

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# **Jogos Evolucionários sobre Grafos Estrela Fechada**

por

Tássio Fonseca Feitosa

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes  
Orientador

Porto Alegre, Março de 2019.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Feitosa, Tássio Fonseca

Jogos Evolucionários sobre  
Grafos Estrela Fechada / Tássio Fonseca Feitosa.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2019.

80 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2019.

Orientador: Moraes, Jean Carlo Pech de

Dissertação: Matemática Aplicada,  
Sistemas Não-Lineares e Biomatemática

# **Jogos Evolucionários sobre Grafos Estrela Fechada**

por

Tássio Fonseca Feitosa

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial  
para a obtenção do grau de

## **Mestre em Matemática Aplicada**

Linha de Pesquisa: Sistemas Não-Lineares e Biomatemática

Orientador: Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes

Banca examinadora:

Prof. Dra. Juliane Golubinski Capaverde  
PPGMAP-UFRGS

Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos  
PPGMAP-UFRGS

Prof. Dr. Vanderlei Manica  
UFSM

Dissertação apresentada em  
Março de 2019.

Prof. Dr. Esequia Sauter  
Coordenador

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| LISTA DE FIGURAS . . . . .   | v         |
| LISTA DE TABELAS . . . . .   | vi        |
| LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES . . . . .  | vii       |
| RESUMO . . . . .   | viii      |
| ABSTRACT . . . . .   | ix        |
| <br>   |           |
| <b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>  | <b>1</b>  |
| <br>   |           |
| <b>2 TEORIA CLÁSSICA DOS JOGOS . . . . .</b>   | <b>4</b>  |
| 2.1 Noções elementares da teoria clássica dos jogos . . . . .  | 5         |
| 2.2 Jogos em forma normal e com informação completa: estratégia dominante e equilíbrio de Nash . . . . . | 8         |
| 2.3 Soluções de um jogo . . . . .  | 10        |
| 2.3.1 Dominância . . . . .   | 11        |
| 2.3.2 Equilíbrio de Nash ou solução estratégica . . . . .  | 14        |
| 2.3.3 Estratégias mistas . . . . .   | 15        |
| 2.3.4 Soluções em estratégias mistas . . . . .   | 16        |
| <br>   |           |
| <b>3 DINÂMICA DE REPLICAÇÃO . . . . .</b>  | <b>20</b> |
| 3.1 Equação de replicação . . . . .  | 20        |
| 3.2 Equilíbrio de Nash e estados evolutivamente estáveis . . . . .                                       | 21        |
| <br>   |           |
| <b>4 JOGOS EVOLUCIONÁRIOS . . . . .</b>  | <b>23</b> |
| 4.1 Dinâmica de interação em uma população em rede . . . . .   | 24        |
| <br>   |           |
| <b>5 JOGOS EVOLUCIONÁRIOS SOBRE POPULAÇÕES EM REDE (GRAFOS) . . . . .</b>                                | <b>27</b> |

|       |  |           |
|-------|--|-----------|
| 5.1   | Jogos não-cooperativos em grafos . . . . .   | 27        |
| 5.2   | Pagamento para jogos em grafos: estratégias puras . . . . .  | 28        |
| 5.3   | Pagamento para jogos em grafos: estratégias mistas . . . . .   | 29        |
| 5.4   | Equação para a dinâmica de populações em rede . . . . .  | 30        |
| 5.5   | Tipo de jogo N-2. . . . .  | 32        |
| 6     | <b>MODELO EVOLUTIVO PARA A DINÂMICA DO JOGO REPRESENTADO POR UM GRAFO COM ESTRUTURA DE ESTRELA FECHADA . . . . .</b> | <b>38</b> |
| 6.1   | Jogos evolucionários na estrela fechada . . . . .  | 38        |
| 6.2   | Pontos de equilíbrio . . . . .   | 42        |
| 6.2.1 | Pontos de equilíbrio misto . . . . .   | 42        |
| 6.2.2 | Pontos de equilíbrio puro . . . . .  | 47        |
| 6.3   | Estabilidade assintótica . . . . .   | 47        |
| 6.3.1 | Estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio misto . . . . .  | 47        |
| 6.3.2 | Estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio puro . . . . .   | 49        |
| 7     | <b>COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO . . . . .</b>   | <b>51</b> |
| 7.1   | Biestabilidade . . . . .   | 51        |
| 7.2   | Coexistência . . . . .   | 61        |
| 7.3   | Simulações . . . . .   | 64        |
| 8     | <b>CONCLUSÕES . . . . .</b>  | <b>76</b> |
|       | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>  | <b>78</b> |

## Lista de Figuras

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 4.1  | Multipopulação . . . . .   | 26 |
| Figura 6.1  | Estrela Fechada com $n$ vértices . . . . .   | 39 |
| Figura 7.1  | Jogadores 1 e 2 utilizando a estratégia $R$ e jogador 3 utilizando a estratégia $Y$ . . . . .  | 56 |
| Figura 7.2  | Jogador 2 utilizando a estratégia $Y$ . . . . .  | 57 |
| Figura 7.3  | JE para 6 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .                                  | 67 |
| Figura 7.4  | JE para 6 jogadores com condição inicial $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .                                  | 68 |
| Figura 7.5  | JE para 6 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .                                  | 68 |
| Figura 7.6  | JE para 7 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .                       | 69 |
| Figura 7.7  | JE para 7 jogadores com condição inicial $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .                       | 70 |
| Figura 7.8  | JE para 7 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .                       | 70 |
| Figura 7.9  | JE para 8 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .            | 72 |
| Figura 7.10 | JE para 8 jogadores com condição inicial $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .            | 72 |
| Figura 7.11 | JE para 8 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . .            | 72 |
| Figura 7.12 | JE para 9 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . . | 73 |
| Figura 7.13 | JE para 9 jogadores com condição inicial $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . . | 74 |
| Figura 7.14 | JE para 9 jogadores com condição inicial $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ . . . . . | 74 |

## Lista de Tabelas

|            |  |    |
|------------|--|----|
| Tabela 2.1 | Matriz <i>payoff</i> . . . . .   | 7  |
| Tabela 2.2 | Matriz de <i>payoffs</i> para a situação da escolha de restaurantes. . .                                       | 8  |
| Tabela 2.3 | Matriz de <i>payoffs</i> para o jogo. . . . .  | 12 |
| Tabela 2.4 | Matriz de <i>payoffs</i> com a terceira coluna retirada. . . . .   | 12 |
| Tabela 2.5 | Matriz de <i>payoffs</i> após remoção das linhas 1 e 3. . . . .  | 13 |
| Tabela 2.6 | Matriz de <i>payoffs</i> após remoção das colunas 1 e 2. . . . .   | 13 |
| Tabela 2.7 | Matriz de <i>payoff</i> de um jogo que não possui equilíbrio de Nash.  | 15 |
| Tabela 7.1 | Jogador 4 utilizando as estratégias <i>R</i> e <i>Y</i> . . . . .  | 57 |
| Tabela 7.2 | Jogador 4 utilizando as estratégias <i>R</i> e <i>Y</i> . . . . .  | 58 |
| Tabela 7.3 | Jogador 5 utilizando as estratégias <i>R</i> e <i>Y</i> . . . . .  | 58 |
| Tabela 7.4 | Quantidade necessária de jogadores mutantes utilizando a estratégia <i>R</i> para dominar a população. . . . . | 60 |
| Tabela 7.5 | Simulações para 6 jogadores. . . . .   | 67 |
| Tabela 7.6 | Simulações para 7 jogadores. . . . .   | 69 |
| Tabela 7.7 | Simulações para 8 jogadores. . . . .   | 71 |
| Tabela 7.8 | Simulações para 9 jogadores. . . . .   | 73 |

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $G$                      | Grafo ou uma rede de conexões qualquer                                    |
| $E$                      | Conjunto de arestas do grafo  |
| $(i, v) \in E$           | Aresta do grafo conectando o vértice $i$ e o vértice $v$                  |
| $A$                      | Matriz de adjacência do grafo   |
| $J$                      | Matriz jacobiana  |
| $J_{i,j}$                | Elemento situado na linha $i$ e coluna $j$ da matriz jacobiana            |
| $B$                      | Matriz de <i>payoff</i> ou matriz de pagamento de um jogador              |
| $\sigma_{v,s}$           | Diferença entre os pagamentos do jogador $v$ ao utilizar a estratégia $s$ |
| $\lambda_i$              | Autovalores de uma dada matriz  |
| $\lambda(A)$             | Espectro da matriz $A$  |
| $Tr(J)$                  | Traço da matriz jacobiana $J$   |
| $\tilde{0}$              | Perturbação da estratégia 0, aproximadamente (0.01,0.99)                  |
| $\tilde{1}$              | Perturbação da estratégia 1, aproximadamente (0.99,0.01)                  |
| $(\tilde{0}, \tilde{1})$ | Perturbação do ponto (0,1) aproximadamente (0.01,0.99)                    |
| $JE$                     | Abreviação de Jogo Evolucionário  |



# RESUMO

Este trabalho tem por objetivo investigar a existência de soluções assintoticamente estáveis para os estados estacionários puros (ou pontos de equilíbrio puro) para o modelo matemático que descreve a dinâmica de replicação com jogos representados por grafos com a estrutura de estrela fechada. Estamos especificamente interessados em pontos de equilíbrio puro, pelo fato de não haver na literatura resultados referentes à estabilidade dos mesmos. Os estudos encontrados concentram-se apenas na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio misto, os quais já possuem resultados que mostram que tais pontos não são assintoticamente estáveis para esses jogos que são representados por redes arbitrárias de conexões sem *self-edges* (laços).

Utilizando-se do modelo matemático de replicação associado à dinâmica do jogo representado por um grafo qualquer, juntamente com a teoria dos jogos evolucionários, foi analisado o comportamento assintótico dos pontos de equilíbrio obtidos para os grafos estudados neste trabalho. O conjunto de experimentos numéricos tornou possível conjecturar e provar a existência e unicidade dos pontos assintoticamente estáveis, considerando os diferentes tipos de jogos associados à estrutura do grafo estrela fechada e também no que tange a forma como cada jogador recebe a sua recompensa.

# ABSTRACT

This work aims to investigate the existence of asymptotically stable solutions for pure steady states (or pure equilibrium points) for the mathematical model that describes the replicator dynamics with games represented by graphs with the Closed Star structure. We are specifically interested in pure equilibrium points, because there are no results in the literature regarding their stability. The studies found concentrate only on the stability analysis of the mixed equilibrium points, which already have results that show that such points are not asymptotically stable for these games that are represented by arbitrary networks of connections without self-edges.

Using the mathematical model of associated to the replicator equation with the dynamics of the game represented by any graph, together with the theory of evolutionary games, we analyzed the asymptotic behavior of the equilibrium points obtained for the graphs studied in this work. The set of numerical experiments made it possible to conjecture and prove the existence and uniqueness of the asymptotically stable points, considering the different types of games associated with the closed star graph structure and also with respect to the way each player receives his payoff.

# 1 INTRODUÇÃO

A todo instante ocorrem interações entre indivíduos em diferentes meios como, por exemplo, nos sistemas de interesse da física, biologia, sociologia e economia. A teoria dos jogos evolucionários, no contexto de sistemas dinâmicos em redes complexas, se apresenta como um mecanismo para descrever essas interações [3]. Esses mecanismos podem ser modelados de forma mais simples, utilizando-se apenas duas ou três estratégias, ou podem se apresentar de forma mais complexas, utilizando-se maior quantidade de estratégias [8, 17], como, por exemplo, desde um simples jogo de pedra-papel-tesoura, situações como o espalhamento de doenças contagiosas sujeitas à competição e seleção [5], e até a dinâmica de opinião sob a influência de uma rede social [7]. Um modelo matemático para os jogos evolucionários é proposto em [13], por Madeo e Mocenni, para estender a clássica equação de replicação para uma população finita de jogadores organizados em uma rede.

Um exemplo interessante é encontrado em [23], onde o autor considera uma rede de indivíduos completamente conectados, o que pode ser interpretado como um grafo completo, e analisa a evolução das estratégias dos jogadores ao suprimir alguns “*links*” do jogador central, ou seja, segregando alguns jogadores. Essa ideia de suprimir algumas conexões é analisada em [14], onde também estuda-se a existência de pontos estacionários para o sistema, que representam o ponto em que as diferentes subpopulações do jogo podem coexistir, e o comportamento do jogo como um jogo de estratégias mistas, em que os indivíduos da subpopulação podem utilizar estratégias diferentes. A ideia de analisar a estabilidade assintótica desses pontos estacionários é relacionada à possibilidade de que determinados subgrupos de jogadores possam existir de maneira assintoticamente estável [13, 9].

As conexões existentes entre os indivíduos, em jogos evolucionários, afetam fortemente a maneira como as estratégias evoluem ao longo do tempo [21],

sejam estratégias cooperativas (biestabilidade), sejam estratégias não cooperativas (coexistência), e assim a replicação da estratégia dos jogadores é descrita de modo que a seleção das estratégias tendam aos objetivos de cada um deles. Tendo em vista a importância das conexões entre os indivíduos, e como afetam a evolução das estratégias, um problema interessante é uma situação em que a força de conexão entre os jogadores centrais e os demais jogadores é variável, e desse modo pode-se ir controlando o sistema dinâmico em redes de modo a conduzir os jogadores a um ponto estacionário específico, o que em [18, 11, 19] é chamado de “*consensus problem*”, ou “*adaptive networks*” em [22, 4]. Desse modo, é interessante a busca por resultados teóricos sobre a influência sofrida pelo sistema quando há variação nas forças de conexão entre os jogadores centrais e os demais.

O presente trabalho tem por objetivo investigar a existência de pontos estacionários puros que sejam assintoticamente estáveis para os modelos matemáticos, no contexto evolutivo, que descreve a dinâmica dos jogos representados por grafos de estrutura estrela fechada. Em [12] foi mostrado a não existência do estado estacionário misto assintoticamente estável para jogos evolucionários para qualquer estrutura de grafos (redes arbitrárias) sem laços, e portanto este trabalho procura investigar a existência de resultados semelhantes para os estados estacionários puros, devido ao fato de não ter sido muito discutido na literatura pesquisada até o momento.

No capítulo 2 são apresentadas algumas definições importantes sobre a teoria clássica dos jogos e alguns aspectos que serão relevantes para o desenvolvimento do trabalho, como o *Equilíbrio de Nash*, e as definições de *jogo*, *estratégia dominante*, *estratégias puras* e *estratégias mistas*. No capítulo 4 é descrita a dinâmica dos jogos evolucionários e os elementos que a compõem, para que, no capítulo 5 essa ideia seja estendida para os grafos, e assim obtendo o sistema que descreve a dinâmica evolutiva de jogos sobre populações em rede. No capítulo 6 essa dinâmica é aplicada a uma rede específica, e procura-se obter resultados sobre a evolução es-

tratégica dos jogadores considerando-se jogos de cooperação e não-cooperação. E por fim, na seção 7.3, são apresentados alguns resultados obtidos através de simulações computacionais que permitiram conjecturar e provar alguns resultados sobre o jogo evolutivo no grafo estrela fechada. Neste trabalho, apresentaremos um modelo matemático para esses jogos que consiste em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, onde a quantidade de equações depende da quantidade de vértices do grafo que representa a rede de conexão dos jogadores, e também alguns resultados para jogos com 2 estratégias.

## 2 TEORIA CLÁSSICA DOS JOGOS

Durante muitas situações de interações entre os indivíduos eles são forçados a pensar estrategicamente. A teoria dos jogos é uma área da ciência que estuda situações de conflito e cooperação entre indivíduos que tomam decisões racionais. Esses tipos de decisões são chamadas estratégias e dizer que cada indivíduo age racionalmente, significa dizer que ele escolhe entre diferentes estratégias a que lhe traz maior bem-estar, satisfação. Por exemplo, um comprador e um vendedor, ambos utilizarão estratégias de negociação, e o comprador tentará obter o menor preço possível e o vendedor tentará obter o maior lucro possível. Ao se analisar um jogo é necessário saber quais são as estratégias disponíveis para cada jogador, quais são os resultados possíveis de serem obtidos a partir da escolha de certa estratégia, com qual frequência de tempo as decisões estratégicas são tomadas e se um jogador tem acesso ou não às decisões tomadas pelos outros jogadores.

O Dilema do Prisioneiro, um dos problemas mais famosos da teoria dos jogos, mostra o conflito entre tentar fazer o melhor para o grupo ou fazer o melhor para si. Na história desse problema tem-se duas pessoas: pessoa  $A$  e pessoa  $B$ . Ambas são presas sob suspeita de terem cometido certo crime. As provas não são suficientes para condená-los. A existência de um outro crime de menor relevância poderá ser utilizada para a condenação. Desse modo, o promotor propõe a ambas, pessoa  $A$  e pessoa  $B$  o seguinte: trair o seu parceiro e confessar o crime ou ficar em silêncio. Se ambas ficarem em silêncio, cada uma ficará 2 anos na prisão e após esse tempo serão soltas. Entretanto, se uma delas ficar em silêncio e a outra confessar o crime, a que ficou em silêncio ficará 10 anos na prisão e a que confessou será libertada imediatamente. No caso de ambas confessarem o crime, as duas ficarão 5 anos na prisão. Considerando-se que elas não podem se comunicar, qual deve ser a melhor decisão a ser tomada?

O Dilema do Prisioneiro mostra que, ao se analisar a situação, a melhor opção para o ambas as pessoas é cooperar uma com a outra, e assim as duas ficariam apenas 2 anos na cadeia. Entretanto, uma situação de conflito se instaura quando o agente racional  $A$ , ao ter certeza da cooperação da pessoa  $B$ , tenderá a traí-lo para poder ficar livre imediatamente, e assim a pessoa  $A$  decide trair a pessoa  $B$ . Seguindo o mesmo raciocínio, o agente racional  $B$  também tenderá a trair a pessoa  $A$  e com isso os dois ficarão 5 anos presos, causando o pior cenário possível para o grupo.

O jogo do Dilema do Prisioneiro é composto por 2 jogadores e 2 estratégias (coopera ou deserta), esse tipo de jogo, apesar da sua aparente simplicidade, é uma boa analogia matemática para diversas outras interações de cooperação, tendo sido pesquisada em diversas outras áreas que exigem essa abordagem cooperativa, como, por exemplo, nas ciências econômicas, ciências biológicas, dentre outras.

## 2.1 Noções elementares da teoria clássica dos jogos

A todo momento, em qualquer contexto em que pessoas estão inseridas, elas têm de tomar algum tipo de decisão. Essas decisões podem ser independentes do comportamento individual de terceiros ou são decisões que têm consequências sobre os resultados que podem ser obtidos por aqueles com os quais elas interagem. Sendo assim, as decisões de um agente, ao adotar uma postura estratégica, têm impacto sobre a decisão de terceiros, e as decisões deles têm impacto direto sobre os resultados que ele pode alcançar. De modo geral, essas situações de interação estratégica são os alvos de estudo da teoria dos jogos, assim ela estuda a escolha da melhor decisão em situações de conflito para as quais há um modelo matemático.

