

P E S Q U I S A M I N E R A L

A P O S T I L A I

E. F. GAVRONSKI

PESQUISA MINERAL
ELABORAÇÃO DOS DADOS DE AMOSTRAGEM
(APOSTILA - PROF.: E. F. GAVRONSKI - 1990)

ÍNDICE

ASSUNTO	PÁG.
1. OBJETIVOS E CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS DE AMOSTRAGEM	001
2. MÉTODOS ANTIGOS PARA COMPUTAR RESULTADOS DE AMOSTRAGEM ...	003
2.1 Fórmulas de TRUSCOTT e outras expressões equivalentes.....	003
- Exemplo nº 01 - Avaliação na face, de um afloramento de minério de cobre	014
2.2 Restrições quanto a aplicabilidade dos critérios mineiros clássicos, quando ocorrem valores muito altos erráticos, com disparidades	015
2.3 Procedimentos práticos rotineiramente adotados em Geologia de Minas, quando ocorrem valores dispares	018
- Exemplo nº 02 - Avaliação dos resultados, na amostragem de canal para ouro e cobre, numa trincheira de pesquisa	020
2.4 Procedimentos práticos usados para extrapolação para o interior do corpo de minério, dos resultados obtidos na amostragem na face	025
- Exemplo nº 03 - Estimacão da reserva de um bloco, na pesquisa de acompanhamento da lavra, numa mina de minério de cobre	028
3. MÉTODOS GEOMÉTRICOS PARA CUBAR CORPOS DE MINÉRIO	031
3.1 Métodos geométricos e métodos analíticos - conceituação ..	031
3.2 Cubagem mediante levantamento de secções transversais e de perfís longitudinais	032
- Exemplo nº 04 - Cubagem de um bloco de minério de cobre, delimitado por secções Transversais, numa pesquisa preliminar, aplicando os critérios das fórmulas de Truscott	036

- Exemplo nº 05 - Cubagem mediante levantamento de perfil longitudinal numa pesquisa preliminar	042
- Outras fórmulas para se calcular volumes	047
- Fórmulas das Áreas Extremas	047
- Fórmula Prismoidal	047
- Fórmula do Prismóide ou Prismatóide	048
- Exemplo nº 06 - Cubagens mediante secções transversais, mediante os critérios das fórmulas de Truscott, mediante a fórmula das ÁREAS EXTREMAS e mediante a fórmula do PRISMÓIDE	049
- Exemplo nº 07 - Cubagem de uma bancada na preparação para desmonte a céu aberto, aplicando as fórmulas PRISMÓIDAL e do PRISMÓIDE	053
3.3 Cubagens mediante parcelamento do corpo de minério em blocos prismáticos, cujas bases são delimitadas na planta de uma malha de pesquisa	056
- Exemplo nº 08 - Cubagem mediante delimitação de blocos prismáticos, com bases triangulares, numa malha de pesquisa irregular de sondagens	058
3.4 Critérios geométricos de cubagem através de delimitação de áreas de influências dos pontos sondados, estabelecidos conforme condições específicas locais	061
3.5 Métodos e procedimentos de cubagem mediante traçado de curvas de contorno estrutural (isópacas, isóbatas e isocoberturas)	063
- Exemplo nº 09 - Cubagem na preparação para lavra a céu aberto, numa jazida de carvão	064
- Exemplo nº 10 - Cubagem objetivando instalação de pedreira para produção de pedra britada	068
3.6 Cubagem mediante traçado de curvas de contorno de isoteores	073
4. PRINCÍPIOS DE INTERPRETAÇÃO DOS DADOS DE AMOSTRAGEM COM CRITÉRIOS DE ESTATÍSTICA CLÁSSICA	076
4.1 Aleatoriedade nos processos de amostragem e dos dados obtidos	076

4.2	Procedimentos de amostragem usados em Pesquisa Mineral ...	079
4.3	Fundamentos da análise estatística clássica aplicada na Pesquisa Mineral	082
-	Conceitos fundamentais	082
-	Histogramas e curvas de frequências	083
-	Tipos e parâmetros dos modelos de distribuição de frequências	085
4.3.1	Distribuição NORMAL ou GAUSSIANA	091
4.3.1.1	Conceituação e principais parâmetros	091
4.3.1.2	Distribuição de frequência ACUMULADA (ou ACUMULATIVA) da distribuição NORMAL	094
4.3.2	Distribuição LOGNORMAL	097
4.3.2.1	Conceito e objetivos de sua utilização	097
4.3.2.2	Estimadores do parâmetro de tendência central da distribuição LOGNORMAL.....	099
4.3.2.2.1	Média geométrica	099
4.3.2.2.2	Estimador "t" de SICHEL	100
-	Exemplo nº 11 - Aplicação da média geométrica e do estimador "t" de SICHEL, utilizando os dados do Exemplo nº 02 (do Quadro nº 02 à página 21)	103
-	Exemplo nº 12 - Aplicação do estimador "t" SICHEL adicionando uma constante ($\pm \alpha$) para ajustamento dos dados ao modelo de distribuição LOGNORMAL	109
4.3.2.3	Estimadores dos parâmetros de dispersão do modelo de distribuição LOGNORMAL	110
4.3.2.4	Distribuição ACUMULATIVA do modelo de distribuição LOGNORMAL	112
-	Exemplo nº 13 - Interpretação da amostragem de uma prospecção geoquímica, utilizando o modelo de distribuição LOGNORMAL	113
4.4	Utilização em Pesquisa Mineral, dos principais parâmetros da Estatística Clássica	127
4.4.1	Utilização dos estimadores do parâmetro de tendência central (revisão)	127

4.4.2	MÉDIA ARITMÉTICA	127
4.4.3	MÉDIA GEOMÉTRICA	127
4.4.4	MEDIANA	128
4.4.5	Estimador t de SICHEL	128
4.4.6	MODA	129
4.4.7	"RANGE"	129
4.4.8	DESVIO PADRÃO e VARIÂNCIA aritméticos	129
4.4.9	Relação entre os volumes dos incrementos amostrados e a VARIÂNCIA (σ^2) da população resultante	130
4.4.10	DESVIO PADRÃO e VARIÂNCIA aritméticos dos logaritmos dos valores x_i , DESVIO PADRÃO (σ_g) e VARIÂNCIA geométricos	130
4.4.11	ERRO PADRÃO (σ_x) da média aritmética (\bar{x}), e INTERVALO DE CONFIDÊNCIA (IC)	131
	- Exemplo n° 14 - Intervalo de Confidência de uma mediação (mediante média aritmética)	133
	- Exemplo n° 15 - Intervalos de Confidência dos resultados médios para cobre e ouro, calculados a partir dos dados do Exemplo n° 02 à página 20	134
	- Exemplo n° 16 - Intervalos de Confidência dos resultados médios para cobre, calculados no Exemplo n° 05 à página 42	136
4.4.12	LIMITES INFERIOR E SUPERIOR de confidência para o modelo de distribuição LOGNORMAL	137
	- Exemplo n° 17 - Estimação dos limites inferior e superior de confidência de mediação com a média geométrica, utilizando os dados do Exemplo n° 11 à página 103, e do Quadro n° 02 à página 21	139
	- Exemplo n° 18 - Estimação dos limites de confidência inferior e superior de mediação, com o estimador t SICHEL, utilizando os dados do Exemplo n° 11 à página 103, dos Quadros n° 02 à página 21 e n° 12 à página 104	141
4.4.13	Problema da estimaação do número N de amostras que são necessárias nas avaliações em Pesquisa Mineral ..	143

- Exemplo nº 19 - Estimativa do número de amostras que seriam compatíveis com avaliações a nível de reserva medida, utilizando os dados do Exemplo nº 02 à página 20	144
- Exemplo nº 20 - Estimação do número de amostras que seriam necessárias para avaliação à nível de reserva medida, utilizando os dados do Exemplo nº 05 à página 42	146
4.4.14 COEFICIENTE DE VARIAÇÃO V	147
- Exemplo nº 21 - Coeficiente de Variação V estimado a partir dos dados do Exemplo nº 02 à página 20	151
4.4.15 Estimação do adensamento da malha de pesquisa, adequado as características de variabilidade do depósito pesquisado	155
- Exemplo nº 22 - Estimação do espaçamento adequado de uma malha de sondagem num jazimento típico de carvão, com base no coeficiente de variação V (estimado)	158
- Exemplo nº 23 - Estimação do espaçamento adequado de intersecções produzidas por sondagens, num jazimento filoneano de cobre, com base no coeficiente de variação V estimado	159
- Exemplo nº 24 - Estimação de espaçamentos adequados de amostragem, utilizando os dados do Exemplo nº 02 à página 20	161
- Exemplo nº 25 - Estimação de espaçamentos adequados de malha de sondagem, utilizando os dados do Exemplo nº 05 à página 42	162
4.5 Outros conceitos e parâmetros da Estatística Clássica utilizados em Pesquisa Mineral e EQUAÇÃO DE KRIGE	165
4.5.1 Variáveis aleatórias INDEPENDENTES e DEPENDENTES e, DIAGRAMAS DE CORRELAÇÃO	165
4.5.2 COVARIÂNCIA entre duas variáveis aleatórias e COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	168
- Exemplo nº 26 - Cálculo do coeficiente de correlação utilizando os dados do Exemplo nº 02 à página 20	169

- Procedimento gráfico para calcular COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	174
- Exemplo n ^o 27 - Cálculo de coeficiente de correlação de uma amostragem geoquímica, utilizando os dados do Exemplo n ^o 13 à página 113, e com base em procedimento gráfico de interpretação	175
4.5.3 Expressões matemáticas para computar VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS, e EQUAÇÃO DE KRIGE	176
- Equação de Krige	178
5. MÉTODOS ANALÍTICOS PARA CUBAR CORPOS DE MINÉRIO E FUNDAMENTOS DE GEOESTATÍSTICA	181
5.1 Generalidades com respeito aos métodos analíticos	181
5.2 Simulação das características dos corpos de minério nas memórias dos computadores, e metodologia geral de cubagem mediante métodos analíticos	183
5.3 Método DOS INVERSOS EXPOENTES DAS DISTÂNCIAS e método DOS INVERSOS QUADRADOS	187
5.3.1 Fundamentos do método	187
5.3.2 Método dos INVERSOS QUADRADOS	189
- Exemplo n ^o 28 - Estimativa do teor de um bloco elementar mediante o método dos INVERSOS QUADRADOS ...	190
5.3.3 Significado do expoente m na ponderação pelos inversos das distâncias	193
5.3.4 Procedimentos para pesquisar o expoente m que mais se ajuste as características do jazimento pesquisado	194
5.4 Noções de GEOESTATÍSTICA e método GEOESTATÍSTICO	196
5.4.1 Variáveis REGIONALIZADAS E VARIOGRAMA	197
- VARIOGRAMA ou SEMIVARIOGRAMA	197
5.4.2 Propriedades dos VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS	203
- ÁREA ou ZONA DE INFLUÊNCIA de uma amostra	204
- TENDÊNCIAS ou "TRENDS" relacionadas com as direções dos jazimentos	205
5.4.3 Funções INTRINSECAS das variáveis dos depósitos e modelos matemáticos de VARIOGRAMAS	205
- Modelo LINEAR RETILÍNEO	206

- Modelo LOGARÍTIMO ou modelo WIJSIAN	207
- Modelo ESFÉRICO ou modelo de MATHERON	207
- Origem do modelo ESFÉRICO	210
- Outros modelos de VARIOGRAMA	211
5.4.4 Qualidade da estimação de uma característica dos blocos elementares	212
5.4.5 Fundamentos do método geoestatístico de KRIGEAGEM (ou KRIGAGEM)	215
- Exemplo n ^o 29 - Estimativa do teor de um bloco elementar, mediante o método de KRIGEAGEM, utilizando os mesmos dados do Exemplo n ^o 28 à página 190	220

PESQUISA MINERAL - ELABORAÇÃO DOS DADOS DE AMOSTRAGEM
Apostila de conteúdos ministrados na disciplina
ENG - 518 I-A da UFRGS na década de 1980
PROF. E. F. GAVRONSKI - 1990

1 - OBJETIVOS E CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE INTERPRETAÇÃO
DOS RESULTADOS DE AMOSTRAGENS.

Nas pesquisas para avaliação dos corpos de minério, os dados obtidos com a amostragem, consistem principalmente dos resultados das análises das amostras. Esses resultados expressam conteúdos de substância útil ou indesejável, na amostra (sob a forma de elemento ou composto químico), os quais chamamos **teores**. Subsidiariamente, consistem também de medidas de outros atributos interessantes das amostras, como sejam espessuras, peso específico, e também dados de localização (compreendendo os intervalos entre os pontos amostrados). Obtidos os resultados das análises das amostras (de canais, de testemunhos de sondagem, etc.), o problema que segue é o de computá-los de modo a concluir-se com respeito à valores estimados médios, expressando as medidas das qualidades e quantidades representativas, para partes definidas, mais ou menos abrangentes, do depósito mineral.

Serão representativos, por exemplo, para uma face ou seção amostrada, ou para uma porção idealmente delimitada que chamamos um "bloco de minério". Novas computações desses resultados parciais, conduzirão à resultados mais abrangentes, representativos para maiores parcelas do jazimento. Computações sucessivas, cada vez mais abrangentes, levarão a avaliação da reserva do depósito, (na sua totalidade, ou de suas partes).

De modo geral os procedimentos são baseados em raciocínio indutivo, interpolando-se e extrapolando-se resultados, com base em evidência geológica e aplicação de critérios matemáticos.

Os métodos de interpretação foram desenvolvidos através da história da Engenharia de Minas e continuam à serem aperfeiçoados. São utilizadas técnicas simples tradicionais e também técnicas bastante sofisticadas. Essa técnicas podem ser agrupadas nas seguintes metodologias:

- a) Métodos antigos (clássicos) baseados em modelos geométricos, e utilizando procedimentos estatísticos simples (médias aritméticas ponderadas, principalmente).

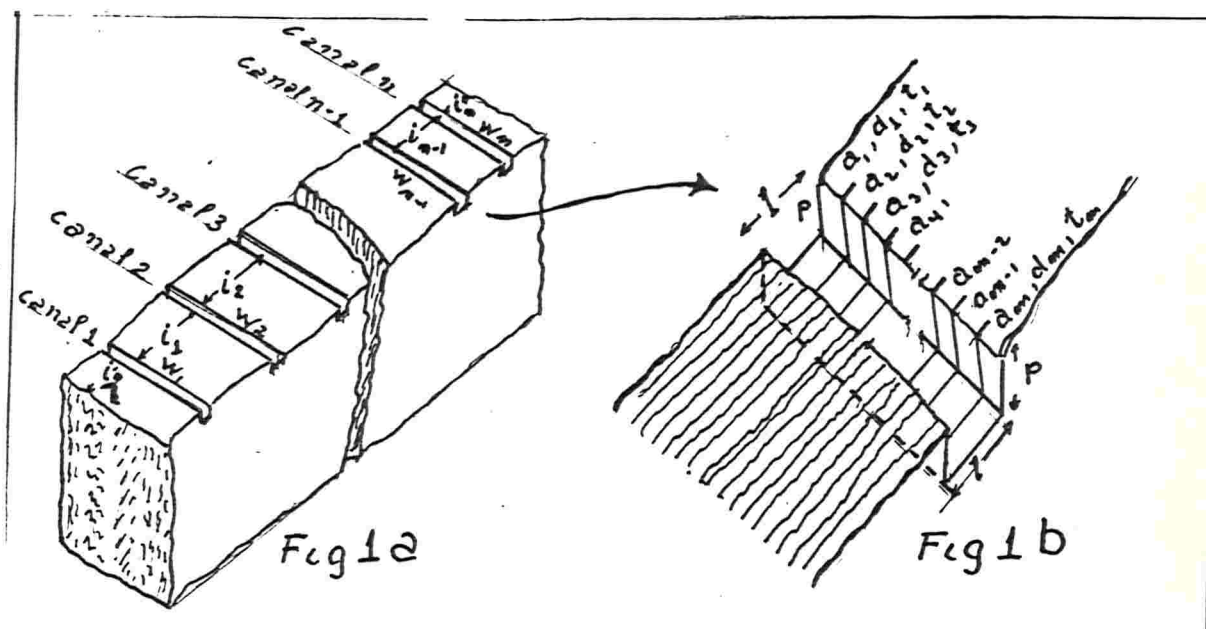
- b) Métodos de computação baseados em análises de matemática estatística clássica, tratando atributos do jazimento, como se fossem variáveis aleatórias amostradas.
- c) Métodos geoestatísticos, baseados na moderna teoria das variáveis regionalizadas, considerando-se as variâncias e as covariâncias dos atributos das amostras, com relação das localizações espaciais dos pontos amostrados no jazimento.

Os primeiros foram desenvolvidos empiricamente na prática da mineração, tendo sido posteriormente sistematizados em publicações do século atual até a década de 1930. Persistem sendo os mais utilizados nas rotinas da pesquisa de acompanhamento da lavra, nos projetos simples de pesquisa mineral, e ainda nas fases iniciais dos projetos mais complexos. Os segundos, desenvolvidos principalmente nas décadas de 1950 e 1960, resultaram da sistematização dos métodos antigos, quando aperfeiçoados mediante aplicação de análises de matemática estatística. São aplicados simultaneamente com os métodos antigos, em problemas como por exemplo de avaliação de minérios de baixos teores, (como os de jazimento auríferos), cujas condições de variabilidade requerem análises probabilísticas mais elaboradas. Os métodos geoestatísticos consistem em aplicação de análises estatísticas especificamente desenvolvidas, a partir da década de 1960, para avaliação dos depósitos minerais. A sistematização com esse nome, deveu-se primeiramente ao pesquisador G. Matheron da Ecole des Mines de Paris, o qual baseou-se em estudos anteriores de D. G. Krige (da África do Sul), de H. J. de Wijs e outros. De certo modo foram conseqüentes das facilidades advindas do uso de computadores para os cálculos, e das necessidades dos grandes e modernos projetos de mineração, no que diz respeito à maiores precisões nas avaliações das reservas. A geoestatística auxilia no estabelecimento de malhas adequadas de pesquisa, nas primeiras fases dos projetos; também é considerada indispensável para as conclusões definitivas de avaliação na maioria dos grandes projetos e ainda, para a informatização dos procedimentos de lavra. Não existe delimitação perfeita entre essas três metodologias, servindo a presente classificação, somente como forma de ordenar, neste texto, a exposição das técnicas de computação dos dados de amostragem.

2 - MÉTODOS ANTIGOS PARA COMPUTAR RESULTADOS DE AMOSTRAGENS.

2.1 - Fórmulas de Truscott e outras expressões equivalentes.

Ainda que na literatura técnica da mineração do fim do século XIX, hajam referências à procedimentos matemáticos estatísticos para elaborar resultados de amostragem, as primeiras publicações referindo-se especificamente ao assunto, datam das décadas de 1920 e 1930. Referem-se principalmente aos métodos utilizados na pesquisa de minérios metálicos. São das publicações referidas S. J. Truscott - Mine Economics, 1937, (principalmente), e McKinstry, H. E. - Mining Geology 1948, a teoria que se segue.



A figura 1a representa uma face exposta de um corpo de minério, amostrada mediante canais, de nºs 1 à n, cortados transversalmente a estrutura bandeada da mineralização.

A figura 1b, representa em detalhe, as posições das amostras colhidas ao longo de um canal.

w_1, w_2, \dots, w_n - São os comprimentos dos canais de nºs 1 à n, ou sejam as espessuras amostradas na face.

l - A largura (considerada uniforme) de cada canal.

p - A profundidade (considerada uniforme) de cada canal.

a_1, a_2, \dots, a_m - Os comprimentos em um canal, correspondentes as "m" amostras tomadas em sequencia e ao longo do mesmo canal.

q_1, q_2, \dots, q_n - Os pesos (quantidades) de material colhido, na amostragem de cada canal de nos 1 à n.

d_1, d_2, \dots, d_m - Os pesos específicos (ou densidades) do material colhido em cada amostra de nos 1 à m (em um canal).

D_1, D_2, \dots, D_n - Os pesos específicos médios do material colhido em cada um canal de nos 1 à n.

Tem-se então:

$$q_1 = p.l.W_1.D_1 = p.l.a_1.d_1 + p.l.a_2.d_2 + \dots + p.l.a_m.d_m = \\ = \sum_{,}^m a_m.d_m.p.l$$

$$p.l = \text{constante} \quad p.l.W_1.D_1 = p.l. \sum_{,}^m a_m.d_m$$

$$\text{ou} \quad D_1 = \frac{\sum_{,}^m a_m.d_m}{W_1} \quad \text{Expressão (1)}$$

Sendo:

t_1, t_2, \dots, t_m - Os teores em substância útil (ou metal útil) de cada uma das "m" amostras de um canal.

T_1, T_2, \dots, T_n - As médias dos teores em uma substância útil (ou metal útil), das amostras colhidas em cada um dos canais de nos 1 a n.

q_{n1} = O peso de substância útil (ou metal útil) contido no material colhido, em cada amostra de um canal (para o canal $n=1$).

Tem-se:

$$q_{n1} = p.l.W_1.D_1.T_1 = p.l.a_1.t_1.d_1 + p.l.a_2.t_2.d_2 + \dots \\ \dots + p.l.a_m.t_m.d_m$$

$$q_{n1} = p.l \sum_{,}^m a_m.t_m.d_m;$$

então:

$$T_1 = \frac{q_{i1}}{q_1} = \frac{p.l \sum_{i=1}^m am.t_m.dm}{p.l \sum_{i=1}^m am.dm}$$

ou

$$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^m am.t_m.dm}{\sum_{i=1}^m am.dm} \quad \text{Expressão (2a)}$$

também:

$$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^m am.t_m.dm}{W_1.D_1} \quad \text{(Expressão (2b))}$$

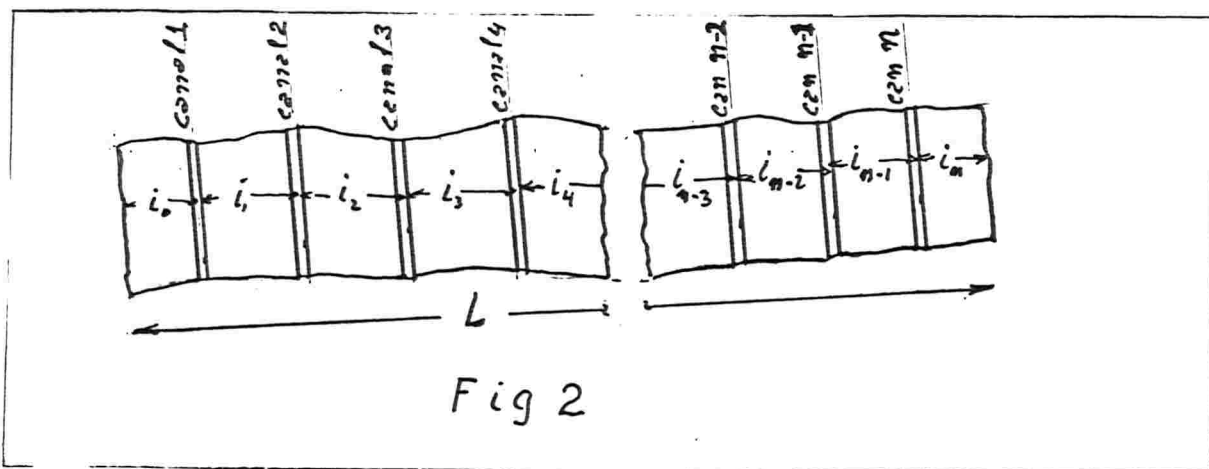
(2a) e (2b) servem para estimar o teor médio em um canal, a partir dos comprimentos am , dos pesos específicos dm e dos teores tm analisados, das amostras colhidas ao longo do canal.

Sendo considerados praticamente iguais os pesos específicos dm , (2a) e (2b) simplificam-se para:

$$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^m am.t_m}{W_1} \quad \text{Expressão (2c)}$$

Para se estimar o teor T_f e a espessura W_f médios para a face amostrada do corpo de minério, geralmente adota-se o critério de extrapolação, chamado "REGRA DA MEIA DISTÂNCIA" (RMD).

Segundo esse critério admite-se (arbitrariamente) que o teor e a espessura de cada um dos canais amostrados, possam ser extrapolados na face, até a metade das distâncias ou dos intervalos "i" que os separam dos canais vizinhos, como mostra a figura 2.



Adotando-se esse critério, (RMD):

qf - A quantidade ou peso de material supostamente existente na face amostrada (considerada plana), até a profundidade "p" (uniforme) dos canais;

$i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n$ - os intervalos separando os canais, (ver figura 2);

tem-se-à:

$$qf = W_1.p.D_1.\frac{i_0}{2} + W_1.p.D_1.\frac{i_1}{2} + W_2.p.D_2.\frac{i_1}{2} + W_2.p.D_2.\frac{i_2}{2} + W_3.p.D_3.\frac{i_2}{2} + \dots + W_n.p.D_n.\frac{i_{n-1}}{2} + W_n.p.D_n.\frac{i_n}{2}$$

ou

$$qf = \frac{W_1}{2}.p.D_1.(i_0 + i_1) + \frac{W_2}{2}.p.D_2.(i_1 + i_2) + \dots + \dots + \frac{W_n}{2}.p.D_n.(i_{n-1} + i_n)$$

e também

$$qf = \sum_1^n \frac{W_n.(i_{n-1} + i_n)}{2}.p.D_n;$$

sendo D a média aritmetica dos pesos específicos D_1, D_2, \dots, D_n .

$$qf = p.D. \sum_1^n \frac{(i_{n-1} + i_n)}{2}$$

Com os mesmos critérios, chamando-se q_{uf} , o peso da substância útil (ou metal), supostamente existente na face amostrada, até a profundidade "p";

tem-se:

$$q_{uf} = T_1.W_1.p.D.\frac{i_0}{2} + T_1.W_1.p.D.\frac{i_1}{2} + T_2.W_2.p.D.\frac{i_1}{2} +$$

$$+ T_2.W_2.p.D. \frac{i_2}{2} + \dots + T_n.W_n.p.D. \frac{i_n}{2}$$

Então:

$$T_f = \frac{q_{uf}}{q_f} ; \text{ substituindo-se chega-se à:}$$

$$T_f = \frac{\sum_1^n W_n.T_n. \frac{i_{n-1} + i_n}{2}}{\sum_1^n W_n. \frac{i_{n-1} + i_n}{2}} \quad \text{Expressão (3a)}$$

Chamando-se $In = \frac{i_{n-1} + i_n}{2}$, os intervalos de influência, nos quais de acordo com a **regra da meia distância**, se extapolou os valores obtidos, na amostragem de cada canal, tem-se:

$$T_f = \frac{\sum_1^n W_n.T_n.In}{\sum_1^n W_n.In} \quad \text{Expressão (3b)}$$

T_f é uma média aritmetica dos teores nos canais, ponderada pelos respectivos comprimentos e intervalos de influência;

No caso em que os intervalos In sejam uniformes tem-se:

$$T_f = \frac{\sum_1^n W_n.T_n}{\sum_1^n W_n} \quad \text{Expressão (3c)}$$

(3a), (3b) e (3c) são as fórmulas rotineiramente utilizadas para se obter a estimativa do teor médio na **face** amostrada. Essas expressões são apresentadas em Mc Kinsty - Mining Geology 1948, sob a forma equivalente;

$$T_f = \frac{\sum (\text{espessura} \times \text{análise} \times \text{intervalo})}{\sum (\text{espessura} \times \text{intervalo})}$$

Observe-se que considerando-se os valores diferentes D_1, D_2, \dots, D_n dos pesos específicos do material colhido em cada face (em lugar de seu valor médio D), se deduziria com os mesmos critérios:

$$T_f = \frac{\sum^n W_n \cdot T_n \cdot D_n \cdot \frac{i_{n-1} + i_n}{2}}{\sum^n W_n \cdot D_n \cdot \frac{i_{n-1} + i_n}{2}} \quad \text{Expressão (3d)}$$

Quando as separações " i_n " e as espessuras " W_n " dos canais forem uniformes, da expressão (3a), resultaria:

$$T_f = \frac{\sum^n W_i \cdot T_n}{\sum^n W_i \cdot n} = \frac{T_n}{n};$$

isto é, simplesmente a média aritmética dos respectivos teores.

