappa z^2 \frac{\lambda_i}{q_\parallel^2}.$$

Dadas as componentes do tensor dielétrico em (5.8a-f), na próxima seção será deduzida a equação de dispersão para ondas de baixa frequência propagando-se em um plasma bi-kappa, para qualquer valor de ângulo de propagação.

## 5.2 Equação de Dispersão

A equação de dispersão para ondas se propagando em um plasma magnetizado é obtida a partir de [4, 5]

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - N_\parallel^2 & \varepsilon_{xy} & N_\parallel N_\perp + \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - N^2 & \varepsilon_{yz} \\ N_\parallel N_\perp + \varepsilon_{xz} & -\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - N_\perp^2 \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{yy} - N^2) \left[ (\varepsilon_{xx} - N_\parallel^2) \varepsilon_{zz} - N_\perp^2 \varepsilon_{xx} - (\varepsilon_{xz} + 2N_\parallel N_\perp) \varepsilon_{xz} \right] \\ & + (\varepsilon_{xx} - N_\parallel^2) \varepsilon_{yz}^2 + (\varepsilon_{zz} - N_\perp^2) \varepsilon_{xy}^2 + 2(\varepsilon_{xz} + N_\parallel N_\perp) \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} = 0, \end{aligned}$$

onde  $N_{(\parallel,\perp)} = k_{(\parallel,\perp)} c / \omega$  é a componente paralela (perpendicular) do índice de refração do plasma.

Reescrevendo esta equação em termos da forma  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ , definida por (5.6) e introduzindo as expressões (5.8a-f), surgem diversos termos proporcionais a  $m_e/m_i \ll 1$ , os quais serão desprezados. Após uma certa quantidade de álgebra, obtém-se

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{xx}^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2)} \varepsilon_{yy}^{(2)} z^6 + \left[ \varepsilon_{xx}^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2)} (\varepsilon_{yy}^{(0)} - q_\parallel^2 - q_\perp^2) + (\varepsilon_{xx}^{(0)} - q_\parallel^2) \varepsilon_{zz}^{(2)} \varepsilon_{yy}^{(2)} - \varepsilon_{zz}^{(0)} \varepsilon_{yy}^{(2)} \varepsilon_{xx}^{(2)} \right. \\ & \quad \left. + q_\perp^2 \varepsilon_{yy}^{(2)} \varepsilon_{xx}^{(2)} + \varepsilon_{xx}^{(2)} (\varepsilon_{yz}^{(1)})^2 - \varepsilon_{zz}^{(2)} (\varepsilon_{xy}^{(1)})^2 \right] z^4 \\ & + \left[ (\varepsilon_{xx}^{(0)} - q_\parallel^2) \varepsilon_{zz}^{(2)} (\varepsilon_{yy}^{(0)} - q_\parallel^2 - q_\perp^2) - \varepsilon_{zz}^{(0)} (\varepsilon_{yy}^{(0)} - q_\parallel^2 - q_\perp^2) \varepsilon_{xz}^{(2)} \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon_{zz}^{(0)} \varepsilon_{yy}^{(2)} (\varepsilon_{xx}^{(0)} - q_\parallel^2) + q_\perp^2 \varepsilon_{xx}^{(0)} \varepsilon_{yy}^{(2)} + q_\perp^2 (\varepsilon_{yy}^{(0)} - q_\parallel^2 - q_\perp^2) \varepsilon_{xz}^{(2)} \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_{yy}^{(2)} (\varepsilon_{xz}^{(0)} + 2q_\parallel q_\perp) \varepsilon_{xz}^{(0)} + (\varepsilon_{xx}^{(0)} - q_\parallel^2) (\varepsilon_{yz}^{(1)})^2 + (\varepsilon_{zz}^{(0)} - q_\perp^2) (\varepsilon_{xy}^{(1)})^2 - 2(\varepsilon_{xz}^{(0)} + q_\parallel q_\perp) \varepsilon_{xy}^{(1)} \varepsilon_{yz}^{(1)} \right] z^2 \\ & + (\varepsilon_{yy}^{(0)} - q_\parallel^2 - q_\perp^2) \left[ (\varepsilon_{xz}^{(0)} + 2q_\parallel q_\perp) \varepsilon_{xz}^{(0)} - \varepsilon_{zz}^{(0)} (\varepsilon_{xx}^{(0)} - q_\parallel^2) + q_\perp^2 \varepsilon_{xx}^{(0)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Contudo, nota-se que

$$(\varepsilon_{xz}^{(0)} + 2q_\parallel q_\perp) \varepsilon_{xz}^{(0)} - \varepsilon_{zz}^{(0)} (\varepsilon_{xx}^{(0)} - q_\parallel^2) + q_\perp^2 \varepsilon_{xx}^{(0)} = \left[ -2 \frac{q_\perp}{q_\parallel} q_\parallel q_\perp + \frac{q_\perp}{q_\parallel} \frac{q_\perp}{q_\parallel} q_\parallel^2 + q_\perp^2 \right] (\gamma + q_\parallel^2) = 0.$$

Portanto, a raiz  $z^2 = 0$  pode ser fatorada da equação de dispersão e a mesma resulta, após mais uma certa quantidade de álgebra, escrita na forma:

$$z^4 + \left[ \frac{1}{\epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})'}} \left( \gamma'_{\kappa} - \frac{\eta_{\kappa}^2}{\epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})}} - \frac{\eta_{\kappa}'^2}{\hat{\epsilon}_{\kappa}} \right) + \gamma_{\kappa} \left( \frac{1}{\epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})}} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_{\kappa}} \right) \right] z^2 + \frac{\gamma_{\kappa}}{\epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})'}} \left[ \gamma'_{\kappa} \left( \frac{1}{\epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})}} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_{\kappa}} \right) - \frac{(\eta_{\kappa} - \eta'_{\kappa})^2}{\epsilon_{\kappa}^{(\frac{3}{2})} \hat{\epsilon}_{\kappa}} \right] = 0. \quad (5.9)$$

Realizamos a primeira implementação numérica da equação de dispersão (5.9) e de seus parâmetros constituintes (eqs. 5.7a-g). Contudo, como um primeiro teste de obtenção de instabilidades oriundas das anisotropias de temperaturas, procedemos primeiramente a implementação numérica do limite Maxwelliano da equação de dispersão (5.9).

O limite Maxwelliano ( $\kappa_s \rightarrow \infty$ ) da equação de dispersão (5.9) se reduz à equação (10) de Yoon, Wu e Assis [94]. Neste limite, a equação pode ser escrita

$$z^4 + \left[ \frac{1}{\epsilon'} \left( \gamma' - \frac{\eta^2}{\epsilon} - \frac{\eta'^2}{\hat{\epsilon}} \right) + \gamma \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\hat{\epsilon}} \right) \right] z^2 + \frac{\gamma}{\epsilon'} \left[ \gamma' \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\hat{\epsilon}} \right) - \frac{(\eta - \eta')^2}{\epsilon \hat{\epsilon}} \right] = 0, \quad (5.10)$$

sendo que os parâmetros contidos em (5.10) correspondem aos limites Maxwellianos dos parâmetros em (5.7a-g), dados agora por

$$\begin{aligned} \epsilon &= H_1(\mu_i) \\ \epsilon' &= \epsilon - 2\mu_i H_2(\mu_i) \\ \hat{\epsilon} &= -\frac{\beta_{\perp i}}{2\mu_i} \left[ \frac{Z'(\xi_{0e})}{\beta_{\parallel e}} + \mathcal{H}_0(\mu_i) \frac{Z'(\xi_{0i})}{\beta_{\parallel i}} \right] \\ \gamma &= \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{2\Omega_i^2} (A_e \beta_{\parallel e} + A_i \beta_{\parallel i} \epsilon - 2) \\ \gamma' &= \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{2\Omega_i^2} (A_e \beta_{\parallel e} + A_i \beta_{\parallel i} \epsilon' - 2) \\ &\quad - \frac{2\mu_i}{\beta_{\perp i}} \left[ 1 + \beta_{\perp e} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp e}}{\beta_{\parallel e}} Z'(\xi_{0e}) \right) - \beta_{\perp i} \mathcal{H}'_0(\mu_i) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp i}}{\beta_{\parallel i}} Z'(\xi_{0i}) \right) \right] \\ \eta &= 1 + \mathcal{H}'_0(\mu_i) - \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{2\Omega_i^2} (1 + 2A_i) \beta_{\parallel i} H_2(\mu_i) \\ \eta' &= -\frac{\beta_{\perp e}}{2\beta_{\parallel e}} Z'(\xi_{0e}) - \frac{\beta_{\perp i}}{2\beta_{\parallel i}} \mathcal{H}'_0(\mu_i) Z'(\xi_{0i}) - \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{2\Omega_i^2} (1 + A_i) \beta_{\parallel i} H_2(\mu_i), \end{aligned}$$

os quais reproduzem os correspondentes parâmetros na equação (11) de Yoon, Wu e Assis [94].

A equação de dispersão (5.10) foi resolvida numericamente. Foram obtidas ao todo 4 (quatro) raízes de (5.10), variando-se os componentes do vetor de onda  $\mathbf{k} = (k_{\perp}, k_{\parallel})$ , escritos

na forma adimensional  $q_{\parallel} = k_{\parallel} v_A / \Omega_i$  e  $\mu_i = k_{\perp}^2 v_{T\perp i}^2 / 2\Omega_i^2$ , sendo os demais parâmetros físicos  $(\beta_{\parallel e}, \beta_{\perp e}, \beta_{\parallel i}, \beta_{\perp i})$  mantidos fixos. Desta forma, as soluções numéricas correspondem às funções analíticas

$$z(k_{\perp}, k_{\parallel}) = \frac{\omega_r + i\omega_i}{\Omega_i},$$

sendo  $\omega_r = \omega_r(k_{\perp}, k_{\parallel})$  a relação de dispersão dos modos de baixa frequência (ondas de Alfvén oblíquas) e  $\omega_i = \gamma(k_{\perp}, k_{\parallel})$  a taxa de amplificação (se  $\gamma > 0$ ) ou amortecimento (se  $\gamma < 0$ ) dos correspondentes modos normais.

Dentro as quatro soluções obtidas para a equação (5.10), somente uma das raízes descreve o modo normal instável. A figura 5.1 mostra as soluções para  $\omega_r$  e  $\omega_i = \gamma$ , sendo mantidos fixos os parâmetros  $\beta_{\parallel e} = \beta_{\perp e} = 2$ ,  $\beta_{\parallel i} = 3$  e  $\beta_{\perp i} = 0,8$ . Ou seja, correspondendo a uma população eletrônica isotrópica e uma população de íons anisotrópica. Os resultados mostrados na figura 5.1 reproduzem a figura 4 de Yoon, Wu e Assis [94]. Estes resultados mostraram pela primeira vez a existência da instabilidade firehose oblíqua.

Neste capítulo mostramos a implementação numérica da equação de dispersão (5.9) para um plasma bi-Maxwelliano, obtendo os resultados mostrados na figura 5.1. A implementação das soluções numéricas da equação de dispersão (5.9) para um plasma bi-kappa será discutida no capítulo 6.

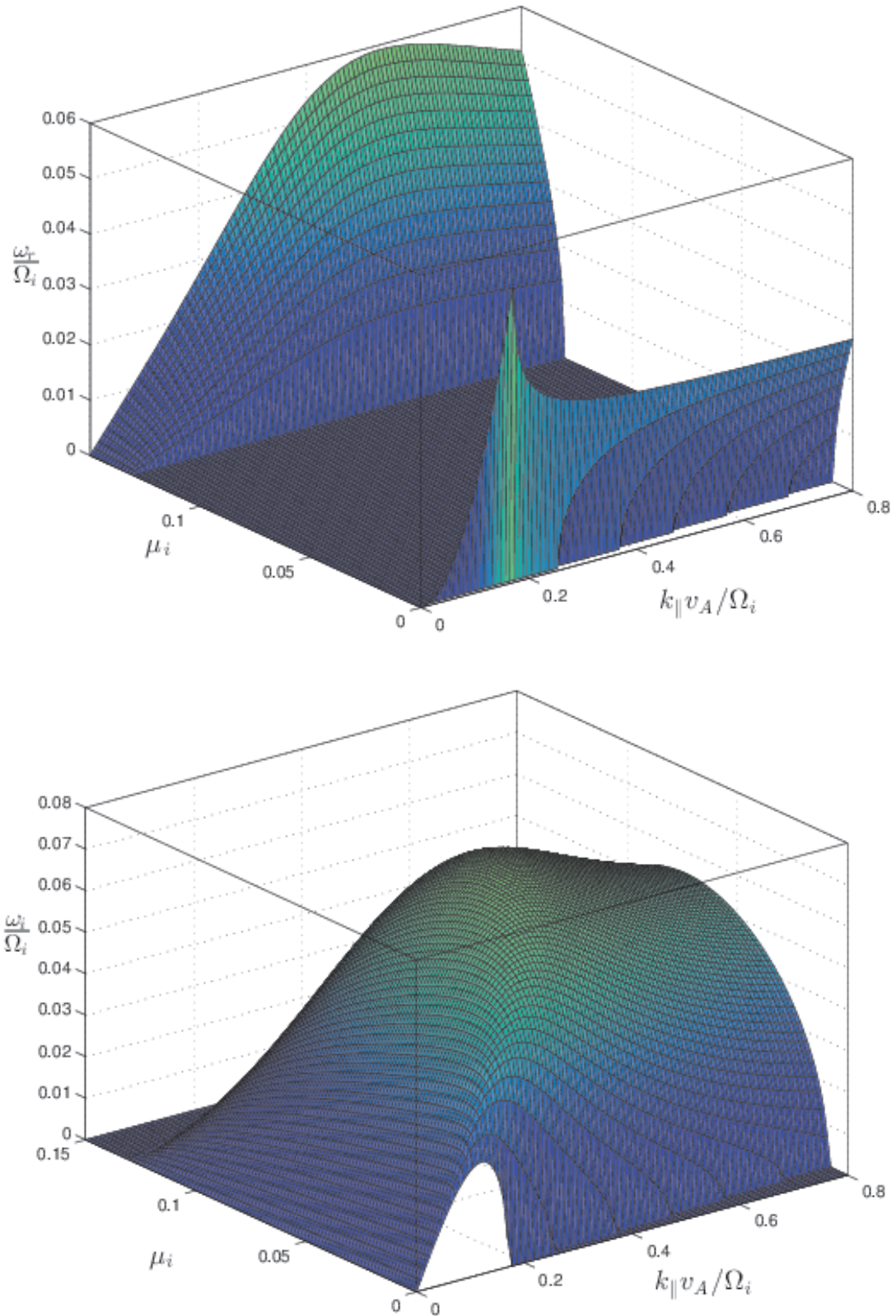


Fig. 5.1: (Superior) Relação de dispersão ( $\omega_r/\Omega_i$ ) do modo instável, em função de  $k_{\parallel}v_A/\Omega_i$  e  $\mu_i = k_{\perp}^2 v_{T\perp i}^2 / 2\Omega_i^2$ , correspondente à parte real da solução da equação (5.10). (Inferior) Taxa de crescimento ( $\omega_i/\Omega_i$ ) ( $\omega_i = \gamma$ ) do modo instável, correspondente à parte imaginária da mesma solução. Os parâmetros são:  $\beta_{\parallel e} = \beta_{\perp e} = 2$ ,  $\beta_{\parallel i} = 3$  e  $\beta_{\perp i} = 0,8$ .

## Capítulo 6

### INSTABILIDADE FIREHOSE OBLÍQUA EM UM PLASMA BI-KAPPA MAGNETIZADO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na segunda etapa do trabalho a partir da derivação da equação de dispersão que descreve a instabilidade firehose oblíqua (ou Alfvén-firehose) em um plasma que contém ambas as espécies (íons e elétrons) modeladas por funções de distribuição bi-kappa. A equação foi obtida no capítulo 5 e é válida para ondas de baixa frequência e valores moderados a grandes para o parâmetro beta de plasmas. Os resultados são válidos para qualquer direção de propagação e para qualquer valor de raio de Larmor.

Considerando valores de parâmetros físicos tipicamente encontrados no vento solar, algumas soluções da equação de dispersão correspondem a modos instáveis. Com o intuito de tornar possível a implementação numérica das soluções da equação de dispersão, neste capítulo serão também derivadas e incluídas novas propriedades matemáticas das funções especiais de plasmas do tipo kappa.

O conteúdo apresentado neste capítulo foi divulgado em uma segunda publicação recente [87], a qual possui uma cópia disponível no apêndice C.

#### 6.1 Equação de Dispersão tipo bi-kappa para plasmas de alto beta

Dado um plasma de espécie  $s$  composto por partículas de massa  $m_s$ , carga elétrica  $q_s$  e número de densidade  $n_s$  e dadas as componentes do tensor dielétrico na forma abaixo, tal como fora expresso nas equações (5.1a-f), retomamos:

$$\varepsilon_{xx}^{(s)} = 1 + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} \left[ \xi_{os} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (6.1a)$$

$$\varepsilon_{xy}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} n \left[ \xi_{os} \partial_{\mu_s} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (6.1b)$$

$$\varepsilon_{xz}^{(s)} = -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n \Omega_s}{k_{\perp} w_{\perp s}} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (6.1c)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(s)} = 1 + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left[ \xi_{os} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right] \quad (6.1d)$$

$$\varepsilon_{yz}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \frac{k_{\perp} w_{\perp s}}{2\Omega_s} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (6.1e)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(s)} = 1 - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel s}}{w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{os} - A_s \xi_{ns}) \xi_{ns} \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \quad (6.1f)$$

Utilizamos agora as derivadas da funções especiais  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$ , obtidas em [86] (ver também apêndice B):

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \left[ \frac{\Gamma(\kappa + \beta + \frac{1}{2})}{\kappa^{\beta+1} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta+\frac{1}{2})}(\mu) + \xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta+1)}(\mu, \xi) \right] \\ \partial_{\xi} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \left[ \frac{\Gamma(\kappa + \beta - \frac{1}{2})}{\kappa^{\beta} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{1}{2})'}(\mu) + \xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta+1)}(\mu, \xi) \right]. \end{aligned}$$

Sob algumas condições impostas pelo plasma bi-kappa sobre a parte ressonante das funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$ , para  $n \neq 0$  podemos fazer aproximar as mesmas por uma expansão assintótica, uma vez que  $|\xi| \gg 1$ . Estas expansões são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &\simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa^{-\beta}}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa + \beta - \ell - \frac{1}{2}\right) \frac{\kappa^{\ell}}{\xi^{2\ell}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\ell-\frac{1}{2})}(\mu) \\ &= -\frac{\Gamma(\kappa + \beta - \frac{1}{2})}{\kappa^{\beta} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \left[ \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{1}{2})}(\mu) \frac{\kappa/2\xi^2}{\kappa + \beta - \frac{3}{2}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{3}{2})}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\kappa^2/4\xi^4}{(\kappa + \beta - \frac{5}{2})(\kappa + \beta - \frac{3}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{5}{2})}(\mu) + \dots \right] \\ \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi) &\simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa^{1-\beta} \xi^{-1}}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa + \beta - \ell - \frac{3}{2}\right) \frac{\kappa^{\ell}}{\xi^{2\ell}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\ell-\frac{3}{2})'}(\mu) \\ &= -\frac{\Gamma(\kappa + \beta - \frac{3}{2})}{\kappa^{\beta-1} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \frac{1}{\xi} \left[ \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{3}{2})'}(\mu) + \frac{\kappa/2\xi^2}{\kappa + \beta - \frac{5}{2}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{5}{2})'}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\kappa^2/4\xi^4}{(\kappa + \beta - \frac{7}{2})(\kappa + \beta - \frac{5}{2})} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\beta-\frac{7}{2})'}(\mu) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Assim, dada, por exemplo, a quantidade  $A_{ns,\kappa}$  definida em (5.3a), esta pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} A_{ns,\kappa} &\simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa_s^{-1}}{\Gamma(\kappa_s - \frac{1}{2})} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell\right) \\ &\quad \times \frac{\kappa_s^{\ell}}{\xi_{ns}^{2\ell}} \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell}{\kappa_s} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_s} \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{3}{2}-\ell)}(\mu_s) - \frac{A_s}{\xi_{ns}^2} \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_{n,\kappa_s}^{(\frac{1}{2}-\ell)}(\mu_s) \right], \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$A_{ns,\kappa} + r A_{-ns,\kappa} \simeq -\frac{\pi^{-1/2} \kappa_s^{-1}}{\Gamma(\kappa_s - \frac{1}{2})} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell\right) \kappa_s^{\ell}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{3}{2} - \ell)}(\mu_s) \left( \frac{\xi_{ns}^{-2\ell}}{\omega - n\Omega_s} + \frac{r \xi_{-ns}^{-2\ell}}{\omega + n\Omega_s} \right) \omega \right. \\ & \left. - A_s \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2} - \ell)}(\mu_s) \left( \xi_{ns}^{-2(\ell+1)} + r \xi_{-ns}^{-2(\ell+1)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, se escrevermos:

$$\begin{aligned} A_{ns, \kappa} + r A_{-ns, \kappa} & \simeq - \frac{\pi^{-1/2} \kappa_s^{-1}}{\Gamma\left(\kappa_s - \frac{1}{2}\right)} f(x, \epsilon_\kappa; r), \\ f(x, \epsilon_\kappa; r) & = \sum_{\ell=0} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell\right) \kappa_s^\ell \epsilon_\kappa^{2\ell} \\ & \times \left[ \frac{\kappa_s + \frac{1}{2} - \ell}{\kappa_s} \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{3}{2} - \ell)}(\mu_s) \left[ (x-1)^{-2\ell-1} + r(x+1)^{-2\ell-1} \right] x \right. \\ & \left. - A_s \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2} - \ell)}(\mu_s) \epsilon_\kappa^2 \left[ (x-1)^{-2(\ell+1)} + r(x+1)^{-2(\ell+1)} \right] \right], \end{aligned}$$

expandindo  $f(x, \epsilon_\kappa; r)$  em uma dupla série de potências em  $x$  e  $\epsilon_\kappa$  e tomando apenas termos de ordem mais baixa, resulta

$$\begin{aligned} f(x, \epsilon_\kappa; r) & \approx - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)}{2\kappa} \left\{ \left[ 3\kappa(1 + A_s) \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 + 2\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \right] \right. \\ & \times (r+1)x^2 - \left[ \kappa(2A_s + 1) \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \epsilon^2 + 2\mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) \left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \right] \\ & \left. \times (r-1)x + \kappa A_s \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) (r+1) \epsilon^2 \right\}. \end{aligned}$$

Realizando estas aproximações e empregando a definição (5.4), obtém-se

$$\begin{aligned} A_{ns, \kappa} + A_{-ns, \kappa} & = \frac{2\omega^2}{n^2 \Omega_s^2} \left[ \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} A_s \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 \omega_{\parallel s}^2}{\omega^2} \right], \\ A_{ns, \kappa} - A_{-ns, \kappa} & = \frac{2\omega}{n \Omega_s} \left[ \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{3}{2})}(\mu_s) + \frac{1}{2} (1 + 2A_s) \mathcal{H}_{n, \kappa_s}^{(\frac{1}{2})}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 \omega_{\parallel s}^2}{n^2 \Omega_s^2} \right], \end{aligned}$$

resultado este já obtido em (5.5a) e (5.5b). Realizando-se as mesmas aproximações nas quantidades  $B_{ns, \kappa}$  e  $C_{ns, \kappa}$  definidas em (5.3b) e (5.3c), respectivamente, chega-se às aproximações (5.5c-f).

Para reduzir ainda mais a quantidade de símbolos envolvidos, realizamos agora novas definições. Primeiramente, a quantidade

$$1_\kappa^{(\beta)} = \frac{\Gamma(\kappa + \beta - 1)}{\kappa^{\beta-1/2} \Gamma(\kappa - 1/2)},$$

tal que  $1_\kappa^{(\beta)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 1$ . Com esta definição, a função  $\mathcal{H}_{n, \kappa}^{(\beta)}(\mu)$ , dada por (5.4), pode também ser calculada como

$$\mathcal{H}_{n, \kappa}^{(\beta)}(\mu) = 1_\kappa^{(\beta+1)} \mathcal{H}_{n, \kappa}^{(\beta)}(\mu).$$



Inserindo esta definição também na regra de soma (3.15), resulta

$$\sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} H_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = 1_{\kappa}^{(\beta)}.$$

A partir desta identidade e fazendo uso da propriedade  $H_{-n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = H_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu)$ , podemos definir também as novas funções auxiliares

$$H_{1,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = \frac{1_{\kappa}^{(\beta)} - H_{0,\kappa}^{(\beta)}(\mu)}{\mu}, \quad (6.2a)$$

$$H_{2,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n,\kappa}^{(\beta)'}(\mu)}{n^2}. \quad (6.2b)$$

De acordo com as identidades (3.14a,b), observa-se que

$$H_{1,\kappa}^{(\beta)}(0) = H_{2,\kappa}^{(\beta)}(0) = 1_{\kappa}^{(\beta-1)}.$$

Apropos, os limites Maxwellianos das funções  $H_{1,\kappa}^{(\beta)}$  e  $H_{2,\kappa}^{(\beta)}$  são

$$\begin{aligned} H_1(\mu) &= \frac{1 - \mathcal{H}_0(\mu)}{\mu} = 1 - \frac{3}{4}\mu + \frac{5}{12}\mu^2 + \dots \\ H_2(\mu) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_n'(\mu)}{n^2} = 1 - \frac{15}{8}\mu + \frac{245}{144}\mu^2 + \dots, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{H}_n(\mu) = e^{-\mu} I_n(\mu)$ . A expansão de  $H_1(\mu)$  apresentada acima já é conhecida; ela é obtida a partir das propriedades da função de Bessel modificada.<sup>1</sup> Entretanto, a função  $H_2(\mu)$  tem sido apresentada sempre em forma fechada em grande parte dos trabalhos encontrados na literatura, sem expansões em série.<sup>2</sup> A expansão de  $H_2(\mu)$  aqui apresentada será divulgada em um trabalho futuro.

Finalmente, considerando um plasma de duas espécies de elétron-íon, reajustamos os parâmetros (5.7a-g) para

$$\epsilon_{\kappa}^{(\beta)} = H_{1,\kappa_i}^{(\beta)}(\mu_i) \quad (6.3a)$$

$$\epsilon_{\kappa}^{(\beta)'} = \epsilon_{\kappa}^{(\beta)} - 2\mu_i H_{2,\kappa_i}^{(\beta-1)}(\mu_i) \quad (6.3b)$$

$$\hat{\epsilon}_{\kappa} = - \left[ \frac{Z_{\kappa_e}^{(0)'(\xi_{0e})}}{\beta_{\parallel e,\kappa}} + \frac{1}{\beta_{\parallel i,\kappa}} \partial_{\xi_{0i}} Z_{0,\kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \right] \frac{\beta_{\perp i,\kappa}}{2\mu_i} \quad (6.3c)$$

$$\gamma_{\kappa} = \frac{1}{2} \left( \beta_{\parallel e} A_e + \beta_{\parallel i,\kappa} A_i \epsilon_{\kappa}^{(1/2)} - 2 \right) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2} \quad (6.3d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\kappa}' &= \frac{1}{2} \left( \beta_{\parallel e} A_e + \beta_{\parallel i,\kappa} A_i \epsilon_{\kappa}^{(1/2)'} - 2 \right) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2} \\ &\quad - \left[ 1 + \beta_{\perp e,\kappa} \left( 1_{\kappa_e}^{(-1/2)} + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp e,\kappa}}{\beta_{\parallel e,\kappa}} Z_{\kappa_e}^{(-2)'}(\xi_{0e}) \right) \right] \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, ref. [105].

<sup>2</sup> Ver, por exemplos, refs. [94, 120].

$$\begin{aligned}
 & -\beta_{\perp i, \kappa} \left( \mathbf{H}_{0, \kappa_i}^{(1/2)'} (\mu_i) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp i, \kappa}}{\beta_{\parallel i, \kappa}} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Y}_{0, \kappa_i}^{(1)} (\mu_i, \xi_{0i}) \right) \frac{2\mu_i}{\beta_{\perp i, \kappa}}
 \end{aligned} \tag{6.3e}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{\kappa} &= 1_{\kappa_e}^{(1/2)} + \mathbf{H}_{0, \kappa_i}^{(e7:3/2)'} (\mu_i) \\
 & - \frac{1}{2} (1 + 2A_i) \beta_{\parallel i, \kappa} H_{2, \kappa_i}^{(1/2)} (\mu_i) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2}
 \end{aligned} \tag{6.3f}$$

$$\begin{aligned}
 \eta'_{\kappa} &= -\frac{\beta_{\perp e, \kappa}}{2\beta_{\parallel e, \kappa}} Z_{\kappa_e}^{(-1)'} (\xi_{0e}) - \frac{\beta_{\perp i, \kappa}}{2\beta_{\parallel i, \kappa}} \partial_{\mu_i} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Z}_{0, \kappa_i}^{(1)} (\mu_i, \xi_{0i}) \\
 & - \frac{1}{2} \beta_{\parallel i, \kappa} (1 + A_i) H_{2, \kappa_i}^{(1/2)} (\mu_i) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2},
 \end{aligned} \tag{6.3g}$$

onde definimos os parâmetros beta kappa modificados:

$$\beta_{\parallel(\perp)s, \kappa} = \left( 1 - \frac{3}{2\kappa_s} \right) \beta_{\parallel(\perp)s} = \frac{\beta_{\parallel(\perp)s}}{1_{\kappa_s}^{(-1/2)}}.$$

Devemos salientar também que, em sendo  $\mu_e \ll \mu_i$  por um fator da ordem  $m_e/m_i$ , mantivemos nos parâmetros (6.3a-g) a contribuição de menor ordem para o raio de giro para elétrons; isto é,  $H_{1, \kappa_e}^{(\beta)} (\mu_e) \approx H_{2, \kappa_e}^{(\beta)} (\mu_e) \approx 1_{\kappa_e}^{(\beta-1)}$ .

Os parâmetros (6.3a-g) são identificados com a equação de dispersão  $\det \Lambda = 0$ , onde os elementos da matrix  $\Lambda$  são

$$\Lambda_{ij} = \frac{c^2}{\omega^2} (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = x, y, z).$$

Após manipulações algébricas, onde alguns termos da ordem  $m_e/m_i$  são omitidos, a raiz  $\omega^2 \approx 0$  pode ser fatorada e a equação de dispersão pode ser escrita na forma transcendental como:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\omega}{\Omega_i} \right)^4 + \left[ \frac{1}{\epsilon_{\kappa}^{(3/2)'}} \left( \gamma'_{\kappa} - \frac{\eta_{\kappa}^2}{\epsilon_{\kappa}^{(3/2)}} - \frac{\eta_{\kappa}'^2}{\hat{\epsilon}_{\kappa}} \right) + \gamma_{\kappa} \left( \frac{1}{\epsilon_{\kappa}^{(3/2)}} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_{\kappa}} \right) \right] \left( \frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \\
 + \frac{\gamma_{\kappa}}{\epsilon_{\kappa}^{(3/2)'}} \left[ \gamma'_{\kappa} \left( \frac{1}{\epsilon_{\kappa}^{(3/2)}} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_{\kappa}} \right) - \frac{(\eta_{\kappa} - \eta'_{\kappa})^2}{\epsilon_{\kappa}^{(3/2)} \hat{\epsilon}_{\kappa}} \right] = 0, \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

a qual é, novamente, a equação (5.9).

## 6.2 Novas expressões para as funções especiais de plasmas kappa

Várias novas propriedades das funções especiais de plasmas kappa foram realizadas para viabilizar a implementação numérica eficiente das soluções da equação de dispersão (6.4). A derivação detalhada dessas propriedades pode ser vista no apêndice C. Estas compreendem:

## 6.2.1 Propriedades de simetria

As funções  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  (função de dispersão de plasma supertérmico),  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  (função de Larmor de plasma supertérmico),  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  e  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  (funções especiais de duas variáveis de plasmas kappa) satisfazem as seguintes relações de simetria,

$$Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(-\xi) + Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{-\beta-1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)} \quad (6.5a)$$

$$Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\bar{\xi}) = -\overline{Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(-\xi)} \quad (6.5b)$$

$$Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\bar{\xi}) \stackrel{\xi_i \geq 0}{=} \overline{Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)} + 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{-\beta-1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)} \quad (6.5c)$$

$$\mathcal{H}_{-n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} = \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \quad (6.5d)$$

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\bar{z}) = \overline{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)}, \quad (|\arg z| < \pi) \quad (6.5e)$$

$$\mathcal{Z}_{-n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi), \quad \mathcal{Y}_{-n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) \quad (6.5f)$$

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) = -\overline{\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, -\xi)} \quad (6.5g)$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) = -\overline{\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, -\xi)} \quad (6.5h)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) &= \overline{\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)} + 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{-1/2-\beta}\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-2)} \\ &\quad \times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.5i)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) &= \overline{\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)} + 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{1/2-\beta}\Gamma(\lambda-2)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-4)} \\ &\quad \times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.5j)$$

Nas relações acima, se  $z = z_r + iz_i \in \mathbb{C}$ , então  $\bar{z} = z_r - iz_i$  denota a operação de conjugação complexa. As propriedades (6.5a-c) implicam que a implementação numérica do cálculo da função  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  necessita apenas ser realizada para o primeiro quadrante do plano complexo de  $\xi$ . Da mesma forma, (6.5e-j) implicam que a implementação numérica do cálculo das funções  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  e  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  necessita apenas ser realizada para a região  $\xi_r \geq 0$ .

 6.2.2 Expansão em série de  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  para o caso inteiro

A função de Larmor de plasma supertérmico, conforme discutido na seção 3.3.1, possui duas representações distintas para os casos em que  $\lambda = \kappa + \alpha + \beta$  é ou não inteiro. Essas duas representações possuem propriedades analíticas bem diferentes. Quando  $\lambda \neq 2, 3, 4, \dots$ , a função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  pode ser representada em termos de funções hipergeométricas generalizadas, sendo dada pela equação (3.12a). Por outro lado, quando  $\lambda$  é inteiro isto não é possível. Uma

representação em termos de funções de Bessel modificadas foi dada em (3.12b). Contudo, quando o argumento da função  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  é pequeno, como é o caso na presente aplicação, o emprego da fórmula (3.12b) é dispendioso do ponto de vista computacional. Por esta razão, buscou-se uma nova representação para o caso inteiro de  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  que permitisse um cálculo rápido da mesma.

A nova representação foi obtida com o emprego do teorema dos resíduos. Detalhes a respeito dessa derivação são dados no apêndice C. Aqui nos limitamos a apresentar a expressão final, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \frac{\pi^{-1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} F_{n,\lambda-2}(2\kappa z), \text{ sendo} \\ F_{n,\theta}(z) &= \sqrt{\pi}\epsilon_\sigma(\sigma-1)! \left(\frac{1}{2}\right)_\nu \frac{z^\nu}{\eta!} \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} \frac{(\nu+1/2)_\ell}{(\eta+1)_\ell(1-\sigma)_\ell} \frac{z^\ell}{\ell!} \\ &\quad - (-)^\nu \left(\frac{1}{2}\right)_\mu \frac{(-z)^\mu}{\psi!\sigma!} \left[ (2\gamma + \ln z) {}_1F_2 \left( \begin{matrix} \mu+1/2 \\ \psi+1, \sigma+1 \end{matrix}; z \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\mu+1/2)_\ell}{(\psi+1)_\ell(\sigma+1)_\ell} (H_\ell + H_{\psi+\ell} + H_{\sigma+\ell} - H_{\mu-1/2+\ell}) \frac{z^\ell}{\ell!} \right], \end{aligned}$$

onde  $\mu = \max(\theta, n)$ ,  $\nu = \min(\theta, n)$ ,  $\sigma = \mu - \nu$ ,  $\psi = \mu + n$ ,  $\eta = \nu + n$  e  $\epsilon_\sigma = 1 - \delta_{\sigma,0}$ . Além disso,  $\gamma = 0.57721\dots$  é a constante de Euler e as quantidades  $H_w$  são os números harmônicos, dados por  $H_w = \psi(w+1) + \gamma$ , sendo  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  a função psi ou digama. Quando  $w$  é um número natural, os números harmônicos são  $H_0 = 0$  e  $H_m = \sum_{k=1}^m k^{-1}$  ( $m \geq 1$ ).