Para se definir um jogo, é necessário ressaltar alguns elementos. Inicialmente consideremos um conjunto de *jogadores*, onde no caso mais simples será composto por apenas dois agentes, como, por exemplo, em uma situação de nego-

ciação entre um comprador e um vendedor. Cada jogador possui um conjunto de *estratégias* possíveis de onde ele irá escolher uma delas de acordo com a situação. No momento em que todos os jogadores envolvidos escolhem as suas estratégias, temos assim um *perfil de estratégia* do espaço de todos os perfis possíveis. Cada jogador tem seu próprio interesse para cada uma das situações do jogo, ou seja, o resultado (*payoff*) da estratégia utilizada por ele depende das estratégias utilizadas pelos outros jogadores. Matematicamente isso nos diz que cada jogador possui uma *função de pagamento* que atribui um número real, que é o *payoff* do jogador, para cada situação do jogo.

Desse modo, um jogo possui os seguintes elementos básicos: um conjunto finito de jogadores, representado por  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Cada jogador  $v_i \in V$  possui um conjunto finito  $\mathcal{S}_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$  de opções, que são chamadas *estratégias puras* do jogador  $v_i$  ( $m_i \geq 2$ ). No caso de algum jogador ter apenas uma estratégia, o modelo pode intrinsecamente ter os resultados da ação deste jogador, mas não precisa tê-lo como jogador. Um vetor  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , onde  $z_i \in \mathcal{S}_i$  é uma estratégia pura do jogador  $v_i \in V$ , é chamado de *perfil de estratégia pura*. O conjunto de todos os perfis de estratégias puras é dado pelo produto cartesiano:

$$\mathcal{S} = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_i = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_n, \quad (2.1)$$

e é denominado *espaço de estratégia pura* do jogo. Para cada jogador  $v_i \in V$  existe uma função pagamento dada por:

$$\begin{aligned} u_i &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}; \\ \mathbf{z} &\longrightarrow u_i(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

que associa a cada perfil de estratégia pura  $\mathbf{z} \in \mathcal{S}$ , o *payoff*  $u_i(\mathbf{z})$  do jogador  $v_i$ .

Podemos agora analisar o exemplo do Dilema do Prisioneiro fazendo as relações com os conceitos básicos apresentados. Indicaremos as pessoas apenas por



$A$  e  $B$ . No contexto do Dilema do Prisioneiro temos que o conjunto de jogadores seria  $V = \{A, B\}$  e o conjunto de estratégias seria  $\mathcal{S}_A = \{cooperar, delatar\}$  e  $\mathcal{S}_B = \{cooperar, delatar\}$ , logo todos os perfis de estratégia possíveis são:  $\mathcal{S} = \{(cooperar, cooperar), (cooperar, delatar), (delatar, cooperar), (delatar, delatar)\}$ .

As funções de pagamento  $u_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_B : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas por:

$$u_A(cooperar, cooperar) = -2$$

$$u_A(cooperar, delatar) = -10$$

$$u_A(delatar, cooperar) = 0$$

$$u_A(delatar, delatar) = -5$$

que representam o *payoff* de  $A$ , e

$$u_B(cooperar, cooperar) = -2$$

$$u_B(cooperar, delatar) = 0$$

$$u_B(delatar, cooperar) = -10$$

$$u_B(delatar, delatar) = -5$$

que representam os *payoff* de  $B$ . Podemos criar uma matriz identificando quanto tempo  $A$  ficará preso dependendo da sua ação e da ação do seu parceiro:

| A/B     | Coopera | Delata  |
|---------|---------|---------|
| Coopera | (-2,-2) | (-10,0) |
| Delata  | (0,-10) | (-5,-5) |

Tabela 2.1: Matriz *payoff*

Essa matriz diz quantos anos de prisão cada estratégia recebe contra cada outra estratégia possível (o primeiro número é relativo à pessoa  $A$  e o segundo à pessoa  $B$ ) e recebe o nome de matriz de pagamento (comumente chamada de *payoff*). Percebe-se que essa matriz de pagamento é idêntica para ambas as pessoas. Jogos desse tipo são chamados de simétricos, uma vez que ambos jogadores receberão a mesma recompensa, dado que usem as mesmas estratégias.

Outro exemplo interessante pode ser visto na seguinte situação: um casal deseja jantar juntos e precisa escolher em qual restaurante irá. O homem prefere ir ao restaurante de culinária italiana, e a mulher prefere ir ao restaurante de culinária japonesa. Se ambos forem juntos para o restaurante de culinária italiana, então o homem ficará mais feliz do que a mulher, que por sua vez ficará mais feliz do que se não fosse a algum restaurante. Por outro lado, se eles forem juntos ao restaurante de culinária japonesa, então quem ficará mais feliz será a mulher, e o homem ficará mais feliz do que se não fosse a algum restaurante. Em último caso, se eles forem cada um a um restaurante diferente, ambos ficarão igualmente insatisfeitos, pois queriam estar saindo com o seu companheiro. Essa situação também pode ser modelada como um jogo estratégico, onde temos:

$$v = \{homem, mulher\}, \mathcal{S}_{homem} = \{italiana, japonesa\}, \mathcal{S}_{mulher} = \{italiana, japonesa\}, \\ \mathcal{S} = \{(italiana, italiana), (italiana, japonesa), (japonesa, italiana), (japonesa, japonesa)\}$$

As funções de pagamento  $u_{homem} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_{mulher} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  são descritas pela matriz de *payoffs* abaixo:

|       |          | Mulher   |          |
|-------|----------|----------|----------|
|       |          | italiana | japonesa |
| Homem | italiana | (100,50) | (0,0)    |
|       | japonesa | (0,0)    | (50,100) |

Tabela 2.2: Matriz de *payoffs* para a situação da escolha de restaurantes.

## 2.2 Jogos em forma normal e com informação completa: estratégia dominante e equilíbrio de Nash

Os exemplos de interação da seção anterior são considerados os mais simples que se pode conceber, se tratando da dimensão mínima de um jogo (dois jogadores e duas estratégias), existem outros aspetos que contribuem para essa sim-

plicidade: existe informação completa, no sentido de que cada jogador sabe perfeitamente a recompensa que os outros jogadores poderão obter em virtude da situação de interação. Por outro lado, o jogo pode ser considerado como um jogo estático, que é quando os jogadores fazem as suas escolhas simultaneamente. Esses jogos estáticos, são também designados por jogos em forma normal.

O objetivo do jogo é encontrar as estratégias escolhidas por cada um dos jogadores e, por acréscimo, os *payoffs* que eles irão obter em função da escolha das respectivas estratégias. O resultado assim atingido designa-se por *equilíbrio do jogo*, o qual poderá ou não existir, em função da relação entre *payoffs* na matriz.

As estratégias de um jogo podem ser caracterizadas a partir das seguintes definições:

- Estratégia dominante: para qualquer dos jogadores, a estratégia por ele escolhida designa-se dominante se ela é a melhor para o jogador independentemente da estratégia do outro jogador;
- Equilíbrio dominante: um equilíbrio dominante é o resultado de uma situação de interação estratégica que se caracteriza pelo fato de todos os jogadores envolvidos possuírem uma estratégia dominante;
- Ausência de equilíbrio: quando dois jogadores têm de escolher entre duas estratégias e nenhum deles está perante uma estratégia dominante, ou seja, quando nenhum deles pode escolher independentemente do outro, não existe possibilidade de equilíbrio estratégico. Cada um dos jogadores vai ficar eternamente à espera que o outro atue;
- Equilíbrio de Nash ou equilíbrio não cooperativo: este equilíbrio é o resultado da interação entre dois jogadores quando pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia dominante.

Em um equilíbrio de Nash, nenhum jogador pode melhorar o seu *payoff*, dada a estratégia do outro jogador. A estratégia jogada por um jogador é sempre a melhor resposta face à estratégia usada pelo outro jogador. O equilíbrio de Nash designa-se também por equilíbrio não cooperativo, uma vez que cada uma das partes escolhe a estratégia que é melhor para si, sem que haja possibilidade de acordos e portanto sem que necessariamente se atenda ao bem-estar geral.

Nota-se que um aspecto importante dessa definição é que a noção do equilíbrio de Nash é entendida de um modo amplo: ela abrange as situações em que há um equilíbrio dominante e também as situações em que apenas um dos dois jogadores possui uma estratégia dominante. Logo, podemos afirmar que todo equilíbrio dominante é um equilíbrio de Nash, mas que o contrário não é verdade.

As definições matemáticas de alguns desses conceitos podem ser encontradas em [1], mas, para comodidade do leitor, as definições fundamentais para este trabalho serão apresentadas nas seções seguintes, uma vez que esses são os conceitos básicos que norteiam as ideias de soluções de um jogo.

## 2.3 Soluções de um jogo

Uma solução de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado dele, analisando-se as possíveis estratégias que podem ser utilizadas por cada jogador. Existem vários conceitos distintos para solução de um jogo. Nesta seção iremos abordar dois conceitos mais comuns: *dominância* e *Equilíbrio de Nash*.

Voltando à situação do Dilema do Prisioneiro, encontrar uma solução para o dilema envolvendo os dois suspeitos é equivalente a identificar as estratégias que cada um deve utilizar de forma que conduza a um menor tempo de prisão. Ao analisarmos o jogo do ponto de vista da pessoa *A*, ela pode raciocinar do seguinte modo:

“As possíveis situações são:  $B$  pode cooperar ou  $B$  pode delatar. Se  $B$  cooperar, então é melhor eu delatar, assim ficarei livre imediatamente. Se  $B$  delatar, então é melhor eu delatar, porque pelo menos ficarei menos tempo na prisão. Em qualquer uma das situações, o melhor para mim é delatar, então eu delatarei.”

De modo análogo, estudando o jogo do ponto de vista da pessoa  $B$ , podemos aplicar o mesmo raciocínio, chegando a conclusão de que  $B$  também irá delatar. Assim, ambos delatarão e ficarão presos por 5 anos. Do ponto de vista da teoria dos jogos, dizemos que tanto  $A$  quanto  $B$  possui uma estratégia *dominante*, ou seja, nenhum dos envolvidos tende a mudar a sua estratégia considerando as informações que eles possuem, logo todas as estratégias menos uma são *estritamente dominadas*. Dizemos então que esse jogo é resolúvel por *dominância estrita iterada* e termina em uma solução que é um *equilíbrio de estratégia dominante*, conceitos esses que serão apresentados a seguir.

### 2.3.1 Dominância

Iremos discutir perfis de estratégia nos quais apenas um jogador  $v_i \in V$  irá variar a sua estratégia, enquanto as estratégias do restante dos jogadores permanecem fixas. Sendo assim, denotemos por:

$$s_{-i} = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \dots, s_{nj_n})$$

de modo que  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_{i-1} \times \mathcal{S}_{i+1} \times \dots \times \mathcal{S}_n$  é uma escolha de estratégias para todos os jogadores, exceto para o jogador  $v_i$ . Com isso, um perfil de estratégia de todos os jogadores, será convenientemente denotado por:

$$s = (s_{ij}, s_{-i}) = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{ij}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \dots, s_{nj_n})$$

.

**Definição 1** (Estratégia Pura Estritamente Dominada). *Uma estratégia pura  $s_{ik} \in \mathcal{S}_i$  do jogador  $v_i \in V$  é estritamente dominada pela estratégia  $s_{ik'} \in \mathcal{S}_i$  se,*

$$u_i(s_{ik'}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i}),$$

*para todo  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$ . A estratégia  $s_{ik} \in \mathcal{S}_i$  é fracamente dominada pela estratégia  $s_{ik'} \in \mathcal{S}_i$  se  $u_i(s_{ik'}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, s_{-i})$ , para todo  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$ .*

*Dominância estrita iterada é simplesmente o processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas. Para exemplificar esse conceito, consideremos a matriz de *payoffs* abaixo.*

|       |          |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
|       |          | $v_2$    |          |          |          |
|       |          | $s_{21}$ | $s_{22}$ | $s_{23}$ | $s_{24}$ |
| $v_1$ | $s_{11}$ | (0,3)    | (3,3)    | (5,1)    | (2,6)    |
|       | $s_{12}$ | (1,5)    | (4,1)    | (4,2)    | (3,6)    |
|       | $s_{13}$ | (4,3)    | (0,3)    | (8,2)    | (4,2)    |
|       | $s_{14}$ | (9,1)    | (2,2)    | (5,0)    | (5,8)    |

Tabela 2.3: Matriz de *payoffs* para o jogo.

Nesse jogo, para o jogador  $v_2$ , a estratégia  $s_{23}$  é estritamente dominada pela estratégia  $s_{21}$ , desse modo, a terceira coluna dessa matriz pode ser eliminada, obtendo assim, uma nova matriz.

|       |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|
|       |          | $v_2$    |          |          |
|       |          | $s_{21}$ | $s_{22}$ | $s_{24}$ |
| $v_1$ | $s_{11}$ | (0,3)    | (3,3)    | (2,6)    |
|       | $s_{12}$ | (1,5)    | (4,1)    | (3,6)    |
|       | $s_{13}$ | (4,3)    | (0,3)    | (4,2)    |
|       | $s_{14}$ | (9,1)    | (2,2)    | (5,8)    |

Tabela 2.4: Matriz de *payoffs* com a terceira coluna retirada.

Nessa nova matriz, temos que, para o jogador  $v_1$ , as estratégias  $s_{11}$  e  $s_{13}$  são estritamente dominadas pelas estratégias  $s_{12}$  e  $s_{14}$ , respectivamente. Desse modo, podemos proceder de maneira análoga ao procedimento anterior, e assim, as

linhas 1 e 3 podem ser eliminadas. Após as remoções de linhas e colunas, obtemos a seguinte matriz reduzida:

|       |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|
|       |          | $v_2$    |          |          |
|       |          | $s_{21}$ | $s_{22}$ | $s_{24}$ |
| $v_1$ | $s_{12}$ | (1,5)    | (4,1)    | (3,6)    |
|       | $s_{14}$ | (9,1)    | (2,2)    | (5,8)    |

Tabela 2.5: Matriz de *payoffs* após remoção das linhas 1 e 3.

Fazendo mais uma análise na tabela, percebemos que as estratégias  $s_{21}$  e  $s_{22}$  do jogador  $v_2$  são estritamente dominadas pela estratégia  $s_{24}$ , fazendo assim com que as colunas 1 e 2 possam ser removidas.

|       |          |          |  |
|-------|----------|----------|--|
|       |          | $v_2$    |  |
|       |          | $s_{24}$ |  |
| $v_1$ | $s_{12}$ | (3,6)    |  |
|       | $s_{14}$ | (5,8)    |  |

Tabela 2.6: Matriz de *payoffs* após remoção das colunas 1 e 2.

Analisando a matriz reduzida obtida, temos que a estratégia  $s_{12}$  do jogador  $v_1$  é estritamente dominada pela estratégia  $s_{14}$ . Isso implica que o resultado do jogo é  $(5, 8)$ , ou seja, o jogador  $v_1$  deverá escolher a estratégia  $s_{14}$  e o jogador  $v_2$  deverá escolher a estratégia  $s_{24}$ .

Nesse exemplo, ao utilizarmos a técnica de dominância iterada, fomos conduzidos a um único perfil de estratégia como solução do jogo, no caso, o perfil  $(s_{14}, s_{24})$ . Porém, nem sempre a técnica irá fornecer apenas um perfil, pode acontecer, em alguns jogos, da técnica fornecer vários perfis ou até mesmo todo o espaço de estratégias.

### 2.3.2 Equilíbrio de Nash ou solução estratégica

Um *equilíbrio de Nash* ou *solução estratégica* de um jogo é um determinado perfil de estratégia onde cada jogador não terá uma maior recompensa ao mudar de estratégia, se os demais não mudarem. Em outras palavras, cada jogador não tem um incentivo para mudar sua estratégia se os demais também não mudarem.

**Definição 2** (Equilíbrio de Nash). *Dizemos que o perfil de estratégias*

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \dots, s_n^*)$$

*é um equilíbrio de Nash se*

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

*para todo  $i = 1, \dots, n$  e para todo  $j_i = 1, \dots, m_i$ , com  $m_i \geq 2$ .*

**Observação 1.** (i) *No Dilema do Prisioneiro, o perfil (delatar, delatar) é um equilíbrio de Nash. De fato, se um dos acusados delatar e o outro não, tem-se que aquele que não delatou irá ficar preso por 10 anos ao invés de 5 anos, se tivesse optado por delatar. Esse perfil é o único equilíbrio de Nash desse jogo.*

(ii) *Na situação em que o casal tem que decidir onde jantar, os perfis de estratégia (italiana, italiana) e (japonesa, japonesa) são os únicos equilíbrios de Nash do jogo.*

(iii) *No exemplo da seção 2.3.1 da aplicação da técnica de dominância iterada, o único equilíbrio de Nash do jogo é o perfil de estratégia  $(s_{14}, s_{24})$ .*

(iv) *Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash quando se usam apenas estratégias puras.*



Segue abaixo uma matriz de *payoff* de um jogo que não possui equilíbrio de Nash:

|       |          |            |            |
|-------|----------|------------|------------|
|       |          | $v_2$      |            |
|       |          | $s_{21}$   | $s_{22}$   |
| $v_1$ | $s_{11}$ | $(+1, -1)$ | $(-1, +1)$ |
|       | $s_{12}$ | $(-1, +1)$ | $(+1, -1)$ |

Tabela 2.7: Matriz de *payoff* de um jogo que não possui equilíbrio de Nash.

### 2.3.3 Estratégias mistas

Como explicado na seção anterior, existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash utilizando apenas estratégias puras. Um jeito de contornar essa situação, é considerar o jogo de um ponto de vista probabilístico, ou seja, ao invés de escolher um perfil de estratégia pura, o jogador deverá escolher uma *distribuição de probabilidades* sobre as suas estratégias puras, ou seja, cada estratégia pura desse jogador terá uma certa probabilidade de ser utilizada.

**Definição 3** (Estratégia Mista). *Uma estratégia  $\mathbf{p}_i$  para o jogador  $v_i \in V$  é uma estratégia mista quando  $\mathbf{p}_i$  é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto  $\mathcal{S}_i$  de estratégias puras do jogador, isto é,  $\mathbf{p}_i$  é um elemento do conjunto (simplex)*

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_k \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}$$

Desse modo, se  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$ , então

$$p_{ik} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1.$$

Observe que cada  $\Delta_{m_i}$  é um conjunto compacto e convexo.

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é dado pelo produto cartesiano abaixo.