Admitindo-se que os intervalos " i_n " entre os canais sejam constantes e variáveis as espessuras " W_n ", a expressão (3a) tornaria-se:

$$T_f = \frac{\sum^n (W_n \cdot T_n)}{\sum^n W_n} \quad \text{Expressão (4)}$$

Parâmetro de medida **Acumulação**.

Nas pesquisas de jazimentos filonianos cuja estrutura mineralizada apresenta espessuras muito variáveis e pequenas, é prática muitas vezes adotada, expressar-se o atributo do enriquecimento nos pontos amostrados, pelos produtos ($W_n T_n$), nos quais W_n é a espessura amostrada. W_n é medida normalmente ao plano do veio mineralizado. Esse parâmetro é denominado **acumulação**, e tem a dimensão (teor \times comprimento linear). No caso de jazimento aurífero a **acumulação** é medida em gramas de ouro por tonelada de minério vezes centímetro ($g/ton \times cm$), ou unidade equivalente, parte por milhão vezes centímetro ($ppm \times cm$). Em unidades do sistema inglês tradicional a **acumulação** é expressa geralmente em "inch penny weight" (inch-DWT). Tendo-se " n " amostras com espessura W_n e teores T_n , se

poderá obter um valor médio, mediante um ensaio de distribuição de frequências F_n dos produtos $W_n T_n$ (acumulação), pela expressão:

Média dos valores da acumulação =

$$= \frac{\sum_1^n (W_n T_n) \cdot F_n}{\sum_1^n F_n} \quad \text{Expressão (5)}$$

Se quisermos o teor do corpo de minério:

$$T = \frac{\sum_1^n (W_n T_n) \cdot F_n}{\sum_1^n W_n \cdot F_n} \quad \text{Expressão (6)}$$

onde W é a espessura média do corpo de minério amostrado.

A expressão (6) corresponde a primeira das expressões, alternativamente recomendadas para ponderar resultados de amostragens, na publicação Thomas, L.J. 1978 referida. Nas figuras 1 e 2, chamando-se "S" a área da face amostrada, e "L" o seu comprimento, tem-se (de acordo com a RMD):

$$S = W_1 \frac{i_0 + i_1}{2} + W_2 \frac{i_1 + i_2}{2} + \dots + W_n \frac{i_{n-1} + i_n}{2} ;$$

ou

$$S = \sum_1^n W_n \frac{i_{n-1} + i_n}{2}$$

também:

$$L = \frac{i_0}{2} + \frac{2 \cdot i_1}{2} + \frac{2 \cdot i_2}{2} + \dots + \frac{2 \cdot i_{n-1}}{2} + \frac{i_n}{2} ;$$

ou

$$L = \sum_1^n \frac{i_{n-1} + i_n}{2}$$

$$W_f = \frac{S}{L} ;$$

então:

$$W_f = \frac{\sum_1^n W_n \frac{i_{n-1} + i_n}{2}}{\sum_1^n \frac{i_{n-1} + i_n}{2}} = \frac{W_n \cdot I_n}{I_n} \quad \text{Expressão (7)}$$

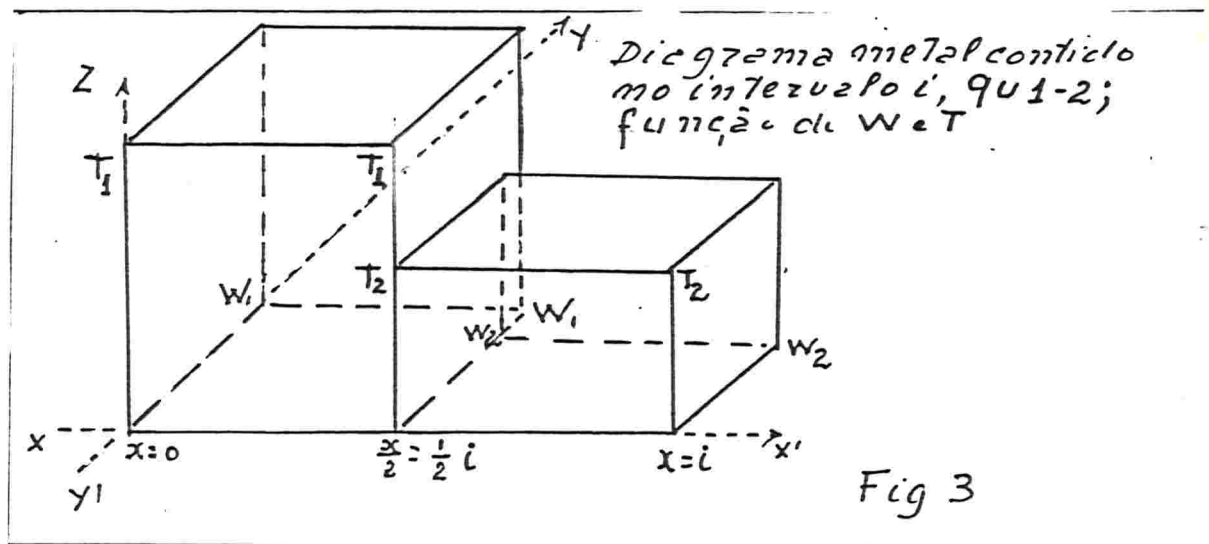
Assim a estimativa da espessura média da **face**, é obtida mediante média aritmetica das espessuras amostradas, ponderada pelos respectivos intervalos de influencia. No caso em que os canais sejam equidistantes; $I_n = \text{constante}$:

$$W_f = \frac{I \sum_1^n W_n}{n \cdot I} = \frac{\sum_1^n W_n}{n} ;$$

isto é simplesmente a média aritmetica das espessuras.

Outro critério de certa forma parecendo mais verossimel para se extrapolar os teores e as espessuras de dois canais vizinhos, para o intervalo entre os mesmos, seria o de considera-los variáveis segundo uma função linear retilínea. Para comparar os resultados obtidos quando se adota a "**regra da meia distância**" e este ultimo critério de variação linear:

a) Segundo critério da (RMD) (conforme figura 3):



Nesse caso o teor médio na face entre os canais 1 e 2 de acordo com a RMD, aplicando-se a expressão (3a), será:

$$T_{f1-2} = \frac{W_1.T_1 + W_2.T_2}{W_1 + W_2} \quad \text{expressão (8)}$$

A expressão (8) poderá ser deduzida diretamente da figura 3:

$$q_{1-2} = p.D. \left(\frac{i}{2} . W_1 + \frac{i}{2} . W_2 \right) = p.D.i. \frac{W_1 + W_2}{2};$$

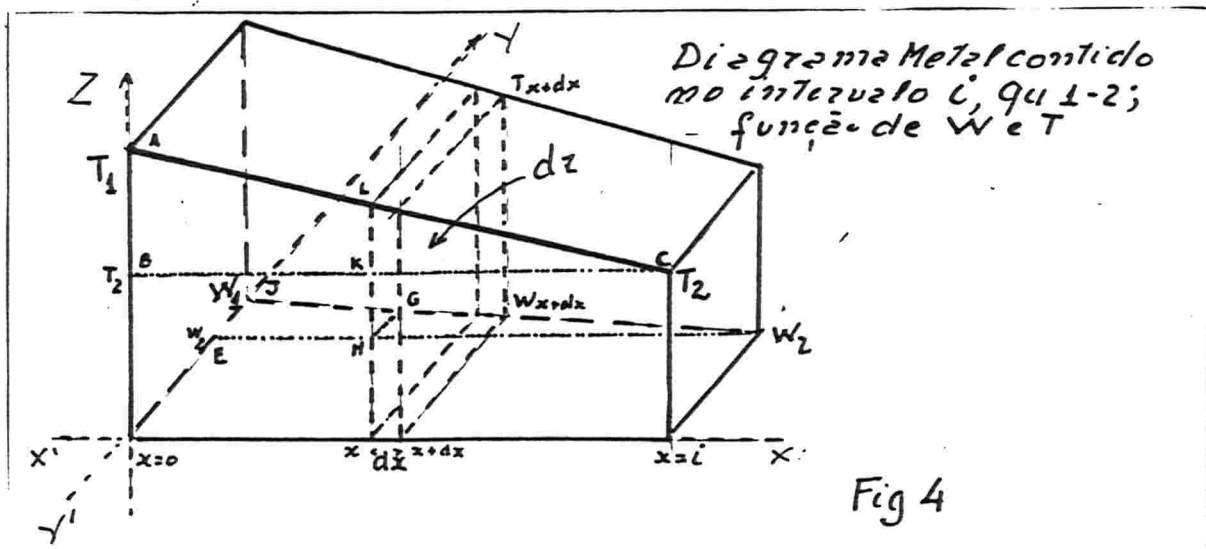
peso do material supostamente contido na face entre os dois canais, sendo "p" e "D" constantes.

$$q_{u1-2} = p.D. \left(\frac{i}{2} . W_1.T_1 + \frac{i}{2} . W_2.T_2 \right) = p.D.i. \frac{W_1.T_1 + W_2.T_2}{2};$$

peso de metal supostamente contido na face entre os dois canais 1 e 2.

$$T_{f1-2} = \frac{q_{u1-2}}{q_{1-2}} = \frac{W_1.T_1 + W_2.T_2}{W_1 + W_2} \quad \text{expressão (8)}$$

b) Conforme critério de extrapolação linear (como representado na figura 4)



$$q_{1-2} = p.D. \frac{W_1 + W_2}{2} . i ;$$

peso de material na **face** entre os canais 1 e 2 até a profundidade constante "p" dos canais.

$$r = q_{1-2} = p.D. \int_{x=0}^{x=i} Wx.Tx.dix;$$

peso do metal (ou reserva útil) na **face** entre os dois canais 1 e 2.

Para integrar:

Da figura 4, do \triangle EJM: $\frac{\overline{GH}}{\overline{EJ}} = \frac{x}{i} \therefore \overline{GH} = \frac{\overline{EJ} \cdot x}{i} ;$

$$\overline{EJ} = W_1 - W_2; \overline{GH} = \frac{(W_1 - W_2)}{i} . x \therefore Wx = (W_2 + \frac{W_1 - W_2}{2} . x)$$

Da figura 4, do \triangle ABC: $\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} = \frac{x}{i} \therefore \overline{KL} = \frac{\overline{AB} \cdot x}{i} ;$

$$\overline{AB} = T_1 - T_2; \overline{KL} = \frac{(T_1 - T_2)}{i} . x \therefore Tx = (T_2 + \frac{T_1 - T_2}{i} . x)$$

dr = reserva útil elementar na face.

$$dr = p.D. \left((W_2 + \frac{W_1 - W_2}{i} . x) . (T_2 + \frac{T_1 - T_2}{i} . x) \right) . dix$$

$$r = \int_{x=0}^{x=i} . dr = p.D. \int_{x=0}^{x=i} (W_2.T_2 + W_2.\frac{T_1 - T_2}{i} . x + T_2.\frac{W_1 - W_2}{i} . x + \frac{(W_1 + W_2).(T_1 - T_2)}{i^2} . x^2) dix$$

$$r = \int_{x=0}^{x=i} dr = p \cdot D \left(\int_{x=0}^{x=i} W_2 \cdot T_2 \cdot dx + \int_{x=0}^{x=i} \frac{W_2(T_1 - T_2) + T_2(W_1 - W_2)}{i} \cdot x dx + \int_{x=0}^{x=i} \frac{(W_1 + W_2) \cdot (T_1 - T_2)}{i^2} \cdot x^2 dx \right)$$

integrando:

$$r = p \cdot D \left(W_2 \cdot T_2 \cdot i + \frac{W_2(T_1 - T_2) + T_2(W_1 - W_2)}{2} \cdot i + \frac{(W_1 - W_2) \cdot (T_1 - T_2)}{3} \cdot i \right)$$

ou:

$$r = q_{u-1} = p \cdot D \left(\frac{3 \cdot (T_1 \cdot W_1 + T_2 \cdot W_2) + (W_1 - W_2) \cdot (T_2 - T_1)}{6} \cdot i \right)$$

Então:

$$T'f_{1-2} = \frac{q_{u-2}}{q_{1-2}} = \frac{p \cdot D \left(\frac{3 \cdot (T_1 \cdot W_1 + T_2 \cdot W_2) + (W_1 - W_2) \cdot (T_2 - T_1)}{6} \cdot i \right)}{p \cdot D \left(\frac{W_1 + W_2}{2} \cdot i \right)}$$

Finalmente:

$$T'f_{1-2} = \frac{T_1 \cdot W_1 + T_2 \cdot W_2}{W_1 + W_2} + \frac{(W_1 - W_2) \cdot (T_2 - T_1)}{3 \cdot (W_1 + W_2)} \quad \text{expressão (9)}$$

Comparando-se as expressões (8) e (9), as quais diferem pelo termo:

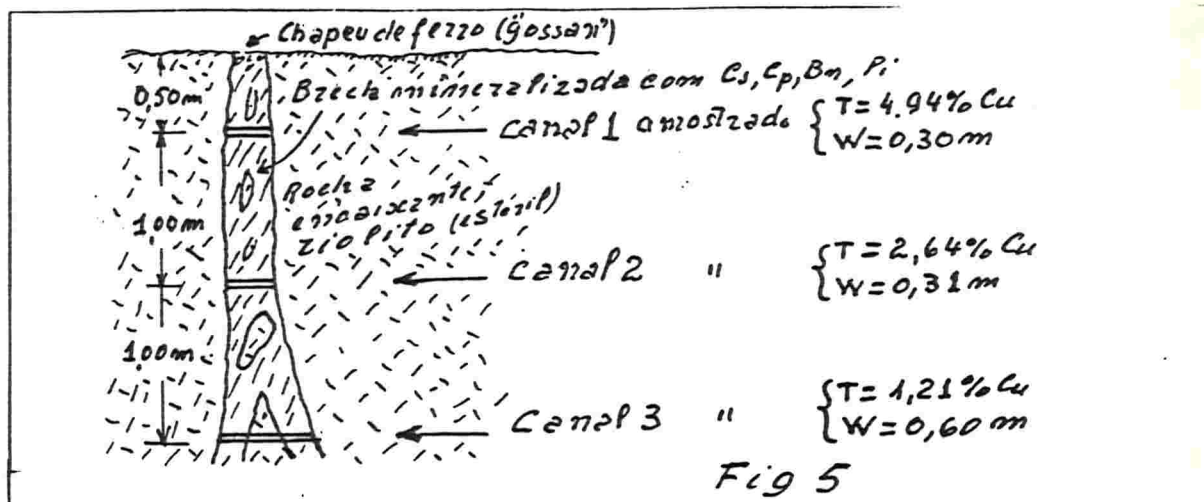
$$\frac{-(W_1 - W_2) \cdot (T_1 - T_2)}{3 \cdot (W_1 + W_2)}$$

conclui-se que ambos os critérios levam a resultados praticamente equivalentes: - Quando os comprimentos W_1 e W_2 são grandes, ou quando suas diferenças, ou as diferenças entre os teores T_1 e T_2 respectivos, sejam pequenos. Assim o critério da (RMD) em geral, é preferível.

Exemplo da aplicação das fórmulas de TRUSCOTT.

Exemplo nº 1:

Avaliação na face de um afloramento de minério de cobre (exposto em plano vertical na face de um corte no terreno), e amostrado conforme mostra a figura 5.



Teor médio na face T_f e espessura média (ou potência média na face W_f), conforme expressões (3a) e (7):

Quadro 1

Canal	T_n (% Cu)	W_n (m)	$\frac{in-1+in}{2}$ (m)	$W_n \cdot In \cdot T_n$ (m ²)	$W_n \cdot In \cdot T_n$ (m ² ·%Cu)
1	4,94	0,30	0,75	0,23	1,1115
2	2,64	0,31	1,00	0,31	0,8184
3	1,21	0,60	1,00	0,60	0,7260
Somat.			2,75	1,14	2,6559

$$T_f = \frac{2,6559}{1,14} = 2,33 \text{ \% de Cu}$$

$$W_f = \frac{1,14}{2,75} = 0,41 \text{ m}$$

Conclui-se então que a face do minério amostrado é equivalente a uma face com espessura média de 0,41 m com o teor de 2,33 % de Cu.

Entretanto se um corpo de minério nessas condições fosse lavrado, deveria-se desmontar um mínimo de 3,00 m de espessura, de modo a caber o equipamento de lavra subterrânea (ainda que de porte muito modesto). Assim o desmonte seria numa espessura equivalente mineralizada de 0,41 m, diluída em (3,00m - 0,41m = 2,59m), da rocha encaixante estéril. Seria então equivalente à uma face com 3,00m de espessura amostrada por um canal, no qual 0,41m teria 2,33 % de Cu e 2,59m seria estéril. O teor médio poderia ser calculado aplicando a expressão (2a). Admitindo-se que a parte mineralizada (minério sulfetado de cobre) tenha o peso específico $d_1 = 2,9 \text{ t/m}^3$, e a rocha encaixante (riolito) $d_2 = 2,5 \text{ t/m}^3$, calcula-se de acordo com a expressão (2a).

$$\text{Teor médio} = \frac{0,41\text{m} \times 2,33\% \text{Cu} \times 2,90\text{t/m}^3 + 2,59\text{m} \times 0\% \text{Cu} \times 2,5\text{t/m}^3}{0,41\text{m} \times 2,90 \text{ t/m}^3 + 2,59\text{m} \times 2,5 \text{ t/m}^3}$$

$$\text{Teor médio} = 0,36 \% \text{ Cu}$$

Conclui-se então que para a face do corpo de minério amostrado, resultaria um teor médio de minério desmontado (diluído com estéril) de 0,36% de cobre. (Para uma espessura ou potencia de desmonte de 3,00 m).

Outro exemplo: Ver exemplo de estimativa de reserva de um bloco no item 2.4, (Exemplo nº 3 à página 28).

Outro exemplo: Ver exemplo de estimativas dos teores de cobre e de ouro, numa amostragem ao longo de uma trincheira no fim do item 2.2, (Exemplo nº 2 à página 20).

2.2 - Restrições quanto a aplicabilidade dos critérios mineiros clássicos, quando ocorrem valores muito altos erráticos com disparidades.

Embora as fórmulas de Truscott referidas (ou outras fórmulas equivalentes) sejam satisfatoriamente aplicadas nos problemas rotineiros de pesquisa, no caso de minérios metálicos e não metálicos, eles podem levar a resultados inaceitáveis. Isso acontece nos casos muito comuns de avaliação de teores de minérios auríferos, ou de modo geral, quando valores erráticos ocorrem na amostragem. Suponhamos a amostragem de uma trincheira cavada longitudinalmente ao longo de um filão aurífero, como representada na figura 6 em planta.

!-----10,00 m----->!									
0,5	0,0	1,0	64,0	2,5	1,5	0,5	0,5	0,0	0,5 ppm
!	!	!	!	!	!	!	!	!	!
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Figura 6

Para simplicidade da exposição, suponhamos que sejam constantes as espessuras amostradas W do filão, e os respectivos intervalos I entre os canais de amostragem. O teor médio na face T_f , de acordo com os critérios das fórmulas de Truscott, seria a média aritmética:

$$T_f = \frac{T_n}{n} = \frac{71 \text{ ppm}}{10} = \sim 7 \text{ ppm de ouro}$$

Desconsiderando-se o teor com disparidade, de 64 ppm do canal 4, obtém-se:

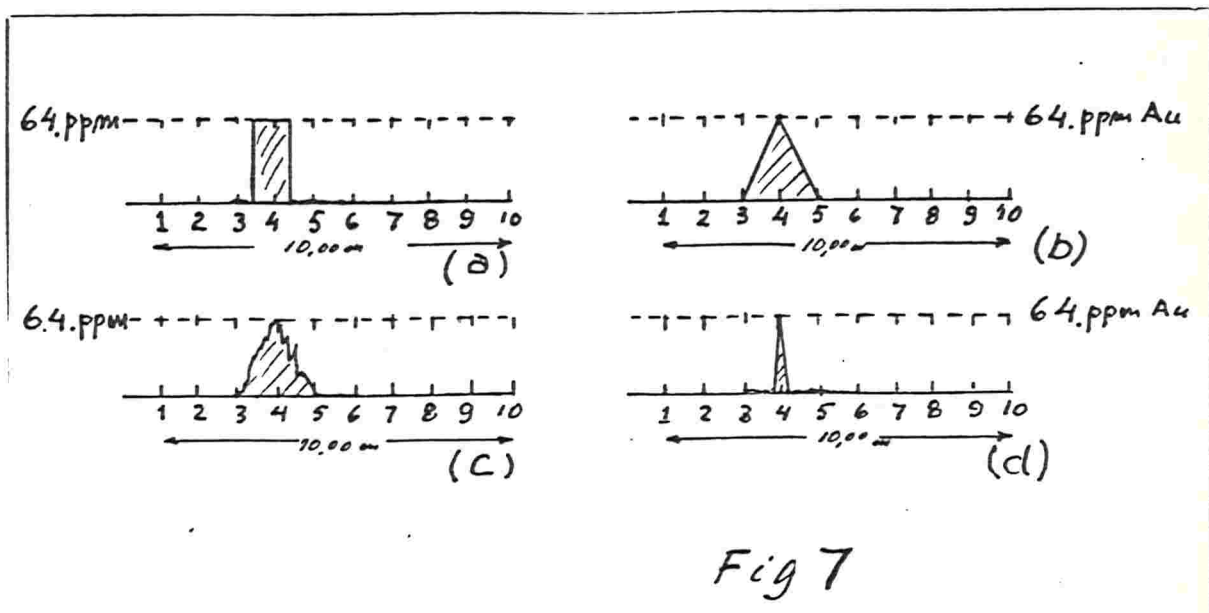
$$T_f = \frac{T_n}{n} = \frac{7 \text{ ppm}}{9} = \sim 0,8 \text{ ppm de ouro}$$

Ambos os resultados são pouco confiáveis. Admitindo-se que tomássemos amostras adicionais, de modo que a face fosse totalmente rebaixada. Sendo 5 cm a espessura de cada canal amostrado, para isso seria necessário tomar o total de $(10m/5cm/amostra) = (1000cm/5cm/amostra) = 200$ amostras (ou sejam 190 amostras adicionais).

No caso em que a amostra rica, correspondesse a uma porção de dimensões compatíveis com o espaçamento da amostragem, outras amostras, mais ou menos ricas, seriam obtidas na amostragem adicional. A distribuição dos teores ao longo do comprimento amostrado poderia corresponder as representações a, b ou c da figura 7.

Em qualquer desses casos, o teor médio de 7 ppm Au calculado de acordo com os critérios das fórmulas de Truscott seria representativo.

Porém no caso em que a mostra rica representasse somente um enriquecimento de dimensões praticamente pontual, resultante de uma partícula útil ou pepita que ocorresse no local do canal 4, a representação da distribuição d da figura 7, seria a mais verossímil.



O critério de cálculo do teor médio mais razoável neste último caso seria então:

$$\begin{array}{r}
 5 \text{ cm do comprimento da face tendo } 64,00 \text{ ppm Au} \\
 995 \text{ cm do comprimento da face tendo (em média) } 0,8 \text{ ppm Au} \\
 \hline
 1000 \text{ cm do comprimento de face tendo (em média) } 1,0 \text{ ppm Au} \\
 \vdots \\
 64,0 \text{ ppm} \times 5 \text{ cm} + 0,8 \text{ ppm} \times 995 \text{ cm} \\
 \hline
 1000 \text{ cm} = 1,0 \text{ ppm Au} \leftarrow !
 \end{array}$$

No caso de uma distribuição pontual, seria necessário grande número de amostras, tomadas aleatoriamente, para que os resultados através de médias aritméticas fossem mais verossímeis.

Mesmo assim, deveria se admitir que a distribuição de frequências dos teores na face amostrada fosse normal (isto é, que obedecessem a curva de Gauss), para que a média aritmética fosse um bom estimador, o que em geral não acontece.

Além disso tendências regionalizadas comuns de enriquecimento (ou empobrecimento) nos corpos de minério, que são denominados "trend", prejudicam a precisão dos resultados obtidos com base nesses critérios simples.

Para racionalizar a solução desses tipos de problemas, são utilizadas análises envolvendo modelos teóricos de distribuição estatísticas mais compatíveis com a realidade geológica. Essas análises e os métodos de estimação respectivos, são os aplicados nos métodos mais elaborados, baseados em análise matemática estatística clássica, e também nos chamados métodos geoestatísticos. Esses métodos serão abordados mais adiante neste texto.

2.3 - Procedimentos práticos adotados rotineiramente em Geologia de Minas, quando ocorrem valores dispares.