### 6.2.3 Expansões em série de potências para $|\xi| > \sqrt{\kappa}$

Expansões das funções  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  e  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  em séries de potências da variável  $\xi$ , para o caso  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$  ou para o caso geral, foram discutidas na seção 3.3.3.2. Contudo, na presente aplicação, as variações dos parâmetros envolvidos nas soluções da equação de dispersão (6.4) são tais que frequentemente as raízes ocorrem para  $|\xi| \gg 1$ . Para esta região, o cálculo das funções  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  por meio das séries generalizadas é computacionalmente dispendioso. Assim, expansões para grande  $|\xi|$  foram obtidas, cujos detalhes encontram-se no apêndice C. Aqui, nos limitamos a apresentar as expressões finais, que são

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{1/2+\beta}\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-2)} \\ &\quad \times \left\{ \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] + i\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{\kappa^{-1/2-\beta}}{\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{\sqrt{\kappa}}{\xi} \mathcal{X}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left( \mu, \frac{\kappa}{\xi^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-2)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-4)} \\ &\times \left\{ \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] + i\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] \right\} \\ &- \frac{\kappa^{1/2-\beta}}{\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{\sqrt{\kappa}}{\xi} \partial_\mu \mathcal{X}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)} \left( \mu, \frac{\kappa}{\xi^2} \right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} G_{2,4}^{2,2} \left[ 2\kappa z \left| \begin{array}{c} \lambda - 5/2, 1/2 \\ \lambda - 5/2, n, -n, \lambda - 2 \end{array} \right. \right] \\ \mathcal{X}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_k \mathcal{J}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x) y^k, \\ \mathcal{J}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-)^k \kappa}{\sqrt{\pi}} G_{2,4}^{2,2} \left[ 2\kappa x \left| \begin{array}{c} \lambda - 5/2, 1/2 \\ \lambda - 5/2, n, -n, \lambda - 5/2 - k \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Representações para as funções  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  e  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  são discutidas no apêndice C, bem como propriedades adicionais para as funções especiais de plasmas kappa.

### 6.3 Solução Numérica da Equação de Dispersão

Nesta seção apresentamos as soluções numéricas da equação de dispersão (6.4). Através da implementação de um código de computador, empregamos diversas propriedades apresentadas nos trabalhos [84–87], bem como as propriedades apresentadas ao longo desta tese.

A maior parte do código foi escrita em Fortran Moderno [121], mas diversos componentes-chave se tornaram possíveis graças à existência das bibliotecas de múltipla precisão MPMath [104] e Arb [122], respectivamente escritas em Python e C. As funções em C são acessadas do Fortran com a Interface de Programação de Aplicações (API) presente no padrão da linguagem, enquanto que os módulos Python foram acessados via o Py/C API [123].

Neste trabalho, apresentamos algumas soluções representativas da equação (6.4). Para a implementação da solução numérica, adotamos as formas normalizadas:

$$q_{\parallel(\perp)} = \frac{k_{\parallel(\perp)} v_A}{\Omega_i}, \quad z_{r(i)} = \frac{\omega_{r(i)}}{\Omega_i},$$

onde  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ .

A figura 6.1 mostra uma soluções típica da equação de dispersão (6.4). Plotamos apenas os valores normalizados da relação de dispersão ( $\omega_r/\Omega_i$ ) (gráfico superior) e da taxa de crescimento ( $\omega_i/\Omega_i$ ) (gráfico inferior) do modo instável (*i. e.*,  $\omega_i > 0$ ), versus as componentes normalizadas do vetor de onda nas direções paralela ( $k_{\parallel} v_A/\Omega_i$ ) e perpendicular ( $k_{\perp} v_A/\Omega_i$ ). Os parâmetros físicos usados na figura 6.1 são os seguintes: a função de distribuição de

velocidades (VDF - velocity distribution function) dos elétrons é isotrópica, com plasma beta  $\beta_e = \beta_{\parallel e} = \beta_{\perp e} = 2$ ; a VDF dos íons é anisotrópica, com  $\beta_{\parallel i} = 3$  e  $\beta_{\perp i} = 0.8$ , que corresponde a uma razão de temperatura de  $T_{\parallel i}/T_{\perp i} = 3.75$  ou a um parâmetro anisotrópico  $A_i = 1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i} = 0.733$ . Estes são parâmetros típicos para excitar a instabilidade firehose. Adicionalmente, ambas as VDFs são supertérmicas, com  $\kappa_e = \kappa_i = 5$ .

A figura 6.1 é semelhante à figura 4 de Yoon *et al.* [94]. No gráfico superior, podemos observar que a taxa de crescimento da instabilidade é dividida em dois ramos: no plano  $k_{\perp} = 0$ , a instabilidade está restrita ao intervalo  $0 \leq k_{\parallel} v_A / \Omega_i \lesssim 0.16$ . Este ramo rapidamente desaparece com crescimento de  $\kappa_{\perp}$ , enquanto que o ramo oblíquo exibe um comportamento crescente, subindo até um máximo  $z_i \approx 0.07$  para  $(q_{\parallel}, q_{\perp}) \approx (0.37, 0.32)$ . Este ramo desaparece gradualmente com o crescimento de  $q_{\perp}$ , mas decresce lentamente ao longo da direção  $q_{\parallel}$ . Este ramo foi denominado *Firehose oblíqua* por Yoon *et al.* [94] e *Alfvén firehose* por Hellinger e Matsumoto [95]. Outro aspecto a ser destacado é que a taxa de crescimento máxima da instabilidade firehose na direção oblíqua é substancialmente maior que a taxa de crescimento na direção paralela ( $z_i \approx 0.02$ ).

Sobre o intervalo espectral onde a instabilidade firehose oblíqua é operante, observamos no gráfico superior da figura 6.1 que a parte real é nula; isto é, a instabilidade firehose oblíqua ocorre em um modo não propagante. Esta característica já foi apontada por [94] e [95] para plasmas bi-Maxwellianos e é também válida para um plasma tipo bi-kappa.

A transição entre os comportamentos oblíquo e paralelo da instabilidade podem ser vistos com mais detalhes na figura 6.2. Podemos observar uma transição suave entre ambos os ramos da instabilidade, com o ramo paralelo limitado ao intervalo  $0 \leq q_{\perp} \lesssim 0.03$  e  $0 \leq q_{\parallel} \lesssim 0.16$ , enquanto que o ramo oblíquo opera para  $q_{\perp} \gtrsim 0.03$ .

Os gráficos de superfície nas figuras 6.1 e 6.2 mostram as características da instabilidade firehose para uma combinação particular de parâmetros físicos. Para uma análise mais detalhada dos efeitos dos parâmetros kappa (eletrônico e/ou iônico) sobre a instabilidade, gráficos de superfície não são visualizações adequadas. Em vez disso, vamos tomar as coordenadas da taxa máxima de crescimento para um plasma Maxwelliano, as quais são  $(q_{\parallel}, q_{\perp}) \approx (0.41, 0.37)$  para os parâmetros na figura 5.1, fixar  $k_{\parallel}$  ou  $k_{\perp}$  no valor correspondente e então traçar o gráfico da taxa de crescimento ao longo da outra componente do vetor onda para diferentes valores de  $\kappa_e$  e  $\kappa_i$ .

Adotando a descrição acima, obtemos os resultados mostrados na figura 6.3. Nesta tese, consideramos a escolha particular de  $\kappa_e = \kappa_i$ . No painel superior da figura 6.3, mostramos a dependência de  $\omega_i$  em  $q_{\parallel}$  para  $q_{\perp} = 0.374$  fixo. A curva pontilhada é a solução do limite Maxwelliano da equação de dispersão (6.4), isto é, a equação (5.10), obtida diretamente das



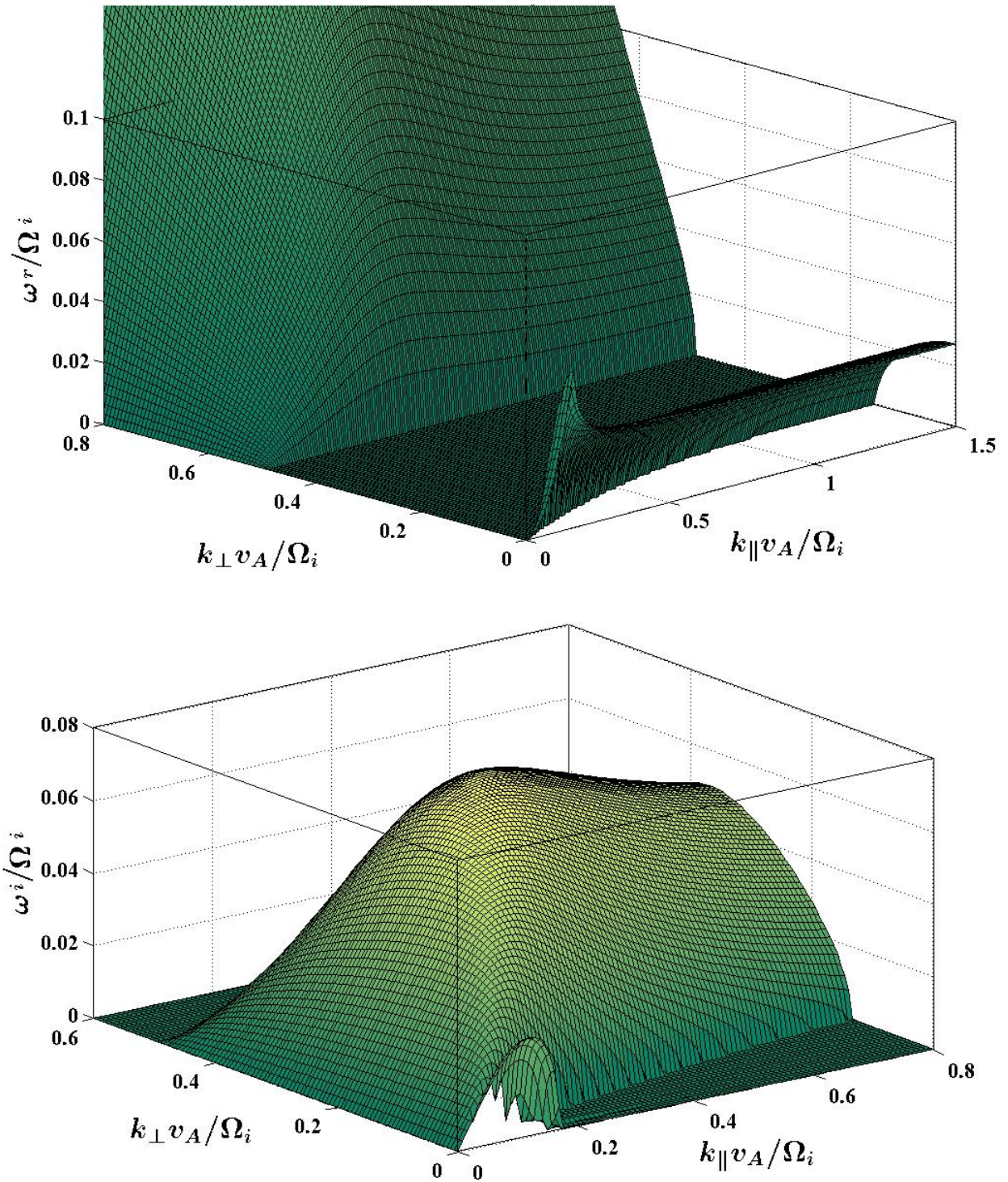


Fig. 6.1: Plots da frequência real (gráfico superior) e taxa de crescimento (gráfico inferior) e modos instáveis versus número de onda para  $\beta_e = 2$  ( $T_{\parallel e} = T_{\perp e}$ ),  $\beta_{\parallel i} = 3$ ,  $\beta_{\perp i} = 0.8$  and  $\kappa_e = \kappa_i = 5$ .

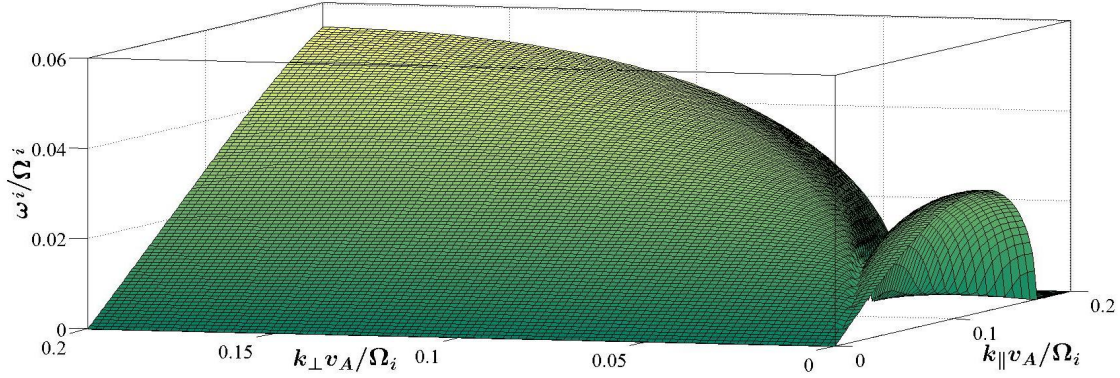


Fig. 6.2: Plots da frequência real (gráfico superior) e taxa de crescimento (gráfico inferior) e modos instáveis versus número de onda para  $\beta_e = 2$  ( $T_{\parallel e} = T_{\perp e}$ ),  $\beta_{\parallel i} = 3$ ,  $\beta_{\perp i} = 0.8$  and  $\kappa_e = \kappa_i = 5$ .

expressões para uma FDV bi-Maxwelliana. A curva azul do gráfico da figura 6.3 (superior), por outro lado, é a solução da equação (6.4) com  $\kappa_e = \kappa_i = 20$ . Como esperado, este caso se aproxima de um plasma Maxwelliano. À medida que o índice kappa decresce, a taxa de crescimento máximo ao longo de  $q_{\parallel}$  também cai (de  $z_{i,\max} \approx 0.08$  quando  $\kappa \rightarrow \infty$  para  $z_{i,\max} \approx 0.062$  quando  $\kappa = 3.5$ ), com o valor de  $q_{\parallel,\max} \simeq 0.41$  aproximadamente o mesmo para todos os kappas. Observa-se também que a largura espectral da instabilidade permanece inalterada dentro do intervalo de valores de  $q_{\parallel}$  mostrado na figura.

Um comportamento diferente é observado ao longo de  $q_{\perp}$ . O painel inferior da figura 6.3 novamente mostra que o caso  $\kappa_e = \kappa_i = 20$  é próximo ao limite Maxwelliano e que  $z_{i,\max}$  cai com a redução dos valores de kappa, com a mesma variação observada no gráfico superior. No entanto, ao longo da direção perpendicular pode-se observar algumas características distintas não aparentes no painel superior. Na região de pequeno  $k_{\perp}$  ( $q_{\perp} \lesssim 0.17$ ), correspondente ao caso de “raio de giro pequeno” ( $\mu_i \ll 1$ ), a taxa de crescimento permanece aproximadamente independente de  $\kappa$ , com a situação limite em que para  $q_{\perp} = 0$  a solução é exatamente a mesma obtida com um plasma bi-Maxwelliano. Por outro lado, para  $q_{\perp} \gtrsim 0.17$ , a taxa de crescimento torna-se dependente de  $\kappa$ , de tal forma que não somente os valores de  $z_{i,\max}$  diminuem com  $\kappa$ , mas o intervalo espectral de instabilidade na direção perpendicular também diminui. Assim, estes resultados sugerem que, para valores moderados de raio de giro, a instabilidade firehose oblíqua é fortemente dependente do parâmetro kappa.

O mesmo comportamento é exibido pela parte real do modo instável em função de  $k_{\perp}$ , como pode ser visto na figura 6.4. No limite de pequeno raio de Larmor, a onda refrata como em um plasma bi-Maxwelliano, tornando-se então não propagante ao longo do intervalo espectral onde a instabilidade é operante ( $q_{\perp} \gtrsim 0.08$ ). O modo finalmente torna-se novamente propagante quando a instabilidade desaparece e é substituída por um



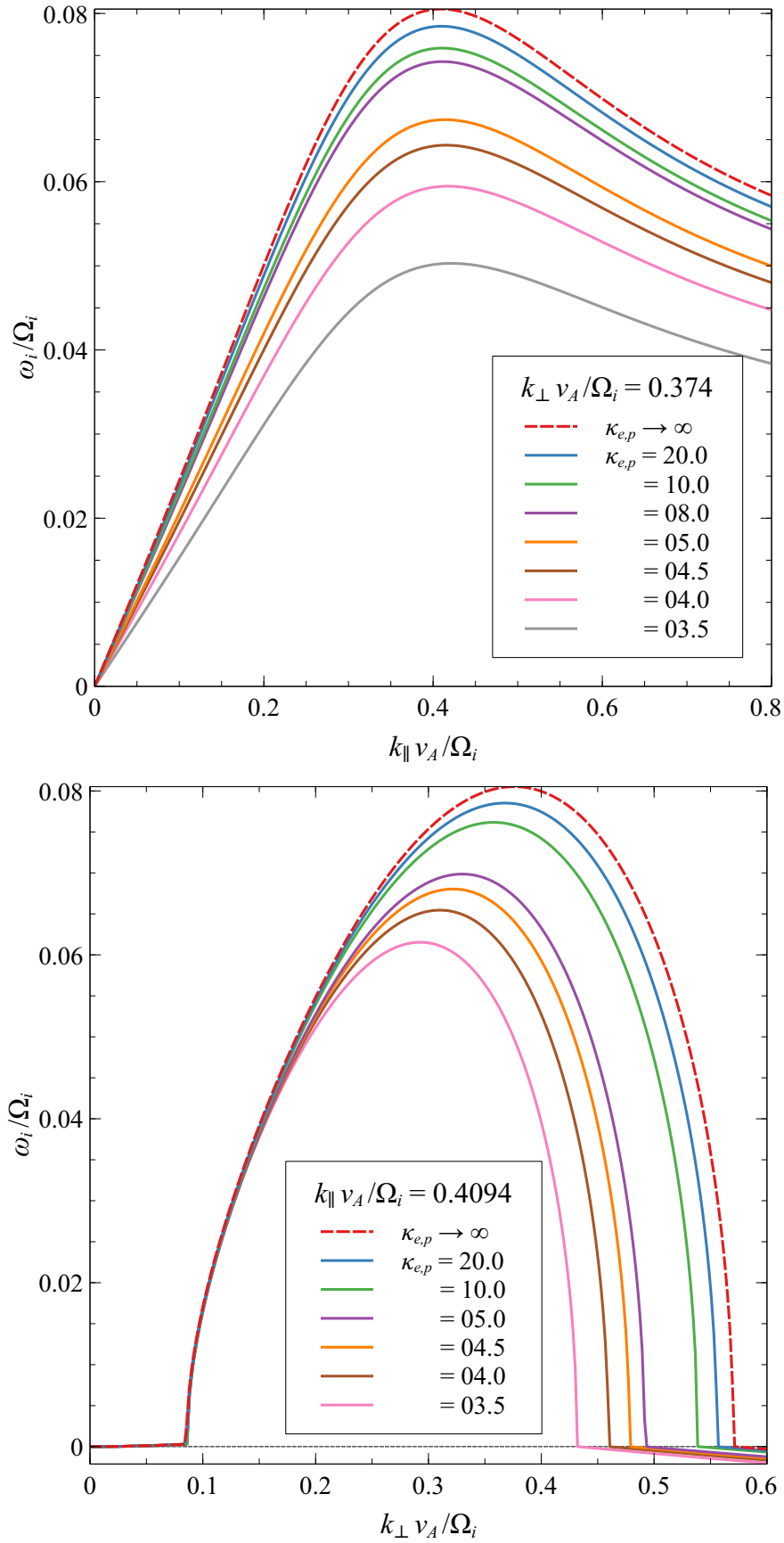


Fig. 6.3: Plots da frequência real (gráfico superior) e taxa de crescimento (gráfico inferior) e modos instáveis versus número de onda para  $\beta_e = 2$  ( $T_{\parallel e} = T_{\perp e}$ ),  $\beta_{\parallel i} = 3$ ,  $\beta_{\perp i} = 0.8$  and  $\kappa_e = \kappa_i = 5$ .

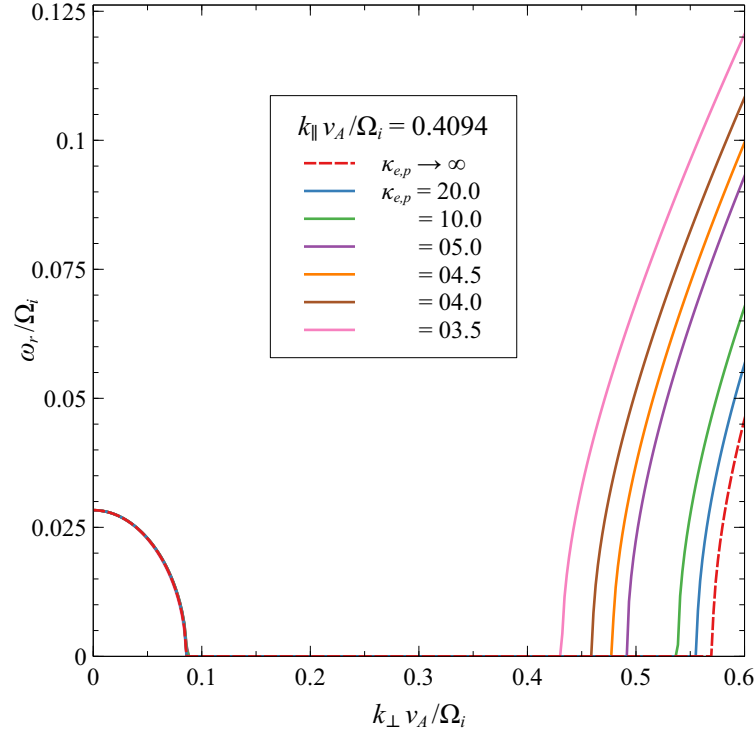


Fig. 6.4: Gráfico de  $\omega_r/\Omega_i$  em relação a valores de  $\kappa_e = \kappa_i$ , variando  $k_\perp$  com  $q_\parallel = 0.4094$  fixo. Os demais parâmetros são os mesmos da figura 6.1.

fraco amortecimento. O valor de  $q_\perp$  onde o modo deixa de ser instável depende do valor do parâmetro kappa, mas observa-se que há uma consistente redução no intervalo espectral onde o modo é não propagante e instável com o valor de  $\kappa_e = \kappa_i$ .

Como um resultado final, a figura 6.5 mostra tanto a taxa de crescimento normalizada (curvas contínuas) quanto a parte real normalizada (curvas pontilhadas) do modo instável para um valor fixo de  $q_\parallel$ , em função de  $q_\perp$ . Agora, a componente paralela do vetor de onda é fixa em  $k_\parallel v_A/\Omega_i = 0.12$ , o que corresponde à máxima taxa de crescimento do ramo paralelo da instabilidade firehose. As taxas de crescimento traçadas na figura mostram claramente a transição entre os ramos quase-paralelo e oblíquo da instabilidade, o que ocorre em  $q_\perp \approx 0.026$  para todos os valores do parâmetro kappa. Observa-se o mesmo comportamento apresentado nas figuras 6.3 e 6.4: o ramo quase-paralelo é praticamente independente do valor do parâmetro kappa, enquanto que o ramo oblíquo, ao contrário, mostra uma dependência evidente com  $\kappa$ . Novamente observa-se que não somente o valor máximo da taxa de crescimento é reduzido com kappa, mas o mesmo ocorre com o intervalo espectral da instabilidade.

A parte real do modo instável repete o mesmo padrão observado na figura anterior: o ramo quase-paralelo é convectivo, com velocidade de fase não nula praticamente independente do valor de kappa. Por outro lado, o modo oblíquo é não propagante por todo intervalo

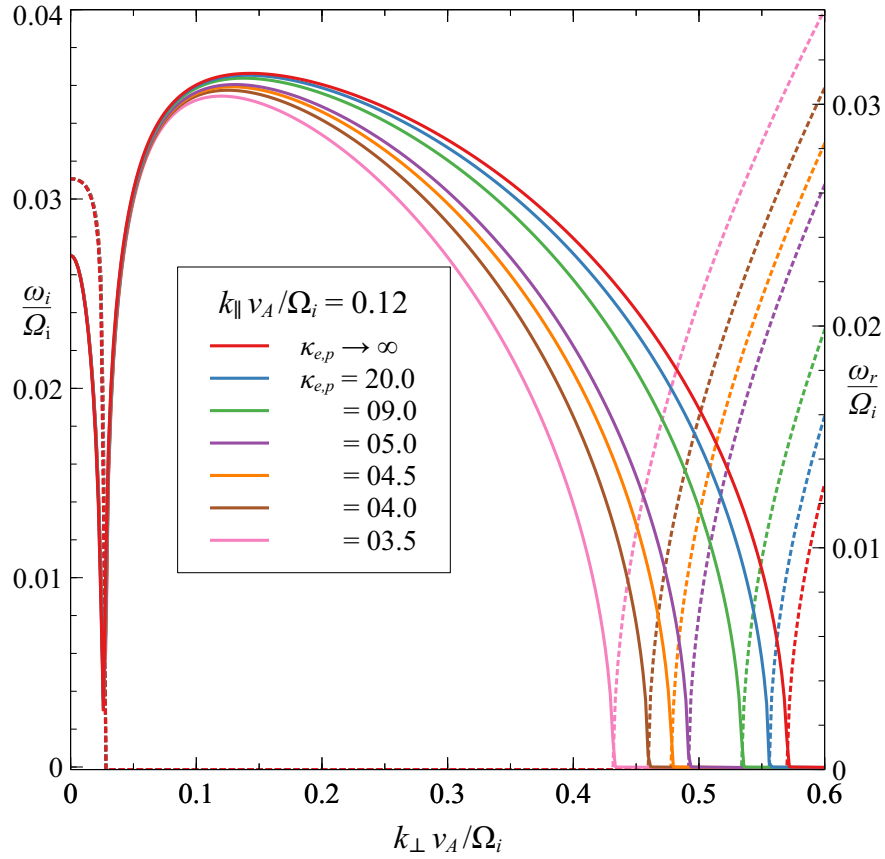


Fig. 6.5: Análise de  $\omega_i/\Omega_i$  (linha contínua) e  $\omega_r/\Omega_i$  (linha pontilhada) como função de  $q_\perp$  para  $q_\parallel = 0.12$  fixo e vários valores de  $\kappa_e = \kappa_i$ . Os demais parâmetros são os mesmos da figura 6.1.

espectral da instabilidade e adquire uma velocidade de fase não nula quando a instabilidade desaparece, sendo substituída por um fraco coeficiente de amortecimento.

## Capítulo 7

### CONCLUSÃO

Neste trabalho, realizamos a derivação da equação de dispersão que descreve a instabilidade firehose oblíqua, excitada em um plasma de elétrons-íons. Equação esta dependente do vetor de onda, dos parâmetros beta paralelo e perpendicular e dos parâmetros kappa das funções de distribuição de velocidades de ambas as espécies. Sendo assim, desenvolvemos um formalismo mais geral para a equação em questão.

Para a implementação numérica das soluções da equação de dispersão, foi necessário o desenvolvimento e inserção de várias propriedades adicionais das funções especiais de plasmas kappa. Essas propriedades complementam o formalismo já desenvolvido em publicações anteriores e no capítulo 5.

Algumas soluções da equação de dispersão, correspondentes a ambos os ramos (quase-paralelo e oblíquo) da instabilidade firehose foram ilustradas, empregando-se parâmetros físicos relevantes às condições presentes no vento solar. Os resultados obtidos mostraram que, tanto o valor máximo da taxa de crescimento, quanto o intervalo espectral de operação da instabilidade dependem da natureza supertérmica das distribuições de velocidades do tipo bi-kappa. Tanto o valor máximo quanto o intervalo espectral da instabilidade apresentam redução com o valor de  $\kappa_e = \kappa_i$ .

Como futuros desenvolvimentos, pretende-se realizar uma análise completa da instabilidade firehose oblíqua por meio de uma análise multivariada de todos os parâmetros físicos relevantes:  $T_{\perp i}/T_{\parallel i}$ ,  $T_{\perp e}/T_{\parallel e}$ ,  $\beta_{\parallel i}$ ,  $\beta_{\parallel e}$ ,  $\kappa_i$  e  $\kappa_e$ . Esta análise multivariada destina-se a estabelecer as condições marginais de geração da instabilidade firehose nas condições presentes no vento solar, semelhantes às curvas ilustradas na figura 1.6, as quais foram obtidas a partir de distribuições bi-Maxwellianas.

Pretende-se, também, realizar uma análise semelhante com a instabilidade mirror, a qual também ocorre em ângulos muito oblíquos no vento solar. Espera-se que esta instabilidade também apresente sensibilidade com a variação dos parâmetros kappa.

A partir dos resultados encontrados será possível desenvolver um código numérico capaz de resolver a equação de dispersão na sua forma geral, sem aproximações. Dessa maneira,

---

relizaremos o estudo da propagação e amplificação/amortecimento de ondas eletromagnéticas/eletrostáticas em plasmas supertérmicos em qualquer regime de espécies de partículas, frequência das ondas, sua polarização e direção de propagação.

Em um prazo mais longo, pretende-se contemplar também a inclusão de efeitos não lineares na descrição cinética de plasmas supertérmicos, iniciando-se com um tratamento quase-linear, seguido por uma formulação baseada na teoria de turbulência fraca em plasmas. Dessa maneira, quantificaremos o efeito da supertermalidade nas distribuições de velocidades sobre a evolução temporal de longo prazo do sistema de partículas e campos em plasmas espaciais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. V. Hollweg. The solar wind: Our current understanding and how we got here. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 29(1):217–237, June 2008. doi:10.1007/s12036-008-0028-8.
- [2] E. Marsch. Kinetic Physics of the Solar Corona and Solar Wind. *Living Reviews in Solar Physics*, 3(1), 2006. URL: <http://www.livingreviews.org/lrsp-2006-1>.
- [3] R. Schwenn. Solar Wind Sources and Their Variations Over the Solar Cycle. *Space Science Reviews*, 124(1-4):51–76, June 2006. doi:10.1007/s11214-006-9099-5.
- [4] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. San Francisco Press, San Francisco, 1986. 687 pp.
- [5] M. Brambilla. *Kinetic Theory of Plasma Waves: Homogeneous Plasmas*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, New York, 1998. 644 + x pp. URL: <http://books.google.com.br/books?id=Che5F-ZdvLQC>.
- [6] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004. 678 pp.
- [7] R. Schwenn and E. Marsch. *Physics of the Inner Heliosphere I: Large-Scale Phenomena*. Physics and Chemistry in Space. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 1990. 282 + xi pp. URL: <https://books.google.com.br/books?id=W1DuCAAQBAJ>.
- [8] Richard Woo and Shadia Rifai Habbal. Origin and Acceleration of the Slow Solar Wind. *The Astrophysical Journal Letters*, 629(2):L129–L132, August 2005. doi:10.1086/447767.
- [9] M. D. Montgomery, S. J. Bame, and A. J. Hundhaus. Solar Wind Electrons — Vela 4 Measurements. *Journal of Geophysical Research*, 73(15):4999, 1968.
- [10] W. C. Feldman, J. R. Asbridge, S. J. Bame, M. D. Montgomery, and S. P. Gary. Solar-Wind Electrons. *Journal of Geophysical Research*, 80(31):4181–4196, 1975.

- 
- [11] R. P. Lin, D. W. Potter, D. A. Gurnett, and F. L. Scarf. Energetic Electrons and Plasma-Waves Associated with a Solar Type-III Radio-Burst. *The Astrophysical Journal*, 251(1):364–373, December 1981. doi:[10.1086/159471](https://doi.org/10.1086/159471).
- [12] W. G. Pilipp, H. Miggenrieder, M. D. Montgomery, K. H. Mühlhäuser, H. Rosenbauer, and R. Schwenn. Characteristics of Electron Velocity Distribution Functions in the Solar Wind Derived From the Helios Plasma Experiment. *Journal of Geophysical Research*, 92(A2):1075–1092, February 1987.
- [13] W. G. Pilipp, H. Miggenrieder, M. D. Montgomery, K. H. Mühlhäuser, H. Rosenbauer, and R. Schwenn. Unusual Electron Distribution Functions in the Solar Wind Derived From the Helios Plasma Experiment: Double-Strahl Distributions and Distributions With an Extremely Anisotropic Core. *Journal of Geophysical Research*, 92(A2):1093–1101, February 1987.
- [14] R. J. Fitzenreiter, K. W. Ogilvie, D. J. Chornay, and J. Keller. Observations of electron velocity distribution functions in the solar wind by the WIND spacecraft: High angular resolution strahl measurements,. *Geophysical Research Letters*, 25(3):249–252, March 1998. doi:[10.1029/97GL03703](https://doi.org/10.1029/97GL03703).
- [15] V. Pierrard, M. Maksimovic, and J. Lemaire. Core, Halo and Strahl Electrons in the Solar Wind. *Astrophysics and Space Science*, 277(1-2):195–200, June 2001. doi:[10.1023/A:1012218600882](https://doi.org/10.1023/A:1012218600882).
- [16] C. Pagel, N. U. Crooker, D. E. Larson, S. W. Kahler, and M. J. Owens. Understanding electron heat flux signatures in the solar wind. *Journal of Geophysical Research*, 110(A01103):A01103, January 2005. doi:[10.1029/2004JA010767](https://doi.org/10.1029/2004JA010767).
- [17] C. Pagel, S. P. Gary, C. A. de Koning, R. M. Skoug, and J. T. Steinberg. Scattering of suprathermal electrons in the solar wind: ACE observations. *Journal of Geophysical Research*, 112(A04103):A04103, April 2007. doi:[10.1029/2006JA011967](https://doi.org/10.1029/2006JA011967).
- [18] Eckart Marsch. Helios: Evolution of Distribution Functions 0.3-1 AU. *Space Science Reviews*, 172(1-4):23–39, November 2012. doi:[10.1007/s11214-010-9734-z](https://doi.org/10.1007/s11214-010-9734-z).
- [19] R. P. Lin. WIND Observations of Suprathermal Electrons in the Interplanetary Medium. *Space Science Reviews*, 86(1-4):61–78, July 1998. doi:[10.1023/A:1005048428480](https://doi.org/10.1023/A:1005048428480).

- [20] Linghua Wang, Liu Yang, Jiansen He, Chuanyi Tu, Zhongtian Pei, Robert F. Wimmer-Schweingruber, and Stuart D. Bale. Solar Wind  $\sim 20$ –200 keV Superhalo Electrons at Quiet Times. *The Astrophysical Journal Letters*, 803(1):L2, April 2015. doi:[10.1088/2041-8205/803/1/L2](https://doi.org/10.1088/2041-8205/803/1/L2).
- [21] J. Pavan, A. F. Viñas, P. H. Yoon, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Solar Wind Strahl Broadening by Self-generated Plasma Waves. *The Astrophysical Journal Letters*, 769(2):L30, June 2013. doi:[10.1088/2041-8205/769/2/L30](https://doi.org/10.1088/2041-8205/769/2/L30).
- [22] G. A. Graham, I. J. Rae, C. J. Owen, A. P. Walsh, C. S. Arridge, L. Gilbert, G. R. Lewis, G. H. Jones, C. Forsyth, A. J. Coates, and J. H. Waite. The evolution of solar wind strahl with heliospheric distance. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 122(4):3858–3874, April 2017. 2016JA023656. doi:[10.1002/2016JA023656](https://doi.org/10.1002/2016JA023656).
- [23] H. Che and M. L. Goldstein. The Origin of Non-Maxwellian Solar Wind Electron Velocity Distribution Function: Connection to Nanoflares in the Solar Corona. *The Astrophysical Journal Letters*, 795(2):L38, October 2014. doi:[10.1088/2041-8205/795/2/L38](https://doi.org/10.1088/2041-8205/795/2/L38).
- [24] P. Kajdič, O. Alexandrova, M. Maksimovic, C. Lacombe, and A. N. Fazakerley. Suprathermal Electron Strahl Widths in the Presence of Narrow-band Whistler Waves in the Solar Wind. *The Astrophysical Journal*, 833(2):172, December 2016. doi:[10.3847/1538-4357/833/2/172](https://doi.org/10.3847/1538-4357/833/2/172).
- [25] Konstantinos Horaites, Stanislav Boldyrev, Lynn B. Wilson, III, Adolfo F. Viñas, and Jan Merka. Kinetic theory and fast wind observations of the electron strahl. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474(1):115–127, February 2018. doi:[10.1093/mnr/stx2555](https://doi.org/10.1093/mnr/stx2555).
- [26] G. Livadiotis and D. J. McComas. Understanding Kappa Distributions: A Toolbox for Space Science and Astrophysics. *Space Science Reviews*, 175(1-4):183–214, June 2013. doi:[10.1007/s11214-013-9982-9](https://doi.org/10.1007/s11214-013-9982-9).
- [27] George Livadiotis. Introduction to special section on Origins and Properties of Kappa Distributions: Statistical Background and Properties of Kappa Distributions in Space Plasmas. *Journal of Geophysical Research*, 120(3), March 2015. doi:[10.1002/2014JA020825](https://doi.org/10.1002/2014JA020825).



