

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MÉTODO GENÉRICO DE SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA**  
**APROXIMAÇÕES DA EQUAÇÃO LINEAR DE**  
**TRANSPORTE**

por  
**Augusto Vieira Cardona**

Tese para obtenção do Título de  
**Doutor em Engenharia**

**Porto Alegre, maio de 1996**

# **MÉTODO GENÉRICO DE SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA APROXIMAÇÕES DA EQUAÇÃO LINEAR DE TRANSPORTE**

por

**Augusto Vieira Cardona**

**Mestre em Matemática**

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Doutor em Engenharia**

**Área de Concentração: Fenômenos de Transporte**

**Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio M. B. de Vilhena**

**Coorientadora: Profa. Dra. Liliane Basso Barichello**

**Aprovada por:**

**Prof. Dr. Mikhail Dimitrov Mikhailov**

**Prof. Dr. Renato Cota**

**Prof. Dr. Roberto D. M. Garcia**

**Prof. Dr. Volnei Borges**

**COPPE - UFRJ**

**COPPE - UFRJ**

**IEAv - CTA**

**PROMEC - UFRGS**

**Prof. Dr. Horácio Vielmo**

**Coordenador do PROMEC**

**Porto Alegre, 23 de maio de 1996.**

*Dedico este trabalho a meus pais,  
Margarida e Romeu Cardona, por  
todo apoio e carinho.*

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena, pela orientação, amizade e incentivo.

À Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto, Profa. Dra. Liliane Basso Barichello, Profa. Dra. Elaine Evani Streck, Prof. Dr. Jorge Rodolfo Zabadal e ao colega Jacques Duilio Brancher, por preciosas contribuições a este trabalho.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Nuclear da UFRGS.

Aos colegas do Instituto de Matemática da PUCRS.

À CNEN, pelo suporte financeiro deste trabalho.

À minha esposa Vera Lúcia Rava Sá, pelas horas que não pode contar comigo.



## RESUMO

Neste trabalho, é apresentado um método genérico de solução analítica para as aproximações  $S_N$ ,  $P_N$ ,  $W_N$ ,  $Ch_N$ ,  $A_N$  e  $LD_N$  da equação linear de transporte em uma dimensão. A idéia básica do método consiste na aplicação da transformada de Laplace para solução do sistema de equações diferenciais associadas às aproximações consideradas e resolução do sistema algébrico resultante pelo algoritmo de Trzaska. A solução unidimensional será estendida à problemas de transporte em duas dimensões, transformando o problema bidimensional em problemas unidimensionais acoplados, através da aproximação do fluxo angular em uma série truncada de funções na variável espacial  $y$ . São apresentadas simulações numéricas para todas as soluções unidimensionais consideradas, tendo por objetivo o estudo da eficiência das aproximações, no sentido de descobrir qual delas fornece resultados com precisão desejada com menor ordem de quadratura. São, também, obtidas soluções numéricas para o fluxo bidimensional pela técnica proposta acima, as quais são comparadas com outras soluções conhecidas.

## ABSTRACT

### **"A Generic Method of Analytical Solution for Approximations of the Linear Transport Equation".**

In this work, it is presented a generic method of analytical solution to the one-dimensional  $S_N$ ,  $P_N$ ,  $W_N$ ,  $Ch_N$ ,  $A_N$  and  $LD_N$  approximations of the linear transport equation. The main idea of this method consists in the application of the Laplace transform to solve the system of differential equation related to the considered approximations and solution of the resultant algebraic system by Trzaska's algorithm. The one-dimensional solution will be extended to two-dimensional problems, transforming the two-dimensional problem into one-dimensional coupled problems, by the approximation of the angular flux in a truncated series of functions at the spatial variable  $y$ . Numerical simulations are reported for all considered one-dimensional solutions, with the goal of study its efficacy, in the sense to find out which one furnishes results with desired accuracy with lower order of quadrature. Numerical solutions for the bimensional flux are too obtained by the above proposed technique, which is compared with another knowing solutions.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Espessura da placa na variável $x$ .
$\underline{\underline{A}}$	Matriz dos coeficientes das componentes do fluxo angular.
$\underline{\underline{A}}_k$	Matriz dos coeficientes das componentes do fluxo angular.
$\underline{\underline{A}}_N(s)$	Matriz $LTS_N$ .
$\underline{\underline{A}}_N^*(s)$	Matriz $LTS_N$ modificada por operações elementares.
$b$	Espessura da placa na variável $y$ .
$\underline{\underline{B}}$	Matriz dos coeficientes das componentes do fluxo angular.
$\underline{\underline{B}}_k$	Matriz dos coeficientes das componentes do fluxo angular.
$\underline{\underline{B}}_n(s)$	Matriz do método recursivo de inversão da matriz $LTS_N$ .
$c$	Número médio de partículas emitidas por colisão.
$\underline{\underline{C}}$	Matriz dos coeficientes das componentes do fluxo angular.
$\underline{\underline{D}}$	Matriz dos coeficientes das componentes do fluxo angular.
$D_n(s)$	Determinante de $\underline{\underline{B}}_n(s)$ .
$D_{n,m}$	Momento do fluxo angular na aproximação $W_N$ .
$E(\rho)$	Erro absoluto de $\rho$ relativo a $\rho^*$ .
$f(\mu)$	Fluxo angular incidente na fronteira $x = 0$ .
$f_k$	Parâmetro de espalhamento.
$\underline{\underline{I}}$	Matriz identidade.
$J_m^N(x)$	Aproximação da integral por quadratura de Gauss.

$J^+(x)$	Corrente transmitida.
$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$	Combinação de k elementos m à m.
$L_2([-1,1], p(\mu))$	Espaço de Hilbert composto das funções de quadrado integrável em $[-1,1]$ com função peso $p(\mu)$ .
$L_2([0, b], p(y))$	Espaço de Hilbert composto das funções de quadrado integrável em $[0,b]$ com função peso $p(y)$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno.
$[n/2]$	Parte inteira de $n/2$ .
$(n+m) \bmod 2$	Adição em módulo 2 dos números n e m em representação binária.
$\underline{0}$	Vetor nulo.
$P_k(\mu)$	Polinômio de Legendre.
$\underline{P}^n(s)$	Matriz adjunta de $\underline{B}_{=n}(s)$ .
$P_m^k$	Momento do fluxo angular na aproximação $W_N$ .
$p(\mu)$	Função peso.
$Q(x,\mu)$	Termo de fonte unidimensional.
$Q(x,y)$	Termo de fonte bidimensional.
$Q_m(x)$	Momento do termo de fonte.
$Q_m^P(x), Q_m^I(x)$	Momentos do termo de fonte $Q(x,\mu)$ .
$Q_m^1(x), Q_m^2(x)$	Momentos do termo de fonte $Q(x,\mu)$ .
$Q^P(x,\mu), Q^I(x,\mu)$	Transformação de Kuznetsov do termo de fonte $Q(x,\mu)$ .
$\underline{Q}(x)$	Vetor de elementos $Q_m(x)$ .
$\underline{Q}^P(x), \underline{Q}^I(x)$	Vetores de elementos $Q_m^P(x)$ e $Q_m^I(x)$ , respectivamente.

$\underline{Q}^P(x), \underline{Q}^I(x)$	Vetores de elementos $Q^P(x, \mu_k)$ e $Q^I(x, \mu_k)$ , respectivamente.
$\underline{Q}^1(x), \underline{Q}^2(x)$	Vetores de elementos $Q_m^1(x)$ e $Q_m^2(x)$ , respectivamente.
$\overline{Q}(s)$	Transformada de Laplace de $\underline{Q}(x)$ .
$\overline{Q}^P(s), \overline{Q}^I(s)$	Transformada de Laplace de $\underline{Q}^P(x)$ e $\underline{Q}^I(x)$ , respectivamente.
$\overline{Q}^1(s), \overline{Q}^2(s)$	Transformada de Laplace de $\underline{Q}^1(x)$ e $\underline{Q}^2(x)$ , respectivamente.
$R_k(\mu)$	Funções de Rademacher [44].
$T_n(\mu)$	Polinômio de Chebyshev.
$u(x, \mu), v(x, \mu)$	Variáveis dependentes da transformação de Kuznetsov [35].
$u(x, y, \mu), v(x, y, \mu)$	Funções resultantes da transformação dada pela equação (4.2.2).
$u_i(x, \mu), v_i(x, \mu)$	Coefficientes da expansão de $u(x, y, \mu)$ e $v(x, y, \mu)$ em série de potências.
$u_i^n(x), v_i^n(x)$	Coefficientes da expansão de $u_i(x, \mu)$ e $v_i(x, \mu)$ em polinômios de Chebyshev.
$u(x, \mu_k), v(x, \mu_k)$	Variáveis $u(x, \mu)$ e $v(x, \mu)$ calculadas nas ordenadas discretas.
$\underline{u}(x), \underline{v}(x)$	Vetores de elementos $u(x, \mu_k)$ e $v(x, \mu_k)$ .
$\underline{u}^n(x), \underline{v}^n(x)$	Vetores de elementos $u_i^n(x)$ e $v_i^n(x)$ .
$\overline{\underline{u}}(s), \overline{\underline{v}}(s)$	Transformadas de Laplace de $\underline{u}(x)$ e $\underline{v}(x)$ .
$x$	Variável espacial.
$y$	Variável espacial.
$\alpha_n(k)$	Momento do fluxo angular.
$\alpha_n(x)$	Coefficiente das aproximações $W_N$ e $Ch_N$ .
$\underline{\alpha}(x)$	Vetor constituído de elementos $\alpha_n(x)$ .



$\bar{\alpha}(s)$	Transformada de Laplace de $\underline{\alpha}(x)$ .
$\beta_{n,m}^k$	Momento do fluxo angular na aproximação $Ch_N$ .
$\beta_m(k)$	Momento do fluxo angular.
$\beta_n(x)$	Coefficiente da aproximação $W_N$ .
$\underline{\beta}(x)$	Vetor constituído de elementos $\beta_n(x)$ .
$\bar{\beta}(s)$	Transformada de Laplace de $\underline{\beta}(x)$ .
$\chi_n^m$	Momento do fluxo angular na aproximação $Ch_N$ .
$\chi_n(k)$	Momento do fluxo angular na aproximação $Ch_N$ .
$\delta_{i,j}$	Delta de Kronecker.
$\delta(\mu - \mu_m)$	Delta de Dirac.
$\underline{\Delta}_k, \underline{\Delta}_k^1, \underline{\Delta}_k^2$	Matrizes resultantes do algoritmo de Trzaska [29].
$\varepsilon_k(n)$	Momento do fluxo angular.
$\phi_m(x)$	Fluxo escalar médio.
$\phi_m(x), \xi_m(x)$	Coefficientes da aproximação $LD_N$ .
$\phi(x)$	Fluxo escalar.
$\phi$	Ângulo azimutal.
$\Phi_m(\mu)$	Função peso utilizada no cálculo de momentos.
$\varphi(x, \mu)$	Fluxo angular na direção $\mu$ e posição $x$ .
$\varphi_n(x)$	Fluxo angular na direção $\mu_n$ .
$\underline{\varphi}(x)$	Vetor de elementos $\varphi_n(x)$ .
$\lambda_n^m$	Momento do fluxo angular.
$\mu$	Direção de propagação da partícula.

$\mu_k$	Discretização do domínio angular.
$(\mu_n, \eta_n)$	Direção da quadratura angular.
$\pi_k$	Peso da fórmula de quadratura de Gauss.
$\Theta_n(\mu)$	Função ortogonal na variável angular.
$\Theta_n(y)$	Função ortogonal na variável espacial $y$ .
$\mathcal{G}_m$	Quadrado da norma de $\Theta_m(\mu)$ ou $\Theta_n(y)$ .
$\rho_k$	Autovalores das matrizes $LTW_N$ , $LTCh_N$ , $LTA_N$ e $LTLD_N$ .
$\rho$	Menor autovalor das matrizes $LTW_N$ , $LTCh_N$ , $LTA_N$ e $LTLD_N$ .
$\rho^*$	Autovalor discreto de Case [42].
$\sigma_s$	Seção de choque de espalhamento.
$\sigma_t$	Seção de choque total.
$\tau_k(n)$	Momento do fluxo angular na aproximação $Ch_N$ .
$\omega_n$	Peso da fórmula de quadratura de Gauss.
$\omega_n(\mu)$	Função de Walsh.
$\omega_n^I(\mu)$	Extensão ímpar da função de Walsh ao intervalo $[-1,1]$ .
$\omega_n^P(\mu)$	Extensão par da função de Walsh ao intervalo $[-1,1]$ .
$\psi_n(x)$	Coefficientes da expansão do fluxo angular em funções ortogonais.
$\underline{\Psi}(x)$	Vetor constituído de elementos $\psi_n(x)$ .
$\overline{\Psi}(s)$	Transformada de Laplace de $\underline{\Psi}(x)$ .
$\Psi(x, y, \phi)$	Fluxo angular bidimensional.
$\Psi_n(x, y)$	Fluxo angular bidimensional na direção $\mu_n$ .
$\Psi_n^k(x)$	Coefficiente da expansão de $\Psi_n(x, y)$ em polinômios de Legendre.
*	Operação de convolução.

# ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. APROXIMAÇÃO DO FLUXO UNIDIMENSIONAL POR UMA SÉRIE TRUNCADA DE FUNÇÕES ORTOGONAIS.....	5
2.1. Introdução.....	5
2.2. O Método $LTW_N$ .....	7
2.3. O Método $LTCh_N$ .....	12
2.4. A Formulação Generalizada .....	16
3. SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE ATRAVÉS DA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANGULAR.....	19
3.1. Introdução.....	19
3.2. Método Recursivo de Inversão da Matriz $LTS_N$ .....	20
3.3. A Formulação $LTA_N$ .....	25
3.4. Fluxo Angular com Dependência Contínua na Variável Angular .....	28
3.5. O Método $LTLD_N$ .....	30
4. SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE.....	34
4.1. Introdução.....	34
4.2. Formulação $LTCh_N$ e Série de Potências na Variável $y$ .....	35
4.2.1. <u>Mudança de Variável na Equação de Transporte</u> .....	35
4.2.2. <u>Aproximação na Variável Espacial <math>y</math></u> .....	36



4.2.3. <u>O Método <math>LTCh_N</math> no Problema Bidimensional</u> .....	39
4.3. Método $LTS_N$ e Polinômios de Legendre na Variável $y$ .....	44
4.4. Formulação $LTS_N$ e Série de Funções Ortogonais em $y$ .....	49
5. <b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	52
5.1. Introdução .....	52
5.2. Problemas Unidimensionais com Espalhamento Isotrópico .....	53
5.3. Problemas Unidimensionais com Espalhamento Anisotrópico Linear .....	63
5.4. Problemas Bidimensionais de Transporte.....	65
6. <b>CONCLUSÕES</b> .....	67
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	70
<b>ANEXO I</b>	
<b>AS FUNÇÕES DE WALSH</b> .....	75
<b>ANEXO II</b>	
<b>DERIVAÇÃO DA APROXIMAÇÃO <math>W_N</math></b> .....	78
<b>ANEXO III</b>	
<b>TRATAMENTO DE GRANDES ESPESSURAS</b> .....	79

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura.</b>	<b>Pág.</b>
2.2.1. As funções $\omega_n^P(\mu)$ e $\omega_n^I(\mu)$ , para $n = 0:7$ .....	7
5.4.1. Geometria do Problema Bidimensional.....	65
A1.1. As Funções de Walsh.....	76

## ÍNDICE DE TABELAS

<b>Tabela.</b>	<b>Pág.</b>
<b>5.2.1. Comparação numérica dos resultados para o fluxo escalar, obtidos pelos métodos <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math>, <math>LTLD_N</math> e <math>S_N</math>.....</b>	<b>53</b>
<b>5.2.2. Comparação numérica dos resultados para a corrente transmitida, obtidos pelos métodos <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math>, <math>LTLD_N</math> e <math>S_N</math>.....</b>	<b>54</b>
<b>5.2.3. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 10</math>. ....</b>	<b>55</b>
<b>5.2.4. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 100</math>.....</b>	<b>56</b>
<b>5.2.5. Simulação numérica para o fluxo escalar pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> com <math>x = 100</math>. ....</b>	<b>56</b>
<b>5.2.6. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 10</math>. ....</b>	<b>57</b>
<b>5.2.7. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 100</math>.....</b>	<b>58</b>
<b>5.2.8. Menores autovalores e número de condicionamento das matrizes <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math>. ....</b>	<b>59</b>
<b>5.2.9. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 10</math>. ....</b>	<b>60</b>
<b>5.2.10. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 100</math>.....</b>	<b>61</b>
<b>5.2.11. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math> e <math>LTLD_N</math> para <math>a = 1000</math>.....</b>	<b>61</b>
<b>5.2.12. Comparações numéricas para o fluxo angular com dependência angular contínua e solução <math>LTA_N</math>. ....</b>	<b>62</b>

<b>5.3.1. Comparação numérica dos métodos <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTA_N</math>, <math>LTS_N</math>, <math>LTP_N</math> e <math>SGF S_N</math> para o fluxo médio em uma placa homogênea.....</b>	<b>63</b>
<b>5.3.2. Comparação numérica dos métodos <math>LTW_N</math>, <math>LTCh_N</math>, <math>LTS_N</math>, <math>LTP_N</math> e <math>SGF S_N</math> para o fluxo médio em uma placa heterogênea.....</b>	<b>64</b>
<b>5.4.1. Simulação numérica da corrente angular pelos métodos <math>LTCh_N-SP_M</math>, <math>LTS_N</math>, <math>LN</math> e <math>SGF-ExpN</math>.....</b>	<b>66</b>



# 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos diversas aproximações têm sido propostas para solução da equação linear de transporte de partículas. Entre estas, pode-se identificar os métodos variacionais, como elementos finitos e colocação, entre os quais encontramos o método  $F_N$  [1], e os métodos de aproximações, tanto do termo integral por fórmula de quadratura, como do fluxo angular em uma série truncada de funções ortogonais na variável angular, entre os quais, cita-se as aproximações  $S_N$  [2],  $P_N$  [2],  $W_N$  [3],  $Ch_N$  [4,5],  $A_N$  [6] e  $LD_N$  [7,8], que serão discutidas a seguir.

As equações  $S_N$  são estabelecidas aproximando-se o termo integral da equação de transporte pelo esquema de quadratura de Gauss. O sistema de equações diferenciais resultante tem sido resolvido por métodos de diferenças finitas, sendo que recentemente, Barros e Larsen [9] propuseram um esquema numérico livre de erro de truncamento para resolver esta aproximação, denominado SGF- $S_N$ . Este esquema foi estendido para problemas multidimensionais, através dos métodos nodais [10], ou seja, fazendo-se a integração transversa da equação de transporte multidimensional. No início desta década, Vilhena e Barichello [11-14] encontraram uma solução analítica para o sistema de equações diferenciais  $S_N$  aplicando a transformada de Laplace na variável espacial, resolvendo o sistema linear resultante analiticamente e fazendo a inversão do fluxo transformado, pela técnica de expansão de Heaviside. Esta solução foi estendida para problemas de multigrupo [15], problemas unidimensionais sem simetria azimutal [16,17], problemas com dependência temporal [16], problemas multidimensionais [18-20] e a problemas bidimensionais em domínios convexos [21], bem como permitiu a construção de uma solução analítica com dependência contínua na variável angular à partir da solução  $LTS_N$  [16,22,23].

Nos trabalhos acima citados [11-23], a solução analítica do sistema algébrico linear foi obtida considerando este sistema como uma equação matricial, calculando-se o determinante e a matriz adjunta para esta matriz, denominada matriz  $LTS_N$ . Este processo é possível devido a estrutura da matriz  $LTS_N$  [12]. É relevante relatar que o número de operações requeridas por este método de resolução do sistema algébrico é proporcional a  $N!$ , e, conseqüentemente, este processo torna-se inapropriado, do ponto de vista computacional, para resolver problemas de transferência radiativa [24], os quais exigem altos valores para  $N$ . Portanto, para melhorar a eficiência computacional do método  $LTS_N$  na resolução de problemas de transferência radiativa,

neste trabalho propõe-se um novo esquema de resolução do sistema algébrico linear [25]. Para tal, a matriz  $LTS_N$ , para o caso de espalhamento isotrópico, é modificada por operações elementares, de maneira que a matriz resultante possua uma estrutura especial quando vista como blocos, ou seja, as primeiras  $(n-1)$  linhas e colunas da matriz  $LTS_n$ , com  $n = 2:N$ , coincidem com a matriz  $LTS_{n-1}$ . Assim, procedendo recursivamente, começando com  $n = 2$ , a inversa da matriz  $LTS_N$  é obtida calculando-se a matriz  $LTS_n$  (para  $n = 2:N$ ) em termos da matriz  $LTS_{n-1}$ , aplicando-se sucessivamente o método de partição [26].

Por outro lado, o método  $P_N$  [2] é obtido aproximando-se o fluxo angular por uma série truncada de polinômios de Legendre, substituindo-se na equação de transporte e tomando-se momentos, ou seja, multiplicando-se a equação resultante por cada polinômio de Legendre e integrando-se em  $\mu \in [-1,1]$ . A resolução analítica do sistema de equações  $P_N$ , obtida por Streck [27,28], através da aplicação da transformada de Laplace e sua inversão analítica estabelecida pelo algoritmo de Trzaska [29], é denominada formulação  $LTP_N$ .

Baseado nos excelentes resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTS_N$  e  $LTP_N$ , para  $N < 16$ , e pelo fato que a combinação da transformada de Laplace e do método de Trzaska possibilita a determinação de solução analítica para estas aproximações, propõe-se, neste trabalho, a extensão desta técnica para outras aproximações da equação de transporte, assim como uma formulação geral para todas as aproximações citadas inicialmente, com dependência contínua e seccionalmente contínua na variável angular.