Objetivando minimizar o efeito de valores dispares altos obtidos na amostragem sistemática de minérios metálicos, são muitas vezes adotados procedimentos práticos como os que se seguem;

- a) Tomar outras duas amostras adicionais, uma em cada lado, e no meio dos intervalos que separam o canal em que foi obtida a amostra com teor rico (dispar); substituir nos cálculos, o valor da amostra rica, pela média aritmética dos resultados das três amostras.
- b) Substituir nos cálculos, cada valor da amostra rica (dispar), pelo valor médio aritmético de cinco amostras; a amostra rica e duas em cada lado da mesma.
- c) Substituir nos cálculos, o valor das amostras ricas pelo valor da média aritmética de todos os valores das amostras na face.
- d) Simplesmente desconsiderar o valor das amostras ricas e considerados dispares.
- e) Substituir todos os valores altos dispares, por um mesmo valor arbitrariamente estabelecido (considerado o máximo admissível).

Observe-se que todos esses procedimentos, são critérios pessimistas e arbitrários, objetivando-se "segurança" de resultados somente

Em lugar desses procedimentos, também são adotados critérios práticos mais sofisticados como os que se seguem:

- f) Procedimento de **Watermeyer**, consistindo em adotar para o resultado médio T na face amostrada, o valor da expressão:

$$T = \frac{\sum (W_n \cdot T_n) F_n^2}{\sum W_n \cdot F_n^2} \quad \text{expressão (10)}$$

sendo:

$W_n \cdot T_n$ = Produtos **Acumulação**, espessura x teores obtidos em cada amostra;
 W = Média aritmética das espessuras das amostras;
 F_n^2 = Quadrados das frequências dos produtos ($w_n \cdot t_n$) obtidos mediante um cálculo de distribuição de frequências, dos valores medidos de ($W_n \cdot T_n$);

$\sum (W_n \cdot T_n) F_n^2$ e $\sum W_n \cdot F_n^2$, sendo os somatórios dos produtos respectivos.

Esse procedimento decorreu de um critério empiricamente adotado pelo pesquisador Watermeyer, na Africa do Sul, publicado em 1919 (Referido em Mc Kinstry - 1948). A origem desse procedimento foi o seguinte: Na prática comum de comparar, resultados calculados a partir de amostragem de blocos de minério, com os valores obtidos após a moagem, (no tratamento do minério lavrado), Watermeyer elaborou gráfico expressando a curva dos valores dos produtos ($W_n \cdot T_n$), das espessuras médias dos blocos lavrados vezes os respectivos teores obtidos após a moagem, versus as frequências como esses valores ocorriam dentro dos intervalos uniformes dos mesmos valores, (isso durante o período de um ano de mineração); obteve assim um modelo para correção considerado representativo para o jazimento; passou a adotar a frequência dada pela curva, como fator de ponderação adicional para qualquer valor ($W_n \cdot T_n$) nos serviços de amostragem da Mina. Observando-se que a simples computação de valores ($W_n \cdot T_n$) corresponde a ponderação pela frequência dos mesmos, nos cálculos das médias aritmeticas, a computação ponderando adicionalmente pela frequência, corresponde à adoção do quadrado de frequência como fator de ponderação, como expresso para fórmula (10).

g) Procedimento de Watermeyer-Truscott.

Reconhecendo que o procedimento de Watermeyer, conforme a expressão (10), resulta em geral num critério excessivamente drástico pessimista, Truscott em publicação de 1937 (referida em Mc Kinstry 1948), recomendava o critério de ponderar também (e adicionalmente) pelo próprio valor T_n do ensaio (naquela espessura W_n), conforme a expressão (11).

$$T = \frac{\sum W_n \cdot T_n \cdot T_n \cdot F_n^2}{\sum W_n \cdot T_n \cdot F_n^2} = \frac{\sum W_n \cdot T_n^2 \cdot F_n^2}{\sum W_n \cdot T_n \cdot F_n^2} \quad \text{expressão (11)}$$

Sendo F_n as frequências com que os valores $(W_n \cdot T_n^2)$ ocorrem na população cuja média é computada.

Este último procedimento, baseia-se na presunção de que um valor alto considerado esporádico, será uma evidência indicando maior intensidade de mineralização localizada, extensiva à uma área de influência maior da amostra.

Os procedimentos: De Truscott conforme a expressão (3c); de Watermeyer, conforme expressão (10); e de Watermeyer-Truscott, conforme a expressão (11), são equivalentes aos procedimentos alternativos recomendados em Thomas L. J. 1979 para serem adotados para se obter um valor médio, à escolha do pesquisador:

$$\text{Valor médio "Average value"} = \frac{\sum W \cdot A \cdot F}{\sum W \cdot F}; \text{ ou } \frac{\sum W \cdot A \cdot F^2}{\sum W \cdot F^2}; \text{ ou } \frac{\sum W \cdot A^2 \cdot F^2}{\sum W \cdot A \cdot F^2}$$

Sendo:

W = espessura do corpo de minério amostrado;

A = Valor analisado da amostra com aquela espessura;

F = Frequência, isto é, o número de vezes que um dado valor (WA) ou (WA²) ocorre na população.

A primeira dessas três expressões é equivalente as expressões (4), (5) e (6); a segunda é equivalente a expressão (10); a terceira é equivalente a expressão (11).

Para objetivar o que foi exposto nos itens 2.1 e 2.2, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo nº 2 - Numa trincheira de pesquisa aberta longitudinalmente ao longo de um filão mineralizado com cobre e ouro na jazida Volta Grande - Área 4 Lavras do Sul RS - Brasil, foi feita uma amostragem, mediante $N = 37$ amostras de canal, cortado transversalmente ao filão, à intervalos praticamente uniformes de 1,00 m.

O jazimento amostrado é do tipo vulcanogênico, com mineralização de cobre em minerais sulfetos, predominando calcopirita, e alguns minerais oxidados; em filões constituídos em fraturas (com brechas), ocorrendo em tufos andesíticos. A mineralização de ouro esta associada aos sulfetos (pirita e calcopirita predominantes), sendo inexpressivo a ocorrência de ouro livre.

As características das amostras e os respectivos resultados das análises, constam da planilha - Quadro 2.

Quadro 2

NO	Wn cm	En cm	Tn Cu %	Tn Au ppm	ACUMUL Cu ZnCu=TnCuWn	ACUMUL Au ZnAu=TnAuWn
01	70	40	0,45	31,50	31,50	2205,00
02	100	50	0,58	36,62	58,00	3662,00
03	100	50	0,82	36,00	82,00	3600,00
04	100	50	1,20	50,25	120,00	5025,00
05	100	50	0,80	1,71	80,00	171,00
06	100	50	0,86	1,92	86,00	192,00
07	100	50	0,96	6,22	96,00	622,00
08	100	50	1,00	0,42	100,00	42,00
09	100	60	0,84	3,75	84,00	375,00
10	100	60	1,02	3,60	102,00	360,00
11	60	30	0,43	11,25	28,80	675,00
12	90	30	0,31	1,57	27,90	141,00
13	90	30	0,78	15,00	70,20	1350,00
14	90	30	0,09	3,60	8,10	324,00
15	100	50	0,26	0,57	26,00	57,00
16	100	50	0,21	1,14	21,00	114,00
17	100	50	0,23	2,42	23,00	242,00
18	100	50	0,19	3,30	19,00	330,00
19	100	50	0,50	4,91	50,00	491,00
20	100	50	0,73	5,40	73,00	540,00
21	100	50	0,50	1,14	50,00	114,00
22	100	70	0,24	15,00	24,00	1500,00
23	100	70	0,20	2,70	20,00	270,00
24	100	70	0,77	13,12	77,00	1312,00
25	100	80	3,54	40,87	354,00	4087,00
26	100	80	1,36	8,62	136,00	862,00
27	100	80	0,78	5,17	78,00	517,00
28	100	70	0,84	11,25	84,00	1125,00
29	100	60	0,07	0,58	7,00	58,00
30	100	60	0,04	0,45	4,00	45,00
31	100	100	0,27	6,77	27,00	677,00
32	100	60	0,48	11,25	48,00	1125,00
33	100	100	0,62	20,62	62,00	2062,00
34	100	60	0,08	1,50	8,00	150,00
35	100	100	0,24	3,75	24,00	375,00
36	100	60	0,20	2,85	20,00	285,00
37	100	100	0,23	0,30	23,00	30,00
Soma	3600	2200			2232,50	35112,00
Med.	97,30	59,46			60,30	949,00

- Coluna 1 - Números de ordem das amostras.
- Coluna 2 - Comprimento dos canais W_n , medidos em cm; o critério geral de amostragem, foi de centralizar cada canal no meio do filão, cortando os canais uniformemente, com 50 cm para cada lado do filão, de modo a amostrar juntamente a rocha encaixante junto ao filão (abrangendo a salbanda); por limitações da largura da trincheira alguns canais tiveram comprimento W_n menores do que 1,00m.
- Coluna 3 - Espessuras E_n em cm do filão, como a estrutura se apresentava à vista, na operação de coleta da amostra.
- Coluna 4 - Análises $TnCu$, para cobre total, das amostras (dado em % Cu).
- Coluna 5 - Análises $TnAu$ para cobre das amostras, dadas em ppm Au (equivalente a g/ton).
- Coluna 6 - Acumulações $ZnCu = TnCu.W_n$ para as amostras em cobre, dadas em % Cu.cm.
- Coluna 7.- Acumulações $ZnAu = TnAu.W_n$ para as amostras em ouro, dadas em ppm Au.cm.

Então, pelos critérios das fórmulas de **Truscott**, tem-se conforme a expressão (4), para intervalos I uniformes.

$$TnCu = \frac{2232,50 \% Cu.cm}{3600 cm} = 0,62 \% Cu$$

$$TnAu = \frac{35112 ppm Au.cm}{3600 cm} = 9,75 ppm Au = 10 ppm Au.$$

Devido as disparidades dos teores $TnAu$ (ver coluna 5), o resultado médio $TnAu$ de 10 ppm Au, seria considerado **super estimado**, em princípio.

- Por esse motivo, procura-se utilizar outros estimadores: Estimativas do teor médio $TnAu$, aplicando-se fórmulas em função das frequências, equivalentes as expressões (5), (10) e (11):
- Calculando-se as distribuições de frequências dos valores das **acumulações** de Au ($ZnAu=TnAu.W_n$):
 - Fórmulas de **Sturge** para estabelecer o intervalo de classe it adequado, para um ensaio experimental de distribuição de frequências:

$$it = \frac{A}{1 + 3,32 \log N}; \quad \text{ou} \quad n = \frac{A}{it} = 1 + 3,32 \log N;$$

sendo:

A = amplitude da população,
N = número de valores do ensaio
n = número de classes da distribuição.

Tem-se:

Valor mais alto da população = 5025 ppm Au.cm
Valor mais baixo da população = 30 ppm Au.cm

Amplitude A = 4995 ppm Au.cm

$n = 1 + 3,32 \log 37 \approx 6;$

$it = \frac{4995 \text{ ppm Au.cm}}{6} \approx 833 \text{ ppm Au.cm}$

Quadro 3

Classes ZnAu ppm Au.cm	fit abs. nº ZnAu	pim ppm Au.cm	fit.pim
30 - 863	26	416,50	10829,00
863 - 1696	5	1279,50	6397,50
1696 - 2529	2	2112,50	4225,00
2529 - 3362	0	2945,50	0,00
3362 - 4195	3	3778,50	11335,00
4195 - 5028	1	4611,50	4611,50
Somatórios	37		37398,50

(fit abs)² (nº ZnAu)²	fit2.pim	fit2.pim2
676	281554,00	117267241,00
25	31987,50	40928066,25
4	8450,00	17850625,00
0	0,00	0,00
9	34006,50	128493560,20
1	4611,50	21265932,25
715		325805424,70

Resultados ponderando-se N simplesmente pelas frequências:

$$\text{Conforme a expressão (24)} \quad x = \frac{\sum (\text{fit. pim})}{N}$$

calcule-se a média aritmetica das Acumulações Au.

$$\text{Valor médio das acumulações Au} = \frac{37398,5}{37} = 1010,77 \text{ ppm Au.cm}$$

Esse resultado corresponde ao teor médio TnAu, para a espessura de 97,3 cm (dada no quadro 2):

$$TnAu = \frac{1010,77 \text{ pp au.cm}}{97,3 \text{ cm}} = 10,39 \text{ ppm Au} \approx 10 \text{ ppm Au}$$

Esses resultados são equivalentes aos que seriam obtidos aplicando-se diretamente as expressões (5) e (6); evidentemente são também equivalentes ao obtido anteriormente pela fórmula de **Truscott**, expressão (4); a pequena diferença explica-se pela imprecisão devido ao cálculo estatístico, da média aritmetica, por intermedio das frequências das classes de valores (estabelecidas a partir de pequeno número de valores; N = 37 é insuficiente para esse procedimento de cálculo).

Resultados ponderando-se pelo quadrado das frequências das acumulações ((fim)².pim), ver colunas 5 e 6 do quadro 3; critério equivalente ao da expressão (10):

$$Tn = \frac{\sum (Wn.Tn).Fn^2}{\sum W.Fn^2} \quad \text{ou} \quad Tn = \frac{\sum W.A.F^2}{\sum W.F^2} = \text{Critério de Watermeyer}$$

Valor médio das acumulações de Au:

$$\frac{360609,50 \text{ ppm Au.cm}}{715} = 504,35 \text{ ppm Au.cm}$$

Resultando TnAu para espessura média de 97,3 cm:

$$TnAu = \frac{504,35 \text{ ppm Au.cm}}{97,3 \text{ cm}} \approx 5,0 \text{ ppm Au}$$

Esses são resultados considerados pessimistas.

Resultados ponderando-se simultaneamente pelo quadrado das frequências das acumulações e também pelo próprio teor $((f_{im})^2 \cdot (p_{im})^2)$, ver coluna 7 do quadro 3, critério equivalente as das expressões (11):

$$T_n = \frac{\sum W_n \cdot T_n^2 \cdot F_n^2}{\sum W_n \cdot T_n \cdot F_n^2} \quad \text{ou} \quad T_n = \frac{\sum W \cdot A^2 \cdot F^2}{\sum W \cdot A \cdot F^2};$$

Critério de Watermeyer-Truscott.

Valor médio das acumulações de Au:

$$\frac{325805424,70 \text{ (ppm Au.cm)}^2}{360609,50 \text{ ppm cm}} = 903,50 \text{ ppm cm}$$

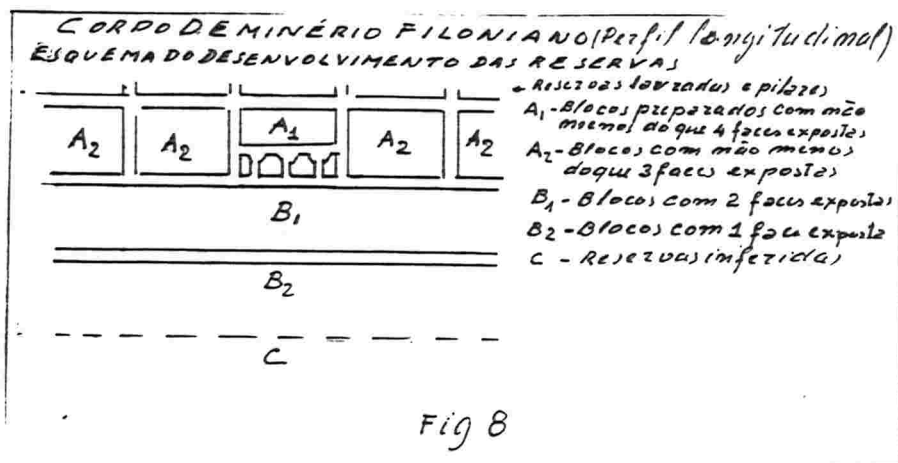
Resultado $T_n \text{Au}$ para espessura média de 97,3 cm:

$$T_n \text{Au} = \frac{903,5 \text{ ppm Au.cm}}{97,3 \text{ cm}} \approx 9,3 \text{ ppm Au} \approx 9 \text{ ppm Au}$$

Esses resultados são menos pessimistas que os anteriores, e presumivelmente menos superestimados que o do critério de Truscott.

- Ver também outra maneira, mais adequadas para estimar os dados deste problema, mediante utilização do estimador de Sichel, o qual será visto no item 43222 (no exemplo nº 11 à página 103).
- Ver também análises estatísticas dos resultados do exemplo nº 2 feitas, nos exemplos de nºs 15, 17, 18, 19, 21, 24 e 26, às páginas nºs. 134, 139, 141, 144, 151, 161 e 170.

2.4 - Procedimentos práticos para extrapolar os resultados da amostragem da face, para o interior do corpo de minério.



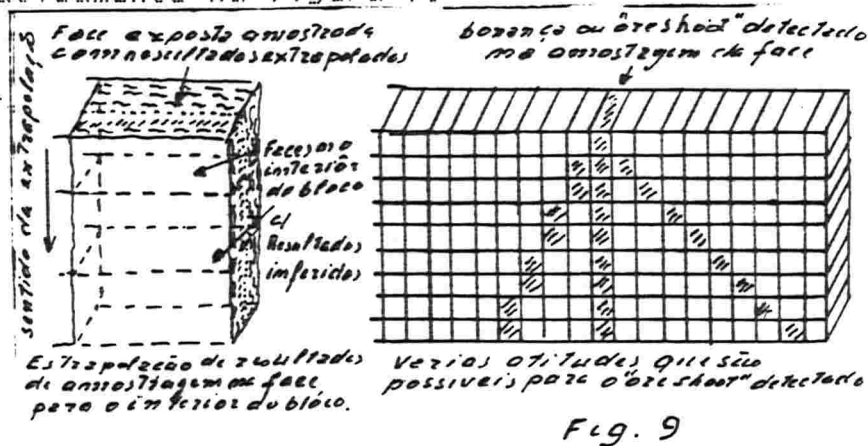
Obtidos os teores e espessuras para as faces expostas, o problema seguinte é o da extrapolação desses resultados para o interior do bloco de minério. Esse é um problema de maior complexidade, para cuja abordagem racional exige raciocínio geostatístico.

Entretanto na pesquisa preliminar e na pesquisa de acompanhamento da lavra, são adotados procedimentos práticos, mediante os quais se sistematiza a extrapolação para o interior dos blocos de minério, objetivando-se a cubagem dos mesmos. Esses procedimentos baseiam-se em critérios de modelos muito simples.

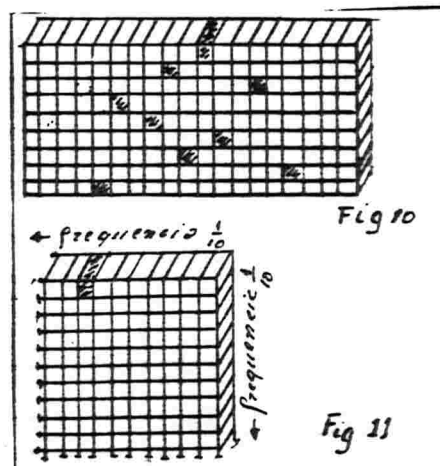
A face amostrada de um filão de pequena espessura, poderia ser o teto de uma galeria de direção que fosse aberta ao longo do filão num comprimento da ordem de 60 m (nos trabalhos de desenvolvimento); poderia ser também a face aberta para um subnível na preparação do bloco para minerar; também poderia ser o piso da galeria de direção (do desenvolvimento) no nível superior.

Em casos como esses, é comum extrapolar-se os resultados da face amostrada, como se o bloco fosse razoavelmente uniforme, até a metade da distância vertical que separa os dois níveis amostrados, aplicando-se a **regra da meia distância**; ou também extrapolar-se os resultados até uma distância, estabelecida de acordo com a experiência adquirida com respeito as condições específicas do corpo de minério (mesmo quando da inexistência de outra face amostrada para controlar resultados).

Nesses casos estaria se admitindo que a distribuição para o interior do bloco de um "ore shoot" eventualmente detectado na amostragem de face, se propagasse continuamente (ainda que com atitudes diversas) como representado esquematicamente na figura 9.

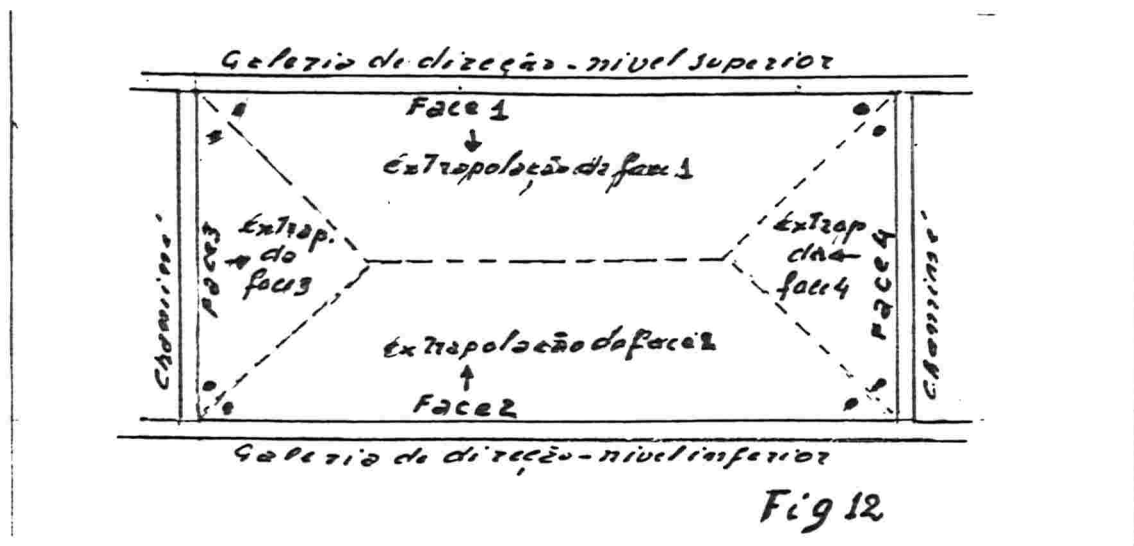


Admitindo-se que um enriquecimento detectado por uma "amostra rica" que ocorresse com uma determinada frequência na face amostrada, também ocorresse para o interior do bloco com a mesma frequência em todos os níveis; (descontinuamente), como representado esquematicamente na figura 10; também nesse caso seria racional a extrapolação do teor da face, calculado mediante os procedimentos das fórmulas de Truscott, conforme as expressões (3a), (3b) ou (3c).



Porém se a frequência de pontos de enriquecimento fosse a mesma na direção horizontal e na direção vertical, como representado na figura 11, o teor na face amostrada seria representativo, somente quando fosse calculado, ponderando pelo quadrado da frequência (aplicando-se o procedimento da expressão (10) de Watermeyer).

Tendo-se quatro faces amostradas num filão de pequena espessura (constituídos pelas faces-expostas de duas chaminés e duas galerias de direção), adotaria-se procedimento geométrico para estabelecer as áreas de influência das respectivas faces amostradas, como mostra a figura 12.



Muitas outras situações particulares poderiam servir como exemplo. Em todos os casos as estruturas e as texturas de distribuição dos teores de minério são, muito mais complexas do que as que foram admitidas.

Em cada caso se adota procedimentos indicados pela experiência, os quais são utilizados com as devidas restrições.

Na prática da mineração, os teores previstos mediante amostragem prévia dos blocos são comparadas com os obtidos na cominuição do minério produzido. Diferenças para menos são esperadas, devidos aos efeitos ditos de **diluição** com estéril, o que sempre ocorre (voluntariamente ou involuntariamente), durante o desmonte do minério (dependendo do método de lavra adotado).

Finalmente, é comum estabelecer-se, de acordo com a experiência advinda dessas comparações, **fatores de correção**, os quais são aplicados nos teores calculados (previstos na pesquisa), de modo à ajustá-los a realidade da futura mineração.

Exemplo nº 3

Cálculo da reserva de um bloco na rotina da pesquisa de acompanhamento da lavra na Mina São Luiz - Mina do Camaquã - RS em 1971. Ver mapa dos resultados da amostragem na folha seguinte, figura 13.

- Método de lavra - Schrinkage Stope.

- Método de amostragem - Amostras de canal simplificadas, constituídas por "chip sample" colhidas ao longo de um canal irregular retilíneo de comprimento de 1,00 m, com largura e profundidade (aproximadas) de 5 cm.