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n},$$

Esse espaço é chamado de *espaço de estratégia mista*. Um vetor  $\mathbf{P} \in \Delta$  é denominado um *perfil de estratégia mista*. A notação utilizada para estratégias puras será mantida também para o caso de estratégias mistas, e assim,  $\mathbf{P}_{-i}$  será usado para representar um perfil com as estratégias de todos os jogadores, com exceção do jogador  $v_i$ . Como o produto cartesiano de conjuntos compactos e convexos é compacto e convexo, temos que  $\Delta$  é compacto e convexo.

Cada perfil de estratégia mista  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \in \Delta$  determina um *payoff* esperado que será uma média dos *payoffs* ponderada pela distribuição de probabilidades  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ . Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \\ &= \underbrace{(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1})}_{\mathbf{p}_1}, \underbrace{(p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2})}_{\mathbf{p}_2}, \dots, \underbrace{(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_n})}_{\mathbf{p}_n} \end{aligned} \text{ então}$$

$$u_i(\mathbf{P}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left( \prod_{k=1}^n p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}) \right).$$

### 2.3.4 Soluções em estratégias mistas

Do mesmo modo como definimos uma solução para estratégias puras, iremos definir também os critérios básicos para um solução de jogos com estratégias mistas. Iremos mostrar apenas a definição de equilíbrio de Nash para as estratégias mistas, uma vez que mais adiante trabalharemos com as estratégias mistas e esse conceito estará muito presente nos resultados.

**Definição 4** (Equilíbrio de Nash). *Dizemos que um perfil de estratégia mista*

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*, \dots, \mathbf{p}_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$$

*é um equilíbrio de Nash se*

$$u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \geq u_i(\mathbf{p}, \mathbf{P}_{-i}^*)$$

*para todo  $\mathbf{p} \in \Delta_{m_i}$ , isto é, nenhum jogador tem motivação para trocar sua estratégia se o restante dos jogadores também não mudarem.*

**Observação 2.** (i) No Dilema do Prisioneiro, o perfil

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*) = (1, 0; 1, 0)$$

é um equilíbrio de Nash, uma vez que

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2^*) = u_1(p, 1 - p; 1, 0) = 5p - 10 \leq -5 = u_1(1, 0; 1, 0) = u_1(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$$

para todo  $\mathbf{p} = (p, 1 - p) \in \Delta_2$  e

$$u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{q}) = u_2(1, 0; q, 1 - q) = 5q - 10 \leq -5 = u_2(1, 0; 1, 0) = u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$$

para todo  $\mathbf{q} = (q, 1 - q) \in \Delta_2$ . Note que esse equilíbrio corresponde ao equilíbrio em estratégias puras  $\mathbf{s}^* = (\text{delatar}, \text{delatar})$ .

(ii) Na situação em que o casal deve escolher um restaurante para jantar, os equilíbrios de Nash em estratégias mistas são  $(1, 0; 1, 0)$  e  $(0, 1; 0, 1)$ , correspondentes aos equilíbrios de Nash em estratégias puras (italiana, italiana) e (japonesa, japonesa), respectivamente, e o ponto  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

(iii) No exemplo da seção 2.3.1 da aplicação da técnica de dominância estrita iterada, o único equilíbrio de Nash em estratégia mista é o ponto  $(0, 1, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$  que corresponde ao equilíbrio de Nash  $(s_{14}, s_{24})$  em estratégias puras.

(iv) No exemplo da seção 2.3.2 em que não havia um equilíbrio de Nash para estratégia pura, o único equilíbrio de Nash em estratégias mistas é o ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Conforme visto no item (iv) da Observação 1, nem todos os jogos possuem equilíbrio de Nash em estratégias puras, porém até agora todos os exemplos de jogos apresentados apresentaram pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. O Teorema 2 a seguir comprovará que sempre existirá um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Para isso utilizaremos o teorema do ponto fixo de Brouwer [1], conhecido da literatura, e o teorema a seguir:

**Teorema 1.** *Seja  $\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$  o espaço das estratégias mistas de  $n$  jogadores, defina a aplicação*

$$\mathbf{F} : \Delta \rightarrow \Delta$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{P}) = (\mathbf{y}_1(\mathbf{P}), \mathbf{y}_2(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{y}_n(\mathbf{P}))$$

onde  $\mathbf{y}_i(\mathbf{P}) = (\mathbf{y}_{i1}(\mathbf{P}), \mathbf{y}_{i2}(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{y}_{im_i}(\mathbf{P}))$ ,  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$  e

$$y_{ij}(\mathbf{P}) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(\mathbf{P})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})}$$

onde  $g_{ij} = \max\{0, z_{ij}(\mathbf{P})\}$  e  $z_{ij}(\mathbf{P})$  é uma função que mede o ganho ou perda do jogador  $g_i$  quando ele troca a distribuição de probabilidade  $p_i$  pela estratégia pura  $s_{ij}$ . Temos que  $\mathbf{P}^*$  é um equilíbrio de Nash se, e somente se,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^*) = \mathbf{P}^*$ , isto é, se, e somente se,  $\mathbf{P}^*$  é um ponto fixo da aplicação  $\mathbf{F}$ .

A prova desse teorema pode ser encontrada no Teorema 2.3 em [1]. Esse teorema é de grande importância, pois é a partir dele que consegue-se concluir o seguinte resultado, provado por Nash em 1950 [15].

**Teorema 2** (Equilíbrio de Nash). *Todo jogo definido por matrizes de payoffs possui um equilíbrio de Nash misto.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{F}$  como no teorema anterior, temos que  $\mathbf{F}$  é contínua e  $\Delta$  é um conjunto compacto e convexo, portanto, podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Brouwer, o qual garante que  $\mathbf{F}$  possui um ponto fixo  $\mathbf{P}^*$ . Conseqüentemente, pelo teorema anterior,  $\mathbf{P}^*$  é um equilíbrio de Nash.  $\square$

O Teorema 2 mostra que todo jogo finito, ou seja, jogadores finitos e um conjunto compacto de estratégias, possui uma solução em estratégia mista. Independentemente da estrutura e da complexidade do jogo, se ele atende à hipótese de ser um jogo finito, então será sempre possível estabelecer um perfil de estratégia mista

para os jogadores, de modo que nenhum deles irá receber uma maior recompensa mudando a sua estratégia, se nenhum outro jogador também não mudar.

### 3 DINÂMICA DE REPLICAÇÃO

Na estrutura da dinâmica do replicador ou dinâmica da população, partimos do ponto de vista de que todos os indivíduos são pré-programados para jogar uma certa estratégia pura. Assim, um vetor de estratégias  $\mathbf{x} \in \Delta$  deve ser interpretado como o estado da população, com  $x_k$  sendo a proporção de indivíduos jogando a estratégia  $k$ , com  $k \in S$ . Dentro desta estrutura, indivíduos são emparelhados aleatoriamente e presume-se que cada membro da população esteja engajado em uma concorrência de cada vez. Além disso, o *payoff* do indivíduo representa a aptidão medida pelo número de descendentes. Assim, quanto mais bem sucedido for o indivíduo, mais descendentes ele terá. Finalmente, é presumido que neste mundo assexuado os indivíduos procriam de modo que cada filho herda a estratégia do seu único pai. Então, na próxima geração a fração de membros mais bem sucedidos na população será maior e a fração de membros menos prósperos será menor. A modelagem deste processo em tempo contínuo resulta em equações diferenciais conhecidas como dinâmica do replicador.

#### 3.1 Equação de replicação

Em matemática, a equação de replicação é uma dinâmica de jogo não-linear e determinística, monotônica, usada na teoria dos jogos evolutivos. A forma mais geral da equação é dada por:

$$\dot{x}_i = x_i[f_i(x) - \phi(x)], \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^n x_j f_j(x) \quad (3.1)$$

em que,  $x_i$  é a parcela de indivíduos utilizando a estratégia  $i$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é o vetor distribuição dos tipos de indivíduos da população,  $f_i(x)$  é a capacidade reprodutiva da subpopulação de indivíduos que utilizam a estratégia  $i$ , também

chamado de *fitness*, e  $\phi(x)$  é o *fitness* médio da população, que é dado pela média ponderada do *fitness* dos  $n$  tipos da população.

O processo de replicação imita um processo de seleção natural, onde a habilidade de um replicador se reproduzir é dada pela capacidade reprodutiva da sua estratégia, ou seja, o pagamento recebido por essa estratégia utilizada nas interações com a população ao longo do tempo. A equação de replicação é um modelo utilizado na teoria de jogos evolutivos e descreve o mecanismo de interação dessa população. Ela é definida da seguinte forma:

$$\dot{x}_s = x_s(p_s - \phi) \tag{3.2}$$

em que,  $\dot{x}_s$  representa a derivada em relação ao tempo. Basicamente, a equação de replicação nos diz como a estratégia de um replicador se comporta ao longo do tempo. A parcela da população  $x_s$  aumenta ao longo do tempo se o pagamento para a estratégia  $s$  for maior do que o pagamento médio da população, ou seja,  $p_s > \phi$ ; diminui se o pagamento para estratégia  $s$  for menor do que o pagamento médio da população, ou seja,  $p_s < \phi$  e se manterá estável quando  $p_s = \phi$  ou  $x_s = 0$ , ou seja, a taxa de reprodução da população depende do quão adaptada ela está ao meio que está inserido. Note que os pagamentos  $p_s$  e  $\phi$  dependem da distribuição estratégica  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix}$  da população.

## 3.2 Equilíbrio de Nash e estados evolutivamente estáveis

Na equação de replicação é considerado o *fitness* ou capacidade reprodutiva da população. É interessante saber como identificar o equilíbrio de Nash e o estado evolutivamente estável da população no contexto da teoria dos jogos. Assim, em [12, 13, 14] é feita essa adaptação que será apresentada a seguir.

Seja  $M = \{s_1, \dots, s_m\}$  um conjunto de estratégias puras e consideremos uma função de pagamento  $\mathbf{B}_{m \times m}$ . Consideremos também que, nesse contexto, é

permitido aos jogadores utilizarem estratégias mistas, ou seja, utilizar as estratégias puras  $\{s_1, \dots, s_m\}$  com certas probabilidades  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Como por definição,  $0 \leq x_i \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ , uma estratégia é definida por um ponto em  $\mathcal{S}_M$ :

$$\mathcal{S}_M = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}. \quad (3.3)$$

Os indivíduos dos tipos  $E_1, \dots, E_n$  correspondem, portanto, a  $n$  pontos  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathcal{S}_M$ . O estado atual da população é definido pelas frequências  $x_i$  dos tipos  $E_i$ , isto é, por um dos pontos  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_M$ . Considerando que  $\bar{b}_{ij} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{B}\mathbf{p}_j$  é o pagamento obtido por um jogador que utiliza a estratégia  $\mathbf{p}_i$  contra um jogador que utiliza a estratégia  $\mathbf{p}_j$ , obtemos para o *fitness*  $f_i(\mathbf{x})$  do tipo  $E_i$  a expressão:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_j b_{ij} x_j = (\mathbf{B}\mathbf{x})_i \quad (3.4)$$

Por definição, um ponto  $\mathbf{y} \in \mathcal{S}_n$  é um *equilíbrio de Nash* (EN) se:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{y} \cdot \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_n \quad (3.5)$$

e é um *estado evolutivamente estável* se:

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{B}\mathbf{x} > \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad (3.6)$$

em uma vizinhança de  $\mathbf{y}$ .



## 4 JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Neste capítulo e no capítulo 5 apresentaremos o modelo utilizado por Madeo e Mocenni em [12] que descreve os jogos evolucionários como uma dinâmica de interação em uma população em rede e como essa interação entre os indivíduos na população pode ser entendida como um grafo. Dessa forma, os resultados apresentados nestes capítulos, e respectivas seções, são encontrados no referido trabalho, sendo apresentados por serem de grande relevância para o trabalho e para a comodidade do leitor.

Na teoria evolutiva dos jogos não é assumido que os indivíduos tomem atitudes racionais, eles são considerados como predispostos a utilizar uma estratégia herdada, pura ou mista, e assim ele utilizará essa estratégia durante todo o seu tempo de vida. Com isso se começa a estudar as interações entre os indivíduos dessa população. Sendo  $x_s$  a frequência relativa da população que utiliza a estratégia pura  $s \in S = \{1, \dots, m\}$  e considerando que essas interações vão acontecendo continuamente ao longo do tempo, a dinâmica de seleção irá determinar mudanças na parte da população  $x_s$ . Essa variação irá depender da comparação entre o pagamento  $p_s$  da estratégia  $s$  e o pagamento médio  $\phi = \sum_{s=1}^m x_s p_s$  de toda a população.

Interações entre os indivíduos das subpopulações são modeladas como jogos, onde indivíduos aleatórios de uma determinada população jogam entre si. Cada indivíduo da população é chamado de replicador. Todos os replicadores são indistinguíveis, exceto pela única estratégia utilizada durante o seu tempo de vida dentre as  $M$  disponíveis.

As interações descritas são assumidas como simétricas, uma vez que todos os replicadores compartilham a mesma função de pagamento, mas diferem na estratégia usada. Várias interações do mundo real na biologia, economia e ciências sociais podem ser bem descritas pela equação de replicação, porque podem depen-

der da presença de subgrupos de jogadores na população, tal como a interação de diferentes espécies ou compradores e vendedores atuando no mercado econômico.

## 4.1 Dinâmica de interação em uma população em rede

Consideremos para  $n \geq 2$  subpopulações de replicadores. Para modelar as interações entre as populações, consideramos tais interações como jogos que são jogados por indivíduos retirados aleatoriamente de uma das  $n$  subpopulações, em que o número de indivíduos, para efeito do modelo, é infinito. Denotando por  $x_{v,s}$  a parcela da subpopulação  $v \in \{1, \dots, n\}$  que usa a estratégia  $s \in S$ . Por definição  $x_{v,s} \in [0, 1]$  e  $\sum_{s=1}^m x_{v,s} = 1$ . Com isso segue que o vetor  $\mathbf{x}_v = \begin{bmatrix} x_{v,1} & \dots & x_{v,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$  descreve a distribuição interna de estratégias puras disponíveis na subpopulação  $v$ . Todos os replicadores da população  $v$  compartilham a mesma função de pagamento. Em particular,  $p_{v,s}$  denota o pagamento recebido por cada replicador em  $v$  que usa a estratégia  $s$  e  $\phi_v = \sum_{s=1}^m x_{v,s} p_{v,s}$  é o pagamento médio de toda subpopulação  $v$ . Como a interação entre duas subpopulações diferentes é assimétrica, em geral  $p_{v,s} \neq p_{w,s}$ .

Em cada instante de tempo um replicador de uma subpopulação está jogando um jogo de 2-jogadores com indivíduos de outras subpopulações. Seja  $x_{v,s}(t)$  o indicador da parcela da subpopulação  $v$  predeterminada a usar a estratégia  $s$  no instante de tempo  $t$  e suponha que o tamanho da população seja  $n_v(t)$ . Pode-se interpretar  $p_{v,s}(t)$  como uma taxa reprodutiva e além disso,  $p_{v,s}(t)\tau$  é o número de descendentes produzidos por um replicador em  $v$  que usa a estratégia  $s$  entre os instantes de tempo  $t$  e  $t + \tau$ . Logo, o tamanho da população após um tempo  $\tau$  é:

$$n_v(t + \tau) = n_v(t) + \sum_{r=1}^m n_v(t) x_{v,r}(t) p_{v,r}(t) \tau, \quad (4.1)$$

em que  $n_v(t) x_{v,r}(t)$  é o tamanho da subpopulação que usa a estratégia  $r$  no instante de tempo  $t$ , e  $n_v(t) x_{v,r}(t) p_{v,r}(t) \tau$  é o total de descendentes produzidos por essa

subpopulação. Além disso, pela definição  $x_{v,s}(t + \tau)$  é:

$$\begin{aligned}
x_{v,s}(t + \tau) &= \frac{n_v(t) + n_v(t)x_{v,s}(t)p_{v,s}(t)\tau}{n_v(t + \tau)} \\
&= \frac{n_v(t)x_{v,s}(t)(1 + p_{v,s}(t)\tau)}{n_v(t) \left( 1 + \sum_{r=1}^M x_{v,r}(t)p_{v,r}(t)\tau \right)} \\
&= \frac{x_{v,s}(t)(1 + p_{v,s}(t)\tau)}{1 + \phi_v(t)\tau}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

A equação (4.2) não depende de  $n_v(t)$ , e assim a relação é válida para qualquer que seja o tamanho inicial da população. O limite contínuo da equação (4.2) é obtido considerando a taxa de variação de  $x_{v,s}(t)$  que é dada por:

$$\frac{x_{v,s}(t + \tau) - x_{v,s}(t)}{\tau} = \frac{x_{v,s}(t)(p_{v,s}(t) - \phi_v(t))}{1 + \phi_v(t)\tau}$$

Se  $\tau \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\dot{x}_{v,s}(t) = x_{v,s}(t)(p_{v,s}(t) - \phi_v(t)) \tag{4.3}$$

A equação (4.3) é conhecida como equação de replicação de multipopulação [24, 25, 26].

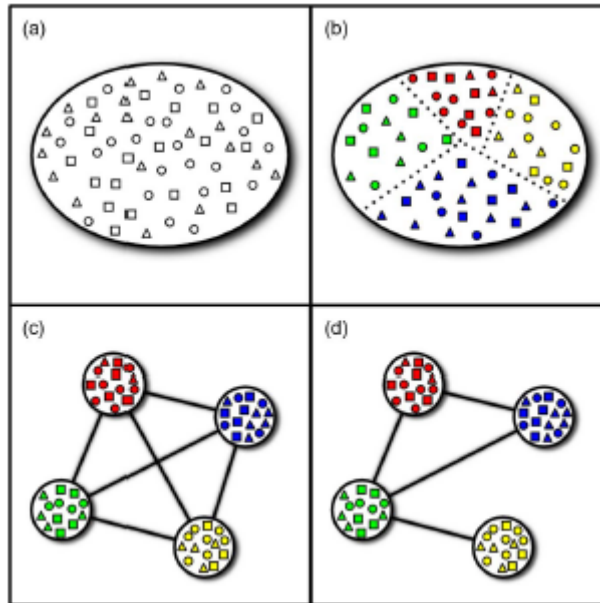


Figura 4.1: (a) população mista (jogadores atômicos com estratégias diferentes são representados por formas diferentes); (b) grupos de jogadores atômicos com traços diferentes agregados em subpopulações; (c) subpopulações representadas como os vértices de um grafo completo; (d) subpopulações representadas como os vértices de um grafo genérico. Em (c) e (d) cada subpopulação de jogadores atômicos coincide com um vértice da rede e representa um jogador de vértice. (Fonte: Madeo e Mocenni (2015)).