A aplicação das funções de Walsh [30] na solução da equação unidimensional de transporte, considerando modelo isotrópico de espalhamento e um grupo de energia, foi introduzida por Seed e Albrecht [3]. A idéia deste método é baseada na expansão do fluxo angular de partículas em termos das funções de Walsh, com o domínio angular estendido ao intervalo  $[-1,1]$ . Assim, truncando-se e substituindo-se esta expansão na equação de transporte, e tomando-se momentos, como no método  $P_N$  [2], um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem para as componentes espaciais do fluxo de partículas é estabelecido e denotado aproximação  $W_N$ . Este método é estendido para o problema de transporte com espalhamento anisotrópico e a solução destas equações pela transformada de Laplace e algoritmo de Trzaska é denominada  $LTW_N$  [31,32].

A aproximação  $Ch_N$  para a equação de transporte linear, considerando espalhamento anisotrópico e um grupo de energia, é obtida expandindo o fluxo angular em uma série truncada de polinômios de Chebyshev [33] na variável angular, substituindo-se esta expansão na equação



de transporte e tomando-se momentos. O sistema diferencial linear de primeira ordem resultante é resolvido para os coeficientes espaciais do fluxo de partículas pela aplicação da transformada de Laplace. A inversão dos coeficientes transformados é feita, também analiticamente, usando o algoritmo de Trzaska e a técnica de expansão de Heaviside. Este procedimento é denotado método  $LTCh_N$  [4,5].

O método  $A_N$ , proposto por Coppa e Ravetto, resolve a equação de transporte linear em qualquer geometria, considerando espalhamento isotrópico [6] e linearmente anisotrópico [34]. Este método consiste da aplicação da transformada de Fourier na variável espacial, mudança da variável angular para o intervalo  $[0,1]$  e da aproximação do termo integral desta equação pelo esquema de quadratura de Gauss. Um sistema linear de equações diferenciais de segunda ordem na variável espacial é obtido procedendo a inversão analítica da transformada de Fourier. Neste trabalho, a aproximação  $A_N$  da equação de transporte unidimensional em geometria cartesiana, para espalhamento anisotrópico, é obtida de uma nova maneira, utilizando-se a transformação de Kuznetsov [35], que mapeia a variável angular no intervalo  $[0,1]$ , e aproximando-se o termo integral da equação de transporte por quadratura de Gauss. O sistema de equações diferenciais  $A_N$  é então resolvido analiticamente aplicando-se a transformada de Laplace, na variável espacial, e inversão analítica. Denota-se esta solução como  $LTA_N$  [36]. Neste trabalho, propõe-se também a construção de uma solução analítica para esta aproximação, também com dependência contínua na variável angular.

Recentemente, Barros [7] desenvolveu um esquema numérico para solução do problema de transporte aplicando o método dos elementos finitos na variável angular e resolvendo o sistema de equações diferenciais resultante, denominado  $LD_N$ , pelo método nodal SGF [9]. No presente trabalho, também encontra-se uma solução analítica para as equações  $LD_N$ , aplicando-se a transformada de Laplace neste sistema de equações diferenciais e resolvendo-se o sistema linear algébrico resultante pelo algoritmo de Trzaska, com inversão analítica do fluxo angular transformado. Este procedimento é denominado método  $LTLN$  [8].

Além disso, foram obtidas soluções exatas da equação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) em duas dimensões por Zabadal et allí [18-19] e Barros e Larsen [10] para os fluxos médios e fluxos angulares na fronteira, através dos métodos nodais, ou seja, procedendo-se a integração transversa do fluxo angular em cada uma das variáveis espaciais. Neste trabalho, apresenta-se uma formulação analítica para as aproximações  $Ch_N$  e  $S_N$  da equação de transporte em duas dimensões, expandindo-se o fluxo angular, na variável espacial  $y$ , em uma série de potências ou

em uma série truncada de funções ortogonais e aplicando-se a transformada de Laplace na variável espacial  $x$ . Destas aplicações, resulta um sistema linear para as componentes do fluxo angular transformado, que é invertido pelo algoritmo de Trzaska [29]. A principal característica deste método consiste no fato de que este fornece uma solução analítica para o fluxo angular em duas dimensões.

Finalmente, cabe ressaltar que o método geral de solução analítica para as aproximações mencionadas, resultante da aplicação da transformada de Laplace e do algoritmo de Trzaska, permite que seja feito um estudo comparativo entre as diversas aproximações consideradas, com o objetivo de verificar qual delas fornece resultados com precisão desejada com menor ordem de quadratura.

Este trabalho é apresentado da maneira que segue: no capítulo 2, são descritos os métodos  $LTW_N$  e  $LTCh_N$ , bem como uma formulação generalizada para as aproximações do fluxo angular em uma série truncada de funções ortogonais e sua resolução pela aplicação da transformada de Laplace e pelo algoritmo de Trzaska. No capítulo 3, é inicialmente discutido o método recursivo de inversão da matriz  $LTS_N$ , bem como o método de solução das aproximações  $A_N$  e  $LD_N$  aplicando transformada de Laplace e algoritmo de Trzaska. No capítulo 4, é estabelecida a solução do problema bidimensional de transporte usando expansão do fluxo angular em uma série de potências ou em uma série truncada de funções ortogonais na variável espacial  $y$  e os métodos  $LTCh_N$  ou  $LTS_N$ . No capítulo 5, são apresentados e comparados os resultados numéricos para as formulações expostas acima. As conclusões deste trabalho são estabelecidas no capítulo 6.



## 2. APROXIMAÇÃO DO FLUXO UNIDIMENSIONAL POR UMA SÉRIE TRUNCADA DE FUNÇÕES ORTOGONAIS

### 2.1. Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as aproximações da equação unidimensional de transporte [2], considerando espalhamento anisotrópico e um grupo de energia, obtidas por uma expansão do fluxo angular em uma série truncada de funções ortogonais, contínuas ou seccionalmente contínuas, na variável angular. O sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem resultante é resolvido analiticamente pela aplicação da transformada de Laplace e as componentes espaciais transformadas do fluxo angular são obtidas, também de forma analítica, pelo algoritmo de Trzaska [29] e expansão de Heaviside.

Para tal, considera-se o seguinte problema de transporte:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \varphi(x, \mu) = \sum_{k=0}^L \frac{2k+1}{2} f_k P_k(\mu) \int_{-1}^1 P_k(\mu) \varphi(x, \mu) d\mu + Q(x, \mu), \quad (2.1.1)$$

onde  $\varphi(x, \mu)$  é definido como o fluxo angular de partículas na posição  $x \in [0, a]$  e direção  $\mu$ , sujeito, por exemplo, as seguintes condições de contorno:

$$\varphi(0, \mu) = f(\mu), \text{ se } \mu > 0 \quad (2.1.1a)$$

e

$$\varphi(a, -\mu) = 0, \text{ se } \mu > 0. \quad (2.1.1b)$$

Os coeficientes  $f_k$  são parâmetros do modelo de espalhamento anisotrópico e as funções  $P_k(\mu)$  denotam os polinômios de Legendre [33].

As formulações  $LTW_N$  e  $LTCh_N$  são estabelecidas, respectivamente, nas seções 2.2 e 2.3. Na seção 2.4, é apresentada uma formulação generalizada para aproximações da equação de transporte obtidas pela expansão do fluxo angular em uma série truncada de funções ortogonais

na variável angular, bem como são representados os métodos  $LTP_N$ ,  $LTW_N$  e  $LTCh_N$  nesta formulação.

## 2.2. O Método $LTW_N$

As funções de Walsh (vide Anexo I [30]) constituem um conjunto ortonormal completo de funções seccionalmente contínuas em  $L_2([0,1], 1)$ . Portanto, a solução do problema linear de transporte (2.1.1), através da expansão do fluxo angular em uma série truncada das funções de Walsh na variável  $\mu$ , requer uma extensão de domínio destas funções para o intervalo  $[-1,1]$ . Com esta finalidade, as funções de Walsh  $\omega_n(\mu)$  são estendidas de forma par e ímpar, respectivamente, como segue [31-32]:

$$\omega_n^P(\mu) = \begin{cases} \omega_n(\mu), & \text{se } \mu \geq 0 \\ \omega_n(-\mu), & \text{se } \mu < 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

e

$$\omega_n^I(\mu) = \begin{cases} \omega_n(\mu), & \text{se } \mu \geq 0 \\ -\omega_n(-\mu), & \text{se } \mu < 0 \end{cases}, \quad (2.2.1a)$$

com  $n = 0 : N$ . As funções  $\omega_n^P(\mu)$  e  $\omega_n^I(\mu)$  são apresentadas, para  $n = 0:7$ , na Figura 2.2.1.

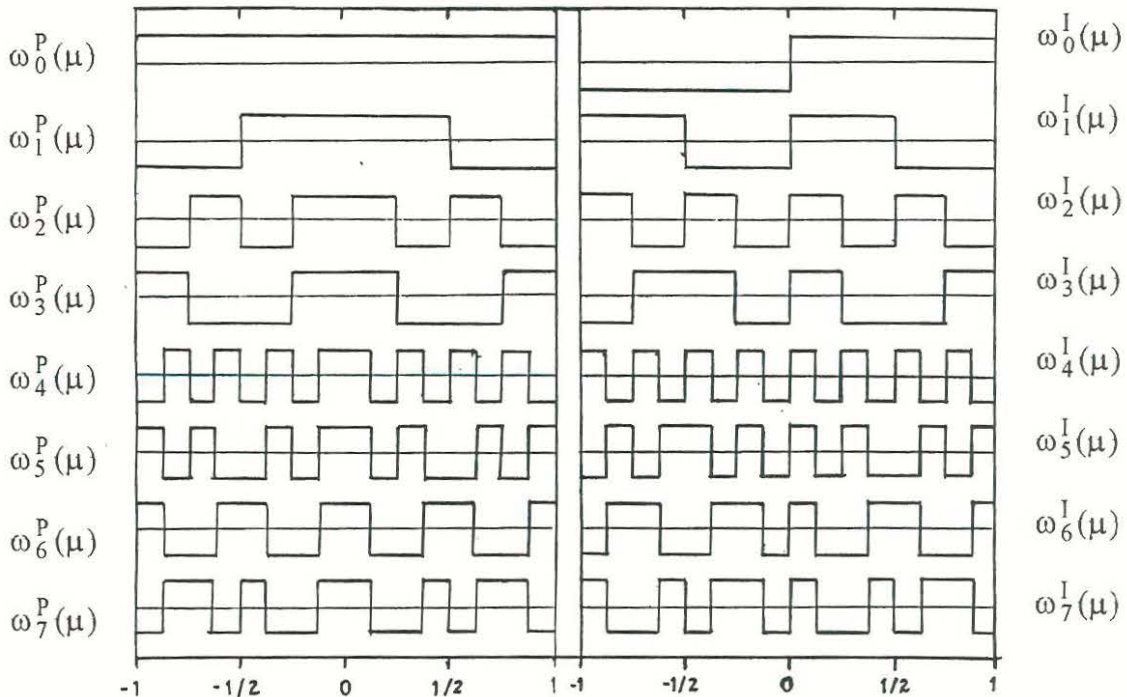


Figura 2.2.1. As funções  $\omega_n^P(\mu)$  e  $\omega_n^I(\mu)$ , para  $n = 0:7$ .

Uma função  $f(\mu)$ , definida no intervalo  $[-1,1]$ , pode ser expandida em termos destas funções estendidas, ou seja:

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \omega_n^P(\mu) + b_n \omega_n^I(\mu) \right], \quad (2.2.2)$$

onde:

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) \omega_n^P(\mu) d\mu \quad (2.2.2a)$$

e

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) \omega_n^I(\mu) d\mu. \quad (2.2.2b)$$

Neste ponto, é relevante enfatizar que Seed e Albrecht [3] procederam de uma forma diferente para estender o domínio das funções de Walsh para o intervalo  $[-1,1]$  (vide Anexo II).

Com o objetivo de utilizar as funções de Walsh para resolver o problema (2.1.1), o fluxo angular é aproximado pela expansão truncada:

$$\varphi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \left[ \alpha_n(x) \omega_n^P(\mu) + \beta_n(x) \omega_n^I(\mu) \right]. \quad (2.2.3)$$

Substituindo-se esta expressão para o fluxo angular na equação (2.1.1), multiplicando-se por  $\omega_m^P(\mu)$ , considerando  $m = 0:N$ , e integrando-se no intervalo  $[-1,1]$ , resulta:

$$\sum_{n=0}^N D_{n,m} \frac{d\beta_n}{dx}(x) + \alpha_m(x) = \sum_{k=0}^{[L/2]} (4k+1) f_{2k} P_m^{2k} \sum_{n=0}^N P_n^{2k} \alpha_n(x) + Q_m^P(x) \quad (2.2.4)$$

e, similarmente, multiplicando-se por  $\omega_m^I(\mu)$  e integrando-se, obtém-se:

$$\sum_{n=0}^N D_{n,m} \frac{d\alpha_n}{dx}(x) + \beta_m(x) = \sum_{k=0}^{[(L-1)/2]} (4k+3) f_{2k+1} P_m^{2k+1} \sum_{n=0}^N P_n^{2k+1} \beta_n(x) + Q_m^I(x), \quad (2.2.4a)$$

onde  $[L/2]$  denota a parte inteira de  $L/2$ ,

$$D_{n,m} = \begin{cases} 1/2, & \text{se } n = m \\ -2^{-(k+2)}, & \text{se } (n+m) \bmod 2 = 2^k, \text{ k inteiro positivo,} \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (2.2.4b)$$

$$Q_m^P(x) = \int_{-1}^1 Q(x,\mu) \omega_m^P(\mu) d\mu \quad (2.2.4c)$$

e

$$Q_m^I(x) = \int_{-1}^1 Q(x,\mu) \omega_m^I(\mu) d\mu, \quad (2.2.4d)$$

sendo que a notação  $(n+m) \bmod 2$  denota a soma em módulo 2 dos dígitos binários de  $n$  e  $m$  [30] e  $D_{n,m}$  resulta de uma combinação das equações (A1.4) e (A1.7) do Anexo I. Os coeficientes  $P_m^k$  são calculados pela integral:

$$P_m^k = \int_0^1 P_k(\mu) \omega_m(\mu) d\mu, \quad (2.2.4e)$$

e tabelados, para  $k, m = 0 : 7$ , por Cardona [31]. As equações (2.2.4) e (2.2.4a) são denominadas equações  $W_N$ .

Para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (2.2.4)-(2.2.4a), aplica-se a transformada de Laplace nestas equações, resultando a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & s\underline{\underline{D}} \\ s\underline{\underline{D}} & \underline{\underline{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\alpha}}(s) \\ \underline{\underline{\beta}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\beta}}(0) \\ \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\alpha}}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}^P(s) \\ \underline{\underline{Q}}^I(s) \end{bmatrix}, \quad (2.2.5)$$

onde a matriz  $\underline{\underline{D}}$  tem seus elementos definidos por (2.2.4b) e as matrizes  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  são definidas, respectivamente, por:



$$\left(\underline{\underline{A}}\right)_{n,m} = \delta_{n,m} - \sum_{k=0}^{[L/2]} (4k+1) f_{2k} P_m^{2k} P_n^{2k} \quad (2.2.5a)$$

e

$$\left(\underline{\underline{B}}\right)_{n,m} = \delta_{n,m} - \sum_{k=0}^{[(L-1)/2]} (4k+3) f_{2k+1} P_m^{2k+1} P_n^{2k+1}, \quad (2.2.5b)$$

com  $\delta_{n,m}$  denotando o delta de Kronecker. Os vetores  $\underline{\underline{\alpha}}(s)$ ,  $\underline{\underline{\beta}}(s)$ ,  $\underline{\underline{Q}}^P(s)$  e  $\underline{\underline{Q}}^I(s)$  denotam, respectivamente, a transformada de Laplace dos vetores  $\underline{\alpha}(x) = [\alpha_0(x) \dots \alpha_N(x)]^T$ ,  $\underline{\beta}(x) = [\beta_0(x) \dots \beta_N(x)]^T$ ,  $\underline{Q}^P(x) = [Q_0^P(x) \dots Q_N^P(x)]^T$  e  $\underline{Q}^I(x) = [Q_0^I(x) \dots Q_N^I(x)]^T$ . Os vetores  $\underline{\alpha}(x)$  e  $\underline{\beta}(x)$  são determinados resolvendo a equação matricial (2.2.5) pelo algoritmo de Trzaska [29] e pela inversão da transformada de Laplace pela técnica de expansão de Heaviside, sendo dados por:

$$\begin{bmatrix} \underline{\alpha}(x) \\ \underline{\beta}(x) \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^{2N+2} \exp(\rho_k x) \underline{\underline{\Delta}}_k \right\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\beta}(0) \\ \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\alpha}(0) \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^{2N+2} \exp(\rho_k x) \underline{\underline{\Delta}}_k \right\} * \begin{bmatrix} \underline{Q}^P(x) \\ \underline{Q}^I(x) \end{bmatrix}, \quad (2.2.6)$$

onde os coeficientes  $\rho_k$  são as raízes do polinômio característico da matriz que aparece no lado esquerdo da equação (2.2.5) e  $\underline{\underline{\Delta}}_k$  são matrizes resultantes da aplicação do algoritmo de Trzaska.

O símbolo \* denota a operação de convolução.

Os vetores desconhecidos  $\underline{\alpha}(0)$  e  $\underline{\beta}(0)$  são determinados usando-se as condições de contorno (2.1.1a) e (2.1.1b) com o fluxo angular expandido em termos das funções de Walsh estendidas, multiplicadas por  $\omega_m(\mu)$  e integradas em  $\mu \in [0,1]$ . Este procedimento resulta no seguinte sistema linear:

$$\alpha_m(0) + \beta_m(0) = \int_0^1 f(\mu) \omega_m(\mu) d\mu \quad (2.2.7)$$

e

$$\alpha_m(a) + \beta_m(a) = 0, m = 0:N. \quad (2.2.7a)$$

Substituindo-se os valores de  $\underline{\alpha}(x)$  e  $\underline{\beta}(x)$ , dados em (2.2.6), nas equações (2.2.7) e (2.2.7a), obtém-se um sistema linear para os vetores desconhecidos  $\underline{\alpha}(0)$  e  $\underline{\beta}(0)$ . Finalmente, resolvido este sistema linear, as funções  $\alpha_n(x)$  e  $\beta_n(x)$ , dadas por (2.2.6), ficam completamente determinadas e, conseqüentemente, uma formulação analítica para o fluxo angular em termos das funções de Walsh estendidas é estabelecida na equação (2.2.3).

### 2.3. O Método LTCh<sub>N</sub>

Expandindo-se o fluxo angular, na variável  $\mu$ , em termos dos polinômios de Chebyshev [5-6], ou seja:

$$\varphi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{n=0}^N \alpha_n(x) T_n(\mu), \text{ com } N \text{ ímpar}, \quad (2.3.1)$$

substituindo-se na equação (2.1.1), multiplicando-se por  $T_m(\mu)$ , sendo  $m = 0:N$ , e integrando-se em  $\mu$  no intervalo  $[-1,1]$ , obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem para a componente espacial  $\alpha_n(x)$ :

$$\sum_{n=0}^N \beta_{n,m}^1 \frac{d\alpha_n(x)}{dx} + \frac{\pi}{2-\delta_{m,0}} \alpha_m(x) = \sum_{k=0}^L \frac{2k+1}{2} f_k \beta_{m,k}^2 \sum_{n=0}^N \beta_{n,k}^3 \alpha_n(x) + Q_m(x), \quad (2.3.2)$$

onde

$$\beta_{n,m}^1 = \frac{\pi \delta_{|n-m|,1}}{2(2-\delta_{n+m,1})}, \quad (2.3.2a)$$

$$\beta_{n,k}^2 = \int_{-1}^1 T_n(\mu) P_k(\mu) d\mu, \quad (2.3.2b)$$

$$\beta_{n,k}^3 = \int_{-1}^1 \frac{T_n(\mu) P_k(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (2.3.2c)$$

e

$$Q_m(x) = \int_{-1}^1 Q(x, \mu) T_m(\mu) d\mu, \quad (2.3.2d)$$

com  $\delta_{n,m}$  denotando o delta de Kronecker.