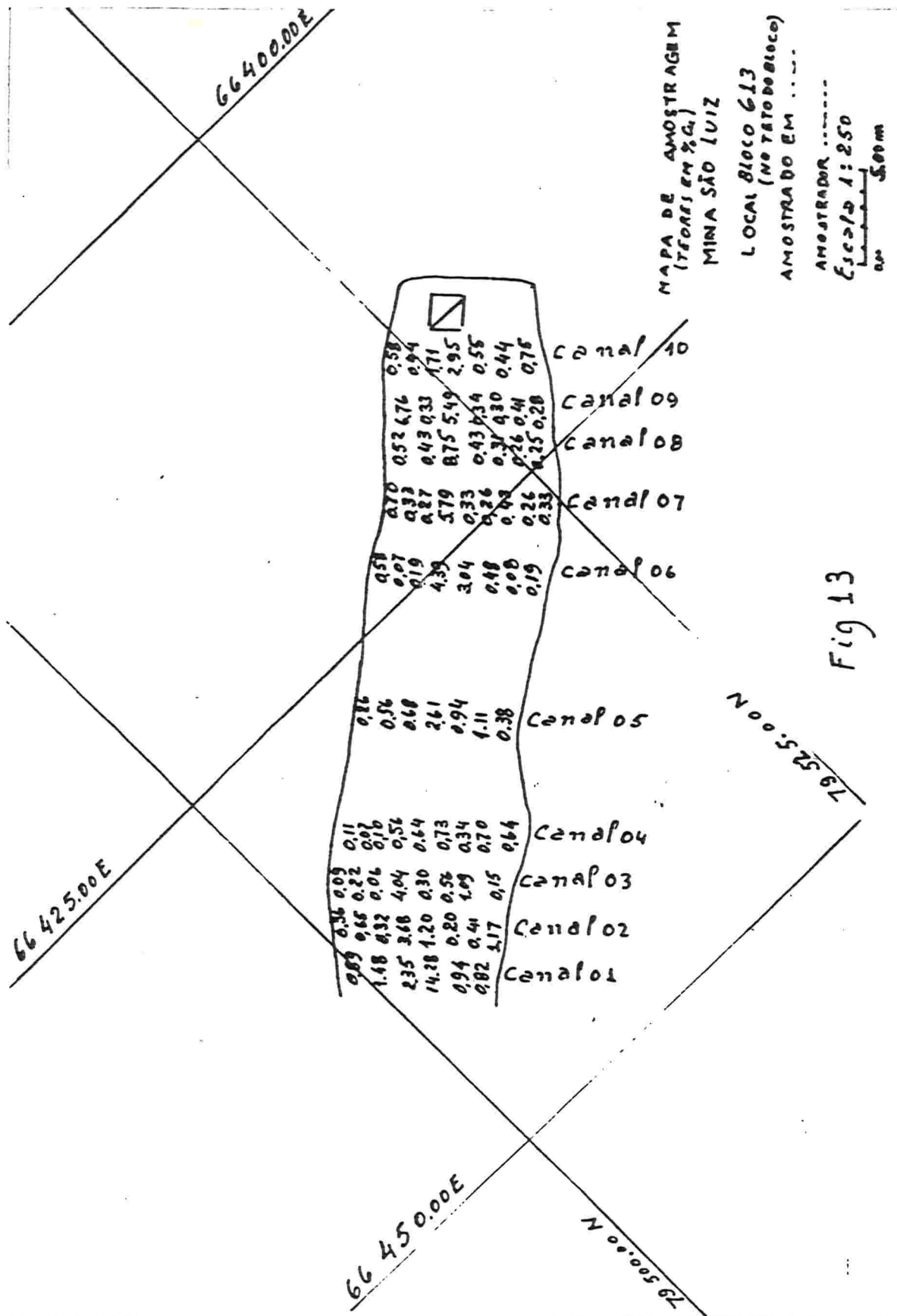


Fig 13

- Face amostrada - (Frente de desmonte do bloco) - Teto do bloco (ou realce ou "stope"), representado em planta na figura 13; resultados das análises em % Cu estão anotadas na planta ao longo dos canais da amostragem.
- Teores Tn em % Cu, estimados para cada um determinado canal, são calculados mediante as médias aritmeticas dos valores das análises das respectivas amostras (retiradas ao longo do respectivo canal).
- Comprimentos dos canais ou sejam as espessuras amostradas Wn em cada canal, assim como os intervalos de influência de cada um dos canais $In = (in-1 + in)/2$ são obtidos conforme as medidas feitas em plantas (ver figura 13).
- Cálculo do teor na face amostrada Tf e da espessura Wf na face amostrada, calculadas mediante as fórmulas de Truscott, expressões (3a) e (7):

$$Tf = \frac{\sum Wn \cdot In \cdot Tn}{\sum Wn \cdot In}; \quad Wf = \frac{\sum Wn \cdot In}{\sum In} "$$

Quadro nº 4

Canal	Wn (m)	Tn (% Cu)	In (m)	WnIn (m ²)	WnInTn (m ² .% Cu)
01	8,50	3,53	2,80	23,80	84,01
02	9,20	1,02	2,50	23,00	23,46
03	9,70	0,81	2,50	24,25	19,64
04	10,00	0,43	4,40	44,00	18,92
05	8,70	0,93	7,00	60,90	56,64
06	9,40	1,13	5,80	54,52	61,61
07	9,00	0,97	3,40	30,60	29,68
08	8,80	1,56	2,60	22,88	35,69
09	8,80	1,99	2,40	21,12	42,03
10	8,20	1,06	2,80	22,96	24,34
Somat.	90,30		36,20	328,03	396,02

$$Tf = \frac{396,02 \text{ m}^2 \cdot \% \text{ Cu}}{328,03 \text{ m}^2} = 1,21 \% \text{ Cu}$$

$$W_f = \frac{328,03 \text{ m}^2}{36,20 \text{ m}} = 9,06 \text{ m}$$

Área na face amostrada = $W_f \cdot l_n = 9,06\text{m} \times 36,20\text{m} = 327,97\text{m}^2$
 Peso específico do minério, estimado em 2,7 t/m³ (nas condições específicas daquela Mina).

Altura minerável do bloco = Diferença entre níveis 30m, menos 12m a serem preservados em pilares = 18m.

Volume da reserva do bloco = $327,97\text{m}^2 \times 18\text{m} = 5903,46\text{m}^3$

Reserva prevista (com a espessura e o teor obtido na face, extrapolado para todo o bloco) = $5903,46\text{m}^3 \times 2,7 \text{ t/m}^3 = 15939\text{t} \approx 16000 \text{ t}$

Reserva com Cu contido = $15939\text{t} \times 1,21 \% \text{ Cu} \approx 193 \text{ t de Cu}$.

3 - MÉTODOS GEOMÉTRICOS PARA CUBAR CORPOS DE MINÉRIO.

3.1 - Métodos geométricos e métodos analíticos, conceituação:

A interpretação dos dados de amostragem finaliza na cubagem do corpo de minério. Chama-se cubagem, a delimitação do corpo de minério, avaliado quantitativa e qualitativamente, em volume, peso, teor e outras características interessantes do minério pesquisado, as quais em conjunto, são compreendidas no conceito da reserva pesquisada.

Costuma-se classificar os métodos de cubagem em:
Métodos Geométricos e Analíticos.

Os métodos **Analíticos** são métodos desenvolvidos à partir da década de 1960, exigindo para suas aplicações melhores conhecimentos prévios do jazimento, além de uso de computadores e muitas vezes técnicas de **Geoestatística**.

Significam muitas vezes aperfeiçoamento e otimização das avaliações, levando às maiores precisões. Seus fundamentos serão abordados adiante (a partir do item 5) neste texto.

Os métodos **Geométricos**, à serem abordados nos itens que se seguem, são também chamados métodos **Antigos Clássicos**. Foram desenvolvidos empiricamente na prática da Mineração, tendo sido sistematizados juntamente com os métodos antigos de interpretação dos dados da amostragem, na primeira metade do século atual. Persistem sendo os mais aplicados nas rotinas de Pesquisa Mineral, desde as primeiras de suas fases, até na fase de acompanhamento da lavra. Caracteriza-se pela simplicidade, permitindo solução das maiorias dos problemas de rotina, mediante aplicação de raciocínios elementares de Geometria, Geologia e Estatística.

3.2 - Cubagem mediante levantamento de seções transversais e de perfis longitudinais.

Sabendo que a sistematização dos trabalhos, no caso da pesquisa de corpos de minérios metálicos, consiste geralmente, de levantamentos de seções transversais e de perfis longitudinais, respectivamente perpendiculares e paralelos a uma linha base, previamente estabelecida.

As seções transversais (sempre verticais), são levantadas a partir de dados obtidos de sondagens e também de trabalhos subterrâneos sistematicamente amostrados. Todos os procedimentos e fórmulas de interpretação dos resultados de amostragem numa face exposta do corpo de minério, (como foram vistos no item 2 e subitens 2.1, 2.2 e 2.3), são adequados também para os casos de seções. Assim chega-se à resultados médios parciais de teores, de espessuras e de áreas amostradas na seções. Esses resultados parciais serão extrapolados (ou interpolados) para o corpo de minério, até às distâncias consideradas compatíveis com as "áreas de influência" apropriadas ao jazimento pesquisado.

A figura 14, procura mostrar genericamente procedimentos de cubagem, mediante seções transversais e mediante perfis longitudinais. Essas seções são levantadas segundo as técnicas usuais de Geologia de Minas. Supõe-se conhecidas essas técnicas, as quais podem ser motivos de consulta em Forrester, J. D. Field and Mining Geology 1949.

a) Cubagem mediante as seções **transversais** (ver figura 14):

- Desenhando-se duas seções **transversais** (verticais) do corpo de minério, delimitadas:

- pelos pontos A, B, C, D, na seção transversal anterior;

- pelos pontos E, F, G, H, na seção transversal posterior.

O volume do corpo de minério (em m³), delimitado entre as duas seções, será calculado como se segue:

\overline{AB} = espessura amostrada horizontal, dada em m, delimitada no nível **superior** da seção transversal **anterior**.

\overline{CD} = espessura amostrada horizontal, dada em m, delimitada no nível **inferior** da seção transversal **anterior**

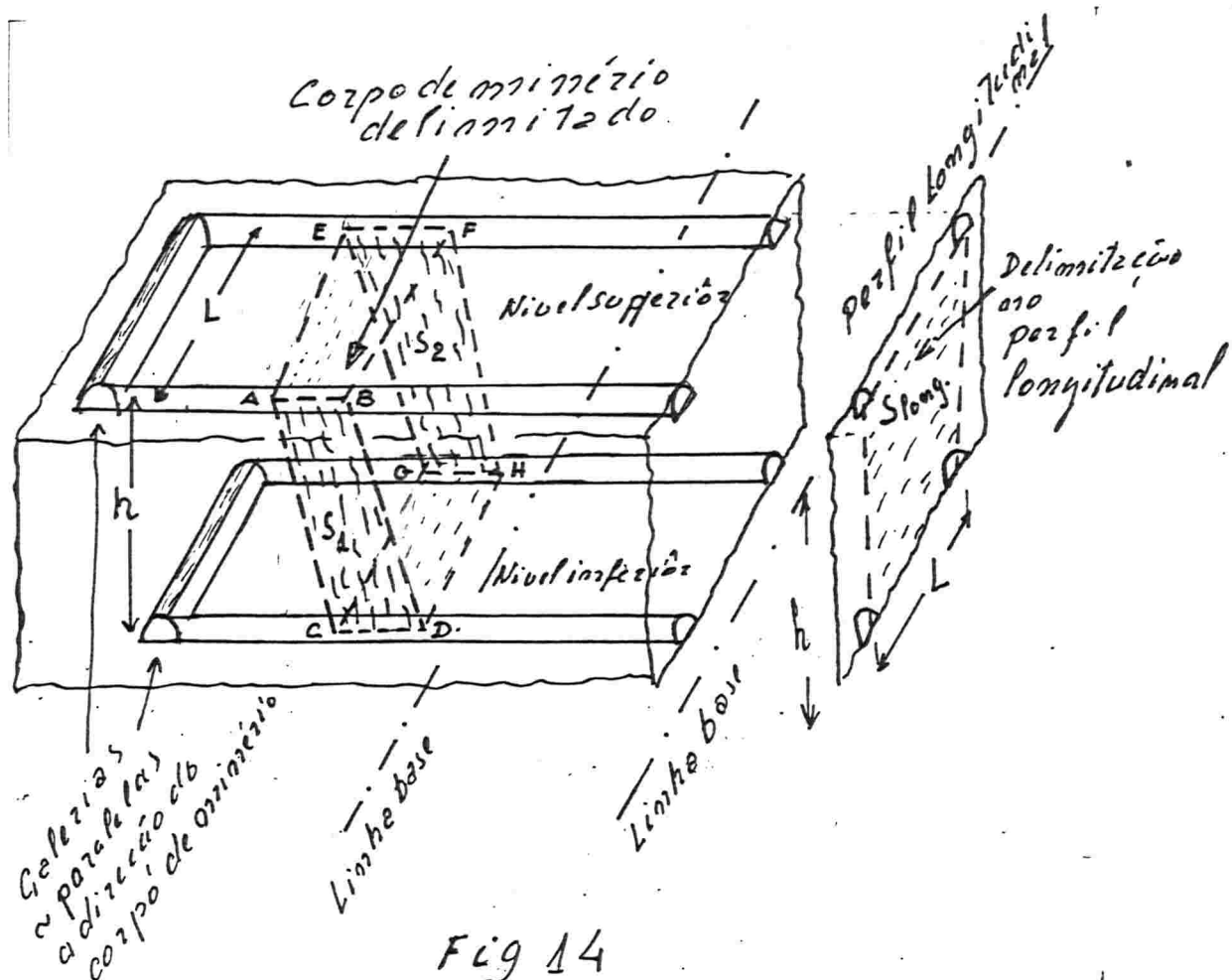
Área delimitada na seção transversal, anterior, dada em m²:

$$S_1 = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h ;$$

sendo "h", dado em m, a distância vertical entre os dois níveis (superior e inferior).

\overline{EF} = espessura amostrada horizontal, dada em m, delimitada no nível superior da secção transversal posterior.

\overline{GH} = espessura amostrada horizontal, dada em m, delimitada no nível inferior da secção transversal posterior.



Área delimitada, em m², na secção transversal posterior:

$$S_2 = \frac{\overline{EF} + \overline{GH}}{2} \cdot h$$

Volume do corpo de minério delimitado entre as duas secções transversais (em m³):

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot L;$$

sendo "L" a distância horizontal entre as duas seções, medida paralelamente a linha base.

Sendo S o peso específico do minério (em t/m³);

A reserva "P" (em t) do corpo de minério delimitado entre as duas seções, será: $P = V \cdot S$.

Sendo os teores em metal útil (dados em % ou ppm), tem-se:

$t_{\overline{AB}}$ = teor na espessura \overline{AB} , calculado da amostragem, conforme a expressão (2c)

$t_{\overline{CD}}$ = teor na espessura \overline{CD} calculado da amostragem, conforme a expressão (2c).

t_{S1} = teor considerado para a seção S1, calculado conforme a expressão (3a):

$$t_{S1} = \frac{\overline{AB} \cdot t_{\overline{AB}} + \overline{CD} \cdot t_{\overline{CD}}}{\overline{AB} + \overline{CD}}$$

Da mesma forma sendo $t_{\overline{EF}}$ e $t_{\overline{GH}}$ os teores nas espessuras \overline{EF} e \overline{GH} , tem-se:

$$t_{S2} = \frac{\overline{EF} \cdot t_{\overline{EF}} + \overline{GH} \cdot t_{\overline{GH}}}{\overline{EF} + \overline{GH}}; \text{ teor para a seao } S2.$$

O teor para o corpo de minério delimitado entre as duas seções será:

$$t = \frac{t_{S1} \cdot S_1 + t_{S2} \cdot S_2}{S_1 + S_2};$$

isto é, a média aritmetica, dos teores nas seções, ponderada pelas áreas das respectivas seções delimitadas. Finalmente a reserva P_{mu} (em metal útil), será:

$$P_{mu} = P \cdot t \cdot \frac{1}{100}; \text{ dado em toneladas.}$$

Generalizando:

- Tendo-se "n" seções transversais paralelas, (levantadas e amostradas por trabalhos subterrâneos ou por sondagem) conforme mostra a figura 15;

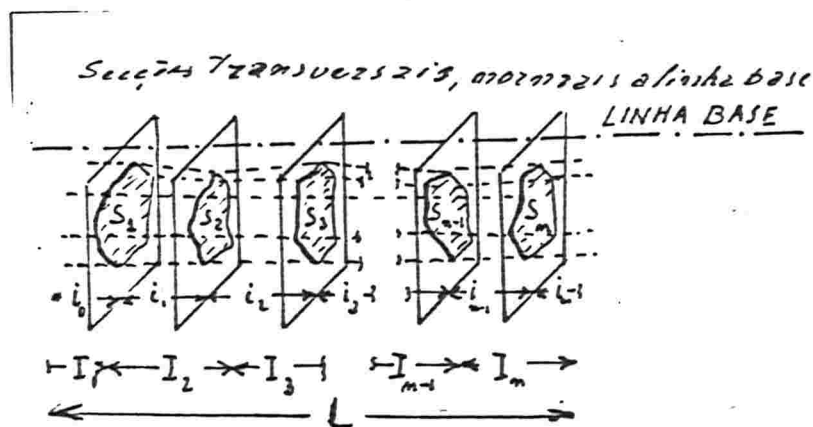


Fig 15

Poder-se-á estabelecer, com o mesmo critério das expressões de Truscott (3a), (3b) e (3c), as expressões:

$$T = \frac{\sum T_n \cdot S_n \cdot \frac{i_n + i_{n-1}}{2}}{\sum S_n \cdot \frac{i_n + i_{n-1}}{2}} \quad \text{Expressão (12)}$$

$$S = \frac{\sum S_n \cdot \frac{i_n + i_{n-1}}{2}}{\sum \frac{i_n + i_{n-1}}{2}} \quad \text{Expressão (13)}$$

Sendo:

- T = Teor médio do corpo de minério cubado.
- S = Área transversal média do corpo de minério cubado.
- S_n = Áreas delimitadas nas "n" seções transversais, levantadas na pesquisa.

Tn = Teores das "n" seções transversais, levantados na pesquisa.

$$\frac{I_n + I_{n-1}}{2} = I_n; \text{ intervalos de influência de cada uma das seções, (considerados de acordo com a Regra da Meia Distância).}$$

Tendo-se então para o volume "V" do corpo de minério:

$$V = S \cdot I_n = S \cdot L$$

Exemplo de cubagem utilizando os critérios das expressões de Truscott.

Exemplo nº 4

Cubagem de um bloco de minério delimitado pelas seções transversais EF e IJ da figura 16.

Este exemplo é de uma pesquisa preliminar num jazimento constituído por mineralização de cobre (sulfetos, predominando bornita, calcopirita e calcosita) e de óxidos de ferro com outros minerais. A mineralização ocorre em um complexo sistema de fraturas, e também disseminada nas rochas encaixantes (conglomerados e arenitos). A estrutura mineralizada pode ser definida como um "box work". (Exemplo de pesquisa na Mina do Camaquã - RS, no setor Uruguai, na década de 1950).

A pesquisa foi executada mediante sondagens à diamante, completada por algum trabalho mineiro subterrâneo, tendo-se feito levantamento das seções EF, GH e IJ perpendiculares a um alinhamento base, como mostra o mapa e as seções da figura 16.

- Obteve-se na seção EF (ver figura 16):

Na sondagem C 58-5 - 24 m mineralizados com o teor médio de 0,7% Cu;

Na sondagem C 58-2 - 83 m com teor de 0,9% Cu;

Na sondagem C 58-3 - 39 m com teor de 2,0% Cu, sem atravessar totalmente a faixa mineralizada; motivo pelo qual essa sondagem não será utilizada para calcular a reserva, servindo somente para confirmar o critério da continuidade da mineralização;

Na sondagem C 58 21 - (vertical), 55 m com teor médio de 1,6% Cu; no cálculo essa espessura mineralizada, será projetada na direção das outras sondagens da seção EF.

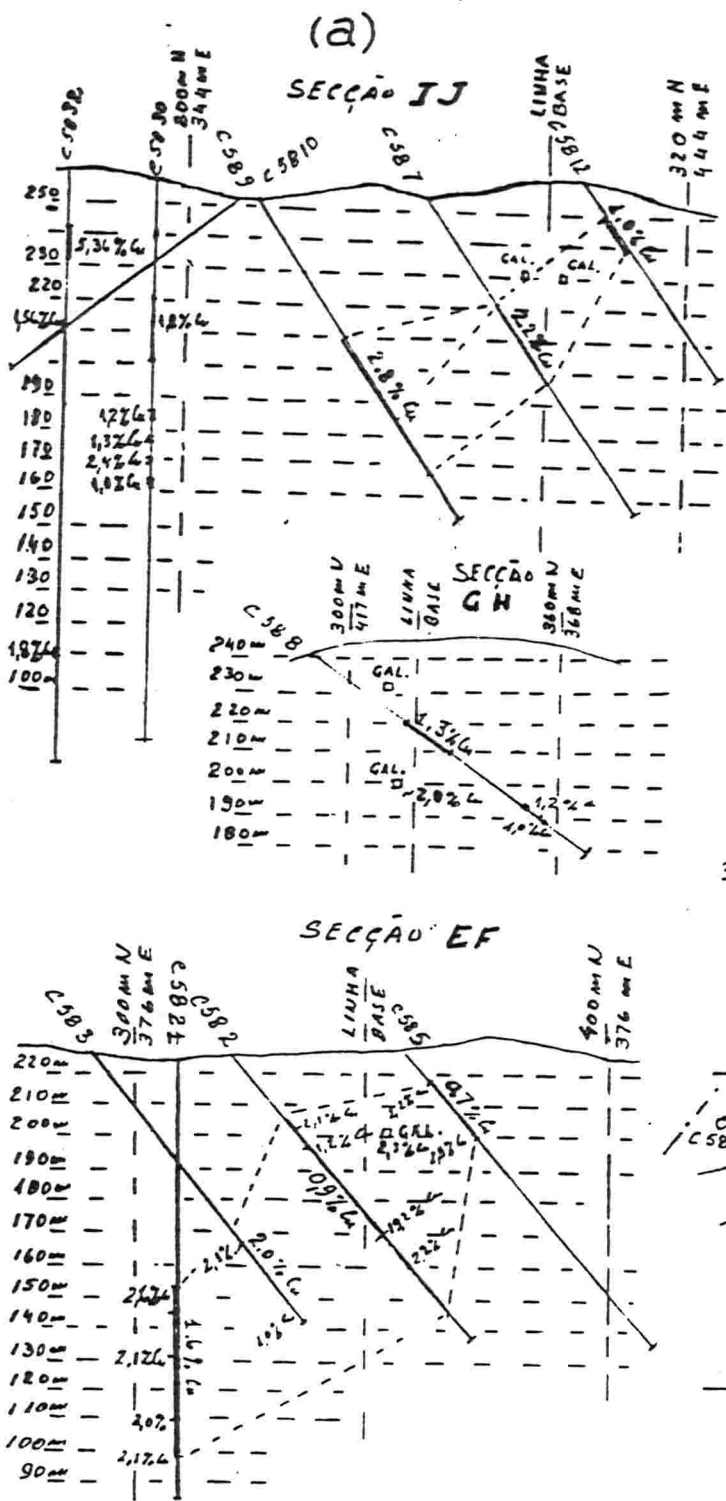


Fig. 16
 (a) - SECCÕES TRANSVERSAIS (VERTICAIS E PERPENDICULARES A LINHA BASE), VISTAS DE SE PARA NW E E
 (b) - MAPA BASE (DA SUPERFICIE); ESCALA 10m
 CUBAGEM MEDIANTE SECCÕES TRANSVERSAIS.

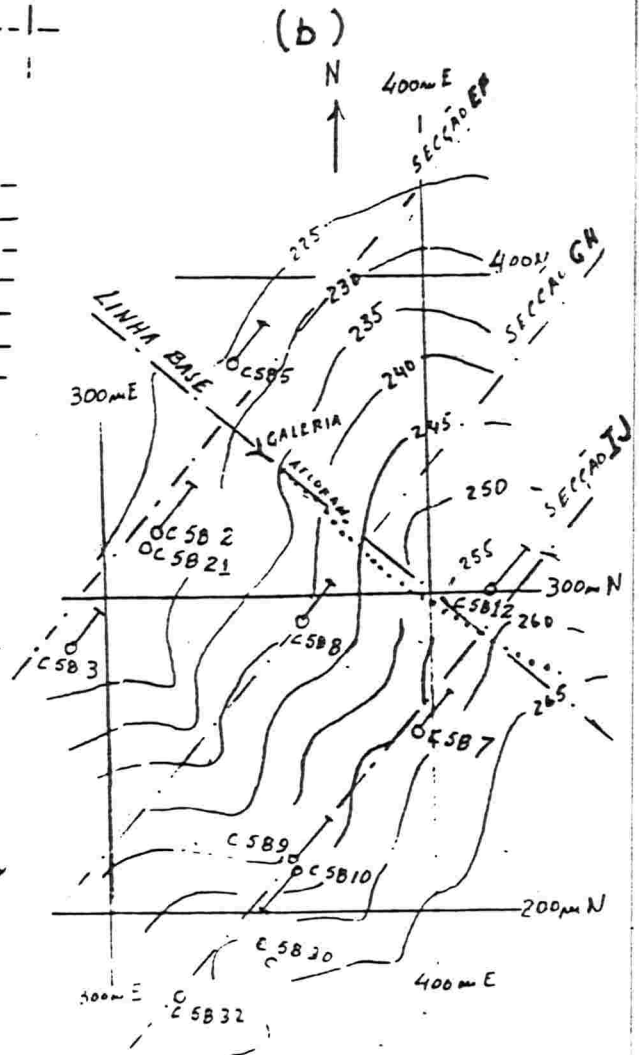


Fig 16

- Obteve-se na seção IJ (ver figura 16):
 Na sondagem C 58-12 - 14 m com teor médio de 1,0% Cu;
 Na sondagem C 58-7 - 29 m com teor médio de 2,2% Cu;
 Na sondagem C 58-9 - 49 m com teor médio de 2,8% Cu.
 No extremo SW da seção, aparece mineralização relacionada a outro corpo de minério, não considerado na presente cubagem.
- Obteve-se na seção GH, mineralização, na sondagem C 58-8 e nos trabalhos subterrâneos de duas galerias, os quais não foram suficientes para delimitar nessa seção o corpo de minério cubado. Por esse motivo foram desconsiderados no cálculo; serviram como indicio da continuidade do corpo de minério entre as duas seções consideradas (EF e IJ).

Então calculando-se:

Teor médio TEF e potência média WEF na face da seção EF:

Quadro 5

Sond.	Wn (m)	Tn (% Cu)	In (m)	WnIn (m ²)	WnInTn (m ² .% Cu)
C 58 5	24,00	0,70	30,00	720,00	504,00
C 58 2	83,00	0,90	50,00	4150,00	3735,00
* C 58 21	42,13	1,60	30,00	1263,00	2022,00
Somat.			110,00	6133,00	6261,00

* Projetada

Conforme expressões (3a) e (3b):

$$TEF = \frac{6261\% \text{ Cu } m^2}{6133 \text{ m}^2} = 1,0\% \text{ Cu}$$

Conforme expressão (7):

$$WEF = \frac{6133 \text{ m}^2}{110 \text{ m}} = 56 \text{ m}$$

Teor médio TIJ e potência média WIJ na face seção IJ:

Quadro 6

Sond.	Wn (m)	Tn (% Cu)	In (m)	WnIn (m ²)	WnInTn (m ² .% Cu)
C 58 12	14,00	1,00	21,50	301,00	301,00
C 58 7	29,00	2,20	43,50	1261,50	2775,30
C 58 9	45,00	2,80	22,00	990,00	2772,00
Somat.			87,00	2252,50	5848,30

Conforme expressões (3a) e (3b):

$$TIJ = \frac{5848,30\% \text{ Cu } m^2}{2252,50 \text{ m}^2} = 2,60\% \text{ Cu}$$

Conforme expressão (7):

$$WIJ = \frac{2252,50 \text{ m}^2}{87 \text{ m}} = 25,90 \text{ m}$$

Então para o bloco de minério compreendido entre as seções EF e IJ, tem-se:

Quadro 7

Seção	In (m)	S=Ws.2Is (m ²)	Ts (%Cu)	S.Is (m ³)	S.Is.Ts (m ³ .% Cu)
EF	50,00	6160,00	1,00	308000	308000,00
IJ	50,00	2253,00	2,60	112650	292890,00
Somat.	100,00		87,00	420650	600890,00

Finalmente, conforme a expressão (12):

T para o bloco de minério:

$$\frac{600890 \text{ m}^3 \cdot \% \text{ Cu}}{420650 \text{ m}^3} = 1,4\% \text{ Cu}$$

Conforme expressão (13):

S seção média do bloco de minério:

$$\frac{420650 \text{ m}^3}{100,00 \text{ m}} = 4206 \text{ m}^2$$

Volume do bloco de minério:

$$V = 4206 \text{ m}^2 \times 100 \text{ m} = 420650 \text{ m}^3$$

Reserva no bloco, para o peso específico $\approx 2,7 \text{ t/m}^3$

$$\text{Reserva} = 420650 \text{ m}^3 \times 2,7 \text{ t/m}^3 = 1135755 \approx 1135000 \text{ t}$$

ou

Reserva metal útil:

$$R_u = 1135755 \text{ t} \times 1,4\% \text{ Cu} \approx 15900 \text{ t de Cu contido}$$

Observação: Devido a complexidade do jazimento, não foi possível correlacionar os veios de minério detectados nas sondagens, sendo correlacionadas as faixas mineralizadas somente.