A equação de replicação multipopulacional é usada para populações heterogêneas como mostrado na Figura 4.1(b), onde as subpopulações são indicadas com cores diferentes. Uma vez que, um replicador joga com membros de todos os outros grupos, podemos retratar o sistema como um grafo completo como na Figura 4.1(c), onde os vértices representam as subpopulações. Nosso propósito é considerar uma subpopulação como um jogador (*jogador-vértice*) que pode escolher estratégias mistas correspondente à distribuição de estratégias puras dos replicadores internos (*jogadores atômicos*) além de supor que a topologia das conexões são arbitrárias. Esse esquema é retratado na Figura 4.1(d), onde as conexões são representadas por um grafo genérico e essas restrições topológicas podem ser incorporadas nas definições dos *payoffs*.

## 5 JOGOS EVOLUCIONÁRIOS SOBRE POPULAÇÕES EM REDE (GRAFOS)

Os jogos evolutivos sobre populações em rede têm como proposta considerar uma subpopulação como um jogador e cada um deles está situado em um dos vértices de um grafo. É permitido a esses jogadores escolher estratégias mistas correspondentes à distribuição de estratégias puras dos replicadores internos além de assumir que a topologia de conexão do grafo é arbitrária.

Em cada instante de tempo, ocorrem interações entre dois replicadores de subpopulações distintas e que estão conectadas. Essas interações são consideradas como um jogo, que é jogado entre esses dois replicadores, e o pagamento obtido por cada um deles através desse jogo influencia a capacidade de cada um deles de produzir descendentes, de forma que o comportamento do jogador-vértice é definido pela distribuição de estratégias usadas pelos replicadores internos.

### 5.1 Jogos não-cooperativos em grafos

A teoria padrão de jogos não-cooperativos tem se estendido para introduzir uma rede de conexão entre os jogadores. A rede é descrita por um grafo e cada jogador corresponde a um vértice. Uma aresta entre dois jogadores indica que eles interagem, entretanto um jogador pode considerar algumas interações mais importantes que outras e dois jogadores conectados podem ter diferentes percepções sobre as importâncias das interações. Esses aspectos podem ser descritos por grafos com arestas direcionadas em que cada uma delas possui um peso.

Formalmente, seja  $\mathcal{G}$  um grafo direcionado e ponderado de ordem  $n < +\infty$ , e seja  $\mathcal{V}$  o conjunto de vértices (jogadores vértices),  $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ . O grafo  $\mathcal{G}$  é completamente descrito pela sua matriz de adjacência  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ , em particular,

se o jogador  $v$  tende a jogar com jogador  $w$ , então existe uma aresta que começa em  $v$  e termina em  $w$ . Nesse caso, a entrada  $(v, w)$  da matriz  $\mathbf{A}$ ,  $a_{v,w}$  é o peso positivo associado a  $v$  por ter jogado contra  $w$ . Em geral,  $a_{v,w} \neq a_{w,v}$ . Quando  $a_{v,w} > 0$  e  $a_{w,v} = 0$ , existe uma interação entre  $v$  e  $w$ , mas apenas  $v$  terá eventualmente, um pagamento, contudo esses casos não serão objetos de nosso estudo. E se,  $a_{v,w} = a_{w,v} = 0$ , significa que não há interação entre esses dois jogadores. Assumimos também que  $\mathcal{G}$  não possui laços, isto é,  $a_{v,v} = 0, \forall v \in \mathcal{V}$ .

## 5.2 Pagamento para jogos em grafos: estratégias puras

Em um contexto interconectado, o pagamento efetivo (ou o *fitness* de uma estratégia) precisa ser definido com uma *medida ambiental* dependendo de todas as interações entre os jogadores conectados. Quando estratégias puras são adotadas, cada jogador de vértice recebe um pagamento que corresponde à soma, ponderada pela força das conexões  $a_{v,w}$ , dos resultados dos jogos de 2 jogadores que ele joga contra os seus vizinhos.

Seja  $s_w \in \mathcal{S}$  a estratégia pura de um jogador de vértice genérico  $w$  representado pelo  $s_w$ -ésimo versor  $\mathbf{e}_{s_w} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^m$ , onde o 1 está na posição  $w$ . Então, o pagamento efetivo para o jogador  $v$ , é denotado por:

$$\bar{\pi}_v^{\mathcal{G}}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{w=1}^n a_{v,w} \mathbf{e}_{s_w}^T \mathbf{B}_v \mathbf{e}_{s_w} = \mathbf{e}_{s_v}^T \mathbf{B}_v \mathbf{k}_v(s_1, \dots, s_n) \quad (5.1)$$

em que  $\mathbf{B}_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz de pagamento do jogador  $v$ ,  $\mathbf{k}_v(s_1, \dots, s_n) = \sum_{w=1}^n a_{v,w} \mathbf{e}_{s_w}$  e o sobrescrito  $\mathcal{G}$  indica a presença das conexões do grafo. Esse modelo baseado em somas ponderadas será denotado por WS. Entretanto, existem situações onde é conveniente usar pagamento normalizado. Certamente, o pagamento pode ser normalizado pela soma do peso de todas as arestas conectadas a um vértice. Nesse caso, a matriz  $\mathbf{A}$  pode ser manipulada dividindo cada entrada de uma linha  $v$  por  $d_v = \sum_{w=1}^n a_{v,w}$ , tornando-a estocástica de linha. O pagamento obtido

é um tipo de média ponderada, e esse modelo será denotado por WA. Perceba que o modelo WA corresponde ao modelo WS quando uma matriz estocástica de linha  $\mathbf{A}$  descreve o grafo,  $\bar{\pi}_v^{\mathcal{G}}$  é um tensor  $n$ -dimensional, onde a entrada  $(s_1, \dots, s_N)$  é  $\bar{\pi}_v^{\mathcal{G}}(s_1, \dots, s_n)$ . Por essa razão, o jogo entre jogadores interconectados em um grafo finito é equivalente a um jogo com  $n$  jogadores. A estrutura do grafo está embutida nessa definição, uma vez que o tensor pagamento depende da matriz de adjacência  $\mathbf{A}$ .

### 5.3 Pagamento para jogos em grafos: estratégias mistas

A função de pagamento introduzida previamente nos permite descrever um jogo com  $n$  jogadores e  $m$  estratégias, denotado a partir de agora como  $(n, m)$ -jogo. Isso pode ser estendido sobre o simplex  $\Delta_M$  para contabilizar também as estratégias mistas.

$$\Delta_M = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : \sum_{s=1}^m z_s = 1 \wedge z_s \geq 0 \forall s \in \mathcal{S} \right\} \quad (5.2)$$

Indicamos por  $\mathbf{x}_v = [x_{v,1} \dots x_{v,m}]^T \in \Delta_M$  a estratégia mista do jogador  $v$ , e por  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  o perfil de estratégia mista de toda a rede de jogadores. Lembrando que  $x_{v,s}$  é a probabilidade do jogador  $v$  usar a estratégia  $s$ . A fórmula do pagamento efetivo esperado que o jogador  $v$  obtém, é dado por:

$$\pi_v^{\mathcal{G}}(\mathbf{X}) = \sum_{s_1=1}^m \dots \sum_{s_n=1}^m \left( \prod_{w=1}^n x_{w,s_w} \right) \bar{\pi}_v^{\mathcal{G}}(s_1, \dots, s_n). \quad (5.3)$$

Similar a (5.1), a equação (5.3) pode ser reescrita de uma forma mais conveniente e compacta:

$$\pi_v^{\mathcal{G}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}_v^T \mathbf{B}_v \mathbf{k}_v(\mathbf{X}), \quad (5.4)$$

onde  $\mathbf{k}_v(\mathbf{X}) = \sum_{w=1}^N a_{v,w} \mathbf{x}_w$ . O conceito de equilíbrio de Nash pode ser introduzido com base no pagamento esperado para estratégias puras e mistas.

**Definição 5.** *O conjunto de Equilíbrio de Nash é definido como sendo:*

$$\Theta^{NE} = \{ \mathbf{X} : \forall v, \forall x_{v,s} > 0 \ p_{v,s}^{\mathcal{G}} = p_{v,s'}^{\mathcal{G}} \forall x_{v,s'} > 0 \wedge p_{v,s}^{\mathcal{G}} \geq p_{v,s'}^{\mathcal{G}} \forall x_{v,s'} = 0 \}, \quad (5.5)$$

e o conjunto de Equilíbrio de Nash Estrito é dado por:

$$\Theta^{NES} = \{ \mathbf{X} : \forall v, \forall x_{v,s} > 0 \ p_{v,s}^{\mathcal{G}} > p_{v,s'}^{\mathcal{G}} \forall x_{v,s'} = 0 \}. \quad (5.6)$$

## 5.4 Equação para a dinâmica de populações em rede

Seguindo a teoria desenvolvida nas seções anteriores, e utilizando a equação de replicação multipopulacional, o modelo para grafos segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_{v,s} = x_{v,s}(p_{v,s}^{\mathcal{G}} - \phi_v^{\mathcal{G}}) \\ x_{v,s}(0) = c_{v,s} \end{cases} \quad (5.7)$$

$\forall v \in \mathcal{V}, \forall s \in \mathcal{S}$ , onde  $\mathbf{x}_v(0) = [c_{v,1} \dots c_{v,m}]^T \in \Delta_M$  é o vetor da condição inicial do jogador  $v$ .

O sistema (5.7) representa a equação estendida para a dinâmica do jogo sobre populações em rede, onde a matriz de adjacência da rede está completamente embutida nas funções de pagamento  $p_{v,s}^{\mathcal{G}}$  e  $\phi_v^{\mathcal{G}}$ .

### Principais propriedades da equação (5.7):

1. Invariância pelo simplex:  $\mathbf{x}_v(0) \in \Delta_M \forall v \Rightarrow \mathbf{x}_v(t) \in \Delta_M \forall v, \forall t > 0$ .
2. Estratégias puras são estados estacionários. Seja  $\Theta^*$  o conjunto dos estados estacionários de (5.7). Se  $\mathbf{X} = \{\mathbf{e}_{s_v}\}_{v=1}^n$  então  $\mathbf{X} \in \Theta^*$ .
3. Equilíbrios de Nash são estados estacionários. Se  $\mathbf{X} \in \Theta^{NE}$  então  $\mathbf{X} \in \Theta^*$ .



4. Estados estacionários interiores são Equilíbrio de Nash. Supõe que  $x_{v,s} \in (0, 1) \forall v, \forall s$ . Então  $\mathbf{X} \in \Theta^*$  se e somente se  $\mathbf{X} \in \Theta^{NE}$ .
5. Soluções Equivalentes.

Consideraremos a matriz de adjacência  $\mathbf{A}_{n \times n}$  como sendo estocástica de linha, ou seja, a soma de todas as entradas de uma linha da matriz  $\mathbf{A}$  é igual a 1 ( $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ ). Essa matriz nos diz como os vértices do grafo estão conectados, e assim, contra quais jogadores cada um está jogando. Por exemplo, ao considerarmos um grafo completo, estamos indicando que todos jogam contra todos. O teorema a seguir mostra as condições para equivalência entre o modelo proposto e a equação de replicação padrão.

**Teorema 3.** *Seja  $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_n(t)\}$  a única solução do sistema (5.7) onde  $x_{v,s}(0) = c_s \forall v$ . Assume-se também que  $\mathbf{A}$ , referente ao grafo completo, é estocástica de linha e  $\mathbf{B}_v = \mathbf{B} \forall v$ . Seja  $\mathbf{y}(t)$  a única solução da equação (3.2), com  $y_s(0) = c_s$ . Então,  $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{y}(t) \forall v, \forall t \geq 0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_n(t)\}$  e  $\mathbf{y}(t)$  como na hipótese. Seja  $\Psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]^T$  tal que  $\psi_v(t) = y(t) \forall v$ . Como  $\mathbf{A}$  é estocástica de linha, temos que  $\sum_{w=1}^n a_{v,w} = 1 \forall v$  e então:

$$\mathbf{k}_v(\Psi) = \sum_{w=1}^n a_{v,w} \psi_w = \sum_{w=1}^n a_{v,w} \mathbf{y} = \mathbf{y} \quad (5.8)$$

Além disso, as funções pagamento são:

$$p_{v,s}^{\mathcal{G}} = \mathbf{e}_s^T \mathbf{B} \mathbf{k}_v(\Psi) = \mathbf{e}_s^T \mathbf{B} \mathbf{y} = p_s,$$

$$\phi_v^{\mathcal{G}} = \mathbf{x}_v^T \mathbf{B} \mathbf{k}_v(\Psi) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = \phi.$$

Substituindo  $\Psi(t)$  na equação (4.3), temos que:

$$\dot{\psi}_{v,s} = \dot{y}_s = y_s(p_s - \phi) = \psi_{v,s}(p_{v,s}^{\mathcal{G}} - \phi_v^{\mathcal{G}}).$$

Logo,  $\Psi(t)$  é solução da equação (4.3). Além disso, como  $\psi_{v,s}(0) = y_s(0) = c_s \forall v$ , e pela unicidade da solução da equação (5.7), segue que  $\psi_v(t) = \mathbf{x}_v(t)$ , e portanto  $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{y}(t) \forall v, \forall t \geq 0$ .  $\square$

Esse teorema mostra que a equação padrão de replicação pode ser obtida como um caso especial da versão estendida proposta para redes (grafos), fornecido que  $\mathbf{A}$  é estocástica de linha e as condições iniciais assim como as matrizes de pagamento são as mesmas para todos os vértices.

## 5.5 Tipo de jogo N-2.

Nesta seção estão presentes alguns resultados sobre a existência e estabilidade dos pontos estacionários soluções do sistema (5.7) com apenas duas estratégias. Nesse caso, as variáveis são  $\mathbf{x}_v = [x_{v,1} \ 1 - x_{v,1}]^T$ . Para simplificar a notação, denotaremos  $y_v = x_{v,1}$  e  $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_n]^T$ . As matrizes de pagamento terão a seguinte estrutura:

$$B = \begin{bmatrix} b_{v,1,1} & b_{v,1,2} \\ b_{v,2,1} & b_{v,2,2} \end{bmatrix}.$$

Sendo  $\sigma_{v,1} = b_{v,1,1} - b_{v,2,1}$ ,  $\sigma_{v,2} = b_{v,2,2} - b_{v,1,2}$  e de acordo com a equação (5.8) do teorema (3), sendo:

$$\mathbf{k}_v(\mathbf{y}) = [k_{v,1}(\mathbf{y}) \ k_{v,2}(\mathbf{y})]^T = \left[ \sum_{w=1}^n a_{v,w} y_w \quad \sum_{w=1}^n a_{v,w} (1 - y_w) \right]^T$$

dessa forma, a dinâmica de um jogo evolutivo sobre populações em rede é descrito pelo seguinte sistema de  $n$  equações diferenciais:

$$\dot{y}_v = y_v(1 - y_v)f_v(y), \quad (5.9)$$

onde

$$f_v(y) = \sigma_{v,1}k_{v,1}(y) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(y). \quad (5.10)$$

.

Nesse caso, o conjunto de Equilíbrio de Nash definido em (5.5) será dado por:

$$\Theta^{NE} = \left\{ \mathbf{y}^* \in [0, 1]^n : \forall v \left( (y_v^* = 0 \wedge f_v(\mathbf{y}^*) \leq 0) \vee (y_v^* = 1 \wedge f_v(\mathbf{y}^*) > 0) \vee (f_v(\mathbf{y}^*) = 0) \right) \right\}, \quad (5.11)$$

enquanto o conjunto de Equilíbrio de Nash Estrito definido em (5.6) é:

$$\Theta^{NES} = \{ \mathbf{y}^* \in [0, 1]^n : \forall v ((y_v^* = 0 \wedge f_v(\mathbf{y}^*) < 0) \vee (y_v^* = 1 \wedge f_v(\mathbf{y}^*) > 0)) \}. \quad (5.12)$$

O conjunto  $\Theta^*$  dos pontos estacionários do sistema (5.9) é:

$$\Theta^* = \{ \mathbf{y}^* \in [0, 1]^n : \forall v (y_v^* = 0 \vee y_v^* = 1 \vee f_v(\mathbf{y}^*) = 0) \}. \quad (5.13)$$

O conjunto  $\Theta^*$  possui a seguinte estrutura:

- 1) O conjunto dos pontos estacionários puros é  $\Theta^p = \{0, 1\}^n \subseteq \Theta^*$ .
- 2) O conjunto dos pontos estacionários internos (mistos) é  $\Theta^m = (0, 1)^n \cap \Theta^*$ . Nota-se que  $\Theta^m \subseteq \Theta^{NE}$ .
- 3) Todos os outros pontos estacionários são classificados como puros/mistos e são representados pelo conjunto  $\Theta^{pm} = \Theta^* \setminus (\Theta^p \cup \Theta^m)$ .

Conhecendo-se os pontos estacionários do sistema, se faz necessário estudar a estabilidade linear desse ponto. Seja  $\mathbf{y}^*$  um ponto estacionário no sistema (5.9), para analisarmos a estabilidade desse ponto, introduzimos a matriz jacobiana desse sistema  $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*) = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*}$  :

$$J_{v,w}(\mathbf{y}^*) = \begin{cases} (1 - 2y_v^*) (\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*)) & \text{se } w = v \\ y_v^* (1 - y_v^*) (\sigma_{v,1} + \sigma_{v,2}) a_{v,w} & \text{se } w \neq v \end{cases} \quad (5.14)$$

A estabilidade do ponto  $\mathbf{y}^*$  depende dos autovalores  $\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*))$  de  $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$ , como mostra o próximo teorema.

**Teorema 4.** *Seja  $\mathbf{y}^* \in \Theta^p$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $\forall v \left( (\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \leq \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*) \wedge y_v^* = 0) \vee (\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \geq \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*) \wedge y_v^* = 1) \right)$
- (b)  $\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$
- (c)  $\mathbf{y}^* \in \Theta^{NE}$

*Demonstração.* (a)  $\Leftrightarrow$  (b)

Seja  $\mathbf{y}^* \in \Theta^p$ . Pela equação (5.14) temos que a matriz jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$  é diagonal e seus autovalores  $\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*))$  são:

$$\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \begin{cases} \sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*) & \text{se } y_v^* = 0 \\ \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) & \text{se } y_v^* = 1 \end{cases}$$

De acordo com o afirmação (a), quando  $y_v^* = 0$ , temos que:

$$\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \leq \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*)$$

e assim  $(\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*)) \leq 0$ . Quando  $y_v^* = 1$ , temos que:

$$\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \geq \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*)$$

e assim  $(\sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*)) \leq 0$ . Logo  $\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) \leq 0$ .