- 
- [28] G. Livadiotis. *Kappa Distributions: Theory and Applications in Plasmas*. Elsevier Science & Technology Books, 2017. URL: <https://www.elsevier.com/books/kappa-distributions/livadiotis/978-0-12-804638-8>.
- [29] George Livadiotis. Statistical origin and properties of kappa distributions. *Journal of Physics: Conference Series*, 900(1):012014, 2017. doi:10.1088/1742-6596/900/1/012014.
- [30] M. Maksimovic, V. Pierrard, and J. F. Lemaire. A kinetic model of the solar wind with Kappa distribution functions in the corona. *Astronomy and Astrophysics*, 324(2):725–734, August 1997.
- [31] M. Maksimovic, I. Zouganelis, J. Y. Chaufray, K. Issautier, E. E. Scime, J. E. Littleton, E. Marsch, D. J. McComas, C. Salem, R. P. Lin, and H. Elliot. Radial evolution of the electron distribution functions in the fast solar wind between 0.3 and 1.5 AU. *Journal of Geophysical Research*, 110(A09104):A09104, September 2005. doi:10.1029/2005JA011119.
- [32] S. Štverák, M. Maksimovic, P. M. Trávníček, E. Marsch, A. N. Fazakerley, and E. E. Scime. Radial evolution of nonthermal electron populations in the low-latitude solar wind: Helios, Cluster, and Ulysses Observations. *Journal of Geophysical Research*, 114(A5):A05104, May 2009. doi:10.1029/2008JA013883.
- [33] G. Livadiotis, M. I. Desai, and L. B. Wilson, III. Generation of Kappa Distributions in Solar Wind at 1 au. *The Astrophysical Journal*, 853(2):142, February 2018. doi:10.3847/1538-4357/aaa713.
- [34] Adolfo F. Viñas, Richard L. Mace, and Robert F. Benson. Dispersion characteristics for plasma resonances of Maxwellian and Kappa distribution plasmas and their comparisons to the IMAGE/RPI observations. *Journal of Geophysical Research*, 110(A6), June 2005. doi:10.1029/2004JA010967.
- [35] Robert F. Benson, Adolfo F. Viñas, Vladimir A. Osherovich, Joseph Fainberg, Carola M. Purser, Mark L. Adrian, Ivan A. Galkin, and Bodo W. Reinisch. Magnetospheric electron-velocity-distribution function information from wave observations. *Journal of Geophysical Research*, 118(8), August 2013. doi:10.1002/jgra.50459.
- [36] Stepanova Marina and Antonova Elizaveta E. Role of turbulent transport in the evolution of the  $\kappa$  distribution functions in the plasma sheet. *Journal of Geophysical Research*, 120(5):3702–3714, May 2015. doi:10.1002/2014JA020684.

- 
- [37] I. P. Kirpichev, E. E. Antonova, and M. Stepanova. Ion leakage at dayside magnetopause in case of high and low magnetic shears. *Journal of Geophysical Research*, 122(8):8078–8095, August 2017. doi:10.1002/2016JA023735.
- [38] C. M. Espinoza, M. Stepanova, P. S. Moya, E. E. Antonova, and J. A. Valdivia. Ion and Electron  $\kappa$  Distribution Functions Along the Plasma Sheet. *Geophysical Research Letters*, 45(13):6362–6370, June 2018. doi:10.1029/2018GL078631.
- [39] Constantino Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1):479–487, July 1988. doi:10.1007/BF01016429.
- [40] Constantino Tsallis. Non-extensive thermostatics: brief review and comments. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 221(1-3):277–290, November 1995. Proceedings of the Second IUPAP Topical Conference and the Third Taipei International Symposium on Statistical Physics. doi:10.1016/0378-4371(95)00236-Z.
- [41] R. Silva, A. R. Plastino, and J. A. S. Lima. A Maxwellian path to the  $q$ -nonextensive velocity distribution function. *Physics Letters A*, 249(5-6):401–408, December 1998. doi:10.1016/S0375-9601(98)00710-5.
- [42] Constantino Tsallis, Renio S. Mendes, and A.R. Plastino. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 261(3-4):534–554, December 1998. doi:10.1016/S0378-4371(98)00437-3.
- [43] C. Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, New York, 2009. 382 + xviii pp. doi:10.1007/978-0-387-85359-8.
- [44] M. P. Leubner. A Nonextensive Entropy Approach to Kappa-Distributions. *Astrophysics and Space Science*, 282(3):573–579, November 2002. doi:10.1023/A:1020990413487.
- [45] M. P. Leubner. Core-Halo Distribution Functions: A Natural Equilibrium State in Generalized Thermostatics. *The Astrophysical Journal*, 604(1):469–478, March 2004. doi:10.1086/381867.
- [46] G. Livadiotis and D. J. McComas. Beyond kappa distributions: Exploiting Tsallis statistical mechanics in space plasmas. *Journal of Geophysical Research*, 114:A11105, November 2009. doi:10.1029/2009JA014352.

- 
- [47] G. Livadiotis and D. J. McComas. Invariant Kappa Distribution in Space Plasmas Out of Equilibrium. *The Astrophysical Journal*, 741(2):88, November 2011. doi:[10.1088/0004-637X/741/2/88](https://doi.org/10.1088/0004-637X/741/2/88).
- [48] Steven J. Schwartz, William C. Feldman, and S. Peter Gary. The Source of Proton Anisotropy in the High-Speed Solar Wind. *Journal of Geophysical Research*, 86(A2):541–546, February 1981. doi:[10.1029/JA086iA02p00541](https://doi.org/10.1029/JA086iA02p00541).
- [49] R. A. Treumann and W. Baumjohann. *Advanced Space Plasma Physics*. Imperial College Press, London, 1997. 381 + x pp. URL: <https://books.google.com.br/books?id=8wB-QgAACAAJ>.
- [50] S. P. Gary. *Theory of Space Plasma Microinstabilities*. Cambridge Atmospheric and Space Science Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. 181 + xii pp. URL: [http://books.google.com.br/books?id=VE0Tr-i\\_teYC](http://books.google.com.br/books?id=VE0Tr-i_teYC).
- [51] S. Peter Gary, Michael E. McKean, Dan Winske, Brian J. Anderson, Richard E. Denton, and Stephen A. Fuselier. The Proton Cyclotron Instability and the Anisotropy/ $\beta$  Inverse Correlation. *Journal of Geophysical Research*, 99(A4):5903–5914, April 1994. doi:[10.1029/93JA03583](https://doi.org/10.1029/93JA03583).
- [52] S. Peter Gary, Joseph Wang, Dan Winske, and Stephen A. Fuselier. Proton temperature anisotropy upper bound. *Journal of Geophysical Research*, 102(A12):27159–27169, December 1997. doi:[10.1029/97JA01726](https://doi.org/10.1029/97JA01726).
- [53] P. Hellinger, P. Trávíček, J. C. Kasper, and A. J. Lazarus. Solar wind proton temperature anisotropy: Linear theory and WIND/SWE observations. *Geophysical Research Letters*, 33(9):L09101, May 2006. doi:[10.1029/2006GL025925](https://doi.org/10.1029/2006GL025925).
- [54] Peter H. Yoon. Kinetic instabilities in the solar wind driven by temperature anisotropies. *Reviews of Modern Plasma Physics*, 1(1):4, December 2017. doi:[10.1007/s41614-017-0006-1](https://doi.org/10.1007/s41614-017-0006-1).
- [55] S. Servidio, K. T. Osman, F. Valentini, D. Perrone, F. Califano, S. Chapman, W. H. Matthaeus, and P. Veltri. Proton Kinetic Effects in Vlasov and Solar Wind Turbulence. *The Astrophysical Journal Letters*, 781(2):L27, February 2014. doi:[10.1088/2041-8205/781/2/L27](https://doi.org/10.1088/2041-8205/781/2/L27).
- [56] Daniel Verscharen, Benjamin D. G. Chandran, Kristopher G. Klein, and Eliot Quataert. Collisionless Isotropization of the Solar-wind Protons by Compressive Fluctuati-

- ons and Plasma Instabilities. *The Astrophysical Journal*, 831(2):128, November 2016. doi:[10.3847/0004-637X/831/2/128](https://doi.org/10.3847/0004-637X/831/2/128).
- [57] N. Noreen, P. H. Yoon, and S. Zaheer. Cyclotron instabilities driven by temperature anisotropy in the solar wind. *Physics of Plasmas*, 24(10):102902, October 2017. doi:[10.1063/1.4999339](https://doi.org/10.1063/1.4999339).
- [58] Rodrigo A. López and Peter H. Yoon. Effects of thermal fluctuations on temperature anisotropy instabilities in the solar wind. *Journal of Geophysical Research*, 10 2018. doi:[10.1029/2018JA025934](https://doi.org/10.1029/2018JA025934).
- [59] S. Štverák, P. Trávníček, M. Maksimovic, E. Marsch, A. N. Fazakerley, and E. E. Scime. Electron temperature anisotropy constraints in the solar wind. *Journal of Geophysical Research*, 113(A3), March 2008. doi:[10.1029/2007JA012733](https://doi.org/10.1029/2007JA012733).
- [60] K. G. Klein and G. G. Howes. Predicted impacts of proton temperature anisotropy on solar wind turbulence. *Physics of Plasmas*, 22(3), March 2015. doi:[10.1063/1.4914933](https://doi.org/10.1063/1.4914933).
- [61] K. G. Klein, B. L. Alterman, M. L. Stevens, D. Vech, and J. C. Kasper. Majority of Solar Wind Intervals Support Ion-Driven Instabilities. *Physical Review Letters*, 120(20):205102, May 2018. doi:[10.1103/PhysRevLett.120.205102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.205102).
- [62] Lynn B. Wilson, III, Michael L. Stevens, Justin C. Kasper, Kristopher G. Klein, Bennett A. Maruca, Stuart D. Bale, Trevor A. Bowen, Marc P. Pulupa, and Chadi S. Salem. The Statistical Properties of Solar Wind Temperature Parameters Near 1 au. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 236(2):41, June 2018. doi:[10.3847/1538-4365/aab71c](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aab71c).
- [63] V. Pierrard, M. Lazar, S. Poedts, Š. Štverák, M. Maksimovic, and P. M. Trávníček. The Electron Temperature and Anisotropy in the Solar Wind. Comparison of the Core and Halo Populations. *Solar Physics*, 291(7):2165–2179, August 2016. doi:[10.1007/s11207-016-0961-7](https://doi.org/10.1007/s11207-016-0961-7).
- [64] Fahr Hans-Jörg, Fichtner Horst, and Scherer Klaus. On the radial evolution of  $\kappa$  distributions of pickup protons in the supersonic solar wind. *Journal of Geophysical Research*, 119(10):7998–8005, October 2014. doi:[10.1002/2014JA020431](https://doi.org/10.1002/2014JA020431).
- [65] V. Pierrard and M. Pieters. Coronal heating and solar wind acceleration for electrons, protons, and minor ions obtained from kinetic models based on kappa distributions.

- Journal of Geophysical Research*, 119(12):9441–9455, December 2014. 2014JA020678. doi:10.1002/2014JA020678.
- [66] E. J. Zirnstein and D. J. McComas. Using Kappa Functions to Characterize Outer Heliosphere Proton Distributions in the Presence of Charge-exchange. *The Astrophysical Journal*, 815(1):31, December 2015. doi:10.1088/0004-637X/815/1/31.
- [67] Georgios Nicolaou and George Livadiotis. Misestimation of temperature when applying Maxwellian distributions to space plasmas described by kappa distributions. *Astrophysics and Space Science*, 361(11):359, November 2016. doi:10.1007/s10509-016-2949-z.
- [68] G. Nicolaou, G. Livadiotis, C. J. Owen, D. Verscharen, and R. T. Wicks. Determining the Kappa Distributions of Space Plasmas from Observations in a Limited Energy Range. *The Astrophysical Journal*, 864(1):3, September 2018. doi:10.3847/1538-4357/aad45d.
- [69] G. Livadiotis. Statistical Background of Kappa Distributions: Connection With Nonextensive Statistical Mechanics. In George Livadiotis, editor, *Kappa Distributions*, chapter 1, page 3–63. Elsevier, 2017. URL: <https://www.elsevier.com/books/kappa-distributions/livadiotis/978-0-12-804638-8>, doi:10.1016/B978-0-12-804638-8.00001-2.
- [70] R. Gaelzer, M. C. de Juli, and L. F. Ziebell. Effect of superthermal electrons on Alfvén wave propagation in the dusty plasmas of solar and stellar winds. *Journal of Geophysical Research*, 115(A09109), September 2010. doi:10.1029/2009JA015217.
- [71] M. Lazar, S. Poedts, and R. Schlickeiser. Instability of the parallel electromagnetic modes in Kappa distributed plasmas - I. Electron whistler-cyclotron modes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 410(1):663–670, January 2011. doi:10.1111/j.1365-2966.2010.17472.x.
- [72] M. Lazar. The electromagnetic ion-cyclotron instability in bi-Kappa distributed plasmas. *Astronomy and Astrophysics*, 547:A94, November 2012. doi:10.1051/0004-6361/201219861.
- [73] M. Lazar and S. Poedts. Instability of the parallel electromagnetic modes in Kappa distributed plasmas - II. Electromagnetic ion-cyclotron modes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 437(1):641–648, January 2014. doi:10.1093/mnras/stt1914.

- [74] M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Ion firehose instability in plasmas with plasma particles described by product bi-kappa distributions. *Physics of Plasmas*, 21(112102), November 2014. doi:10.1063/1.4900766.
- [75] M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Ion-cyclotron instability in plasmas described by product-bi-kappa distributions. *Physics of Plasmas*, 22(122107), December 2015. doi:10.1063/1.4936972.
- [76] M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Ion firehose instability in a dusty plasma considering product-bi-kappa distributions for the plasma particles. *Physics of Plasmas*, 23(013705), January 2016. doi:10.1063/1.4939885.
- [77] M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Electromagnetic ion-cyclotron instability in a dusty plasma with product-bi-kappa distributions for the plasma particles. *Astrophysics and Space Science*, 362(1):18, January 2017. doi:10.1007/s10509-016-2997-4.
- [78] L. F. Ziebell and R. Gaelzer. On the influence of the shape of kappa distributions of ions and electrons on the ion-cyclotron instability. *Physics of Plasmas*, 24(10):102108, October 2017. doi:10.1063/1.5002136.
- [79] M. Lazar, S. M. Shaaban, H. Fichtner, and S. Poedts. Temperature anisotropy instabilities stimulated by the interplay of the core and halo electrons in space plasmas. *Physics of Plasmas*, 25(2):022902, February 2018. doi:10.1063/1.5016261.
- [80] A. F. Viñas, R. Gaelzer, P. S. Moya, R. L. Mace, and J. A. Araneda. Linear Kinetic Waves in Plasmas Described by Kappa Distributions. In *Kappa Distributions*, chapter 7, page 329–361. Elsevier Science & Technology Books, 2017. URL: <https://www.elsevier.com/books/kappa-distributions/livadiotis/978-0-12-804638-8>, doi:10.1016/B978-0-12-804638-8.00007-3.
- [81] Hajime Sugiyama, Satyavir Singh, Yoshiharu Omura, Masafumi Shoji, David Nunn, and Danny Summers. Electromagnetic ion cyclotron waves in the Earth’s magnetosphere with a kappa-Maxwellian particle distribution. *Journal of Geophysical Research*, 120(10), October 2015. doi:10.1002/2015JA021346.
- [82] Patrick Astfalk, Tobias Görler, and Frank Jenko. DSHARK: A dispersion relation solver for obliquely propagating waves in bi-kappa-distributed plasmas. *Journal of Geophysical Research*, 120(9):7107–7120, September 2015. doi:10.1002/2015JA021507.

- 
- [83] Patrick Astfalk and Frank Jenko. Parallel and oblique firehose instability thresholds for bi-kappa distributed protons. *Journal of Geophysical Research*, 121(4):2842–2852, April 2016. 2015JA022267. doi:10.1002/2015JA022267.
- [84] Rudi Gaelzer and Luiz F. Ziebell. The dispersion relations of dispersive Alfvén waves in superthermal plasmas. *Journal of Geophysical Research*, 119(12):9334–9356, December 2014. doi:10.1002/2014JA020667.
- [85] Rudi Gaelzer and Luiz F. Ziebell. Obliquely propagating electromagnetic waves in magnetized kappa plasmas. *Physics of Plasmas*, 23(2):022110, February 2016. doi:10.1063/1.4941260.
- [86] R. Gaelzer, L. F. Ziebell, and A. R. Meneses. The general dielectric tensor for bi-kappa magnetized plasmas. *Physics of Plasmas*, 23(6):062108, June 2016. doi:10.1063/1.4953430.
- [87] A. R. Meneses, R. Gaelzer, and L. F. Ziebell. The oblique firehose instability in a bi-kappa magnetized plasma. *Physics of Plasmas*, 25(11):112901, November 2018. doi:10.1063/1.5063537.
- [88] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley, New York, second edition, 1987. URL: <https://books.google.com.br/books?id=hhq6QgAACAAJ>.
- [89] Vytenis M. Vasyliunas. A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3. *Journal of Geophysical Research*, 73(9):2839–2884, May 1968. doi:10.1029/JA073i009p02839.
- [90] M. P. Leubner and Z. Vörös. A Nonextensive Entropy Approach to Solar Wind Intermittency. *The Astrophysical Journal*, 618(1):547–555, January 2005. doi:10.1086/425893.
- [91] D. Summers and R. M. Thorne. The Modified Plasma Dispersion Function. *Physics of Fluids B*, 3(8):1835–1847, August 1991. doi:10.1063/1.859653.
- [92] V. Pierrard and M. Lazar. Kappa Distributions: Theory and Applications in Space Plasmas. *Solar Physics*, 267(1):153–174, November 2010. doi:10.1007/s11207-010-9640-2.
- [93] M. Lazar and S. Poedts. Limits for the Firehose Instability in Space Plasmas. *Solar Physics*, 258(1):119–128, August 2009. doi:10.1007/s11207-009-9405-y.



- 
- [94] P. H. Yoon, C. S. Wu, and A. S. de Assis. Effect of Finite Ion Gyroradius on the Fire-Hose Instability in a High Beta Plasma. *Physics of Fluids B*, 5(7):1971–1979, July 1993. doi:10.1063/1.860785.
- [95] P. Hellinger and H. Matsumoto. New kinetic instability: Oblique Alfvén fire hose. *Journal of Geophysical Research*, 105(A5):10519–10526, May 2000. doi:10.1029/1999JA000297.
- [96] M. F. Bashir, Z. Iqbal, I. Aslam, and G. Murtaza. Alfvénic modes in a bi-Maxwellian electron-ion plasma. *Physics of Plasmas*, 17(10), October 2010. doi:10.1063/1.3499389.
- [97] L. Chen and D. J. Wu. Kinetic Alfvén wave instability driven by electron temperature anisotropy in high- $\beta$  plasmas. *Physics of Plasmas*, 17(6):062107, June 2010. doi:10.1063/1.3439680.
- [98] L. Chen, D. J. Wu, and J. Huang. Kinetic Alfvén wave instability driven by field-aligned currents in a low- $\beta$  plasma. *Journal of Geophysical Research*, 118(6):2951–2957, June 2013. doi:10.1002/jgra.50332.
- [99] Muhammad Fraz Bashir and G. Murtaza. Effect of Temperature Anisotropy on Various Modes and Instabilities for a Magnetized Non-relativistic Bi-Maxwellian Plasma. *Brazilian Journal of Physics*, 42(5):487–504, December 2012. doi:10.1007/s13538-012-0087-9.
- [100] Hafsa Naim, M. F. Bashir, and G. Murtaza. Drift kinetic Alfvén wave in temperature anisotropic plasma. *Physics of Plasmas*, 21(3), March 2014. doi:10.1063/1.4869247.
- [101] D. Summers, S. Xue, and R. M. Thorne. Calculation of the dielectric tensor for a generalized Lorentzian ( $\kappa$ ) distribution function. *Physics of Plasmas*, 1(6):2012–2025, June 1994. doi:10.1063/1.870656.
- [102] B. Basu. Hydromagnetic waves and instabilities in  $\kappa$  distribution plasma. *Physics of Plasmas*, 16(052106), May 2009. doi:10.1063/1.3132629.
- [103] Y. Liu, S. Q. Liu, B. Dai, and T. L. Xue. Dispersion and damping rates of dispersive Alfvén wave in a nonextensive plasma. *Physics of Plasmas*, 21(032125), March 2014. doi:10.1063/1.4869243.



- 
- [104] Fredrik Johansson. Mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 1.0). <http://mpmath.org/>, October 2017. URL: <http://mpmath.org/>.
- [105] F. W. J. Olver and L. C. Maximon. Bessel Functions. In Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, and Charles W. Clark, editors, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, chapter 10, pages 215–286. Cambridge, New York, 2010. <http://dlmf.nist.gov/10>.
- [106] R. A. Askey and R. Roy. Gamma Function. In Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, and Charles W. Clark, editors, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, chapter 5, pages 135–147. Cambridge, New York, 2010. <http://dlmf.nist.gov/5>.
- [107] A. L. Peratt. Continued Fraction Expansions for the Complete, Incomplete, and Relativistic Plasma Dispersion Functions. *Journal of Mathematical Physics*, 25(3):466–468, March 1984. doi:10.1063/1.526182.
- [108] Y. Liu, Y. F. Wang, and T. P. Hu. Dispersive Alfvén waves in a plasma with anisotropic superthermal particles. *Physics of Plasmas*, 23(4), April 2016. doi:10.1063/1.4945635.
- [109] Neil F. Cramer. *The Physics of Alfvén Waves*. Wiley-VCH, Berlin, 2001. 298 + xiv pp.
- [110] Akira Hasegawa. Particle acceleration by MHD surface wave and formation of aurora. *Journal of Geophysical Research*, 81(28):5083–5090, October 1976. doi:10.1029/JA081i028p05083.
- [111] M. Lazar, R. Schlickeiser, S. Poedts, and R. C. Tautz. Counterstreaming magnetized plasmas with kappa distributions - I. Parallel wave propagation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 390(1):168–174, September 2008. doi:10.1111/j.1365-2966.2008.13638.x.
- [112] M. Lazar, R. C. Tautz, R. Schlickeiser, and S. Poedts. Counterstreaming magnetized plasmas with kappa distributions - II. Perpendicular wave propagation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401(1):362–370, January 2010. doi:10.1111/j.1365-2966.2009.15647.x.

- 
- [113] M. Lazar, S. Poedts, and R. Schlickeiser. Proton firehose instability in bi-Kappa distributed plasmas. *Astronomy and Astrophysics*, 534:A116, October 2011. doi: [10.1051/0004-6361/201116982](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116982).
- [114] M. Lazar, S. Poedts, R. Schlickeiser, and D. Ibscher. The Electron Firehose and Ordinary-Mode Instabilities in Space Plasmas. *Solar Physics*, 289(1):369–378, January 2014. doi: [10.1007/s11207-013-0348-y](https://doi.org/10.1007/s11207-013-0348-y).
- [115] M. C. de Juli, R. S. Schneider, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Effect of charged dust particles on the ion cyclotron and firehose instabilities. *Journal of Geophysical Research*, 112(A10105):A10105, October 2007. doi: [10.1029/2007JA012434](https://doi.org/10.1029/2007JA012434).
- [116] R. Gaelzer, M. C. de Juli, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Obliquely propagating Alfvén waves in a Maxwellian dusty plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(1):015011 (17pp), January 2009. doi: [10.1088/0741-3335](https://doi.org/10.1088/0741-3335).
- [117] M. C. de Juli, R. S. Schneider, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer. Effects of dust charge variation on electrostatic waves in dusty plasmas with temperature anisotropy. *Brazilian Journal of Physics*, 39(1):111–132, March 2009. doi: [10.1590/S0103-97332009000100019](https://doi.org/10.1590/S0103-97332009000100019).
- [118] Renato Galvão, Luiz Ziebell, Rudi Gaelzer, and Marcelo de Juli. The Dielectric Tensor for Magnetized Dusty Plasmas with Superthermal Plasma Populations and Dust Particles of Different Sizes. *Brazilian Journal of Physics*, 41(4):258–274, December 2011. doi: [10.1007/s13538-011-0041-2](https://doi.org/10.1007/s13538-011-0041-2).
- [119] R. A. Galvão, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and M. C. de Juli. Alfvén waves in dusty plasmas with plasma particles described by anisotropic kappa distributions. *Physics of Plasmas*, 19(123705), December 2012. doi: [10.1063/1.4772771](https://doi.org/10.1063/1.4772771).
- [120] Robert L. Lysak and William Lotko. On the kinetic dispersion relation for shear Alfvén waves. *Journal of Geophysical Research*, 101(A3):5085–5094, March 1996. doi: [10.1029/95JA03712](https://doi.org/10.1029/95JA03712).
- [121] M. Metcalf, J. Reid, and M. Cohen. *Modern Fortran Explained: Incorporating Fortran 2018*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. OUP Oxford, Oxford, 2018. 522 + xxii pp. URL: <https://books.google.com.br/books?id=sB1rDwAAQBAJ>.

- 
- [122] F. Johansson. Arb: Efficient Arbitrary-Precision Midpoint-Radius Interval Arithmetic. *IEEE Transactions on Computers*, 66(8):1281–1292, August 2017. doi: [10.1109/TC.2017.2690633](https://doi.org/10.1109/TC.2017.2690633).
- [123] Python Software Foundation. Python/C API Reference Manual. <https://docs.python.org/2/c-api/index.html>, July 2018. URL: <https://docs.python.org/2/c-api/index.html>.

## Apêndice A

### CÁLCULO DOS COMPONENTES DO TENSOR DIELÉTRICO PARA ONDAS DE ALFVÉN CINÉTICAS

Em nossos cálculos adotamos a forma geral das componentes do tensor dielétrico:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha o} (\Pi_{n\alpha}^*)_i (\Pi_{n\alpha})_j}{\omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right] + \delta_{iz} \delta_{jz} \int d^3v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \mathcal{L} f_{\alpha o}$$

sendo

$$\Pi_{n\alpha} = \frac{n}{\rho_{\alpha}} J_n(\rho_{\alpha\alpha}) \hat{x} + i J'_n(\rho_{\alpha\alpha}) \hat{y} + \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(\rho_{\alpha}) \hat{z} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{L} f_{\alpha o} = v_{\perp} \frac{\delta f_{\alpha o}}{\delta v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\delta f_{\alpha o}}{\delta v_{\perp}} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{L} f_{\alpha o} = \omega \frac{\delta f_{\alpha o}}{\delta v_{\perp}} + k_{\parallel} f_{\alpha o} = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\delta f_{\alpha o}}{\delta v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\delta f_{\alpha o}}{\delta v_{\parallel}} \quad (\text{A.3})$$

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \quad (\text{A.4})$$

$$\Omega_{\alpha} = \frac{q_{\alpha} B_o}{m_{\alpha} c} \quad (\text{A.5})$$

$$\rho_{\alpha} = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \quad (\text{A.6})$$

$$J_n(\rho_{\alpha}) = \frac{\rho_{\alpha}^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (\rho_{\alpha}/2)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (\text{A.7})$$

$$J_{-n}(\rho_{\alpha}) = (-)^n J_n(\rho_{\alpha}) \quad (\text{A.8})$$

a equação (7) representa a função de Bessel de ordem  $n$ . Considerando a distribuição tipo Bi-kappa abaixo:

$$f_{\alpha, \kappa}^{(\alpha)}(\vec{v}) = \frac{1}{\pi(3/2) \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

com  $(\kappa_a + \alpha_a > 3/2)$ . E de acordo com a metodologia de Lysak e Lotko para ondas de Alfvén dispersivas (DAW), na qual adota-se ondas com modo de frequência baixo ( $\omega \ll \Omega_{\alpha}$ ) com comprimento de onda paralelo ( $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ) em um plasma de baixo  $\beta (\ll 1)$  e, com isso, as componentes fora da diagonal principal podem ser omitidas :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - N_{\parallel}^2 & N_{\perp} N_{\parallel} \\ N_{\perp} N_{\parallel} & \varepsilon_{zz} - N_{\perp}^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.10})$$

com  $\varepsilon_{yy}E_y = 0$ , que determina o modo rápido. Assim, para as DAW:  $(\varepsilon_{xx} - N_{\parallel}^2)(\varepsilon_{zz} - N_{\perp}^2) - N_{\perp}N_{\parallel} = 0$  Consequentemente, calculemos as componentes  $\varepsilon_{xx}$  e  $\varepsilon_{zz}$ :

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha o} (\Pi_{n\alpha}^*)_x (\Pi_{n\alpha})_x}{\omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right] \quad (\text{A.11})$$

Substituindo  $\Pi_{n\alpha}$ :

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} [nJ_n(r_a)/(r_a)]^2 \mathcal{L} f_{\alpha o}}{\omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \quad (\text{A.12})$$

E para a componente z:

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\parallel}^2 J_n^2(r_a) \mathcal{L} f_{\alpha o}}{v_{\perp} \omega - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} + \int d^3v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} L f_{\alpha o} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando ao caso das DAW's:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f_a &= \omega \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} L f_{\alpha o} = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial v_{\perp}} \\ L f_{\alpha o} &= v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial v_{\perp}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial v_{\perp}} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Com a forma genérica da distribuição Bi-kappa dada por:

$$f_{a,k}^{\alpha}(\vec{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} 2\kappa_a^3/2w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-\sigma_a}, \text{ com } \sigma_a > 3/2 \text{ e } \sigma_a = \kappa_a + \alpha_a.$$

Realizando o cálculo separadamente:

$$\mathcal{L} f_{a,\kappa}^{(\alpha)} = -\frac{2\sigma_a v_{\perp}}{\kappa_a w_{a\perp}^2} (\omega - A_a k_{\parallel} v_{\parallel}) \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-1} f_{a,\kappa}^{(\alpha)}$$

onde  $A_a = 1 - \frac{w_{a\perp}^2}{w_{a\parallel}^2}$ .

### Calculando Para A Componente $\varepsilon_{xx}$

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} [nJ_n(r_a)/r_a]^2}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left( -\frac{2\sigma_a v_{\perp}}{\kappa_a w_{a\perp}^2} (\omega - A_a k_{\parallel} v_{\parallel}) \right) \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-1} f_{a,\kappa}^{(\alpha)}$$

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_a \frac{2\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} [nJ_n(r_a)/r_a]^2}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} v_{\perp} (\omega - A_a k_{\parallel} v_{\parallel}) \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-1} f_{a,\kappa}^{(\alpha)}$$

Substituindo  $f_{a,\kappa}^{(\alpha)}$ :

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_a \frac{2\sigma_a}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{v_{\perp} [nJ_n(r_a)/r_a]^2}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} v_{\perp} (\omega - A_a k_{\parallel} v_{\parallel})$$

$$\times \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a-1)}$$

Realizando uma mudança de coordenadas:

$$d^3v \rightarrow 2\pi v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 & - \sum_a \frac{2\sigma_a}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi v_{\perp}^3 dv_{\perp} [n J_n(r_a)/r_a]^2 \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{(\omega - A k_{\parallel} v_{\parallel})}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-\lambda_a} \end{aligned}$$

com  $\lambda_a = \sigma_a + 1$  e  $\sigma_a = \kappa_a + \alpha_a$ .

E, definindo  $\eta_a = 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2}$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d^3v v_{\perp}^3 \left[ n \frac{J_n(r_a)}{r_a} \right]^2 \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{(\omega - A k_{\parallel} v_{\parallel})}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left( \eta_a + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-\lambda_a} \end{aligned}$$

Isolando  $\eta_a$ , escrevemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d^3v \frac{v_{\perp}^3}{\eta_a^{\lambda_a}} \left[ n \frac{J_n(r_a)}{r_a} \right]^2 \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{(\omega - A k_{\parallel} v_{\parallel})}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-\lambda_a} \end{aligned}$$

Definindo novas variáveis de integração:

$$v_{\parallel} = w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s \rightarrow dv_{\parallel} = w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} ds \quad v_{\perp} = w_{a\perp} x \rightarrow dv_{\perp} = w_{a\perp} dx, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx w_{a\perp} \frac{w_{a\perp}^3 x^3}{\eta_a^{\lambda_a}} \left[ n \frac{J_n(r_a)}{r_a} \right]^2 \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} ds w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} \frac{(\omega - A k_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s)}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s} \left( 1 + \frac{w_{a\perp}^2 \eta_a s^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-\lambda_a} \end{aligned}$$

Simplificando termos com  $w_{a\parallel}$ ,  $w_{a\perp}$  e  $\eta_a$ , teremos:

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{\eta_a^{\lambda_a}} \left[ n \frac{J_n(r_a)}{r_a} \right]^2$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \sqrt{\eta_a} \frac{(\omega - Ak_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s)}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-\lambda_a}$$

Definindo agora:

$$\xi_{\eta a} = \frac{\omega - n\Omega_a}{k_{\parallel} w_{a\parallel}}, \quad \xi_{\omega a} = \frac{\omega}{k_{\parallel} w_{a\parallel}}, \quad r_a = \nu_a x.$$

E resolvendo separadamente:

$$\frac{1}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s} = \frac{1}{\sqrt{\eta_a} k_{\parallel} w_{a\parallel} (\frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}} - s)} = -\frac{1}{\sqrt{\eta_a} k_{\parallel} w_{a\parallel} (s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}})}$$

Substituindo as novas variáveis e a expressão acima na componente xx, teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 &+ \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{\eta_a^{\lambda_a}} \frac{n^2}{\nu_a^2 x^2} J_n^2(\nu_a x) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \sqrt{\eta_a} \frac{(\omega - Ak_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s)}{\sqrt{\eta_a} k_{\parallel} w_{a\parallel} (s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-\lambda_a} \end{aligned}$$

Fazendo algumas manipulações, chegamos a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 &+ \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\nu_a^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{\lambda_a}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\omega - Ak_{\parallel} w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s}{(s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-\lambda_a} \end{aligned}$$

Separando as integrais em s:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 &+ \sum_a \frac{4\sigma_a}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\nu_a^2} \\ &\left[ \omega \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{\lambda_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1 + s^2/\kappa_a)^{-(\sigma_a+1)}}{s - \xi_{\eta a}/\sqrt{\eta_a}} \right. \\ &\left. - Ak_{\parallel} w_{a\parallel} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{\lambda_a-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s(1 + s^2/\kappa_a)^{-(\sigma_a+1)}}{s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}}} \right] \end{aligned}$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 &+ 4 \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\nu_a^2} \\ &\times \left[ \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega}{k_{\parallel} w_{a\parallel}} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2}} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{\lambda_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1 + s^2/\kappa_a)^{-(\sigma_a+1)}}{s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}}} \right. \end{aligned}$$

$$- \left. \frac{\Gamma(\sigma_a + 1) A_a k_{\parallel} w_{\parallel}}{\Gamma_a - 3/2} \frac{1}{k_{\parallel} w_{\parallel}} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2}} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{(\lambda_a - 1/2)}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s(1 + s^2/\kappa_a)^{-(\sigma_a + 1)}}{s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}}} \right]$$

Após simplificações e explicitando  $\sigma_a$ , teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 &+ 4 \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\nu_a^2} \\ &\times \left[ \xi_{oa} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{\lambda_a}} \left( \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{1}{\pi^2 \kappa_a^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1 + s^2/\kappa_a)^{-(\sigma_a + 1)}}{s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}}} \right) \right. \\ &\left. + A_a \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{(\sigma_a + 1/2)}} \left( - \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma_a - 3/2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s(1 + s^2/\kappa_a)^{-(\sigma_a + 1)}}{s - \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}}} \right) \right] \end{aligned}$$

Identificamos a função de distribuição de plasma supertérmico generalizado, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 1 &+ 4 \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\nu_a^2} \\ &\times \left[ \xi_{oa} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{\sigma_a + 1}} Z_{\kappa a}^{(\alpha_a, 2)} \left( \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} A_a \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa_a})^{(\sigma_a + 1/2)}} Z_{\kappa}^{(\alpha_a, 1)'} \left( \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{\eta_a}} \right) \right] \end{aligned}$$

Usando que:

$$Z_{\eta \kappa}^{(\alpha, \beta)}(\mu, \xi) = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{(1 + \frac{x^2}{\kappa})^{(\sigma_a + \beta - 1)}} Z_{\kappa}^{(\alpha, \beta)} \left( \frac{\xi_{\eta a}}{\sqrt{1 + x^2/\kappa_a}} \right) \quad (\text{A.15})$$

com  $\nu^2 = 2\mu$ .