Os intervalos de influência adotados para cada sondagem foram estabelecidos em cada caso, adotando-se a **Regra da Média Distância**, extrapolando-se com base nas condições do jazimento.

b) Cubagem mediante **Perfis Longitudinais** (verticais) - Ver figura 14.

Sendo o perfil longitudinal paralelo a linha base, uma projeção da delimitação do corpo de minério num plano vertical paralelo a linha base, tem-se:

$$V = S_{\text{long.}} \left(\frac{\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH}}{4} \right); \text{ onde:}$$

V = Volume do corpo de minério delimitado entre as duas seções (a anterior e a posterior), dado em m³.

S_{long.} = Área (em m²) da delimitação do corpo de minério, conforme ela se apresenta no **Perfil Longitudinal**.

A reserva (em t) será $P = V \cdot S$
 O teor médio "t" para o corpo de minério (dado em % ou em ppm do metal útil) será:

$$t = \frac{\overline{AB} \cdot t\overline{AB} + \overline{CD} \cdot t\overline{CD} + \overline{EF} \cdot t\overline{EF} + \overline{GH} \cdot t\overline{GH}}{\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH}}$$

ou seja, o teor médio para o corpo de minério, será a média aritmetica dos teores obtidos em cada uma das espessuras atravessadas e amostradas, ponderada pelas ditas espessuras.

Observações:

- No caso da figura 14, admite-se que a atitude predominante do corpo de minério pesquisado tende a vertical. Nesse caso todas as espessuras atravessando o corpo de minério deverão serem sistematicamente (aproximadamente) **horizontais, e perpendiculares** a direção da linha base. Os raciocínios geométricos de cálculo de volume, tanto no que se refere aos mediante seções transversais ou perfis longitudinais, são válidos somente quando as espessuras medidas são em direções perpendiculares a linha base (e horizontais). Quando a atitude do corpo de minério tender a horizontal, as espessuras atravessadas na pesquisa (ou sejam os perfis exploratórios) deverão serem sistematicamente **verticais**, podendo-se fazer cálculos de cubagem mediante raciocínios geométricos igualmente simples, porém adequados a essa condição.
- Muitas vezes, no caso do corpo de minério tendendo a vertical, os perfis exploratórios (isto é, as espessuras atravessadas e amostradas) não são horizontais, mas tem inclinações variadas, e também podem não estar contidas em planos perpendiculares a linha base. Isso é comum quando a pesquisa é feita por sondagens inclinadas, as quais por dificuldades técnicas e limitações econômicas, não são posicionadas de modo a atravessarem perfeitamente perpendicular e horizontalmente, o plano da estrutura pesquisada. Nesses casos para que essa metodologia de cubagem, mediante seções seja aplicada, comprimentos correspondentes as espessuras amostradas deverão serem medidas nas suas projeções, nos planos das seções transversais, e estas ultimas medidas, devem serem projetadas na horizontal.
- Com esses cuidados, os erros geométricos cometidos nos cálculos de volume e os relacionados aos comprimentos utilizados como fatores de ponderação nos cálculos dos teores, serão insignificantes. Em qualquer caso sempre se poderá calcular as reais espessuras horizontais e transversais, mediante raciocínios geométricos simples,

(desde que se conheça as atitudes das sondagens e dos planos das estruturas pesquisadas).

Exemplo de cubagem mediante levantamento de **Perfil Longitudinal**.

Exemplo nº 5

- A figura 17 à página 44, mostra o mapa base de pesquisa na área 1 da jazida da Volta Grande em Lavras do Sul - RS, executado pela CRM na década de 1970, cujos dados foram liberados para fins didáticos.

O jazimento é vulcanogênico filoniano condicionado por fraturas em tufos andesíticos. A mineralização é de preenchimento das fraturas, predominantemente com calcopirita e pirita acompanhadas de intensa silicificação. Praticamente não ocorre disseminação nas rochas encaixantes. Foram feitas sondagens inclinadas com rumos aproximadamente perpendiculares às direções predominantes dos filões. Preliminarmente também trincheiras, poços rasos e cinco pequenas galerias de encosta, para identificar os filões, próximo a superfície do terreno e ao longo de suas direções. A pesquisa superficial permitiu identificar dois pequenos filões aproximadamente paralelos, com direção SE pa NW. O filão ao norte, denominado filão principal, mostra nítida inflexão na sua intersecção com a coordenada 2000m leste. Aproximadamente paralelas às duas direções identificadas deste filão, foram estabelecidas as respectivas linhas base para orientar a pesquisa. A primeira linha base com rumo NW 84º40' no lado oeste do ponto de coordenadas 2000m E e 1860m N; a segunda linha base, no lado leste desse ponto, com rumo NW 67º45'. As sondagens (com diversas inclinações) foram perfuradas em rumos normais as linhas bases (excetuando duas sondagens com rumos pouco diferentes dessas direções).

Com os resultados dessas sondagens foram construídas seções **transversais** (verticais), que permitiram o estudo estrutural em subsuperfície. Mediante a amostragem, concluiu-se que somente o filão situado ao norte (denominado Filão Principal) tem expressão econômica. Concluiu-se que esse filão mergulha cerca de 80º para SW. Finalmente, a partir dos dados levantados nas seções **transversais**, foi construído o **perfil longitudinal composto** desse filão interessante, o qual é mostrado na figura 18 à página 45.

O lado oeste deste perfil composto (a partir do ponto 1860m N e 2000m E), é uma vista de SE para NE dos elementos do filão Principal, e das sondagens, como aparecem nas seções Transversais, projetadas normalmente, num plano vertical, paralelo a linha base (no rumo NW 84º40'). O lado leste deste perfil composto (a partir do mesmo ponto 1860m N e 2000m E), é a vista num plano vertical dos elementos do filão, projetados normalmente num plano paralelo ao rumo NW 67º45'; porém este último

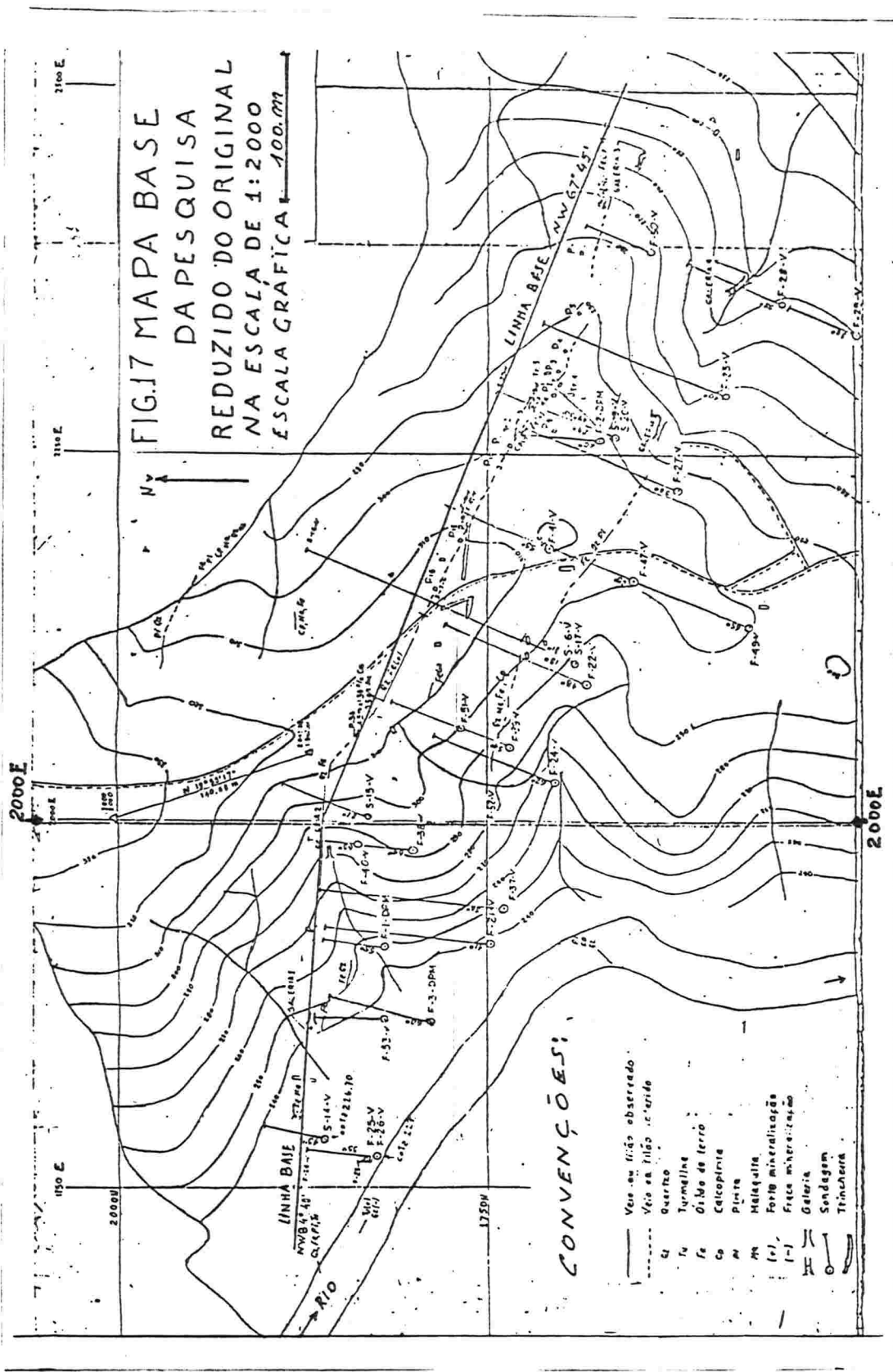
plano é apresentado rebatido, na mesma direção daquela do lado oeste. Os dados de espessura do filão, amostrados no **Perfil Composto**, são os dos comprimentos atravessando o filão, medidos ao longo das sondagens (espessuras aparentes); os dados de teores, são os obtidos na amostragem dessas espessuras. Os dados de espessuras e teores, amostrados no caso das galerias, são os de amostragem de canal (transversalmente e horizontalmente no filão).

No perfil composto (como mostra a figura 18), foi possível delimitar (na projeção num plano vertical da face do filão), a área considerada rentável do filão pesquisado. As espessuras do filão medidas transversalmente e horizontalmente (Eh) em cada sondagem, serão as espessuras horizontais como aparecem nas respectivas seções transversais (normais às respectivas linhas base). Essas espessuras Eh, no caso das sondagens com rumos normais às linhas base, são praticamente iguais, aos comprimentos atravessados pelas sondagens, multiplicados pelos cosenos dos ângulos de inclinação das mesmas.

O quadro nº 8, apresenta os resultados obtidos com esses critérios no âmbito da área delimitada como sendo a parcela rentável do filão (no **perfil composto** figura 18).

Quadro 8

!	! Comp.!	Eh !	TnCu !	TnAu !	ZnCu=TnCu.Eh !	ZnAu=TnAu.Eh !
!	! (m) !	! (m) !	! (%Cu)!	!(ppmAu)!	! (%Cu.m) !	! (ppm.Au.m) !
! GAL 1!	-	1,60!	1,70!	1,00!	2,720 !	1,600 !
! GAL 2!	-	1,20!	1,20!	1,00!	1,440 !	1,200 !
! F1DPM!	23,00!	13,19!	1,40!	0,10!	18,466 !	1,319 !
! F 40 !	5,00!	2,11!	0,50!	0,30!	1,055 !	0,633 !
! F 38 !	7,00!	2,16!	0,80!	2,60!	1,728 !	5,616 !
! F 15 !	4,00!	3,73!	1,10!	0,40!	4,103 !	1,492 !
! F 24 !	9,00!	4,23!	0,90!	0,60!	3,807 !	2,538 !
! F 39 !	16,00!	9,40!	1,20!	1,00!	11,280 !	9,400 !
! F 22 !	11,00!	7,36!	1,40!	1,80!	10,304 !	13,248 !
! F 16 !	2,00!	1,71!	1,90!	0,10!	3,249 !	0,171 !
! F 17 !	6,00!	5,80!	1,90!	0,10!	11,020 !	- !
! F 41 !	21,00!	12,34!	0,60!	0,30!	7,404 !	3,702 !
! F 47 !	34,00!	14,37!	0,90!	0,20!	12,933 !	2,874 !
! F2DPM!	12,50!	4,50!	1,00!	0,20!	4,500 !	0,900 !
! F 20 !	9,00!	3,95!	0,70!	0,10!	2,765 !	0,395 !
! Somat !		87,65!	17,20!		96,774 !	45,088 !
! Média !		5,84!	1,15!		6,4516!	



Observação: Os valores relacionados nesse quadro e na figura 17, não são os resultados reais da pesquisa; foram modificados para se tornarem mais didáticos; os tores em ouro foram aumentados.

A área da parte rentável "A" delimitada no Perfil Longitudinal composto (figura 18), medida diretamente na figura: , A = 81882 m².

Conforme raciocínio geométrico simples, o volume do corpo de minério rentável (conforme delimitação no Perfil):

$$\text{Volume} = A \times \text{média Eh} = 81882\text{m}^2 \times 5,84\text{m} = 478191 \text{ m}^3$$

Sendo o peso específico do minério estimado em 2,7 t/m³ tem-se:

$$\text{Reserva} = \text{Volume} \times \text{pe} = 478191\text{m}^3 \times 2,7 \text{ t/m}^3 = \sim 1291000 \text{ t}$$

O teor médio em cobre tem no corpo rentável delimitado:

$$\text{TCu} = \frac{\sum (\text{Eh} \cdot \text{TnCu})}{\sum \text{Eh}} = \frac{\sum \text{ZnCu}}{\sum \text{Eh}} = \frac{96774 \text{ \%Cu} \cdot \text{m}}{87,65 \text{ m}} = \sim 1,1 \text{ \%Cu}$$

A reserva de cobre contido:

$$\text{TCu contido} = 1291000\text{t} \times (1,1 / 100) = \sim 14200\text{t de Cu contido}$$

O teor médio em ouro nesse mesmo corpo de minério:

$$\text{TnAu} = \frac{\sum (\text{Eh} \cdot \text{TnAu})}{\sum \text{Eh}} = \frac{\sum \text{ZnAu}}{\sum \text{Eh}} = \frac{45088 \text{ ppmAu} \cdot \text{m}}{87,65 \text{ m}} = \sim 0,5 \text{ ppmAu}$$

Concluindo-se:

Nessa pesquisa preliminar estimou-se uma reserva rentável de 1291000 t de minério de cobre com o teor de 1,1 %Cu, contendo adicionalmente cerca de 0,5 gramas de ouro/tonelada de minério.

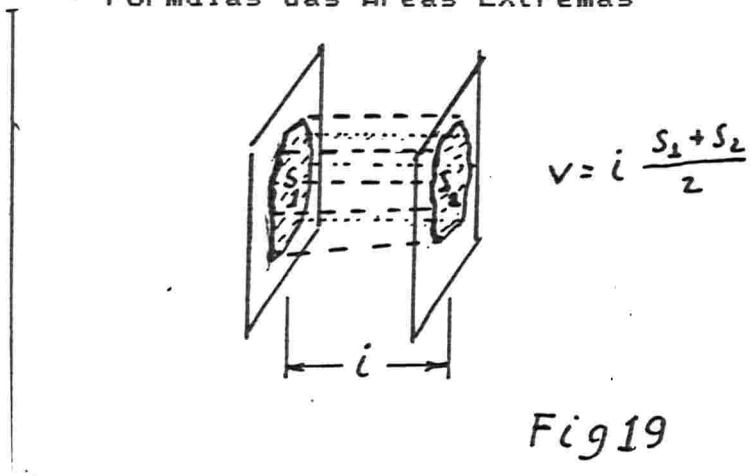
Observação: Em jazimentos metálicos semelhantes ao do presente exemplo, esses critérios de cálculo com volume de trabalhos de pesquisa do mesmo, levam a se estimar reserva, com precisão geralmente aceitável como reserva medida, pelos órgãos fiscalizadores e empresas. Entretanto análises elementares, com base em parâmetros estatísticos clássicos adotados em Pesquisa Mineral, demonstram que os resultados assim obtidos, não podem ser rigorosamente compatíveis com as de **Reserva Medida**. Nesses casos são indicados trabalhos mineiros adicionais.

Nos exemplos nº 16 à página 136, nº 20 à página 146 e nº 25 à página 162, serão feitas as análises referidas.

c) Outras fórmulas para se calcular volumes:

Quando os corpos de minério são delimitados mediante seções **Transversais**, as fórmulas que se seguem, são também muito utilizadas.

- **Formulas das Áreas Extremas**



Na situação da figura 19, se poderá estimar o volume "V" delimitado entre cada duas seções, mediante a expressão (14), a qual é chamada **Fórmulas das Áreas Extremas**:

$$V = i \cdot \frac{S_1 + S_2}{2}; \quad \text{Expressão (14)}$$

S1 e S2 são as áreas delimitadas, em cada uma das seções, e "i" é distância que as separa. Desse modo todo o corpo de minério, seccionado por "n" seções **Transversais**, poderá ser cubado mediante o somatório dos volumes parciais entre cada duas seções.

- **Fórmula Prismoidal**

Conforme mostra a figura 20, quando na pesquisa forem levantadas "n" seções transversais (paralelas e perpendiculares a linha base); se os intervalos "i" que as separam forem aproximadamente iguais; sendo S1, S2, ..., Sn as áreas delimitadas em cada uma das seções, ter-se-á para o volume V do corpo de minério (aplicando a regra da **Meia Distância**):

$$V = 1/2.i.S_1 + 1/2.i.S_2 + 1/2.i.S_2 + \dots + 1/2.i.S_{n-1} + 1/2.i.S_{n-1} + 1/2.i.S_n$$

ou

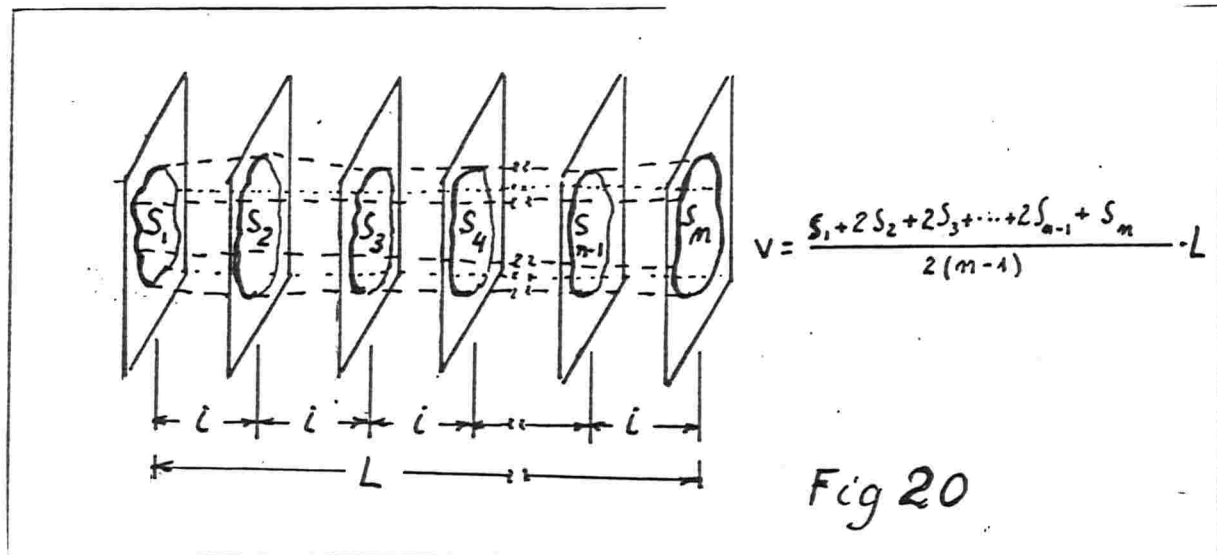
$$V = (1/2.S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + 1/2.S_n).i$$

Sendo "L" a distância entre as seções extremas tem-se: $i = \frac{L}{n-1}$;

Substituindo e simplificando:

$$V = \frac{(S_1 + 2.S_2 + 2.S_3 + \dots + 2.S_{n-1} + S_n).L}{2.(n-1)}$$

Expressão (15)
Fórmula
Prismoidal



- Fórmula do **Prismóide** ou também chamado **Prismatóide**.

Prismatóide na geometria, é definido como um poliedro irregular cujos vértices estão em dois planos paralelos, nos quais estão contidas suas bases. Suas bases podem ser polígonos com lados retilíneos e também curvilíneos. São prismatóides os seguintes sólidos: esféricos, cilíndricos, cônicos ou elipsoidais, desde que seccionados mediante planos paralelos.

As superfícies laterais do Prismatóides sempre poderão ser consideradas como se fossem constituídas por superfícies elementares planas, delimitadas por retas unindo dois vértices, um em cada uma das bases. Desse modo é constituindo um sólido, como representado nas figuras 21a e 21b.

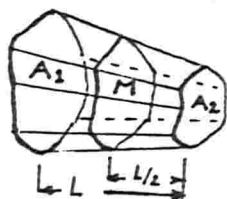


Fig 21 a

$$V = \frac{L}{6} (A_1 + 4M + A_2)$$

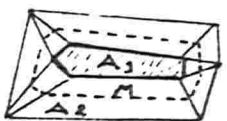


Fig 21 b

Conhecendo-se as áreas das bases A_1 e A_2 , do **Prismatóide**; a área "M" da seção paralela às bases, que o secciona a meia distância entre as mesmas "L"; a Geometria fornece a expressão (16), pela qual se poderá calcular rigorosamente o volume "V" desse poliedro.

$$V = L/6(A_1 + 4.M + A_2);$$

expressão (16)

Observe-se que a medida de "M", em geral, não é a média das medidas das bases A_1 e A_2 .

A fórmula do **Prismatóide** é adequada para ser assimilada à formas irregulares de montes de pedra, montes de areia, de volumes de aterros e de valas, assim como daquela forma dos corpos de minério que se define como de formas "lenticulares". Por esse motivo a expressão (16), é muito empregada em calculo de volumes e reservas, em obras de Engenharia Civil e em Pesquisa Mineral.

Exemplos de cubagem mediante seções transversais utilizando as fórmulas das áreas extremas, do prismóide e do prismatóide:

Exemplo nº 6:

Cubagem do corpo de Minério Sul, da jazida do Cerro dos Andradas em Caçapava do Sul - RS, (dados da pesquisa feita pela CRM em 1974 e 75, liberados para fins didáticos).

O jazimento é de minério de cobre de baixo teor, muito oxidado, num pacote de rochas do Pré Cambriano (xistos verdes e meta sedimentos). A mineralização é de calcosita, calcopirita, bornita, pirita, crisocola, malaquita, cuprita, cobre nativo, hematita, óxido de ferro hidratado, calcita, sílica coloidal e quartzo, ocorrendo em fraturas e também disseminada na rocha.

O controle estrutural (conhecido mediante detalhado mapeamento geológico) é ao longo de fraturamentos com direção predominante NE 240, subordinados à uma falha principal de direção aproximadamente N - S. Foram identificados três diferentes corpos de minério, sendo a cubagem do corpo de minério sul a do presente exemplo. Ver planta figura 22.

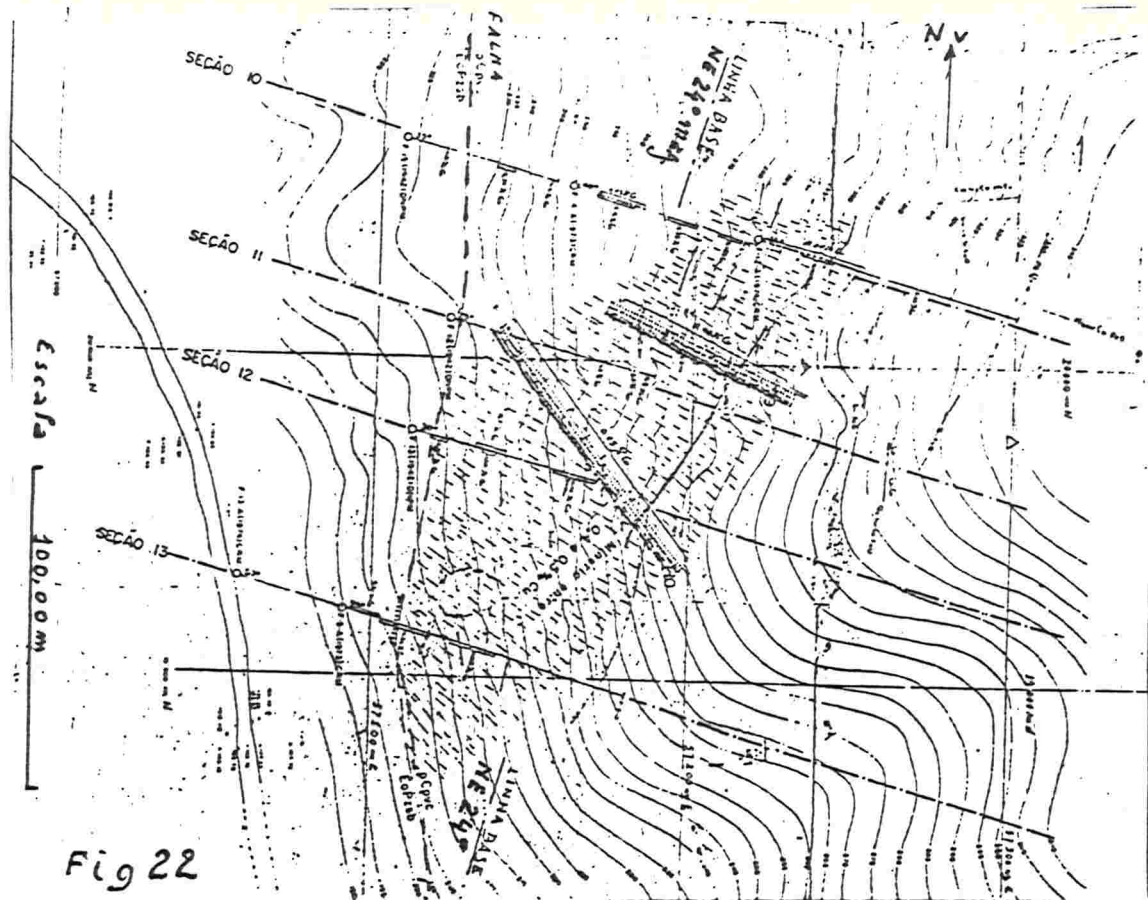


Fig 22

A partir do resultado do mapeamento, foi estabelecido uma linha base no rumo mag. NE 24° e foram executadas sondagens inclinadas no rumo mag. SE 66°. Com os resultados das sondagens, e de amostragem realizada em duas trincheiras, foram construídas quatro seções transversais (Verticais), denominadas seção 10 à 13, como mostram as figuras 22 e 23 (planta e seções).