Os coeficientes  $\beta_{n,k}^2$  e  $\beta_{n,k}^3$  são calculados por uma fórmula de recorrência derivada da multiplicação das fórmulas geradoras dos polinômios de Legendre e de Chebyshev [30] e integração da equação resultante. Deste procedimento obtém-se:

$$\beta_{n,k+1}^m = \frac{2k+1}{2k+2} [\beta_{n+1,k}^m + \beta_{n-1,k}^m] - \frac{k}{k+1} \beta_{n,k-1}^m, \text{ com } m = 2 \text{ ou } 3, \quad (2.3.3)$$

para  $k > 2$ , enquanto que para  $k = 0$  e  $1$  os coeficientes  $\beta_{n,k}^2$  e  $\beta_{n,k}^3$  assumem os valores:

$$\beta_{n,k}^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } n+k \text{ é ímpar} \\ \frac{2}{(1+k)^2 - n^2}, & \text{se } n+k \text{ é par} \end{cases} \quad (2.3.3a)$$

e

$$\beta_{n,k}^3 = \frac{\pi \delta_{n,k}}{2 - \delta_{k,0}}. \quad (2.3.3b)$$

As equações diferenciais ordinárias (2.3.2) são denominadas equações  $Ch_N$  e são resolvidas analiticamente pelo uso da transformada de Laplace, resultando na equação matricial:

$$(\underline{sA} + \underline{B}) \cdot \underline{\bar{\alpha}}(s) = \underline{A} \cdot \underline{\alpha}(0) + \underline{Q}(s), \quad (2.3.4)$$

onde as matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  são definidas, respectivamente, por:

$$(\underline{A})_{n,m} = \beta_{n-1,m-1}^1 \quad (2.3.4a)$$

e

$$(\underline{B})_{n,m} = \frac{\pi}{2 - \delta_{1,m}} \delta_{n,m} - \sum_{k=0}^L \frac{2k+1}{2} f_k \beta_{n-1,k}^2 \beta_{m-1,k}^3, \quad (2.3.4b)$$

sendo que os vetores  $\underline{\bar{\alpha}}(s)$  e  $\underline{Q}(s)$  denotam, respectivamente, a transformada de Laplace de

$\underline{\alpha}(x) = [\alpha_0(x) \dots \alpha_N(x)]^T$  e  $\underline{Q}(x) = [Q_0(x) \dots Q_N(x)]^T$ . O vetor  $\underline{\alpha}(x)$  é determinado

resolvendo-se a equação matricial (2.3.4) pelo algoritmo de Trzaska [29] e pela inversão da transformada de Laplace pela técnica de expansão de Heaviside, sendo dado por:

$$\underline{\alpha}(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{2N+2} \exp(\rho_k x) \underline{\Delta}_k \right\} \cdot \underline{A} \cdot \underline{\alpha}(0) + \left\{ \sum_{k=1}^{2N+2} \exp(\rho_k x) \underline{\Delta}_k \right\} * \underline{Q}(x), \quad (2.3.5)$$

onde os coeficientes  $\rho_k$  são os autovalores da matriz  $\underline{A}^{-1}\underline{B}$  e  $\underline{\Delta}_k$  são matrizes resultantes da aplicação do algoritmo de Trzaska. O símbolo \* denota a operação de convolução.

O vetor desconhecido  $\underline{\alpha}(0)$  é determinado utilizando-se as condições de contorno (2.1.1a) e (2.1.1b) com o fluxo angular expandido em termos dos polinômios de Chebyshev, multiplicadas por  $T_m(\mu)$ , considerando  $m = 0, 2, 4, \dots, N-1$ , e integradas no intervalo  $[0,1]$ , resultando no seguinte sistema linear:

$$\sum_{n=0}^N \chi_n^m \alpha_n(0) = \int_0^1 f(\mu) T_m(\mu) d\mu \quad (2.3.6)$$

e

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \chi_n^m \alpha_n(a) = 0, \quad (2.3.6a)$$

onde

$$\chi_n^m = \begin{cases} \frac{n(-1)^{(m+n+1)/2}}{m^2 - n^2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{\pi}{2(2 - \delta_{m,0})}, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (2.3.6b)$$

Substituindo-se os valores de  $\underline{\alpha}(x)$ , dados em (2.3.5), nas equações (2.3.6) e (2.3.6a), resulta um sistema linear para o vetor  $\underline{\alpha}(0)$ . Sendo este resolvido, ficam completamente

determinadas em (2.3.5) as funções  $\alpha_n(x)$  e uma formulação analítica para o fluxo angular em termos dos polinômios de Chebyshev é estabelecida por (2.3.1).

## 2.4. A Formulação Generalizada

Visando generalizar as formulações apresentadas nas seções 2.2 e 2.3, considera-se um conjunto completo de funções ortogonais,  $\Theta_n(\mu)$ , linearmente independentes que constituem uma base do espaço de Hilbert  $L_2([-1,1], p(\mu))$ , dotado do produto interno [30]:

$$\langle u(\mu), v(\mu) \rangle = \int_{-1}^1 p(\mu) u(\mu) v(\mu) d\mu, \quad (2.4.1)$$

para todas as funções  $u(\mu)$  e  $v(\mu)$  neste espaço. Então, expandindo-se o fluxo angular em uma série truncada destas funções, tem-se:

$$\varphi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \psi_n(x) \Theta_n(\mu), \quad N \text{ ímpar}. \quad (2.4.2)$$

Substituindo-se (2.4.2) na equação (2.1.1), resulta:

$$\sum_{n=0}^N \left\{ \mu \frac{d\psi_n}{dx}(x) + \psi_n(x) \right\} \Theta_n(\mu) = \sum_{k=0}^L \frac{2k+1}{2} f_k P_k(\mu) \sum_{n=0}^N \alpha_n(k) \psi_n(x) + Q(x, \mu), \quad (2.4.3)$$

onde:

$$\alpha_n(k) = \int_{-1}^1 P_k(\mu) \Theta_n(\mu) d\mu. \quad (2.4.3a)$$

As equações da formulação generalizada são obtidas pela aplicação do produto interno da equação (2.4.3) por  $\Theta_m(\mu)$ :

$$\sum_{n=0}^N \lambda_n^m \frac{d\psi_n}{dx}(x) + \mathfrak{G}_m \psi_m(x) = \sum_{k=0}^L \frac{2k+1}{2} f_k \beta_m(k) \sum_{n=0}^N \alpha_n(k) \psi_n(x) + Q_m(x), \quad (2.4.4)$$

com  $m = 0:N$ , onde  $\mathfrak{G}_m$  denota o quadrado da norma de  $\Theta_m(\mu)$ ,

$$\lambda_n^m = \langle \mu \Theta_n(\mu), \Theta_m(\mu) \rangle, \quad (2.4.4a)$$

$$\beta_m(k) = \langle P_k(\mu), \Theta_m(\mu) \rangle \quad (2.4.4b)$$

e

$$Q_m(x) = \langle Q(x, \mu), \Theta_m(\mu) \rangle. \quad (2.4.4c)$$

Para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias (2.4.4), aplica-se a transformada de Laplace, resultando a seguinte equação matricial:

$$(\underline{s}\underline{A} + \underline{B})\underline{\Psi}(s) = \underline{A}\underline{\Psi}(0) + \underline{Q}(s), \quad (2.4.5)$$

onde os vetores  $\underline{\Psi}(x)$  e  $\underline{Q}(x)$  são definidos, respectivamente, como  $[\psi_0(x) \dots \psi_N(x)]^T$  e  $[Q_0(x) \dots Q_N(x)]^T$ . Os componentes  $a_{i,j}$  e  $b_{i,j}$  das matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  são, respectivamente, definidos por:

$$a_{i,j} = \lambda_{j-1}^{i-1} \quad (2.4.5a)$$

e

$$b_{i,j} = \vartheta_{i-1} \delta_{i,j} - \sum_{k=0}^L \frac{2k+1}{2} f_k \beta_{i-1}(k) \alpha_{j-1}(k). \quad (2.4.5b)$$

A barra representa transformada de Laplace na variável espacial e o coeficiente  $\delta_{i,j}$  denota o delta de Kronecker. Invertendo-se a matriz  $\underline{s}\underline{A} + \underline{B}$  pelo algoritmo de Trzaska [29] e o vetor transformado  $\underline{\Psi}(s)$ , resulta:

$$\underline{\Psi}(x) = \left\{ \sum_{n=0}^N \exp(\rho_n x) \underline{\Delta}_n \right\} \cdot \underline{A} \underline{\Psi}(0) + \left\{ \sum_{n=0}^N \exp(\rho_n x) \underline{\Delta}_n \right\} * \underline{Q}(x). \quad (2.4.6)$$

As constantes  $\rho_n$  que aparecem na equação (2.4.6) são os autovalores da matriz  $\underline{A}^{-1}\underline{B}$  e as matrizes  $\underline{\Delta}_n$  são as resultantes da aplicação do algoritmo de Trzaska. O símbolo \* denota a operação de convolução.



Visando-se determinar os  $(N+1)$  componentes do vetor  $\underline{\Psi}(0)$ ,  $(N+1)$  condições devem ser estabelecidas. Para tal, são aplicadas as condições de contorno (2.1.1a) e (2.1.1b), multiplicadas pelas funções pré-determinadas  $\Phi_m(\mu)$ , com  $m = 0:(N-1)/2$ , e integradas em  $\mu$  no intervalo  $[0,1]$ . Este procedimento gera o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{n=0}^N \int_0^1 p(\mu) \Theta_n(\mu) \Phi_m(\mu) d\mu \psi_n(0) = \int_0^1 f(\mu) \Phi_m(\mu) d\mu \quad (2.4.7)$$

e

$$\sum_{n=0}^N \int_0^1 p(-\mu) \Theta_n(-\mu) \Phi_m(\mu) d\mu \psi_n(a) = 0. \quad (2.4.7a)$$

Substituindo-se  $\Psi(0)$  e  $\Psi(a)$ , dados pela equação (2.4.6), nas condições de contorno (2.4.7) e (2.4.7a), resulta um sistema linear, que resolvido determina os componentes do vetor  $\underline{\Psi}(0)$ . Deste modo, o fluxo angular de partículas expresso pela equação (2.4.2) fica completamente determinado em forma analítica.

Concluindo, obtém-se uma formulação que generaliza as aproximações da equação unidimensional de transporte resultantes da expansão do fluxo angular na variável angular em uma série truncada de funções ortogonais contínuas (polinômios de Legendre, no método  $LTP_N$ , e polinômios de Chebyshev, no método  $LTCh_N$ ) ou seccionalmente contínuas (funções extendidas de Walsh, na formulação  $LTW_N$ ), com solução analítica pela aplicação da transformada de Laplace e inversão analítica pelo algoritmo de Trzaska.

### 3. SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE ATRAVÉS DA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANGULAR

#### 3.1. Introdução

Neste capítulo, apresenta-se soluções analíticas para aproximações da equação unidimensional de transporte discretas na variável angular (aproximações  $S_N$  [11-12] e  $A_N$  [36]) ou soluções por elementos finitos no domínio angular (aproximação  $LD_N$  [7-8]). O sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem para os fluxos angulares nas direções discretas é resolvido pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, resolução do sistema algébrico resultante e inversão dos fluxos transformados.

Este capítulo é organizado na seguinte maneira: na seção 3.2, é apresentado um método recursivo de inversão da matriz  $LTS_N$ ; na seção 3.3, é estabelecido o método  $LTA_N$ , para espalhamento anisotrópico; na seção 3.4, é obtida uma solução analítica para o fluxo angular pela formulação  $LTA_N$  com dependência contínua da variável angular; e na seção 3.5, o método  $LTLD_N$  é descrito para problemas de transporte com isotropia.

### 3.2. Método Recursivo De Inversão da Matriz $LTS_N$

A principal dificuldade na aplicação do método  $LTS_N$ , sendo  $N > 16$ , consiste na inversão da matriz  $LTS_N$  [11-12]. A seguir descreve-se um método alternativo de inversão desta matriz, decompondo-a em blocos e invertendo-os recursivamente. Este esquema é denominado método recursivo.

Com o objetivo de elucidar a idéia do método recursivo, considera-se o seguinte problema  $S_N$  isotrópico [11-12]:

$$\mu_n \frac{d\varphi_n(x)}{dx} + \varphi_n(x) = \frac{c}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k \varphi_k(x), \text{ com } n = 1:N, \quad (3.2.1)$$

onde  $\mu_n$  e  $\omega_n$  denotam as abscissas e os pesos da fórmula de quadratura utilizada,  $\varphi_n(x)$  representa o fluxo angular na direção  $\mu_n$  e  $c$  denota o número médio de partículas emitidas por colisão.

Para este problema, a matriz  $LTS_N$  é escrita como [11-12]:

$$\underline{\underline{A}}_N(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\mu_1} - \frac{c\omega_1}{2\mu_1} & -\frac{c\omega_2}{2\mu_1} & \dots & -\frac{c\omega_N}{2\mu_1} \\ -\frac{c\omega_1}{2\mu_2} & s + \frac{1}{\mu_2} - \frac{c\omega_2}{2\mu_2} & \dots & -\frac{c\omega_N}{2\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{c\omega_1}{2\mu_N} & -\frac{c\omega_2}{2\mu_N} & \dots & s + \frac{1}{\mu_N} - \frac{c\omega_N}{2\mu_N} \end{bmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Realizando operações elementares sobre a matriz  $\underline{\underline{A}}_N(s)$ , ou seja, subtrações de linhas, obtém-se a denominada matriz  $LTS_N$  modificada, denotada  $\underline{\underline{A}}_N^*(s)$ , cujos elementos são expressos como:



$$a_{i,j}^* = \begin{cases} (1 + s\mu_1)\delta_{j,1} - \frac{c}{2}\omega_j, & \text{se } i = 1 \\ (1 + s\mu_i), & \text{se } i \neq 1 \text{ e } i = j \\ -(1 + s\mu_j), & \text{se } i \neq 1 \text{ e } i = j + 1 \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases}, \quad (3.2.3)$$

onde  $\delta_{i,j}$  entende-se como o delta de Kronecker.

Para calcular recursivamente a inversa da matriz  $\underline{\underline{A}}_N^*(s)$ , começa-se definindo as seguintes matrizes:

$$\underline{\underline{B}}_n(s) = \begin{bmatrix} & & & & -\frac{c}{2}\omega_n \\ & & & & 0 \\ & & \underline{\underline{B}}_{n-1}(s) & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -(1 + s\mu_{n-1}) & (1 + s\mu_n) \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

para  $n = 2:N$  e  $\underline{\underline{B}}_1(s) = (1 + s\mu_1) - \frac{c}{2}\omega_1$ . É importante observar que  $\underline{\underline{B}}_n(s)$  tem estrutura possível de ser invertida pelo método do particionamento [26]. Seguindo este procedimento, resulta a seguinte fórmula para a inversa da matriz  $\underline{\underline{B}}_n(s)$ :

$$\underline{\underline{B}}_n^{-1}(s) = \frac{1}{D_n(s)} \underline{\underline{P}}^n(s), \text{ com } n = 2:N, \quad (3.2.5)$$

onde  $D_n(s)$  denota o determinante da matriz  $\underline{\underline{B}}_n(s)$  e  $\underline{\underline{P}}^n(s)$  é a matriz adjunta de  $\underline{\underline{B}}_n(s)$ , cujos elementos são definidos como:

$$P_{n,j}^n(s) = (1 + s\mu_{n-1}) \cdot P_{n-1,j}^{n-1}(s), \quad (3.2.6a)$$

se  $j = 1:(n-1)$ , ou:

$$P_{i,n}^n(s) = \frac{c}{2} \cdot \omega_n \cdot P_{i,1}^{n-1}(s), \quad (3.2.6b)$$

se  $i = 1:(n-1)$ , ou:

$$P_{n,n}^n(s) = D_{n-1}(s), \quad (3.2.6c)$$

ou:

$$P_{i,j}^n(s) = \frac{P_{i,j}^{n-1}(s) \cdot D_n(s) + \frac{c}{2} \cdot \omega_n \cdot P_{i,1}^{n-1}(s) \cdot P_{n-1,j}^{n-1}(s) \cdot (1 + s\mu_{n-1})}{D_{n-1}(s)}, \quad (3.2.6d)$$

se  $D_{n-1}(s) \neq 0$  e  $i, j = 1:(n-1)$ , ou:

$$P_{i,j}^n(s) = \frac{c}{2} \cdot (1 + s\mu_{n-2}) \cdot \frac{\omega_{n-1}^2 \cdot (1 + s\mu_n) + \omega_n^2 \cdot (1 + s\mu_{n-1})}{\omega_{n-1} \cdot D_{n-2}(s)} \cdot P_{i,1}^{n-2}(s) \cdot P_{n-2,j}^{n-2}(s) + \frac{P_{i,j}^{n-1}(s)}{D_{n-2}(s)}, \quad (3.2.6e)$$

se  $D_{n-1}(s) = 0$  e  $i, j = 1:(n-2)$ , ou:

$$P_{n-1,j}^n(s) = (1 + s\mu_n) \cdot P_{n-1,j}^{n-1}(s), \quad (3.2.6f)$$

se  $D_{n-1}(s) = 0$  e  $j = 1:(n-2)$ , ou:

$$P_{i,n-1}^n(s) = \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega_{n-1}^2 \cdot (1 + s\mu_n) + \omega_n^2 \cdot (1 + s\mu_{n-1})}{\omega_{n-1}} \cdot P_{i,1}^{n-2}(s), \quad (3.2.6g)$$

se  $D_{n-1}(s) = 0$  e  $i = 1:(n-2)$ , ou:

$$P_{n-1,n-1}^n(s) = (1 + s\mu_n) \cdot D_{n-2}(s), \quad (3.2.6h)$$

se  $D_{n-1}(s) = 0$ , com  $n = 3:N$ . Aqui, para  $n = 2$ , temos:  $P_{11}^2(s) = 1 + s\mu_2$ ;  $P_{12}^2(s) = \frac{c}{2}\omega_2$ ;  
 $P_{21}^2(s) = 1 + s\mu_1$  e  $P_{22}^2(s) = 1 + s\mu_1 - \frac{c}{2}\omega_1$ .

Explorando a estrutura da matriz  $\underline{\underline{B}}_n(s)$ , a seguinte fórmula de recorrência para seu determinante é obtida e dada por:

$$D_n(s) = (1 + s\mu_n) \cdot D_{n-1}(s) - \frac{c}{2} \cdot \omega_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (1 + s\mu_k), \quad n = 3:N, \quad (3.2.7)$$

onde tem-se que  $D_2(s) = (1 + s\mu_1)(1 + s\mu_2) - \frac{c}{2}[\omega_1(1 + s\mu_2) + \omega_2(1 + s\mu_1)]$ . Então, substituindo-se (3.2.7), para  $n$  decrescente, sucessivamente no lado direito da equação (3.2.7), obtém-se que:

$$D_n(s) = \prod_{k=1}^n (1 + s\mu_k) - \frac{c}{2} \sum_{m=1}^n \omega_m \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n (1 + s\mu_k), \quad n = 2:N. \quad (3.2.8)$$

Finalmente, observando-se que  $\underline{\underline{A}}_N^*(s) = \underline{\underline{B}}_N(s)$ , a solução  $LTS_N$  é então apresentada como [11-12]:

$$\underline{\underline{\varphi}}(x) = \left\{ \sum_{n=0}^N \exp(s_n x) \underline{\underline{\Delta}}_n \right\} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}, \quad (3.2.9)$$

onde os vetores coluna  $\underline{\underline{\varphi}}(x)$  e  $\underline{\underline{\Gamma}}$  são definidos, respectivamente, como  $[\varphi_0(x) \dots \varphi_N(x)]^T$  e  $[\mu_1\varphi_1(0) \ \mu_2\varphi_2(0) - \mu_1\varphi_1(0) \ \dots \ \mu_N\varphi_N(0) - \mu_{N-1}\varphi_{N-1}(0)]^T$ , os coeficientes  $s_n$  denotam os autovalores da matriz  $\underline{\underline{A}}_N(s)$  e:

$$\underline{\underline{\Delta}}_n = \frac{1}{D'_N(s_n)} P^N(s_n). \quad (3.2.10)$$

Aqui,  $D'_N(s)$  denota a derivada de  $D_N(s)$ .

Concluindo, é relevante enfatizar que a matriz adjunta  $\underline{P}^n(s)$ , descrita pelas equações (3.2.6), está bem definida, porque os determinantes  $D_{n-1}(s)$  e  $D_{n-2}(s)$  não se anulam simultaneamente quando  $s = s_k$ . Este resultado pode ser facilmente obtido de uma cuidadosa observação das equações (3.2.7) e (3.2.8). Simulações preliminares para  $N = 180$ , com pequeno tempo de computação, indicam que o método recursivo de inversão da matriz  $LTS_N$  é um algoritmo promissor, sob o ponto de vista computacional, no sentido de permitir a aplicação do método  $LTS_N$  na solução de problemas  $S_N$  com elevada ordem de quadratura.

### 3.3. A Formulação $LTA_N$

A aproximação  $A_N$ , proposta por Coppa e Ravetto [6], da equação de transporte unidimensional em geometria cartesiana, para espalhamento anisotrópico, é obtida de uma nova maneira, utilizando-se a transformação de Kuznetsov [35], que mapeia a variável angular no intervalo  $[0,1]$ , e aproximando-se o termo integral da equação de transporte por quadratura de Gauss. Este sistema de equações diferenciais é então resolvido, de forma analítica, aplicando-se transformada de Laplace na variável espacial e inversão analítica do fluxo angular nas direções discretas. Esta solução é denominada  $LTA_N$  [36].

Para expressar esta idéia, aplica-se a transformação de Kuznetsov [35] no problema (2.1.1), definida como:

$$\varphi(x, \mu) = \begin{cases} u(x, \mu) + v(x, \mu), & \text{se } \mu > 0 \\ u(x, -\mu) - v(x, -\mu), & \text{se } \mu < 0 \end{cases}, \quad (3.3.1)$$

aproxima-se o termo integral da equação (2.1.1) pelo esquema de quadratura de Gauss e utiliza-se a idéia das ordenadas discretas, resultando:

$$\mu_k \frac{\partial v}{\partial x}(x, \mu_k) + u(x, \mu_k) = \sum_{m=0}^{[L/2]} \frac{4m+1}{2} f_{2m} P_{2m}(\mu_k) J_{2m}^N(x) + Q^P(x, \mu_k) \quad (3.3.2a)$$

e

$$\mu_k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu_k) + v(x, \mu_k) = \delta_L \sum_{m=0}^{[(L-1)/2]} \frac{4m+3}{2} f_{2m+1} P_{2m+1}(\mu_k) J_{2m+1}^N(x) + Q^I(x, \mu_k), \quad (3.3.2b)$$

sendo que as condições de contorno são reescritas como:

$$u(0, \mu_k) + v(0, \mu_k) = f(\mu_k) \quad (3.3.2c)$$

e

$$u(a, \mu_k) - v(a, \mu_k) = 0, \quad (3.3.2d)$$



para  $k = 1, 2, \dots, N$ , onde

$$Q^P(x, \mu) = \frac{Q(x, \mu) + Q(x, -\mu)}{2}, \quad (3.3.3a)$$

$$Q^I(x, \mu) = \frac{Q(x, \mu) - Q(x, -\mu)}{2}, \quad (3.3.3b)$$

$$J_{2m}^N(x) = 2 \sum_{k=1}^N \pi_k P_{2m}(\mu_k) u(x, \mu_k) \quad (3.3.3c)$$

e

$$J_{2m+1}^N(x) = 2 \sum_{k=1}^N \pi_k P_{2m+1}(\mu_k) v(x, \mu_k). \quad (3.3.3d)$$

O parâmetro  $\delta_L$  assume o valor um, se  $L \neq 0$ , e zero, se  $L = 0$ , e  $[L/2]$  denota a parte inteira de  $L/2$ . As constantes  $\pi_k$  e  $\mu_k$  denotam os pesos e as abscissas referentes à quadratura de Gauss.