Assim:

$$\varepsilon_{xx} = 1 + 4 \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{2\mu_a} \left[ \xi_{oa} \frac{1}{2} Z_{n, \kappa a}^{(\alpha_a, 2)}(\mu_a, \xi_{\eta a}) + 2A_a \partial_{\xi_{\eta a}} Z_{n, \kappa a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{\eta a}) \right]$$

Simplificando, finalmente, teremos:

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_a} \left[ \xi_{oa} Z_{n, \kappa a}^{(\alpha_a, 2)}(\mu_a, \xi_{\eta a}) + \frac{1}{2} A_a \partial_{\xi_{\eta a}} Z_{n, \kappa a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{\eta a}) \right]$$



Calculando Para A Componente  $\varepsilon_{zz}$ 

Primeiramente calculemos:

$$\begin{aligned}
 Lf_{ao} &= v_{\perp} \frac{\partial f_{ao}}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{ao}}{\partial v_{\perp}} \\
 Lf_{ao} &= v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\kappa_a + \alpha_a)} \right] \\
 &\quad - v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left[ \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\kappa_a + \alpha_a)} \right] \\
 Lf_{ao} &= v_{\perp} \left[ -(\kappa_a + \alpha_a) \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \frac{2v_{\parallel}}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right. \\
 &\quad \times \left. \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\kappa_a + \alpha_a + 1)} \right] \\
 &\quad - v_{\parallel} \left[ -(\kappa_a + \alpha_a) \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \frac{2v_{\perp}}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \right. \\
 &\quad \times \left. \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\kappa_a + \alpha_a + 1)} \right] \\
 Lf_{ao} &= \frac{2(\kappa_a + \alpha_a)}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a)}{\Gamma(\kappa_a + \alpha_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\kappa_a + \alpha_a + 1)} \\
 &\quad \times v_{\parallel} v_{\perp} \left( \frac{1}{w_{a\perp}^2} - \frac{1}{w_{a\parallel}^2} \right)
 \end{aligned}$$

Tomando  $\sigma_a = \kappa_a + \alpha_a$  e reescrendo:

$$\frac{1}{w_{a\perp}^2} - \frac{1}{w_{a\parallel}^2} = \frac{1}{w_{a\perp}^2} \left( 1 - \frac{w_{a\perp}^2}{w_{a\parallel}^2} \right) = \frac{A}{w_{a\perp}^2}$$

Assim:

$$Lf_{ao} = \frac{2A}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a + 1)} v_{\parallel} v_{\perp}$$

E:

$$\mathcal{L}f_{ao} = (\omega - k_{\parallel}) \frac{\partial f_{ao}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{ao}}{\partial v_{\parallel}}$$

$$\mathcal{L}f_{ao} = (\omega - k_{\parallel}) \left[ - \frac{\sigma_a}{\pi^{3/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{2v_{\perp}}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \right]$$

$$+ k_{\parallel} v_{\perp} \left[ - \frac{\sigma_a}{\pi^{3/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{2v_{\parallel}}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \right]$$

$$\mathcal{L}f_{ao} = \frac{2v_{\parallel} v_{\perp} k_{\parallel}}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} A$$

$$\frac{2\omega v_{\perp}}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)}$$

$$\mathcal{L}f_{ao} = \frac{2v_{\perp}}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} (Av_{\parallel} \kappa_{\parallel} - \omega)$$

Substituindo  $\mathcal{L}f_{ao}$  e  $Lf_{ao}$  em  $\varepsilon_{zz}$ , temos:

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left\{ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \frac{J_n^2(r_a)}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right.$$

$$\times \left[ \frac{2v_{\perp}}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} (Av_{\parallel} k_{\parallel} - \omega) \right]$$

$$\left. + \int d^3 v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{2A}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} v_{\parallel} v_{\perp} \right\}$$

Rearranjando os termos:

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \sum_a \frac{2}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}$$

$$\times \left\{ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v v_{\parallel}^2 \frac{J_n^2(r_a)}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} (Av_{\parallel} k_{\parallel} - \omega) \right.$$

$$\left. + A \int d^3 v v_{\parallel} v_{\perp}^2 \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \right\}$$

Ainda:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} = 1 &+ \sum_a \frac{2}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\
 &\times \left\{ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v v_{\parallel}^2 \frac{J_n^2(r_a)}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left(1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2}\right)^{-(\sigma_a+1)} \right. \\
 &\times \left. \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2}\right) (A v_{\parallel} k_{\parallel} - \omega) \right. \\
 &\left. + A_a \int d^3 v v_{\parallel} v_{\parallel}^2 \left(1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2}\right)^{-(\sigma_a+1)} \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2}\right)^{-(\sigma_a+1)} \right\}
 \end{aligned}$$

Definindo:

$$\eta_a = 1 + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2}$$

E realizando a mudança de coordenadas:

$$d^3 v \rightarrow e \pi v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp}$$

Teremos:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} = 1 &+ \sum_a \frac{4\pi\sigma_a}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\
 &\times \left\{ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \frac{J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{v_{\parallel}^2 (A v_{\parallel} k_{\parallel} - \omega)}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2}\right)^{-(\sigma_a+1)} \right. \\
 &\left. + A_a \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp}}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2}\right)^{-(\sigma_a+1)} \right\}
 \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} = 1 &- \sum_a \frac{4\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\
 &\times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp} J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{v_{\parallel}^2 (\omega - A_a k_{\parallel} v_{\parallel})}{\omega - n\Omega_a - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\
 &+ \sum_a \frac{4A_a \sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\times \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel v_\parallel^2 \left( 1 + \frac{v_\parallel^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)}$$

Definindo:

$$v_\parallel = w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s \rightarrow dv_\parallel = w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} ds$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \sum_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty ds w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} \frac{w_{a\parallel}^2 \eta_a s^2 (\omega - A_a k_\parallel w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s)}{\omega - n\Omega_a - k_\parallel w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s} \\ & \times \left( 1 + \frac{w_{a\parallel}^2 \eta_a s^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \\ & + \sum_a \frac{4A_a \sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty ds w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s^2 \left( 1 + \frac{w_{a\parallel}^2 \eta_a s^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Simplificando  $w_{a\parallel}$ ,  $\eta_a$  e rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 & + \sum_a \frac{4\pi\sigma_a}{\pi^{3/2} \kappa_a^{5/2} w_{a\perp}^4 w_{a\parallel}} \frac{\sigma_a \Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \left\{ \sum_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \frac{J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{v_\parallel^2 (A v_\parallel k_\parallel - \omega)}{\omega - n\Omega_a - k_\parallel v_\parallel} \left( 1 + \frac{v_\parallel^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \right. \\ & \left. + A_a \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel v_\parallel^2 \left( 1 + \frac{v_\parallel^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \right\} \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \sum_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{v_\parallel^2 (\omega - A_a k_\parallel v_\parallel)}{\omega - n\Omega_a - k_\parallel v_\parallel} \left( 1 + \frac{v_\parallel^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)} \\ & + \sum_a \frac{4A_a \sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\times \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel v_\parallel^2 \left( 1 + \frac{v_\parallel^2}{\eta_a \kappa_a w_{a\parallel}^2} \right)^{-(\sigma_a+1)}$$

Definindo:

$$v_\parallel = w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} s \rightarrow dv_\parallel = w_{a\parallel} \sqrt{\eta_a} ds$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \sum_{n \rightarrow -\infty}^\infty \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty ds w_{a\parallel}^3 \eta_a \sqrt{\eta_a} \frac{s^2 k_\parallel w_{a\parallel} \left( \frac{\omega}{k_\parallel w_{a\parallel}} - A_a \sqrt{\eta_a} s \right)}{k_\parallel w_{a\parallel} \left( \frac{\omega - n\Omega_a}{k_\parallel w_{a\parallel}} - \sqrt{\eta_a} s \right)} \\ & \times \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa_a} \right)^{-(\sigma_a+1)} + \sum_a \frac{4A_a \sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty ds w_{a\parallel}^3 \sqrt{\eta_a} \eta_a s^2 \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa_a} \right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 & - \sum_a \frac{4\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \sum_{n \rightarrow -\infty}^\infty dv_\perp v_\perp \frac{J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a+1}} \int_{-\infty}^\infty ds w_{a\parallel}^3 \eta_a \sqrt{\eta_a} \frac{s^2 (\xi_{oa} - A \sqrt{\eta_a} s)}{\sqrt{\eta_a} (\xi_{na} / \sqrt{\eta_a} - s)} \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa_a} \right)^{-(\sigma_a+1)} \\ & + \sum_a \frac{4A\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{w_{a\parallel}^3}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a-1/2}} \int_{-\infty}^\infty ds s^2 \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa} \right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Usando que:

$$\int_{-\infty}^\infty ds s^2 \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa_a} \right)^{-(\sigma_a+1)} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \kappa_a^{3/2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a + 1)}, \text{ com } (\sigma_a > 1/2), \text{ teremos:}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} & = 1 + \sum_a \frac{4A_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \frac{\pi^{1/2}}{2} \kappa_a^{3/2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a + 1)} \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \frac{v_\perp}{\eta_a^{\sigma_a-1/2}} + \sum_a \frac{4\sigma_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{w_{a\parallel}^3}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2 w_{a\parallel}} \frac{\Gamma(\sigma_a)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \frac{J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{(s - \xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\sigma_a+1)}$$

Após algumas simplificações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= 1 + \sum_a \frac{A_a}{2} \pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} \Gamma(\sigma_a - 1/2) \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{1}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &\times \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp}}{\eta_a^{\sigma_a-1/2}} + \sum_a \frac{4}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{1/2} w_{a\perp}^3 w_{a\parallel}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &\times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \frac{J_n^2(r_a)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{(s - \xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Definindo agora:

$$v_{\perp} = w_{a\perp} x \rightarrow dv_{\perp} = w_{a\perp} dx$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= 1 + \sum_a \frac{A_a}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{2w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &\times \int_0^{\infty} dx w_{a\perp}^2 \frac{x}{\eta_a^{\sigma_a-1/2}} + \sum_a \frac{4}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &\times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx w_{a\perp}^2 x \frac{J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{s - \xi/\sqrt{\eta_a}} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\eta_a = 1 + \frac{x^2}{\kappa_a}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \sum_a \frac{2A_a}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{\left(1 + \frac{x^2}{\kappa_a}\right)^{\sigma_a-1/2}} \\ &+ \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x \frac{J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{(s - \xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Resolvendo separadamente a integral:

$$I_1 = \int_0^{\infty} dx x \left(1 + \frac{x^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a-1/2)} \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\kappa_a \Gamma(\sigma_a - 3/2)}{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}$$

E, voltando à  $\epsilon_{zz}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= 1 + \sum_a 2 \frac{A_a w_{a\parallel}^2}{\kappa_a w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \frac{1}{2} \frac{\kappa_a \Gamma(\sigma_a - 3/2)}{\Gamma(\sigma_a - 1/2)} \\ &+ \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma\sigma_a - 3/2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &\times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{(s - xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\ \epsilon_{zz} &= 1 + \sum_a A_a \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &+ \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma\sigma_a - 3/2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\ &\times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{(s - xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Usando que:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2 (\xi_{oa} - A\sqrt{\eta_a} s)}{(s - \xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\ &= (\xi_{oa} - A\xi_{na}) \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2}{(s - \xi_{na}/\sqrt{\eta_a})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\ &- A\sqrt{\eta_a} \int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Substituindo em  $\epsilon_{zz}$ :

$$\epsilon_{zz} = 1 + \sum_a A_a \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} + \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2}{\left(s - \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}}\right)} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \right. \\
 & \left. - A\sqrt{\eta_a} \int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \right] \\
 \varepsilon_{zz} = & 1 + \sum_a A_a \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} + \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\
 & \times \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_{oa} - A\xi_{na}) \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2}{\left(s - \xi_{na}/\sqrt{\eta_a}\right)} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\
 & - \sum_a \frac{4A_a}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a - 1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)}
 \end{aligned}$$

Usando que:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a - 1/2}} = \frac{1}{2} \kappa_a \frac{\Gamma(\sigma_a - 3/2)}{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \kappa_a^{3/2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a + 1)}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} = & 1 + \sum_a A_a \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} + \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \\
 & \times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds s - \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_{na}}} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\
 & - \sum_a 4 \frac{A_a}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{2} \kappa_a \frac{\Gamma(\sigma_a - 3/2)}{\Gamma(\sigma_a - 1/2)} \frac{\pi^{1/2}}{2} \kappa_a^{3/2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 1/2)}{\Gamma(\sigma_a + 1)} \right] \\
 \varepsilon_{zz} = & 1 + \sum_a A_a \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} + \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \times \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds s - \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_{na}}} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\ & - \sum_a A_a \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

Cancelando termos na expressão acima, teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 & + \sum_a \frac{4}{\kappa_a} \frac{w_{a\parallel}^2}{\pi^{1/2} \kappa_a^{3/2} w_{a\perp}^2} \frac{\Gamma(\sigma_a + 1)}{\Gamma(\sigma_a - 3/2)} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \\ & \times \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2}{(s - \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \end{aligned}$$

Onde, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^2}{(s - \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} & = \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s}{(s - \frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}})} \left(1 + \frac{s^2}{\kappa_a}\right)^{-(\sigma_a+1)} \\ & = -\frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}} \frac{\pi^{1/2}}{2} \kappa_a^{5/2} \frac{\Gamma(\sigma_a - 3/2)}{\Gamma(\sigma_a + 1)} Z_{\kappa_a}^{(\alpha_a, 1)'} \end{aligned}$$

Então reescrevemos:

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_a 4 \frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \xi_{na} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a+1/2}} Z_{\kappa_a}^{(\alpha_a, 1)'} \left(\frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}}\right)$$

E, ainda:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu_a x)}{\eta_a^{\sigma_a+1/2}} Z_{\kappa_a}^{(\alpha_a, 1)'} \left(\frac{\xi_{na}}{\sqrt{\eta_a}}\right) = \frac{1}{2} \partial_{\xi_{na}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{na})$$

E, também:

$$\frac{w_{a\parallel}^2}{w_{a\perp}^2} = \frac{1}{1 - A_a}$$

Assim:

$$\varepsilon_{zz} = 1 - 2 \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{(\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \xi_{na}}{1 - A_a} \xi_{na} \left(\frac{1}{2} \partial_{\xi_{na}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{na})\right)$$

E, finalmente:

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{(\xi_{oa} - A_a \xi_{na}) \xi_{na}}{1 - A_a} \xi_{na} \partial_{\xi_{na}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_a}^{(\alpha_a, 1)}(\mu_a, \xi_{na}) \quad (\text{A.17})$$

*Apêndice B*

ARTIGO PUBLICADO

# The general dielectric tensor for bi-kappa magnetized plasmas

R. Gaelzer,<sup>a)</sup> L. F. Ziebell,<sup>b)</sup> and A. R. Meneses<sup>c)</sup>

*Instituto de Física, UFRGS, 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil*

(Received 1 May 2016; accepted 25 May 2016; published online 10 June 2016)

In this paper, we derive the dielectric tensor for a plasma containing particles described by an anisotropic superthermal (bi-kappa) velocity distribution function. The tensor components are written in terms of the two-variables kappa plasma special functions, recently defined by Gaelzer and Ziebell [Phys. Plasmas **23**, 022110 (2016)]. We also obtain various new mathematical properties for these functions, which are useful for the analytical treatment, numerical implementation, and evaluation of the functions and, consequently, of the dielectric tensor. The formalism developed here and in the previous paper provides a mathematical framework for the study of electromagnetic waves propagating at arbitrary angles and polarizations in a superthermal plasma.

*Published by AIP Publishing.* [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4953430>]

## I. INTRODUCTION

During the last years, a substantial portion of the space physics community has been interested in plasma environments which are not in a state of thermal equilibrium, but are instead in a turbulent state. Several of such environments can be found in a nonthermal (quasi-) stationary state. When the velocity distribution functions (VDFs) of the particles that comprise these turbulent plasmas are measured, they often display a high-energy tail that is better fitted by a power-law function of the particle's velocity, instead of the Gaussian profile found in plasmas at the thermodynamic equilibrium.

Among all possible velocity distributions with a power-law tail, the actual VDF that has been marked with a widespread application in space plasmas is the Lorentzian, or kappa, distribution (or a combination of kappas), and the number of published papers that employ the kappa velocity distribution function ( $\kappa$ VDF) has been growing by a measurable exponential rate.<sup>1</sup> However, the interest on the kappa distribution is justified not only as a better curve-fitting function. A kappa function is also the velocity probability distribution that results from the maximization of the nonadditive Tsallis entropy postulate. Hence, the  $\kappa$ VDF is also the distribution of velocities predicted by Tsallis's entropic principle for the nonthermal stationary state of a statistical system characterized by low collision rates, long-range interactions, and strong correlations among the particles. For detailed discussions of the importance of kappa distributions for space plasmas and the connection with nonequilibrium statistical mechanics, the Reader is referred to Refs. 1–4. See also the Introductions of Refs. 5 and 6 for complementary discussions and references to other formulations for the  $\kappa$ VDF.

One of the important problems related to space plasmas in which the kappa distribution has been increasingly applied concerns the excitation of temperature-anisotropy-driven instabilities that propagate in electromagnetic or electrostatic modes in a warm plasma. These instabilities (among others)

play an important role on the nonlinear evolution and the steady-state of the measured VDFs. They can also lead to particle energization and acceleration, and are probably related to some of the fundamental issues in space and astrophysical systems, such as the problem of the heating of the solar corona. Rather than giving here a long list of references, we suggest that the Reader consults the cited literature in our previous works.<sup>5,6</sup>

In the present work, we continue the development of a mathematical formulation destined to the study of electromagnetic/electrostatic waves (and their instabilities) propagating at arbitrary angles in a warm magnetized plasma, in which the particles are described by asymmetric superthermal, or bi-kappa, VDFs. The formulation presented here employs the linear kinetic theory of plasmas and is an extension and generalization of the treatment developed in Refs. 5 and 6.

The structure of this paper is as follows. In Section II, we derive the dielectric tensor for a bi-kappa plasma. The tensor components are written in terms of the kappa plasma special functions introduced and studied in our previous works. Section III contains several new developments and properties of the kappa plasma functions, destined to provide the necessary framework for the evaluation of the functions and the dielectric tensor. After the conclusions in Section IV, we have also included Appendixes A, where details about the derivation of the dielectric tensor are given, and B, where additional properties of relevant special functions are derived.

## II. DIELECTRIC TENSOR

The dielectric tensor for a bi-kappa superthermal plasma will be obtained with the use of the velocity distribution function given by

$$f_s^{(\alpha)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = A_s^{(\sigma_s)} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_s w_{\parallel s}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_s w_{\perp s}^2} \right)^{-\sigma_s}, \quad (1)$$

which is valid for  $\sigma_s > 3/2$  and where  $\sigma_s = \kappa_s + \alpha_s$  and

<sup>a)</sup>rudi.gaelzer@ufrgs.br

<sup>b)</sup>luiz.ziebell@ufrgs.br

<sup>c)</sup>anemeneses@gmail.com

$$A_s^{(\sigma_s)} = \frac{1}{\pi^{3/2} w_{\parallel s} w_{\perp s}^2} \frac{\kappa_s^{-3/2} \Gamma(\sigma_s)}{\Gamma(\sigma_s - 3/2)},$$

is the normalization constant. The quantities  $w_{\parallel s}$  and  $w_{\perp s}$  are, respectively, proportional to the parallel and perpendicular thermal speeds, but they can be a function of the  $\kappa$  parameter as well. Finally,  $\Gamma(z)$  is the gamma function.

The VDF (1) is the anisotropic generalization of the isotropic ( $w_{\parallel} = w_{\perp} = w$ ) distribution adopted by Refs. 5 and 6. In these works, it was shown how adequate choices of the parameters  $\alpha$  and  $w$  reproduce and formally unify seemingly different (kappa) velocity distribution functions employed in the literature. Now, in the anisotropic case, if we set  $\alpha = 1$  and

$$w_{\parallel, \perp}^2 = \theta_{\parallel, \perp}^2 = \left(1 - \frac{3}{2\kappa}\right) \left(\frac{2T_{\parallel, \perp}}{m}\right),$$

the function (1) reduces to the ‘‘bi-Lorentzian’’ distribution introduced by Summers and Thorne<sup>7</sup> (see Table I. See also Eqs. (12a) and 12(b) of Ref. 4). This distribution will be named here the ST91 model, and in all expressions obtained below, one can simply drop the parameter  $\alpha$ , should the ST91 model be chosen from the start.

However, the parameter  $\alpha$  can also be useful when the function  $f_s^{(x)}(v_{\parallel}, v_{\perp})$  describes (isotropic) one-particle distribution functions with an arbitrary number of degrees of freedom. If (1) describes the probability distribution function of a particle with  $f$  degrees of freedom, one can set  $\kappa = \kappa_0$ , where  $\kappa_0$  is the *invariant* kappa parameter introduced by Livadiotis and McComas,<sup>1</sup>  $\alpha = 1 + f/2$ ,  $w^2 = \theta^2 = 2T/m$ ,  $v^2 = \sum_{i=1}^f v_i^2$ , and the normalization constant is  $A^{(f)} = \Gamma(\kappa_0 + 1 + f/2) (\pi \kappa_0 \theta^2)^{-f/2} / \Gamma(\kappa_0 + 1)$ , thereby obtaining Eq. (22c) of Ref. 1.

Particular forms of the bi-kappa VDF (1) or its bi-Maxwellian limiting case (when  $\kappa_s \rightarrow \infty$ ) have been frequently employed in the literature in order to study temperature-anisotropy-driven instabilities that amplify parallel- or oblique-propagating eigenmodes in a magnetized plasma. Of particular importance for the present work are the effects of finite particle gyroradius (or Larmor radius) on the dispersion and amplification/damping of oblique-propagating modes. For instance, Yoon *et al.*<sup>8</sup> discovered the oblique Firehose instability, which is a non-propagating instability excited in a high-beta bi-Maxwellian plasma when the ions display temperature anisotropy (with  $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ ) and which is continuously connected to the left-handed branch of the Alfvén waves when the ion gyroradius tends to zero. The same instability was later rediscovered by Hellinger and Matsumoto.<sup>9</sup>

Other studies subsequently considered the excitation of low-frequency instabilities at arbitrary angles in bi-Maxwellian plasmas for other situations, such as low-beta plasmas,<sup>10</sup> or with additional free energy sources such as electronic temperature anisotropy,<sup>11</sup> field-aligned currents,<sup>12</sup> loss-cones,<sup>13</sup> and density inhomogeneities<sup>14</sup> (see also reviews by Refs. 15–17).

In comparison, similar studies employing anisotropic superthermal distributions are rare. Summers *et al.*<sup>18</sup> obtained the first expressions for the general dielectric tensor

of a bi-kappa (bi-Lorentzian) plasma. However, their final expressions are not written in a closed form, i.e., for each component of the tensor, there remains a final integral along  $v_{\perp}$  (the perpendicular component of the particle’s velocity) that should be numerically evaluated. A similar approach was later adopted by Basu,<sup>19</sup> Liu *et al.*,<sup>20</sup> and Astfalk *et al.*<sup>21</sup>

In order to circumvent the mathematical difficulties involved in the integration along  $v_{\perp}$ , Cattaert *et al.*<sup>22</sup> derived the dielectric tensor and considered some simple cases of oblique waves propagating in a kappa-Maxwellian plasma. More recently, Sugiyama *et al.*<sup>23</sup> employed the same VDF in a first systematic study of the propagation of electromagnetic ion-cyclotron waves in the Earth’s magnetosphere.

Closed-form expressions for the components of the dielectric tensor of a superthermal plasma were for the first time obtained by Gaelzer and Ziebell,<sup>5,6</sup> still for the particular case of isotropic ( $w_{\parallel s} = w_{\perp s}$ ) distributions. Here, we will obtain the dielectric tensor for the bi-kappa VDF given by (1).

The general form of the dielectric tensor can be written as<sup>6</sup>

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \sum_s \chi_{ij}^{(s)}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2a)$$

$$\chi_{ij}^{(s)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{v_{\perp} (\Xi_{ns})_i (\Xi_{ns}^*)_j \mathcal{L}f_s}{\omega - n\Omega_s - k_{\parallel} v_{\parallel}} + \delta_{iz} \delta_{jz} \int d^3 v \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \mathcal{L}f_s \right], \quad (2b)$$

where  $\chi_{ij}^{(s)}$  is the susceptibility tensor associated with particle species  $s$ , the set  $\{i, j\} = \{x, y, z\}$  identifies the Cartesian (in the  $E^3$  space) components of the tensors, with  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  being the basis in  $E^3$ ,  $\Xi_{ns} = n q_s^{-1} J_n(q_s) \hat{x} - i J_n'(q_s) \hat{y} + (v_{\parallel}/v_{\perp}) J_n(q_s) \hat{z}$ , where  $J_n(z)$  is the Bessel function of the first kind,<sup>24,25</sup>  $q_s = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_s$ ,  $\mathcal{L}f_s = v_{\perp} \partial f_s / \partial v_{\parallel} - v_{\parallel} \partial f_s / \partial v_{\perp}$ ,  $\mathcal{L}f_s = \omega \partial f_s / \partial v_{\perp} + k_{\parallel} \mathcal{L}f_s$ . Also,  $\omega_{ps}^2 = 4\pi n_s q_s^2 / m_s$  and  $\Omega_s = q_s B_0 / m_s c$  are the plasma and cyclotron frequencies of species  $s$ , respectively,  $\omega$  and  $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z}$  are the wave frequency and wavenumber,  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$  ( $B_0 > 0$ ) is the ambient magnetic induction field and the symbols  $\parallel$  ( $\perp$ ) denote the usual parallel (perpendicular) components of vectors/tensors, respective to  $\mathbf{B}_0$ .

Inserting the function (1) into (2b), we obtain the desired susceptibility tensor for a bi-kappa plasma. More details on the derivation of the components of  $\chi_{ij}$  are given in Appendix A. Here, we will presently show the final, closed-form expressions, given by

$$\chi_{xx}^{(s)} = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} \left[ \xi_{0s} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right], \quad (3a)$$

$$\chi_{xy}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} n \left[ \xi_{0s} \partial_{\mu_s} \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n, \kappa_s}^{(\alpha_s, 1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right], \quad (3b)$$

$$\chi_{xz}^{(s)} = -\frac{\omega_{ps}^2 w_{\parallel s}}{\omega^2 w_{\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n\Omega_s}{k_{\perp} w_{\perp s}} (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \times \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3c)$$

$$\chi_{yy}^{(s)} = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left[ \xi_{0s} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}) \right], \quad (3d)$$

$$\chi_{yz}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2 w_{\parallel s} k_{\perp} w_{\perp s}}{\omega^2 w_{\perp s} 2\Omega_s} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \times \partial_{\mu_s, \xi_{ns}}^2 \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3e)$$

$$\chi_{zz}^{(s)} = -\frac{\omega_{ps}^2 w_{\parallel s}^2}{\omega^2 w_{\perp s}^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \times \xi_{ns} \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\alpha_s,1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3f)$$

where

$$\mathcal{W}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{n^2}{\mu} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) - 2\mu \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi).$$

Notice that the off-diagonal components of  $\chi_{ij}$  obey the symmetry relations  $\chi_{xy} = -\chi_{yx}$ ,  $\chi_{xz} = \chi_{zx}$ , and  $\chi_{yz} = -\chi_{zy}$ .

In (3a)–(3f), we have defined the parameters  $\mu_s = k_{\perp}^2 \rho_s^2$ ,  $\rho_s^2 = w_{\perp s}^2 / 2\Omega_s^2$ , and  $\xi_{ns} = (\omega - n\Omega_s) / k_{\parallel} w_{\parallel s}$ . The parameter  $\rho_s$  is the (kappa modified) gyroradius (or Larmor radius) of particle  $s$ . Hence,  $\mu_s$  is the normalized gyroradius, proportional to the ratio between  $\rho_s$  and  $\lambda_{\perp}$ , the perpendicular projection of the wavelength. The magnitude of  $\mu_s$  quantifies the finite Larmor radii effects on wave propagation. On the other hand, the parameter  $\xi_{ns}$  quantifies the linear wave-particle interactions in a finite-temperature plasma. Also in (3a)–(3f), the quantity

$$A_s = 1 - \frac{w_{\perp s}}{w_{\parallel s}},$$

is the anisotropy parameter, which quantifies the effects of the VDF's departure from an isotropic distribution, due to the temperature anisotropy. The symbol  $\partial_{z_1, \dots, z_n}^n = \partial^n / (\partial z_1 \cdots \partial z_n)$  is the  $n$ -th order partial derivative, relative to  $z_1, \dots, z_n$ .

Finally, the functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  are the so-called *two-variables kappa plasma functions* (2VKPs). Their definitions were first given in Ref. 6 (hereafter called Paper I) and are repeated in Eqs. (20a)–(20f). Some properties and representations of  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  were also obtained in Paper I, and several new properties and representations will be derived in Sec. III. The evaluation of the functions  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  is determined not only by their arguments  $\mu$  (normalized gyroradius) and  $\xi$  (wave-particle resonance) but also by a set of parameters:  $n$  (harmonic number),  $\kappa$  (kappa index), and the pair  $(\alpha, \beta)$ . Parameter  $\alpha$  is the same real number adopted for the  $\kappa$ VDF (1). This parameter can be ignored and removed from the equations if the distribution model is fixed. On the other hand, the real parameter  $\beta$  is crucial for the formalism. The value of  $\beta$  is related to the specific dielectric tensor component, wave polarization, and mathematical properties of the kappa plasma functions.

The isotropic limit of  $\chi_{ij}^{(s)}$  is obtained from (3a)–(3f) by setting  $A_s = 0$  (and  $w_{\perp s} = w_{\parallel s} = w_s$ ). In this case, the susceptibility tensor for each particle species reduces to the form that can be easily gleaned from the Cartesian components of  $\varepsilon_{ij}$  presented in Appendix C of Paper I. On the other hand, the susceptibility tensor of a bi-Maxwellian plasma is also obtained from (3a)–(3f) by the process called the *Maxwellian limit*, i.e., the result of taking the limit  $\kappa_s \rightarrow \infty$ , for any species  $s$ . The Maxwellian limit of  $\chi_{ij}^{(s)}$  is given by Eqs. (A1a)–(A1f).

Equations (2) and (3) show the general form for the dielectric tensor of a bi-kappa plasma. These expressions, along with the representations of the kappa plasma functions derived in Paper I and in Sec. III, contain sufficient information for a methodical study of the properties of wave propagation and emission/absorption in an anisotropic, superthermal plasma. Future works will implement an analysis of temperature-anisotropy-driven instabilities excited in low-frequency parallel- and oblique-propagating electromagnetic eigenmodes.

### III. NEW EXPRESSIONS FOR THE KAPPA PLASMA SPECIAL FUNCTIONS

#### A. Superthermal plasma gyroradius function

The function  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  quantifies the physical effects on wave propagation due to the particles' finite gyroradii when their probability distribution function is described by a kappa VDF. For this reason, it was named by Paper I as the (kappa) *plasma gyroradius function* ( $\kappa$ PGF). The basic definition of this function was given in Eq. (I.20) (i.e., Eq. 20 of Paper I) and is repeated here

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(yx)}{(1 + x^2/\kappa)^{\lambda-1}}, \quad (y^2 = 2z), \quad (4)$$

where  $\lambda = \kappa + \alpha + \beta$ .

The Maxwellian limit of this function is the well-known representation in terms of the modified Bessel function<sup>24</sup>

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \mathcal{H}_n(z) = e^{-z} I_n(z). \quad (5)$$

Sections III B and A.2 of Paper I contain several mathematical properties of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  and most of them will not be shown here, with a few important exceptions. One of the exceptions is its general, closed-form representation in terms of the Meijer  $G$ -function, as shown in Eq. (I.22). Namely

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\pi^{-1/2} \kappa}{\Gamma(\lambda - 1)} G_{2,1}^{2,1} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} 1/2 \\ \lambda - 2, n, -n \end{matrix} \right. \right] \quad (6a)$$

$$= \frac{\pi^{-1/2} \kappa}{\Gamma(\lambda - 1)} G_{3,1}^{1,2} \left[ \frac{1}{2\kappa z} \left| \begin{matrix} 3 - \lambda, 1 - n, 1 + n \\ 1/2 \end{matrix} \right. \right]. \quad (6b)$$

Representation (6b) was obtained by employing the symmetry property of the  $G$ -function given by Eq. (I.11a).

The definition and some properties of the  $G$ -function can be found in Sec. B.2 of Paper I and in the cited literature.

Some additional properties, employed in the present paper, are given in [Appendix B](#).

Additional mathematical properties of the  $\mathcal{H}$ -function, that were not included in Paper I, will be presented here.

**1. Derivatives**

Equations (I.25a)–(I.25d) show recurrence relations for the  $\mathcal{H}$ -function that involve its first derivative and that in the Maxwellian limit reduce to the respective relations for  $\mathcal{H}_n(z)$ , easily obtained from the properties of the modified Bessel function.

It is also possible to obtain closed-form representations for the derivatives of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  in any order. Applying the operator  $D^k \equiv d^k/dz^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) on (6a) and employing identity (B1a), we obtain

$$\frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(z)}{(-z)^{-k}} = \frac{\pi^{-1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} G_{2,4}^{3,1} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} 1/2, 0 \\ k, \lambda-2, n, -n \end{matrix} \right. \right], \quad (7a)$$

where  $\mathcal{H}^{(k)} = d^k\mathcal{H}/dz^k$ .

---


$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(z)}{(-z)^{-k}} &= \frac{\pi^{-1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} \left[ \frac{\Gamma(n+2-\lambda)\Gamma(\lambda-3/2)}{\Gamma(\lambda-1+n)} (2-\lambda)_k (2\kappa z)^{\lambda-2} {}_2F_3 \left( \begin{matrix} \lambda-3/2, \lambda-1 \\ \lambda-1-n, \lambda-1+n, \lambda-1-k \end{matrix}; 2\kappa z \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\lambda-2-n)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)} (-n)_k (2\kappa z)^n {}_2F_3 \left( \begin{matrix} n+1/2, n+1 \\ n+3-\lambda, 2n+1, n+1-k \end{matrix}; 2\kappa z \right) \right], \end{aligned} \quad (7b)$$

where  ${}_2F_3(\dots; z)$  is another hypergeometric series of class 1, discussed in Sec. B.1 of Paper I. The case  $k=0$  reduces to Eq. (I.23).

*b. Case  $\lambda$  integer.* Now, writing  $\lambda = m+2$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) in (7a) and looking at the representation (B4b), we notice that if we choose  $\mu = n-k$  and  $\nu = n+k$  and employ the differentiation formula (I.B13a), we can write

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(z) &= \frac{2\kappa(-z)^{-k}(-2\kappa z)^m}{\Gamma(m+1)} \\ &\quad \times \frac{d^{m+k}}{dy^{m+k}} \left[ y^k I_{n-k}(\sqrt{y}) K_{n+k}(\sqrt{y}) \right] \Big|_{y=2\kappa z}, \end{aligned}$$

where  $K_m(z)$  is the second modified Bessel function.<sup>24</sup> Finally, employing Leibniz formula for the derivative<sup>26</sup> and the identities written just before Eq. (I.24), we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(z) &= \frac{2\kappa z^k}{\Gamma(m+1)} \left( \frac{\kappa z}{2} \right)^{(m+k)/2m+k} \sum_{s=0}^{m+k} (-)^s \\ &\quad \times \binom{m+k}{s} K_{n-m+s}(\sqrt{2\kappa z}) I_{n-k+s}(\sqrt{2\kappa z}). \end{aligned} \quad (7c)$$

As expected, for  $k=0$ , this result reduces to (I.24).

Formula (7a) is valid for any  $z$  and  $k$ , but the value of  $\mathcal{H}$  at the origin must be treated separately. Applying the operator  $D^k$  on the definition (4), we can employ the power series expansion of  $J_n^2(yx)$  given by Eq. (10.8.3) of Ref. 24 in order to evaluate the integral in the limit  $y \rightarrow 0$ , thereby obtaining

$$\frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(0)}{(2k)! \kappa} = \left( \frac{-\kappa}{2} \right)^k \frac{(\lambda-2)_{-k}}{\lambda-2} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-)^\ell \delta_{|n|,\ell}}{(k+\ell)!(k-\ell)!},$$

which is valid for  $\lambda > 2+k$ . Here,  $\delta_{n,m}$  is the Kronecker delta and  $(a)_\ell = \Gamma(a+\ell)/\Gamma(a)$  is the Pochhammer symbol. One can easily verify that the case  $k=0$  reduces to Eq. (I.21).

As it happens with  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , its derivative in any order has two different representations in terms of more usual functions, depending on whether  $\lambda$  is integer or not. These cases will now be addressed.

*a. Case  $\lambda$  noninteger.* If  $\lambda \neq 2, 3, \dots$ , then we can employ the representation of the  $G$ -function in terms of generalized hypergeometric functions, given by Eq. (I.B14). Hence, we have

**2. Asymptotic expansion**

The representation of the  $\mathcal{H}$ -function given by (6b) is formally exact for any  $z$ , and the function could be formally expressed in terms of the  ${}_3F_0(\dots; z)$  hypergeometric series, after using Eq. (I.B14). However, as explained in Sec. B.1 of Paper I,  ${}_3F_0$  belongs to class 3, whose series are everywhere divergent, except at  $z=0$ . Hence, the representation of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  in terms of  ${}_3F_0$  only makes sense when one is looking for an asymptotic expansion of  $\mathcal{H}$ , which provides a finite number of correct digits when  $z \gg 1$  if only a finite numbers of terms in the series expansion is kept.