Da mesma forma temos que, se  $\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) \leq 0$  então:

$$\sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*) \leq 0 \Rightarrow \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \leq \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*)$$

e

$$\sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \Rightarrow \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) \geq \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*).$$

(c)  $\Leftrightarrow$  (a)

Considerando-se  $\mathbf{y}^* \in \Theta^{NE}$  e como por hipótese  $\mathbf{y}^* \in \Theta^p$  temos que:

$$\mathbf{y}^* \in \Theta^{NE} \cap \Theta^p = \left\{ \mathbf{y}^* \in [0, 1]^n : \forall v ((y_v^* = 0 \wedge f_v(\mathbf{y}^*) \leq 0) \cup (y_v^* = 1 \wedge f_v(\mathbf{y}^*) \geq 0)) \right\}.$$

Sabendo-se que  $f_v(y) = \sigma_{v,1}k_{v,1}(y) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(y)$ , juntamente com o resultado anterior, temos que o item (a) é satisfeito, se e somente se, o item (c) é satisfeito pela igualdade anterior .

Portanto, todas as afirmações são equivalentes.  $\square$

Um resultado análogo ao do teorema que acabamos de demonstrar pode ser obtido ao trocarmos as desigualdades dos itens (a) e (b) por desigualdades estritas e o conjunto  $\Theta^{NE}$  pelo conjunto  $\Theta^{NES}$  no item (c).

**Corolário 1.** *Seja  $\mathbf{y}^* \in \Theta^p$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(a') \forall v \left( (\sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) < \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*) \wedge y_v^* = 0) \vee (\sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) > \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*) \wedge y_v^* = 1) \right)$$

$$(b') \lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) < 0 \forall v$$

$$(c') \mathbf{y}^* \in \Theta^{NES}$$

*Demonstração.* A prova desse corolário segue diretamente do teorema (4), quando as desigualdades estritas são utilizadas nas afirmações (a) e (b), e o conjunto  $\Theta^{NE}$  é substituído no item (c).  $\square$

É importante destacar que segue do corolário (1) que cada ponto de equilíbrio de Nash estritamente puro, é assintoticamente estável para o sistema (5.7). Além disso, o estado estacionário correspondente a um equilíbrio de Nash puro é estável se, para cada vértice  $v$ , o ganho total dos jogadores em sua vizinhança escolhendo a estratégia pura  $s$  é alta o suficiente.

Esses resultados anteriores, nos mostram algumas propriedades dos pontos puros e indica algumas coisas que devem ser observadas sobre a estabilidade assintótica desses pontos. Sendo assim, é natural pensar em resultados que possam indicar ou dar ideia de como se comporta a estabilidade assintótica para os pontos mistos. O resultado a seguir mostra a existência de um estado estacionário misto e além disso, como os autovalores da matriz jacobiana, aplicada nesse ponto, se relacionam com os autovalores da matriz de adjacência.

**Teorema 5.** *Supondo que  $\sigma_{v,1} = \sigma_1$  e  $\sigma_{v,2} = \sigma_2 \forall v$  e  $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) \neq 0$ . Então sempre existe um estado estacionário  $\mathbf{y}^* \in \Theta^m$  tal que  $y_v^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \forall v$ . Além disso,  $\lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(\mathbf{A})$ .*

*Demonstração.* Temos que o conjunto  $\Theta^m$  pode ser escrito como:

$$\Theta^m = \left\{ \mathbf{y}^* \in (0, 1)^n : f_v(\mathbf{y}^*) \forall v \right\} = \left\{ \mathbf{y}^* \in (0, 1)^n : \sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) = \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*) \forall v \right\}.$$

Uma vez que  $\sigma_{v,1} = \sigma_1$  e  $\sigma_{v,2} = \sigma_2 \forall v$ , então  $\mathbf{y}^* \in \Theta^m$  satisfaz o sistema linear

$$\sigma_1 \mathbf{A} \mathbf{y}^* = \sigma_2 \mathbf{A} (\mathbf{1} - \mathbf{y}^*), \quad (5.15)$$

onde os vetores  $\mathbf{A} \mathbf{y}^*$  e  $\mathbf{A} (\mathbf{1} - \mathbf{y}^*)$  são compostos pelos elementos  $k_{v,1}$  e  $k_{v,2}$ , respectivamente. De fato,  $\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) = \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*)$ ,  $\forall v$  pode ser escrito como:

$$\sigma_1 \sum_{w=1}^n a_{v,w} y_w^* = \sigma_2 \sum_{w=1}^n a_{v,w} (1 - y_w^*) \leftrightarrow \sigma_1 \mathbf{A} \mathbf{y}^* = \sigma_2 \mathbf{A} (\mathbf{1} - \mathbf{y}^*).$$

Além disso,  $\text{sign}(\sigma_1) = \text{sign}(\sigma_2) \neq 0$  implica que

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A}\mathbf{1}.$$

Uma vez que  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A}\mathbf{1} \in \text{Im}(\mathbf{A})$ , então o sistema (5.15) possui pelo menos uma solução da forma:

$$\mathbf{y}^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{1} + \mathbf{y}_0,$$

onde  $\mathbf{y}_0 \in \ker(\mathbf{A})$ .

A solução  $\mathbf{y}^* = \hat{y}\mathbf{1}$  onde  $\hat{y} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \forall v$  é o único estado estacionário misto desde que a inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  exista.

A matriz Jacobiana (5.14) calculada no ponto  $\mathbf{y}^* = \hat{y}\mathbf{1}$  é:

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}^*) = \hat{y}(1 - \hat{y})(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{A} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A}.$$

Uma vez que  $\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  é um escalar, então

$$\lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(\mathbf{A}).$$

Se  $A$  não possui laços, então  $\text{Tr}(A) = 0$ . Sabe-se que  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Como todas as entradas de  $A$  são positivas, então o teorema de Perron-Frobenius nos garante um autovalor positivo.

Logo unindo essas informações, temos que ter um autovalor positivo e um negativo para obter a soma igual a zero, logo não importa o sinal de  $\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ .  $\square$

O Teorema 5 afirma que se a matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  é invertível, as coordenadas do estado estacionário misto não depende de  $\mathbf{A}$  em si. Caso contrário, a estabilidade linear de  $\mathbf{y}^*$  depende dos autovalores de  $\mathbf{A}$ .

## 6 MODELO EVOLUTIVO PARA A DINÂMICA DO JOGO REPRESENTADO POR UM GRAFO COM ESTRUTURA DE ESTRELA FECHADA

Nosso objetivo, neste capítulo, é particularizarmos a estrutura do grafo do teorema (5) para tentar obter resultados sobre os pontos de equilíbrio puros que não foram estudados, uma vez que o teorema (5) apenas nos dá informações sobre a existência e a estabilidade de pontos de equilíbrio misto. Sendo assim, apresentaremos o grafo da estrela fechada e encontraremos o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado por ele, bem como alguns aspectos referentes à estabilidade dos pontos de equilíbrio puro encontrados. Utilizando a mesma matriz de pagamento para todos os jogadores e a teoria apresentada anteriormente, obteremos o modelo para um grafo estrela fechada com 6 vértices e, em seguida, estenderemos o raciocínio empregado de modo a obter o modelo para um caso mais geral do grafo estrela fechada. Por fim, com base nas simulações realizadas e na teoria desenvolvida para o grafo estrela fechada, será verificada a existência de apenas dois pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis.

### 6.1 Jogos evolucionários na estrela fechada

O grafo da estrela fechada consiste em um grafo estrela onde as folhas adjacentes são ligadas por uma aresta. A próxima figura mostra uma estrela fechada com  $n$  vértices.



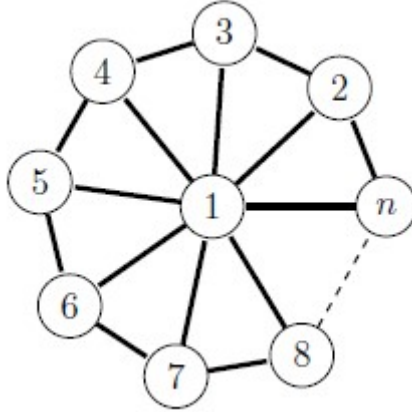


Figura 6.1: Estrela Fechada com  $n$  vértices

Considerando a figura (6.1), o vértice 1 será chamado de vértice central e os demais serão os vértices periféricos.

Para aplicarmos os resultados anteriores é necessário conhecermos a matriz de adjacência da estrela fechada, no caso em que o jogo é simétrico, a matriz é da forma:

$$A_{[n \times n]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste trabalho as simulações foram feitas para um modelo  $WA$ , em que a conexão entre os jogadores é dada através de uma soma ponderada, e como explicado na seção (5.2), se faz necessário que a matriz de adjacência seja estocástica de linha. Sendo assim, a matriz de adjacência da estrela fechada que será utilizada é:

$$A_{[n \times n]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

onde cada uma das entradas está normalizada de acordo com o grau de cada um dos vértices, ou seja, é uma matriz estocástica de linha.

Utilizando a equação:

$$\dot{y}_v = y_v(1 - y_v)f_v(\mathbf{y}),$$

iremos apresentar o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado pelo grafo da estrela fechada com  $n$  vértices, mas antes de obter o sistema que a descreve, precisamos calcular as funções de pagamento para cada um dos jogadores vértices do grafo. Suponhamos que todos os jogadores utilizem a mesma matriz de pagamento  $\mathbf{B}$  de dimensão 2, ou seja, uma matriz de pagamento para um jogo de 2 estratégias.

Seja a função de pagamento dada por:

$$f_v(\mathbf{y}) = \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y})$$

Para um grafo com estrutura de estrela fechada com  $n$  vértices, temos que o modelo evolutivo que representa a dinâmica do jogo representado por ele será dado por um conjunto de  $n$  equações, em que cada uma delas representa a evolução estratégica para certo jogador. Para o jogador central, temos:

$$\dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) \left[ \frac{1}{n-1} \left( \sigma_1(y_2 + \dots + y_n) - \sigma_2((n-1) - y_2 - \dots - y_n) \right) \right]$$

$$\dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) \left[ \frac{1}{n-1} ((\sigma_1 + \sigma_2)y_2 + \dots + (\sigma_1 + \sigma_2)y_n - \sigma_2(n-1)) \right]$$

$$\dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{n-1} (y_2 + \dots + y_n) - \sigma_2 \right]$$

Como os jogadores periféricos possuem a mesma quantidade de conexões, as suas equações serão de forma semelhante, modificando apenas as variáveis de acordo com o jogador com o qual ele está conectado. Segue abaixo a equação para o jogador 2:

$$\dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) \left[ \frac{1}{3} (\sigma_1(y_1 + y_3 + y_n) - \sigma_2(3 - y_1 - y_3 - y_n)) \right]$$

$$\dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) \left[ \frac{1}{3} ((\sigma_1 + \sigma_2)y_1 + (\sigma_1 + \sigma_2)y_3 + (\sigma_1 + \sigma_2)y_n - 3\sigma_2) \right]$$

$$\dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} (y_1 + y_3 + y_n) - \sigma_2 \right]$$

Como o restante dos  $n - 2$  jogadores possuem a mesma quantidade de ligações que o jogador 2, diferindo apenas o jogador com qual eles estão interagindo, podemos afirmar que a equação para um jogador  $i$  tal que  $i \neq 1$ ,  $i \neq 2$  e  $i \neq n$  se dá por:

$$\dot{y}_i = y_i(1 - y_i) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} (y_1 + y_{i-1} + y_{i+1}) - \sigma_2 \right]$$

e para o jogador  $n$ :

$$\dot{y}_n = y_n(1 - y_n) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} (y_1 + y_2 + y_{n-1}) - \sigma_2 \right]$$

O sistema de equações que descreve o modelo evolutivo para a dinâmica do jogo representado por um grafo com estrutura de estrela fechada, com  $n$  vértices, onde uma matriz de pagamento é utilizada, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{(n-1)}(y_2 + \dots + y_n) - \sigma_2 \right] \\ \dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_3 + y_n) - \sigma_2 \right] \\ \dot{y}_i = y_i(1 - y_i) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_{i-1} + y_{i+1}) - \sigma_2 \right] \text{ para } 2 < i < n. \\ \dot{y}_n = y_n(1 - y_n) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_2 + y_{n-1}) - \sigma_2 \right] \end{cases} \quad (6.1)$$

Na próxima seção iremos proceder com os cálculos dos pontos de equilíbrio desse sistema.

## 6.2 Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio do sistema (6.1) da seção, anterior são os pontos que fazem com que  $\dot{y}_v = 0$ , para todo  $1 \leq v \leq n$ , esses pontos de equilíbrio são uma certa distribuição de estratégia entre os jogadores, que se alcançada, nenhum deles mudará. Esses pontos podem ser de equilíbrio puro, onde todos os indivíduos jogam uma estratégia com probabilidade 1, ou pontos de equilíbrio misto, quando algum deles joga sua estratégia com probabilidade  $y_v \in (0, 1)$ .

### 6.2.1 Pontos de equilíbrio misto

Primeiramente vamos analisar os pontos de estratégias mistas, dentro do simplex, sendo assim, estamos procurando por um ponto  $\mathbf{y}^* \in \mathcal{S}$  tal que  $\dot{y}_v(\mathbf{y}^*) = 0$ . Sendo assim, tem-se que  $y_v$  e  $(1 - y_v)$  são diferentes de 0, logo deve-se ter  $f_v(\mathbf{y}^*) = 0 \forall v$ , uma vez que  $\dot{y}_v = y_v(1 - y_v)f_v(\mathbf{y})$ . Temos assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{(n-1)}(y_2 + \dots + y_n) - \sigma_2 \right] = 0 \\ \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_3 + y_n) - \sigma_2 \right] = 0 \\ \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_{i-1} + y_{i+1}) - \sigma_2 \right] = 0 \text{ para } 2 < i < n \\ \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_{n-1} + y_2) - \sigma_2 \right] = 0 \end{cases}$$

Analisando-se a primeira equação segue que:

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{(n-1)}(y_2 + \dots + y_n) - \sigma_2 &= 0 \\ \frac{1}{n-1}(y_2 + \dots + y_n) &= \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Analisando-se agora a equação para os outros jogadores:

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_{n-1} + y_2) - \sigma_2 &= 0 \\ \frac{1}{3}(y_1 + y_{n-1} + y_2) &= \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Para encontrar essa solução, devemos resolver o sistema de equações (6.2) e (6.3) e, quando existir, a matriz inversa de  $A$  com dimensão  $n$ . Segue que podemos escrever as equações (6.2) e (6.3) da seguinte forma:

$$A\mathbf{y} = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)}\mathbf{1} \quad (6.4)$$

em que  $A$  é a matriz de adjacência do grafo,  $\mathbf{y}$  é o vetor de distribuição das estratégias das  $n$  subpopulações e  $\mathbf{1}$  é o vetor com todas as entradas iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pode se concluir que para achar a solução do sistema, precisa-se de um  $\mathbf{y}^*$  tal que  $A\mathbf{y}^* = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)}\mathbf{1}$ . A solução do sistema foi obtida utilizando a matriz inversa de  $A$  e calculando assim  $\mathbf{y}^* = (A^{-1})\frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)}\mathbf{1}$ . A solução encontrada foi:

$$\mathbf{y}^* = \left[ \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad \cdots \quad \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \right]^T.$$

Entretanto, nem sempre a matriz de adjacência  $A$  de um grafo estrela fechada será invertível, e nesses casos a solução será dada através dos autovalores da matriz  $A$  em conformidade com a equação:

$$\lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\lambda(\mathbf{A})$$

$$\frac{\lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*))}{\lambda(\mathbf{A})} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

os casos em que a matriz  $A$  não é invertível são mostrados na proposição a seguir.

**Proposição 1.** *Seja  $A$  a matriz de adjacência de um grafo estrela fechada com  $n$  vértices. Se  $n = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , então  $A$  não é invertível.*

*Demonstração.* Seja  $A$  a matriz de adjacência do grafo estrela fechada com  $n$  jogadores de modo que  $n = 4k + 1$ , vamos mostrar que as colunas pares da matriz  $A$  são linearmente dependentes. Temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos que a matriz  $A$  possui uma quantidade  $2k$  de colunas pares. Percebemos que essas colunas possuem apenas três entradas diferentes de zero, uma delas na primeira linha igual a  $\frac{1}{n-1}$ . Considerando a coluna 2, temos que as entradas diferentes de zero estão nas linhas 3 e  $n$ , que são iguais a  $\frac{1}{3}$ , ou seja, nas linhas correspondentes aos jogadores com os quais ele está conectado. As outras colunas se apresentam do mesmo modo, ou seja, a coluna 4, possui entradas

diferentes de zero nas linhas 1, 3 e 5, a coluna 6, nas linhas 1, 5 e 7, e assim sucessivamente. Seja  $c_i$  a coluna  $i$  da matriz  $A$ , temos:

$$r_0 = c_2 - c_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nesse passo vemos que, ao subtrair a coluna  $c_4$  da coluna  $c_2$ , obtemos uma coluna com apenas duas entradas diferentes de 0, que se encontram nas linhas 5 e  $n$ . Com esse resultado, fazemos a seguinte operação:

$$r_1 = r_0 + c_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nesse passo a primeira linha volta a ser diferente de 0, a linha 7 recebe o valor  $\frac{1}{3}$  e a linha  $n$  continua  $\frac{1}{3}$ . Seguindo para o próximo passo temos:

$$r_2 = r_1 - c_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ao subtrair  $c_4$  de  $c_2$  a linha 5, o resultado obtido apresenta apenas duas entradas não nulas, a linha 5 e a linha  $n$ , sendo a linha 5 a  $-\frac{1}{3}$  e ao subtrair  $c_8$  de  $r_1$ , apenas duas linhas não são nulas, a linha 9 e a  $n$ , sendo a linha 9 do igual a  $-\frac{1}{3}$  e a linha  $n$  igual a  $\frac{1}{3}$ . Desse modo, temos que a cada 4 colunas pares, o valor  $-\frac{1}{3}$  aparecerá 4 linhas abaixo da linha que ele se encontrava anteriormente. Como  $A$  possui  $4k + 1$  colunas, temos então que haverá uma quantidade finita de passos, onde ao subtrair a coluna  $4k$  teremos:

$$r_j = r_{j-1} - c_{4k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



Ou seja,  $c_2 - c_4 + c_6 - c_8 + \dots + c_{n-3} - c_{n-1} = 0$ , sendo então vetores linearmente dependentes e conseqüentemente  $A$  não é invertível.  $\square$

Portanto, para os casos em que o grafo estrela fechada possui  $4k + 1$  jogadores, a equação na qual se obtém o ponto de equilíbrio misto é resolvida a partir dos autovalores de  $A$  juntamente com os autovalores da matriz jacobiana.