Para resolver o problema (3.3.2), aplica-se a transformada de Laplace nas equações (3.3.2a) e (3.3.2b), resultando a seguinte equação matricial:

$$\left( \underline{sI} - \underline{A} \right) \begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}(s) \\ \underline{\bar{v}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}(0) \\ \underline{v}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{Q}}^I(s) \\ \underline{\bar{Q}}^P(s) \end{bmatrix}, \quad (3.3.4)$$

onde os vetores  $\underline{u}(x)$ ,  $\underline{v}(x)$ ,  $\underline{Q}^P(x)$  e  $\underline{Q}^I(x)$  são definidos como  $[u(x, \mu_1) \dots u(x, \mu_N)]^T$ ,  $[v(x, \mu_1) \dots v(x, \mu_N)]^T$ ,  $[Q^P(x, \mu_1)/\mu_1 \dots Q^P(x, \mu_N)/\mu_N]^T$  e  $[Q^I(x, \mu_1)/\mu_1 \dots Q^I(x, \mu_N)/\mu_N]^T$ , respectivamente. O símbolo  $\underline{I}$  denota a matriz identidade e os elementos da matriz  $\underline{A}$  são definidos como:

$$\underline{(A)}_{i,j} = \begin{cases} D_i^i - \frac{1}{\mu_i}, & \text{se } i = j - N \\ E_j^j - \frac{1}{\mu_j}, & \text{se } i - N = j \\ E_{i-N}^j, & \text{se } j \leq N, i > N \text{ e } i - N \neq j \\ D_i^{j-N}, & \text{se } i \leq N, j > N \text{ e } i \neq j - N \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}, \quad (3.3.5a)$$

onde:

$$E_k^n = \sum_{m=0}^{[L/2]} \frac{4m+1}{2} f_{2m} P_{2m}(\mu_k) \frac{\pi_n}{\mu_k} P_{2m}(\mu_n) \quad (3.3.5b)$$

e

$$D_k^n = \delta_L \sum_{m=0}^{[(L-1)/2]} \frac{4m+3}{2} f_{2m+1} P_{2m+1}(\mu_k) \frac{\pi_n}{\mu_k} P_{2m+1}(\mu_n). \quad (3.3.5c)$$

A barra denota a transformada de Laplace, na variável espacial, das componentes do fluxo angular e da fonte. Resolvendo-se a equação matricial (3.3.4) pelo algoritmo de Trzaska [29] e invertendo-se a transformada de Laplace por meio da técnica de expansão de Heaviside, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(x) \\ \underline{v}(x) \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^{2N} \exp(\rho_k x) \underline{\Delta}_k \right\} \begin{bmatrix} \underline{u}(0) \\ \underline{v}(0) \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^{2N} \exp(\rho_k x) \underline{\Delta}_k \right\} * \begin{bmatrix} \underline{Q}^I(x) \\ \underline{Q}^P(x) \end{bmatrix}, \quad (3.3.6)$$

que é a solução para o problema (3.3.2), onde os coeficientes  $\rho_k$  são os autovalores da matriz  $\underline{A}$  e as matrizes  $\underline{\Delta}_k$  resultam da aplicação do algoritmo de Trzaska. Os vetores desconhecidos  $\underline{u}(0)$  e  $\underline{v}(0)$  são então estabelecidos aplicando-se as condições de contorno (3.3.2c) e (3.3.2d). A solução da aproximação  $A_N$  é então obtida usando-se (3.3.6) em (3.3.1), e o fluxo escalar é determinado por  $J_0^N(x)/2$  na equação (3.3.3c).

### 3.4. Fluxo Angular com Dependência Contínua na Variável Angular

Com o objetivo de obter uma solução aproximada para o problema de transporte (2.1.1) com dependência contínua na variável angular, a transformação de Kuznetsov (3.3.1) é então aplicada na equação (2.1.1), resultando:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x}(x, \mu) + u(x, \mu) = \Phi_1(\underline{u}(x), \mu), \quad (3.4.1a)$$

e

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) + v(x, \mu) = \Phi_2(\underline{v}(x), \mu), \quad (3.4.1b)$$

sujeitas as condições de contorno:

$$u(0, \mu) + v(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0 \quad (3.4.1c)$$

e

$$u(a, \mu) - v(a, \mu) = 0, \quad \mu > 0, \quad (3.4.1d)$$

onde:

$$\Phi_1(\underline{u}(x), \mu) = \sum_{m=0}^{[L/2]} (4m+1) f_{2m} P_{2m}(\mu) \sum_{n=1}^N \pi_n P_{2m}(\mu_n) u(x, \mu_n) + Q^P(x, \mu) \quad (3.4.2a)$$

e

$$\Phi_2(\underline{v}(x), \mu) = \sum_{m=0}^{[\frac{L-1}{2}]} (4m+3) f_{2m+1} P_{2m+1}(\mu) \sum_{n=1}^N \pi_n P_{2m+1}(\mu_n) v(x, \mu_n) + Q^I(x, \mu). \quad (3.4.2b)$$

As funções  $\Phi_1(\underline{u}(x), \mu)$  and  $\Phi_2(\underline{v}(x), \mu)$  são estabelecidas, calculando-se o termo integral por quadratura de Gauss e considerando-se que os vetores  $\underline{u}(x)$  e  $\underline{v}(x)$  são expressos pela solução  $LTA_N$  na equação (3.3.6).

É bem conhecido que um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é equivalente a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem [37]. Consequentemente, o problema (3.4.1) pode ser reescrito como:

$$-\mu^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x, \mu) + \chi(x, \mu) = \xi(x, \mu) - \mu \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, \mu), \quad (3.4.3a)$$

sujeito as condições de contorno:

$$-\mu \frac{\partial \chi}{\partial x}(0, \mu) + \chi(0, \mu) = f(\mu) - \eta(0, \mu) \quad (3.4.3b)$$

e

$$\mu \frac{\partial \chi}{\partial x}(a, \mu) + \chi(a, \mu) = \eta(a, \mu). \quad (3.4.3c)$$

É importante notar que o problema (3.4.3) é satisfeito por ambas funções  $u(x, \mu)$  e  $v(x, \mu)$ , e tem como solução [37]:

$$\begin{aligned} \chi(x, \mu) = & \left[ \frac{e^{-a/\mu}}{2} \eta(a, \mu) - \frac{1}{2} \int_x^a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x'}(x', \mu) - \frac{\xi(x', \mu)}{\mu} \right) e^{-x'/\mu} dx' \right] e^{x/\mu} \\ & + \left[ \frac{f(\mu) - \eta(0, \mu)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial \eta}{\partial x'}(x', \mu) - \frac{\xi(x', \mu)}{\mu} \right) e^{x'/\mu} dx' \right] e^{-x/\mu}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Quando o problema é considerado para  $u(x, \mu)$ , as funções  $\xi(x, \mu)$  e  $\eta(x, \mu)$  assumem respectivamente os valores  $\Phi_1(\underline{u}(x), \mu)$  e  $\Phi_2(\underline{v}(x), \mu)$ , enquanto que para  $v(x, \mu)$  as funções são dadas respectivamente por  $\Phi_2(\underline{v}(x), \mu)$  e  $\Phi_1(\underline{u}(x), \mu)$ .

Finalmente, conhecendo-se as funções  $u(x, \mu)$  e  $v(x, \mu)$ , obtém-se uma solução analítica para o fluxo angular com dependência contínua na variável angular, simplesmente substituindo-se a equação (3.4.4) na equação (3.3.1).

### 3.5. O Método LTLD<sub>N</sub>

Para obter as equações LD<sub>N</sub> [7-8], primeiro discretiza-se o domínio angular uniformemente, ou seja, define-se uma partição  $\mu_{1/2} = -1, \mu_{3/2}, \dots, \mu_{N-1/2}, \mu_{N+1/2} = 1$ , onde  $\mu_{k+1/2} - \mu_{k-1/2} = \frac{2}{N}$ , com  $k = 1:N$ . Então, para cada elemento angular arbitrário  $\mu_{m-1/2} < \mu < \mu_{m+1/2}$ , com  $m = 1:N$ , a equação de transporte (2.1.1), considerando espalhamento isotrópico, ou seja,  $L = 0$ , será reescrita da seguinte forma:

$$(\mu - \mu_m) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \mu_m \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \varphi(x, \mu) = \frac{f_0}{2} \sum_{n=1}^N \int_{\mu_{n-1/2}}^{\mu_{n+1/2}} \varphi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (3.5.1)$$

onde  $\mu_m = \frac{\mu_{m-1/2} + \mu_{m+1/2}}{2}$ . A notação utilizada é padrão [38]. Então, o fluxo angular pode ser linearmente aproximado em cada elemento, ou seja:

$$\varphi(x, \mu) = \phi_m(x) + N(\mu - \mu_m) \xi_m(x), \quad (3.5.2a)$$

onde:

$$\phi_m(x) = \frac{N}{2} \int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} \varphi(x, \mu') d\mu' \quad (3.5.2b)$$

e

$$\xi_m(x) = \frac{3N^2}{2} \int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} (\mu' - \mu_m) \varphi(x, \mu') d\mu'. \quad (3.5.2c)$$

Integrando-se a equação (3.5.1) em  $\mu$  no intervalo  $[\mu_{m-1/2}, \mu_{m+1/2}]$  e multiplicando-se por  $N/2$ , resulta:

$$\frac{1}{3N} \frac{d\xi_m}{dx}(x) + \mu_m \frac{d\phi_m}{dx}(x) + \phi_m(x) = \frac{f_0}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n(x) + Q_m^1(x). \quad (3.5.3a)$$



Similarmente, multiplicando-se a equação (3.5.1) por  $\frac{3N^2}{2}(\mu - \mu_m)$  e integrando-se em  $\mu$  no intervalo  $[\mu_{m-1/2}, \mu_{m+1/2}]$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N} \frac{d\phi_m}{dx}(x) + \mu_m \frac{d\xi_m}{dx}(x) + \varepsilon_m(x) = Q_m^2(x), \text{ com } m = 1:N. \quad (3.5.3b)$$

Os coeficientes  $Q_m^1(x)$  e  $Q_m^2(x)$  são dados por:

$$Q_m^1(x) = \frac{N}{2} \int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} Q(x, \mu') d\mu' \quad (3.5.3c)$$

e

$$Q_m^2(x) = \frac{3N^2}{2} \int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} (\mu' - \mu_m) Q(x, \mu') d\mu'. \quad (3.5.3d)$$

As equações (3.5.3) acima são denominadas equações  $LD_N$  e são resolvidas pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, de onde resulta a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} s\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} & s \frac{1}{3N} \underline{\underline{I}} \\ s \frac{1}{N} \underline{\underline{I}} & s\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\phi}}(s) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\gamma}} \\ \underline{\underline{\lambda}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}^1(s) \\ \underline{\underline{Q}}^2(s) \end{bmatrix}, \quad (3.5.4)$$

onde  $\underline{\underline{I}}$  denota a matriz identidade de ordem  $N$ , e as matrizes  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  têm seus elementos, respectivamente, definidos como:

$$(\underline{\underline{A}})_{n,m} = \frac{f_0}{N} \quad (3.5.5a)$$

e

$$(\underline{\underline{B}})_{n,m} = \mu_n \delta_{n,m}. \quad (3.5.5b)$$

Aqui, a barra denota a aplicação da transformada de Laplace nos vetores

$$\underline{\phi}(x) = [\phi_1(x) \dots \phi_N(x)]^T, \quad \underline{\varepsilon}(x) = [\varepsilon_1(x) \dots \varepsilon_N(x)]^T, \quad \underline{Q}^1(x) = [Q_1^1(x) \dots Q_N^1(x)]^T \quad e$$

$$\underline{Q}^2(x) = [Q_1^2(x) \dots Q_N^2(x)]^T. \quad \text{Os vetores } \underline{\gamma} \text{ e } \underline{\lambda} \text{ são definidos, respectivamente, como}$$

$$\underline{B}\underline{\phi}(0) + \frac{1}{3N}\underline{I}\underline{\varepsilon}(0) \quad e \quad \frac{1}{N}\underline{I}\underline{\phi}(0) + \underline{B}\underline{\varepsilon}(0). \quad \text{Resolvendo-se (3.5.4) para os vetores } \underline{\phi}(x) \text{ e } \underline{\varepsilon}(x),$$

utilizando-se o algoritmo de Trzaska [29], obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{\phi}(x) \\ \underline{\varepsilon}(x) \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^{2N} e^{\rho_k x} \underline{\Delta}_k \right\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\gamma} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^{2N} e^{\rho_k x} \underline{\Delta}_k \right\} * \begin{bmatrix} \underline{Q}^1(x) \\ \underline{Q}^2(x) \end{bmatrix}, \quad (3.5.6)$$

onde os coeficientes  $\rho_k$  são os autovalores da matriz que aparece no lado esquerdo da equação (3.5.4) e  $\underline{\Delta}_k$  denotam as matrizes resultantes da aplicação do algoritmo de Trzaska. Os vetores desconhecidos  $\underline{\gamma}$  e  $\underline{\lambda}$  são então determinados pela resolução do sistema linear resultante do cálculo as condições de contorno (2.1.1a) e (2.1.1b) para o fluxo angular definido no elemento angular por (3.5.2a) e utilizando-se a equação (3.5.6). Assim, o fluxo angular para o elemento dado pode ser completamente estabelecido pela equação (3.5.2a), onde as funções  $\phi_m(x)$  e  $\varepsilon_m(x)$  são determinadas por (3.5.6). O símbolo \* denota a operação de convolução.

Neste ponto, é importante ressaltar que as equações  $LD_N$  podem ser obtidas para problemas de transporte com espalhamento anisotrópico, desde que sejam observados com cuidado os cálculos com os polinômios de Legendre. E mais, substituindo-se a aproximação linear (3.5.2a) em cada elemento, por uma aproximação quadrática, ou ainda, uma aproximação polinomial de uma ordem arbitrária, poder-se-á obter resultados mais precisos. Assim, por exemplo, as equações  $LD_N$  para espalhamento linearmente anisotrópico são descritas por:

$$\frac{1}{3N} \frac{d\xi_m}{dx}(x) + \mu_m \frac{d\phi_m}{dx}(x) + \phi_m(x) = \frac{f_0}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n(x) + 3\mu_m \psi(x) + Q_m^1(x) \quad (3.5.7a)$$

e

$$\frac{1}{N} \frac{d\phi_m}{dx}(x) + \mu_m \frac{d\xi_m}{dx}(x) + \varepsilon_m(x) = \frac{2\psi(x)}{N^3} + Q_m^2(x), \quad (3.5.7b)$$

com  $m = 1:N$ , onde:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{f_1 \mu_n}{N} \phi_n(x) + \frac{f_1}{3N^2} \xi_n(x) \right\}. \quad (3.5.7c)$$

## 4. SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE

### 4.1. Introdução

Recentemente, foram obtidas soluções exatas da equação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) em duas dimensões por Zabadal et alli [18-19] e Barros e Larsen [10] para os fluxos médios e fluxos angulares na fronteira, utilizando-se método nodal, ou seja, realizando-se a integração transversa do fluxo angular nas variáveis espaciais  $x$  e  $y$ .

Neste capítulo, apresenta-se uma formulação analítica para as aproximações  $Ch_N$  [4-5] e  $S_N$  [18-19] da equação de transporte em duas dimensões, expandindo-se o fluxo angular, na variável espacial  $y$ , em uma série de potências ou em uma série truncada de funções ortogonais e aplicando a transformada de Laplace na variável espacial  $x$ , com inversão analítica, resultando em um sistema linear para as componentes do fluxo angular transformado, o qual é invertido pelo algoritmo de Trzaska [29]. A principal característica deste método consiste no fato de que a solução, para o fluxo angular bidimensional, é encontrada em forma analítica.

Este capítulo é apresentado da seguinte forma: na seção 4.2, o fluxo angular bidimensional é aproximado por uma série de potências truncada, na variável  $y$ , e por uma série truncada de polinômios de Chebyshev na variável angular; nas seções 4.3 e 4.4, a equação de ordenadas discretas bidimensional é aproximada, expandindo-se o fluxo angular nas direções discretas em uma série truncada de polinômios de Legendre e em uma série truncada de funções ortogonais, respectivamente. Em ambas as seções, o sistema de equações diferenciais resultante é resolvido pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial  $x$ , com inversão analítica.



## 4.2. Formulação LTCh<sub>N</sub> e Série de Potências na Variável y

Nesta seção, apresenta-se uma solução analítica para o problema bidimensional de transporte, aproximando-se o fluxo angular em uma série truncada de polinômios de Chebyshev na variável angular e em uma série de potências na variável espacial y, resultando em um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem na variável espacial x, que será resolvido pela aplicação da transformada de Laplace, com inversão analítica. Esta formulação será denominada LTCh<sub>N</sub>-SP<sub>M</sub>.

### 4.2.1. Mudança de Variável na Equação de Transporte

Considera-se, a princípio, a seguinte equação bidimensional de transporte [2,38]:

$$\begin{aligned} \cos\phi \frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y,\phi) + \sin\phi \frac{\partial\Psi}{\partial y}(x,y,\phi) + \sigma_t\Psi(x,y,\phi) \\ = \frac{\sigma_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x,y,\phi') d\phi' + Q(x,y), \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

sujeita as condições de contorno: reflexão em  $x = 0$  e  $y = 0$ , e vácuo em  $x = a$  e  $y = b$ , onde  $\sigma_t$  e  $\sigma_s$  denotam, respectivamente, as seções de choque total e de espalhamento e  $\Psi(x,y,\phi)$  representa o fluxo angular na direção  $\phi$ , com  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ .

Supondo-se que o fluxo angular  $\Psi(x,y,\phi)$  tenha expressões diferentes para  $\phi > 0$  e para  $\phi < 0$  e escrevendo-se estas expressões como a combinação linear de duas funções  $u(x,y,\mu)$  e  $v(x,y,\mu)$ , com  $\mu = \cos\phi \in (-1, 1)$ , ou seja:

$$\Psi(x,y,\phi) = \begin{cases} \sin\phi \{u(x,y,\mu) + v(x,y,\mu)\}, & \text{se } \phi > 0 \\ -\sin\phi \{u(x,y,\mu) - v(x,y,\mu)\}, & \text{se } \phi < 0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Substituindo-se (4.2.2) no problema bidimensional de transporte (4.2.1), resulta:



$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, \mu) + \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, \mu) + \sigma_t u(x, y, \mu) = \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \left( \frac{\sigma_s}{\pi} \int_{-1}^1 u(x, y, \mu') d\mu' + Q(x, y) \right) \end{aligned} \quad (4.2.3a)$$

e

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, \mu) + \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, \mu) + \sigma_t v(x, y, \mu) = 0, \quad (4.2.3b)$$

sujeitas as condições de contorno:

$$u(0, y, \mu) = u(0, y, -\mu), \text{ com } \mu > 0, \quad (4.2.4a)$$

$$v(0, y, \mu) = v(0, y, -\mu), \text{ com } \mu > 0, \quad (4.2.4b)$$

$$u(a, y, -\mu) = 0, \text{ com } \mu > 0, \quad (4.2.4c)$$

$$v(a, y, -\mu) = 0, \text{ com } \mu > 0, \quad (4.2.4d)$$

$$v(x, 0, \mu) = 0, \text{ com } \mu \in (-1, 1), \quad (4.2.4e)$$

e

$$u(x, b, \mu) = v(x, b, \mu), \text{ com } \mu \in (-1, 1). \quad (4.2.4f)$$

#### 4.2.2. Aproximação na Variável Espacial y

O teorema de Weierstrass [39] (“Toda função real contínua, definida em um conjunto compacto  $K$ , é o limite de uma seqüência de polinômios uniformemente convergente em  $K$ ”) sugere que as funções  $u(x, y, \mu)$  e  $v(x, y, \mu)$  podem ser aproximadas, na variável  $y$ , por um polinômio de grau  $M$ . Assim sendo, os fluxos angulares  $u(x, y, \mu)$  e  $v(x, y, \mu)$  são escritos como:

$$u(x, y, \mu) = \sum_{i=0}^M u_i(x, \mu) \left(\frac{y}{b}\right)^i \quad (4.2.5a)$$

e

$$v(x, y, \mu) = \sum_{i=0}^M v_i(x, \mu) \left(\frac{y}{b}\right)^i, \quad (4.2.5b)$$

e substituídos nas equações (4.2.3), resultando:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^M \mu \frac{\partial u_i}{\partial x}(x, \mu) \left(\frac{y}{b}\right)^i + \sum_{i=1}^M \sqrt{1-\mu^2} v_i(x, \mu) \frac{m}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{i-1} + \sigma_t \sum_{i=0}^M u_i(x, \mu) \left(\frac{y}{b}\right)^i = \\ = \frac{\sigma_s}{\pi} \sum_{i=0}^M \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_{-1}^1 u_i(x, \mu) d\mu \left(\frac{y}{b}\right)^i + \frac{Q(x, y)}{\sqrt{1-\mu^2}} \end{aligned} \quad (4.2.6a)$$

e

$$\sum_{i=0}^M \mu \frac{\partial v_i}{\partial x}(x, \mu) \left(\frac{y}{b}\right)^i + \sum_{i=1}^M \sqrt{1-\mu^2} u_i(x, \mu) \frac{m}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{i-1} + \sigma_t \sum_{i=0}^M v_i(x, \mu) \left(\frac{y}{b}\right)^i = 0, \quad (4.2.6b)$$

sujeitas as seguintes restrições:

$$u_0(x, \mu) = \sum_{i=1}^M [v_i(x, \mu) - u_i(x, \mu)] \quad (4.2.7a)$$

e

$$v_0(x, \mu) = 0, \text{ com } 0 \leq x \leq a \text{ e } \mu \in (-1, 1), \quad (4.2.7b)$$

resultantes da substituição das equações (4.2.5) nas condições de contorno (4.2.4e) e (4.2.4f).