With this caveat in mind, using Eq. (I.B14) in (6b), we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\kappa \Gamma(\lambda-3/2)}{\Gamma(\lambda-1) \sqrt{2\kappa z}} \\ &\quad \times {}_3F_0 \left( \begin{matrix} \lambda-3/2, 1/2+n, 1/2-n \\ - \end{matrix}; \frac{1}{2\kappa z} \right), \end{aligned}$$

which, as explained, is only valid on the limit  $z \rightarrow \infty$ . Inserting the series (I.B1), we obtain the asymptotic expansion

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\kappa \Gamma(\lambda-3/2)}{\Gamma(\lambda-1) \sqrt{2\kappa z}} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-3/2)_k (1/2+n)_k (1/2-n)_k}{k! (2\kappa z)^k}. \end{aligned} \quad (8)$$



Notice that the upper limit of the sum is absent. This upper limit must be computationally determined, taking into account the desired number of correct digits in the evaluation of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ .

The Maxwellian limit of (8) renders

$$\mathcal{H}_n(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \Gamma(n+k+1/2)}{\Gamma(n-k+1/2)k!(2z)^k},$$

which is exactly the asymptotic expansion of  $\mathcal{H}_n(z)$  given by Eq. (8.451.5) of Ref. 27.

**3. Sum rule**

Sum rules are useful for the numerical evaluation of special functions. If we sum (4) over all harmonic numbers and use the identity<sup>24</sup>

$$\sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} J_n^2(z) = 1, \tag{9}$$

the remaining integral can be evaluated by the definition of the Beta function,<sup>28</sup> resulting in

$$\sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\kappa}{\lambda - 2}. \tag{10}$$

Several other sum rules for  $\mathcal{H}$  can be found in the same fashion.

**4. The associated gyroradius function**

Among the representations for the two-variable functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ , derived in the Section III C 3, the following function appears:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \frac{\pi^{-1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} G_{1,3}^{2,1} \left[ 2\kappa\mu \left| \begin{matrix} 1/2 - k \\ \lambda - 2, n, -n \end{matrix} \right. \right], \tag{11}$$

which is clearly related to  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , differing by the parameter  $k$ . For this reason, it is christened here as the *associated plasma gyroradius function*.

Some properties of the  $\tilde{\mathcal{H}}$ -function are now presented. A trivial property is  $\tilde{\mathcal{H}}_{n,0,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ .

*a. Relation with  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ .* The associated PGF is related to the  $\mathcal{H}$ -function and its derivatives. First, due to the differentiation formula (B1c), it is clear that we can write

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \mu^{1/2} \frac{d^k}{d\mu^k} \left[ \mu^{k-1/2} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) \right].$$

Then, using Leibniz’s formula and the formula for  $D^m z^\gamma$  just above (B1c), we obtain

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\mu^\ell \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(\ell)}(\mu)}{\Gamma(\ell + 1/2)}. \tag{12a}$$

The reciprocal relation is obtained starting from (7a), which is written in terms of the Mellin–Barnes integral with the help of (I.B10). Then, we have

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(\mu) = \frac{\kappa(-\mu)^{-k}}{2\pi^{3/2}i\Gamma(\lambda-1)} \times \int_L \frac{\Gamma(\lambda-2-s)\Gamma(n-s)\Gamma(1/2+s)}{\Gamma(n+1+s)(2\kappa\mu)^{-s}} (-s)_k ds.$$

On the other hand, from (11) and (I.B10) again, we have

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \frac{(2\pi^{3/2}i)^{-1}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} \times \int_L \frac{\Gamma(\lambda-2-s)\Gamma(n-s)\Gamma(1/2+s)}{\Gamma(1+n+s)(2\kappa\mu)^{-s}} \left(\frac{1}{2}+s\right)_k ds.$$

Then, if we employ the identity

$$(a+b)_n = \sum_{\ell=0}^n (-)^\ell \binom{n}{\ell} (a+\ell)_{n-\ell} (-b)_\ell,$$

we can finally write the reciprocal relation

$$\frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)(k)}(\mu)}{\mu^{-k}} = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{2}-k\right)_{k-\ell} \tilde{\mathcal{H}}_{n,\ell,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu). \tag{12b}$$

*b. Representations.* The computation of  $\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  can be carried out as follows. For noninteger  $\lambda$ , it is more efficient to employ identity (I.B14) and evaluate

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\pi^{-1/2}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} \left[ \frac{\Gamma(n+2-\lambda)}{\Gamma(\lambda-1+n)} (2\kappa z)^{\lambda-2} h_k(z) + \frac{\Gamma(\lambda-2-n)}{\Gamma(2n+1)} (2\kappa z)^n g_k(z) \right], \tag{13}$$

where

$$\frac{h_k(z)}{\Gamma(\lambda-3/2+k)} = {}_1F_2 \left( \begin{matrix} \lambda-3/2+k \\ \lambda-1-n, \lambda-1+n \end{matrix}; 2\kappa z \right)$$

$$\frac{g_k(z)}{\Gamma(n+1/2+k)} = {}_1F_2 \left( \begin{matrix} n+1/2+k \\ n+3-\lambda, 2n+1 \end{matrix}; 2\kappa z \right).$$

On the other hand, for integer  $\lambda$ , the only representation found for  $\tilde{\mathcal{H}}$  similar to (7c) contains a double sum. Consequently, it is equivalent to simply employ Eqs. (12a) and (7c).

*c. Recurrence relation.* The numerical computation of  $\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  can be carried out using either Eq. (13) or Eqs. (12a) and (7c) combined. However, since the associate function appears in series involving the parameter  $k$ , if a recurrence relation for  $\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) \equiv \tilde{\mathcal{H}}[k]$  on this parameter could be found, it could substantially reduce the computational time required for the evaluation of the series.

Such recurrence relation can be found by first considering the particular case of noninteger  $\lambda$ , given by Eq. (13). We observe that the auxiliary functions  $h_k(z)$  and  $g_k(z)$  in (13) and, consequently, the function  $\tilde{\mathcal{H}}[k]$  itself, all obey the same four-term recurrence relation, which can be derived from the corresponding relation for the function  ${}_1F_2(\dots; z)$  in the upper parameter, given by Ref. 29. Namely

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{H}}[k+3] - \left(\lambda + \frac{5}{2} + 3k\right)\tilde{\mathcal{H}}[k+2] \\ &+ \left[2\lambda - n^2 - \frac{3}{4} + 2\left(\lambda + 1 + \frac{3}{2}k\right)k - 2\kappa z\right]\tilde{\mathcal{H}}[k+1] \\ &+ \left(\lambda - \frac{3}{2} + k\right)\left(n + \frac{1}{2} + k\right)\left(n - \frac{1}{2} - k\right)\tilde{\mathcal{H}}[k] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Although the relation (14) was derived for noninteger  $\lambda$ , it can be easily shown that it is indeed valid for any  $\lambda$ . Substituting into the functions  $\tilde{\mathcal{H}}[k]$  in (14), the definition (11) and then the corresponding representations in terms of Mellin–Barnes integrals (Eq. (I.B10)), one can show, using known properties of the gamma function,<sup>28</sup> that the identity (14) is indeed valid for any real  $\lambda$ .

**B. Superthermal plasma dispersion function**

The superthermal (or kappa) *plasma dispersion function* ( $\kappa$ PDF) was defined by Eq. (I.11), and several of its properties were discussed in Sections III.A and A.1 of Paper I. Here, we will merely present a few additional properties, which were not included in Paper I and are important for the work at hand.

**1. Representations in terms of the G-function**

Taking the representations (I.15) for  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  and (I.B15a) for the Gauss function, we have

$$\begin{aligned} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) &= -\frac{\pi^{1/2}\kappa^{-\beta-1}\xi}{\Gamma(\sigma-3/2)}G_{2,2}^{1,2}\left[\frac{\xi^2}{\kappa}\middle| \begin{matrix} 0, 3/2-\lambda \\ 0, -1/2 \end{matrix}\right] \\ &+ \frac{i\pi^{1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)}\left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)}. \end{aligned} \quad (15a)$$

As explained in Paper I, the Maxwellian limit of this representation reduces to the known expression of the Fried and Conte function in terms of the Kummer confluent hypergeometric series.

Another, more compact, representation is obtained if we first modify the limits of the integral in (I.11) to the interval  $0 \leq s < \infty$ , define the new integration variable  $s = \sqrt{u}$ , and identify the resulting integration with the identity (I.B12). Proceeding in this way, we obtain the equivalent representation

$$Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\pi^{-1/2}\kappa^{-\beta-1}\xi}{\Gamma(\sigma-3/2)}G_{2,2}^{2,2}\left[-\frac{\xi^2}{\kappa}\middle| \begin{matrix} 0, 3/2-\lambda \\ 0, -1/2 \end{matrix}\right]. \quad (15b)$$

Taking the limit  $\kappa \rightarrow \infty$  of (15b), and identifying the result with (B4c), we obtain

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \xi U\left(\frac{1}{3/2}; -\xi^2\right),$$

where  $U(\dots; z)$  is the Tricomi confluent hypergeometric function.<sup>30</sup> This is another known representation of the Fried and Conte function.<sup>31</sup>

**2. Associated plasma dispersion function**

The associated plasma dispersion function, defined by

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) &\doteq \frac{\kappa^{-(k+\beta+1/2)}\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\sigma-3/2)} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s^{2k}(1+s^2/\kappa)^{-(\lambda-3/2+k)}}{s-\xi}, \end{aligned} \quad (16)$$

is another new special function that appears in the series expansions derived in Section III C 3 for the two-variables special functions  $Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ . It has the trivial property

$$\tilde{Z}_{0,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{\kappa}\Gamma(\lambda-3/2)}Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta-1/2)}(\xi), \quad (17)$$

and in the following, alternative representations for the  $\tilde{Z}$ -function will be derived.

*a. Representations.* The first expression is valid when  $\lambda$  is half-integer ( $\lambda = 5/2, 7/2, \dots$ ). In this case, writing  $m = \lambda - 3/2 + k$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), all singular points in (16), at  $s = \xi$  and  $s = \pm i\sqrt{\kappa}$ , are poles, and thus, we are permitted to evaluate  $\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  using the residue theorem, exactly as was done by Summers and Thorne.<sup>7</sup>

Let us consider the contour integral

$$I_B = \int_B ds \frac{s^{2k}(1+s^2/\kappa)^{-(\lambda+k-3/2)}}{s-\xi},$$

where the contour  $B$  comprises the semicircle in the lower-half plane of complex  $s$  (with radius  $S \rightarrow \infty$ ), which is closed by the integration along the real line of  $s$ , deformed according to the Landau prescription (i.e., circulating around the pole at  $s = \xi$  from below). See, for instance, the contour in Fig. 2 of Ref. 7, but with closing in the lower-half  $s$ -plane. Then, it is easy to show that the contribution along the semicircle of radius  $S$  vanishes as  $S \rightarrow \infty$  and  $I_B$  is simply evaluated from the residue at  $s = -i\sqrt{\kappa}$  as  $I_B = -2\pi i \text{Res}(-i\sqrt{\kappa})$ , since the pole at  $s = \xi$  is always outside  $B$ .

The residue is evaluated by the usual formula for a pole of order  $m$ ,<sup>32</sup> leading to the representation

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) &= \frac{2\sqrt{\pi}i(-)^k\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \\ &\times \sum_{\ell=0}^M \sum_{r=0}^{m-1-\ell} \frac{(-2k)_{\ell}(m)_r(1)_{m-1-\ell-r}}{2^{m+r}\Gamma(m-\ell-r)\ell!r!} \\ &\times \left(1 - \frac{i\xi}{\sqrt{\kappa}}\right)^{-(m-\ell-r)}, \end{aligned} \quad (18a)$$

where  $M = \min(m-1, 2k)$ . One can easily verify in (18a) that for integer  $\kappa$

$$\tilde{Z}_{0,\kappa}^{(1,3/2)}(\xi) = \frac{\Gamma(\kappa+3/2)}{\kappa^{1/2}\kappa!}Z_{\kappa}^*(\xi),$$

where  $Z_{\kappa}^*(\xi)$  is given by Eq. (20) of Ref. 7.



A different expression for the  $\tilde{Z}$ -function will now be obtained, which is valid for any real  $\lambda$ . We already know that for  $k=0$ , the  $\tilde{Z}$ -function is given in terms of the  $\kappa$ PDF by (17). Now, for  $k \geq 1$ , we modify the limits of the integral in (16) to the interval  $0 \leq s < \infty$ , define the new variable  $s = \sqrt{u}$ , and employ identity (I.B12) in order to obtain

$$\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{i\kappa^{-(\beta+1/2)}\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\sigma-3/2)\Gamma(\lambda+k-3/2)} \times G_{2,2}^{2,2} \left[ -\frac{\xi^2}{\kappa} \middle| \begin{matrix} 1/2, 5/2-\lambda \\ k, 1/2 \end{matrix} \right], \quad (18b)$$

which is a  $G$ -function representation of the associated PDF. If we now employ formula (I.B13a), we can write

$$\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{i\kappa^{-(k+\beta+1/2)}\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\sigma-3/2)\Gamma(\lambda+k-3/2)} \times \xi^{2k} \frac{d^k}{dz^k} G_{2,2}^{2,2} \left[ z \middle| \begin{matrix} 1/2, 5/2-\lambda \\ 0, 1/2 \end{matrix} \right],$$

where we have provisionally defined  $z = -\xi^2/\kappa$ . This result will now be identified with the derivatives of  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ .

If we take representation (15b) of the  $\kappa$ PDF, evaluate the  $k$ -th derivative on  $\xi$  and employ the differentiation formula (Eq. 1.1.1.2 of Ref. 33)

$$\frac{d^k}{dz^k} [f(\sqrt{z})] = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-)^{\ell} \frac{\Gamma(k+\ell)}{\Gamma(k-\ell)\ell!} \times (2\sqrt{z})^{-k-\ell} f^{(k-\ell)}(\sqrt{z}),$$

which is valid for  $k \geq 1$ , we finally obtain

$$\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\kappa^{-1/2}\Gamma(\lambda-1)}{2^k\Gamma(\lambda-3/2+k)} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k+\ell)}{2^{\ell}\Gamma(k-\ell)\ell!} \times (-\xi)^{k-\ell} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta-1/2)(k-\ell)}(\xi). \quad (18c)$$

A final representation for  $\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  will be derived by returning to (16), changing the integration variable to  $t$ , defined as  $s^2 = \kappa t^{-1}(1-t)$ , and comparing the resulting integral with the formula (I.B5). In this way, we obtain

$$\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda-1)B(\lambda-1, k+1/2)}{\sqrt{\pi}\kappa^{\beta+1}\Gamma(\sigma-3/2)} \times \xi_2 F_1 \left( \begin{matrix} 1, \lambda-1 \\ \lambda-1/2+k \end{matrix}; 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right), \quad (\Im \xi > 0), \quad (18d)$$

where  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$  is the beta function<sup>28</sup> and  ${}_2F_1(\dots; z)$  is the Gauss hypergeometric function<sup>34</sup> (see also Sec. B.1 of Paper I). It must be pointed out that the representation (18d) is only valid for the upper-half of the  $\xi$ -plane. In order to employ this expression when  $\Im \xi \leq 0$ , one must evaluate also its analytical continuation, employing the same technique applied to Eq. (I.13). The resulting expressions for the functions  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  are shown in Eqs. (25d) and (27c).

*b. Recurrence relation.* The representation (18d) also allowed us to obtain a recurrence relation for the associated PDF on the parameter  $k$ . Employing the shorthand notation  $\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi) \equiv \tilde{Z}[k]$ , we can write

$$\tilde{Z}[k] = \frac{[\Gamma(\lambda-1)]^2}{\sqrt{\pi}\kappa^{\beta+1}\Gamma(\sigma-3/2)} \xi z_k(\xi),$$

$$z_k \doteq \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\lambda-1/2+k)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, \lambda-1 \\ \lambda-1/2+k \end{matrix}; 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right).$$

Hence, if one finds the recurrence relation for the auxiliary function  $z_k(\xi)$ , the same relation applies to  $\tilde{Z}[k]$ .

Such a recurrence relation on the lower parameter of the Gauss function is given by Ref. 35. Consequently, we obtain

$$\left( \lambda - \frac{1}{2} + k \right) \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \tilde{Z}[k+2] - \left[ \left( \lambda - \frac{1}{2} + k \right) \frac{\xi^2}{\kappa} + \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \right] \tilde{Z}[k+1] + \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\xi^2}{\kappa} \tilde{Z}[k] = 0. \quad (19)$$

This result can be verified by inserting the definition (16) in place of  $\tilde{Z}[k]$  and then adequately manipulating the integrand.

The three-term recurrence relation (19) can potentially reduce the computational time for the evaluation of the functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ , discussed in Section III C.

### C. Two-variables kappa plasma functions

The dielectric tensor of a superthermal (kappa) plasma is written in terms of the special functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ , collectively called the *two-variables kappa plasma functions* (2VKPs), as can be verified in Eqs. (I.6a)–(I.6d), for an isotropic  $\kappa$ VDF, or in Eqs. (3a)–(3f), for a bi-kappa distribution.

The functions  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  were defined in Eqs. (I.26a)–(I.26b) in terms of a single integral involving the superthermal plasma dispersion function ( $\kappa$ PDF)  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  (see Sec. III.A of Paper I). These definitions will be repeated below. We will include equivalent definitions in terms of double integrals, which will also be used in this work.

Hence, we define

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{x J_n^2(\nu x)}{(1+x^2/\kappa)^{\lambda-1}} Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+x^2/\kappa}} \right) \quad (20a)$$

$$= \frac{2}{\pi^{1/2}\kappa^{1/2+\beta}} \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{x J_n^2(\nu x)}{s-\xi} \times \left( 1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa} \right)^{-(\lambda-1)}, \quad (20b)$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{2}{\mu} \int_0^\infty dx \frac{x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{(1+x^2/\kappa)^{\lambda-1}} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+x^2/\kappa}} \right) \tag{20c}$$

$$= \frac{2}{\pi^{1/2} \kappa^{1/2+\beta} \mu \Gamma(\sigma-3/2)} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty ds \times \frac{x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{s-\xi} \left( 1 + \frac{x^2}{\kappa} + \frac{s^2}{\kappa} \right)^{-(\lambda-1)}, \tag{20d}$$

where  $\nu^2 = 2\mu$  and, as usual,  $\sigma = \kappa + \alpha$  and  $\lambda = \sigma + \beta$ . Other definitions in terms of a single integral can be obtained, which are the counterparts of Eqs. (20a) and (20c). If we change the order of the integrations in (20b) and (20d) and define a new integration variable by  $x = \sqrt{\chi}t$ , where  $\chi = 1 + s^2/\kappa$ , the integral in  $t$  can be identified with (4), and we can write

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{\pi^{-1/2}}{\kappa^{\beta+1/2}} \frac{\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_{-\infty}^\infty ds \frac{(1+s^2/\kappa)^{-(\lambda-2)}}{s-\xi} \times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa} \right) \right], \tag{20e}$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \frac{\pi^{-1/2}}{\kappa^{\beta-1/2}} \frac{\Gamma(\lambda-2)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \int_{-\infty}^\infty ds \frac{(1+s^2/\kappa)^{-(\lambda-4)}}{s-\xi} \times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left( 1 + \frac{s^2}{\kappa} \right) \right]. \tag{20f}$$

The Maxwellian limits of the 2VKPs were already obtained in Eq. (I.7) and are

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \mathcal{H}_n(\mu) Z(\xi), \\ \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \mathcal{H}'_n(\mu) Z(\xi), \end{aligned} \tag{21}$$

where the function  $\mathcal{H}_n(\mu)$  is given by (5) and  $Z(\xi)$  is the usual Fried and Conte function, given, for instance, by Eq. (I.10).

Some new properties and representations of the functions  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  that were not included in Paper I will now be discussed.

**1. Derivatives of  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$**

As can be seen in Eqs. (3a)–(3f), almost all tensor components are given in terms of partial derivatives of the function  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ . These derivatives can be easily computed from the direct function, if one uses relations derived from the definitions (20).

We need the partial derivatives  $\partial_\xi \mathcal{Z}$ ,  $\partial_\mu \mathcal{Z}$  and the mixed derivative  $\partial_{\xi,\mu}^2 \mathcal{Z}$ . Applying  $\partial_\xi$  on (20a) and using Eq. (I.18a), we can identify with (4) and (20a) and write

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \left[ \frac{\Gamma(\lambda-1/2)}{\kappa^{\beta+1} \Gamma(\sigma-3/2)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1/2)}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(\mu, \xi) \right]. \end{aligned} \tag{22a}$$

Now, applying  $\partial_\mu$  on (20b) and integrating by parts the  $x$ -integral, the resulting expression can be manipulated in order to provide the relation between the derivatives

$$\begin{aligned} \mu \partial_\mu \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) - \frac{1}{2} \xi \partial_\xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) \\ = (\lambda-2) \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) - \kappa \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(\mu, \xi). \end{aligned}$$

Hence, after inserting (22a), there results

$$\begin{aligned} \mu \partial_\mu \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= (\lambda-2) \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) \\ &\quad - \kappa \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(\mu, \xi) \\ &\quad - \frac{\Gamma(\lambda-1/2)}{\kappa^{\beta+1} \Gamma(\sigma-3/2)} \xi \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1/2)}(\mu). \end{aligned} \tag{22b}$$

Finally, the crossed derivative can be obtained from either of the results above, leading directly to

$$\begin{aligned} \partial_{\xi,\mu}^2 \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= 2 \frac{\xi}{\mu} \left[ \kappa \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+2)}(\mu, \xi) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda-1) \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(\mu, \xi) \right] \\ &\quad + \frac{2\Gamma(\lambda-1/2)\mu^{-1}}{\kappa^{\beta+1} \Gamma(\sigma-3/2)} \left[ \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+3/2)}(\mu) - \left( \lambda - \frac{3}{2} \right) \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1/2)}(\mu) \right]. \end{aligned} \tag{22c}$$

**2. Values at  $\xi = 0$  or  $\mu = 0$**

From the definitions (4), (20b), (20d), and (I.11), we obtain the following limiting expressions:

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(0, \xi) = Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)}(\xi) \delta_{n0}, \tag{23a}$$

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, 0) = \frac{i\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu), \tag{23b}$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, 0) = \frac{i\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-2)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)' }(\mu), \tag{23c}$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(0, \xi) = - \left( \delta_{n,0} - \frac{1}{2} \delta_{|n|,1} \right) Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-3)}(\xi), \tag{23d}$$

$$\partial_\xi \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(0, \xi) = Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)' }(\xi) \delta_{n0}, \tag{23e}$$

$$\partial_\mu \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, 0) = \frac{i\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)' }(\mu). \tag{23f}$$

**3. Series representations**

In Paper I, we have obtained representations for the functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  in terms of series involving the  $\kappa$ PGF  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  and derivatives of the  $\kappa$ PDF

$Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ . These representations are given by Eqs. (I.28a)–(I.28b). Subsequent applications have shown that these expansions start to converge slower when  $\xi_i \rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}$  ( $\xi_i$ : imaginary part of  $\xi$ ) and may diverge when  $\xi_i \geq -\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}$ . Consequently, new function representations are necessary, in order to enlarge the convergence region of the expansions.

In this section, some new expansions for the 2VKPFs are derived. Some of the obtained expansions are applicable to particular regions of the functions’s domain and some are valid throughout the domain. However, all representations that have been found have in common that at least one series expansion is involved, which contains at least one special function. This is due to the fact that we were not able to factor the functions in two simpler terms, i.e.,  $Z(\mu, \xi) \neq F_1(\mu)F_2(\xi)$ , for instance. Indeed, we believe that the functions  $Z(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}(\mu, \xi)$  are in fact altogether non-separable.

The transcendental relation between the variables  $\mu$  ( $\sim w_{\perp}$ ) and  $\xi$  ( $\sim w_{\parallel}$ ) ultimately stems from the physical nature of the  $\kappa$ VDF (1). According to the interpretation of Tsallis’s entropic principle, one-particle distribution functions such as (1) describe the statistical distribution of particles in a (almost) noncollisional system, but with a strong correlation between the different degrees of freedom.<sup>1,4</sup> This strong correlation prevents the  $\kappa$ VDF (1) from being separable in different velocity components. In contrast, a physical system in thermal equilibrium has an entropy given by the Boltzmann–Gibbs statistical mechanics and is characterized by short-range Coulombian collisions and absence of correlation between the degrees of freedom. As a consequence, the equilibrium Maxwell–Boltzmann VDF is completely separable. Therefore, the non-separable nature of the functions  $Z(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}(\mu, \xi)$  is a mathematical consequence of the strong correlation between different degrees of freedom of the particles that compose physical systems statistically described by the  $\kappa$ VDF.

It is worth mentioning here that the nonadditive statistical mechanics also admits that particles without correlations may be statistically described by separable one-particle distribution functions.<sup>4</sup> This is the case of the product-bi-kappa (or product-bi-Lorentzian) VDF,<sup>4,7</sup> of which the kappa-Maxwellian distribution<sup>22,36</sup> is a particular case. For such distributions, the functions  $Z(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}(\mu, \xi)$  result to be completely separable, and the mathematical treatment is much simpler. Future works will also consider this possibility.

The first representation to be derived is a power series in  $\xi$ , valid when  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$ . Starting from (20a), we introduce the form (I.15) for the  $\kappa$ PDF and obtain

$$\begin{aligned} Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{4\Gamma(\lambda-1/2)\xi}{\kappa^{\beta+1}\Gamma(\sigma-3/2)} \int_0^\infty dx \frac{xJ_n^2(\nu x)}{(1+x^2/\kappa)^{\lambda-1/2}} \\ &\times {}_2F_1\left(1, \lambda-1/2; -\frac{\xi^2/\kappa}{1+x^2/\kappa}\right) + \frac{2i\pi^{1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \\ &\times \int_0^\infty dx \frac{xJ_n^2(\nu x)}{(1+\xi^2/\kappa+x^2/\kappa)^{\lambda-1}}. \end{aligned}$$

The second integral can be evaluated. If we initially assume that  $\xi$  is real and define a new integration variable by  $x = \sqrt{\psi}t$ , where  $\psi = 1 + \xi^2/\kappa$ , then we can identify the resulting integral with (4) and write

$$\int_0^\infty \frac{xJ_n^2(\nu x)dx}{(1+\xi^2/\kappa+x^2/\kappa)^{\lambda-1}} = \frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}[\mu(1+\xi^2/\kappa)]}{2(1+\xi^2/\kappa)^{\lambda-2}}. \quad (24)$$

Identity (24) can be analytically continued to the complex plane of  $\xi$  as long as it stays within the principal branch of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  (i.e., of the  $G$ -function). Since the origin is a branch point of the  $G$ -function and the infinity is an essential singularity,<sup>37</sup> the complex-valued  $\mathcal{H}$ -function in (24) has branch cuts along the lines  $(-i\infty, -i\sqrt{\kappa})$  and  $[i\sqrt{\kappa}, i\infty)$ . Hence, we can employ result (24) when  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$ .

On the other hand, if the Gauss function in the above expression for  $Z$  is substituted by its power series (I.B4), the series will also converge if  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$ , and we are then allowed to integrate term by term and obtain

$$\begin{aligned} Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{2\Gamma(\lambda-1/2)\xi}{\kappa^{\beta+1}\Gamma(\sigma-3/2)} \\ &\times \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda-1/2)_k}{(3/2)_k} \left(-\frac{\xi^2}{\kappa}\right)^k \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+k+1/2)}(\mu) \\ &+ \frac{i\pi^{1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}[\mu(1+\xi^2/\kappa)]}{(1+\xi^2/\kappa)^{\lambda-2}}. \end{aligned} \quad (25a)$$

For the next series expansions, we will consider the  $\mathcal{H}$ -function in (20e). Since  $1 + s^2/\kappa \geq 1$ , we can use the multiplication theorem (B2) to write

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}\left[\mu\left(1+\frac{s^2}{\kappa}\right)\right] &= \left(1+\frac{s^2}{\kappa}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{s^2}{\kappa}\right)^k \left(1+\frac{s^2}{\kappa}\right)^{-k} \tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu). \end{aligned} \quad (25b)$$

In this result, the function  $\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  is the associated plasma gyroradius function, defined by (11).

In this way, the  $Z$ -function can be written in the generic (and compact) form

$$Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) \tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi), \quad (25c)$$

where, accordingly, the function  $\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  is the associated plasma dispersion function, defined by (16).

Therefore, we can evaluate the function  $Z_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  using for  $\tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu)$  representations (12a) or (13), and for  $\tilde{Z}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  representations (18a)–(18c).

For the  $\tilde{Z}$ -function, we can also employ representation (18d); however, in this case, as was then mentioned, we also need to include the analytical continuation when  $\xi_i = \Im\xi \leq 0$ . The necessary expressions can be gleaned from the discussion concerning the related continuation of Eq. (I.13). In this

process, one would have to include the continuation of the Gauss function. Alternatively, one can start anew from Eq. (20b) and introduce the adequate continuation for the  $s$ -integration. In this way, one would end up with an additional term, which is proportional to Eq. (24). Proceeding in this way, the last series expansion for the  $\mathcal{Z}$ -function is finally

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu) \tilde{\mathcal{Z}}_{(18d)}^{(\beta)}(\xi) \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}i\Gamma(\lambda-1)\Theta(-\xi_i)}{\kappa^{\beta+1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-2)} \\ &\times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right], \end{aligned} \tag{25d}$$

where we have used the shorthand notation  $\tilde{\mathcal{Z}}_{(18d)}^{(\beta)}(\xi) \equiv \tilde{\mathcal{Z}}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi; \text{Eq. 18d})$ . We have also employed the Heaviside function  $\Theta(x) = +1$  (if  $x \geq 0$ ) or  $\Theta(x) = 0$  (if  $x < 0$ ).

The series expansions for the function  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  follow the same methodologies, and their derivations will not be repeated. The only intermediate result shown here is the identity

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3 J_{n-1}(\nu x) J_{n+1}(\nu x)}{\left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa} + x^2/\kappa\right)^{-(\lambda-1)}} \\ = \frac{1}{2} \frac{\kappa\mu}{\lambda-2} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-4)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right], \end{aligned} \tag{26}$$

which is derived similarly to Eq. (24) and to which apply the same considerations about the analyticity domain.

Without further ado, the series expansions for  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  are

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -\frac{2\Gamma(\lambda-3/2)\xi}{\kappa^{\beta}\Gamma(\sigma-3/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-3/2)_k}{(3/2)_k} \\ &\times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+k-1/2)'}(\mu) \left(-\frac{\xi^2}{\kappa}\right)^k \\ &+ \frac{i\pi^{1/2}\Gamma(\lambda-2)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \\ &\times \frac{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'}\left[\mu\left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)\right]}{\left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{\lambda-4}}, \end{aligned} \tag{27a}$$

valid for  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$ ,

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'}(\mu) \tilde{\mathcal{Z}}_{k,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)}(\xi), \tag{27b}$$

valid for any  $\xi$ , and

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{\mathcal{H}}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'}(\mu) \tilde{\mathcal{Z}}_{(18d)}^{(\beta-1)}(\xi) \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}i\Theta(-\xi_i)\Gamma(\lambda-2)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-4)} \\ &\times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right], \end{aligned} \tag{27c}$$

also valid for any  $\xi$ .

The series expansions and the other properties derived in this section and in Paper I are sufficient to enable a computational implementation of the functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ , and hence for the evaluation of the dielectric tensor (2a) for a bi-kappa plasma.

The numerical evaluation of the series can be substantially accelerated if one also employs the recurrence relations (14) and (19). However, we must point out that so far no analysis of the stability of these relations for forward recursion has been made. It is possible that for a given set of parameters either or both relations are only stable for backward recursion, and so different strategies must be implemented.

#### 4. Asymptotic expansions

Here, we will derive expressions valid for either  $|\xi| \gg 1$  or  $\mu \gg 1$ . Starting with  $\xi$ , the expansion we want to derive is not the ordinary series representation for  $|\xi| > \sqrt{\kappa}$ . Although such a series can be easily obtained from the expressions already shown, they would be unnecessarily complicated, as it was hinted by the derivation of the representation (I.16) for the  $\kappa$ PDF. Instead, we want to derive an expansion valid for  $|\xi| \gg \sqrt{\kappa}$ , convenient for a fluid approximation of the dielectric tensor.

Accordingly, in the  $s$ -integrals of Eqs. (20b) and (20d), we will approximate

$$\frac{1}{s-\xi} \simeq -\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{s}{\xi} + \frac{s^2}{\xi^2} + \dots\right) = -\frac{1}{\xi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{s^{\ell}}{\xi^{\ell}},$$

i.e., we ignore the high-energy particles at the tail of the VDF and the kinetic effect of the pole at  $s = \xi$ . Notice also that we have not written the upper limit of the sum above, since such expansion is only meaningful for a finite number of terms. Inserting this expansion into the  $s$ -integrals, all the terms with  $\ell$  odd vanish and the others can be easily evaluated. However, these integrals only exist if the additional condition  $\lambda > k + 3/2$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) is satisfied.

Identifying the remaining  $x$ -integrals with (4) and (26), we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &\simeq -\frac{\pi^{-1/2}\kappa^{-\beta}}{\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\lambda - k - \frac{3}{2}\right) \\ &\times \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\kappa^k}{\xi^{2k}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-k-1/2)}(\mu), \end{aligned} \tag{28a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &\simeq -\frac{\pi^{-1/2}\kappa^{1-\beta}}{\Gamma(\sigma-3/2)} \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\lambda - k - \frac{5}{2}\right) \\ &\times \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\kappa^k}{\xi^{2k}} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-k-3/2)'}(\mu). \end{aligned} \tag{28b}$$

Now, the large gyroradius expansion ( $\mu \gg 1$ ) is obtained if we start from (20e), (20f) and introduce the expansion (8). The resulting integrals can be identified with the definition of the  $\kappa$ PDF in (I.11). Hence, we obtain

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \sum_{k=0}^{(1/2+n)_k} \frac{(1/2-n)_k}{k!(2\mu)^k} \times \mathcal{Z}_{\kappa}^{(\alpha,\beta+k-1/2)}(\xi), \tag{28c}$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) \simeq \frac{-1}{\sqrt{2\pi\mu^3}} \sum_{k=0}^{(1/2+n)_k} \frac{(1/2-n)_k(k+1/2)}{k!(2\mu)^k} \times \mathcal{Z}_{\kappa}^{(\alpha,\beta+k-3/2)}(\xi). \tag{28d}$$

**5. Closed-form expression for  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$**

Since  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  are non-separable functions of two variables, it is a relevant question whether they can be represented by some special function discussed

in the literature. Here, we will show for  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  that indeed it can be represented in closed, compact form by the relatively newly defined Meijer  $G$ -function of two variables, introduced in [Appendix B 2](#).

Returning to the definition (20b) and defining the new integration variables  $x = \sqrt{\kappa u}$  and  $s = \sqrt{\kappa v}$ , the double integral can be written as

$$I_2 = \frac{\sqrt{\kappa}}{4} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv v^{-1/2} J_n^2(\sqrt{2\kappa\mu u}) \frac{(1+u+v)^{-(\lambda-1)}}{v - \xi^2/\kappa}.$$

Introducing now the function representations (B4a), (I.B15c), and (B9), and then expressing the last in terms of the double Mellin–Barnes integral (B5), one obtains

$$I_2 = -\frac{\kappa^{3/2}\xi^{-2}}{4\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-1)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_s} \int_{L_t} ds dt \Gamma(\lambda-1-s-t)\Gamma(s)\Gamma(t) \times \left\{ \int_0^\infty du u^{-s} G_{1,3}^{1,1} \left[ 2\kappa\mu u \mid \begin{matrix} 1/2 \\ n, -n, 0 \end{matrix} \right] \right\} \left\{ \int_0^\infty dv v^{-t-1/2} G_{1,1}^{1,1} \left[ -\frac{\kappa v}{\xi^2} \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \right\},$$

where we have also interchanged the order of integrations.

The  $u$ - and  $v$ -integrations can now be performed by means of the Mellin transform (B3), resulting

$$I_2 = \frac{\sqrt{\kappa}(2\kappa\mu)^{-1}}{4\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-1)} \left(-\frac{\kappa}{\xi^2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_s} \int_{L_t} ds dt \Gamma(\lambda-1-s-t) \times \frac{\Gamma(-1/2+s)\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(n+s)} \Gamma(t)\Gamma\left(\frac{1}{2}+t\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right) [(2\kappa\mu)^{-1}]^{-s} \left(-\frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-t}. \tag{29}$$

This result can be compared with (B5), in which case we obtain finally

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = -\frac{\pi^{-1}\kappa^{1-\beta}}{\Gamma(\sigma-3/2)\xi} G_{1,0;2,1;1,2}^{0,1;1,1;2,1} \left[ \begin{matrix} (2\kappa\mu)^{-1} \\ -\xi^2/\kappa \end{matrix} \mid \begin{matrix} 7/2-\lambda : 1-n, 1+n : 1 \\ - : 1/2 : 1/2, 1 \end{matrix} \right]. \tag{30}$$

The final expression for the  $\mathcal{Z}$ -function in (30) was obtained after employing also the translation property (B7).