### 6.2.2 Pontos de equilíbrio puro

Para pontos de equilíbrio puro, temos que  $y_v = 0$  ou  $(1 - y_v = 0)$ , o que implica que  $\dot{y}_v = y_v(1 - y_v)f_v(\mathbf{y})$  será igual a 0, de modo que qualquer perfil de estratégia da população em que todos os jogadores utilizem estratégias puras, ou seja qualquer combinação de 0's e 1's,  $y_v = 0$  ou  $y_v = 1$ , será um ponto de equilíbrio. Na próxima seção faremos o estudo de quais desses pontos serão um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Para isso é necessário analisar a matriz jacobiana do sistema (6.1).

## 6.3 Estabilidade assintótica

Nesta seção iremos fazer a análise da estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio misto e equilíbrio puro da estrela fechada.

### 6.3.1 Estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio misto

Para estudar a estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio, se faz necessário analisar os autovalores da matriz jacobiana do sistema (6.1), uma vez que a estabilidade de  $\mathbf{y}^*$  está relacionada com eles. Segue que a matriz jacobiana

do sistema pode ser calculada da seguinte forma:

$$J_{i,j}(\mathbf{y}^*) = \begin{cases} (1 - 2y_i^*) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{d(i)} \left( \sum_{(i,v) \in E} y_v^* \right) - \sigma_2 \right] & , \text{ se } i = j \\ y_i^* (1 - y_i^*) \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{d(i)} \right) & , \text{ se } i \neq j \text{ e } (i, j) \in E \end{cases}$$

onde  $E$  representa o conjunto de todas as arestas do grafo,  $(i, v)$  indica uma aresta entre o vértice  $i$  e o vértice  $v$  e  $d(i)$  indica o grau do vértice  $i$ , ou seja, a quantidade de arestas que incidem sobre ele.

$$\text{Considerando-se } \alpha = \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{d(i)} \left( \sum_{(i,v) \in E} y_v^* \right) - \sigma_2 \right], \beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \text{ e } \gamma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{n - 1}$$

$$J(\mathbf{y}^*) = \begin{bmatrix} (1 - 2y_1)\alpha & y_1(1 - y_1)\gamma & y_1(1 - y_1)\gamma & y_1(1 - y_1)\gamma & y_1(1 - y_1)\gamma & \dots & y_1(1 - y_1)\gamma & y_1(1 - y_1)\gamma \\ y_2(1 - y_2)\beta & (1 - 2y_2)\alpha & y_2(1 - y_2)\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & y_2(1 - y_2)\beta \\ y_3(1 - y_3)\beta & y_3(1 - y_3)\beta & (1 - 2y_3)\alpha & y_3(1 - y_3)\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_4(1 - y_4)\beta & 0 & y_4(1 - y_4)\beta & (1 - 2y_4)\alpha & y_4(1 - y_4)\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ y_n(1 - y_n)\beta & y_n(1 - y_n)\beta & 0 & 0 & 0 & \dots & y_n(1 - y_n)\beta & (1 - 2y_n)\alpha \end{bmatrix}$$

Esse jacobiano possui, em sua diagonal, os elementos  $j_{i,i} = (1 - 2y_i)\alpha$  e na primeira linha todas as outras entradas são iguais a  $y_1(1 - y_1)\gamma$ . Nas linhas seguintes, haverá apenas outras 3 entradas diferentes de 0. Por exemplo, na linha 2, como o vértice 2 está conectado com os vértices 1, 3 e  $n$ , teremos que as entradas  $j_{2,1}$ ,  $j_{2,3}$  e  $j_{2,n}$  serão iguais a  $y_2(1 - y_2)\beta$ . O mesmo segue para as outras linhas.

Para estudarmos a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio misto, devemos aplicar a matriz jacobiana no ponto  $\mathbf{y}^* = \left[ \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad \dots \quad \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \right]^T$ .

A matriz obtida é:

$$J(\mathbf{y}^*) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Esse ponto não é assintoticamente estável. De fato, temos:

$$\text{Tr}(J(\mathbf{y}^*)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$$

em que os  $\lambda_i$  são os autovalores da matriz jacobiana aplicada ao ponto de equilíbrio misto. Como o traço é nulo (todos os elementos da diagonal são iguais a 0) tem-se então que nem todos os autovalores de  $J(\mathbf{y}^*)$  são negativos, e assim o ponto de equilíbrio misto  $\mathbf{y}^*$  não é assintoticamente estável.

Pode-se observar também que  $J(\mathbf{y}^*) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} A$ , o que está de acordo com o Teorema 3 de Madeo e Moceni em [12], onde eles provaram a existência de um estado estacionário misto satisfazendo essa condição e além disso, uma vez que  $\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  é um escalar, então  $\lambda(J(\mathbf{y}^*)) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(A)$ .

### 6.3.2 Estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio puro

Nesta seção iremos utilizar a notação  $\tilde{0}$  para indicarmos uma perturbação na distribuição da estratégia pura (0, 1) sendo aproximadamente (0.01, 0.99) e utilizaremos a notação  $\tilde{1}$  para indicarmos uma perturbação na distribuição da estratégia pura (1, 0) sendo aproximadamente (0.99, 0.01). Desse modo ao indicarmos o perfil de estratégia  $(\tilde{0}, \tilde{1})$ , estaremos indicando que o jogador 1 utiliza a distribuição estratégica (0.01, 0.99) e o jogador 2 utiliza a distribuição estratégica (0.99, 0.01).

Em seguida analisaremos o comportamento assintótico de pontos de equilíbrio puro onde há um jogador mutante, que utiliza uma estratégia diferente dos outros  $n - 1$  jogadores. Iremos considerar que o jogador mutante utiliza a estratégia  $\tilde{0}$ , enquanto o restante dos jogadores utiliza a estratégia  $\tilde{1}$ .

Para se estudar a estabilidade assintótica é necessário estudar o jacobiano da matriz de adjacência aplicado aos pontos de equilíbrio. Com isso pode-se ter duas situações, a primeira em que a matriz de pagamento é uma matriz de vies-

tabilidade, em que os jogadores tendem a usar a mesma estratégia para obter uma melhor recompensa, e a segunda em que a matriz de pagamento é uma matriz de coexistência, em que os jogadores tendem a usar estratégias diferentes para obter uma melhor recompensa.

## 7 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Neste capítulo iremos analisar o comportamento dos pontos de equilíbrio puro, nos casos em que os todos os jogadores utilizam uma matriz de pagamento de biestabilidade e de coexistência. Iremos provar alguns resultados sobre esses pontos e para o caso da matriz de coexistência, algumas simulações serão feitas para entendermos o comportamento da evolução estratégica no grafo estrela fechada.

### 7.1 Biestabilidade

Nesta seção iremos considerar que todos os jogadores possuem a mesma matriz de pagamento, e que ela é da forma:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$$

Essa matriz é chamada de matriz e pagamento de biestabilidade, pois os jogadores recebem pagamento positivo quando jogam a mesma estratégia. No modelo clássico da equação de replicação, isso implica que os pontos  $(1, 1)$  e  $(0, 0)$  são assintoticamente estáveis, por isso biestabilidade. De maneira geral, a matriz de pagamento serve para nos fornecer os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , que são calculados da forma mostrada na seção 5.5.

Temos, nesse caso específico, que  $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ . Através de simulações numéricas e utilizando  $\sigma_1 = a = \sigma_2 = 1$ , colocamos apenas um jogador mutante com a estratégia  $\tilde{0}$  e a solução converge para  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  indicando a dominância da estratégia  $\tilde{1}$ . De forma análoga, ao colocar um jogador mutante com a estratégia 1 e os demais jogadores com a estratégia  $\tilde{1}$ , a solução converge para  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  indicando a dominância da estratégia  $\tilde{0}$ . Assim segue que os pontos de equilíbrio puro, para o caso de apenas um jogador mutante, são  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  e  $(0, 0, 0, \dots, 0)$ .

Começamos verificando para os casos mais simples, quando todos os jogadores possuem a mesma estratégia, se  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  e  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  são assintoticamente estáveis. Para isso, aplicaremos esses dois pontos na matriz jacobiana. Começaremos pelo ponto  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ . Para a primeira linha temos:

$$J_{1,1} = (1 - 2) \left[ \frac{2a}{n-1}(n-1) - a \right] = -a$$

$$J_{1,j} = 1(1 - 1) \left( \frac{2a}{n-1} \right) = 0$$

Para as linhas restantes, segue que:

$$J_{i,j} = (1 - 2) [2a - a] = -a \quad \text{se } i = j$$

$$J_{i,j} = 1(1 - 1) \left( \frac{2a}{n-1} \right) = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

Assim a matriz jacobiana aplicada no ponto  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  toma a seguinte forma:

$$J(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a \end{pmatrix}$$

Com isso os autovalores  $\lambda_i$  são todos iguais a  $(-a) < 0$  e portanto  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  é ponto de equilíbrio puro assintoticamente estável.

Para o ponto  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  temos para a primeira linha:

$$J_{1,1} = (1 - 0) \left[ \frac{2a}{n-1} \times 0 - a \right] = -a$$

$$J_{1,j} = 0(1 - 0) \left( \frac{2a}{n-1} \right) = 0$$

Para as linhas restantes, segue que:

$$\begin{aligned}
J_{i,j} &= (1 - 0) \left[ \frac{2a}{3} \times 0 - a \right] = -a \quad \text{se } i = j \\
J_{i,j} &= 0(1 - 0) \left( \frac{2a}{3} \right) = 0 \quad \text{se } i \neq j
\end{aligned}$$

E assim a matriz jacobiana terá a seguinte forma:

$$J(0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a \end{pmatrix}$$

Com isso os autovalores  $\lambda_i$  são todos iguais a  $-a < 0$  e portanto  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  é ponto de equilíbrio puro assintoticamente estável.

Qualquer outro perfil de estratégia pura é ponto de equilíbrio, porém os únicos assintoticamente estáveis são  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  e  $(0, 0, 0, \dots, 0)$ . De fato, o termo  $y_i(1 - y_i)$  será igual a 0 quando  $y_i = 0$  ou  $y_i = 1$ , o que mostra que qualquer combinações de 0's e 1's é ponto de equilíbrio.

Consideremos o ponto  $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$  em que o jogador  $i$  utiliza uma estratégia diferente dos outros  $n - 1$  jogadores.

**Proposição 2.** *Os pontos  $(0, \dots, 0)$  e  $(1, \dots, 1)$  são assintoticamente estáveis.*

*Demonstração.* Segue diretamente do cálculo do jacobiano aplicado aos pontos e, após, analisar os seus autovalores. Vimos que os autovalores  $\lambda_i(J(0, \dots, 0)) < 0 \forall i$  e  $\lambda_i(J(1, \dots, 1)) < 0 \forall i$ . Logo, os pontos  $(0, \dots, 0)$  e  $(1, \dots, 1)$  são assintoticamente estáveis. □

**Lema 6.** *A matriz jacobiana aplicada no ponto  $(1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 1)$ , com o jogador  $i$  utilizando a estratégia 2, para uma matriz de biestabilidade, possui um autovalor positivo.*

*Demonstração.* Como os termos  $y_i(1-y_i)$  são iguais a 0, temos então que o jacobiano será uma matriz diagonal. Analisando a posição  $J_{i,i}$  temos:

$$J_{i,i} = (1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 0)\alpha = \alpha \text{ e}$$

$$J_{k,k} = (1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 1)\alpha = -\alpha, \text{ para } k \neq i.$$

Como  $\alpha_i = \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{d(i)} \left( \sum_{(i,v) \in E} y_v^* \right) - \sigma_2 \right]$  dividiremos em dois casos:

i)  $i = 1$

$$J_{i,i} = J_{1,1} = \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{n-1} \cdot (n-1) - \sigma_2 \right] = \sigma_1 = a > 0$$

$$J_{k,k} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 2 - \sigma_2 \right] = - \left( \frac{2\sigma_1 + 2\sigma_2 - 3\sigma_2}{3} \right) = - \left( \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \right) = - \left( \frac{2a - a}{3} \right) = - \frac{a}{3} < 0,$$

para  $k \neq 1$ .

$$J(0, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

Desse modo os autovalores são  $(a, -\frac{a}{3}, \dots, -\frac{a}{3})$  e portanto,  $J(0, 1, 1, \dots, 1)$  possui um autovalor positivo, logo o ponto  $(0, 1, 1, \dots, 1)$  não é assintoticamente estável.

ii)  $i \neq 1$

$$J_{i,i} = \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 2 - \sigma_2 \right] = \frac{2\sigma_1 + 2\sigma_2 - 3\sigma_2}{3} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} = \frac{2a - a}{3} = \frac{a}{3} > 0$$

$$J_{1,1} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{(n-1)} \cdot (n-2) - \sigma_2 \right] = - \frac{(n-2)(\sigma_1 + \sigma_2) - (n-1)\sigma_2}{(n-1)} = - \frac{(n-2)\sigma_1 - \sigma_2}{n-1} = - \frac{(n-2)a - a}{n-1} = - \frac{(n-3)a}{n-1} < 0.$$

$$J_{k,k} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 3 - \sigma_2 \right] = -(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2) = -\sigma_1 = -a < 0, \text{ para } k \neq i,$$

$k \neq (i-1)$ ,  $k \neq (i+1)$  e  $k \neq 1$ .



$$J_{k,k} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 2 - \sigma_2 \right] = - \frac{2\sigma_1 + 2\sigma_2 - 3\sigma_2}{3} = - \left( \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \right) = - \left( \frac{2a - a}{3} \right) = - \frac{a}{3} < 0, \text{ para } k = (i - 1) \text{ e } k = (i + 1)$$

$$J(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{(n-3)a}{n-1} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a}{3} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & -\frac{a}{3} & & \\ & & & & \frac{a}{3} & \\ & & & & & -\frac{a}{3} & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & -\frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

Desse modo os autovalores são  $\left(-\frac{(n-3)a}{n-1}, -\frac{a}{3}, \dots, -\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, \dots, -\frac{a}{3}\right)$ , portanto  $J(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$  possui um autovalor positivo, logo o ponto  $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$  não é assintoticamente estável.  $\square$

Com isso mostramos que se o perfil de estratégias da população possuir apenas 1 jogador mutante, então esse ponto não é assintoticamente estável.

Podemos ir um pouco mais além e afirmar que qualquer combinação de 0's e 1's não será assintoticamente estável.

**Teorema 7.** *Se  $\mathbf{y}$  é um perfil de estratégia pura e não são todas iguais, então  $\mathbf{y}$  não é assintoticamente estável.*

Lembremos que qualquer perfil de estratégia que seja uma combinação de 0's e 1's leva a uma matriz jacobiana diagonal, logo basta encontrar um elemento da diagonal que seja positivo. Para comodidade do leitor durante a demonstração do teorema, a estratégia 2 será designada de estratégia  $R$  e a estratégia 1 será designada de estratégia  $Y$ .

*Demonstração.* Para provar esse teorema, consideremos, primeiramente, o triângulo formado por 3 jogadores em que pelo menos um deles joga uma estratégia diferente. Este jogador pode ser o jogador central ou um jogador periférico. Consideremos, sem perda de generalidade, o triângulo formado pelos jogadores 1, 2 e 3, em que o jogador 1 é o jogador central. Consideraremos que o vértice de cor vermelha representará um jogador utilizando a estratégia  $R$  e um vértice de cor amarela representará um jogador utilizando a estratégia  $Y$ . Temos os seguintes casos:

### Caso 1

Jogadores 1 e 2 utilizam a estratégia  $R$ , e o jogador 3 utiliza a estratégia  $Y$ .

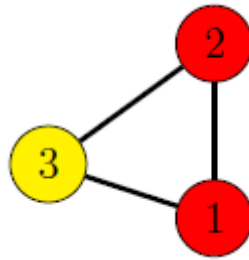


Figura 7.1: Jogadores 1 e 2 utilizando a estratégia  $R$  e jogador 3 utilizando a estratégia  $Y$ .

Com essa configuração, ao analisar a matriz jacobiana, a entrada  $j_{3,3}$  será positiva independente da estratégia do jogador 4, que também joga com o jogador 3. De fato:

(i) Jogador 4 utiliza estratégia  $R$ :

$$J_{3,3} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 0 - \sigma_2 \right] = -[0 - \sigma_2] = -(-\sigma_2) = -(-a) = a > 0$$

(ii) Jogador 4 utiliza estratégia  $Y$ :

$$J_{3,3} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 1 - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 3\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{a - 2a}{3} \right] = - \left[ \frac{-a}{3} \right] = \frac{a}{3} > 0$$

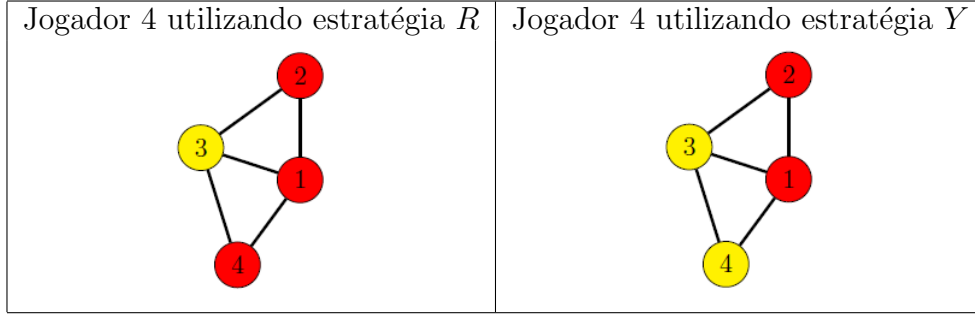


Tabela 7.1: Jogador 4 utilizando as estratégias *R* e *Y*.

## Caso 2

Assim precisamos analisar quando o jogador 2 também joga com estratégia *Y*.

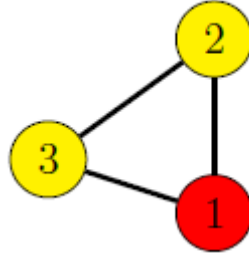


Figura 7.2: Jogador 2 utilizando a estratégia *Y*.

(i) Jogador 4 utiliza estratégia *R*:

$$J_{3,3} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 1 - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 3\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{a - 2a}{3} \right] = - \left[ \frac{-a}{3} \right] = \frac{a}{3} > 0$$

(ii) Jogador 4 utiliza estratégia *Y*:

$$J_{3,3} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 2 - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{2(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{2\sigma_1 + 2\sigma_2 - 3\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{2a - a}{3} \right] = - \left[ \frac{a}{3} \right] = \frac{-a}{3} < 0$$

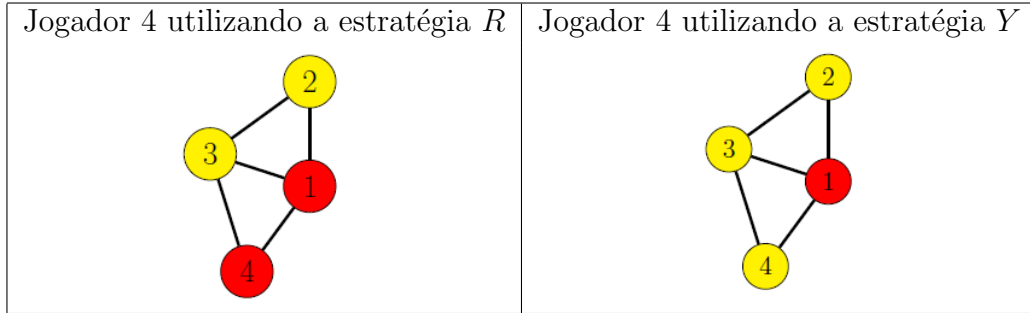


Tabela 7.2: Jogador 4 utilizando as estratégias  $R$  e  $Y$ .