Na elaboração das seções 11 e 12, foram projetadas nas suas direções, os dados de amostragem de cada uma das trincheiras (as quais tem outras direções).

Como se verifica nas figuras 22 e 23, mediante as seções, foi delimitado o corpo de **Minério Sul**, cuja forma pode ser definida como lenticular.

No procedimento de cubagem, foram desconsideradas as duas partes extremas situadas externamente as seções 10 e 13 (isso significando critério de segurança na estimação da reserva).

O teor em cobre em cada uma das faces, delimitadas nas seções, é estimado uniformemente, está compreendido entre 0,3% e 0,4% Cu (com teor de corte 0,3% Cu).

As áreas delimitadas com esse teor, em cada uma das seções (S1, S2, S3 e S4) e as distâncias horizontais, (intervalos i1, i2 e i3 que as separam), são a seguir relacionadas:

Seção 10 ---> S1 = 7300 m²
 Seção 11 ---> S2 = 2400 m² i1 = 50,00 m
 Seção 12 ---> S3 = 3200 m² i2 = 36,00 m
 Seção 13 ---> S4 = 5500 m² i3 = 50,00 m

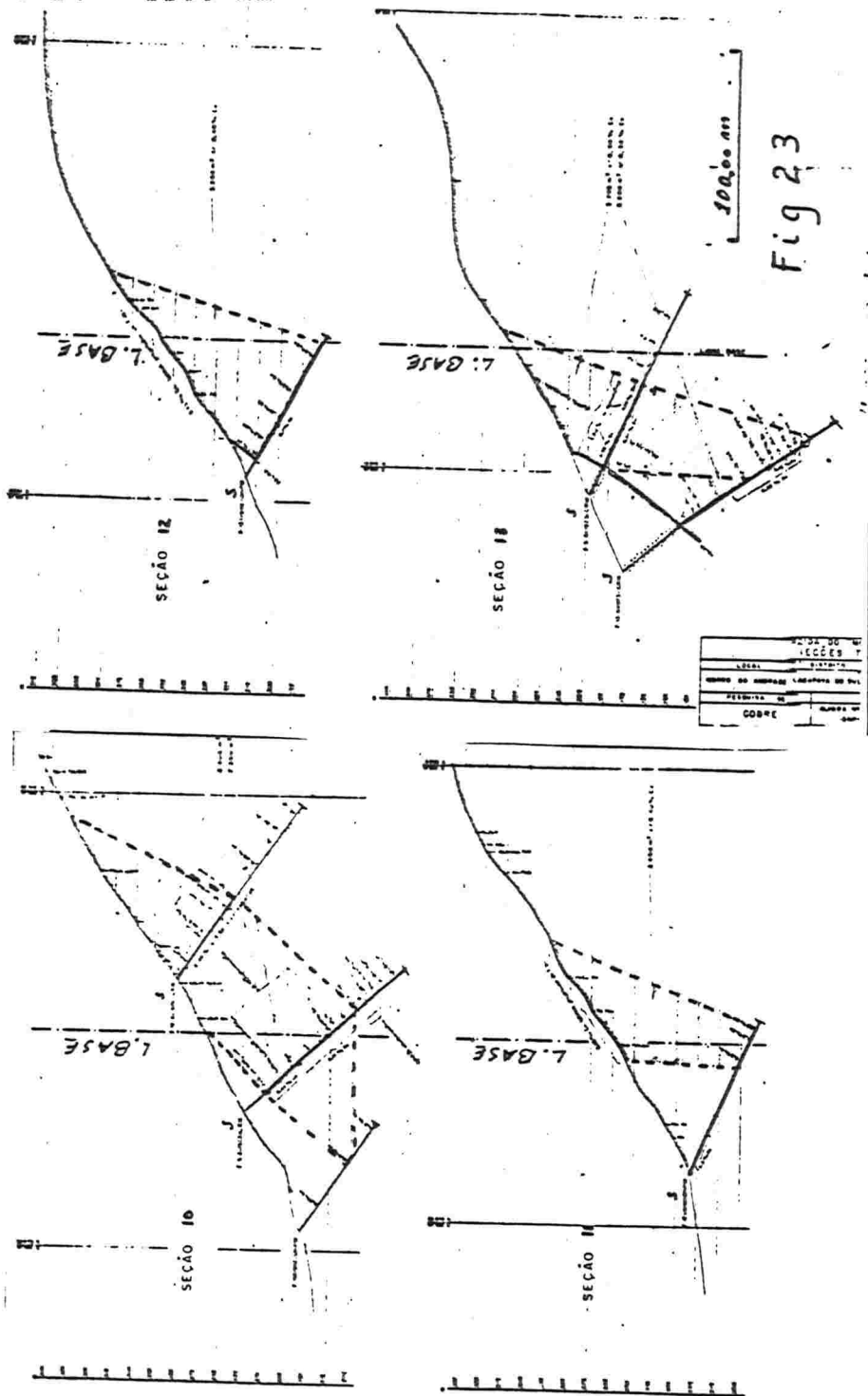


Fig 23

Então se poderá alternativamente, estimar o volume "V" do corpo de minério, calculando-se pelos três procedimentos a seguir:

1º - Mediante os critérios das fórmulas de **Truscott**, expressão (13).

- Seção média "S" com teor entre 0,3 e 0,4% Cu, conforme a expressão (13):

$$S = \frac{\sum S_n \cdot I_n}{\sum I_n}$$

$$S = \frac{7300 \cdot \frac{50}{2} + 2400 \cdot \frac{50 + 36}{2} + 3200 \cdot \frac{36 + 50}{2} + 5500 \cdot \frac{50}{2}}{50 + 36 + 50} =$$

$$S = 4123,53 \text{ m}^2$$

$$\text{Volume} \rightarrow V = 4123,53 \text{ m}^2 \cdot (50 \text{ m} + 36 \text{ m} + 50 \text{ m}) = 560800 \text{ m}^3$$

2º - Mediante a fórmula das áreas extremas, conforme expressão (14): $V = j \cdot ((S_1 + S_2)/2)$, o procedimento mais adequado para o presente problema:

$$\text{Volume entre seções 10 e 11} = 50 \cdot \frac{7300 + 2400}{2} = 242500 \text{ m}^3$$

$$\text{Volume entre seções 11 e 12} = 36 \cdot \frac{2400 + 3200}{2} = 100800 \text{ m}^3$$

$$\text{Volume entre seções 12 e 13} = 50 \cdot \frac{3200 + 5500}{2} = 217500 \text{ m}^3$$

$$\text{Volume "V" total do corpo de minério} \dots \dots \dots 560800 \text{ m}^3$$

3º - Mediante a fórmula do **Prismóide** $V = L/6 \cdot (A_1 + 4 \cdot M + A_2)$ expressão (16)

- Idealizando-se a existência de uma seção "M" situada na metade da distância horizontal que separa as seções extremas 10 e 13, cuja a área delimitada fosse a média das áreas delimitadas nas seções 11 e 12, teria-se

$$M = (2400 + 3200)/2 = 2800 \text{ m}^2$$

Tendo-se $A_1 = 7300 \text{ m}^2$ e $A_2 = 5500 \text{ m}^2$ e

$L = 50\text{m} + 36\text{m} + 50\text{m} = 136\text{m}$; calcula-se conforme a expressão (16):

$$V = (136\text{m}/6) \cdot (7300\text{m}^2 + 4 \cdot 2800\text{m}^2 + 5500\text{m}^2) = 544000 \text{ m}^3$$

Estimando-se o peso específico do minério em $2,7 \text{ t/m}^3$, se calcula a **Reserva** de minério, (praticamente equivalente adotando-se os três procedimentos):

$$\text{Reserva} = 560800\text{m}^3 \times 2,7\text{t/m}^3 = 1514160 \text{ t} \approx 1500000 \text{ t}$$

$$\text{Reserva} = 544000\text{m}^3 \times 2,7\text{t/m}^3 = 1468000 \text{ t} \approx 1500000 \text{ t}$$

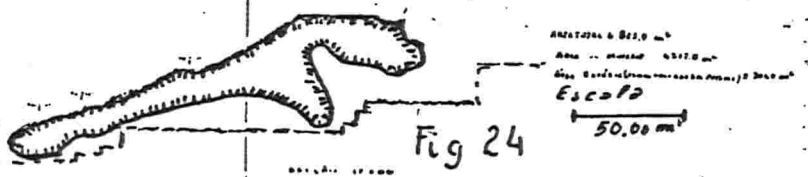
Observação: O objetivo dessa pesquisa foi para estudar a possibilidade de aproveitamento dos jazimentos do RS, com baixos teores e em condições muito fáceis de serem lavradas, visando aproveitamento mediante processos econômicos de obtenção de cobre, por lixiviação do minério.

Exemplo nº 7

Cubagem de uma bancada preparada para o desmonte numa mineração à céu aberto, de minério de manganês. O jazimento é de corpos maciços de, principalmente criptomelana mais pirolusita, originados por enriquecimento supergênico nos processos de intemperismo, de um protominério carbonatado, constituído principalmente de rodocrosita. As rochas encaixantes do minério, são xistos intemperizados, (do manto de intemperismo).

O teor do minério é de cerca de 44% Mn com peso específico entre $3,0$ à $3,5 \text{ t/m}^3$, e as rochas encaixantes (intemperizadas) tem peso específico em torno de $1,8 \text{ t/m}^3$.

Na pesquisa de acompanhamento da lavra, do projeto para lavra de uma bancada, foram levantadas cinco seções transversais, equidistantes entre si de $40,00 \text{ m}$, delimitando o bloco de minério, juntamente com as rochas encaixantes estéreis, a serem desmontadas na bancada. Ver figura 24.



As áreas delimitadas nas seções, medidas com planímetro foram:

Seção 16 + 00m
 Área do minério = 2295 m²
 Área do estéril = 2505 m²

Seção 16 + 40m
 Área do minério = 2827 m²
 Área do estéril = 1968 m²

Seção 16 + 80m
 Área do minério = 3165 m²
 Área do estéril = 2120 m²

Seção 17 + 20m
 Área do minério = 3590 m²
 Área do estéril = 3510 m²

Seção 17 + 60m
 Área do minério = 4517 m²
 Área do estéril = 2306 m²

Calculando-se os volumes de minério e do estéril pela fórmula Prismoidal, o procedimento mais adequado no caso deste exemplo:
 Fórmula Prismoidal, expressão (15);

$$V = \frac{(S_1 + 2 \cdot S_2 + 2 \cdot S_3 + \dots + S_n) \cdot L}{2 \cdot (n - 1)}$$

$$V_{\text{min}} = \frac{(2295 + 2 \cdot 2827 + 2 \cdot 3165 + 2 \cdot 3590 + 4517) \cdot 160}{2 \cdot (5 - 1)} = 519520 \text{ m}^3$$

$$V_{est} = \frac{(2505 + 2.1968 + 2.2120 + 2.3510 + 2304)}{2 \cdot (5 - 1)} \cdot 160 = 400140 \text{ m}^3$$

Volume total de **Minério + Estéril** a ser desmontado.....919660 m³

- Reserva de minério preparada para ser extraída:

$$519520 \text{ m}^3 \times 3,2 \text{ t/m}^3 = 1662464 \text{ t} \approx 1662400 \text{ t}$$

Parâmetros interessantes na operação de lavra:

- Relação volumétrica do estéril para o minério na operação do desmonte:

$$(400140 \text{ m}^3 / 519520 \text{ m}^3) = 0,77 \approx 0,80$$

- Relação das toneladas de minério a serem obtidas para cada 1 m³ de rocha (minério + estéril) desmontado:

$$(1662464 \text{ t} / 919660 \text{ m}^3) = 1,81 \text{ t/m}^3$$

Alternativa de cálculo utilizando-se a fórmula **Prismóide** $V = (L/6) \cdot (A_1 + 4 \cdot M + A_2)$, expressão (16), a qual seria mais adequada no caso em que se tivesse somente três seções transversais (nos extremos e no meio do corpo de minério). Não presente exemplo supondo-se que se dispusesse somente das três seções 16 + 00m, 16 + 80m e 17 + 60m, calcularia-se:

$$V_{min} = (160 \text{ m} / 6) \cdot (2295 \text{ m}^2 + 4 \cdot 3165 \text{ m}^2 + 4517 \text{ m}^2) = 519253,3 \text{ m}^3$$

$$V_{est} = (160 \text{ m} / 6) \cdot (2505 \text{ m}^2 + 4 \cdot 2120 \text{ m}^2 + 2306 \text{ m}^2) = 354426,7 \text{ m}^3$$

Volume total (minério+estéril) a ser detonado..873680,0 m³

- Reserva de minério preparada para ser extraída:

$$(519253,3 \text{ m}^3 \times 3,2 \text{ t/m}^3) = 1661610,6 \text{ t} \approx 1661600 \text{ t}$$

- Relação (volumétrica) estéril/minério;

$$(354426,7 \text{ m}^3 / 519253,6 \text{ m}^3) = 0,68 \approx 0,70$$

- Relação t de minério/1 m³ de rocha desmontada:

$$(1661610,6 \text{ t} / 873680 \text{ m}^3) = 1,9 \text{ t/m}^3$$

- Considerando-se que nas estimativas com base da fórmula do **Prismóide**, não foram consideradas duas seções transversais, os resultados obtidos são coerentes com os obtidos com base na fórmula **Prismoidal**.

3.3 - Cubagens mediante parcelamento do corpo de minério em blocos prismáticos, cujas bases são delimitadas em planta, (numa malha de pesquisa). São procedimentos muito utilizados quando a pesquisa é feita mediante malha de sondagens verticais ou de poços rasos. Aplicam-se na pesquisa de corpos de minérios horizontalizados (jazimentos sedimentares, aluviões e outros). Comportam diversificações.

a) Delimitação das bases dos blocos, delimitando as presumidas áreas de influência dos pontos testados na malha conforme a regra da **Meia Distância**.

Os polígonos são delimitados em planta por retas perpendiculares levantadas à meia distância, dos segmentos que unem cada ponto testado (sondado), com os pontos testados vizinhos.

No caso de uma malha irregular como representado na figura 25, os blocos terão bases constituídas

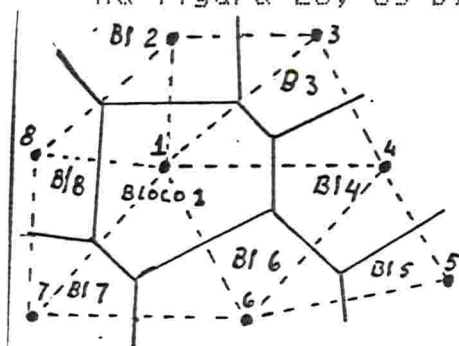


Fig 25

por polígonos irregulares. A altura atribuída para cada prisma será a espessura de minério atravessada pela sondagem que o centraliza. Teor (outra característica do minério) de cada bloco, será o valor obtido na amostragem da mesma sondagem central. O volume de minério para toda a malha, será o somatório do volume dos blocos delimitados.

O teor médio assim como a espessura média para toda a malha, serão as médias aritméticas dos respectivos valores desses atributos, estimados para cada bloco, ponderados pelos valores dos volumes calculados para os blocos.

Esse procedimento poderá ser adotado nos casos que seguem:

- Caso de malha regular, como a malha losangular (ou triangular) representada na figura 26.

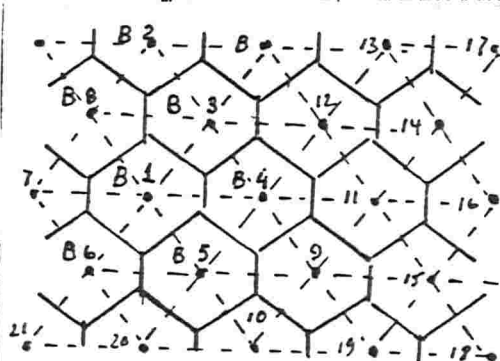
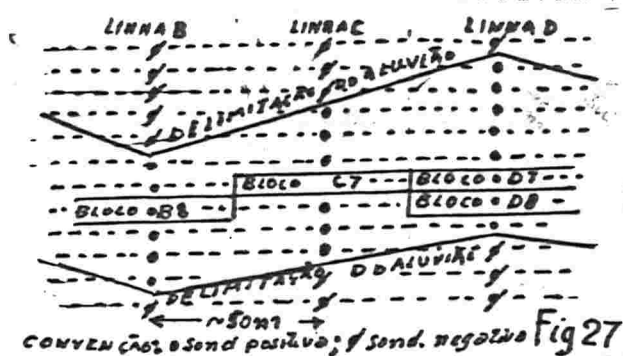


Fig 26

As bases dos prismas serão polígonos regulares (hexágonos), facilitando os cálculos de cubagem.

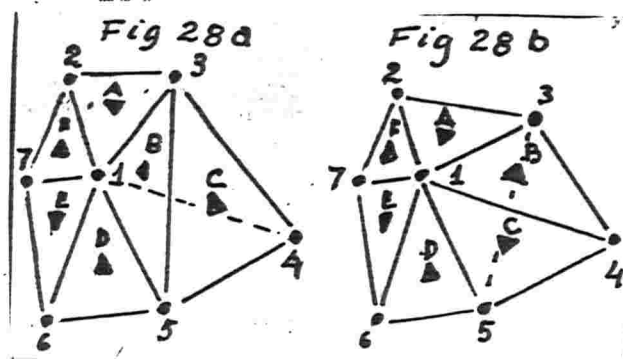
Essa seria uma malha adequada para pesquisa de um grande aluvião.

- Caso de uma malha constituída por perfis exploratórios



paralelos, como o representado na figura 27, adequado para pesquisa de um alívio com uma direção bem definida. A malha resulta num padrão retangular e os blocos elementares delimitados, serão prismas de base retangular.

b) Parcelando a reserva da malha pesquisada, mediante blocos prismáticos de bases triangulares, porém cujos vértices serão três pontos contíguos testados na malha, conforme representados na figura 28.



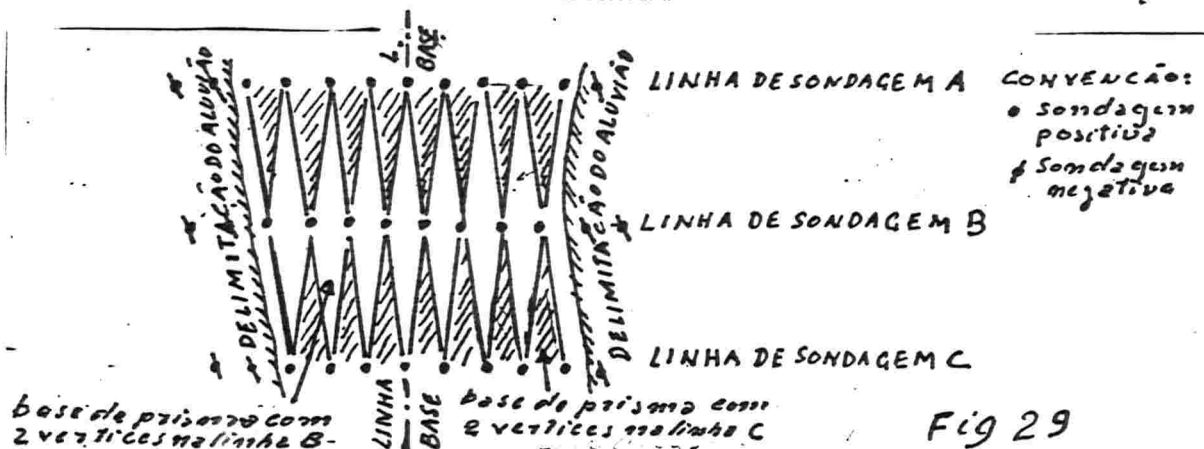
Para cada bloco elementar delimitado, o volume é calculado multiplicando a área triangular de sua base pela respectiva altura. A altura será a média aritmetica das espessuras de minério encontrados nos três pontos que delimitam a base.

As área "A" das bases serão calculadas através dos semiperímetros $p = 1/2.(a + b + c)$, mediante a fórmula $A = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}$.

O teor estimado para cada bloco prismático elementar, será a média aritmetica, dos teores nas espessuras de minério atravessadas, pelas três sondagens que delimitam o bloco, ponderada, pelas mesmas espessuras. Como nos casos de cubagem mediante delimitação em blocos prismáticos elementares, as reservas e teores para toda a malha pesquisada; serão respectivamente, o somatório das reservas dos blocos e, as médias ponderadas de seus teores, pelas respectivas reservas parciais dos blocos. Ver exemplo de cubagem de jazimento de urânio com essa metodologia, ver figura 30 e planilha de cálculo, quadro nº 9 (às páginas 60 e 59).

Esse é um procedimento de cubagem adequado, para a malha de pesquisa irregular, podendo também ser adotada para malhas regulares. No caso de malha irregular, existe indeterminação com respeito a forma de se considerar os blocos, como mostra as duas alternativas possíveis para delimitar os blocos 2 e 3 nas figuras 28a e 28b. Para resolver essa indeterminação adota-se um ou outro dos seguintes critérios:

- Escolher os três vértices de modo a dar resultados mais pessimistas (como critério de segurança).
- Escolher de forma que os três pontos incluídos em cada bloco representasse a alternativa da menor disparidade (nos teores e espessuras) três pontos considerados num mesmo triângulo.
- O caso da figura 29 apresenta diversificações dessa metodologia, adequada para pesquisa de depósito aluvionar com direção definida. Nesses dois pontos das bases dos triângulos, são tomados alternativamente em cada linha (ou perfil exploratório) contíguos, e o terceiro vértice tomado na outra linha vizinha.



Exemplo de estimação de reservas numa malha de sondagem irregular, delimitando prismas de bases triangulares.

Exemplo nº 8

A figura 30 à página 60 representa a planta de uma área pesquisada para urânio mediante malha irregular de sondagens a diamante. O jazimento é constituído por deposição de carnotitas em arenitos, mediante deposição a partir de águas percolantes (exemplo idealizado, com base de resultados publicados em Wolf 1957 ret. cit. de pesquisa, publicados em jazimentos típicos norte americanos cubado com esse método). Os triângulos representados em plantas são representados pelas convenções ▲1 à ▲13 e ▲1A, ▲10A, ▲11A, ▲11B e ▲5A, cujos vértices são os furos de sondagens (reais, ou fictícios). Para delimitação de triângulos nas bordas do jazimento foram estabelecidos os vértices A, B, C, J, onde idealmente, considerou-se terem sido executados furos de sondagem fictícios.

Os teores e espessuras consideradas para esses pontos ideais, são resultados interpolados de dois furos de sondagem reais, positivos e negativos, vizinhos do ponto e situados, internamente e externamente na malha.