The Maxwellian limit of (30) can be obtained. Expressing again the  $G^{(2)}$ -function in (30) in terms of the definition (B5), and applying the limit  $\kappa \rightarrow \infty$  on the resulting expression, one can evaluate the limit using Stirling’s formula.<sup>28</sup> As a result, the  $s$ - and  $t$ -integrations factor out, and the remaining integrals can be identified with  $G$ -functions from the definition (I.B10), which in turn can be identified with representations (I.B15d) and (B4c). After employing properties (I.B11a), one finally obtains

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) = e^{-\mu} I_n(\mu) \xi U\left(\frac{1}{3/2}; -\xi^2\right) = \mathcal{H}_n(\mu) Z(\xi),$$

as expected.

Formula (30) is the more compact representation of the function  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  that we have obtained. However, despite being a closed-form for  $\mathcal{Z}$ , this representation is not yet very useful, since there is no known computational implementation that evaluates the  $G^{(2)}$ -function, contrary

to the one-variable  $G$ , which is implemented by some Computer Algebra Software and also by the python library mpmath.<sup>38</sup> Nevertheless, we find it important to include the derivation of formula (30) in order to stress the necessity of further development on the numerical evaluation of these special functions and also to present to the plasma physics community the techniques involved with Meijer’s  $G$ - and  $G^{(2)}$ -functions and Mellin–Barnes integrals in general, since we believe that as more complex aspects of the physics of plasmas are considered, such as more general VDFs and dusty plasmas, for instance, the techniques employed in this work and in Paper I have the potential to provide mathematical answers to the challenges that will appear.

**IV. CONCLUSIONS**

In this paper, we have presented two major developments for the study of waves with arbitrary frequency and direction of propagation in anisotropic superthermal plasmas. First, we have derived the dielectric tensor of a bi-kappa plasma. This tensor will be employed in future studies concerning wave



propagation and amplification/damping in anisotropic super-thermal plasmas.

The tensor components were written in terms of the kappa plasma special functions, which must be numerically evaluated for practical applications. To this end, we have derived in the present paper (and in Paper I) several mathematical properties and representations for these functions. With the development presented here and in Paper I, we believe that all the necessary frameworks for a systematic study of electromagnetic/electrostatic waves propagating at arbitrary angles in a bi-kappa plasma have been obtained. In future studies, we will apply this formalism to the specific problems concerning temperature-driven instabilities in kappa plasmas.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge support provided by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Grant Nos. 304461/2012-1, 478728/2012-3, and 304363/2014-6.

## APPENDIX A: DERIVATION OF THE SUSCEPTIBILITY TENSOR

The derivation of  $\chi_{ij}^{(s)}$  for a bi-kappa plasma (or for any VDF, for that matter) is simplified if one observes that all tensor components have common factors. First, inserting the function (1) into the tensor (2b), all components contain the derivatives  $Lf_s$  and  $L'f_s$ . Using these derivatives, one can proceed with the evaluation of the integrals. Using a cylindrical coordinate system and defining the nondimensional integration variables  $t = v_{\perp}/w_{\perp s}$  and  $u = v_{\parallel}/w_{\parallel s}$ , one obtains, after some straightforward algebra, the unified form

$$\chi_{ij}^{(s)} = 2 \frac{\omega_{ps}^2 \sigma_s g(\kappa_s, \alpha_s)}{\omega^2 \pi^{1/2} \kappa_s} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \times \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} du \, t u \, J_{ij,n}^{(s)} \left( 1 + \frac{u^2}{\kappa_s} + \frac{t^2}{\kappa_s} \right)^{-\sigma_s - 1},$$

where

$$\begin{aligned} I_{ij,n}^{(s)} &= (\xi_{0s} - A_s u) J_{ij,n}^{(s)}, \\ I_{iz,n}^{(s)} &= (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) K_{ij,n}^{(s)}, \\ J_{xx,n}^{(s)} &= \frac{n^2 t J_n^2(\nu_s t)}{\mu_s u - \xi_{ns}}, \\ J_{xy,n}^{(s)} &= \sqrt{2} i \frac{n t^2 J_n(\nu_s t) J_n'(\nu_s t)}{\mu_s u - \xi_{ns}}, \\ J_{yy,s}^{(s)} &= 2 \frac{n^2 t J_n^2(\nu_s t) - t^3 J_{n-1}(\nu_s t) J_{n+1}(\nu_s t)}{u - \xi_{ns}}, \\ K_{xz,n}^{(s)} &= \sqrt{2} \frac{w_{\parallel s} n t u J_n^2(\nu_s t)}{w_{\perp s} \mu_s u - \xi_{ns}}, \\ K_{yz,n}^{(s)} &= -2i \frac{w_{\parallel s} t^2 u J_n(\nu_s t) J_n'(\nu_s t)}{w_{\perp s} u - \xi_{ns}}, \\ K_{zz,n}^{(s)} &= 2 \frac{w_{\parallel s}^2 \xi_{ns} t u J_n^2(\nu_s t)}{w_{\perp s}^2 u - \xi_{ns}}, \end{aligned}$$

with  $g(\kappa_s, \alpha_s) = \kappa_s^{-3/2} \Gamma(\sigma_s) / \Gamma(\sigma_s - 3/2)$ ,  $\nu_s = k_{\perp} w_{\perp s} / \Omega_s$ , and where the anisotropy parameter  $A_s = 1 - w_{\perp s}^2 / w_{\parallel s}^2$  appears for the first time. These results were obtained using the identity (9) and the recurrence relations of the Bessel functions.

The remaining integrals in the  $J$ s and  $K$ s can now be identified with the definitions of the two-variables kappa plasma functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and their derivatives, given by Eqs. (20) and (22). In this way, one arrives at the final expressions shown in Eqs. (3a)–(3f).

The Maxwellian limit of the partial susceptibility tensor is obtained by the process  $\kappa_s \rightarrow \infty$ . Upon applying this limit, one must replace  $w_{\parallel(\perp)} \rightarrow v_{T\parallel(\perp)} = \sqrt{2T_{\parallel(\perp)}/m}$ , and the kappa plasma functions are replaced by their limiting representations (21). In this way, one arrives at

$$\chi_{xx}^{(s)} = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{H}_n(\mu_s) \left[ \xi_{0s} \mathcal{Z}(\xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \mathcal{Z}'(\xi_{ns}) \right], \quad (\text{A1a})$$

$$\chi_{xy}^{(s)} = i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} n \mathcal{H}'_n(\mu_s) \left[ \xi_{0s} \mathcal{Z}(\xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \mathcal{Z}'(\xi_{ns}) \right], \quad (\text{A1b})$$

$$\begin{aligned} \chi_{xz}^{(s)} &= -\frac{\omega_{ps}^2 v_{T\parallel s}}{\omega^2 v_{T\perp s}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n \Omega_s}{k_{\perp} v_{T\perp s}} (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \\ &\times \mathcal{H}_n(\mu_s) \mathcal{Z}'(\xi_{ns}), \end{aligned} \quad (\text{A1c})$$

$$\begin{aligned} \chi_{yy}^{(s)} &= \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left[ \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{H}_n(\mu_s) - 2\mu_s \mathcal{H}'_n(\mu_s) \right] \\ &\times \left[ \xi_{0s} \mathcal{Z}(\xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \mathcal{Z}'(\xi_{ns}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A1d})$$

$$\begin{aligned} \chi_{yz}^{(s)} &= i \frac{\omega_{ps}^2 v_{T\parallel s}}{\omega^2 v_{T\perp s}} \frac{k_{\perp} v_{T\perp s}}{2\Omega_s} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \\ &\times \mathcal{H}'_n(\mu_s) \mathcal{Z}'(\xi_{ns}), \end{aligned} \quad (\text{A1e})$$

$$\begin{aligned} \chi_{zz}^{(s)} &= -\frac{\omega_{ps}^2 v_{T\parallel s}^2}{\omega^2 v_{T\perp s}^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \\ &\times \xi_{ns} \mathcal{H}_n(\mu_s) \mathcal{Z}'(\xi_{ns}). \end{aligned} \quad (\text{A1f})$$

These results agree with expressions that can be found in the literature. See, e.g., Eq. (20) of Ref. 22.

## APPENDIX B: THE ONE- AND TWO-VARIABLES MEIJER G-FUNCTIONS

### 1. G-function

The definition and some properties of the  $G$ -function are given in Sec. B.2 of Paper I. All identities shown there and in the following can be found in Refs. 37 and 39, except when explicitly mentioned.

#### a. Derivatives

We have

$$\frac{d^k}{dz^k} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] = (-z)^{-k} G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p), 0 \\ k, (b_q) \end{matrix} \right. \right]. \quad (\text{B1a})$$

We will now derive a formula that is not usually found in the literature. If  $n \geq 1$ , we can employ the definition of the  $G$ -function in terms of a Mellin–Barnes integral, given by (I.B10), and evaluate, for  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dz^k} \left\{ z^{k-a_1} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} \\ & \times \frac{\Gamma(1 - a_1 + k + s)}{\Gamma(1 - a_1 + s)} z^{-a_1+s} ds, \end{aligned} \tag{B1b}$$

since  $D^m z^\gamma = \Gamma(\gamma + 1) z^{\gamma-m} / \Gamma(\gamma + 1 - m)$ . Consequently, we obtain the differentiation formula

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dz^k} \left\{ z^{k-a_1} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] \right\} \\ &= z^{-a_1} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - k, \dots, a_p \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] \quad (n \geq 1). \end{aligned} \tag{B1c}$$

**b. Multiplication theorems**

If  $\Re w > 1/2$  and  $n > 0$

$$\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n} \left[ zw \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] &= w^{a_1-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - 1/w)^k}{k!} \\ & \times G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - k, a_2, \dots, a_p \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right]. \end{aligned} \tag{B2}$$

**c. Mellin transform**

The Mellin transform of the  $G$ -function is

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty y^{s-1} G_{p,q}^{m,n} \left[ \eta y \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] dy \\ &= \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s) \eta^{-s}}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}. \end{aligned} \tag{B3}$$

**d. Function representations**

A short list of function representations is

$$(1 + x)^{-\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho)} G_{1,1}^{1,1} \left[ x \left| \begin{matrix} 1 - \rho \\ 0 \end{matrix} \right. \right], \tag{B4a}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_\mu(\sqrt{z}) K_\nu(\sqrt{z})}{(2\sqrt{\pi})^{-1}} &= G_{2,4}^{2,2} \left[ z \left| \begin{matrix} 0, 1/2 \\ \frac{\mu + \nu}{2}, \frac{\mu - \nu}{2}, -\frac{\mu - \nu}{2}, -\frac{\mu + \nu}{2} \end{matrix} \right. \right], \end{aligned} \tag{B4b}$$

$$\frac{\Gamma(a) U \left( \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}; z \right)}{[\Gamma(a - b + 1)]^{-1}} = G_{1,2}^{2,1} \left[ z \left| \begin{matrix} 1 - a \\ 0, 1 - b \end{matrix} \right. \right]. \tag{B4c}$$

**2. Two-variables Meijer function**

The logical extension of Meijer’s  $G$ -function for two variables was first proposed by Agarwal<sup>40</sup> in 1965. Subsequent publications proposed slightly different definitions for the same extension.<sup>41–43</sup> In this work, we will adopt the definition by Hai and Yakubovich (Eq. 13.1 of Ref. 43)

$$\begin{aligned} & G_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}^{m_1,n_1;m_2,n_2;m_3,n_3} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}^{(1)}) : (a_{p_2}^{(2)}) : (a_{p_3}^{(3)}) \\ (b_{q_1}^{(1)}) : (b_{q_2}^{(2)}) : (b_{q_3}^{(3)}) \end{matrix} \right. \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_s} \int_{L_t} \Psi_1(s+t) \Psi_2(s) \Psi_3(t) x^{-s} y^{-t} ds dt, \end{aligned} \tag{B5}$$

where for  $k = 1, 2, 3$ ,

$$\Psi_k(r) = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma(b_j^{(k)} + r) \prod_{j=1}^{n_k} \Gamma(1 - a_j^{(k)} - r)}{\prod_{j=n_k+1}^{p_k} \Gamma(a_j^{(k)} + r) \prod_{j=m_k+1}^{q_k} \Gamma(1 - b_j^{(k)} - r)}.$$

The Reader is referred to Sec. II.13 of Ref. 43 for an explanation on the notation and a discussion on the general conditions on the validity of (B5). Whenever convenient and unambiguous, we will refer to the two-variables Meijer function as the  $G^{(2)}$ -function.

We list some elementary properties of the  $G^{(2)}$ -function, some of which are employed in this work. The symmetry property

$$\begin{aligned} & G_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}^{m_1,n_1;m_2,n_2;m_3,n_3} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}^{(1)}) : (a_{p_2}^{(2)}) : (a_{p_3}^{(3)}) \\ (b_{q_1}^{(1)}) : (b_{q_2}^{(2)}) : (b_{q_3}^{(3)}) \end{matrix} \right. \right] \\ &= G_{q_1,p_1;q_2,p_2;q_3,p_3}^{n_1,m_1;n_2,m_2;n_3,m_3} \left[ \begin{matrix} x^{-1} \\ y^{-1} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 - (b_{q_1}^{(1)}) : 1 - (b_{q_2}^{(2)}) : 1 - (b_{q_3}^{(3)}) \\ 1 - (a_{p_1}^{(1)}) : 1 - (a_{p_2}^{(2)}) : 1 - (a_{p_3}^{(3)}) \end{matrix} \right. \right], \end{aligned} \tag{B6}$$

and the translation property

$$\begin{aligned} & x^\alpha y^\beta G_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}^{m_1,n_1;m_2,n_2;m_3,n_3} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}^{(1)}) : (a_{p_2}^{(2)}) : (a_{p_3}^{(3)}) \\ (b_{q_1}^{(1)}) : (b_{q_2}^{(2)}) : (b_{q_3}^{(3)}) \end{matrix} \right. \right] \\ &= G_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}^{m_1,n_1;m_2,n_2;m_3,n_3} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}^{(1)}) + \alpha + \beta : (a_{p_2}^{(2)}) + \alpha : (a_{p_3}^{(3)}) + \beta \\ (b_{q_1}^{(1)}) + \alpha + \beta : (b_{q_2}^{(2)}) + \alpha : (b_{q_3}^{(3)}) + \beta \end{matrix} \right. \right]. \end{aligned} \tag{B7}$$

A product of two  $G$ -functions can be written as a single  $G^{(2)}$ -function as

$$\begin{aligned}
 & G_{0,0;p_2,q_2;p_3,q_3}^{0,0;m_2;n_2;m_3;n_3} \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \begin{array}{c} - : (a_{p_2}^{(2)}) : (a_{p_3}^{(3)}) \\ - : (b_{q_2}^{(2)}) : (b_{q_3}^{(3)}) \end{array} \right] \\
 &= G_{p_2,q_2}^{m_2,n_2} \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \begin{array}{c} (a_{p_2}^{(2)}) \\ (b_{q_2}^{(2)}) \end{array} \right] G_{p_3,q_3}^{m_3,n_3} \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \begin{array}{c} (a_{p_3}^{(3)}) \\ (b_{q_3}^{(3)}) \end{array} \right]. \quad (\text{B8})
 \end{aligned}$$

We will also use the function representation

$$(1+x+y)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} G_{0,1;1,0:1,0}^{1,0;0,1:0,1} \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \begin{array}{c} - : 1 : 1 \\ \alpha : - : - \end{array} \right]. \quad (\text{B9})$$

Properties (B6)–(B8) can be inferred from the definition (B5). The identity (B9) is given in Sec. II.13 of Ref. 43.

- <sup>1</sup>G. Livadiotis and D. J. McComas, *Astrophys. J.* **741**, 88 (2011).  
<sup>2</sup>G. Livadiotis and D. J. McComas, *J. Geophys. Res.* **114**, A11105, doi:10.1029/2009JA014352 (2009).  
<sup>3</sup>G. Livadiotis and D. J. McComas, *Space Sci. Rev.* **175**, 183–214 (2013).  
<sup>4</sup>G. Livadiotis, *J. Geophys. Res.* **120**, 1607–1619, doi:10.1002/2014JA020825 (2015).  
<sup>5</sup>R. Gaelzer and L. F. Ziebell, *J. Geophys. Res.* **119**, 9334–9356, doi:10.1002/2014JA020667 (2014).  
<sup>6</sup>R. Gaelzer and L. F. Ziebell, *Phys. Plasmas* **23**, 022110 (2016).  
<sup>7</sup>D. Summers and R. M. Thorne, *Phys. Fluids B* **3**, 1835 (1991).  
<sup>8</sup>P. H. Yoon, C. S. Wu, and A. S. de Assis, *Phys. Fluids B* **5**, 1971 (1993).  
<sup>9</sup>P. Hellinger and H. Matsumoto, *J. Geophys. Res.* **105**, 10519, doi:10.1029/1999JA000297 (2000).  
<sup>10</sup>M. F. Bashir, Z. Iqbal, I. Aslam, and G. Murtaza, *Phys. Plasmas* **17**, 102112 (2010).  
<sup>11</sup>L. Chen and D. J. Wu, *Phys. Plasmas* **17**, 062107 (2010).  
<sup>12</sup>L. Chen, D. J. Wu, and J. Huang, *J. Geophys. Res.* **118**, 2951–2957, doi:10.1002/jgra.50332 (2013).  
<sup>13</sup>N. Shukla, R. Mishra, P. Varma, and M. S. Tiwari, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **50**, 025001 (2008).  
<sup>14</sup>H. Naim, M. F. Bashir, and G. Murtaza, *Phys. Plasmas* **21**, 032120 (2014).  
<sup>15</sup>M. F. Bashir and G. Murtaza, *Braz. J. Phys.* **42**, 487 (2012).  
<sup>16</sup>K. G. Klein and G. G. Howes, *Phys. Plasmas* **22**, 032903 (2015).  
<sup>17</sup>S. P. Gary, *Philos. Trans. R. Soc. A* **373**, 20140149 (2015).  
<sup>18</sup>D. Summers, S. Xue, and R. M. Thorne, *Phys. Plasmas* **1**, 1212 (1994).  
<sup>19</sup>B. Basu, *Phys. Plasmas* **16**, 052106 (2009).  
<sup>20</sup>Y. Liu, S. Q. Liu, B. Dai, and T. L. Xue, *Phys. Plasmas* **21**, 032125 (2014).  
<sup>21</sup>P. Astfalk, T. Görler, and F. Jenko, *J. Geophys. Res.* **120**, 7107–7120, doi:10.1002/2015JA021507 (2015).  
<sup>22</sup>T. Cattaert, M. A. Hellberg, and R. L. Mace, *Phys. Plasmas* **14**, 082111 (2007).  
<sup>23</sup>H. Sugiyama, S. Singh, Y. Omura, M. Shoji, D. Nunn, and D. Summers, *J. Geophys. Res.* **120**, 8426–8439, doi:10.1002/2015JA021346 (2015).  
<sup>24</sup>F. W. J. Olver and L. C. Maximon, in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Chap. 10, pp. 215–286.  
<sup>25</sup>*NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark (Cambridge, New York, 2010).  
<sup>26</sup>R. Roy, F. W. J. Olver, R. A. Askey, and R. Wong, in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Chap. 1, pp. 1–39.  
<sup>27</sup>I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 7th ed. (Academic Press, San Francisco, 2007), p. 1222.  
<sup>28</sup>R. A. Askey and R. Roy, in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Chap. 5, pp. 135–147.  
<sup>29</sup>S. Wolfram, see <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric1F2/17/01/01/0001/> for “Generalized Hypergeometric Function  ${}_1F_2$ ” (last accessed May 31, 2016).  
<sup>30</sup>A. B. O. Daalhuis, in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Chap. 13, pp. 321–349.  
<sup>31</sup>A. L. Peratt, *J. Math. Phys.* **25**, 466 (1984).  
<sup>32</sup>M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, 2nd ed., Cambridge Texts in Applied Mathematics (Cambridge, New York, 2003), p. 647.  
<sup>33</sup>I. Brychkov, *Handbook of Special Functions: Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas* (CRC Press, 2008), pp. 680 + xx.  
<sup>34</sup>A. B. O. Daalhuis, in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Chap. 15, pp. 383–401.  
<sup>35</sup>S. Wolfram, see <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/17/01/01/0003/> for “Generalized Hypergeometric Function  ${}_2F_1$ ” (last accessed May 31, 2016).  
<sup>36</sup>M. A. Hellberg and R. L. Mace, *Phys. Plasmas* **9**, 1495 (2002).  
<sup>37</sup>Y. L. Luke, *Mathematical Functions and Their Approximations* (Academic Press, New York, 1975), pp. 568 + xvii.  
<sup>38</sup>F. Johansson, see <http://mpmath.org/> for “Mpmath: A Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.19)” (2014).  
<sup>39</sup>A. A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, I. U. A. Brychkov, and O. I. Maričev, *Integrals and Series: More special functions*, Integrals and Series Vol. 3 (Gordon and Breach Science Publishers, 1990), p. 800.  
<sup>40</sup>R. P. Agarwal, *Proc. Natl. Inst. Sci. India* **31**, 536 (1965).  
<sup>41</sup>B. L. Sharma, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **79**, 26 (1965).  
<sup>42</sup>A. Verma, *Math. Comput.* **20**, 413 (1966).  
<sup>43</sup>N. T. Hai and S. B. Yakubovich, *The Double Mellin-Barnes Type Integrals and Their Applications to Convolution Theory*, Series on Soviet and East European Mathematics Vol. 6 (World Scientific, Singapore, 1992), pp. 295 + x.



*Apêndice C*

ARTIGO PUBLICADO

# The oblique firehose instability in a bi-kappa magnetized plasma

A. R. Meneses,<sup>a)</sup> R. Gaelzer,<sup>b)</sup> and L. F. Ziebell<sup>c)</sup>

*Instituto de Física, UFRGS, 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil*

(Received 28 September 2018; accepted 24 October 2018; published online 13 November 2018)

In this work, we derive a dispersion equation that describes the excitation of the oblique (or Alfvén) firehose instability in a plasma that contains both electron and ion species modelled by bi-kappa velocity distribution functions. The equation is obtained with the assumptions of low-frequency waves and moderate to large values of the parallel (respective to the ambient magnetic field) plasma beta parameter, but it is valid for any direction of propagation and for any value of the particle gyroradius (or Larmor radius). Considering values for the physical parameters typical to those found in the solar wind, some solutions of the dispersion equation, corresponding to the unstable mode, are presented. In order to implement the dispersion solver, several new mathematical properties of the special functions occurring in a kappa plasma are derived and included. The results presented here suggest that the superthermal characteristic of the distribution functions leads to reductions to both the maximum growth rate of the instability and of the spectral range of its occurrence. *Published by AIP Publishing.* <https://doi.org/10.1063/1.5063537>

## I. INTRODUCTION

The plasma environment found in the interplanetary space is, in its majority, formed by particles of solar origin transported by the solar wind. The solar wind plasma is composed by electrons, protons, alpha particles, and some other minority ions. Although the measured velocity distribution functions (VDFs) for each of the major populations have some specific characteristics, they also feature some common traits, such as high-energy isotropic or nonisotropic tails and high-energy beam populations that are aligned with the local interplanetary magnetic field (IMF).<sup>1</sup>

One of the most important characteristics shown by the ion VDFs is a marked and conspicuous anisotropy in the velocity spreads measured in the direction parallel to the IMF with the spread measured in the perpendicular direction. These anisotropic velocity spreads are called in the literature *temperature anisotropies* and are measured by the second moments of the VDF, respectively, evaluated in the parallel (the *parallel temperature*) and perpendicular (the *perpendicular temperature*) directions.

The importance of the presence of a temperature anisotropy for the dynamical evolution of the solar wind plasma is that its departure from a thermodynamic equilibrium state means that the plasma contains free energy sources in the particle distributions that can be tapped to excite several different plasma instabilities which will be ultimately responsible for several phenomena observed in the solar wind such as wave emission, particle energization, and turbulence.<sup>2</sup>

In spite of the fact that other observed nonequilibrium features such as particle beams also offer free energy sources, a large part of the work published in the literature is concerned with the temperature anisotropy-driven instabilities (TADI). If we restrict ourselves with the anisotropies caused

by the proton VDFs, there are four instabilities that are usually studied: the electromagnetic ion-cyclotron (or proton cyclotron) instability (EMIC), roughly excited when  $T_{\perp p} > T_{\parallel p}$ , where  $T_{\parallel(\perp)p}$  is the parallel (perpendicular) temperature of the proton VDF, the parallel proton firehose instability (PFH), excited when  $T_{\parallel p} > T_{\perp p}$ , the mirror instability (MI, when  $T_{\perp p} > T_{\parallel p}$ ), and the oblique (or Alfvén) firehose instability (OFH, when  $T_{\parallel p} > T_{\perp p}$ ).<sup>2</sup> These instabilities are grouped in such a way that the first two (EMIC and PFH) are usually studied in the direction parallel to the IMF, whereas the second couple (MI and OFH) occur in the oblique direction. Rather than giving a long list of publications on the subject, the reader is referred to the recent review provided by Ref. 3, which also provides lengthier discussions both on the theoretical derivation of the instabilities from the kinetic theory of plasmas and about their importance for the physical processes that take place in the solar wind.

The vast majority of the theoretical work on the TADI has been done assuming that the VDFs of the solar wind species can be adequately fitted by a combination of Maxwellian and bi-Maxwellian distributions.<sup>2-4</sup> However, a substantial fraction of observed VDFs display high-energy (*superthermal*) tails that are better fitted by some power-law dependence such as  $f(v) \propto v^{-2\kappa}$ , where  $f(v)$  is the velocity distribution function and  $0 < \kappa < \infty$  is a fitting parameter.

The most frequently employed model of distribution with such power-law behavior is the kappa VDF,<sup>5</sup> which describes the velocity distribution of a plasma species that is in a quasi-stationary state away from thermal equilibrium, where the particle interactions are long-ranged and where there are strong correlations among the degrees of freedom. With a  $\kappa$ VDF, the kappa parameter is a measure of the departure of the (quasi-) stationary state from thermal equilibrium: the smaller the value of  $\kappa$  the farther from equilibrium, which is asymptotically reached when  $\kappa \rightarrow \infty$ . In practice, when  $\kappa \geq 20$  the  $\kappa$ VDF is already quasi-Maxwellian. A collection of works regarding the origin, observations, properties, and the

<sup>a)</sup>Electronic mail: anemeneses@gmail.com

<sup>b)</sup>Electronic mail: rudi.gaelzer@ufrgs.br

<sup>c)</sup>Electronic mail: luiz.ziebell@ufrgs.br

statistical mechanics of kappa distributions was recently organized by Livadiotis.<sup>6</sup>

It is already well established that the high energy populations of the electron VDF in the solar wind (the halo and the Strahl) are better modelled with kappa or bi-kappa distributions.<sup>7-9</sup> For both populations, it has been measured  $\kappa_e < 10$  for a wide range of heliocentric distances, ranging from 0.3 AU (Astronomical Units) to nearly 4 AU. In fact, the value of  $\kappa_e$  reduces with distance, showing that the electrons in the solar wind are in a constant process of departure from thermal equilibrium as the solar wind propagates through the interplanetary space.

The observed distributions of the major ion species in the solar wind and some physical properties associated with the shape of the VDFs have also been analysed employing kappa distributions. Detailed discussions and a longer list of publications can be found in Refs. 10 and 11. It has been verified that the ion VDFs are also well modelled with typical values of  $\kappa_i \lesssim 5$ .<sup>12</sup>

Therefore, one must conclude that a full picture of the plasma instabilities operating in the solar wind can only be obtained if, in their theoretical description, the superthermal nature of the observed distributions is taken into account.

So far, of the four instabilities listed above, excited by temperature anisotropies in the ion VDFs, only those that occur in parallel-propagating modes (MTSI and PFH) have been systematically studied when  $\kappa$  distributions are involved.<sup>13-21</sup> The reader is referred to a recent review by Viñas *et al.*<sup>22</sup> for a detailed theoretical account and further references.

By comparison, studies regarding instabilities that are excited by  $\kappa$ VDFs and that occur at oblique angles relative to the IMF are scant. One line of research has been focused on the development of computer codes that numerically evaluate the dielectric tensor of kappa distributions and solve the dispersion equation, thereby obtaining the dispersion relations of the several wavemodes and their associated damping/growth rates with an *ab initio* numerical procedure.<sup>23-25</sup>

Another line has emphasized the derivation of analytical and closed-form expressions for the dielectric tensor of a (bi-)kappa VDF. A first contribution considered the effect of the  $\kappa$ VDF on the propagation and damping of highly oblique dispersive Alfvén waves in the Earth's magnetosphere.<sup>26</sup> Further contributions provided the closed-form expressions for the dielectric tensor of an isotropic kappa plasma (Ref. 27, hereafter called Paper I) and a bi-kappa plasma (Ref. 28, hereafter called Paper II). Whenever possible, the derivation of analytical and closed-form expressions for the dielectric tensor is desirable, because they provide important information about the mathematical properties of the dispersion relations and allow the derivation of the dispersion equations for specific normal modes of propagation.

In this work, we will employ the formulation provided in Papers I and II in order to derive a dispersion equation suitable for the study of the oblique firehose instability excited by a bi-kappa plasma. The OFH, first discovered by Yoon *et al.*<sup>29</sup> and later found again by Hellinger and Matsumoto,<sup>30</sup> is an instability occurring in low-frequencies and at oblique angles, commonly associated with dispersive

Alfvén waves.<sup>26,31</sup> However, as we shall see below, the OFH is in fact an absolute instability associated with a nonpropagating mode. Here, we will derive a dispersion equation valid for plasmas with moderate values of the ion beta parameter and show some numerical results. In order to implement the dispersion relation solver, several new mathematical properties of the special functions occurring in a kappa plasma were obtained, which were not presented in Papers I and II. Consequently, in this work we will present some typical solutions of the dispersion equation and reserve a more comprehensive and detailed analysis of the instability for a future publication.

The plan of the paper is as follows. In Sec. II, the specific dispersion equation is obtained. In Sec. III, the new mathematical properties for the special functions are derived. Then, in Sec. IV, we present some solutions of the dispersion equation, which show the occurrence of the OFH. Finally, in Sec. V, we present our conclusions.

## II. DISPERSION EQUATION FOR A HIGH-BETA BI-KAPPA PLASMA

The general form of the dielectric tensor for a magnetized bi-kappa plasma can be found in paper II, Eqs. (2) and (3). For the present application, we will employ the kappa velocity distribution function ( $\kappa$ VDF) introduced first by Summers and Thorne,<sup>32</sup> which can be obtained from the general form adopted in Papers I and II by setting the parameters  $\alpha = 1$  and  $w_{\parallel(\perp)s}^2 = (1 - 3/2\kappa_s)v_{T\parallel(\perp)s}^2$ , where  $s = e, i, \dots$  denotes the plasma species/population and  $v_{T\parallel(\perp)s}^2 = 2T_{\parallel(\perp)s}/m_s$  is the thermal velocity squared of the same species. With this particular choice, the explicit expression of the  $\kappa$ VDF is obtained from (I.1) [i.e., Eq. (1) of paper I] or from (II.1) and is given by

$$f_s(\mathbf{v}) = A_s^{(\kappa_s)} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\kappa_s w_{\parallel s}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{\kappa_s w_{\perp s}^2} \right)^{-(\kappa_s+1)}$$

$$A_s^{(\kappa_s)} = \frac{1}{\pi^{3/2} w_{\parallel s} w_{\perp s}^2 \kappa_s^{3/2} \Gamma(\kappa_s - 1/2)}, \quad \left( \kappa_s > \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

In accordance with the particular choices of the parameters  $\alpha$  and  $w_{\parallel(\perp)s}$  adopted here, the same settings must be imposed on the general expressions for the dielectric tensor and the kappa plasma functions discussed in Papers I and II.

The particular form of the  $\kappa$ VDF in (1) is the model more frequently employed in the literature for reasons that have been discussed at length in Ref. 26 and in Papers I and II.

Among the several new expressions introduced by Papers I and II regarding the physical properties of the propagation of electromagnetic/electrostatic waves and wave-particle interactions in a kappa plasma, for any combination of particle species and wave modes, frequency and polarization, a great amount of space was dedicated to the discussion of the mathematical properties and numerical evaluation of several special functions, namely, the *kappa* (or *superthermal*) *plasma dispersion function*  $Z_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ , the *kappa plasma gyroradius function*  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , and the *two-variables kappa plasma functions*  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ . The reader is

referred to Papers I and II for the definitions of these functions and for the mentioned properties. Some new mathematical formulas and properties for the same functions, developed for the present application, are presented in Sec. III.

In order to reduce the amount of algebra, we will first define the quantity

$$1_{\kappa}^{(\beta)} = \frac{\Gamma(\kappa + \beta - 1)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\kappa - 1/2)},$$

which is such that  $1_{\kappa}^{(\beta)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 1$ , and then define the following form for the kappa plasma gyroradius function:

$$H_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = 1_{\kappa}^{(\beta+1)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(1,\beta)}(\mu).$$

We will also employ hereafter the shorthand notation  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi)$ , which implicitly assumes that we are taking the same functions with  $\alpha = 1$ .

Given a plasma species  $s$  composed of particles with mass  $m_s$ , electric charge  $q_s$ , and number density  $n_s$ , we start by taking the general form of the dielectric tensor in (II.2,3) and make the change  $n \rightarrow -n$  for all the terms involving negative values of the harmonic index  $n$ , thereby obtaining

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\mu_s} (A_{ns,\kappa} + A_{-ns,\kappa}), \quad (2a)$$

$$\varepsilon_{xy} = i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \partial_{\mu_s} (A_{ns,\kappa} - A_{-ns,\kappa}), \quad (2b)$$

$$\varepsilon_{xz} = - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 k_{\perp} w_{\parallel s}}{\omega^2 2\Omega_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mu_s} (B_{ns,\kappa} - B_{-ns,\kappa}), \quad (2c)$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[ C_{0s,\kappa} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{ns,\kappa} + C_{-ns,\kappa}) \right], \quad (2d)$$

$$\varepsilon_{yz} = i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 k_{\perp} w_{\parallel s}}{\omega^2 2\Omega_s} \left[ \partial_{\mu_s} B_{0s,\kappa} + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{\mu_s} (B_{ns,\kappa} + B_{-ns,\kappa}) \right], \quad (2e)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 v_{T\perp s}^2}{\omega^2 v_{T\perp s}^2} \left[ \xi_{0s} B_{0s,\kappa} + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{ns} B_{ns,\kappa} + \xi_{-ns} B_{-ns,\kappa}) \right], \quad (2f)$$

where  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) are the components of the dielectric tensor, which obeys the usual symmetry relations  $\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx}$ ,  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ , and  $\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy}$ . Also,  $\partial_{\mu} = \partial/\partial\mu$ ,

$$\mu_s = \frac{k_{\perp}^2 w_{\perp s}^2}{2\Omega_s^2} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa_s}\right) \frac{k_{\perp}^2 v_{T\perp s}^2}{2\Omega_s^2},$$

$$\xi_{ns} = \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{\parallel} w_{\parallel s}} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{\parallel} v_{T\parallel s}},$$

and  $\omega_{ps}^2 = 4\pi n_s q_s^2/m_s$  is the squared plasma and  $\Omega_s = q_s B_0/m_s c$  the cyclotron frequencies of species  $s$  for a plasma embedded in a uniform ambient magnetic induction vector  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ . Additionally,  $c$  is the light speed in vacuum

and  $\omega$  and  $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z}$  are the usual (angular) frequency and wave vector of oscillations propagating in the plasma.

In (2a)–(2f), the quantities  $A$ ,  $B$ , and  $C$  are defined as

$$A_{ns,\kappa} = \xi_{0s} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3a)$$

$$B_{ns,\kappa} = (\xi_{0s} - A_s \xi_{ns}) \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3b)$$

$$C_{ns,\kappa} = \xi_{0s} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(2)}(\mu_s, \xi_{ns}) + \frac{1}{2} A_s \partial_{\xi_{ns}} \mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(1)}(\mu_s, \xi_{ns}), \quad (3c)$$

where

$$\mathcal{W}_{n,\kappa_s}^{(\beta)}(\mu_s, \xi_{ns}) = \frac{n^2}{\mu_s} \mathcal{Z}_{n,\kappa_s}^{(\beta)}(\mu_s, \xi_{ns}) - 2\mu_s \mathcal{Y}_{n,\kappa_s}^{(\beta)}(\mu_s, \xi_{ns}).$$

$A_s = 1 - T_{\perp s}/T_{\parallel s}$  is the temperature anisotropy parameter for species  $s$ , and  $\partial_{\xi} = \partial/\partial\xi$ .