Multiplicando-se as equações (4.2.6) por  $\left(\frac{y}{b}\right)^m$ , com  $m = 0:(M-1)$ , integrando-se sobre o

domínio de  $y$  e utilizando-se as restrições (4.2.7), obtém-se que:

$$\begin{aligned}
& \mu \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{b}{m+1} \frac{\partial v_i}{\partial x}(x, \mu) - \frac{ib}{(m+1)(m+i+1)} \frac{\partial u_i}{\partial x}(x, \mu) \right\} + \sqrt{1-\mu^2} \sum_{i=1}^M \frac{i}{i+m} v_i(x, \mu) + \\
& + \sigma_t \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{b}{m+1} v_i(x, \mu) - \frac{ib}{(m+1)(m+i+1)} u_i(x, \mu) \right\} = \frac{Q_m(x)}{\sqrt{1-\mu^2}} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\sigma_s}{\pi} \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{b}{m+1} \int_{-1}^1 v_i(x, \mu) d\mu - \frac{ib}{(m+1)(m+i+1)} \int_{-1}^1 u_i(x, \mu) d\mu \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.8a}$$

e

$$\mu \sum_{i=1}^M \frac{b}{m+i+1} \frac{\partial v_i}{\partial x}(x, \mu) + \sqrt{1-\mu^2} \sum_{i=1}^M \frac{i}{i+m} u_i(x, \mu) + \sigma_t \sum_{i=1}^M \frac{b}{m+i+1} v_i(x, \mu) = 0, \tag{4.2.8b}$$

onde

$$Q_m(x) = \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^m Q(x, y) dy. \tag{4.2.8c}$$

As condições de contorno são obtidas das equações (4.2.4a)-(4.2.4d), observando-se que identidade de polinômios requer igualdade de seus coeficientes, portanto:

$$u_m(0, \mu) = u_m(0, -\mu), \text{ com } \mu > 0, \tag{4.2.9a}$$

$$v_m(0, \mu) = v_m(0, -\mu), \text{ com } \mu > 0, \tag{4.2.9b}$$

$$u_m(a, -\mu) = 0, \text{ com } \mu > 0, \tag{4.2.9c}$$

e

$$v_m(a, -\mu) = 0, \text{ com } \mu > 0, \text{ sendo } m = 1 : M. \tag{4.2.9d}$$

Neste ponto, é importante ressaltar que as condições de contorno (4.2.9), mediante a aplicação das restrições (4.2.7), são satisfeitas por  $u_0(x, \mu)$  e  $v_0(x, \mu)$ .

### 4.2.3. O Método LTCh<sub>N</sub> no Problema Bidimensional

O sistema de equações (4.2.8), sujeito as condições de contorno (4.2.9), é então resolvido para  $u_m(x, \mu)$  e  $v_m(x, \mu)$ , com  $m = 1:M$ , pela aplicação do método LTCh<sub>N</sub> [4-5], ou seja, as funções desconhecidas  $u_m(x, \mu)$  e  $v_m(x, \mu)$  são expandidas em uma série truncada de polinômios de Chebyshev:

$$u_m(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{n=0}^N u_m^n(x) T_n(\mu) \quad (4.2.10a)$$

e

$$v_m(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{n=0}^N v_m^n(x) T_n(\mu), \quad (4.2.10b)$$

e substituídas nas equações (4.2.8) e (4.2.9). As equações resultantes são então multiplicadas pelo polinômio de Chebyshev  $T_k(\mu)$  e integradas sobre o domínio da variável angular  $\mu$ , resultando no seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \tau_k(n) \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{b}{m+1} \frac{\partial v_i^n}{\partial x}(x) - \frac{ib}{(m+1)(m+i+1)} \frac{\partial u_i^n}{\partial x}(x) \right\} + \\ & + \frac{\sigma_t \pi}{2 - \delta_{k,0}} \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{b}{m+1} v_i^k(x) - \frac{ib}{(m+1)(m+i+1)} u_i^k(x) \right\} + \sum_{n=0}^N \varepsilon_k(n) \sum_{i=1}^M \frac{i}{i+m} v_i^n(x) \quad (4.2.11a) \\ & = \pi Q_m(x) \delta_{k,0} + \pi \sigma_s \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{b}{m+1} v_i^0(x) - \frac{ib}{(m+1)(m+i+1)} u_i^0(x) \right\} \delta_{k,0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \tau_k(n) \sum_{i=1}^M \frac{b}{m+i+1} \frac{\partial v_i^n}{\partial x}(x) + \sum_{n=0}^N \varepsilon_k(n) \sum_{i=1}^M \frac{i}{i+m} u_i^n(x) \quad (4.2.11b) \\ & + \frac{\sigma_t \pi}{2 - \delta_{k,0}} \sum_{i=1}^M \frac{b}{m+i+1} v_i^k(x) = 0, \end{aligned}$$



com  $m = 1:M$  e  $k = 0:N$ , sujeito as condições de contorno:

$$u_m^k(0) = 0, \quad (4.2.12a)$$

$$v_m^k(0) = 0, \quad (4.2.12b)$$

$$\frac{\pi}{4} u_m^k(a) - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{N-1} \chi_k(n) u_m^n(a) = 0 \quad (4.2.12c)$$

e

$$\frac{\pi}{4} v_m^k(a) - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{N-1} \chi_k(n) v_m^n(a) = 0, \quad (4.2.12d)$$

com  $m = 1:M$  e  $k = 1:N$  ímpar, onde:

$$\tau_k(n) = \frac{\pi[\delta_{k,n+1} + \delta_{k,n-1}]}{2(2 - \delta_{k+n,1})}, \quad (4.2.13a)$$

$$\varepsilon_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{1 - (k+n)^2} + \frac{1}{1 - (k-n)^2}, & \text{se } k+n \text{ par} \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (4.2.13b)$$

e

$$\chi_k(n) = \frac{k}{k^2 - n^2} (-1)^{(k+n-1)/2}, \quad (4.2.13c)$$

sendo que  $\delta_{n,k}$  denota o delta de Kronecker.

No sistema de equações diferenciais lineares (4.2.11), é aplicada a transformada de Laplace, na variável espacial  $x$ , resultando na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} s\underline{A}_1 + \underline{B}_1 & s\underline{A}_2 + \underline{B}_2 \\ \underline{C} & s\underline{A}_3 + \underline{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(s) \\ \underline{v}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \underline{u}(0) + \underline{A}_2 \underline{v}(0) \\ \underline{A}_3 \underline{v}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Q}(s) \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (4.2.14)$$

sendo que a barra denota a transformada de Laplace dos vetores:

$$\underline{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1^0(x) & \dots & u_M^0(x) & u_1^1(x) & \dots & u_M^N(x) \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{v}(x) = \begin{bmatrix} v_1^0(x) & \dots & v_M^0(x) & v_1^1(x) & \dots & v_M^N(x) \end{bmatrix}^T$$

e  $\underline{Q}(x)$ , o qual tem seus elementos definidos como:

$$\left(\underline{Q}(x)\right)_{i+jM} = \pi Q_{i-1}(x) \delta_{j,0}, \text{ com } j = 0:N \text{ e } i = 1:M. \quad (4.2.15a)$$

A notação  $\underline{0}$  representa um vetor formado apenas de zeros. Os elementos das matrizes  $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3, \underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3$  e  $\underline{C}$  são definidos, respectivamente, como:

$$\left(\underline{A}_1\right)_{m+kM, i+nM} = -\frac{i b \tau_k(n)}{m(m+i)}, \quad (4.2.15b)$$

$$\left(\underline{A}_2\right)_{m+kM, i+nM} = \frac{b \tau_k(n)}{m}, \quad (4.2.15c)$$

$$\left(\underline{A}_3\right)_{m+kM, i+nM} = \frac{b \tau_k(n)}{(m+i)}, \quad (4.2.15d)$$

$$\left(\underline{B}_1\right)_{m+kM, i+nM} = \frac{i \pi b \sigma_s}{m(m+i)} \delta_{n,0} \delta_{k,0} - \frac{i \pi b \sigma_t}{m(m+i)} \frac{\delta_{n,k}}{(2 - \delta_{k,0})}, \quad (4.2.15e)$$

$$\left(\underline{B}_2\right)_{m+kM, i+nM} = \frac{i \epsilon_k(n)}{m+i-1} + \frac{\pi b \sigma_t}{m(2 - \delta_{k,0})} \delta_{n,k} - \frac{\pi b \sigma_s}{m} \delta_{n,0} \delta_{k,0}, \quad (4.2.15f)$$

$$\left(\underline{\underline{B}}_3\right)_{m+kM, i+nM} = \frac{\pi b \sigma_t}{(m+i)(2-\delta_{k,0})} \delta_{n,k} \quad (4.2.15g)$$

e

$$\left(\underline{\underline{C}}\right)_{m+kM, i+nM} = \frac{i \varepsilon_k(n)}{m+i-1}. \quad (4.2.15h)$$

Resolvendo-se a equação (4.2.14) pelo algoritmo de Trzaska [29], para  $\underline{\underline{u}}(s)$  e  $\underline{\underline{v}}(s)$ , e invertendo-se a transformada de Laplace, utilizando a expansão de Heaviside, obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}(x) \\ \underline{\underline{v}}(x) \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^{2M(N+1)} e^{\rho_k x} \underline{\underline{\Delta}}_k \right\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Gamma}}_1 \\ \underline{\underline{\Gamma}}_2 \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^{2M(N+1)} e^{\rho_k x} \underline{\underline{\Delta}}_k \right\} * \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}(x) \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}, \quad (4.2.16)$$

onde os coeficientes  $\rho_k$ , com  $k = 1:2M(N+1)$ , são os autovalores da matriz que aparece à esquerda da equação (4.2.14) e as matrizes  $\underline{\underline{\Delta}}_k$  são aquelas resultantes da aplicação do algoritmo de Trzaska. Os vetores  $\underline{\underline{\Gamma}}_1$  e  $\underline{\underline{\Gamma}}_2$  são, respectivamente, definidos como  $\underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{u}}(0) + \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{v}}(0)$  e  $\underline{\underline{A}}_3 \underline{\underline{v}}(0)$ .

Com o objetivo de encontrar os vetores desconhecidos  $\underline{\underline{u}}(0)$  e  $\underline{\underline{v}}(0)$ , usa-se as condições de contorno (4.2.12) e a equação (4.2.16). Conhecidos estes vetores, os fluxos  $u(x, y, \mu)$  e  $v(x, y, \mu)$  são então estabelecidos pelas equações (4.2.16), (4.2.10) e (4.2.5). Assim, finalmente, o fluxo angular fica completamente determinado pela equação (4.2.2), para qualquer posição  $(x, y)$ .

### 4.3 Método $LTS_N$ e Polinômios de Legendre na Variável $y$

Nesta seção, é apresentada uma solução analítica para o problema bidimensional de ordenadas discretas, expandindo-se o fluxo angular em uma série truncada de polinômios de Legendre, na variável espacial  $y$ , e resolvendo-se o sistema de equações diferenciais resultantes pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial  $x$ , com inversão analítica. Esta formulação é denominada  $LTS_{N-PL}$ . Com o objetivo de apresentar este método, seja a seguinte equação  $S_N$  em duas dimensões com simetria azimutal, considerando espalhamento isotrópico e um grupo de energia [11-12]:

$$\mu_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x}(x, y) + \eta_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial y}(x, y) + \sigma_t \Psi_m(x, y) = \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^M \omega_n \Psi_n(x, y) + Q(x, y), \quad (4.3.1)$$

com  $m = 1:M$ , onde  $M = (N+2)N/2$ ,  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ . As condições de contorno são reflexão em  $x = 0$  e  $y = 0$ , e vácuo em  $x = a$  e  $y = b$ , ou sejam:

$$\Psi_m(0, y) = \Psi_{M/2-m+1}(0, y), \quad m = 1:M/4, \quad (4.3.1a)$$

$$\Psi_{M-m+1}(0, y) = \Psi_{M/2+m}(0, y), \quad m = 1:M/4, \quad (4.3.1b)$$

$$\Psi_m(x, 0) = \Psi_{M-m+1}(x, 0), \quad m = 1:M/2, \quad (4.3.1c)$$

$$\Psi_{M/4+m}(a, y) = 0, \quad m = 1:M/2, \quad (4.3.1d)$$

e

$$\Psi_{M/2+m}(x, b) = 0, \quad m = 1:M/2. \quad (4.3.1e)$$

Neste problema,  $\Psi_m(x, y)$  denota o fluxo angular de partículas na direção discreta  $(\mu_m, \eta_m)$ ;  $\sigma_t$  e  $\sigma_s$  denotam, respectivamente, as seções de choque total e de espalhamento; e  $\omega_m$  denota o peso referente à direção  $(\mu_m, \eta_m)$  na quadratura angular usada [38, 40].

Expandindo-se o fluxo angular  $\Psi_m(x,y)$  em uma série truncada de polinômios de Legendre [33], na variável espacial  $y$ , ou seja:

$$\Psi_m(x,y) = \sum_{k=0}^L \Psi_m^k(x) P_k\left(\frac{2y-b}{b}\right), \text{ com } m = 1:M, \quad (4.3.2)$$

substituindo-se na equação (4.3.1), multiplicando-se por  $P_j\left(\frac{2y-b}{b}\right)$ , com  $j = 0:(L-1)$ , e integrando-se em  $y \in [0,b]$ , obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{b\mu_m}{2j+1} \frac{\partial \Psi_m^j}{\partial x}(x) + \eta_m \sum_{k=0}^L \varepsilon_j(k) \Psi_m^k(x) + \frac{b\sigma_t}{2j+1} \Psi_m^j(x) = \\ = \frac{b}{2j+1} \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^M \omega_n \Psi_n^j(x) + Q_j(x), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

onde

$$\varepsilon_j(k) = \int_0^b \frac{d}{dy} \left( P_k\left(\frac{2y-b}{b}\right) \right) P_j\left(\frac{2y-b}{b}\right) dy = \int_{-1}^1 \frac{dP_k}{d\gamma}(\gamma) P_j(\gamma) d\gamma \quad (4.3.3a)$$

e

$$Q_j(x) = \int_0^b Q(x,y) P_j\left(\frac{2y-b}{b}\right) dy. \quad (4.3.3b)$$

Os coeficientes  $\varepsilon_j(k)$  são definidos recursivamente por:

$$\varepsilon_j(k) = \frac{j+1}{2j+1} \varepsilon_{j+1}(k-1) + \frac{j}{2j+1} \varepsilon_{j-1}(k-1) + \frac{2j+2}{2j+1} \delta_{j,k-1}, \quad (4.3.4a)$$

para  $j > 0$  e  $k > 0$ , onde  $\varepsilon_j(0) = 0$ , para  $j \geq 0$ , e  $\varepsilon_0(k) = 1 - (-1)^k$ , para  $k \geq 0$ . A equação (4.3.4a) é obtida pelas fórmulas de recorrência para os polinômios de Legendre e suas derivadas [33]. E mais, resolvendo-se recursivamente a equação (4.3.4a), obtém-se que:



$$\varepsilon_j(k) = \begin{cases} 2, & \text{se } j+k \text{ ímpar e } j < k \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (4.3.4b)$$

As condições de contorno em  $y = 0$  e  $y = b$  geram restrições para  $\Psi_m^0(x)$ , com  $m = 1:M$ , quais sejam:

$$\Psi_{M/2+m}^0(x) = - \sum_{k=1}^L \Psi_{M/2+m}^k(x) \quad (4.3.5a)$$

e

$$\Psi_m^0(x) = - \sum_{k=1}^L \left\{ (-1)^k \Psi_m^k(x) + \varepsilon_0(k) \Psi_{M-m+1}^k(x) \right\}, \quad (4.3.5b)$$

para  $m = 1:M/2$ , as quais tornam desnecessário o momento  $L$  nas equações (4.3.3). Assim, substituindo-se as restrições (4.3.5) nas equações (4.3.3), obtém-se  $L \times M$  equações diferenciais lineares de primeira ordem para as  $L \times M$  funções incógnitas  $\Psi_m^k(x)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^L \left\{ b \mu_m \left[ (-1)^k \frac{d\Psi_m^k}{dx}(x) + \varepsilon_0(k) \frac{d\Psi_{M-m+1}^k}{dx}(x) \right] - \eta_m \varepsilon_0(k) \Psi_m^k(x) + \right. \\ & \left. + b \sigma_t \left[ (-1)^k \Psi_m^k(x) + \varepsilon_0(k) \Psi_{M-m+1}^k(x) \right] \right\} = \frac{b \sigma_s}{2\pi} \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M \omega_n \sum_{k=1}^L \Psi_n^k(x) + \\ & + \frac{b \sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^{M/2} \omega_n \sum_{k=1}^L \left\{ (-1)^k \Psi_n^k(x) + \varepsilon_0(k) \Psi_{M-n+1}^k(x) \right\} - Q_0(x), \text{ para } m = 1:M/2, \end{aligned} \quad (4.3.6a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^L \left\{ b \mu_m \frac{d\Psi_m^k}{dx}(x) - \eta_m \varepsilon_0(k) \Psi_m^k(x) + b \sigma_t \Psi_m^k(x) \right\} = \frac{b \sigma_s}{2\pi} \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M \omega_n \sum_{k=1}^L \Psi_n^k(x) + \\ & + \frac{b \sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^{M/2} \omega_n \sum_{k=1}^L \left\{ (-1)^k \Psi_n^k(x) + \varepsilon_0(k) \Psi_{M-n+1}^k(x) \right\} - Q_0(x), \text{ para } m = (\frac{M}{2} + 1):M, \end{aligned} \quad (4.3.6b)$$

e

$$\frac{b\mu_m}{2j+1} \frac{\partial \Psi_m^j}{\partial x}(x) + \eta_m \sum_{k=1}^L \varepsilon_j(k) \Psi_m^k(x) + \frac{b\sigma_t}{2j+1} \Psi_m^j(x) = \frac{b}{2j+1} \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^M \omega_n \Psi_n^j(x) + Q_j(x), \quad (4.3.6c)$$

para  $j > 0$  e  $m = 1:M$ .

As  $L \times M$  condições de contorno são obtidas tomando-se momentos, na variável  $y$ , sobre as  $M$  condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a$ , resultando:

$$\Psi_m^k(0) = \Psi_{M/2-m+1}^k(0), \quad m = 1:M/4 \text{ e } k = 1:L, \quad (4.3.7a)$$

$$\Psi_{M-m+1}^k(0) = \Psi_{M/2+m}^k(0), \quad m = 1:M/4 \text{ e } k = 1:L, \quad (4.3.7b)$$

e

$$\Psi_{M/4+m}^k(a) = 0, \quad m = 1:M/2 \text{ e } k = 1:L. \quad (4.3.7c)$$

O problema diferencial descrito por (4.3.6) e (4.3.7) é então resolvido pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial  $x$ , resultando a seguinte equação matricial:

$$(\underline{sA} + \underline{B}) \bar{\underline{\Psi}}(s) = \underline{A} \underline{\Psi}(0) + \bar{\underline{Q}}(s), \quad (4.3.8)$$

onde a barra denota a transformada de Laplace dos vetores  $\underline{\Psi}(x)$  e  $\underline{Q}(x)$ , que têm seus elementos definidos, respectivamente, por:

$$(\underline{\Psi}(x))_{i+jM} = \Psi_i^{j+1}(x) \quad (4.3.9a)$$

e

$$(\underline{Q}(x))_{i+jM} = Q_j(x) - 2Q_0(x)\delta_{j,0}, \quad (4.3.9b)$$

para  $i=1:M$  e  $j=0:(L-1)$ , onde  $\delta_{i,j}$  denota o delta de Kronecker. As componentes das matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  são definidas, respectivamente, como:

$$\left(\underline{\underline{A}}\right)_{m,j+kM} = b \mu_m \left[ (-1)^{k+1} \delta_{j,m} + \varepsilon_0 (k+1) \delta_{j,M-m+1} \right], \quad (4.3.10a)$$

se  $m = 1:M/2, j = 1:M$  e  $k = 0:(L-1)$ ,

$$\left(\underline{\underline{A}}\right)_{m,m+kM} = b \mu_m, \quad (4.3.10b)$$

se  $m = (M/2+1):M$  e  $k = 0:(L-1)$ ,

$$\left(\underline{\underline{A}}\right)_{m+nM,m+nM} = \frac{b \mu_m}{2n+1}, \quad (4.3.10c)$$

se  $m = 1:M$  e  $n = 1:(L-1)$ ,

$$\left(\underline{\underline{B}}\right)_{m,j+kM} = b \sigma_t (-1)^{k+1} \delta_{j,m} - \eta_m \varepsilon_0 (k+1) \delta_{j,m} - \frac{b \sigma_s}{2\pi} \omega_j (-1)^{k+1}, \quad (4.3.10d)$$

se  $m, j = 1:M/2$  e  $k = 0:(L-1)$ ,

$$\left(\underline{\underline{B}}\right)_{m,j+kM} = b \sigma_t \varepsilon_0 (k+1) \delta_{j,M-m+1} - \frac{b \sigma_s}{2\pi} \left( \omega_j + \omega_{M-j+1} \varepsilon_0 (k+1) \right), \quad (4.3.10e)$$

se  $m = 1:M/2, j = (M/2+1):M$  e  $k = 0:(L-1)$ ,

$$\left(\underline{\underline{B}}\right)_{m,j+kM} = \left( b \sigma_t - \eta_m \varepsilon_0 (k+1) \right) \delta_{j,m} - \frac{b \sigma_s}{2\pi} \left( \omega_j + \omega_{M-j+1} \varepsilon_0 (k+1) \right), \quad (4.3.10f)$$

se  $m, j = (M/2+1):M$  e  $k = 0:(L-1)$ ,

$$\left(\underline{\underline{B}}\right)_{m,j+kM} = -\frac{b \sigma_s}{2\pi} \omega_j (-1)^{k+1}, \quad (4.3.10g)$$

se  $m = (M/2+1):M, j = 1:M/2$  e  $k = 0:(L-1)$ , e

$$\left(\underline{\underline{B}}\right)_{m+nM,j+kM} = \frac{b \sigma_t}{2n+1} \delta_{j,m} \delta_{k,n} + \eta_m \varepsilon_n (k+1) \delta_{j,m} - \frac{b \omega_j \sigma_s}{2n+1} \frac{1}{2\pi} \delta_{k,n}, \quad (4.3.10h)$$

se  $m, j = 1:M, k = 0:(L-1)$  e  $n = 1:(L-1)$ . O vetor  $\underline{\Psi}(x)$  é então determinado resolvendo-se a equação matricial (4.3.8) pelo algoritmo de Trzaska [29] e pela inversão da transformada de Laplace pela técnica de expansão de Heaviside, sendo dado por:

$$\underline{\Psi}(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{L.M} \exp(\rho_k x) \underline{\Delta}_k \right\} \cdot \underline{A} \cdot \underline{\Psi}(0) + \sum_{k=1}^{L.M} \underline{\Delta}_k \exp(\rho_k x) * \underline{Q}(x), \quad (4.3.11)$$

onde os coeficientes  $\rho_k$  são os autovalores da matriz  $\underline{A}^{-1}\underline{B}$  e  $\underline{\Delta}_k$  são matrizes resultantes da aplicação do algoritmo de Trzaska.