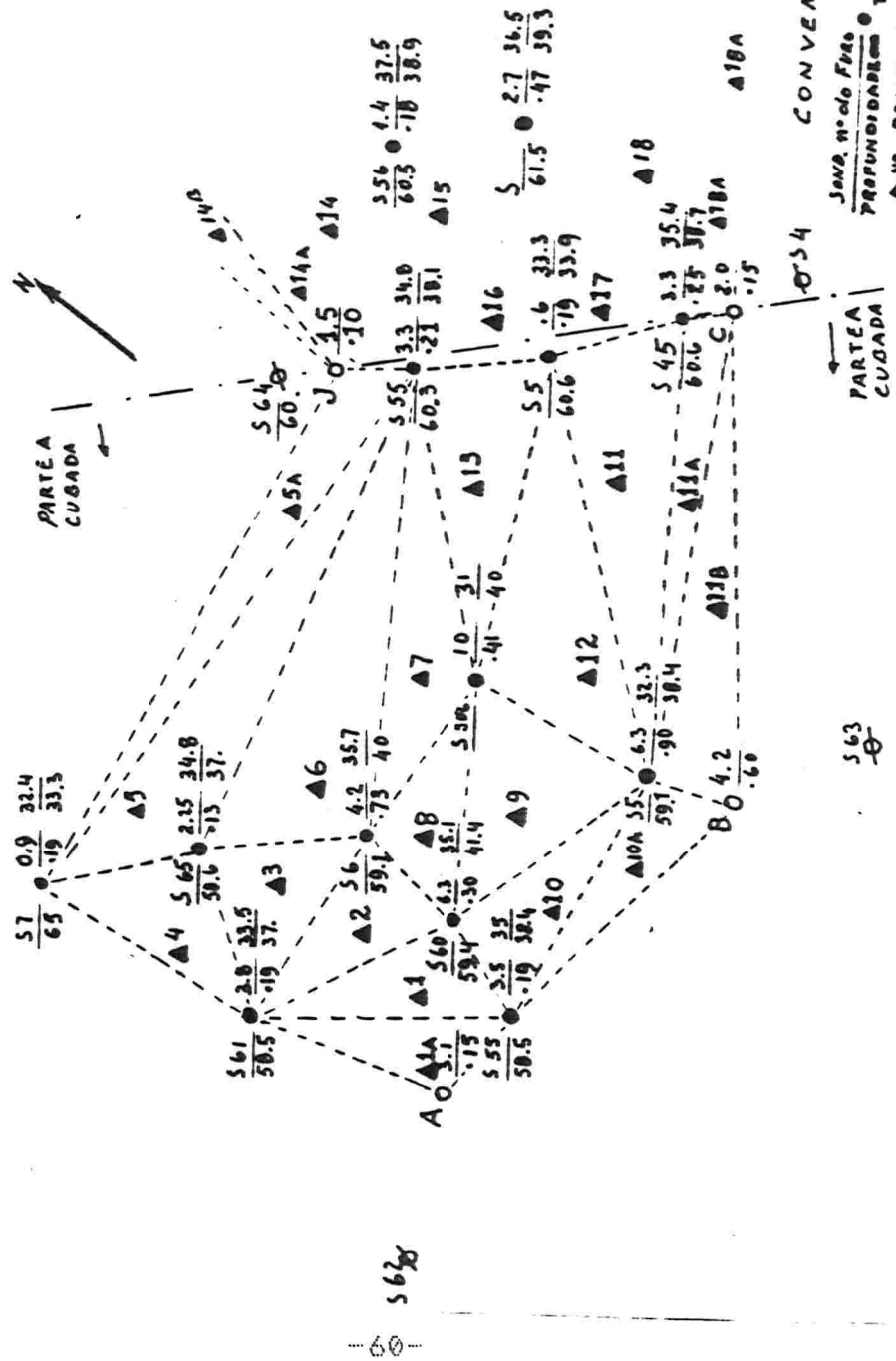
VÉRTICES DAS BASES DOS PRISMAS (BLOCOS ELEMEN.)										ÁREA	ESPES. MÉDIA	VOLUME	RESERVA	TEOR MÉDIO (%) U308
PRISMA	PRIMEIRO FURO			SEGUNDO FURO			TERCEIRO FURO							
	ISOND.	ESP.	TEOR	ISOND.	ESP.	TEOR	ISOND.	ESP.	TEOR	(m ²)	(m)	(m ³)	(t)	
▲1	S 61	3,80	0,19	S 60	6,30	0,30	S 55	3,50	0,19	307,10	4,50	1832,00	3662,30	0,24
▲2	S 61	3,80	0,19	S 60	6,30	0,30	S 6	4,20	0,73	345,10	4,80	1656,50	4389,70	0,40
▲3	S 61	3,80	0,19	S 65	2,25	0,13	S 6	4,20	0,73	381,60	3,40	1297,40	3438,10	0,40
▲4	S 61	3,80	0,19	S 65	2,25	0,13	S 7	0,90	0,19	380,00	2,30	874,00	2316,10	0,17
▲5	S 55	3,30	0,21	S 65	2,25	0,13	S 7	0,90	0,19	884,00	2,20	1944,80	5153,70	0,18
▲6	S 55	3,30	0,21	S 65	2,25	0,13	S 6	4,20	0,73	1026,00	3,30	3385,80	8972,40	0,42
▲7	S 55	3,30	0,21	S 506	10,00	0,41	S 6	4,20	0,73	570,00	5,80	3306,00	8760,90	0,45
▲8	S 60	6,30	0,30	S 506	10,00	0,41	S 6	4,20	0,73	297,80	6,80	2025,00	5366,30	0,44
▲9	S 60	6,30	0,30	S 506	10,00	0,41	S 5	6,30	0,90	581,10	7,60	4416,40	11703,50	0,52
▲10	S 60	6,30	0,30	S 55	3,50	0,19	S 5	6,30	0,90	341,00	5,40	1841,40	4879,70	0,51
▲11	S 5	0,60	0,19	S 45	3,30	0,25	S 5	6,30	0,90	781,20	3,40	2656,10	7038,70	0,65
▲12	S 5	0,60	0,19	S 506	10,00	0,41	S 5	6,30	0,90	828,40	5,60	4639,00	12293,40	0,58
▲13	S 5	0,60	0,19	S 506	10,00	0,41	S 55	3,30	0,21	559,50	4,60	2573,70	6820,30	0,35
▲1A	S 61	3,80	0,19	A	3,10	0,15	S 55	3,50	0,19	269,80	3,50	944,30	2502,40	0,18
▲10A	S 5	6,30	0,90	S 55	3,50	0,19	B	4,20	0,60	310,50	4,70	1468,80	3892,30	0,62
▲11A	S 5	6,30	0,90	C	2,00	0,15	S 45	3,30	0,25	275,40	3,90	1074,10	2846,40	0,59
▲11B	S 5	6,30	0,90	C	2,00	0,15	B	4,20	0,60	540,00	4,20	2268,00	6010,20	0,68
▲5A	S 55	3,30	0,21	C	1,50	0,10	S 7	0,90	0,19	522,50	1,90	992,80	2630,90	0,18
!TOTAL !										9201,00	77,90	39196,10	102292,20	0,42

RESERVA TOTAL = SOMATÓRIO (VOL. x P. ESP.) = 102292,20 t ("100000 t); P. ESP. MINÉRIO = 2,65 t/m³

$$\text{TEORES DOS BLOCOS ELEMENTARES} = \frac{\sum_1^3 (\text{ESP.} \times \text{TEOR})}{\sum_1^3 (\text{ESP.})}, \text{ em \% U308}$$

$$\text{TEOR DO MINÉRIO CUBADO} = \frac{\text{SOMAT. (RES. DO BLOCO} \times \text{TEOR DO BLOCO)}}{\text{SOMAT. (RES. DO BLOCO)}} = 0,42\% \text{ U308, Equival. compos. da "pechblenda"}$$

FIG 30
 MALHA IRREGULAR
 DE PESQUISA.
 CUBAGEM MEDIANTE DE-
 LIMITAÇÃO DE BLOCOS ELE-
 MENTARES DE BASES TRI-
 ANGULARES, COMO VER-
 TICES NOS PONTOS SONDA-
 DOS. ESCALA 1:1000



CONVENÇÕES:

- Sonda, nº do Furo
- REPERTE DO NÍVEL EM PROFUND. DA CAPA EM PROFUNDIDADE
- △ Nº PRISMA DELIMITADO
- SONDAGEM NEGATIVA
- PONTO INTERPOLADO "SONDAGEM FICTICIA"

563

Na planilha de cálculo Quadro nº 9 à página 59, estão anotadas, nas colunas 2ª, 5ª e 8ª, as sondagens (reais ou fictícias), cujos pontos na planta, constituem os vértices dos triângulos. Esses triângulos são as bases dos prismas (blocos elementares), anotados na coluna 1ª. A referida planilha de cálculo, é auto explicativa do procedimento utilizado para obter-se as reservas e teores dos blocos elementares (anotados nas colunas 14ª e 15ª), e também a reserva total e o teor médio respectivo da parte pesquisada da malha (designada pela letra "A").

3.4 - Critérios geométricos de cubagem através de delimitação de áreas de influência dos pontos sondados, estabelecidas de acordo com condições específicas locais.

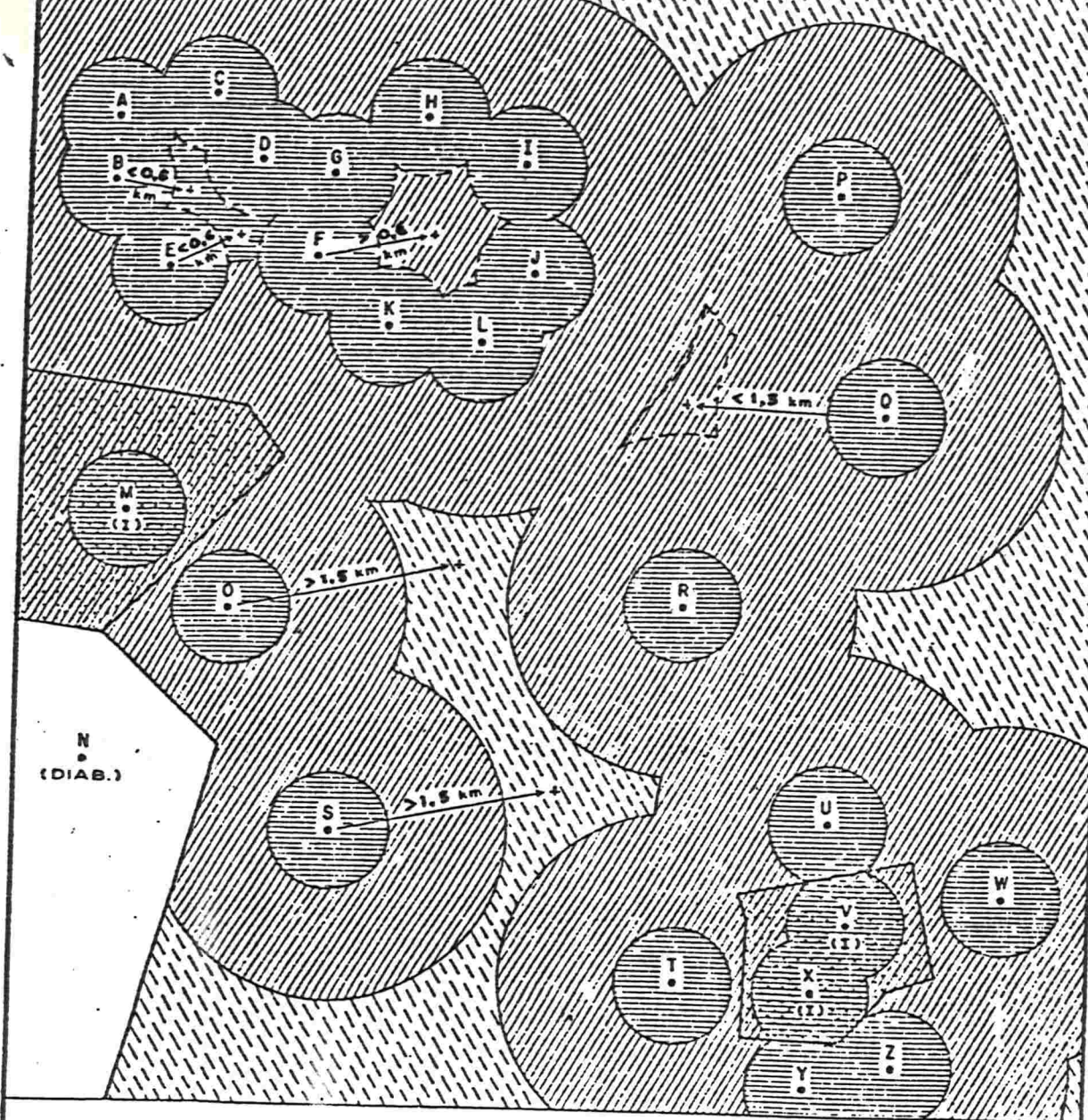
Em muitos projetos de pesquisa são estabelecidos critérios específicos de cubagem com base na experiência. A figura 31 à página 62, resume os critérios utilizados na pesquisa preliminar em jazimentos de carvão no RS e SC, em projeto da CPRM - Superintendência do RS - Brasil. A figura 31 é uma cópia de documento original desses projetos, com resultados divulgados.

Centradas em cada ponto sondado, são delimitados círculos em planta; são definidos pelos respectivos raios desses círculos as distâncias até as quais são extrapolados os resultados obtidos em cada sondagem.

As reservas são classificadas em medidas, indicadas e inferidas, e ainda as que são consideradas prejudicadas por intrusões de diabásio.

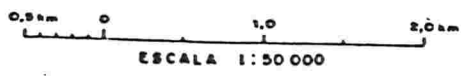
Os critérios de classificação são com base nas distâncias aos pontos sondados e considerando as interferências dos respectivos círculos de delimitação. Esses critérios foram arbitrados com base na experiência da própria pesquisa, para uso específico daqueles projetos referidos.

As figuras 32a e 32b, resumem os critérios estabelecidos com base na experiência local, na década de 1970, na pesquisa de cobre na Mina do Camaquã no RS. Os corpos filoníanos de minério eram atrevesados por sondagens inclinadas (perfuradas a partir da superfície ou do subsolo). As áreas de influência de cada sondagem eram estimadas na seção transversal e no perfil longitudinal, conforme representados nas figuras 32a e 32b.



CONVENÇÕES

- 12 ● FURO DE Sonda
- 22 ● FURO COM CAMADA AFETADA POR INTRUSÃO
- (12) ● FURO COM CAMADA DESTRUIDA POR INTRUSÃO
- 17 ● DIAB
- (stippled) ÁREA DE CARVÃO AFETADA POR INTRUSÃO
- (horizontal lines) ÁREA DE RESERVA MEDIDA
- (diagonal lines) ÁREA DE RESERVA INDICADA
- (cross-hatched) ÁREA DE RESERVA INFERIDA



Projeto Carvão no Rio Grande do Sul
1978

Fig. 2b



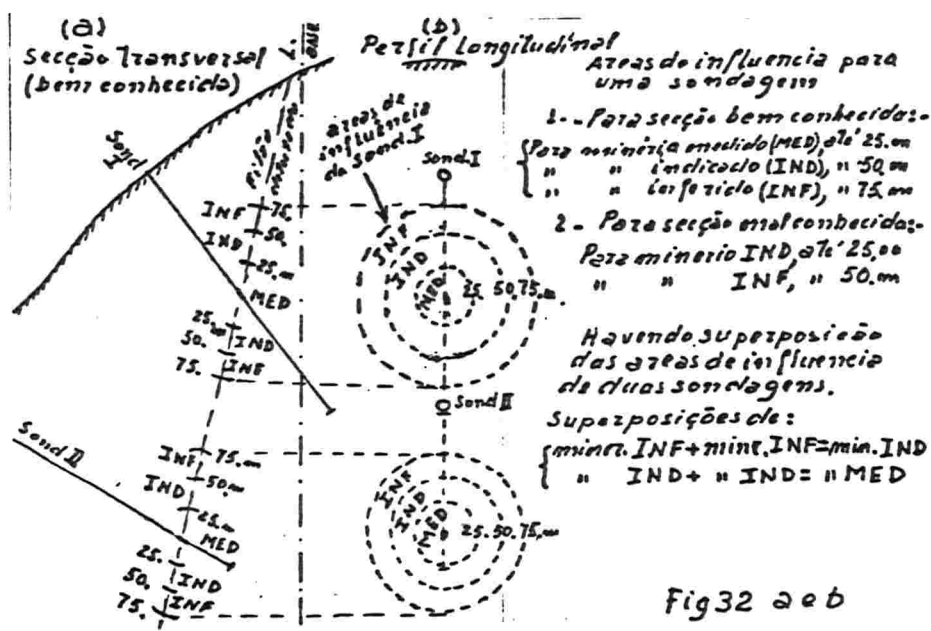
Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais
— CPRM —

MÉTODO DE CÁLCULO DE RESERVAS

FURES PJ ALEGRE	Engº TELMO SUFFERT CREA 11.782 - DTRAG DOR RENILDO DA SILVA	GNPM 1º DISTRITO
--------------------	---	---------------------

Suffert, T. 1978 - Ref. cit.

Fig 31



Interferências entre áreas de influência de duas ou mais sondagens, eram critérios adicionais, para classificar as reservas pesquisadas, como medidas, indicadas ou inferidas.

3.5 - Procedimentos e métodos de cubagem mediante o traçado de curvas de contorno estrutural (isópacas, isóbatas e isocobertura) dos corpos de minerais industriais pesquisados.

Quando a pesquisa não envolve diferenciações importantes de teor, como acontece nas pesquisas de jazimentos de carvão, de petróleo, de argila, de pedras para construção (brita), de areia, etc. (contrariamente ao que ocorre geralmente na pesquisa de minerais metálicos), esses procedimentos e métodos são preferidos.

As técnicas de traçado de curvas estruturais de contorno são objeto da Geologia Estrutural, e são bem abordadas em livros textos que tratam dessa especialidade da geologia, indicando-se para consulta Badgley 1959, Loczy 1976 (ref. cit.); e também em livro texto sobre Geologia de Minas como Mac. Kinstry 1948.

Exemplos da cubagem mediante traçado de curvas de contorno estrutural:

Exemplo nº 9

Pesquisa de desenvolvimento na preparação para mineração a céu aberto, em jazida de carvão - Metodologia adotada pela CRM - RS na década de 1970 na jazida de Candiota no RS - Brasil. Dados liberados para fins didáticos de uma parcela da Malha III da jazida citada. O jazimento é constituído por uma espessa camada de carvão, aproximadamente horizontal; com pequena cobertura de arenitos e terra vegetal e aflorando em canhadas. O terreno é plano ondulado modelado pela erosão, originando pequenos córregos nas canhadas, as quais seccionam a jazida, delimitando suas bordas. A pesquisa é mediante malha de sondagens verticais, e escavações junto aos afloramentos. No presente exemplo o distanciamento dos pontos sondados na malha é cerca de 400m. Em fase posterior da preparação para a lavra, a malha é adensada com sondagens distanciadas de 250m.

A figura 33 à página 65, mostra o mapa do jazimento preparado para a cubagem, com o traçado das curvas de contorno estrutural: Isópocas da espessura da camada de carvão e isocoberturas de 10m, 16m e 20m. Essas curvas foram traçadas conforme os métodos de Geologia Estrutural (interpolando-se dados obtidos nas medidas feitas nas sondagens e nos afloramentos).

- A planilha (Quadro 10) resume o método de cálculo da cubagem do carvão, mediante isópocas de camada.

- A planilha (Quadro 11) resume o método de cálculo da cubagem do carvão, parcelando o jazimento em faixas de iguais coberturas (de acordo com as delimitações pelas curvas de isocobertura).

Cubagem mediante isópocas

Quadro 10

Isópaca (m)	Espessura "E" (m)	Área "A" (m ²)	Volume "V" (x E3m ³)	Reserva V x 1,5 t/m ³
* 5,00	5,10	346.000	1.764,6	2.646,9 x E3
! 5,00 à 4,80!	4,90	670.000	3.883,0	4.924,5 x E3
! 4,80 à 4,60!	4,70	523.000	2.458,0	3.687,2 x E3
! 4,60 à 4,40!	4,50	666.000	2.997,0	4.495,5 x E3
! 4,40 à 4,20!	4,30	147.000	632,1	948,2 x E3
! 4,20 à 4,00!	4,10	113.000	463,3	695,0 x E3
! 4,00 à 3,50!	3,80	56.000	212,8	319,2 x E3
! Somatório !		! 2.521.000 !	! 11.810,9 !	! 17.716,5 x E3 !

* fechada

**CUBAGEM DE CARVÃO
MEDIANTE CURVAS DE
CONTORNO ESTRUTURAL**

CONVENÇÕES:

- 10 — ISOPACA DA CAMADA DE CARVÃO
- 16 — ISOCOBERTURA " " "
- 20 — LINHA DE AFLORAMENTOS DA CAMADA DE CARVÃO (LIMITE ÚTIL DO AZIMUTH)
- SONDA EM BOCA DA SONDA

S 987	○	224,919	18,35	201,99
CORTURA		226,257	4,80	201,99
ESPESURA DA CAM.		217,710	4,80	201,99

ESCALA: 1:10 000

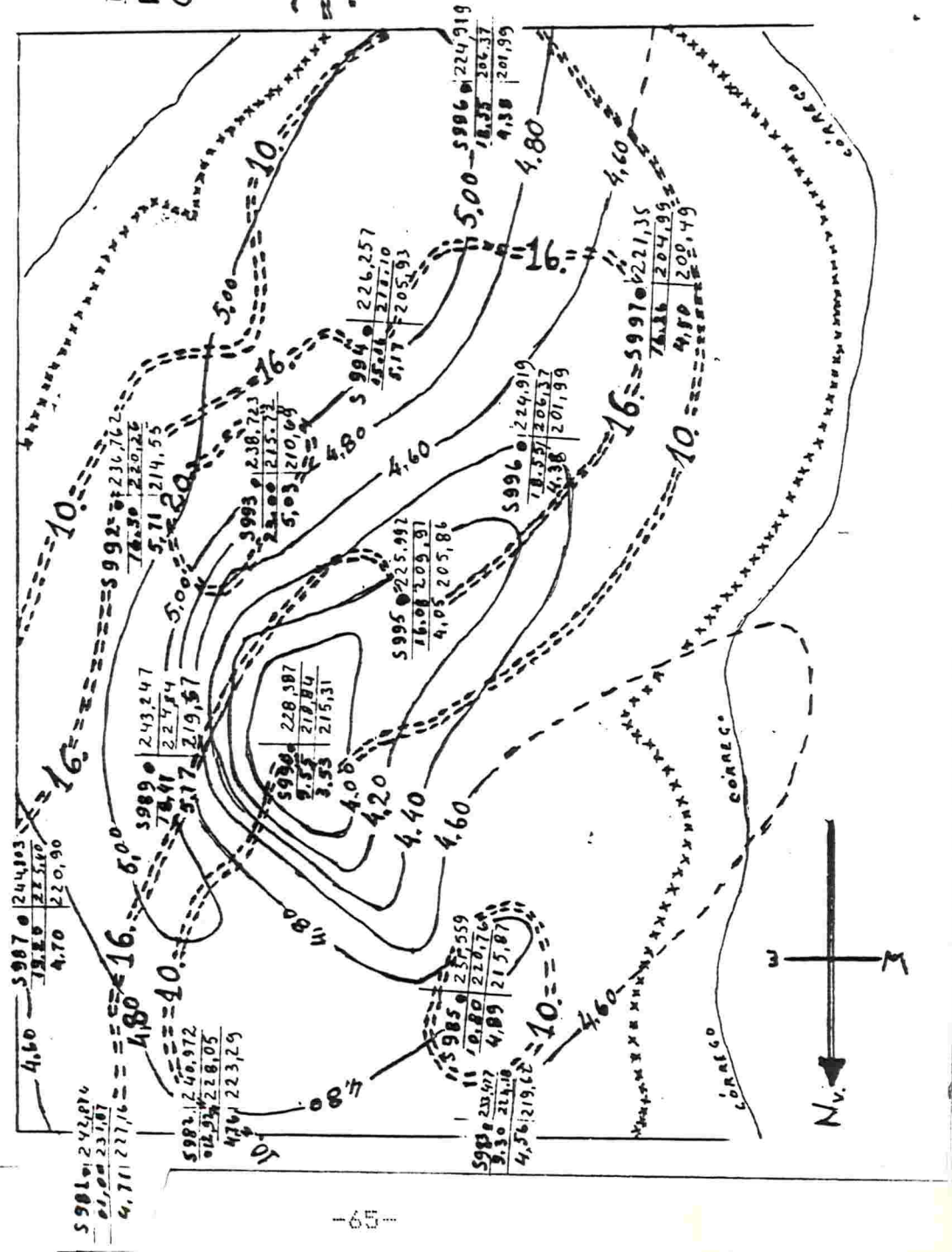


Fig. 33

$$\text{Espessura média "Emca", da camada de carvão} = \frac{\text{Volume}}{\text{Área}}$$

$$\text{Emca} = \frac{11810,90 \times E3 \text{ m}^3}{2521,00 \times E2 \text{ m}^2} = 4,685 \text{ m} \approx 4,70 \text{ m}$$

- Reserva (medida) de carvão no jazimento $\approx 17716,00 \times E3 \text{ t}$

- Tonelas de carvão por 1 metro de área útil do jazimento:

$$= \frac{17716,00 \times E3 \text{ t}}{2521,00 \times E3 \text{ m}^2} \approx 7,00 \text{ t/m}^3$$

Cubagem mediante isocoberturas
Quadro 11

Entre cober! (m)	Cobertura! "Emco" (m)	Área! "Aco" (m ²)	Volume! Aco x Emco	Reserva! Vx1,55t/m ³	%!
de ~23 à 20!	22,00!	48.000!	224880!	337320,0!	2!
de 20 à 16!	18,00!	600.000!	2811000!	4218500,0!	24!
de 16 à 10!	13,00!	814.000!	3813598!	5720385,0!	32!
de 10 à 00!	5,00!	1.059.000!	4961415!	7442122,5!	42!
Somatório!		12.521.000!	11810885!	17716820,5!	100!

Crítérios e medidas (dos dados) do Quadro 10:

- 1ª Coluna (7ª linha): Espessura medida na sondagem S 990, 3,53 \approx 3,5.
- 3ª Coluna: Medida das áreas (medida na planta, com uso de planímetro):
- Área compreendida pela isópaca de 5,00m da camda de carvão e o limite do mapa = 346000 m².
 - Área compreendida pela isópaca de 4,80m, os limites leste e sul do mapa e a linha de afloramento leste = 1016000 m².
 - Área entre as isópacas 5,00 e 4,80 = 1016000 - 346000 = 670000 m².
 - Área ao norte e a leste da isópaca 4,60m, compreendida pelos limites norte, leste e sul do mapa, e as linhas de afloramentos oeste e leste = 1539000 m²; área compreendida entre as isópacas 4,80m e 4,60m, 1539000m² - 1016000m² = 5230000 m².

- Área a sudoeste da isópaca 4,60m, compreendida pelos afloramentos de oeste = 921000 m²; área compreendida pela isópaca 4,40m (fechada) = 316000m²; área compreendida entre as isópacas 4,60m e 4,40m, à sudoeste da isópaca 4,60m, 921000m² - 316000m² = 605000 m².
- Área a noroeste da isópaca 4,60m, compreendida entre o limite norte do mapa e a linha de afloramentos de oeste = 45000 m².
- Área a noroeste da isópaca 4,60m, compreendida entre os limites norte e leste do mapa = 16000 m².
- Área total compreendida pelas isópacas 4,60m e 4,40m (nos limites do mapa e uteis da jazida): 605000m² + 45000m² + 16000m² = **666000 m²**
- Área compreendida pela isópaca fechada 4,20m = 169000m²
- Área total compreendida entre as isópacas 4,40m e 4,20m: 316000m² - 169000m² = **147000 m²**.
- Área compreendida pela isópaca fechada de 4,00m = **56000 m²**.
- Área total compreendida entre as isópacas 4,20m e 4,00m: 169000m² - 56000m² = **113000 m²**.

Critérios e medidas dos dados do Quadro 11

- 1ª Coluna (1ª linha): 23,00m é a cobertura medida na sondagem S 993.
- 4ª Coluna: A espessura média da camada (Emco) adotada, é a calculada mediante os volumes e áreas totais (calculadas no quadro 10).
- 3ª Coluna: Medida das áreas em planta com o uso de planímetro.
- Área da isocobertura fechada de 20m = **48000 m²**
 - Área de isocobertura de 16m, compreendida entre os limites norte e leste do mapa = 648000 m².
 - Área compreendida entre as isocoberturas de 20m e 16m: 648000m² - 48000m² = **600000 m²**.
 - Área compreendida pela isocobertura de 10m e os limites norte, leste e sul do mapa = 1410000 m².
 - Área compreendida entre as isocoberturas de 16m e 10m, dentro dos limites do mapa, e situadas a nordeste e sudoeste do mapa: 1410000m² - 648000m² = 762000 m².
 - Área compreendida pela isocobertura fechada de 10m, situada a noroeste do mapa = 52000 m².
 - Área total compreendida entre as isocoberturas de 16m e 10m = 762000m² + 52000m² = **814000 m²**.
 - Área total do jazimento (calculada anteriormente no Quadro 10) = 2521000m²; área compreendida pela isocobertura de 10m e os limites do mapa, norte, leste e sul, (calculado anteriormente) = 1410000m²; área compreendida pela isocobertura fechada de 52000m² (calculado anteriormente);

- Área compreendida entre a isocobertura de 10m, entre os limites do mapa, norte, leste, sul e oeste, e entre as linhas de afloramento (leste e oeste),
 $2521000m^2 - 1410000m^2 - 52000m^2 = 1059000 m^2$.