No caso  $2ii$  a entrada  $J_{3,3}$  é negativa. Devido a esse entrada ser negativa, isso não nos garante a não estabilidade assintótica. Com isso devemos analisar o triângulo formado pelos jogadores 1, 3 e 4, e analisar o comportamento da entrada  $J_{4,4}$  do jacobiano. Se os jogadores 1 e 4 usarem a estratégia  $R$  e o jogador 3 usar a estratégia  $Y$ , temos novamente o caso 1 anterior. Logo, devemos analisar o caso em que o jogador 4 utiliza estratégia  $Y$ . Nesse caso, vamos analisar a entrada  $J_{4,4}$  que dependerá assintótica dependerá da estratégia do jogador 5.

Se o jogador 5 usar estratégia  $R$ , temos o mesmo resultado do caso  $2i$  anterior e assim a entrada  $J_{4,4}$  é positiva.

$$J_{4,4} = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} \cdot 1 - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3} - \sigma_2 \right] = - \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 3\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2}{3} \right] = - \left[ \frac{a - 2a}{3} \right] = - \left[ \frac{-a}{3} \right] = \frac{a}{3} > 0$$

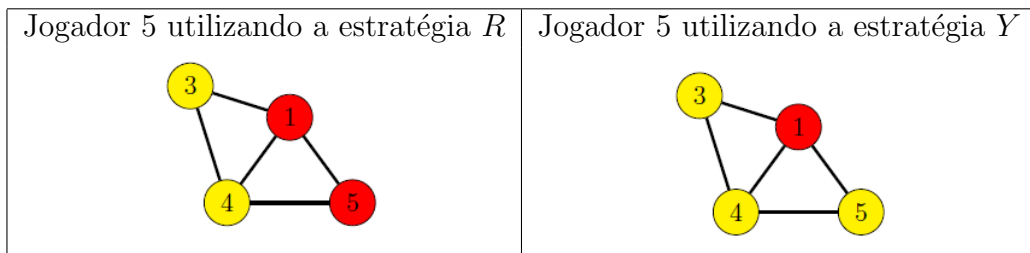


Tabela 7.3: Jogador 5 utilizando as estratégias  $R$  e  $Y$ .

Se o jogador 5 usar estratégia  $Y$ , devemos passar a analisar o triângulo formado pelos jogadores 1, 4 e 5. Esse passo pode ser repetido até completar todos os jogadores periféricos, em que, se um deles jogar estratégia  $R$ , a não estabilidade está

provada e se todos eles jogarem estratégia  $Y$ , devido ao fato do jogador 1 utilizar estratégia  $R$ , o ponto  $J_{1,1} = (1 - 2 \cdot 0) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{n-1} (n-1) - \sigma_2 \right] = \sigma_1 = a > 0$ , será positivo de acordo com o resultado da afirmação anterior.

Se o jogador 1 utilizar a estratégia  $Y$ , a não estabilidade se dará pelo mesmo motivo. Analisando os triângulos do grafo e utilizando o mesmo argumento recursivo, acharemos pelo menos um jogador  $i \neq 1$  que utiliza a estratégia  $R$ , cercado de jogadores que utilizam a estratégia  $Y$ , e com isso a entrada  $J_{i,i}$  será positiva.  $\square$

Com esse resultado sabemos que, para o caso da biestabilidade, dentre todos os possíveis pontos de equilíbrio puro, os únicos pontos assintoticamente estáveis são  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  e  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ . Com isso, consideramos todos os casos de estabilidade assintótica para os pontos de equilíbrio puro no grafo estrela fechada.

Imaginemos que, no caso da biestabilidade, todos os jogadores joguem a estratégia inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0})$ . Dessa forma as estratégias sempre convergirão para  $(1, 0)$ , uma vez que no caso da biestabilidade os jogadores recebem maior pagamento quando utilizam a mesma estratégia. Consideremos agora que um jogador mutante que utiliza a estratégia  $(\tilde{0}, \tilde{1})$ . É de nosso interesse saber quantos jogadores mutantes são necessários para fazer com que a sua estratégia domine a estratégia do restante da população. Através de simulações numéricas percebemos que o modelo da estrela fechada, no caso da biestabilidade, consegue suprimir um jogador mutante que joga diferente dos outros  $n - 1$  jogadores, o que indica que, para a dominação ser feita com sucesso, é necessário uma quantidade maior de jogadores.

Com o auxílio de simulações, foi possível identificar que a quantidade de jogadores mutantes necessários para que eles consigam dominar os demais, é igual a:

**Caso 1:** Se  $n$  for ímpar, basta que existam  $\frac{n+1}{2}$  jogadores mutantes, independente de quais eles sejam, que a estratégia utilizada por eles irá dominar todos os jogadores.

**Caso 2(i):** Se  $n$  for par, temos duas situações. A primeira em que o jogador central é um dos jogadores mutantes, e nesse caso serão necessários  $\frac{n}{2}$  jogadores mutantes para que eles dominem os demais jogadores.

**Caso 2(ii):** Se o jogador central não for um dos jogadores mutantes, então nesse caso serão necessários  $\frac{n}{2} + 1$  jogadores para que eles dominem os demais jogadores.

Os gráfico abaixo ilustram as quantidade de jogadores mutantes necessários para dominar toda a população de  $n$  jogadores:

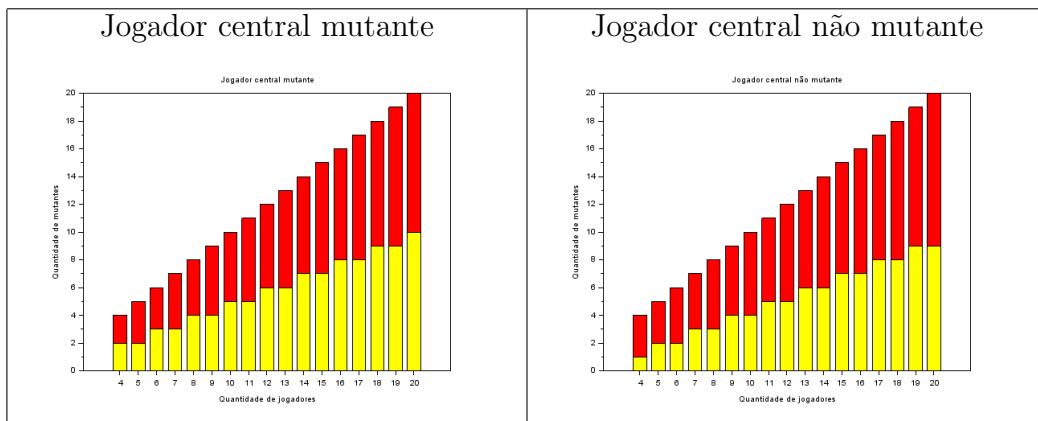


Tabela 7.4: Quantidade necessária de jogadores mutantes utilizando a estratégia  $R$  para dominar a população.

Essa questão é um ponto interessante a ser estudado, mas que não será aprofundado nesse trabalho, uma vez que o nosso foco é a estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrios puro. Na próxima seção iremos fazer o estudo desses pontos puros utilizando uma matriz de coexistência.

## 7.2 Coexistência

Nessa seção iremos considerar a matriz de pagamento como sendo da forma:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, a > 0$$

Para esse caso temos que  $\sigma_1 = -a = \sigma_2 < 0$ .

Essa matriz é chamada de coexistência, pois neste caso os jogadores obtêm os melhores pagamentos quando eles têm estratégias diferentes, ou seja, estratégias diferentes podem coexistir.

Com a mudança da matriz de pagamento para uma matriz de coexistência, agora para certo jogador  $i$ , a sua recompensa será maior ao utilizar estratégias diferentes dos demais  $n-1$  jogadores, o que mudará a dinâmica de interação entre eles.

O primeiro fato é que os pontos  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  e  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  que eram assintoticamente estáveis para a matriz de biestabilidade, agora deixarão de ser.

De fato, como calculado anteriormente para os pontos  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  e  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ , temos que a matriz jacobiana será uma matriz diagonal, e assim precisamos analisar os valores diagonais que são os autovalores da matriz.

Iremos analisar as entradas  $J_{i,i}$  para o ponto  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ :

*i)* Para o jogador 1

$$(1 - 2y_1)\alpha = (1 - 2 \cdot 1) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{(n-1)} \cdot (n-1) - \sigma_2 \right] = -\sigma_1 = -(-a) = a > 0$$

*ii)* Para um jogador  $i \neq 1$

$$(1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2y_i) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \cdot 3 - \sigma_2 \right] = -\sigma_1 = -(-a) = a > 0$$

Dessa forma os autovalores são positivos e assim o ponto  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  não é assintoticamente estável.

Iremos analisar as entradas  $J_{i,i}$  para o ponto  $(0, 0, 0, \dots, 0)$ :

i) Para o jogador 1

$$(1 - 2y_1)\alpha = (1 - 2 \cdot 0) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{(n-1)} \cdot 0 - \sigma_2 \right] = -\sigma_2 = -(-a) = a > 0$$

ii) Para um jogador  $i \neq 1$

$$(1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 0) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \cdot 0 - \sigma_2 \right] = -\sigma_2 = -(-a) = a > 0$$

Dessa forma os autovalores são positivos e assim o ponto  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  não é assintoticamente estável. Um resultado mais interessante é obtido ao considerar o caso em que apenas um jogador utiliza uma estratégia diferente do restante da população.

**Proposição 3.** *Seja  $\mathbf{y}$  um perfil de estratégia pura em que apenas um jogador utiliza uma estratégia diferente do restante da população, então  $\mathbf{y}$  não é um ponto assintoticamente estável para o caso de jogarem com uma matriz de coexistência.*

*Demonstração.* A prova dessa proposição será dividida em dois casos. O primeiro dele será considerar o jogador central com a estratégia diferente e no segundo um jogador periférico.

**Caso 1** (Jogador central com estratégia diferente)

Sabemos que para o caso de estratégia pura, o jacobiano será uma matriz diagonal. Nesse caso analisaremos a entrada  $J_{i,i}$  da matriz jacobiana onde  $i \neq 1$ .

i) Jogador central utiliza a estratégia  $R$ .



Nesse caso analisaremos a entrada  $J_{i,i}$  da matriz jacobiana onde  $i \neq 1$

$$J_{i,i} = (1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 1) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \cdot 2 - \sigma_2 \right] = - \left( \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \right) = - \left( \frac{-a}{3} \right) = \frac{a}{3}$$

como  $a > 0$  então  $\frac{a}{3} > 0$ , o que implica em um autovalor positivo e portanto a não estabilidade assintótica.

ii) Jogador central utiliza estratégia  $Y$ .

Nesse caso analisaremos novamente a entrada  $J_{i,i}$  da matriz jacobiana, onde  $i \neq 1$ .

$$J_{i,i} = (1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 0) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \cdot 1 - \sigma_2 \right] = \left( \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2}{3} \right) = \left( \frac{-a + 2a}{3} \right) = \frac{a}{3}$$

como  $a > 0$ , então  $\frac{a}{3} > 0$ , o que implica em um autovalor positivo e portanto a não estabilidade assintótica.

**Caso 2** (Jogador periférico com estratégia diferente)

i) Um jogador periférico utilizando a estratégia  $R$ .

Nesse caso, iremos analisar um jogador periférico que utiliza a estratégia  $Y$ , conectado com o jogador periférico que utiliza a estratégia  $R$ .

$$J_{i,i} = (1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 1) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \cdot 2 - \sigma_2 \right] = - \left( \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \right) = - \left( \frac{-a}{3} \right) = \frac{a}{3}$$

e do mesmo modo que no caso 1(i),  $\frac{a}{3} > 0$ , logo há um autovalor positivo e assim a não estabilidade assintótica.

ii) Um jogador periférico utilizando a estratégia  $Y$ .

esse caso, iremos analisar um jogador periférico que utiliza a estratégia  $R$ , conectado com o jogador periférico que utiliza a estratégia  $Y$ .

$$J_{i,i} = (1 - 2y_i)\alpha = (1 - 2 \cdot 0) \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \cdot 1 - \sigma_2 \right] = \left( \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2}{3} \right) = \left( \frac{-a + 2a}{3} \right) = \frac{a}{3}$$

assim,  $\frac{a}{3} > 0$ , logo há um autovalor positivo e assim a não estabilidade assintótica.

Portanto, dado um perfil de estratégia pura onde apenas um jogador utiliza uma estratégia diferente do restante dos jogadores, então esse ponto de equilíbrio não será assintoticamente estável.

□

Com esses resultados sabemos que pontos de equilíbrio puro em certas condições não são assintoticamente estáveis, logo vamos analisar numericamente para onde vai a solução do sistema quando as condições iniciais estão perto dos pontos de equilíbrio puro.

### 7.3 Simulações

Nessa seção foi utilizado o auxílio do software SCILAB-6.0.0 para executar os algoritmos que nos permitiu obter algumas noções sobre o comportamento do modelo quando estamos utilizando uma matriz de pagamento de coexistência, para condições iniciais que são perturbações de pontos de equilíbrio puros.

As simulações foram feitas utilizando a seguinte matriz de pagamento:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde,  $\sigma_1 = -1 = \sigma_2 < 0$ , caracterizando-se assim como uma matriz de coexistência, o que indica que os jogadores conectados preferem jogar estratégias diferentes.

Considerando o sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{(n-1)}(y_2 + \dots + y_n) - \sigma_2 \right] \\ \dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_3 + y_n) - \sigma_2 \right] \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_{n-1}(1 - y_{n-1}) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_{n-2} + y_n) - \sigma_2 \right] \\ \dot{y}_n = y_n(1 - y_n) \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{3}(y_1 + y_2 + y_{n-1}) - \sigma_2 \right] \end{array} \right.$$

substituindo os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) \left[ -\frac{2}{(n-1)}(y_2 + \dots + y_n) + 1 \right] \\ \dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) \left[ -\frac{2}{3}(y_1 + y_3 + y_n) + 1 \right] \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_{n-1}(1 - y_{n-1}) \left[ -\frac{2}{3}(y_1 + y_{n-2} + y_n) + 1 \right] \\ \dot{y}_n = y_n(1 - y_n) \left[ -\frac{2}{3}(y_1 + y_2 + y_{n-1}) + 1 \right] \end{array} \right.$$

A ideia principal é que a simulação da evolução das estratégias nos ajude a entender o comportamento da escolha estratégica dos jogadores, no contexto dos jogos evolucionários, e que assim possamos conjecturar resultados teóricos sobre o comportamento evolutivo delas na estrutura de estrela fechada.

Iremos mostrar o resultado obtido para o grafo estrela fechada com 6, 7, 8 e 9 jogadores (vértices) e, após, mostraremos os resultados obtidos para as simulações com 10, 50 e 100 jogadores, com o intuito de consolidar as ideias obtidas nos grafos iniciais.

O sistema foi resolvido pelo software computacional aplicando-se o algoritmo para o Método de Runge-Kutta. No geral, os parâmetros utilizados foram: tempo inicial  $t_0 = 0$ , tempo final  $t_f = 50$  e número de passos  $N = 100$ . Caso haja necessidade de novos parâmetros, eles serão explicitados antes dos resultados serem exibidos.

Alguns resultados foram omitidos devido ao fato deles serem similares a algum da tabela. Por exemplo, considerar as condições iniciais  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$  e  $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$  nos conduzirá a estados estacionário “simétricos”, de modo que a condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$  conduzirá ao ponto  $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$  e a condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$  conduzirá ao ponto  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ . Percebe-se que a evolução estratégica foi a mesma. Devido às conexões do grafo, na condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$  o jogador 2 afeta os jogadores 1, 3 e 6, com os quais possui conexão, da mesma maneira que na condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$  o jogador 4 afeta os jogadores 1, 3 e 5, o mesmo ocorre quando se aumenta o número de jogadores.

Considerando-se a estrela fechada com 6 vértices, o quadro abaixo apresenta o estado estacionário obtido dada alguma condição inicial.

Apesar de serem apresentados diversos resultados das simulações, focaremos nos resultados obtidos para as seguintes condições iniciais:

1. Onde apenas o jogador central utiliza estratégia diferente do restante dos jogadores.
2. Apenas um jogador periférico utiliza estratégia diferente do restante dos jogadores.
3. O jogador central e apenas um jogador periférico utilizam estratégias diferentes do restante dos jogadores.

Resultado das simulações para a estrela fechada com  $n = 6$  jogadores (vértices).

| Condição Inicial   | Final                               |
|--|-------------------------------------|
| $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$    |
| $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$                |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 0.5, 0.5, 0)$            |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 0)$                |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0.5, 0.5)$            |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.5, 0.5, 0, 1, 0)$            |

Tabela 7.5: Simulações para 6 jogadores.

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , percebe-se que o jogador central consegue influenciar a distribuição estratégica de todos os jogadores periféricos ao mesmo tempo que consegue preservar a sua. É interessante observar que os jogadores periféricos se estabilizam com uma estratégia mista  $[0.25 \ 0.75]$ , ver figura 7.3.

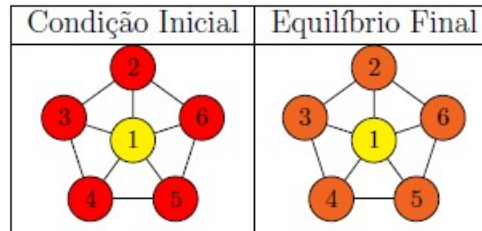


Figura 7.3: Jogo Evolucionário para 6 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , onde apenas um jogador periférico utiliza estratégia diferente, percebe-se que os jogadores 1, 3 e 6 permanecem com suas estratégias enquanto os jogadores 4 e 5 aderem a estratégia do jogador 2, ver figura 7.4.

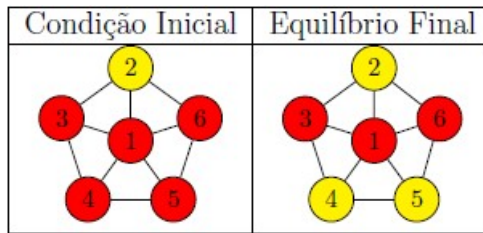


Figura 7.4: Jogo Evolucionário para 6 jogadores com condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , apenas os jogadores 4 e 5 sofrem alterações nas suas estratégias de modo que eles passam a utilizar a estratégia mista  $[0.5 \ 0.5]$ , ver figura 7.5.