O vetor desconhecido  $\underline{\Psi}(0)$  é determinado utilizando-se as condições de contorno (4.3.7) e a equação (4.3.11). Assim, o fluxo angular nas direções discretas,  $\Psi_m(x,y)$ , fica completamente estabelecido pelas equações (4.3.2), (4.3.5) e (4.3.11).

#### 4.4. Formulação LTS<sub>N</sub> e Série de Funções Ortogonais em y

Nesta seção, generaliza-se o método de solução da equação de ordenadas discretas bidimensional apresentado na seção anterior. Com este objetivo, considera-se um conjunto completo de funções ortogonais,  $\Theta_n(y)$ , que constituem uma base do espaço de Hilbert  $L_2([0, b], p(y))$ , dotado do produto interno [30]:

$$\langle u(y), v(y) \rangle = \int_0^b p(y) u(y) v(y) dy, \quad (4.4.1)$$

para todas as funções  $u(y)$  e  $v(y)$  neste espaço. Portanto, expandindo-se o fluxo angular  $\Psi_m(x, y)$  em uma série truncada destas funções ortogonais, na variável espacial  $y$ , ou seja:

$$\Psi_m(x, y) = \sum_{k=0}^L \Psi_m^k(x) \Theta_k(y), \text{ com } m = 1:M, \quad (4.4.2)$$

substituindo-se na equação (4.3.1), e tomando-se o produto interno por  $\Theta_j(y)$ , com  $j = 0:(L-1)$ , obtém-se que:

$$\vartheta_j \mu_m \frac{\partial \Psi_m^j(x)}{\partial x} + \eta_m \sum_{k=0}^L \varepsilon_j(k) \Psi_m^k(x) + \vartheta_j \sigma_t \Psi_m^j(x) = \vartheta_j \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^M \omega_n \Psi_n^j(x) + Q_j(x), \quad (4.4.3)$$

onde  $\vartheta_j$  denota o quadrado da norma de  $\Theta_j(y)$ ,

$$\varepsilon_j(k) = \left\langle \frac{d\Theta_k}{dy}(y), \Theta_j(y) \right\rangle \quad (4.4.3a)$$

e

$$Q_j(x) = \langle Q(x, y), \Theta_j(y) \rangle. \quad (4.4.3b)$$

As condições de contorno em  $y = 0$  e  $y = b$  geram restrições para  $\Psi_m^0(x)$ , com  $m = 1:M$ , quais sejam:



$$\Psi_{M/2+m}^0(x) = -\sum_{k=1}^L \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_{M/2+m}^k(x) \quad (4.4.4a)$$

e

$$\Psi_m^0(x) = \sum_{k=1}^L \left\{ \left[ \frac{\Theta_k(0)}{\Theta_0(0)} - \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \right] \Psi_{M-m+1}^k(x) - \frac{\Theta_k(0)}{\Theta_0(0)} \Psi_m^k(x) \right\}, \quad (4.4.4b)$$

para  $m = 1:M/2$ , as quais tornam desnecessário o momento  $L$  nas equações (4.4.3). Assim, substituindo-se as restrições (4.4.4) nas equações (4.4.3), obtém-se  $L \times M$  equações diferenciais lineares de primeira ordem para as  $L \times M$  funções incógnitas  $\Psi_m^k(x)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^L \left\{ \vartheta_0 \mu_m \left[ \left[ \frac{\Theta_k(0)}{\Theta_0(0)} - \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \right] \frac{d\Psi_{M-m+1}^k}{dx}(x) + \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \frac{d\Psi_m^k}{dx}(x) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \eta_m \varepsilon_0(k) \Psi_m^k(x) + \vartheta_0 \sigma_t \left[ \left[ \frac{\Theta_k(0)}{\Theta_0(0)} - \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \right] \Psi_{M-m+1}^k(x) + \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_m^k(x) \right] \right\} = \\ & = \vartheta_0 \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^{M/2} \omega_n \sum_{k=1}^L \left\{ \left[ \frac{\Theta_k(0)}{\Theta_0(0)} - \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \right] \Psi_{M-n+1}^k(x) + \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_n^k(x) \right\} + \\ & + \vartheta_0 \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M \omega_n \sum_{k=1}^L \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_n^k(x) - Q_0(x), \text{ para } m = 1:M/2, \end{aligned} \quad (4.4.5a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^L \left\{ \vartheta_0 \mu_m \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \frac{d\Psi_m^k}{dx}(x) - \eta_m \varepsilon_0(k) \Psi_m^k(x) + \vartheta_0 \sigma_t \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_m^k(x) \right\} = \\ & = \vartheta_0 \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^{M/2} \omega_n \sum_{k=1}^L \left\{ \left[ \frac{\Theta_k(0)}{\Theta_0(0)} - \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \right] \Psi_{M-n+1}^k(x) + \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_n^k(x) \right\} + \\ & + \vartheta_0 \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M \omega_n \sum_{k=1}^L \frac{\Theta_k(b)}{\Theta_0(b)} \Psi_n^k(x) - Q_0(x), \text{ para } m = \left(\frac{M}{2} + 1\right):M, \end{aligned} \quad (4.4.5b)$$

e

$$\vartheta_j \mu_m \frac{\partial \Psi_m^j}{\partial x}(x) + \eta_m \sum_{k=1}^L \varepsilon_j(k) \Psi_m^k(x) + \vartheta_j \sigma_t \Psi_m^j(x) = \vartheta_j \frac{\sigma_s}{2\pi} \sum_{n=1}^M \omega_n \Psi_n^j(x) + Q_j(x), \quad (4.4.5c)$$

para  $j = 1:(L-1)$  e  $m = 1:M$ ,

desde que  $\varepsilon_j(0) = 0$ , ou seja,  $\Theta_0(y)$  constante. As  $L \times M$  condições de contorno são obtidas tomando-se momentos, na variável  $y$ , sobre as  $M$  condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a$ , resultando:

$$\Psi_m^k(0) = \Psi_{M/2-m+1}^k(0), \quad m = 1:M/4 \text{ e } k = 1:L, \quad (4.4.6a)$$

$$\Psi_{M-m+1}^k(0) = \Psi_{M/2+m}^k(0), \quad m = 1:M/4 \text{ e } k = 1:L, \quad (4.4.6b)$$

e

$$\Psi_{M/4+m}^k(a) = 0, \quad m = 1:M/2 \text{ e } k = 1:L. \quad (4.4.6c)$$

O problema diferencial descrito por (4.4.5) e (4.4.6) é então resolvido pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial  $x$ , com inversão analítica pelo algoritmo de Trzaska [29] e técnica de expansão de Heaviside.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

### 5.1. Introdução

As formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTD_N$ , propostas nos Capítulos 2 e 3, serão aplicadas a problemas unidimensionais de transporte em uma placa plana, considerando um grupo de energia, espalhamento isotrópico e linearmente anisotrópico, tendo por objetivo a análise do comportamento destas soluções, para fluxos incidentes em  $x = 0$ , do tipo contínuo e seccionalmente contínuo, tanto para pequenas e grandes espessuras, como para diferentes valores da seção de choque de espalhamento. Problemas de transporte com fonte também serão abordados, bem como a solução  $LTA_N$  com dependência contínua na variável angular. A formulação  $LTCh_N-SP_M$  será aplicada para problema bidimensional de transporte e comparada com resultados de formulações encontradas na literatura.

## 5.2. Problemas Unidimensionais com Espalhamento Isotrópico

Considera-se os seguintes problemas:

I. Problema isotrópico de transporte com um grupo de energia em uma placa homogênea de espessura  $a = 40$ , fluxo incidente  $f(\mu) = 1$  e sem fonte. Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_1$ ,  $LTW_3$ ,  $LTCh_3$ ,  $LTCh_7$ ,  $LTA_2$ ,  $LTA_4$ ,  $LTLD_2$  e  $LTLD_4$  para fluxo escalar em  $x = 20$  e corrente transmitida em  $x = 40$ , definidos, respectivamente, como:

$$\phi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu) d\mu, \quad (5.2.1)$$

e:

$$J^+(x) = \int_0^1 \mu \varphi(x, \mu) d\mu, \quad (5.2.2)$$

são comparados com resultados considerados exatos ( $S_{48}$  [41]) e apresentados, respectivamente, nas Tabelas 5.2.1 e 5.2.2.

**Tabela 5.2.1. Comparação numérica dos resultados para o fluxo escalar, obtidos pelos métodos  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$ ,  $LTLD_N$  e  $S_N$ .**

$f_0$	0.999	0.980	0.950	0.900	0.800
$LTW_1$	$5.67 \times 10^{-1}$	$1.11 \times 10^{-2}$	$5.86 \times 10^{-4}$	$2.40 \times 10^{-5}$	$3.53 \times 10^{-7}$
$LTW_3$	$5.79 \times 10^{-1}$	$1.25 \times 10^{-2}$	$7.17 \times 10^{-4}$	$3.29 \times 10^{-5}$	$6.09 \times 10^{-7}$
$LTCh_3$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.31 \times 10^{-2}$	$7.75 \times 10^{-4}$	$3.78 \times 10^{-5}$	$8.15 \times 10^{-7}$
$LTCh_7$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.30 \times 10^{-2}$	$7.66 \times 10^{-4}$	$3.64 \times 10^{-5}$	$7.25 \times 10^{-7}$
$LTA_2$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.30 \times 10^{-2}$	$7.58 \times 10^{-4}$	$3.51 \times 10^{-5}$	$6.30 \times 10^{-7}$
$LTA_4$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.30 \times 10^{-2}$	$7.65 \times 10^{-4}$	$3.63 \times 10^{-5}$	$7.24 \times 10^{-7}$
$LTLD_2$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.30 \times 10^{-2}$	$7.58 \times 10^{-4}$	$3.51 \times 10^{-5}$	$6.30 \times 10^{-7}$
$LTLD_4$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.30 \times 10^{-2}$	$7.64 \times 10^{-4}$	$3.62 \times 10^{-5}$	$7.14 \times 10^{-7}$
$S_{48}$	$5.83 \times 10^{-1}$	$1.30 \times 10^{-2}$	$7.65 \times 10^{-4}$	$3.63 \times 10^{-5}$	$7.24 \times 10^{-7}$



**Tabela 5.2.2. Comparação numérica dos resultados para a corrente transmitida, obtidos pelos métodos  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$ ,  $LTLN$  e  $S_N$ .**

$f_0$	0.999	0.980	0.950	0.900	0.800
$LTW_1$	$6.904 \times 10^{-3}$	$0.994 \times 10^{-5}$	$4.502 \times 10^{-8}$	$1.121 \times 10^{-10}$	$0.381 \times 10^{-13}$
$LTW_3$	$7.464 \times 10^{-3}$	$1.303 \times 10^{-5}$	$6.992 \times 10^{-8}$	$2.216 \times 10^{-10}$	$1.238 \times 10^{-13}$
$LTCh_3$	$7.447 \times 10^{-3}$	$1.399 \times 10^{-5}$	$8.142 \times 10^{-8}$	$2.980 \times 10^{-10}$	$2.381 \times 10^{-13}$
$LTCh_7$	$7.625 \times 10^{-3}$	$1.417 \times 10^{-5}$	$8.031 \times 10^{-8}$	$2.750 \times 10^{-10}$	$1.819 \times 10^{-13}$
$LTA_2$	$7.652 \times 10^{-3}$	$1.412 \times 10^{-5}$	$7.848 \times 10^{-8}$	$2.524 \times 10^{-10}$	$1.284 \times 10^{-13}$
$LTA_4$	$7.653 \times 10^{-3}$	$1.420 \times 10^{-5}$	$8.040 \times 10^{-8}$	$2.750 \times 10^{-10}$	$1.811 \times 10^{-13}$
$LTLN_2$	$7.652 \times 10^{-3}$	$1.412 \times 10^{-5}$	$7.848 \times 10^{-8}$	$2.524 \times 10^{-10}$	$1.283 \times 10^{-13}$
$LTLN_4$	$7.653 \times 10^{-3}$	$1.419 \times 10^{-5}$	$8.026 \times 10^{-8}$	$2.731 \times 10^{-10}$	$1.745 \times 10^{-13}$
$S_{48}$	$7.654 \times 10^{-3}$	$1.420 \times 10^{-5}$	$8.041 \times 10^{-8}$	$2.750 \times 10^{-10}$	$1.815 \times 10^{-13}$

Pode-se observar nas Tabelas 5.2.1 e 5.2.2, que a solução  $LTA_4$  tem um maior número de algarismos significativos idênticos a solução exata ( $S_{48}$ ).

**II.** Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 10$ , com fluxo incidente  $f(\mu) = 1$  e sem fonte. Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTLN_6$  para o fluxo escalar médio, definido como  $\phi_m(x) = \frac{1}{2}\phi(x)$ , em  $x = 0, 5$  e  $10$ , são apresentados e comparados na Tabela 5.2.3.



**Tabela 5.2.3. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLd_N$  para  $a = 10$ .**

$f_0 = 0.99$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.905131	0.327373	$2.85616 \times 10^{-2}$
$LTCh_{11}$	0.906231	0.327796	$2.83543 \times 10^{-2}$
$LTA_6$	0.905105	0.327710	$2.86536 \times 10^{-2}$
$LTLd_6$	0.905106	0.327729	$2.86507 \times 10^{-2}$
$f_0 = 0.8$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.690983	$1.53532 \times 10^{-2}$	$2.54897 \times 10^{-4}$
$LTCh_{11}$	0.695424	$1.54780 \times 10^{-2}$	$2.58232 \times 10^{-4}$
$LTA_6$	0.690983	$1.54642 \times 10^{-2}$	$2.60614 \times 10^{-4}$
$LTLd_6$	0.690983	$1.54647 \times 10^{-2}$	$2.59865 \times 10^{-4}$
$f_0 = 0.5$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.585786	$2.27769 \times 10^{-3}$	$1.30183 \times 10^{-5}$
$LTCh_{11}$	0.592225	$2.30941 \times 10^{-3}$	$1.37635 \times 10^{-5}$
$LTA_6$	0.585786	$2.30787 \times 10^{-3}$	$1.44391 \times 10^{-5}$
$LTLd_6$	0.585786	$2.30800 \times 10^{-3}$	$1.37545 \times 10^{-5}$
$f_0 = 0.1$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.513167	$6.12525 \times 10^{-4}$	$2.18058 \times 10^{-6}$
$LTCh_{11}$	0.521660	$6.24215 \times 10^{-4}$	$2.48306 \times 10^{-6}$
$LTA_6$	0.513167	$6.24323 \times 10^{-4}$	$2.94070 \times 10^{-6}$
$LTLd_6$	0.513167	$6.24306 \times 10^{-4}$	$2.44992 \times 10^{-6}$

Analisando-se a Tabela 5.2.3 acima, pode-se observar que a coincidência dos resultados obtidos pelas diversas formulações diminui com a diminuição de  $f_0$  e o aumento da espessura calculada.

**III.** Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 100$ , com os mesmos parâmetros do Problema II. Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTLd_6$  para o fluxo escalar médio em  $x = 0, 50$  e  $100$ , são apresentados e comparados na Tabela 5.2.4.

**Tabela 5.2.4. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLD_N$  para  $a = 100$ .**

$f_0 = 0.99$	$x = 0$	$x = 50$	$x = 100$
$LTW_5$	0.909091	$1.56026 \times 10^{-4}$	$4.90801 \times 10^{-9}$
$LTCh_{11}$	0.910177	$1.58763 \times 10^{-4}$	$5.02612 \times 10^{-9}$
$LTA_6$	0.909090	$1.58580 \times 10^{-4}$	$7.28653 \times 10^{-6}$
$LTLD_6$	0.909091	$1.58714 \times 10^{-4}$	$5.07902 \times 10^{-9}$
$f_0 = 0.8$	$x = 0$	$x = 50$	$x = 100$
$LTW_5$	0.690983	$1.72492 \times 10^{-16}$	$-7.73974 \times 10^{-14}$
$LTCh_{11}$	0.695424	$2.00980 \times 10^{-16}$	$-2.65091 \times 10^{-13}$
$LTA_6$	0.690983	$2.00737 \times 10^{-16}$	$6.44454 \times 10^{-7}$
$LTLD_6$	0.690983	$1.98408 \times 10^{-16}$	$2.37068 \times 10^{-13}$
$f_0 = 0.5$	$x = 0$	$x = 50$	$x = 100$
$LTW_5$	0.585786	$1.36653 \times 10^{-22}$	$9.99765 \times 10^{-17}$
$LTCh_{11}$	0.592225	$3.67148 \times 10^{-22}$	$2.58938 \times 10^{-14}$
$LTA_6$	0.585786	$3.57379 \times 10^{-22}$	$6.30470 \times 10^{-7}$
$LTLD_6$	0.585786	$2.68523 \times 10^{-22}$	$-4.32410 \times 10^{-13}$
$f_0 = 0.1$	$x = 0$	$x = 50$	$x = 100$
$LTW_5$	0.513167	$1.26163 \times 10^{-25}$	$8.86531 \times 10^{-14}$
$LTCh_{11}$	0.521660	$3.16508 \times 10^{-24}$	$-1.98814 \times 10^{-14}$
$LTA_6$	0.513167	$2.45429 \times 10^{-24}$	$4.58339 \times 10^{-7}$
$LTLD_6$	0.513167	$7.43733 \times 10^{-25}$	$-2.29572 \times 10^{-14}$

Os sinais negativos encontrados na Tabela 5.2.4 para o fluxo escalar em  $x = 100$ , possivelmente, devem-se ao erro de arredondamento, o que pode ser justificado observando-se os baixos resultados obtidos para o fluxo escalar médio em  $x = 100$ , para a mesma placa, porém subdividida em 38 regiões homogêneas, apresentados na Tabela 5.2.5.

**Tabela 5.2.5. Simulação numérica para o fluxo escalar pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLD_N$  em  $x = 100$ .**

Método	$f_0 = 0.99$	$f_0 = 0.8$	$f_0 = 0.5$	$f_0 = 0.1$
$LTW_3$	$4.4234 \times 10^{-9}$	$1.6961 \times 10^{-32}$	$1.2351 \times 10^{-44}$	$1.6601 \times 10^{-50}$
$LTCh_7$	$4.9930 \times 10^{-9}$	$4.4143 \times 10^{-32}$	$5.8045 \times 10^{-43}$	$3.2062 \times 10^{-46}$
$LTA_4$	$8.7884 \times 10^{-9}$	$2.8373 \times 10^{-32}$	$8.6067 \times 10^{-47}$	$1.2282 \times 10^{-41}$
$LTLD_4$	$5.0135 \times 10^{-9}$	$1.2963 \times 10^{-31}$	$1.7672 \times 10^{-43}$	$6.5841 \times 10^{-48}$



IV. Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 10$ , sem fonte e fluxo incidente em  $x = 0$  dado por:  $f(\mu) = 1$ , se  $0 < \mu < 0.5$ , ou  $f(\mu) = 0$ , se  $0.5 < \mu < 1$ . Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTL D_6$  para o fluxo escalar médio em  $x = 0, 5$  e  $10$ , são mostrados na tabela 5.2.6.