In the present application, we are interested in low-frequency ( $\omega \ll |\Omega_s|$ ) and long-wavelength ( $k_{\parallel}^2 v_{T\parallel s}^2 \ll \Omega_s^2$ ) waves propagating in oblique directions relative to  $\mathbf{B}_0$ . In such a situation,  $\omega_{ps}^2/\omega^2 \gg \omega_{ps}^2/\Omega_s^2$ , where

$$\frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2} = \frac{n_s m_s c^2}{n_i m_i v_A^2},$$

with  $s = i$  referring to the ion species and with the squared Alfvén speed  $v_A^2 = B_0^2/4\pi n_i m_i$ . Hence, for an electron-ion plasma, if at least we have  $(m_e/m_i)(c^2/v_A^2) \simeq 1$ , then  $\omega_{ps}^2/\omega^2 \gg 1$  and we can neglect, as a first approximation, the displacement current terms (the unity) in the diagonal components of the dielectric tensor (2).

Now we notice that given the (squared) particle gyroradius (or Larmor radius)  $\rho_s^2 = v_{T\perp s}^2/2\Omega_s^2 = T_{\perp s}/m_s \Omega_s^2$ , the quantity  $\mu_s$  can be written as  $\mu_s = (1 - 3/2\kappa_s) k_{\perp}^2 \rho_s^2$ . Among the several low-frequency wave modes observed in the solar wind and Earth's magnetosphere, of particular importance are the dispersive Alfvén waves (DAW).<sup>26,31</sup> In regions where the plasma thermal effects on the wave dispersion cannot be ignored, the DAW are known as the kinetic Alfvén waves (KAW). Measuring the thermal effect with the parallel/perpendicular plasma beta parameter  $\beta_{\parallel(\perp)s} = 8\pi n_s T_{\parallel(\perp)s}/B_0^2$ , the dispersion relation of KAW propagating in an isotropic Maxwellian plasma with moderate values of the electron beta ( $m_e/m_i \ll \beta_e \leq 1$ ) is<sup>31</sup>

$$\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} \approx 1 + k_{\perp}^2 \left( \rho_a^2 + \frac{3}{4} \rho_i^2 \right),$$

where  $\rho_a^2 = T_e/m_i \Omega_i^2$  is the ion-acoustic gyroradius. Hence, for the ions, an estimate on the magnitude of the parameter  $\mu_i$  for KAW is given by

$$\mu_i = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2\kappa_i}\right) \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{pi}^2} \beta_{\perp i} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2\kappa_i}\right) \frac{\omega^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 k_{\parallel}^2} \beta_{\perp i}.$$

Therefore, even for low-frequency Alfvén waves, the parameter  $\mu_i$  can be small but finite when the ion beta is large and/or the KAW is propagating at large angles relative to  $\mathbf{B}_0$ .

Moreover, since we are assuming  $\omega \ll |\Omega_s|$  and  $k_{\parallel}^2 v_{T\parallel s}^2 \ll \Omega_s^2$ , the typical  $|\xi_{ns}|$  for  $n \geq 1$  is supposed to be larger than unity by several orders of magnitude. In this situation, we can employ in the coefficients  $A_{ns,\kappa}$ ,  $B_{ns,\kappa}$ , and  $C_{ns,\kappa}$  the asymptotic expansions given in (II.28a,b) for the functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu, \xi)$ , with their derivatives given by (II.22) and (11), keeping only the leading terms in the expansions. Then, defining the small parameters  $x = \omega/n\Omega_s$  and  $\epsilon = k_{\parallel} w_{\parallel s}/n\Omega_s$  for  $n \geq 1$ , expanding the combinations of the coefficients in (2) and (3) in powers of  $x$  and  $\epsilon$  and keeping only the lowest-order contributions, one obtains, after some algebra

$$A_{ns,\kappa} + A_{-ns,\kappa} \approx \frac{2\omega^2}{n^2 \Omega_s^2} \left[ \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(3/2)}(\mu_s) + \frac{1}{2} A_s \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(1/2)}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{\omega^2} \right],$$

$$A_{ns,\kappa} - A_{-ns,\kappa} \approx \frac{2\omega}{n\Omega_s} \left[ \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(3/2)}(\mu_s) + \frac{1}{2} (1 + 2A_s) \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(1/2)}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{n^2 \Omega_s^2} \right],$$

$$B_{ns,\kappa} + B_{-ns,\kappa} \approx 2(A_s + 1) \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(1/2)}(\mu_s) \frac{k_{\parallel} w_{\parallel s}}{n\Omega_s} \frac{\omega}{n\Omega_s},$$

$$B_{ns,\kappa} - B_{-ns,\kappa} \approx 2 \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(1/2)}(\mu_s) A_s \frac{k_{\parallel} w_{\parallel s}}{n\Omega_s},$$

$$C_{ns,\kappa} + C_{-ns,\kappa} \approx 2 \mathbf{G}_{n,\kappa_s}^{(3/2)}(\mu_s) \frac{\omega^2}{n^2 \Omega_s^2} + A_s \mathbf{G}_{n,\kappa_s}^{(1/2)}(\mu_s) \frac{k_{\parallel}^2 w_{\parallel s}^2}{n^2 \Omega_s^2},$$

$$\xi_{ns} B_{ns,\kappa} + \xi_{-ns} B_{-ns,\kappa} \approx -2 \mathbf{H}_{n,\kappa_s}^{(1/2)}(\mu_s) A_s,$$

where

$$\mathbf{G}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = \frac{n^2}{\mu} \mathbf{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) - 2\mu \mathbf{H}_{n,\kappa}^{(\beta-1)'}(\mu).$$

Notice that the above approximations are only used for the terms with harmonic  $n \neq 0$ . In the expressions for  $A_{0s,\kappa}$ ,  $B_{0s,\kappa}$ , and  $C_{0s,\kappa}$ , we have kept the full thermal effects for the kappa plasma functions.

Inserting these approximations back into (2), we observe that each component of the dielectric tensor contains a sum over  $n \geq 1$  of the function  $\mathbf{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu)$  or its derivative. Making use of the identity (II.10), we can establish the sum rule

$$\sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = 1_{\kappa}^{(\beta)},$$

whereby we can define the auxiliary functions

$$H_{1,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = \frac{1_{\kappa}^{(\beta)} - \mathbf{H}_{0,\kappa}^{(\beta)}(\mu)}{\mu}, \quad (4a)$$

$$H_{2,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_{n,\kappa}^{(\beta)'}(\mu)}{n^2}, \quad (4b)$$

which were obtained by also making use of the property  $\mathbf{H}_{-n,\kappa}^{(\beta)}(\mu) = \mathbf{H}_{n,\kappa}^{(\beta)}(\mu)$ . Additionally, by virtue of (I.21) and the

identity found at the top of page 4 of Paper II, we have  $H_{1,\kappa}^{(\beta)}(0) = H_{2,\kappa}^{(\beta)}(0) = 1_{\kappa}^{(\beta-1)}$ .

Apropos, the Maxwellian limits of functions  $H_{1,\kappa}^{(\beta)}$  and  $H_{2,\kappa}^{(\beta)}$  are

$$H_1(\mu) = \frac{1 - \mathcal{H}_0(\mu)}{\mu} = 1 - \frac{3}{4}\mu + \frac{5}{12}\mu^2 + \dots$$

$$H_2(\mu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{H}'_n(\mu)}{n^2} = 1 - \frac{15}{8}\mu + \frac{245}{144}\mu^2 + \dots,$$

where  $\mathcal{H}_n(\mu) = e^{-\mu} I_n(\mu)$ . The small gyroradius expansion of  $H_1(\mu)$  presented above is well known and easily obtained from the properties of the modified Bessel function. However, the function  $H_2(\mu)$  has always been presented in closed form and, to the best of the authors' knowledge, no series expansion was known in the literature (see, e.g., Refs. 29 and 31). The derivation of the series expansion for  $H_2(\mu)$  will be given in a future publication.

Finally, considering a 2-species electron-ion plasma, we define the following parameters, which are inspired by and generalize the corresponding parameters given in Ref. 29:

$$\epsilon_{\kappa}^{(\beta)} = H_{1,\kappa_i}^{(\beta)}(\mu_i), \quad (5a)$$

$$\epsilon_{\kappa}^{(\beta)'} = \epsilon_{\kappa}^{(\beta)} - 2\mu_i H_{2,\kappa_i}^{(\beta-1)}(\mu_i), \quad (5b)$$

$$\hat{\epsilon}_{\kappa} = - \left[ \frac{\mathbf{Z}_{\kappa_e}^{(0)'}(\xi_{0e})}{\beta_{\parallel e,\kappa}} + \frac{1}{\beta_{\parallel i,\kappa}} \partial_{\xi_{0i}} \mathbf{Z}_{0,\kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \right] \frac{\beta_{\perp i,\kappa}}{2\mu_i}, \quad (5c)$$

$$\gamma_{\kappa} = \frac{1}{2} \left( \beta_{\parallel e} A_e + \beta_{\parallel i,\kappa} A_i \epsilon_{\kappa}^{(1/2)} - 2 \right) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2}, \quad (5d)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{\kappa} = & \frac{1}{2} \left( \beta_{\parallel e} A_e + \beta_{\parallel i,\kappa} A_i \epsilon_{\kappa}^{(1/2)'} - 2 \right) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2} \\ & - \left[ 1 + \beta_{\perp e,\kappa} \left( 1_{\kappa_e}^{(-1/2)} + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp e,\kappa}}{\beta_{\parallel e,\kappa}} \mathbf{Z}_{\kappa_e}^{(-2)'}(\xi_{0e}) \right) \right. \\ & \left. - \beta_{\perp i,\kappa} \left( \mathbf{H}_{0,\kappa_i}^{(1/2)'}(\mu_i) + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp i,\kappa}}{\beta_{\parallel i,\kappa}} \partial_{\xi_{0i}} \mathcal{Y}_{0,\kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \right) \right] \frac{2\mu_i}{\beta_{\perp i,\kappa}}, \end{aligned} \quad (5e)$$

$$\eta_{\kappa} = 1_{\kappa_e}^{(1/2)} + \mathbf{H}_{0,\kappa_i}^{(3/2)'}(\mu_i) - \frac{1}{2} (1 + 2A_i) \beta_{\parallel i,\kappa} H_{2,\kappa_i}^{(1/2)}(\mu_i) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2}, \quad (5f)$$

$$\begin{aligned} \eta'_{\kappa} = & - \frac{\beta_{\perp e,\kappa}}{2\beta_{\parallel e,\kappa}} \mathbf{Z}_{\kappa_e}^{(-1)'}(\xi_{0e}) - \frac{\beta_{\perp i,\kappa}}{2\beta_{\parallel i,\kappa}} \partial_{\mu_i} \partial_{\xi_{0i}} \mathbf{Z}_{0,\kappa_i}^{(1)}(\mu_i, \xi_{0i}) \\ & - \frac{1}{2} \beta_{\parallel i,\kappa} (1 + A_i) H_{2,\kappa_i}^{(1/2)}(\mu_i) \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\Omega_i^2}, \end{aligned} \quad (5g)$$

where we have also defined the kappa-modified beta parameters as

$$\beta_{\parallel(\perp)s,\kappa} = \left( 1 - \frac{3}{2\kappa_s} \right) \beta_{\parallel(\perp)s} = \frac{\beta_{\parallel(\perp)s}}{1_{\kappa_s}^{(-1/2)}}.$$

We must also point out that since  $\mu_e \ll \mu_i$  by a factor of order  $m_e/m_i$ , we have kept in parameters (5a)–(5g) the



lowest-order gyroradius contribution from the electrons, i.e.,  $H_{1,\kappa_e}^{(\beta)}(\mu_e) \approx H_{2,\kappa_e}^{(\beta)}(\mu_e) \approx 1_{\kappa_e}^{(\beta-1)}$ .

The parameters (5a)–(5g) are identified within the dispersion equation  $\det\Lambda = 0$ , where the elements of the matrix  $\Lambda$  are

$$\Lambda_{ij} = \frac{c^2}{\omega^2} (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = x, y, z).$$

After some algebraic manipulation, during the course of which some other terms that are of order  $m_e/m_i$  are neglected, one notices that one root  $\omega^2 \approx 0$  can be factored out and the remaining equation can be written in transcendental form as

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^4 + \left[ \frac{1}{\epsilon_\kappa^{(3/2)'} } \left( \gamma'_\kappa - \frac{\eta_\kappa^2}{\epsilon_\kappa^{(3/2)}} - \frac{\eta_\kappa^2}{\hat{\epsilon}_\kappa} \right) \right. \\ \left. + \gamma_\kappa \left( \frac{1}{\epsilon_\kappa^{(3/2)}} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_\kappa} \right) \right] \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 + \frac{\gamma_\kappa}{\epsilon_\kappa^{(3/2)'}} \\ \times \left[ \gamma'_\kappa \left( \frac{1}{\epsilon_\kappa^{(3/2)}} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_\kappa} \right) - \frac{(\eta_\kappa - \eta'_\kappa)^2}{\epsilon_\kappa^{(3/2)} \hat{\epsilon}_\kappa} \right] = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Some of the particular cases of Eq. (6) are discussed below.

### A. Maxwellian limit

If one takes the limits  $\kappa_e \rightarrow \infty$  and  $\kappa_i \rightarrow \infty$ , one observes that  $1_{\kappa}^{(\beta)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 1$ , and the limits of the kappa plasma functions are given in Papers I and II. In this case, the dispersion Eq. (6), as well as the parameters (5a-g), reduces to the corresponding forms given by Ref. 29, as expected.

### B. Limit of parallel propagation

In the limit  $k_\perp \rightarrow 0$  or, equivalently, the limit of zero ion gyroradius, we have  $\mu_i \rightarrow 0$ , and we have to employ the limiting forms given by (I.21), (II. 23), the expression given in page 04 of Paper II and (12). As a result, the dispersion Eq. (6) reduces to

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{\Omega_i^2} + \eta \frac{\omega}{\Omega_i} + \gamma\right) \left(\frac{\omega^2}{\Omega_i^2} - \eta \frac{\omega}{\Omega_i} + \gamma\right) = 0, \\ \gamma = \frac{1}{2} (\beta_{\parallel e} A_e + \beta_{\parallel i} A_i - 2) \frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\Omega_i^2}, \\ \eta = -\frac{1}{2} (1 + 2A_i) \beta_{\parallel i} \frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\Omega_i^2}, \end{aligned}$$

which is exactly the same solution obtained by Ref. 29.

In this case, the dispersion relations are the roots of polynomials that only depend on the wavenumber, the plasma betas, and the anisotropy parameters. In other words, the dispersion Eq. (6) predicts that the kappa parameters  $\kappa_e$  and  $\kappa_i$  do not influence the parallel firehose instability.

An exact treatment of the PFH shows a different picture. Whereas the real part of the dispersion relation is largely independent on the kappas, the growth rate does depend on  $\kappa_e$  and,

mostly, on  $\kappa_i$ . The reason why the treatment presented here is not able to account for this fact lies with the assumptions made about the magnitudes of the quantities  $|\xi_{\pm e}|$  and  $|\xi_{\pm i}|$ . When  $k_\perp = 0$ , the ion-firehose occurs in the right-handed mode (the magnetosonic mode). A careful examination of the unstable range shows that the nonresonant approximations  $|\xi_{\pm e}| \gg 1$  and  $|\xi_{+i}| \gg 1$  are still valid, but  $|\xi_{-i}| \simeq 1$ . Hence, for the parallel firehose instability the kinetic effects due to this quantity cannot be ignored and the growth rate is no longer given by the simple root of a polynomial, as above. A detailed account of the PFH in a bi-kappa plasma is given by Ref. 22.

### C. Limit of perpendicular propagation

In the converse case ( $k_\parallel \rightarrow 0$ ), one must consider in (5a)–(5g) the asymptotic forms of the kappa plasma functions for the limits  $\xi_{0e}, \xi_{0i} \rightarrow \infty$ . For the function  $Z_\kappa^{(\beta)}(\xi)$ , one can notice in the expansion given by the expression at page 14 of Paper I that the dominant term is  $Z_\kappa^{(\beta)}(\xi) \simeq -1_{\kappa}^{(\beta+1/2)}/\xi$ . For the functions  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$ , one employs again the dominant terms of expansions (II.28a,b).

After some manipulations, Eq. (6) factors into two branches:  $\omega^2 = 0$  and

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon_\kappa^{(3/2)'}} \left( d_{3\kappa} + \frac{d_{4\kappa}^2}{\epsilon_\kappa^{(3/2)}} \right), \quad \text{where} \\ d_{3\kappa} = \left[ 1 + \beta_{\perp e} - \beta_{\perp i, \kappa} \mathbf{H}_{0, \kappa_i}^{(1/2)'}(\mu_i) \right] \frac{2\mu_i}{\beta_{\perp i, \kappa}}, \\ d_{4\kappa} = 1_{\kappa_e}^{(1/2)} + \mathbf{H}_{0, \kappa_i}^{(3/2)' }(\mu_i). \end{aligned}$$

In the Maxwellian limit, the expression of the nonzero mode, in the lowest-order of a small gyroradius expansion, is

$$\omega \simeq \sqrt{1 + \beta_{\perp e} + \beta_{\perp i} k_\perp v_A},$$

which corresponds to the dispersion relation of compressive Alfvén waves. These waves are always damped. On the other hand, the nonpropagating mode with  $\omega^2 = 0$  turns out to be the unstable mode.

For any combination of  $(k_\perp, k_\parallel)$ , the wave modes are obtained from the numerical solution of Eq. (6). Several new properties of the kappa plasma functions, not included in Papers I and II, were needed in order to implement the numerical solution of the dispersion equation. These properties are discussed in Sec. III, and some numerical solutions are presented in Sec. IV.

## III. NEW EXPRESSIONS FOR THE KAPPA PLASMA SPECIAL FUNCTIONS

Several new properties and representations for the kappa special functions are developed here.

### A. Symmetry properties of the superthermal plasma dispersion function

The superthermal (or kappa) plasma dispersion function ( $\kappa$ PDF)  $Z_\kappa^{(\alpha, \beta)}(\xi)$  was initially defined in (I.11) and several properties were presented in Papers I and II. Here, we will show its symmetry properties, which will be important for

the new expansions of the functions  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  to be presented below.

Consider first the argument  $\xi = \xi_r + i\xi_i \in \mathbb{C}$ . If  $\xi_i > 0$ , one of the possible representations of  $Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  is given by (I.13), while its analytical continuation for  $\xi_i \leq 0$  is given by (I.A1). Hence, we can directly establish the first identity, when  $\xi_i > 0$

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(-\xi) + Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(\xi) &= 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{-\beta-1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)}. \end{aligned} \quad (7a)$$

As discussed in Papers I and II, when  $\alpha = \beta = 1$ , the function  $Z_\kappa^{(1,1)}(\xi) \equiv Z_\kappa(\xi)$  reduces to the dispersion function first introduced by Summers and Thorne<sup>32</sup> and largely discussed by Mace and Hellberg.<sup>33</sup> In this case, the symmetry property above reduces to Eq. (27) of Ref. 33. In the Maxwellian limit ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), the same property reduces to the known identity for the Fried and Conte function<sup>34</sup>

$$Z(-\xi) + Z(\xi) = 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2}, \quad (\xi_i > 0).$$

Now, let us consider the representation (I.14), which is valid in the principal branch  $-\frac{1}{2}\pi < \arg(\xi + i\sqrt{\kappa}) < \frac{3}{2}\pi$  (i.e., the branch line runs along  $-i\sqrt{\kappa} < \xi < -i\infty$ ). This is the generalization of the result given by Eq. (17) of Ref. 33. If we denote by  $\bar{\xi} = \xi_r - i\xi_i$  the operation of complex conjugation, we immediately observe that

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(-\bar{\xi}) &= i \frac{\kappa^{-\beta-1/2}\Gamma(\lambda-1/2)}{(\lambda-1)\Gamma(\sigma-3/2)} \\ &\quad \times {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} 1, 2(\lambda-1) \\ \lambda \end{matrix}; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{i\bar{\xi}}{\kappa^{1/2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

However, given that<sup>35</sup>

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} \bar{a}, \bar{b} \\ \bar{c} \end{matrix}; \bar{z} \right) = \overline{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z \right)} \quad (z \notin (1, \infty)),$$

which is a property shared by all hypergeometric functions in their principal branches, it follows that

$$Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(\bar{\xi}) = \overline{Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(-\xi)}. \quad (7b)$$

This result also reduces to the known property  $Z(\bar{\xi}) = -\overline{Z(-\xi)}$ .

Finally, by combining properties (7a) and (7b), we obtain, for  $\xi_i > 0$

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(\bar{\xi}) &= \overline{Z_\kappa^{(\alpha,\beta)}(\xi)} \\ &+ 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{-\beta-1/2}\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-1)}, \end{aligned} \quad (7c)$$

which, when  $\kappa \rightarrow \infty$ , reduces to

$$Z(\bar{\xi}) = \overline{Z(\xi)} + 2i\sqrt{\pi}e^{-\bar{\xi}^2}.$$

## B. The superthermal plasma gyroradius function

The kappa plasma gyroradius function ( $\kappa$ PGF)  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  was initially defined by (I.20) and its more general representation was given by (I.22) in terms of the Meijer  $G$ -function. The definition and properties of the  $G$ -function can be seen in Appendix B of Paper I or in the references given therein. Several properties of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  and an associated function are discussed in Papers I and II. Here, we will present some new properties of the  $\kappa$ PGF.

### 1. Symmetry properties

In some of the representations shown in Papers I and II as well as in the present work, the function  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  needs to be evaluated for complex  $z$ . Looking at the representations (I.23, 24), respectively, valid for noninteger/integer values of  $\lambda = \kappa + \alpha + \beta$ , and taking into account the symmetry properties of elementary and Bessel functions, one readily concludes (i) that the  $\kappa$ PGF is a multivalued function with the origin as a branch point and with a branch cut along the negative real axis and (ii) that in the principal branch

$$\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\bar{z}) = \overline{\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)}, \quad (|\arg z| < \pi). \quad (8)$$

### 2. Series expansion in the integer case

As it was argued at length in Papers I and II, the function  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  can be represented in terms of power series only when  $\lambda = \kappa + \alpha + \beta$  is not integer. When  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , the function has a logarithmic term and a representation in terms of modified Bessel functions was given by (I.24) (see Eq. II.7c for the derivatives). Although general, the evaluation of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  via the Bessel functions can be computationally expensive when  $|z| < 1$ , as is the case for the application discussed in this paper. Hence, a suitable series expansion for  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  in the regime of small gyroradius is desired.

The desired representation is obtained via the residue theorem. Using (I.22) and (I.B10), the function  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  can be written as

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\kappa}{\Gamma(\lambda-1)} F_{n,\lambda-2}(2\kappa z), \\ F_{n,\theta}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f_{n,\theta}(s) z^{-s} ds, \\ f_{n,\theta}(s) &= \frac{\Gamma(\theta+s)\Gamma(n+s)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(n+1-s)}, \end{aligned} \quad (9a)$$

where the integration contour  $L$  is such that all poles of  $\Gamma(\theta+s)$  and  $\Gamma(n+s)$  lie to the right of  $L$ , whereas the poles of  $\Gamma(1/2-s)$  lie to the left. In this case, the residues of the integration are given only by the poles of the first two gamma functions.

If  $m \in \mathbb{Z}$ , when  $\theta = m$  (for  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ), the poles of  $f_{n,\theta}(s)$  occur at  $s = -m - r$  and  $s = -n - r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ). Hence, there are two possibilities: (i)  $m < n$  and (ii)  $m \geq n$  that will be treated separately.

1.  $m < n$ : the function  $f_{n,\theta}(s)$  has simple poles at  $s = -m, -m-1, \dots, -n+1$  and double poles at

$s = -n, -n - 1, \dots$ . The residues of the simple poles can be evaluated with the identity<sup>36</sup>

$$\Gamma(z) = \frac{(-)^k}{k!(z+k)} + \frac{(-)^k}{k!} \psi(k+1) + \mathcal{O}[(z+k)],$$

where  $\psi(z)$  is the psi or digamma function. This expansion is valid for  $z \simeq -k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Therefore

$$\text{Resf}_{n,\theta}(s = -\ell) = \sqrt{\pi}(-)^m \frac{\Gamma(n-\ell)(1/2)_\ell}{(1)_{n+\ell}(1)_{\ell-m}} (-z)^\ell,$$

where  $\ell = m, m+1, \dots, n-1$  and  $(a)_r = \Gamma(a+r)/\Gamma(a)$  is the Pochhammer symbol.

On the other hand, the double poles are obtained from

$$\text{Resf}_{n,\theta}(s = -\ell) = \lim_{s \rightarrow -\ell} \frac{d}{ds} \left[ (s+\ell)^2 f_{n,\theta}(s) \right],$$

for  $\ell = n, n+1, \dots$ . Given that  $\Gamma'(z) = \psi(z)\Gamma(z)$  and using the identity<sup>37</sup>

$$\psi(z) = -\frac{1}{z+k} + \psi(k+1) + \mathcal{O}[(z+k)],$$

one obtains for the residues

$$\begin{aligned} \text{Resf}_{n,\theta}(s = -\ell) &= \frac{\sqrt{\pi}(1/2)_\ell (-)^{m+n} z^\ell}{(1)_{n+\ell}(1)_{\ell-m}(1)_{\ell-n}} \\ &\times [\psi(\ell-m+1) + \psi(\ell-n+1) \\ &- \psi\left(\frac{1}{2} + \ell\right) + \psi(n+\ell+1) - \ln z]. \end{aligned}$$

2.  $m \geq n$ : now the poles are simple for  $s = -n, \dots, -m+1$  ( $m > n$ ) and double for  $s = -m, -m-1, \dots$ . The evaluation of the residues follows the same lines as in the previous case.

Summing the contributions from all residues, both possibilities can be cast in a single expression for  $F_{n,\theta}(z)$ , resulting finally in

$$\begin{aligned} \frac{F_{n,\theta}(z)}{\sqrt{\pi}} &= \epsilon_\sigma (\sigma-1)! \left(\frac{1}{2}\right)_\nu \frac{z^\nu}{\eta!} \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} \frac{(\nu+1/2)_\ell}{(\eta+1)_\ell (1-\sigma)_\ell} \frac{z^\ell}{\ell!} \\ &- (-)^{\nu} \left(\frac{1}{2}\right)_\mu \frac{(-z)^\mu}{\psi! \sigma!} \\ &\times \left[ (2\gamma + \ln z) {}_1F_2 \left( \begin{matrix} \mu+1/2 \\ \psi+1, \sigma+1 \end{matrix}; z \right) \right. \\ &- \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\mu+1/2)_\ell}{(\psi+1)_\ell (\sigma+1)_\ell} \\ &\left. \times (H_\ell + H_{\psi+\ell} + H_{\sigma+\ell} - H_{\mu-1/2+\ell}) \frac{z^\ell}{\ell!} \right], \end{aligned} \quad (9b)$$

where  $\mu = \max(\theta, n)$ ,  $\nu = \min(\theta, n)$ ,  $\sigma = \mu - \nu$ ,  $\psi = \mu + n$ ,  $\eta = \nu + n$ , and  $\epsilon_\sigma = 1 - \delta_{\sigma,0}$ . In (9b), the quantities  $H_w$  are the harmonic numbers, given by  $H_w = \psi(w+1) + \gamma$ , where  $\gamma = 0.57721\dots$  is Euler's constant. When  $w$  is a nonnegative

integer, the harmonic numbers are  $H_0 = 0$  and  $H_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} k^{-1}$ .

Notice that there are two terms in (9b) that distinguishes the series expansion of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  when  $\lambda$  is the integer from a simple power series expansion of the hypergeometric kind. First, there is a term proportional to  $\ln z$  and second, the last term is a power series but is not hypergeometric.

### C. The two-variable kappa plasma functions

The two-variable kappa plasma functions (2VKPs)  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  were initially defined by (I.26). They describe the dispersive properties of oscillations occurring in a magnetized (bi-)kappa plasma. Since a magnetized plasma described by a  $\kappa$ VDF displays strong correlations between the parallel and perpendicular components of the particles' velocities, the 2VKPs cannot be factored as the product of two simple functions; i.e., there are no functions  $M(\mu)$  and  $N(\xi)$  such that  $\mathcal{Z}(\mu, \xi) = M(\mu)N(\xi)$ , for instance. This point has been argued at length in Ref. 26 and in Papers I and II. Consequently, the simpler representations one can expect for these functions will always be some transcendental series expansion.

#### 1. Symmetry properties

The symmetry properties of the functions  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  and  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$  can be readily derived starting from the integral representations (I.26a,b). For applications to plasma physics,  $\mu > 0$  always but  $\xi$  is in general complex. Hence, the symmetry properties of the 2VKPs are determined by the  $\mathcal{Z}_{\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\xi)$  function.

Consequently, from the symmetry properties (7), one concludes that

$$\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) = \overline{\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, -\xi)}, \quad (10a)$$

$$\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) = -\overline{\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, -\xi)}, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) &= \overline{\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)} \\ &+ 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{-1/2-\beta} \Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-2)} \\ &\times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right) \right], \end{aligned} \quad (10c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \bar{\xi}) &= \overline{\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)} \\ &+ 2i\sqrt{\pi} \frac{\kappa^{1/2-\beta} \Gamma(\lambda-2)}{\Gamma(\sigma-3/2)} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-4)} \\ &\times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{\kappa}\right) \right]. \end{aligned} \quad (10d)$$

For the derivation of (10c) and (10d), we have employed the identities (II.24, 26).

Moreover, it can be easily verified that



$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{-n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi), \\ \mathcal{Y}_{-n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi).\end{aligned}\quad (10e)$$

Henceforth, we will implicitly assume that  $n \geq 0$ .

## 2. Derivative of $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$

As can be observed in the expressions for the dielectric tensor given either by (II.3) or by (2) and (3), one also needs to evaluate  $\partial_\xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ . The expressions for this derivative were not included in Paper II due to an oversight, which will be remedied now.

The procedure is roughly the same as the one described in section C.1 of Paper II for the function  $\mathcal{Z}$ . So, without further ado, we present

$$\begin{aligned}\partial_\xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \left[ \frac{\Gamma(\lambda - 3/2)}{\kappa^\beta \Gamma(\sigma - 3/2)} \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1/2)'}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(\mu, \xi) \right],\end{aligned}\quad (11)$$

with the particular case

$$\partial_\xi \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(0, \xi) = \left( -\delta_{n,0} + \frac{1}{2} \delta_{|n|,1} \right) \mathcal{Z}_\kappa^{(\alpha,\beta-3)'}(\xi). \quad (12)$$

## 3. Power series expansions for large $|\xi|$

Power series expansions for  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{Y}$  were given by (II.25a) and (II.27a), which are formally convergent for  $|\xi| < \sqrt{\kappa}$ . Additionally, other series expansions were given by (II.25c) and (II.27b), which are formally valid for the whole complex plane of  $\xi$ . However, for the range of variations of the physical parameters considered in this work, although the argument  $\mu$  is always small, since it is proportional to the particle's gyroradius, the magnitude of the argument  $\xi = \xi_{0s} = \omega/k_{\parallel} w_{\parallel s}$  can vary from very small (for near-parallel

propagation) to very large (for near-perpendicular propagation). Hence, from the computational point of view it is desirable to have power series expansions for the 2VKPs valid for  $|\xi| > \sqrt{\kappa}$ . These series will now be derived.

We will consider first the function  $\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ . Taking the integral representation (I.26a) and inserting representation (II.15a) for  $\mathcal{Z}_\kappa^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ , we can integrate the last term using identity (II.24) and obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= -2 \frac{\pi^{1/2} \kappa^{-\beta-1/2}}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \frac{\xi}{\sqrt{\kappa}} F_2(\mu, \xi) \\ &\quad + \frac{i\pi^{1/2} \Gamma(\lambda - 1)}{\kappa^{\beta+1/2} \Gamma(\sigma - 3/2)} \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right)^{-(\lambda-2)} \\ &\quad \times \mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left( 1 + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \right], \\ F_2(\mu, \xi) &= \int_0^\infty dx \frac{x J_n^2(\sqrt{2\mu}x)}{(1+x^2/\kappa)^{\lambda-1/2}} \\ &\quad \times G_{2,2}^{1,2} \left[ \frac{\xi^2/\kappa}{1+x^2/\kappa} \middle| \begin{matrix} 0, 3/2 - \lambda \\ 0, -1/2 \end{matrix} \right],\end{aligned}$$

where  $G_{2,2}^{1,2}$  is the Meijer  $G$ -function defined by (I.B10). Using the Mellin-Barnes representation for this function and interchanging the integrations in  $F_2(\mu, \xi)$ , we can integrate on  $x$ , resulting then in

$$\begin{aligned}F_2(\mu, \xi) &= \frac{\kappa}{2\sqrt{\pi}} \frac{\kappa}{\xi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_t} dt \frac{\Gamma(n-t)\Gamma(1/2+t)}{\Gamma(n+1+t)} (2\kappa\mu)^t \\ &\quad \times G_{2,2}^{2,1} \left[ \frac{\kappa}{\xi^2} \middle| \begin{matrix} 0, 1/2 \\ \lambda - 5/2 - t, 0 \end{matrix} \right],\end{aligned}$$

where we have also employed the identity (I.B11a).

Let us now define the auxiliary functions

$$\begin{aligned}h_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_t} dt \frac{\Gamma(n-t)\Gamma(1/2+t)}{\Gamma(n+1+t)} x^t G_{2,2}^{2,1} \left[ y \middle| \begin{matrix} 0, 1/2 \\ \lambda - 5/2 - t, 0 \end{matrix} \right], \\ h_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{L_t} dt \frac{\Gamma(7/2 - \lambda + t)\Gamma(\lambda - 5/2 - t)\Gamma(n-t)\Gamma(1/2+t)}{\Gamma(n+1+t)} x^t G_{2,2}^{1,2} \left[ y \middle| \begin{matrix} 0, 1/2 \\ 0, \lambda - 5/2 - t \end{matrix} \right].\end{aligned}$$

Obviously,  $F_2(\mu, \xi) = h_1(2\kappa\mu, \kappa/\xi^2)$ . Noticing that the integrations in both functions are defined along the same integration contour, we will now evaluate  $h_1 - h_2$ . Introducing again the Mellin-Barnes representations for the  $G$ -functions and simplifying the resulting expression with the help of properties of the gamma function, we obtain, after some amount of algebra

$$\begin{aligned}h_1 - h_2 &= -\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda - 1)}{\kappa} y^{\lambda-5/2} (1+y)^{-(\lambda-2)} \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \frac{x}{2\kappa} \left( 1 + \frac{1}{y} \right) \right], \text{ where} \\ \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\kappa}{\Gamma(\lambda - 1)} G_{2,4}^{2,2} \left[ 2\kappa z \middle| \begin{matrix} \lambda - 5/2, 1/2 \\ \lambda - 5/2, n, -n, \lambda - 2 \end{matrix} \right].\end{aligned}\quad (13)$$

In order to obtain this result, we used representations (I.B9, B10, and B14), which give

$$G_{1,1}^{1,1} \left[ z \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ \lambda - 5/2 - t \end{matrix} \right] = \Gamma(\lambda - 2 - t) z^{\lambda-5/2-t} {}_1F_0 \left( \begin{matrix} \lambda - 2 - t \\ - \end{matrix}; -z \right) = \Gamma(\lambda - 2 - t) z^{\lambda-5/2-t} (1+z)^{-(\lambda-2-t)}.$$

Now, using again (I.B14), we can write  $h_2(x, y)$  as

$$h_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} dt \frac{\Gamma(\lambda - 5/2 - t)\Gamma(n - t)\Gamma(1/2 + t)}{\Gamma(n + 1 + t)} \times x {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, 1/2 \\ 7/2 - \lambda + t \end{matrix}; -y \right).$$

Noticing that in  $F_2(\mu, \xi)$  there is now a term with  $h_2(2\kappa\mu, \kappa/\xi^2)$  and that we are assuming that  $|\xi| > \sqrt{\kappa}$ , we can then formally expand the Gauss function in  $h_2$  according to (I.B4) and identify the remaining integral as a  $G$ -function.

Therefore, we arrive at the desired result

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1)}{\kappa^{1/2+\beta}\Gamma(\sigma - 3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-2)} \\ &\times \left\{ \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] + i\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] \right\} \\ &\frac{\kappa^{-1/2-\beta}}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \frac{\sqrt{\kappa}}{\xi} \mathcal{X}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)} \left( \mu, \frac{\kappa}{\xi^2} \right), \\ \mathcal{X}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_k \mathcal{J}_{n,\kappa,k}^{(\alpha,\beta)}(x) y^k, \\ \mathcal{J}_{n,\kappa,k}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-)^k \kappa}{\sqrt{\pi}} G_{2,4}^{2,2} \left[ \begin{matrix} \lambda - 5/2, 1/2 \\ \lambda - 5/2, n, -n, \lambda - 5/2 - k \end{matrix} \right]. \end{aligned} \tag{14a}$$

Now for the function  $\mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi)$ . Starting from the integral representation (I.26b), using (II.15a, 26) and proceeding in the same manner as above, we obtain the power series expansion

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(\mu, \xi) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 2)}{\kappa^{\beta-1/2}\Gamma(\sigma - 3/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right)^{-(\lambda-4)} \\ &\times \left\{ \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] \right. \\ &\left. + i\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)'} \left[ \mu \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) \right] \right\} \\ &\frac{\kappa^{1/2-\beta}}{\Gamma(\sigma - 3/2)} \frac{\sqrt{\kappa}}{\xi} \partial_{\mu} \mathcal{X}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1)} \left( \mu, \frac{\kappa}{\xi^2} \right), \end{aligned} \tag{14b}$$

where  $\partial_x \mathcal{X}(x, y) \equiv \partial \mathcal{X} / \partial x$ .