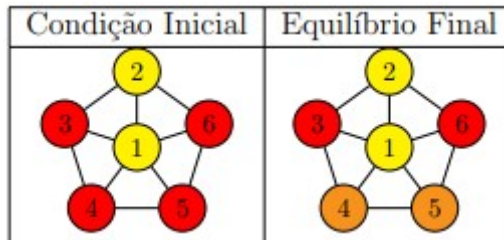


Figura 7.5: Jogo Evolucionário para 6 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Resultado das simulações para a estrela fechada com  $n = 7$  jogadores (vértices).

| Condição Inicial  | Final                                     |
|---|---|
| $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$     |
| $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.12, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                   |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$                   |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                   |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.25, 1, 0.25, 0.25, 1, 0.25, 0.25)$    |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.5, 0.5, 0, 1, 0, 0)$               |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                   |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$                   |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                   |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$                   |

Tabela 7.6: Simulações para 7 jogadores.

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , percebe-se que o jogador central consegue influenciar a distribuição estratégica de todos os jogadores periféricos ao mesmo tempo que consegue preservar a sua. É interessante observar que os jogadores periféricos se estabilizam com uma estratégia mista  $[0.25 \ 0.75]$ , do mesmo modo que ocorreu para 6 jogadores, ver figura 7.6.

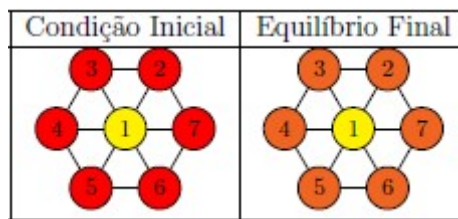


Figura 7.6: Jogo Evolucionário para 7 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorre alteração na distribuição estratégica dos jogadores 1, 4 e 6 de modo que o jogador 1 passa a utilizar a estratégia mista  $[0.12 \ 0.88]$  e os jogadores 4 e 6 passam a utilizar a estratégia 1, ver figura 7.7.

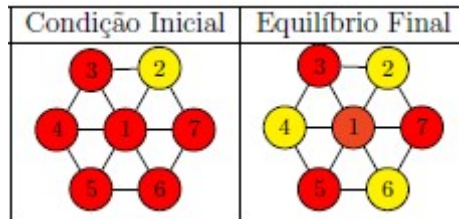


Figura 7.7: Jogo Evolucionário para 7 jogadores com condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorre alteração na distribuição estratégica dos jogadores 4 e 6, de modo que eles passam a utilizar a estratégia 1, ver figura 7.8.

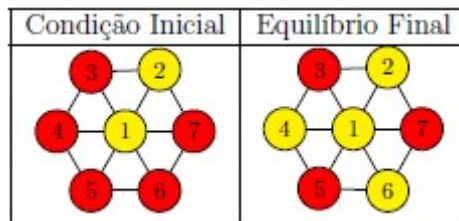


Figura 7.8: Jogo Evolucionário para 7 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .



Resultado das simulações para  $n = 8$  jogadores (vértices).

| Condição Inicial   | Final   |
|--|---|
| $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$      |
| $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0.5, 0.5, 1, 0)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0.5, 0.5, 1, 0, 1, 0)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.5, 0.5, 0, 1, 0, 1, 0)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 0.5, 0.5, 0)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 0.5, 0.5, 1, 0, 1, 0, 1)$                  |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0.5, 0.5)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 0.5, 0.5, 0)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.5, 0.5, 0, 0, 1, 0, 0)$                  |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0.5, 0.5, 1, 0, 1, 0)$                  |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$                      |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 1, 0.5, 0.5)$                  |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |

Tabela 7.7: Simulações para 8 jogadores.

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorre a mesma evolução estratégica dos casos anteriores, ou seja, os jogadores periféricos passam a estratégia mista  $[0.25 \ 0.75]$ , ver figura 7.9.

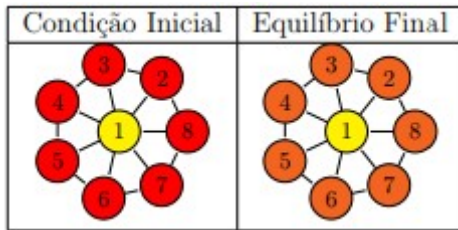


Figura 7.9: Jogo Evolucionário para 8 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorre uma mudança mais significativa no comportamento dos jogadores, onde os jogadores 4, 5, 6 e 7 mudam a sua estratégia, sendo que os jogadores 4 e 7 passam a utilizar a estratégia 1, e os jogadores 5 e 6, a estratégia mista  $[0.5 \ 0.5]$ , ver figura 7.10.

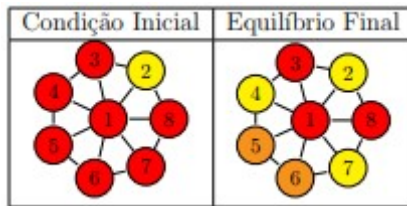


Figura 7.10: Jogo Evolucionário para 8 jogadores com condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorre alteração na distribuição estratégica dos jogadores 4 e 7, de modo que eles passam a utilizar a estratégia 1, ver figura 7.11.

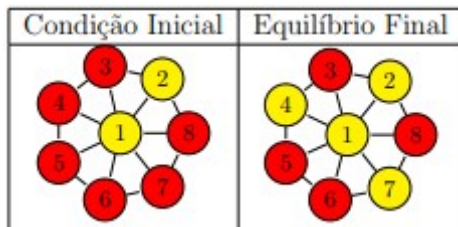


Figura 7.11: Jogo Evolucionário para 8 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Resultado das simulações para  $n = 9$  jogadores (vértices)

Nesse quadro, estão exibidos apenas os resultados com as condições iniciais mais simples devido às diversas combinações possíveis, de modo que o quadro ficaria muito extenso se fossemos listar todas elas.

| Condição Inicial  | Final   |
|---|---|
| $(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$       |
| $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.12, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                         |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 1, 0, 1, 0.5, 0.5, 1, 0)$                     |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                         |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0, 1, 0.5, 0.5, 1, 0, 1, 1, 0)$                     |
| $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(0.08, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                      |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 0.5, 0.5, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$                     |
| $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ | $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$                         |

Tabela 7.8: Simulações para 9 jogadores.

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorre a mesma evolução estratégica dos casos anteriores, ou seja, os jogadores periféricos passam a estratégia mista  $[0.25 \ 0.75]$ , ver figura 7.12.

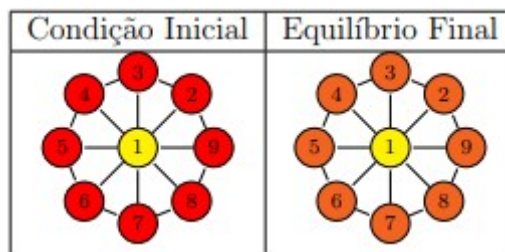


Figura 7.12: Jogo Evolucionário para 9 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorrem alterações na distribuição estratégica dos jogadores 1, 4, 6 e 8, de modo que o jogador 1 passa a utilizar

a estratégia mista  $[0.12 \ 0.88]$ , e os jogadores 4, 6 e 8, passam a utilizar a estratégia 1, ver figura 7.13.

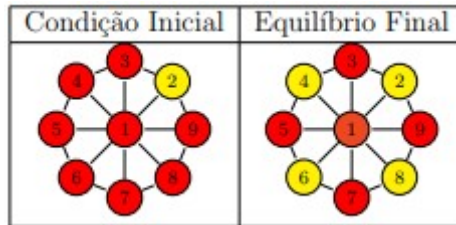


Figura 7.13: Jogo Evolucionário para 9 jogadores com condição inicial  $(\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

Para a condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ , ocorrem alterações na distribuição estratégica dos jogadores 4, 6 e 8, de modo que eles passam a utilizar a estratégia 1, ver figura 7.14.

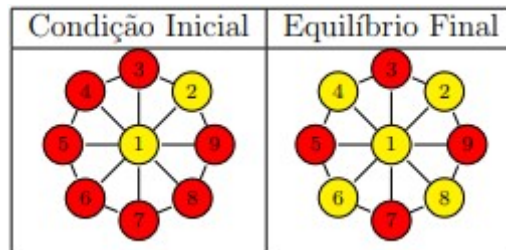


Figura 7.14: Jogo Evolucionário para 9 jogadores com condição inicial  $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0})$ .

A partir das simulações realizadas, podemos generalizar algumas informações que puderam ser observadas. Para a condição inicial em que apenas o jogador central utiliza a estratégia  $Y$ , temos que a evolução estratégica dos jogadores periféricos se dá de modo que todos eles passam a jogar a estratégia mista  $[0.25 \ 0.75]$ , independente da quantidade de jogadores.

Para a condição inicial em que apenas um jogador periférico utiliza a estratégia  $Y$ , temos, que para o caso de haver um número ímpar de jogadores, o jogador central passa a utilizar uma estratégia mista, porém ao aumentar a quantidade de jogadores (considerando uma quantidade ímpar) essa distribuição tende

a estratégia  $R$ . Por exemplo, com 9 jogadores, a distribuição estratégica do jogador 1 é  $[0.12 \ 0.88]$ , e para o jogo com 19 jogadores a sua distribuição estratégica será  $[0.05 \ 0.95]$ , atingindo a distribuição estratégica correspondente a estratégia  $R$ ,  $[0.01 \ 0.99]$ , quando houver 29 jogadores. No caso em que há uma quantidade par de jogadores, temos dois casos, se a quantidade é um múltiplo de 4, como no caso de 8 jogadores, haverá dois jogadores conectados que utilizam a estratégia mista  $[0.5 \ 0.5]$ , e se a quantidade não for um múltiplo de 4, a distribuição estratégica dos jogadores periféricos apresenta uma alternância (jogadores conectados utilizam estratégias diferentes), havendo apenas dois jogadores vizinhos que jogam a mesma estratégia.

Para a condição inicial onde o jogador central e um jogador periférico utiliza a estratégia  $Y$ , temos que, para o caso de haver uma quantidade ímpar de jogadores, ocorre uma alternância entre as distribuições estratégicas dos jogadores periféricos. No caso de haver uma quantidade par de jogadores, novamente há dois casos, para as quantidades múltiplas de 4, ocorre alternância entre as distribuições estratégicas dos jogadores periféricos de modo que apenas dois jogadores periféricos conectados utilizam a estratégia 2. Para os casos em que a quantidade não é um múltiplo de 4, então ocorre alternância da distribuição estratégica dos jogadores periféricos de modo que apenas dois jogadores conectados utilizam a estratégia mista  $[0.5 \ 0.5]$ .

Apesar de haver padrões na evolução estratégica dos jogadores, nenhum dos pontos obtidos nessas simulações foi um ponto de equilíbrio puro ou misto assintoticamente estável. Esse resultado indica que um jogo com essa estrutura de grafo é muito sensível a mudança estratégica de algum jogador na condição inicial, ou seja, condições iniciais diferentes tendem a pontos diferentes.

## 8 CONCLUSÕES

Considerando-se redes arbitrárias de conexões entre os jogadores, nas quais cada jogador possui ao menos um jogador vizinho, o Teorema 4.3 em [1], mostrou que, para o caso de biestabilidade, assumindo que  $sgn(\sigma_1) = sgn(\sigma_2) \neq 0$ , então os pontos puros onde todos os jogadores utilizam a mesma estratégia (todos 0's ou 1's), são assintoticamente estáveis se e somente se  $sgn(\sigma_1) = sgn(\sigma_2) > 0$  e, além disso, provou que esses dois pontos são os únicos pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis possíveis de se obter. Esse estudo permitiu identificar que existem pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis para o modelo matemático que descreve jogos que são representados por um grafo com estrutura de estrela fechada sem *self-edges*, onde todos os jogadores possuem a mesma matriz de pagamento.

Nesse trabalho conseguimos provar que para o grafo estrela fechada os únicos pontos de equilíbrio puro assintoticamente estável, no caso de biestabilidade, foram aqueles que todos os jogadores utilizam a mesma estratégia (todos 0's ou 1's), que aponta conformidade com o teorema 4.3 em [1] e, além disso, foi provado que qualquer combinação de 0's e 1's resulta na não estabilidade do ponto. Para o caso da biestabilidade também verificamos que, se houver um jogador mutante na população, a estratégia utilizada por ele será dominada pelo restante dos indivíduos, mas que ao aumentar a quantidade de jogadores mutantes até a metade ou metade mais um, dependendo do tamanho da população e se o jogador central é ou não um mutante, eles podem dominar os indivíduos da população.

Nas situações em que os jogadores jogam com matriz de coexistência, provamos que os pontos de equilíbrio puro em que todos os jogadores utilizam a mesma estratégia ou nos quais apenas um jogador utiliza uma estratégia diferente não são assintoticamente estáveis e, além disso, percebemos que o comportamento da evolução estratégica de cada jogador varia de acordo com algumas condições,

como por exemplo, a quantidade de jogadores ser um número ímpar, ou quantidade de jogadores ser um número par, ou ser um múltiplo de 4. Essas foram algumas características observadas, a partir dos resultados das simulações. Desse modo, podemos dizer que as simulações nos levaram a entender o comportamento da evolução estratégica no grafo, e percebemos também algumas características que influenciam essa evolução, como, por exemplo, a estratégia utilizada pelo jogador central, a quantidade de jogadores utilizando estratégias diferentes, se o jogador central ou um jogador periférico utiliza estratégia diferente.

Esses resultados nos levam a acreditar que é possível estabelecer conclusões semelhantes a esses, para outras estruturas de grafos, como ciclos ou as estrelas. Desse modo, uma possível continuação desse trabalho, seria tentar extrair mais informações sobre a estabilidade assintótica para o jogo jogado com uma matriz de coexistência, além de tentar estender o modelo para um jogo de 3 estratégias, bem como estudar outras estruturas de grafos. Uma outra opção interessante seria a utilização do modelo de jogo WS, em que as conexões entre os jogadores podem ter pesos diferentes, e comparar com os resultados obtidos para o modelo de jogo WA utilizado nesse estudo.

Outro estudo interessante que pode ser feito é sobre o comportamento da dinâmica de replicação em uma rede completamente conectada quando se faz remoções sucessivas de diferentes *links* de um vértice, analisando também o comportamento assintótico da solução. Como pode ser visto, ainda há muito a ser explorado sobre jogos evolucionários, e esse estudo apresentou apenas um modelo dentre diversos outros que podem ser estudados de modo que se possa obter mais resultados referente à teoria jogos evolucionários.

## Referências Bibliográficas

- [1] Abreu, V. “Jogos Evolucionários sobre Grafos Bipartidos Completos e Estrelas Duplas. Dissertação”, (Mestrado em Matemática Aplicada), Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2018
- [2] Banerjee, A. et al. “Gossip: Identifying Central Individuals in a Social Network”, arXiv:1406.2293v3.
- [3] Barrat, A., Barthelemy, M. e Vespignani, A. *Dynamical processes on complex networks*. Camb. Univ. Press, 2008.
- [4] Boccaletti, S. et al. *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics reports, is 4, vol. 424, pp. 175-308, 2006.
- [5] D’Orsogna, M. e Perc, M. “Statistical physics of crime: A review”, *Phys. Life Rev.*, vol. 12, pp. 1–21, 2015.
- [6] Dugundji, J. *Topology. 1ª edição*. Boston: Allyn and Bacon, 1965.
- [7] Ehrhardt, G. , Marsili, M. and Vega-Redondo, F. “Diffusion and growth in an evolving network.” *Int. J. of Game Theory*, is. 3, vol. 334, pp. 383–397, 2006.
- [8] Hofbauer, J. and Sigmund, K. “Evolutionary game dynamics”, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 40, no. 4, pp. 479-519, 2013.
- [9] Hofbauer, J. and Sigmund, K. “Evolutionary games and population dynamics”, Cambridge University Press, 1998.
- [10] Kang, W. *What Is A Non-Cooperative Game? Nash Equilibrium as the Prediction of a Game Interactive Games Non-Cooperative Game Theory*. Harvard Scholar.



- [11] Kozma, B. and Barrat, A. “Consensus formation on adaptive networks”, *Physical Review E*, vol.77, p. 016102, 2008.
- [12] Madeo, D. and Mocenni, C. , “Game Interactions and dynamics on networked populations”, *IEEE Trans. on Autom. Control*, is. 7, vol. 60, pp. 1801–1810, 2015.
- [13] Madeo, D. and Mocenni, C. , “A New Mathematical Model for Evolutionary Games on Finite Networks of Players”, arxiv: 1307. 1670V1, 2013.
- [14] Madeo, D., Mocenni, C., Moraes, J.C. and Zubelli, J. “Central Players Connectivity in Evolutionary Games on Graphs”, *IEEE Trans. on Autom. Control*, submitted.
- [15] Nash, John F. *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1950
- [16] Newman, M. *Network: An introduction*, Oxf. Univ. Press, Inc. New York, 2010.
- [17] Nowak, M. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Harvard, MA: Belknap Press of Harvard Univ. Press, 2006.
- [18] Olfati-Saber, R., Fax, A. and Murray, R. “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems”, *Proc. of the IEEE*, is. 1, vol 95, 215–233, 2007.
- [19] Ren, W. and Beard, R. “Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies”, *IEEE Trans. Autom. Control*, is. 5, vol. 50, pp. 655–661, 2005.
- [20] Sartini,B. et al. “Uma Introdução à Teoria dos Jogos.” *II Bienal da SBM*, Universidade Federal da Bahia, pp. 1–62, 2004.

- [21] Tang, C., Wang, Y., Cao, L., Li, X. e Yang, Y. “Towards the role of social connectivity and aspiration level on evolutionary game”, *EPJ B*, 86: 26, 2013.
- [22] Traulsen, A., Santos, F. C. e Pacheco, J.M. *Evolutionary Games in Self-Organizing Populations*, in: Adaptive networks, G. Thilo, and H. Sayama, Springer Berlin Heidelberg, Germany, 2009.
- [23] Zanette, D. e Gil, S. “Opinion spreading and agent segregation on evolving networks.” *Physica D: Nonl. Phen.*, is. 1, vol. 224, pp. 156–165, 2006.
- [24] Weibull, J. *Evolutionary Game Theory*. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.
- [25] Taylor, P. and Jonker, L. “Evolutionary stable strategies and game dynamics,” *Math. Biosci.*, vol. 40, pp. 145–156, 1978.
- [26] Taylor, P. “Evolutionarily stable strategies with two types of player,” *J. Appl. Prob.*, vol. 16, no. 1, pp. 76–83, 1979.