**Tabela 5.2.6. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTL D_N$  para  $a = 10$ .**

$f_0 = 0.99$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.365567	$5.92747 \times 10^{-2}$	$5.16994 \times 10^{-3}$
$LTCh_{11}$	0.372843	$6.02040 \times 10^{-2}$	$5.20568 \times 10^{-3}$
$LTA_6$	0.364047	$5.75848 \times 10^{-2}$	$5.03352 \times 10^{-3}$
$LTL D_6$	0.365705	$5.96404 \times 10^{-2}$	$5.21194 \times 10^{-3}$
$f_0 = 0.8$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.312451	$2.14063 \times 10^{-3}$	$3.53313 \times 10^{-5}$
$LTCh_{11}$	0.319931	$2.19477 \times 10^{-3}$	$3.63150 \times 10^{-5}$
$LTA_6$	0.311863	$2.07844 \times 10^{-3}$	$3.48183 \times 10^{-5}$
$LTL D_6$	0.312459	$2.17475 \times 10^{-3}$	$3.62383 \times 10^{-5}$
$f_0 = 0.5$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.280018	$1.78064 \times 10^{-4}$	$0.98532 \times 10^{-6}$
$LTCh_{11}$	0.287732	$1.84977 \times 10^{-4}$	$1.04886 \times 10^{-6}$
$LTA_6$	0.279777	$1.72250 \times 10^{-4}$	$1.14590 \times 10^{-6}$
$LTL D_6$	0.280001	$1.84478 \times 10^{-4}$	$1.04207 \times 10^{-6}$
$f_0 = 0.1$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_5$	0.254827	$0.83752 \times 10^{-5}$	$0.26624 \times 10^{-7}$
$LTCh_{11}$	0.262737	$0.92224 \times 10^{-5}$	$0.30998 \times 10^{-7}$
$LTA_6$	0.254792	$0.79820 \times 10^{-5}$	$1.45447 \times 10^{-7}$
$LTL D_6$	0.254822	$1.00307 \times 10^{-5}$	$0.29715 \times 10^{-7}$

V. Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 100$ , com os mesmos parâmetros do Problema IV. Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTL D_6$  para o fluxo escalar médio em  $x = 0$  e  $50$ , são apresentados na Tabela 5.2.7.

**Tabela 5.2.7. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLD_N$  para  $a = 100$ .**

$f_0 = 0.99$	$x = 0$	$x = 50$
$LTW_5$	0.366284	$8.88375 \times 10^{-5}$
$LTCh_{11}$	0.373567	$9.22755 \times 10^{-5}$
$LTA_6$	0.364747	$2.78557 \times 10^{-5}$
$LTLD_6$	0.366429	$2.88722 \times 10^{-5}$
$f_0 = 0.8$	$x = 0$	$x = 50$
$LTW_5$	0.312451	$2.39048 \times 10^{-17}$
$LTCh_{11}$	0.319931	$2.82380 \times 10^{-17}$
$LTA_6$	0.311863	$2.67565 \times 10^{-17}$
$LTLD_6$	0.312459	$2.76520 \times 10^{-17}$
$f_0 = 0.5$	$x = 0$	$x = 50$
$LTW_5$	0.280018	$1.03186 \times 10^{-23}$
$LTCh_{11}$	0.287732	$2.64353 \times 10^{-23}$
$LTA_6$	0.279777	$2.50181 \times 10^{-23}$
$LTLD_6$	0.280001	$2.01282 \times 10^{-23}$
$f_0 = 0.1$	$x = 0$	$x = 50$
$LTW_5$	0.254827	$0.15309 \times 10^{-26}$
$LTCh_{11}$	0.262737	$-6.62014 \times 10^{-26}$
$LTA_6$	0.254792	$2.53045 \times 10^{-26}$
$LTLD_6$	0.254822	$0.86414 \times 10^{-26}$

Visando estimar a precisão dos resultados obtidos nos problemas anteriores, calcula-se os menores autovalores das matrizes  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTLD_6$ , comparando-os com os autovalores discretos da solução de Case [42], para diferentes valores de  $f_0$ . Para tal, para cada autovalor  $\rho$ , considera-se a função  $f(\rho)$ , definida por:

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho} \operatorname{tgh}\left(\frac{\rho}{f_0}\right), \quad (5.2.3)$$

a qual assume o valor um para o autovalor discreto de Case. Então, calcula-se o erro absoluto,  $E(\rho)$ , dos menores autovalores  $\rho$ , das diversas aproximações consideradas, relativo ao autovalor discreto de Case [42],  $\rho^*$ , definido como:

$$E(\rho) = \left| f(\rho^*) - f(\rho) \right|. \quad (5.2.4)$$

Estes resultados são apresentados na tabela 5.2.8, em conjunto com o número de condicionamento das matrizes das formulações  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTLD_6$ .

**Tabela 5.2.8. Menores autovalores e número de condicionamento das matrizes  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLD_N$ .**

$f_0 = 0.99$	Autovalor $\rho$	$E(\rho)$	Condicionamento
$LTW_5$	0.1729	$4.5 \times 10^{-5}$	45.83
$LTCh_{11}$	0.1725	$1.0 \times 10^{-6}$	38.69
$LTA_6$	0.1725	$1.0 \times 10^{-6}$	164.33
$LTLD_6$	0.1725	$1.0 \times 10^{-6}$	75.40
$f_0 = 0.8$	Autovalor $\rho$	$E(\rho)$	Condicionamento
$LTW_5$	0.7137	$1.8 \times 10^{-3}$	11.41
$LTCh_{11}$	0.7104	$6.0 \times 10^{-6}$	9.66
$LTA_6$	0.7104	$6.0 \times 10^{-6}$	40.24
$LTLD_6$	0.7107	$1.4 \times 10^{-4}$	18.63
$f_0 = 0.5$	Autovalor $\rho$	$E(\rho)$	Condicionamento
$LTW_5$	0.9830	$2.2 \times 10^{-2}$	8.64
$LTCh_{11}$	0.9570	$4.4 \times 10^{-4}$	7.48
$LTA_6$	0.9589	$1.2 \times 10^{-3}$	30.22
$LTLD_6$	0.9671	$8.3 \times 10^{-3}$	14.06
$f_0 = 0.1$	Autovalor $\rho$	$E(\rho)$	Condicionamento
$LTW_5$	1.1081	$9.8 \times 10^{-2}$	8.08
$LTCh_{11}$	1.0067	$6.7 \times 10^{-3}$	7.51
$LTA_6$	1.0297	$2.9 \times 10^{-2}$	28.63
$LTLD_6$	1.0655	$6.2 \times 10^{-2}$	13.21

Sabe-se que a solução assintótica do fluxo angular, dada pela solução de Case, é descrita pelo autovalor discreto. Portanto, analisando os resultados que aparecem na Tabela 5.2.8 para  $E(\rho)$ , verifica-se o menor autovalor da formulação  $LTCh_N$  é o que melhor se aproxima do autovalor discreto de Case, o que permite concluir que o método  $LTCh_N$  deve ser o mais preciso para problemas de transporte em placas de grande espessura, com baixa ordem de aproximação.



Este resultado também é confirmado quando é analisado o número de condicionamento das diversas matrizes consideradas.

**VI.** Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 10$ , parâmetro  $f_0 = 0.8$ , fluxo incidente  $f(\mu) = 1$  e uma fonte unitária na região da placa compreendida entre  $x = 9$  e  $x = 10$ . Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_1$ ,  $LTW_5$ ,  $LTCh_3$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_2$ ,  $LTA_6$ ,  $LTLD_2$  e  $LTLD_6$  para o fluxo escalar médio em  $x = 0, 5$  e  $10$ , são apresentados e comparados na Tabela 5.2.9.

**Tabela 5.2.9. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLD_N$  para  $a = 10$ .**

Método	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$LTW_1$	0.690851	$4.20707 \times 10^{-3}$	0.921383
$LTCh_3$	0.707254	$5.48755 \times 10^{-3}$	0.848213
$LTA_2$	0.690819	$5.30061 \times 10^{-3}$	0.921114
$LTLD_2$	0.690818	$5.30061 \times 10^{-3}$	0.921114
$LTW_5$	0.690815	$5.27247 \times 10^{-3}$	0.913648
$LTCh_{11}$	0.695254	$5.29777 \times 10^{-3}$	0.896233
$LTA_6$	0.690812	$5.33598 \times 10^{-3}$	0.913656
$LTLD_6$	0.690813	$5.33717 \times 10^{-3}$	0.913524

**VII.** Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 100$ , com os mesmos parâmetros do Problema VI e uma fonte unitária na região da placa compreendida entre  $x = 99$  e  $x = 100$ . Os resultados numéricos para o fluxo escalar médio em  $x = 0, 50$  e  $100$ , obtidos pelos métodos  $LTW_1$ ,  $LTW_5$ ,  $LTCh_3$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_2$ ,  $LTA_6$ ,  $LTLD_2$  e  $LTLD_6$ , são apresentados e comparados na Tabela 5.2.10.

**Tabela 5.2.10. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLN$  para  $a = 100$ .**

Método	$x = 0$	$x = 50$	$x = 100$
$LTW_1$	0.690983	$9.03896 \times 10^{-18}$	0.921119
$LTCh_3$	0.707423	$1.00234 \times 10^{-16}$	0.847950
$LTA_2$	0.690983	$4.42235 \times 10^{-17}$	0.920864
$LTLN_2$	0.690983	$4.42235 \times 10^{-17}$	0.920864
$LTW_5$	0.690983	$5.88115 \times 10^{-17}$	0.913393
$LTCh_{11}$	0.695424	$6.83866 \times 10^{-17}$	0.895975
$LTA_6$	0.690983	$6.88653 \times 10^{-17}$	0.913396
$LTLN_6$	0.690983	$6.80546 \times 10^{-17}$	0.913264

**VIII.** Problema de transporte em uma placa homogênea de espessura  $a = 1000$ , com os mesmos parâmetros do problema VI e uma fonte unitária na região da placa compreendida entre  $x = 999$  e  $x = 1000$ . Os resultados numéricos obtidos pelos métodos  $LTW_5$ ,  $LTCh_{11}$ ,  $LTA_6$  e  $LTLN_6$  para o fluxo escalar médio em  $x = 0, 500$  e  $1000$ , são apresentados e comparados na tabela 5.2.11.

**Tabela 5.2.11. Simulação numérica para o fluxo escalar médio pelas formulações  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$  e  $LTLN$  para  $a = 1000$ .**

Método	$x = 0$	$x = 500$	$x = 1000$
$LTW_5$	0.690983	$1.93132 \times 10^{-156}$	0.913393
$LTCh_{11}$	0.695424	$9.94390 \times 10^{-156}$	0.895975
$LTA_6$	0.690983	$9.97973 \times 10^{-156}$	0.913396
$LTLN_6$	0.690983	$8.65178 \times 10^{-156}$	0.913264

Cabe ressaltar que este problema foi também testado para placas de espessura  $100.000$  e  $10.000.000.000$ , obtendo-se os mesmos resultados para os extremos da placa e zero no centro da mesma. Este fato, confirma a eficiência da solução, por estes métodos, de problemas com grandes espessuras, usando a modificação da base de solução correspondente à autovalores positivos [43] (vide Anexo III).

IX. Problema de transporte em uma placa plana, com os seguintes parâmetros:  $a = 10$ ,  $f_0 = 0.97$ ,  $Q(x) = 0$  e  $f(\mu) = 1$ . Os valores numéricos para o fluxo angular emergente na fronteira, encontrados pelas formulações  $LTA_2$  e  $LTA_3$  com dependência contínua na variável angular são comparados com os valores resultantes da aplicação do método  $LTA_4$  e apresentados na Tabela 5.2.12.

**Tabela 5.2.12. Comparações numéricas para o fluxo angular com dependência angular contínua e solução  $LTA_4$ .**

Fluxo angular emergente em $x = 0$ .			
Direção	$LTA_2$	$LTA_3$	$LTA_4$
$\mu_1$	0.6661033693	0.6663437076	0.6663906946
$\mu_2$	0.7334774701	0.7329063981	0.7328784876
$\mu_3$	0.6235205526	0.6239531276	0.6239986866
$\mu_4$	0.8022269183	0.8005795571	0.7999795512
Fluxo angular emergente em $x = 10$ .			
Direção	$LTA_2$	$LTA_3$	$LTA_4$
$\mu_1$	0.0277934165	0.0277969089	0.0277942625
$\mu_2$	0.0197109613	0.0197724099	0.0197753481
$\mu_3$	0.0346725447	0.0346584249	0.0346559200
$\mu_4$	0.0134747093	0.0136012605	0.0136427853

Os resultados reportados na tabela 5.2.12, mostram que a solução para o fluxo angular pela formulação  $LTA_4$ , nas direções discretas, foram reproduzidos com uma boa precisão através dos métodos  $LTA_2$  e  $LTA_3$  com dependência contínua da variável angular. Por este motivo, acreditamos que resultados de mesma precisão podem ser obtidos, usando dependência angular contínua, com uma menor ordem de quadratura da formulação  $LTA_N$ .



### 5.3. Problemas Unidimensionais com Espalhamento Anisotrópico Linear

Considera-se os seguintes problemas:

I. Problema de transporte em uma placa plana homogênea de espessura  $a = 100$ , parâmetros  $f_0 = 0.99$  e  $f_1 = 0.8$ , e fluxo incidente na fronteira  $f(\mu) = 1$ . Os resultados obtidos pelos métodos  $LTW_1$ ,  $LTW_3$ ,  $LTCh_3$ ,  $LTCh_7$ ,  $LTA_2$  e  $LTA_4$  para o fluxo escalar médio em  $x = 0$ , 50 e 100, são comparados com os resultados dos métodos  $LTS_8$  [11-12],  $LTP_7$  [27-28] e  $SGF S_8$  [9], e apresentados na tabela 5.3.1.

**Tabela 5.3.1. Comparação numérica dos métodos  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTA_N$ ,  $LTS_N$ ,  $LTP_N$  e  $SGF S_N$  para o fluxo médio em uma placa homogênea.**

Método	$\phi_m(0)$	$\phi_m(50)$	$\phi_m(100)$
$LTW_1$	0.83703	$0.09312 \times 10^{-1}$	$0.03495 \times 10^{-3}$
$LTW_3$	0.82690	$0.14268 \times 10^{-1}$	$0.08912 \times 10^{-3}$
$LTCh_3$	0.82941	$0.16545 \times 10^{-1}$	$0.11888 \times 10^{-3}$
$LTCh_7$	0.82599	$0.16472 \times 10^{-1}$	$0.12043 \times 10^{-3}$
$LTA_2$	0.82306	$0.16438 \times 10^{-1}$	$0.12192 \times 10^{-3}$
$LTA_4$	0.82300	$0.16452 \times 10^{-1}$	$0.12222 \times 10^{-3}$
$LTP_7$	0.82284	$0.16470 \times 10^{-1}$	$0.12250 \times 10^{-3}$
$LTS_8$	0.82284	$0.16471 \times 10^{-1}$	$0.12251 \times 10^{-3}$
$SGF S_8$	0.82284	$0.16470 \times 10^{-1}$	$0.12250 \times 10^{-3}$

Analisando a tabela 5.3.1, podemos observar que a solução  $LTA_4$  apresenta resultados que coincidem em um maior número de algarismos significativos com as formulações  $LTP_7$ ,  $LTS_8$  e  $SGF-S_8$ .

II. Problema de transporte em uma placa plana heterogênea consistindo de três regiões de espessuras 20, 50 e 30, respectivamente, fluxo angular incidente  $f(\mu) = 1$ , e os seguintes parâmetros: na primeira e terceira regiões,  $f_0 = 0.9$  e  $f_1 = 0.8$ , e na segunda região,  $f_0 = 2/3$  e  $f_1 = 0.5$ . Os resultados obtidos pelos métodos  $LTW_1$ ,  $LTW_3$ ,  $LTCh_3$  e  $LTCh_7$  para o fluxo escalar

médio em  $x = 0, 20, 70$  e  $100$ , são comparados com os resultados dos métodos  $LTS_8$  [11-12],  $LTP_7$  [27-28] e  $SGF S_8$  [9], e apresentados na tabela 5.3.2.

**Tabela 5.3.2. Comparação numérica dos métodos  $LTW_N$ ,  $LTCh_N$ ,  $LTS_N$ ,  $LTP_N$  e  $SGF S_N$  para o fluxo médio em uma placa heterogênea.**

Método	$\phi_m(0)$	$\phi_m(20)$	$\phi_m(70)$	$\phi_m(100)$
$LTW_1$	0.63037	$0.19663 \times 10^{-2}$	$0.02798 \times 10^{-10}$	$0.00604 \times 10^{-13}$
$LTW_3$	0.61698	$0.34046 \times 10^{-2}$	$0.17883 \times 10^{-10}$	$0.09799 \times 10^{-13}$
$LTCh_3$	0.62362	$0.41773 \times 10^{-2}$	$0.37516 \times 10^{-10}$	$0.28644 \times 10^{-13}$
$LTCh_7$	0.61844	$0.41061 \times 10^{-2}$	$0.32306 \times 10^{-10}$	$0.23965 \times 10^{-13}$
$LTP_7$	0.61112	$0.41033 \times 10^{-2}$	$0.32316 \times 10^{-10}$	$0.24323 \times 10^{-13}$
$LTS_8$	0.61112	$0.41033 \times 10^{-2}$	$0.32316 \times 10^{-10}$	$0.24323 \times 10^{-13}$
$SGF S_8$	0.61112	$0.41033 \times 10^{-2}$	$0.32316 \times 10^{-10}$	$0.24323 \times 10^{-13}$



#### 5.4. Problemas Bidimensionais de Transporte

Considera-se o problema de transporte com espalhamento isotrópico em uma placa quadrada homogênea com 20 cm de lado e fonte de intensidade 1 neutron/(cm<sup>2</sup> seg), localizada em um dos vértices, conforme Figura 5.4.1.

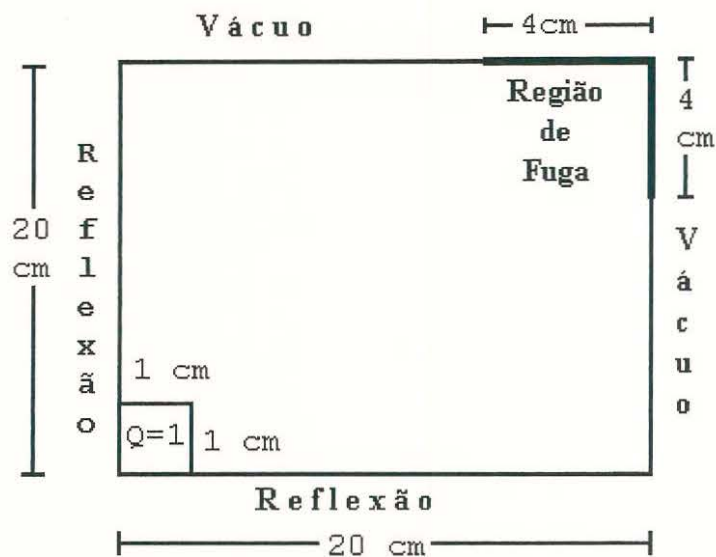


Figura 5.4.1. Geometria do problema bidimensional.

Utiliza-se as formulações  $LTCh_1-SP_1$  e  $LTCh_1-SP_2$  para calcular a corrente angular na região de fuga, para as seções de choque de espalhamento  $\sigma_s = 0.99 \text{ cm}^{-1}$  e  $\sigma_s = 0.5 \text{ cm}^{-1}$ , e compara-se os resultados obtidos, na Tabela 5.4.1, com os dos métodos  $LTS_6$ , LN e SGF-ExpN [18].

**Tabela 5.4.1. Simulação numérica da corrente angular pelos métodos  $LTCh_N-SP_M$ ,  $LTS_N$ , LN e SGF-ExpN.**

Formulação	$\sigma_s = 0.99 \text{ cm}^{-1}$	$\sigma_s = 0.5 \text{ cm}^{-1}$
$LTCh_1-SP_1$	$1,0 \times 10^{-2}$	$7,6 \times 10^{-9}$
$LTCh_1-SP_2$	$1,9 \times 10^{-3}$	$2,6 \times 10^{-9}$
$LTS_6$	$4,5 \times 10^{-3}$	$2,3 \times 10^{-12}$
SGF-ExpN - 20 nós	$4,2 \times 10^{-3}$	$2,2 \times 10^{-12}$
LN - 20 nós	$6,0 \times 10^{-3}$	$4,0 \times 10^{-10}$

Os resultados obtidos na tabela 5.4.1, para as formulações  $LTCh_1-SP_1$  e  $LTCh_1-SP_2$  não apresentam uma boa coincidência com os dos métodos  $LTS_6$ , LN e SGF-ExpN, o que é esperado, devido a baixa ordem de aproximação considerada, bem como o tipo de aproximação usada na variável  $y$  (polinomial). Cabe ainda observar que nos métodos LN e SGF-ExpN o fluxo angular transversal é aproximado, respectivamente, linear e exponencialmente, enquanto que o proposto é exato, a menos do truncamento da aproximação polinomial em  $y$ , uma vez que nenhuma aproximação foi feita ao longo de sua derivação.