The power series (14a) and (14b) are formally valid for  $|\xi| > \sqrt{\kappa}$ . However, there is an additional condition. Since the argument of  $\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  is  $z = \mu(1 + \xi^2/\kappa) \in \mathbb{C}$ , and since the semiaxis  $z < 0$  is a branch line, we must verify when this line can be crossed. This can happen when  $\xi_r \rightarrow 0$  for a fixed  $\xi_i$  in the region outside the hyperbolas  $\xi_i^2 - \xi_r^2 > \kappa$ . The same situation applies for the function  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ .

Consequently, we can impose for the formulas (14a) and (14b) the additional validity condition  $\xi_r \geq 0$ . This is not a hindrance, however, since the analytical continuations of the expansions (14a) and (14b) for the region  $\xi_r < 0$  are evaluated with the symmetry properties (10a)–(10d).

#### 4. Representations for the functions $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ and $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$

The series expansions (14a) and (14b) for large  $|\xi|$  introduced the new associated functions  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  and  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , which require adequate representations for their numerical evaluation. These representations are derived below.

*a. Function  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ .* First of all, we observe in (13) that the function  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  is not defined when  $\lambda$  is half-integer (with  $\lambda = 5/2, 7/2, \dots$ ), and  $\lambda - 5/2 - n = 1, 2, \dots$ <sup>38</sup> In this case, one can either go back to the definition of the  $G$ -function and manipulate the gamma functions or employ the identity<sup>39,40</sup>

$$G_{p,q+2}^{m+1,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ \beta, (b_q), \beta \pm \ell \end{matrix} \right. \right] = (-)^{\ell} G_{p,q+2}^{m+1,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ \beta \pm \ell, (b_q), \beta \end{matrix} \right. \right],$$

$(m \leq q),$

followed by (I.B11a). Proceeding in this way, we can write

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1)} I_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z), \text{ where} \\ I_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \begin{cases} (-)^{n+\lambda-5/2} G_{1,3}^{2,1} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} 1/2 \\ n, -n, \lambda - 2 \end{matrix} \right. \right], & \left( \lambda = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots \right) \\ G_{2,4}^{2,2} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} \lambda - 5/2, 1/2 \\ \lambda - 5/2, n, -n, \lambda - 2 \end{matrix} \right. \right], & \left( \lambda \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots \right). \end{cases} \end{aligned} \tag{15a}$$

We can now develop different representations for  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  depending on  $\lambda$ .

*b. Case  $\lambda = 5/2, 7/2, \dots$*  First of all, writing  $\lambda = 5/2 + m$  ( $m \geq 0$ ), when  $\lambda = 5/2$  we can employ (I.B11b) and write  $I_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  as

$$\begin{aligned} I_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) |_{\lambda=5/2} &= (-)^n G_{1,3}^{2,1} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} 1/2 \\ n, -n, 1/2 \end{matrix} \right. \right] \\ &= (-)^n G_{0,2}^{2,0} \left[ 2\kappa z \left| \begin{matrix} - \\ n, -n \end{matrix} \right. \right] = (-)^n 2K_{2n}(2\sqrt{2\kappa z}), \end{aligned}$$

where we have employed the representation of the modified Bessel function  $K_{\nu}(z)$  in terms of the  $G$ -function.<sup>40</sup>

Then, using the differentiation formula

$$\frac{d^k}{dz^k} \left\{ z^{-b_q} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] \right\} = z^{-b_q-k} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_{q-1}), b_q + k \end{matrix} \right. \right]$$

$(m < q),$

(15b)

it is easy to conclude that

$$I_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = 2(-)^{m+n} u^{1/2+m} \frac{d^m}{du^m} \left[ u^{-1/2} K_{2n}(2\sqrt{u}) \right] \Big|_{u=2\kappa z}.$$

Finally, with the help of the identities<sup>41</sup>

$$K_{\nu+2n}(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\nu+n)_k \left(\frac{2}{z}\right)^k K_{\nu+k}(z),$$

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[ z^{\pm\nu/2} K_{\nu}(a\sqrt{z}) \right] = \left(-\frac{a}{2}\right)^n z^{(\pm\nu-n)/2} K_{\nu\mp n}(a\sqrt{z}),$$

we obtain

$$\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-)^n 2\kappa}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda-1)} \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^{\lambda-5/2} \binom{n}{k} \binom{\lambda-5/2}{\ell} (n)_k \times \left(\frac{1}{2}\right)_{\lambda-\frac{5}{2}-\ell} \frac{K_{k+\ell}(2\sqrt{2\kappa z})}{(2\kappa z)^{(k-\ell)/2}}, \left(\lambda = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right). \tag{15c}$$

c. Case  $\lambda \neq 5/2, 7/2, \dots$  In this case, the function  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  can be expressed as a combination of hypergeometric functions via (I.B14), resulting in

$$\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{(-)^n \sqrt{\pi}\kappa}{\Gamma(\lambda-1)\cos(\pi\lambda)} \left[ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) (2\kappa z)^n \times {}_1\mathfrak{F}_2\left(\begin{matrix} n+1/2 \\ 2n+1, 3+n-\lambda \end{matrix}; 2\kappa z\right) - \Gamma(\lambda-2) (2\kappa z)^{\lambda-5/2} \times {}_2\mathfrak{F}_3\left(\begin{matrix} 1, \lambda-2 \\ \lambda-3/2-n, \lambda-3/2+n, 1/2 \end{matrix}; 2\kappa z\right) \right], \left(\lambda \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right), \tag{15d}$$

where  ${}_p\mathfrak{F}_q(a; b; z)$  is the regularized form of the  ${}_pF_q(a; b; z)$  hypergeometric function [see Eq. (16.2.5) of Ref. 42].

d. Derivative of  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ . When  $\lambda$  is half-integer, we can employ the formula (15b) again to obtain the recurrence relation

$$z\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)'}(z) = (\lambda-2)\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) - (\lambda-1)\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(z), \left(\lambda = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right). \tag{15e}$$

On the other hand, when  $\lambda \neq 5/2, 7/2, \dots$ , one can simply employ the formula<sup>43</sup>

$$\frac{d}{dz} {}_p\mathfrak{F}_q\left(\begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix}; z\right) = \left(\prod_{j=1}^p a_j\right) {}_p\mathfrak{F}_q\left(\begin{matrix} \mathbf{a}+1 \\ \mathbf{b}+1 \end{matrix}; z\right)$$

on (15d). The derivation is straightforward and will not be shown here.

e. Function  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ . Again, the  $G$ -function in the definition of  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$  given by (14a) is not defined when  $\lambda-5/2-n=1, 2, \dots$  Performing the same manipulations mentioned with regard to  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , we can write

$$\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} \mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \text{where } \mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} G_{1,3}^{2,1} \left[ 2\kappa x \left| \begin{matrix} 1/2 \\ \lambda-5/2-k, n, -n \end{matrix} \right. \right], & \left(\lambda = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right) \\ (-)^k G_{2,4}^{2,2} \left[ 2\kappa x \left| \begin{matrix} \lambda-5/2, 1/2 \\ \lambda-5/2, n, -n, \lambda-5/2-k \end{matrix} \right. \right], & \left(\lambda \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right). \end{cases} \tag{16a}$$

f. Case  $\lambda = 5/2, 7/2, \dots$  Some of the formulae already obtained can be employed for the representation of  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x)$ . For instance, we can write  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = \Gamma(\lambda-3/2-k)\mathcal{H}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta-1/2-k)}(z)$  and then use (I.24). However, this is only valid for  $\lambda-5/2-k \geq 0$ .

A better alternative is to identify the definition of  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x)$  with the function  $F_{n,\theta}(z)$  in (9a) and then evaluate the Mellin-Barnes integral using the residue theorem. This procedure will result in a formula similar to (9b), with the caveat that now some of the poles of  $\Gamma(\theta+s)$  are regularized by some of the poles of  $\Gamma(n+1-s)$ , since  $\Gamma(-r+\epsilon)/\Gamma(-p+\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (-)^{r+p} p!/r! (p, r = 0, 1, 2, \dots)$ . As a result, the first line in (9b) is replaced by

$$\epsilon_\sigma \frac{(\sigma-1)!(1/2)_{\nu+\ell_0} z^{\nu+\ell_0}}{(\eta+\ell_0)!\ell_0!(1-\sigma)_{\ell_0}} \times \sum_{\ell=0}^{\sigma-1-\ell_0} \frac{(\nu+1/2+\ell_0)_\ell z^\ell}{(1+\eta+\ell_0)_\ell (1-\sigma+\ell_0)_\ell (1+\ell_0)_\ell},$$

where  $\ell_0 = \max(0, -\mu - \nu)$ .

g. Case  $\lambda \neq 5/2, 7/2, \dots$  Proceeding as per the same case for  $\mathcal{I}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ , we obtain

$$\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z) = (-)^{n+k+1} \frac{\sqrt{\pi}\kappa}{\cos \pi\lambda} \left[ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) (2\kappa z)^n \times {}_1\mathfrak{F}_2\left(\begin{matrix} n+1/2 \\ 2n+1, n+7/2-\lambda+k \end{matrix}; 2\kappa z\right) - \Gamma(\lambda-2) (2\kappa z)^{\lambda-5/2} \times {}_2\mathfrak{F}_3\left(\begin{matrix} 1, \lambda-2 \\ \lambda-3/2-n, \lambda-3/2+n, k+1 \end{matrix}; 2\kappa z\right) \right], \left(\lambda \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right). \tag{16b}$$

h. Derivative of  $\mathcal{J}_{n,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(z)$ . For half-integer  $\lambda$ , we employ the differentiation formula

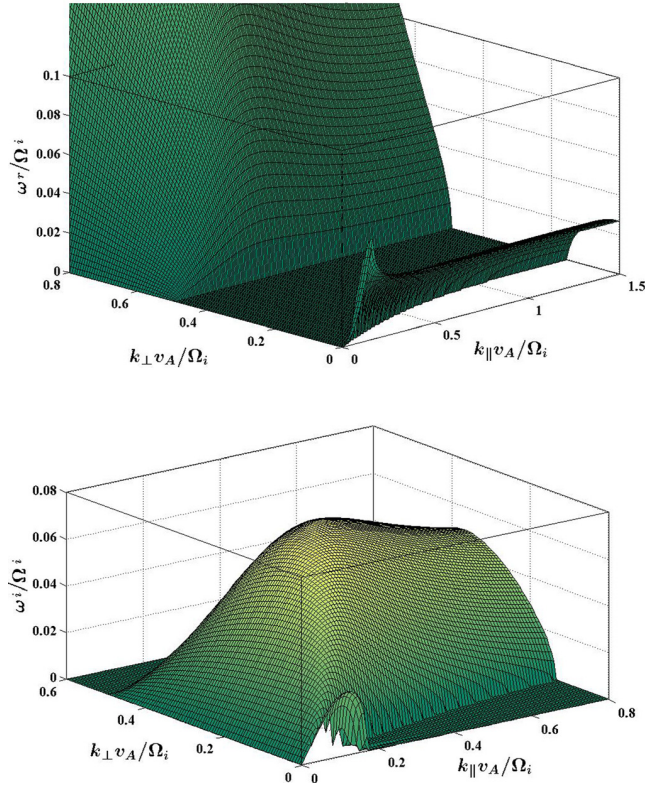


FIG. 1. Plots of the real frequency (top panel) and of the growth rate (bottom panel) of the unstable mode versus wave number for  $\beta_e = 2$  ( $T_{\parallel e} = T_{\perp e}$ ),  $\beta_{\parallel i} = 3$ ,  $\beta_{\perp i} = 0.8$  and  $\kappa_e = \kappa_i = 5$ .

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left[ z \begin{vmatrix} (a_p) \\ (b_q) \end{vmatrix} \right] \right\} = (\sigma + b_1) z^{\sigma-1} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \begin{vmatrix} (a_p) \\ (b_q) \end{vmatrix} \right] - z^{\sigma-1} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \begin{vmatrix} (a_p) \\ b_1 + 1, (b_{q-1}) \end{vmatrix} \right]$$

in order to obtain the recurrence relation

$$x \mathcal{J}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)\prime}(x) = \left( \lambda - \frac{5}{2} - k \right) \mathcal{J}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta)}(x) - \mathcal{J}_{n,k,\kappa}^{(\alpha,\beta+1)}(x),$$

$$\left( \lambda = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots \right). \quad (16c)$$

When  $\lambda \neq 5/2, 7/2, \dots$ , we derive directly (16b).

#### IV. NUMERICAL SOLUTIONS OF THE DISPERSION EQUATION

In this section, we will present some numerical solutions of the dispersion Eq. (6). For the implementation of the computer code, we employed several of the properties presented in Papers I and II, as well as in Sec. III.

The bulk of the code was written in Modern Fortran,<sup>44</sup> but several key components were made possible thanks to the multiple-precision libraries MPMath<sup>45</sup> and Arb,<sup>46</sup> written in Python and C, respectively. The C functions are accessed from Fortran with the Application Programmer's Interface (API) present in the standard of the language, whereas the Python modules are accessed via the P/C API.<sup>47</sup>

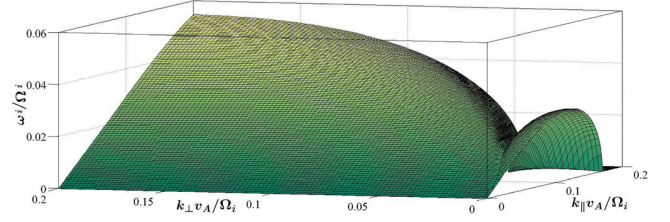


FIG. 2. Transition between the parallel firehose instability and the oblique firehose. All other parameters as in Fig. 1.

In this work we will present only some representative solutions of Eq. (6). A more detailed and comprehensive analysis of the oblique firehose instability occurring in kappa plasmas will be presented in a future publication. In order to reduce the number of symbols employed in the discussion, we adopt the following normalized forms:

$$q_{\parallel(\perp)} = \frac{k_{\parallel(\perp)} v_A}{\Omega_i}, \quad z_{r(i)} = \frac{\omega_{r(i)}}{\Omega_i},$$

where  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ .

Figure 1 shows a typical solution of the dispersion Eq. (6). We plotted only the normalized values of the dispersion relation (top panel) and of the growth rate (bottom panel) of the unstable mode ( $\omega_i/\Omega_i$ ) versus the normalized parallel ( $k_{\parallel}v_A/\Omega_i$ ) and perpendicular ( $k_{\perp}v_A/\Omega_i$ ) components of the wave vector. The physical parameters used in Fig. 1 are the following: the electron VDF is isotropic, with plasma beta  $\beta_e = \beta_{\parallel e} = \beta_{\perp e} = 2$ ; the ion VDF is anisotropic, with  $\beta_{\parallel i} = 3$  and  $\beta_{\perp i} = 0.8$ , which corresponds to a temperature ratio of  $T_{\parallel i}/T_{\perp i} = 3.75$  or to an anisotropy parameter  $A_i = 1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i} = 0.733$ . These are typical parameters to excite the firehose instability. Additionally, both VDFs are superthermal, with  $\kappa_e = \kappa_i = 5$ .

Figure 1 is similar to Fig. 4 of Yoon *et al.*<sup>29</sup> In the bottom panel, one can observe that the growth rate of the instability is split into two branches: on the plane  $k_{\perp} = 0$  the instability is restricted to the range  $0 \leq k_{\parallel}v_A/\Omega_i \leq 0.16$ . This branch rapidly vanishes as  $k_{\perp}$  grows, while the other branch of the instability displays a growing behavior which climbs to a maximum  $z_i \approx 0.07$  at  $(q_{\parallel}, q_{\perp}) \approx (0.37, 0.32)$  and then gradually vanishes as well as  $q_{\perp}$  grows, but falls slowly along the  $q_{\parallel}$  direction. This branch of the instability was called the *oblique firehose* by Yoon *et al.*<sup>29</sup> and the *Alfvén firehose* by Hellinger and Matsumoto.<sup>30</sup> Another noticeable aspect is that the maximum growth rate of the oblique firehose is substantially larger than the maximum growth-rate of the parallel branch ( $z_i \approx 0.02$ ).

Over the spectral range where the oblique firehose is operative, one observes, in the top panel of Fig. 1, that the real part is zero; i.e., the oblique firehose instability occurs in a nonpropagating mode. This characteristic was pointed out by Refs. 29 and 30 and is also valid for a kappa plasma.

The transition between the parallel and oblique branches of the instability can be seen in greater detail in Fig. 2, which is an inset of the bottom panel of Fig. 1. One can clearly observe the smooth transition between either branch of the instability, with the parallel branch confined in the range



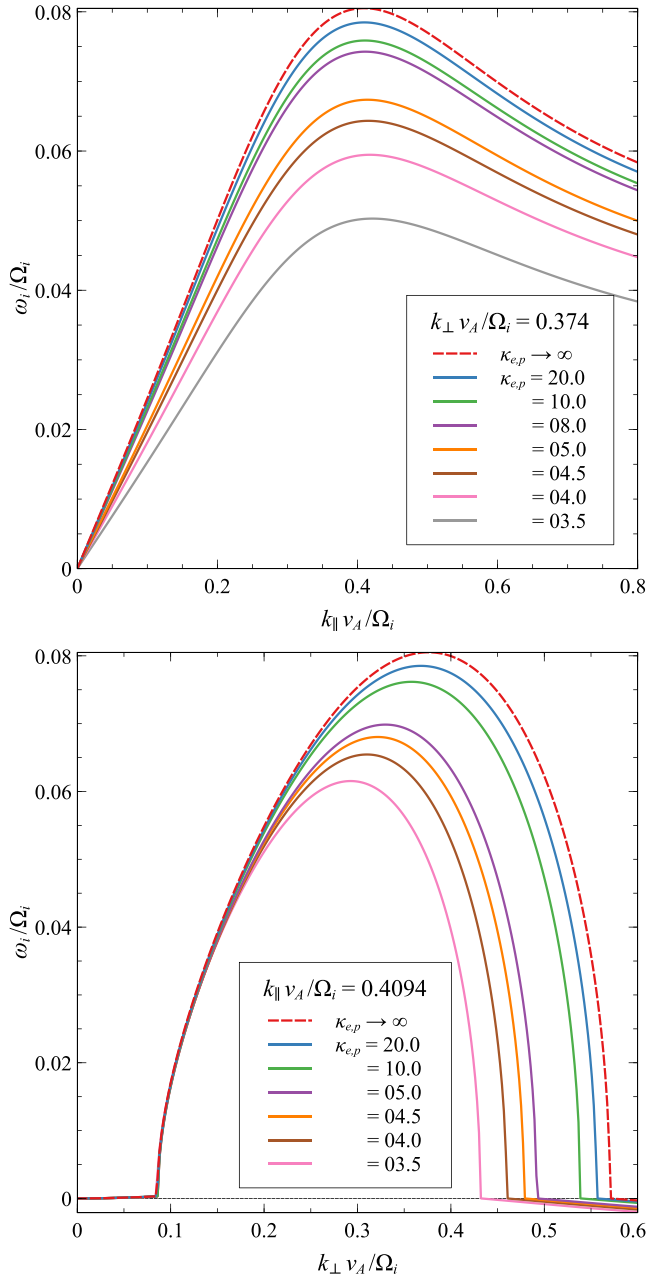


FIG. 3. Plots of  $\omega_i/\Omega_i$  for several values of  $\kappa_e = \kappa_i$ . Top panel: varying  $k_{\parallel}$ , keeping  $q_{\perp} = 0.374$  fixed. Bottom panel: varying  $k_{\perp}$ , keeping  $q_{\parallel} = 0.4094$  fixed. All other parameters are the same as in Fig. 1.

$0 \leq q_{\perp} \leq 0.03$ ,  $0 \leq q_{\parallel} \leq 0.16$  and the oblique branch operative for  $q_{\perp} \gtrsim 0.03$ .

The surface plots in Figs. 1 and 2 show the characteristics of the firehose instability for a single combination of electron/ion kappa parameters. If one wishes to analyze the dependency of the instability with different values for the kappas, 3D surface plots are not adequate. Instead, we will take the coordinates of the maximum growth rate for a Maxwellian plasma, which are  $(q_{\parallel}, q_{\perp}) \approx (0.41, 0.37)$  for the parameters in Fig. 1, fix either  $k_{\parallel}$  or  $k_{\perp}$  and then plot the growth rates along the other component of the wave vector for several different values of  $\kappa_e$  and  $\kappa_i$ .

Proceeding in this way, we obtain the results shown in Fig. 3. In the present analysis, we will consider the particular

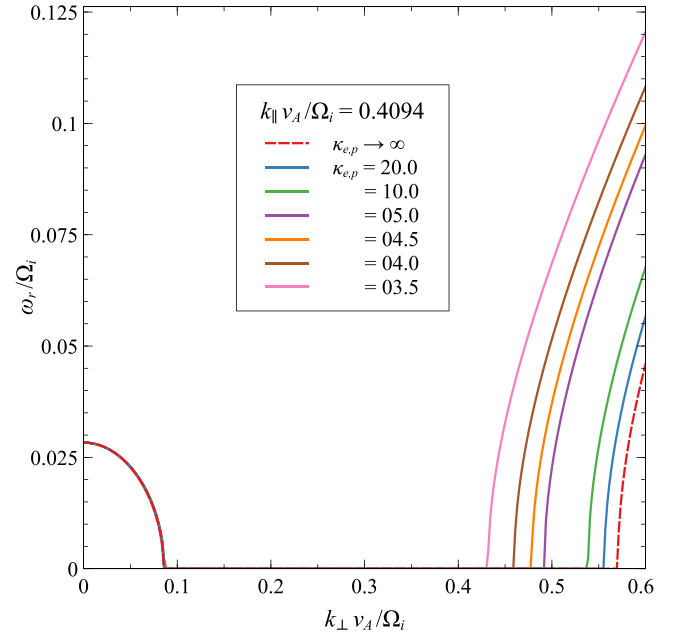


FIG. 4. Plots of  $\omega_r/\Omega_i$  for several values of  $\kappa_e = \kappa_i$ , varying  $k_{\perp}$  with  $q_{\parallel} = 0.4094$  fixed. All other parameters are the same as in Fig. 1.

choice of  $\kappa_e = \kappa_i$ . A more realistic and comprehensive analysis will be presented in a future publication. In the top panel of Fig. 3, we show the dependence of  $\omega_i$  with  $q_{\parallel}$  for a fixed  $q_{\perp} = 0.374$ . The dashed curve is the solution of the Maxwellian limit of the dispersion Eq. (6), obtained directly from the expressions for a bi-Maxwellian VDF. The blue curve of Fig. 3 (top), on the other hand, corresponds to the solution of (6) with  $\kappa_e = \kappa_i = 20$ . As expected, this case is already close to the pure Maxwellian plasma environment. As the kappa indices decrease, the maximum growth rate along  $q_{\parallel}$  also drops (from  $z_{i,\max} \approx 0.08$  for  $\kappa \rightarrow \infty$  to  $z_{i,\max} \approx 0.062$  for  $\kappa = 3.5$ ), with the value of  $q_{\parallel,\max} = 0.41$  approximately the same for all kappas.

A different behavior is observed along  $q_{\perp}$ . The bottom panel of Fig. 3 again shows that the case  $\kappa_e = \kappa_i = 20$  is already close to the Maxwellian limit and that  $z_{i,\max}$  drops as the kappas are reduced, with the same variation observed in the top panel. However, along the perpendicular direction one can observe some distinguishing features not apparent in the top panel. First of all, in the small  $k_{\perp}$  region ( $q_{\perp} \lesssim 0.17$ ), corresponding to the “small gyroradius” case, the growth rate remains roughly independent of  $\kappa$ , with the limiting situation that at  $q_{\perp} = 0$  the solution is exactly the same as in the Maxwellian case. On the other hand, for  $q_{\perp} \gtrsim 0.17$  the growth rate becomes dependent on  $\kappa$ , in such a way that not only the value of  $z_{i,\max}$  reduces with  $\kappa$ , but the spectral range of the instability in the perpendicular direction reduces as well. Hence, these results suggest that for moderate values of the gyroradius, the oblique firehose instability is strongly dependent on the kappa parameter.

The same behavior is displayed by the real part of the unstable mode as a function of  $k_{\perp}$ , as can be seen in Fig. 4. In the low gyroradius limit, the wave refracts as in a Maxwellian plasma, then the mode becomes nonpropagating throughout the unstable spectral range and finally becomes

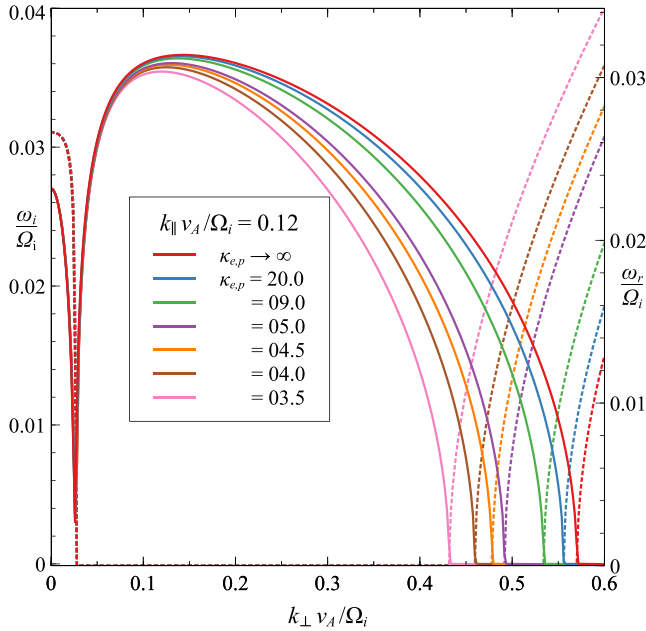


FIG. 5. Plots of  $\omega_i/\Omega_i$  (continuous lines) and  $\omega_r/\Omega_i$  (dotted lines) as functions of  $q_\perp$  for fixed  $q_\parallel = 0.12$  and various values of  $\kappa_e = \kappa_i$ . All other parameters as in Fig. 1.

propagating again right at the point where the instability disappears and is replaced by damping. The value of  $k_\perp$  where the mode ceases to be unstable is dependent on the kappa parameter, with the nonpropagating, unstable spectral range consistently reducing with  $\kappa_e = \kappa_i$ .

As a final result, Fig. 5 shows both the normalized growth rate (continuous lines) and the normalized real part (dotted lines) of the unstable mode for a fixed value of  $q_\parallel$  and varying  $q_\perp$ . Now, the parallel component of the wavenumber is fixed to  $k_\parallel v_A/\Omega_i = 0.12$ , which corresponds to the maximum growth rate of the (quasi) parallel branch of the firehose instability. The growth rates displayed by the figure clearly show the transition from the quasi-parallel to the oblique branches of the instability, which occurs at  $q_\perp \approx 0.026$  for all values of the kappa parameter. We observe the same behavior displayed by Figs. 3 and 4: the quasi-parallel branch is almost independent of  $\kappa_e$  and  $\kappa_i$ , whereas the oblique mode shows an evident dependence on the kappas. We again observe that not only the maximum growth rate is reduced with kappa, but so does also the unstable spectral range.

The real part of the unstable mode also repeats the same pattern observed in the previous figures: the quasi-parallel branch of the instability is convective, with nonzero phase velocity that is almost independent of the kappa values. On the other hand, the oblique branch is nonpropagating throughout the unstable spectral range and acquires a nonzero phase velocity when the instability disappears, being replaced by a very small damping coefficient.

As a final remark, we mention again that a more complete treatment will show that the quasi-parallel branch of the firehose instability does indeed depend on  $\kappa_i$ . However, this does not invalidate the present treatment, since the main objective was to study the effect of the superthermal nature

of the electron and ion distribution functions on the oblique firehose instability, which does depend on the kappas.

## V. CONCLUSIONS

We presented the derivation of a dispersion equation that describes the oblique firehose instability excited in an electron-ion plasma depending on the wave vector, the parallel and perpendicular electron and ion beta parameters, and on the kappa parameters of the electron and ion velocity distribution functions.

In order to implement the numerical solution of the dispersion equation, several new mathematical properties of the kappa plasma special functions were obtained, which complement the formalism already derived in previous publications.

Employing values of the physical parameters that are relevant to space plasma conditions, some solutions of the dispersion equation were shown. The results show that both the maximum growth rate of the instability and its spectral range depend on the superthermal nature of the  $\kappa$  distributions, with both properties roughly displaying a reduction with the values of  $\kappa_e = \kappa_i$ .

A more comprehensive and complete analysis of the oblique firehose instability was not reported here, due to the length of the paper demanded by the mathematical expressions. This task will be carried out in future publications, not only for the firehose instability but also for other relevant instabilities occurring in arbitrary angles, polarization, and frequency ranges.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge support provided by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Grant Nos. 304363/2014-6 and 307626/2015-6. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Finance Code 001.

<sup>1</sup>E. Marsch, *Living Rev. Sol. Phys.* **3**, 1 (2006).

<sup>2</sup>K. G. Klein and G. G. Howes, *Phys. Plasmas* **22**, 032903 (2015).

<sup>3</sup>P. H. Yoon, *Rev. Mod. Plasma Phys.* **1**, 4 (2017).

<sup>4</sup>K. G. Klein, B. L. Alterman, M. L. Stevens, D. Vech, and J. C. Kasper, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 205102 (2018).

<sup>5</sup>G. Livadiotis, *J. Geophys. Res.* **120**, 1607–1619, <https://doi.org/10.1002/2014JA020825> (2015).

<sup>6</sup>G. Livadiotis, *Kappa Distributions: Theory and Applications in Plasmas* (Elsevier Science and Technology Books, 2017).

<sup>7</sup>M. Maksimovic, I. Zouganelis, J. Y. Chaufray, K. Issautier, E. E. Scime, J. E. Littleton, E. Marsch, D. J. McComas, C. Salem, R. P. Lin, and H. Elliot, *J. Geophys. Res.* **110**, A09104, <https://doi.org/10.1029/2005JA011119> (2005).

<sup>8</sup>S. Štverák, M. Maksimovic, P. M. Trávníček, E. Marsch, A. N. Fazakerley, and E. E. Scime, *J. Geophys. Res.* **114**, A05104, <https://doi.org/10.1029/2008JA013883> (2009).

<sup>9</sup>V. Pierrard, M. Lazar, S. Poedts, Š. Štverák, M. Maksimovic, and P. M. Trávníček, *Sol. Phys.* **291**, 2165–2179 (2016).

<sup>10</sup>V. Pierrard and M. Pieters, *J. Geophys. Res.* **119**, 9441–9455, <https://doi.org/10.1002/2014JA020678> (2014).

<sup>11</sup>G. Livadiotis, M. I. Desai, and L. B. Wilson III, *Astrophys. J.* **853**, 142 (2018).

<sup>12</sup>See also Table 1.1 of G. Livadiotis, Chap. 1 of Ref. 6, for measured values of  $\kappa$  in other solar and astrophysical environments.

- <sup>13</sup>M. Lazar, S. Poedts, and R. Schlickeiser, *Astron. Astrophys.* **534**, A116 (2011).
- <sup>14</sup>M. Lazar, *Astron. Astrophys.* **547**, A94 (2012).
- <sup>15</sup>M. Lazar and S. Poedts, *Mont. Not. R. Astron. Soc.* **437**, 641–648 (2014).
- <sup>16</sup>M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer, *Phys. Plasmas* **21**, 112102 (2014).
- <sup>17</sup>M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer, *Phys. Plasmas* **22**, 122107 (2015).
- <sup>18</sup>M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer, *Phys. Plasmas* **23**, 013705 (2016).
- <sup>19</sup>M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer, *Astrophys. Space Sci.* **362**, 18 (2017).
- <sup>20</sup>L. F. Ziebell and R. Gaelzer, *Phys. Plasmas* **24**, 102108 (2017).
- <sup>21</sup>M. Lazar, S. M. Shaaban, H. Fichtner, and S. Poedts, *Phys. Plasmas* **25**, 022902 (2018).
- <sup>22</sup>A. F. Viñas, R. Gaelzer, P. S. Moya, R. L. Mace, and J. A. Araneda, in *Kappa Distributions* (Elsevier Science and Technology Books, 2017), Chap. 7, p. 329–361.
- <sup>23</sup>H. Sugiyama, S. Singh, Y. Omura, M. Shoji, D. Nunn, and D. Summers, *J. Geophys. Res.* **120**, 8426, <https://doi.org/10.1002/2015JA021346> (2015).
- <sup>24</sup>P. Astfalk, T. Görler, and F. Jenko, *J. Geophys. Res.* **120**, 7107, <https://doi.org/10.1002/2015JA021507> (2015).
- <sup>25</sup>P. Astfalk and F. Jenko, *J. Geophys. Res.* **122**, 89–101, <https://doi.org/10.1002/2016JA023522> (2017).
- <sup>26</sup>R. Gaelzer and L. F. Ziebell, *J. Geophys. Res.* **119**, 9334–9356, <https://doi.org/10.1002/2014JA020667> (2014).
- <sup>27</sup>R. Gaelzer and L. F. Ziebell, *Phys. Plasmas* **23**, 022110 (2016).
- <sup>28</sup>R. Gaelzer, L. F. Ziebell, and A. R. Meneses, *Phys. Plasmas* **23**, 062108 (2016).
- <sup>29</sup>P. H. Yoon, C. S. Wu, and A. S. de Assis, *Phys. Fluids B* **5**, 1971 (1993).
- <sup>30</sup>P. Hellinger and H. Matsumoto, *J. Geophys. Res.* **105**, 10519, <https://doi.org/10.1029/1999JA000297> (2000).
- <sup>31</sup>R. L. Lysak and W. Lotko, *J. Geophys. Res.* **101**, 5085–5094, <https://doi.org/10.1029/95JA03712> (1996).
- <sup>32</sup>D. Summers and R. M. Thorne, *Phys. Fluids B* **3**, 1835 (1991).
- <sup>33</sup>R. L. Mace and M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* **2**, 2098 (1995).
- <sup>34</sup>B. D. Fried and S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function: The Hilbert Transform of the Gaussian* (Academic Press, New York, 1961), p. 419.
- <sup>35</sup>S. Wolfram, see <http://functions.wolfram.com/07.23.04.0003.02> “Hypergeometric Function  ${}_2F_1$ ,” (last accessed October 25, 2018).
- <sup>36</sup>S. Wolfram, see <http://functions.wolfram.com/06.05.06.0007.01> “Gamma function” (last accessed October 25, 2018).
- <sup>37</sup>S. Wolfram, see <http://functions.wolfram.com/06.14.06.0010.02> “Digamma function” (last accessed October 25, 2018).
- <sup>38</sup>Recall the definition of the  $G$ -function given in the Appendix B of Paper I.
- <sup>39</sup>Y. L. Luke, “The special functions and their approximations,” in *Mathematics in Science and Engineering* (Elsevier Science, San Diego, 1969), Vol. I, pp. 349 + xx.
- <sup>40</sup>A. A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, I. U. A. Brychkov, and O. I. Maričev, “Integrals and series: More special functions,” in *Integrals and Series* (Gordon and Breach Science Publishers, 1990), Vol. 3, p. 800.
- <sup>41</sup>I. Brychkov, *Handbook of Special Functions: Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas* (CRC Press, 2008), pp. 680 + xx.
- <sup>42</sup>R. A. Askey and A. B. O. Daalhuis, in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark (Cambridge, New York, 2010), Chap. 16, pp. 403–418.
- <sup>43</sup>S. Wolfram, see <http://functions.wolfram.com/07.32.20.0005.01> “Regularized generalized hypergeometric function” (last accessed October 25, 2018).
- <sup>44</sup>M. Metcalf, J. Reid, and M. Cohen, *Modern Fortran Explained, Numerical Mathematics and Scientific Computation* (Oxford, Oxford, 2011), pp. 488 + xx.
- <sup>45</sup>F. Johansson, <http://mpmath.org/> for “Mpmath: A Python Library for Arbitrary-Precision Floating-Point Arithmetic (version 1.0)” (2017).
- <sup>46</sup>F. Johansson, *IEEE Trans. Comput.* **66**, 1281 (2017).
- <sup>47</sup>Python Software Foundation, <https://docs.python.org/2/c-api/index.html> for “Python/C API Reference Manual” (2018).