## 6. CONCLUSÕES

Os resultados numéricos obtidos pelos métodos propostos, permitem as seguintes conclusões:

1. Desenvolvimento de um método geral que resolve as aproximações  $P_N$ ,  $W_N$ ,  $Ch_N$ ,  $S_N$ ,  $A_N$  e  $LD_N$  da equação de transporte unidimensional, em forma analítica, aplicando transformada de Laplace, resolvendo o sistema algébrico resultante pelo algoritmo de Trzaska [29] e invertendo analiticamente o fluxo transformado. É importante salientar que, embora as soluções propostas tenham sido encontradas para fluxo incidente conhecido na fronteira, estas soluções são facilmente estendidas para outros tipos de condições de fronteira.
2. O caráter analítico das soluções encontradas permitiu uma mudança de base no espaço de solução [43], tornando-as eficientes na resolução de problemas de transporte unidimensionais de grande espessura (vide Anexo III).
3. O caráter analítico da solução  $LTA_N$ , permitiu estabelecer uma solução analítica  $LTA_N$  com dependência contínua na variável angular.
4. Apesar de todos os problemas de pequena espessura, apresentados nas Tabelas 5.2.3, 5.2.6 e 5.2.9, terem sido rodados com baixa ordem de aproximação, constata-se que os métodos são equivalentes no que diz respeito à precisão dos resultados. Para problemas de grande espessura, a partir de 100 livres caminhos médios, o método  $LTCh_N$  mostrou-se mais eficiente, no sentido de apresentar resultados de mesma precisão com menor ordem de quadratura, vide Tabelas 5.2.4, 5.2.5, 5.2.7 e 5.2.10.
5. A comparação entre o menor autovalor das aproximações propostas e o autovalor discreto de Case [42], apresentado na Tabela 5.2.8, reforça a indicação da eficiência da formulação  $LTCh_N$  na solução de problemas de grande espessura, com baixa ordem de aproximação, devido ao fato que o

menor autovalor da matriz  $LTCh_N$  é o que melhor aproxima o autovalor discreto de Case.

6. As conclusões dos itens 4 e 5, sugerem que a formulação  $LTCh_N$  é a mais precisa entre os métodos considerados, para aproximações de baixa ordem.
7. Observa-se, em problemas de grande espessura, que o erro absoluto  $E(\rho)$  aumenta com a diminuição da seção de choque de espalhamento. Por outro lado, não observou-se, na precisão dos resultados, influência da variação do fluxo angular incidente na fronteira.
8. Os resultados obtidos no problema bidimensional para as formulações  $LTCh_1-SP_1$  e  $LTCh_1-SP_2$  não apresentam uma boa coincidência com os dos métodos  $LTS_6$ , LN e SGF-ExpN, o que é esperado, devido a baixa ordem de aproximação considerada, bem como o tipo de aproximação usada na variável  $y$  (polinomial). Cabe ainda observar, que nos métodos LN e SGF-ExpN o fluxo angular transversal é aproximado, respectivamente, linearmente e por uma exponencial, enquanto que o método proposto é exato, a menos do truncamento da aproximação polinomial em  $y$ , uma vez que nenhuma aproximação é feita ao longo de sua derivação.
9. O método recursivo de inversão da matriz  $LTS_N$  para espalhamento isotrópico, introduzido no Capítulo 3, foi implementado no CRAY e mostrou-se eficiente, sob o ponto de vista computacional, para calcular a exponencial da matriz  $LTS_N$ , com  $N = 180$ , com pequeno tempo de computação. Cumpre observar que a idéia da recursividade é aplicável às matrizes dos demais métodos. Acredita-se que, uma vez aplicada a recursividade à matriz  $LTS_N$  anisotrópica, o método  $LTS_N$  tornar-se-á um método atrativo e eficiente de solução de problemas unidimensionais de transporte, uma vez que, deste modo, será possível estimar o erro da solução.

Como trabalhos futuros, sugere-se:

1. Implementar o método recursivo, apresentado na seção 2.2, na formulação  $LTS_N$ .



2. Generalizar este método à matriz  $LTS_N$  anisotrópica e às demais matrizes das formulações consideradas.
3. Como o método proposto no capítulo 4 transforma o problema bidimensional em problema unidimensional, sugere-se a utilização do método recursivo de inversão de matrizes para aumentar a ordem de aproximação e, conseqüentemente, a precisão dos resultados.
4. Geração de problemas *Benchmark* em uma e duas dimensões.



## REFERÊNCIAS

- [1] GARCIA, R. D. M.: A Review of the Facile ( $F_N$ ) Method in Particle Transport Theory. **Transport Theory and Statistical Physics** 14(1985) 391-435.
- [2] DUDERSTADT, J. J. & MARTIN, W. R.: **Transport Theory**. John Wiley and Sons, New York (1973).
- [3] SEED, T. J. & ALBRECHT, R. W.: Applications of Walsh Functions to Neutron Transport Problems - I. Theory. **Nuclear Science and Engineering** 60(1976) 337-345.
- [4] CARDONA, A. V. & VILHENA, M. T.: Solução da Equação de Transporte Linear Utilizando Polinômios de Chebyshev e Transformada de Laplace. **Anais do V Congresso Geral de Energia Nuclear (V CGEN)**, vol. I, Rio de Janeiro (1994) 157-159.
- [5] CARDONA, A. V. & VILHENA, M. T.: A Solution of Linear Transport Equation using Chebyshev Polynomials and Laplace Transform. **Kerntechnik** 59(1994) 278-281.
- [6] COPPA, G. & RAVETTO, P.: An Approximate Method to Study the One Velocity Neutron Integral Transport Equations. **Annals of Nuclear Energy** 9(1982) 169-174.
- [7] DE BARROS, R. C.: A Hybrid Discontinuous Finite Element-Spectral Nodal Method for Slab-Geometry Transport Problems Without Spatial Truncation Error. **Anais da Conferência de Matemática e Computação da ANS**, vol.II, Portland (1995) 980-988.
- [8] DE BARROS, R. C.; CARDONA, A. V. & VILHENA, M. T.: Analytical Numerical Methods Applied to Linear Discontinuous Angular Approximations of the Transport Equation in Slab Geometry. Em impressão no jornal **Kerntechnik**.
- [9] DE BARROS, R. C. & LARSEN, E. W.: A Numerical Method for One-Group Slab-Geometry Discrete Ordinates Problems with No Spatial Truncation Error. **Nuclear Science And Engineering** 104(1990) 199-208.

- [10] DE BARROS, R. C. & LARSEN, E. W.: A Spectral Nodal Method for One-Group X,Y-Geometry Discrete Ordinates Problems. **Nuclear Science And Engineering** 111(1992) 34-45.
- [11] VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B. A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation. **Kerntechnik** 56(1991) 334-336.
- [12] BARICHELLO, L. B.: Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional. **Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PROMEC - UFRGS, Porto Alegre (1992).**
- [13] BARICHELLO, L. B.; VILHENA, M. T.: A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation. **Kerntechnik** 58(1993) 182-184.
- [14] OLIVEIRA, J. V.; AGOSTINI, M. N.; BARICHELLO, L. B.; VILHENA, M. T.: Formulação Analítica para a Solução do Problema de Ordenadas Discretas Unidimensional de Transporte de Neutrons com Espalhamento Anisotrópico. **Anais do IX Encontro Nacional de Física dos Reatores e Termo-Hidráulica (IX ENFIR), Caxambú (1993) 72-77.**
- [15] VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B.: An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinates Problem. **Transport Theory and Statistical Physics** 24(1995) 1337-1352.
- [16] SEGATTO, C. F.: Extensão da Formulação  $LTS_N$  para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Dependência do Tempo. **Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PROMEC - UFRGS, Porto Alegre (1995).**
- [17] SEGATTO, C. F.; VILHENA, M. T.: Extension of the  $LTS_N$  Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimuthal Symmetry. **Annals of Nuclear Energy** 21(1994) 701-710.
- [18] ZABADAL, J.: Solução da Equação Multidimensional de Transporte pelo Método  $LTS_N$ . **Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da**



Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PROMEC - UFRGS, Porto Alegre (1994).

- [19] ZABADAL, J.; VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B.: Solução da Equação de Ordenadas Discretas em Duas Dimensões pelo Método  $LTS_N$ . **Anais do IX Encontro Nacional de Física dos Reatores e Termo-Hidráulica (IX ENFIR)**, Caxambú (1993) 90-92.
- [20] ZABADAL, J.; VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B.: Solution of the Three-Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the  $LTS_N$  Method. **Annals of Nuclear Energy** 22(1995) 131-134.
- [21] ZABADAL, J.; VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B.: An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinates Problem In a Convex Domain. Em impressão na revista **Progress in Nuclear Energy**.
- [22] VILHENA, M. T.; SEGATTO, C. F.; BARICHELLO, L. B.: A Particular Solution for the  $S_N$  Radiative Transfer Problems. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer** 53(1995) 467-469.
- [23] VILHENA, M. T.; SEGATTO, C. F.: A New Iterative Method to Solve the Radiative Transfer Equation. Em impressão na revista **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**.
- [24] GARCIA, R. D. M.: **Transferência Radiativa em Nuvens**. Conferência proferida no XVI CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Uberlândia (1993).
- [25] BRANCHER, J. D.; CARDONA, A. V.; VILHENA, M. T.: A Recursive Method to Invert the  $LTS_N$  Matrix. Submetido para publicação na revista **Progress in Nuclear Energy**.
- [26] DEMIDOVICH, B. P.; MARON, I. A. **Computational Mathematics**. MIR Publishers, Moscow, 1987.
- [27] STRECK, E. E.: Solução Analítica para a aproximação  $P_N$  da Equação de Transporte Linear Unidimensional. **Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em**

- [28] VILHENA, M. T.; STRECK, E. E.: An Approximated Analytical Solution of the One-Group Neutron Transport Equation. **Kerntechnik** 57(1992) 196-198.
- [29] TRZASKA, Z.: An Efficient Algorithm for Partial Fraction Expansion of the Linear Matrix Pencil Inverse. **Journal of the Franklin Institute** 324(1987) 465-477.
- [30] CORRINGTON, M. S.: Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Functions. **IEEE Transactions of Circuit Theory** 20(1973) 470-476.
- [31] CARDONA, A. V. & VILHENA, M. T.: A Solution of Linear Transport Equation using Walsh Function and Laplace Transform. **Annals of Nuclear Energy** 21(1994) 495-505.
- [32] CARDONA, A. V. & VILHENA, M. T.: As Funções de Walsh e sua Aplicação na Solução da Equação de Transporte de Neutrons. **Anais do IX Encontro Nacional de Física dos Reatores e Termo-Hidráulica (IX ENFIR)**, Caxambú (1993) 37-41.
- [33] SCHILLING, R. J. & LEE, H.: **Engineering Analysis - A Vector Space Approach**. John Wiley and Sons, New York (1988).
- [34] COPPA, G.; RAVETTO, P. & SUMINI, M.: Approximate Solution to Neutron Transport Equation with Linear Anisotropic Scattering. **Journal of Nuclear Science and Technology** 20(1983) 822-831.
- [35] MARCHUK, G. J.: **Methods of Numerical Mathematics**. Springer-Verlag, New York (1975).
- [36] CARDONA, A. V.; VILHENA, M. T.: Analytical Solution for the  $A_N$  Approximation. Em impressão na revista **Progress in Nuclear Energy**.
- [37] BOYCE, W. E. & DIPRIMA, R. C.: **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. John Wiley and Sons, New York (1965).

- [38] LEWIS, E. E. & MILLER Jr., W. F.: **Computational Methods of Neutron Transport**. John Wiley and Sons, New York (1984).
- [39] HÖNIG, C. S.: **Aplicações da Topologia à Análise**. Projeto Euclides, IMPA - CNPq, Rio de Janeiro, 1976.
- [40] STAMM'LER, R. J. J. & ABBATE, M. J.: **Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design**. Academic Press, Londres (1983).
- [41] RULKO, R. P. & LARSEN, E. W.: The  $P_N$  Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry - II: Numerical Results. **Nuclear Science and Engineering** 109(1991) 76-85.
- [42] CASE, K. M.: Elementary Solutions of the Transport Equation and Their Applications. **Annals of Physics** 9(1960) 1-23.
- [43] BARICHELLO, L. B.; CARDONA, A. V.; VILHENA, M. T.: The  $LTS_N$  Formulation for Thickness Slab. Em preparação.
- [44] RADEMACHER, H.: Einige Sätze über Reihen von Allgemeinen Orthogonelfunktionen. **Mathematische Annalen** 87(1922) 112-138.
- [45] WALSH, J. L.: A Closed Set of Normal Orthogonal Functions. **American Journal of Mathematics** 45(1923) 5-24.
- [46] FINE, N. J.: On the Walsh Functions. **Transactions of the American Mathematics Society** 65(1949) 372-414.



## ANEXO I - AS FUNÇÕES DE WALSH

Um conjunto ortonormal de funções periódicas retangulares foi introduzido em 1922 por Rademacher [44]. A primeira delas,  $R_0(\mu)$ , é uma onda quadrada de amplitude unitária e período igual a um, ou seja:

$$R_0(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \mu < 1/2 \\ -1, & \text{se } 1/2 < \mu < 1 \end{cases}, \quad R_0(\mu + 1) = R_0(\mu). \quad (\text{A1.1})$$

Cada função subsequente,  $R_k(\mu)$ , é uma onda quadrada com a metade do período da função de Rademacher anterior,  $R_{k-1}(\mu)$ . Assim, pode-se escrever que:

$$R_k(\mu) = R_0(2^k \mu), \quad (\text{A1.2})$$

para  $k = 1, 2, 3, \dots$ . No entanto, estas funções definidas por Rademacher apresentam simetria ímpar em  $\mu = 0$  e  $\mu = 1/2$ , significando que este conjunto de funções é incompleto, pois uma combinação linear de qualquer número destas funções apresentará uma simetria ímpar em torno destes dois pontos. Este fato torna impossível a expansão de funções com simetria par em  $\mu = 0$  e  $\mu = 1/2$  em uma série de  $R_k(\mu)$  [30].

Assim, em um trabalho datado de 1923 [45], J. L. Walsh combinou as funções descritas por Rademacher com o objetivo de determinar um conjunto ortonormal completo de ondas retangulares periódicas. A primeira destas funções,  $\omega_0(\mu)$ , é constante igual a um. As demais funções,  $\omega_n(\mu)$ , são definidas como o produto das funções de Rademacher escolhidas conforme a representação binária de  $n$ , ou seja,

$$\omega_n(\mu) = R_{v_1}(\mu) \cdot R_{v_2}(\mu) \cdot \dots \cdot R_{v_k}(\mu) \quad (\text{A1.3})$$

onde  $n = 2^{v_1} + 2^{v_2} + \dots + 2^{v_k}$ , sendo  $v_i < v_{i+1}$  inteiros positivos, com  $i = 1:k$ . As funções de Walsh  $\omega_n(\mu)$  são apresentadas na Figura A1.1 abaixo, com  $n = 0:7$ .

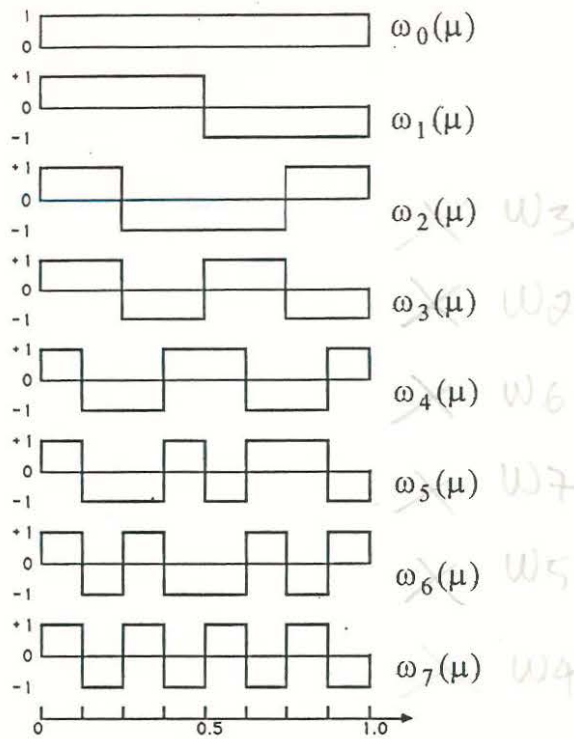


Figura A1.1. As funções de Walsh

Uma propriedade importante das funções de Walsh, reside no fato de o produto de duas destas funções ser obtido pela adição em módulo dois da representação binária de seus dígitos. Assim,

$$\omega_n(\mu) \cdot \omega_m(\mu) = \omega_{(n+m) \bmod 2}(\mu), \quad (\text{A1.4})$$

onde  $(n+m) \bmod 2$  denota a adição em módulo dois da representação binária de  $n$  e  $m$ .

Toda função absolutamente integrável no intervalo  $[0,1]$  pode ser expandida em uma série de funções de Walsh:

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \omega_n(\mu), \quad (\text{A1.5})$$

onde as constantes  $C_n$  são obtidas pela ortogonalidade destas funções, ou seja:

$$C_n = \int_0^1 f(\mu) \omega_n(\mu) d\mu. \quad (\text{A1.6})$$

De particular interesse, é a expansão em funções de Walsh da função  $f(\mu) = \mu - [\mu]$ , na qual os coeficientes  $C_n$  são dados por [46]:

$$C_n = \begin{cases} 1/2, & \text{se } n = 0 \\ -2^{-(k+2)}, & \text{se } n = 2^k, \text{ com } k \text{ inteiro positivo,} \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

onde  $[\mu]$  denota o maior inteiro menor que  $\mu$ .

## ANEXO II - DERIVAÇÃO DA APROXIMAÇÃO $W_N$

A utilização das funções de Walsh para gerar a aproximação  $W_N$  da equação de transporte unidimensional depende de um acerto entre a variável angular da equação de transporte ( $\mu \in [-1,1]$ ) e o domínio  $[0,1]$  das funções de Walsh. Este acerto foi realizado por Cardona e Vilhena [32] de duas formas diferentes, as quais resultam em aproximações idênticas da equação de transporte. Na primeira, a transformação de Kuznetsov (3.3.1) é aplicada na equação de transporte (2.1.1) resultando em um sistema de duas equações íntegro-diferenciais para as funções  $u(x,\mu)$  e  $v(x,\mu)$ , definidas em  $\mu \in [0,1]$ . As funções  $u(x,\mu)$  e  $v(x,\mu)$  resultantes são então expandidas na variável angular em uma série truncada de funções de Walsh, substituídas neste sistema de equações íntegro-diferenciais e, tomando-se momentos, resulta a aproximação  $W_N$ . Na segunda maneira, as funções de Walsh são estendidas ao intervalo  $[-1,1]$  de forma par e ímpar (vide equações (2.2.1)) e, então, as equações  $W_N$  são obtidas expandindo-se o fluxo angular na variável angular em uma série truncada destas funções, substituindo-se esta expansão na equação de transporte e tomando-se momentos.

Uma terceira derivação da aproximação  $W_N$  foi obtida por Seed e Albrecht [3], onde as funções de Walsh são definidas recursivamente no intervalo  $[-1,1]$  da seguinte forma:

$$\omega_{2n+p}(\mu) = (-1)^{[n/2]+p} \left\{ \omega_n(2\mu+1) + (-1)^{n+p} \omega_n(2\mu-1) \right\}, \quad (\text{A2.1})$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $p = 0$  ou  $1$ , com:

$$\omega_0(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq \mu < 1 \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases}, \quad (\text{A1.8a})$$

com  $[n/2]$  denotando a parte inteira de  $n/2$ . Então, expandindo-se o fluxo angular em uma série truncada destas funções resulta em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas equações  $W_N$ .



## ANEXO III - TRATAMENTO DE GRANDES ESPESSURAS

A solução do problema de transporte em uma dimensão pelas formulações estabelecidas neste trabalho, é apresentada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(x) = & \sum_{k=1}^M e^{\rho_k x} \underline{\Delta}_k^1 \cdot \underline{\Psi}(0) + \sum_{k=1}^M e^{\rho_k x} \underline{\Delta}_k^1 * \underline{Q}(x) + \\ & + \sum_{k=1}^M e^{-\rho_k x} \underline{\Delta}_k^2 \cdot \underline{\Psi}(0) + \sum_{k=1}^M e^{-\rho_k x} \underline{\Delta}_k^2 * \underline{Q}(x), \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

onde  $\rho_k$  denota os autovalores da matriz da aproximação em questão. A constante  $M$  assume os valores:  $N+1$ ;  $(N-1)/2$ ;  $N$ ;  $N$ , respectivamente, para as aproximações  $W_N$ ,  $Ch_N$ ,  $A_N$  e  $LD_N$ . A presença de autovalores positivos, aliada a existência de um simétrico negativo, apresenta-se como um complicador quando aumenta-se a ordem de quadratura, pois os autovalores podem ser extremamente elevados, gerando problema no cálculo das exponenciais para grandes espessuras.

Uma forma de resolver esta dificuldade, é dividir o domínio espacial em subregiões, aplicar a formulação em questão para cada região, usando a continuidade na fronteira entre duas subregiões como condição extra. Esta técnica foi aplicada nos problemas 5.2.1 e 5.3.2, considerando 20 subregiões para as formulações com menor ordem de quadratura ( $N = 4$ ) e 32 regiões para problemas com maior ordem de quadratura ( $N = 8$ ), bem como aos trabalhos publicados até então. Computacionalmente, esta técnica mostra-se inviável para altas ordens de quadratura (problemas de transferência radiativa em nuvens [24], por exemplo), porque são necessárias muitas subregiões, causando um excessivo tempo de computação e uso da memória da máquina, bem como erros de arredondamento.

Assim, visando resolver o efeito de autovalores positivos no tratamento de problemas de grande espessuras, propõe-se que a solução (A2.1) seja reescrita como [43]:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(x) = & \sum_{k=1}^M e^{-\rho_k (h-x)} \underline{\Delta}_k^1 \cdot \underline{\Psi}^*(0) + \sum_{k=1}^M e^{-\rho_k (h-x)} \underline{\Delta}_k^1 * \underline{Q}(x) + \\ & + \sum_{k=1}^M e^{-\rho_k x} \underline{\Delta}_k^2 \cdot \underline{\Psi}^*(0) + \sum_{k=1}^M e^{-\rho_k x} \underline{\Delta}_k^2 * \underline{Q}(x), \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

onde  $h$  denota a espessura da placa considerada e  $\underline{\Psi}^*(0)$  engloba as devidas correções impostas pelas modificações realizadas. Esta técnica elimina o overflow no tratamento de problemas de transporte em placas de grandes espessuras e aproximações com altas ordens de quadratura, porque as exponenciais são aplicadas sempre sobre números negativos.