As reservas assim calculadas, são classificadas como reserva medida. As imprecisões dos resultados obtidos, são devidas principalmente as deficiências inerentes aos métodos gráficos de medida (com uso de planímetro), e também as deficiências de informações devidas aos espaçamento relativamente grande da malha de pesquisa, de cerca de 400 m. Para reservas medidas e bloqueadas, na preparação para a lavra a céu aberto, costuma-se adensar-se a malha, de modo que as distâncias entre os pontos observados, sejam da ordem de 250 m.

Modernamente está sendo adotado para esse tipo de problema, o uso de computador (para traçado das curvas de contorno e para os cálculos de reserva).

Os critérios de cálculo programados são os mesmos (da avaliação das áreas delimitadas por curvas de contorno estruturais), combinados com critérios de parametrização da reserva em blocos elementares (de procedimento analítico).

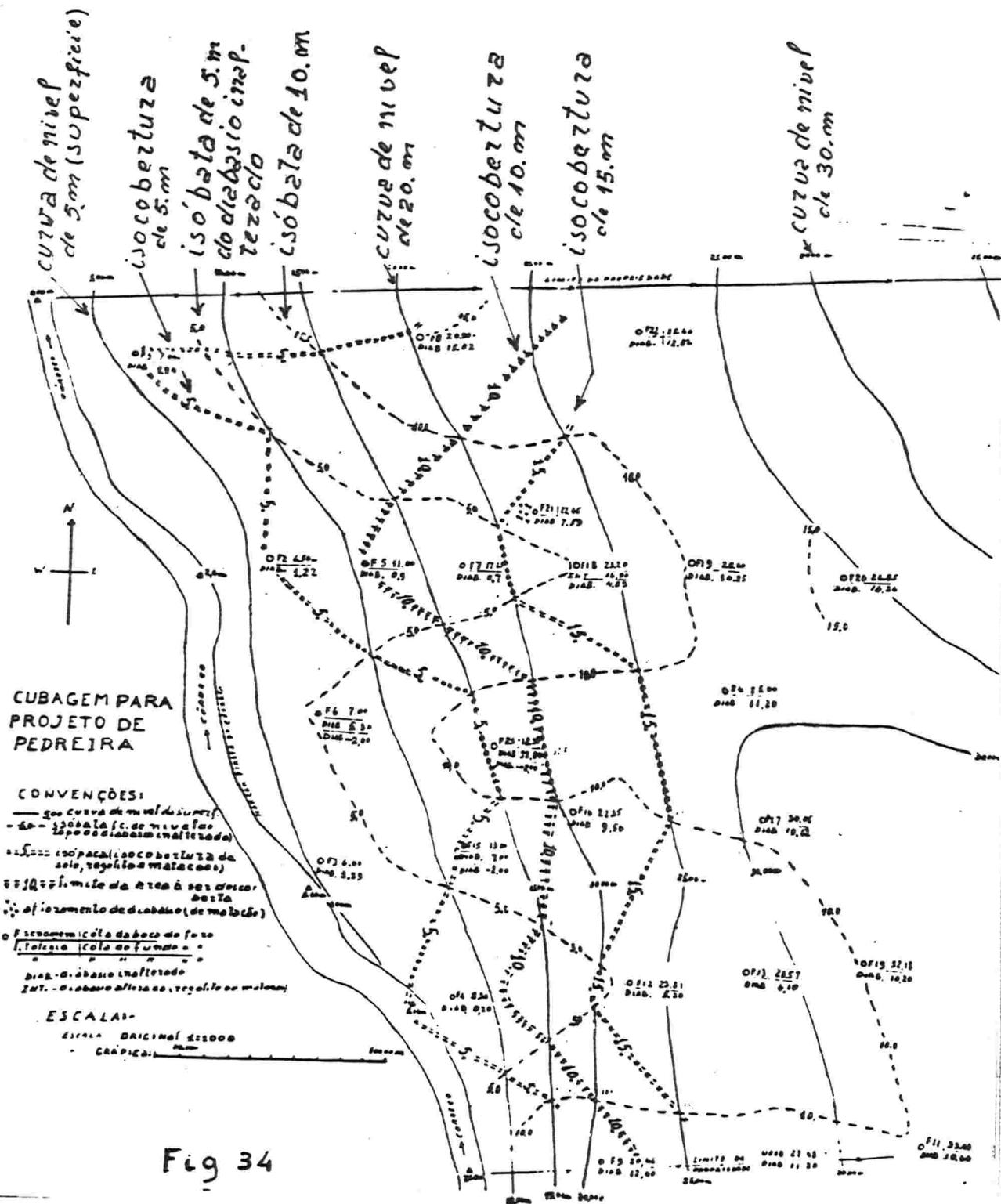
Exemplo nº 10

Cubagem com o objetivo de instalar uma pedreira de diabásio para produzir pedra britada para construção. Esse é um exemplo idealizado, nas condições típicas da pesquisa em corpos de sill de diabásio, cujas abas são intrusivas em sedimentos gonduânicos (arenitos, siltitos e folhelhos), situados na depressão central do Rio Grande do Sul - Brasil. Pesquisa-se esses corpos de diabásio que afloram e são praticamente cobertos por rochas intemperizadas e matações de diabásio, sendo a superfície do terreno em aclave acentuado.

Por razões econômicas, são interessantes os corpos de rochas frescas de diabásio, cujas reservas justificam as despesas de instalação de planta de britagem junto a pedreira, próxima ao local onde a pedra será utilizada, e em condições de serem facilmente lavradas à céu aberto.

Nas condições específicas desse exemplo, estabelece-se as condições de que a decapagem necessária para a descobertura, seja de rochas de fácil desmonte com espessura inferior à 10m, e o transporte do estéril extraído, até o sitio de deposição, seja inferior a 400m.

As escavações dos trabalhos de lavra deverão serem drenadas sem bombeamento, isto é, devem ter condições para drenagem natural.



A figura 34 é a planta preparada para se calcular a cubagem no projeto da pedreira. A área foi sondada com 24 furos verticais de pequena profundidade, distribuídos numa malha de cinco linhas, (perfis exploratórios) distanciadas entre si de aproximadamente 100 m; mais três furos de detalhamento. As distâncias entre os furos em cada linha são de 40m à 100m. Em cada sondagem procurou-se medir a profundidade (ou a cota) do topo do corpo de diabásio fresco; alguns furos foram aprofundados até a cota (-2,00m), de modo a comprovar a existência de rocha fresca até 2,00m abaixo da cota zero. A cota zero foi estabelecida como o limite inferior do corpo de minério aproveitável, objeto da pesquisa.

Com os resultados das sondagens, (anotados na planta), e com a altimetria do levantamento topográfico, foram traçadas (mediante os procedimentos de Geologia estrutural) as seguintes curvas de contorno, figuradas na planta:

- Isóbatas de 5,00m, 10,00m e 15,00m, significando as curvas de contorno das cotas da superfície do topo da rocha fresca (abaixo da superfície do terreno).
- Isópacas da cobertura ou isocoberturas de 5,00m, 10,00m e 15,00m; significando as curvas de contorno, daquelas espessuras (medidas na vertical), do material à ser decapado, na lavra da pedreira.
- Estabeleceu-se como limite oeste do jazimento, a margem direita do córrego; o limite leste de acordo com a condição pré estabelecida de máxima espessura à ser decapada de 10,00m, será a linha da Isocobertura de 10,00m.
- As espessuras do corpo de diabásio economicamente aproveitável até a cota inferior zero metro, serão em cada ponto estimadas através das linhas Isóbatas.

Nessa condições se mede em planta (com planímetro), e se calcula:

- Para estimar o volume (de rocha intemperizada e matações) a ser decapado.
- Área compreendida entre a linha de isocobertura 10,00m até a margem direita do córrego = 24247 m².
- Área de cobertura entre 5,00m e 10,00m:
 $43444\text{m}^2 - 24247\text{m}^2 = 19197 \text{ m}^2$
- Volume de cobertura entre as isocoberturas 5,00m e 10,00m:
 $19197\text{m}^2 \times 7,50\text{m} = \sim 143978 \text{ m}^3$
- Volume de coberturas entre a isocobertura de 5,00m e a margem do córrego, com espessuras entre 5m e 2m (sendo 2m a média das espessuras medidas nas sondagens F6 e F1).
 $24247\text{m}^2 \times ((5\text{m} + 2\text{m})/2) = \sim 84865 \text{ m}^3$

- Volume total de rocha a ser decapada no projeto:
 $143978\text{m}^3 + 84865\text{m}^3 = 272821\text{ m}^3 \approx 273000\text{ m}^3$

Observações: Nessa estimativa não foram considerados os volumes adicionais de rocha a ser desmontada no limite leste da pedreira, para manter taludes com declives estáveis, com alturas superiores à 10,00m.

Para se estimar a Reserva de diabásio aproveitável, acima cota zero:

- Área compreendida entre a isóbata 10,00m, a margem direita do córrego e o limite norte da propriedade, (medida na planta) = 64170 m².
 - Área compreendida entre a isóbata 5,00m, a margem direita do córrego e o limite norte da propriedade (medida em planta) = 26680 m².
 - Diferença dessas áreas (entre isóbatas de 10m e 5m):
 $64170\text{ m}^2 - 26680\text{ m}^2 = 37490\text{ m}^2$
 - Áreas entre as isóbatas de 10m e 5m, porém com coberturas maiores do que 10m, que estão situadas para leste dos limites com cobertura inferior a 10m (compreendida pela isóbatas 10m e 5m e pela isocobertura 10m):
 - No bloco ao sul da propriedade = 16070 m²
 - No bloco ao norte da propriedade = 8307 m²
 - Áreas entre as isóbatas 10m e 5m e com coberturas menores do que 10m:
 $37490\text{m}^2 - (16070\text{m}^2 + 8307\text{m}^2) = 13113\text{ m}^2$
 - Reserva de diabásio aproveitável entre isóbatas de 10m e 5m:
 $13113\text{m}^2 \times ((10\text{m} + 5\text{m})/2) = 98347,5\text{ m}^3$
 - Áreas para oeste da isóbata 5m, porém com coberturas maiores do que 10m (compreendidas entre a isóbata 5m e a isocobertura de 10m):
 - No bloco ao norte da propriedade = 3240 m²
 - No bloco ao sul da propriedade = 1440 m²
 - Áreas à oeste da isóbata 5m, compreendida pela margem do córrego e o limite norte da propriedade, e ainda com coberturas menores do que 10m:
 $26680\text{m}^2 - (3240\text{m}^2 + 1440\text{m}^2) = 22000\text{ m}^2$
- Reserva de diabásio aproveitável nessas últimas áreas descritas:
 $22000\text{m}^2 \times ((5\text{m} + 0\text{m})/2) = 55000\text{ m}^3$

Outras áreas com coberturas menores que 10m, porém situadas externamente a área compreendida pela isóbata de 10m:

- Áreas situadas junto ao limite norte da propriedade, à NE da isóbata 10m (com espessura de diabásio aproveitável entre 15m e 10m, média considerada de 12m). Delimitada pela isóbata 10m, pela isocobertura 10m e pelo limite norte da propriedade = 63380 m².

Reserva de diabásio aproveitável nessa área:

$$63380\text{m}^2 \times 12\text{m} = 76560 \text{ m}^3$$

- Área situada junto aos limites sul da propriedade, ao sul da isóbata 10m (com espessura de diabásio aproveitável considerada de 11m); Delimitada pela isóbata 10m, pela isocobertura de 10m e pelo limite sul da propriedade = 1660 m².

Reserva de diabásio aproveitável nessa área:

$$1660\text{m}^2 \times 11\text{m} = 18260 \text{ m}^3$$

Reserva total de diabásio aproveitável, nas condições pré estabelecidas, na propriedade:

$$98347,5\text{m}^3 + 55000\text{m}^3 + 76560\text{m}^3 + 18260\text{m}^3 = 248167 \text{ m}^3 \approx 248000 \text{ m}^3$$

Razão estéril à ser decapado para diabásio aproveitável nesse projeto de pedreira:

$$(273000\text{m}^3/248000\text{m}^3) = 1,1$$

Com os mesmos dados do exemplo, se poderá estimar as reservas aproveitáveis e a cobertura a ser decapada nos casos de outras alternativas de projeto. Estabelecendo-se cobertura máxima de 5,00m, por exemplo alteraria os resultados:

- Reserva aproveitável de diabásio $\approx 106000 \text{ m}^3$

- Volume de rocha a ser decapada $\approx 85000 \text{ m}^3$

Volume Cobertura	85000	
-Razão -----	= -----	$\approx 0,80$
Reserva diabásio	106000	

3.6 - Cubagem mediante traçado de curvas de contorno isotéres (ou de isoacumulações).

Nos procedimentos paraubar corpos de minério por métodos geométricos em jazimentos metálicos, se poderá traçar curvas de contorno dos teores ou das acumulações (espessuras x teores), nas faces ou nas superfícies, desde que se disponha de malhas bastante densas de pontos amostrados. Então para aplicação dos processos de cubagem, se consideraria as distribuições em áreas, avaliadas através das curvas de contorno, em lugar dos procedimentos vistos, de avaliação através das fórmulas de Truscott, ou através da distribuição em blocos elementares prismáticos ou de outros métodos. De modo geral admite-se que, com esse procedimento, os resultados seriam mais precisos, porém o mesmo é raramente aplicado, devido as razões, que seguem:

a) Geralmente os teores nos jazimentos apresentam grande variabilidade, motivo pelo qual a densidade de pontos amostrados deverá ser muito grande, para que permita o traçado das curvas razoavelmente coerentes. Isso geralmente não acontece na pesquisa preliminar, ou mesmo na pesquisa de desenvolvimento. Exemplificando, na figura 13 à página 29 (amostragem de acompanhamento de lavra de um bloco de minério de cobre), verifica-se como seria difícil traçar curvas de contorno dos teores na face figurada.

b) Jazimentos metálicos não ferrosos, e principalmente jazimentos auríferos, uraníferos e outros, apresentam teores dispares, agravando a dificuldade para traçar curvas coerentes e representativas.

Muitas vezes para superar essas dificuldades, adota-se o critério de se considerar faixas de valores entre limites previamente estabelecidos, delimitando áreas com valores acima ou abaixo, ou ainda entre os mesmos limites. Esse procedimento dependerá muito do critério arbitrário pessoal, e é de pouca precisão.

Na publicação referida Krige D. C. et alii 1963, é descrito um processamento adotado na Mina Virginia de minério aurífero e uranífero, do sistema Witwatersrand da Africa do Sul, com o qual são traçadas racionalmente curvas de contorno das acumulações. O procedimento consistia em aplicar **Médias Aritméticas Móveis**, de acordo com o princípio ilustrado pela figura 35 (reproduzida da publicação citada).

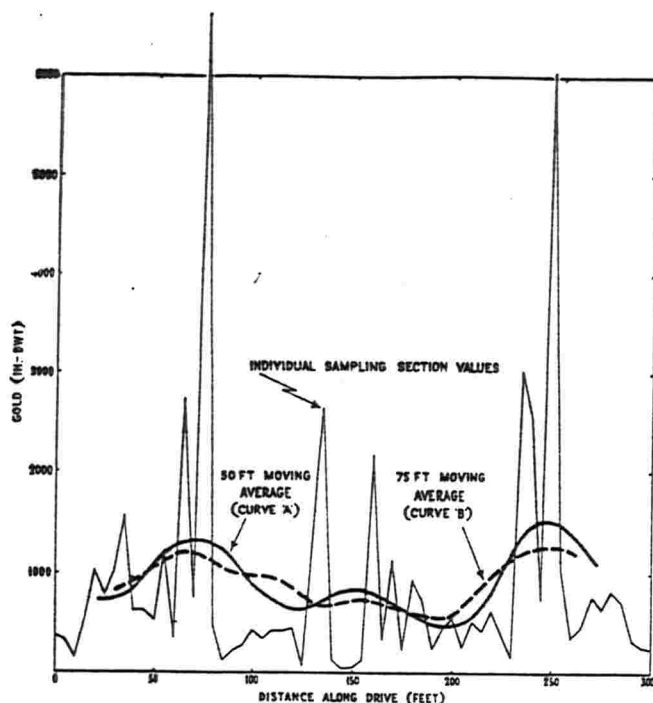


Fig. 3—Showing 50 ft and 75 ft moving average of development values along a drive

FIG 35 - Reproduzida de Krige D.C. et alii, 1963

As acumulações são expressas em in-dwt de ouro (ou seja em pølegada-pennyweight, sendo 1 pennyweight = 0,05 onças = ~ 1,5 g de ouro). A figura 35 (reproduzida), mostra a distribuição das acumulações resultante da amostragem, ao longo da direção de uma galeria de desenvolvimento, sendo as amostras separadas entre si de 5 pés. Na mesma figura 35, duas curvas mostram a mesma distribuição, quando para cada ponto representativo, é considerado o meio dos segmentos de 50 pés e 75 pés respectivamente, sendo que, para os valores das acumulações nestes últimos pontos, foram consideradas, as médias aritmeticas dos valores amostrados ao longo desses segmentos (de 50 pés e 75 pés). Esse é o princípio do procedimento adotado, mediante o qual minimizando o critério pessoal, foram obtidas curvas coerentes, que melhor representam as tendências (ou trends) da distribuição.

Conforme esse princípio, a distribuição em área (em duas dimensões) era distribuída em círculos com raio de 500 pés, sobrepostos na área amostrada.

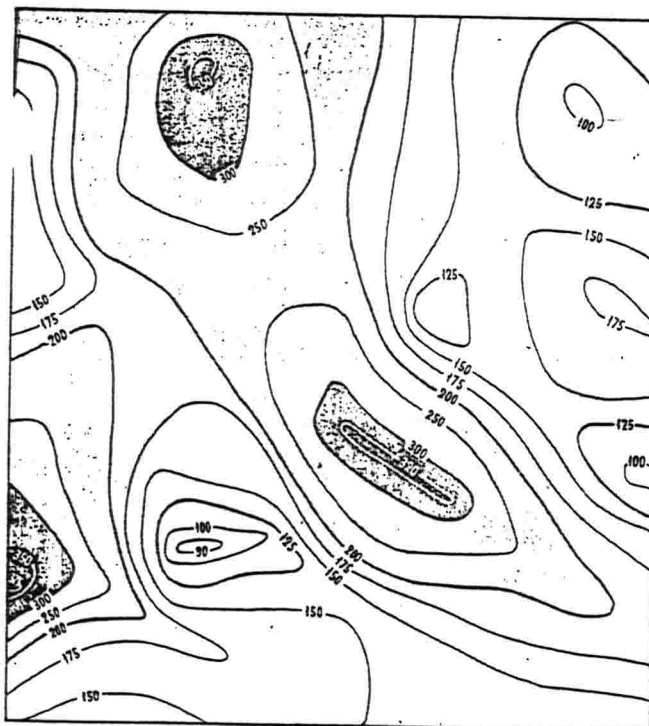
Sistematicamente, num retículo de malha quadrada formado por um sistema de coordenadas norte e leste de 1000 pés, quatro círculos eram posicionados nas intersecções das coordenadas (nos vértices de cada quadro); um 5º círculo era posicionado nos centros dos quadrados do retículo, recobrimdo aproximadamente 73% das áreas dos quatro círculos adjacentes.

Em cada ponto central dos círculos (considerados representativos), eram anotadas as médias aritméticas dos valores em in-dwt de ouro, das amostras contidas nos respectivos círculos. Com base nesses novos valores anotados, eram construídas as curvas de contorno dos valores in-dwt, as quais se apresentavam coerentes, conforme mostra a figura 36 (também reproduzida da publicação citada).

Com esse mesmo procedimento eram construídos mapas de curvas de contorno para as acumulações de urânio, para as espessuras e também para os valores das relações das acumulações de urânio/acumulação de ouro.

Observa-se que esse procedimento assemelha-se aos processos correntemente praticados em prospecção geofísica, para as interpretações objetivando separar os efeitos regionais, dos efeitos anômalos locais, conhecidos como de "filtrar" anomalias locais.

JMBC
Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy
May 1963
Thin contours and improved regression techniques for ore reserve valuations—D. G. Krige and H. J. Urberrmann



SHOWING CONTOURS FOR GOLD VALUES (IN-DWT)

0 500 1000
ENG FT.

Fig 36 - Reproduzida

Fig. 3

4 - PRINCÍPIOS DE INTERPRETAÇÃO DOS DADOS DE AMOSTRAGEM, BASEADOS EM ANÁLISES DE ESTATÍSTICA CLÁSSICA.

4.1 - Aleatoriedade dos processos de amostragem e dos dados obtidos.

Por um lado a análise estatística é baseada em leis matemáticas, mais especificamente, na teoria das probabilidades, na qual os dados analisados devem ser **aleatórios**, como condição essencial.

Por outro lado, em **Pesquisa Mineral** essa condição nunca é satisfeita de maneira absoluta. Porque os dados obtidos da amostragem, estão implicitamente condicionados por controles geológicos do jazimento e ainda porque, os processos de amostragem, devido limitações advindas de dificuldades técnicas e econômicas, inerentes aos trabalhos de pesquisa, não produzem dados totalmente aleatórios.

Para que as análises estatísticas feitas sejam significantes, deverão ser adotados métodos de amostragem, que produzam valores que não se afastem além de limites toleráveis da propriedade de **Aleatoriedade**.

A principal preocupação na coleta de amostras será o de evitar condições **tendenciosas**. Os raciocínios de interpretação estatística são utilizados com as ressalvas decorrentes das limitações referidas. Os resultados obtidos são considerados como aproximações da realidade, procurando-se estimar razoavelmente as suas precisões (ou imprecisões), também de forma probabilística.

Em princípio (embora muitas vezes não seja possível), os trabalhos planejados de amostragem, assim como os dados nos mesmos obtidos, devem serem preliminarmente submetidos à testes de **aleatoriedade**, com respeito à:

- Distribuição espacial dos pontos amostrados, evitando-se concentrações (não aleatória).
- Propriedades aleatórias dos valores numéricos obtidos das análises (ou de outras medidas) feitas nas amostras.

Testes de aleatoriedade praticados em pesquisa mineral, são descritos nas publicações referidas Maranhão 1983, Hazen 1967, Grossi Sad 1986, indicados para consulta, deixando-se de abordá-los neste texto.

Entretanto, devido as limitações de ordem técnica e econômica, os trabalhos de pesquisa na maioria dos casos são imperfeitamente distribuídos nas três dimensões do espaço (principalmente na dimensão da profundidade), devido dificuldades de acesso; também o número de dados disponíveis para serem computados em muitos casos, é insuficientes para permitir testes de aleatoriedade (principalmente nos primeiros estágios da pesquisa).

Porém, mesmo com essas restrições, as análises estatísticas são úteis, embora seus resultados devam ser considerados com as ressalvas devidas as suas imperfeições de origem. De modo geral, para que existam condições satisfatoriamente aleatórias, é necessário:

- a) Que as amostras tomadas contenham as partículas úteis aleatoriamente distribuídas na porção amostrada, de forma a ser satisfatoriamente representativa da distribuição, na qual elas ocorrem na porção da rocha amostrada.
- b) Que o processo de amostragem resulte em amostras espacialmente distribuídas, de modo a representar a distribuição espacial dos atributos analisados, numa certa parte do depósito pesquisado.

A primeira dessas condições está relacionada a quantidade ou volume do incremento amostrado, e também a textura e estrutura do minério pesquisado.

Num depósito de alto teor, como os de minério de ferro ou de bauxita e outros, existem geralmente condições razoavelmente uniformes até a distâncias relativamente grandes; assim que amostras relativamente pequenas, poderão ser representativas, compreendendo flutuações de conteúdos úteis até distâncias relativamente grandes na sua representatividade. Se o depósito fosse absolutamente uniforme (o que nunca acontece), uma única amostra seria suficiente.

Num depósito de baixo teor, porfirítico de cobre ou de molibdênio, ou também sedimentar de chumbo-zinco, os controles geológicos da mineralização, em geral são de pequena escala, distribuindo-se os conteúdos úteis em microfraturas ou microleitos, formando vênulos ou lenticulas.

Nesses casos, sendo a amostra suficientemente grande, ela poderá representar o material aleatoriamente distribuído, sendo o depósito considerado uniforme, até a distâncias relativamente grandes (para efeito de amostragem).

Quando a mineralização é controlada por macro estruturas, maiores dificuldades haverá para tomada de amostras representativas. Nesses casos geralmente existem porções nas quais existe relativa uniformidade, e a correta distribuição espacial das amostras poderá resultar satisfatoriamente aleatória, e representativa para as diversas partes do depósito.

Acrescentando complexidade, é característica comum dos depósitos minerais a existência de "Trends" direcionais na distribuição dos teores, no todo ou nas partes que os compõem como mostram as figuras 37 e 38.

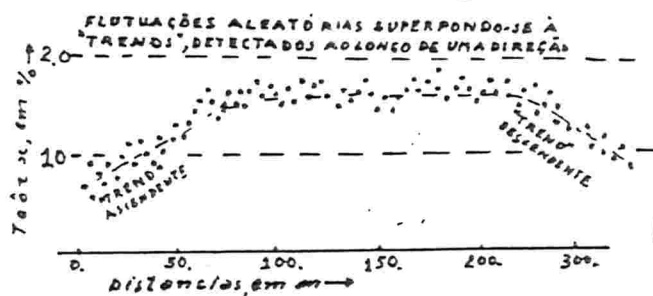


Fig 37



Fig 38

"Trend" é uma tendência de variação relativamente regular do teor médio, ao longo de alguma direção, superpondo-se as flutuações estatísticas. As figuras 37 e 38 mostram trends superpostos as flutuações estatísticas, detectadas pela amostragem sistemática, ao longo de uma direção.

É obvio que nesses casos, análises estatísticas clássicas são de representatividade restrita, podendo serem implementadas mediante amostragem estratificada, de forma a permitir compor os resultados parciais, esses representativos para pequenas partes do depósito.

Dificuldade inerente a Pesquisa Mineral com respeito a obtenção de dados aleatórios, são limitações insanáveis para aplicação de conceitos de estatística clássica.

Algumas dessas dificuldades são superadas pela aplicação de **Geoestatística**, a qual é uma metodologia de análises estatísticas desenvolvida especificamente para resolver problemas geológicos.

4.2 - Procedimentos de amostragem usados em Pesquisa Mineral Essencialmente são:

- Procedimento de amostragem **Aleatória**;
- Procedimento de amostragem **Sistemática**;
- Procedimento de amostragem **Estratificada**;
- Procedimento de amostragem **Combinados**.

- Amostragem Aleatória:

Requer que cada ítem do atributo objeto da amostragem, tenha igual chance de ocorrer em cada uma das amostras tomadas. Num corpo de minério, significa que cada ítem existente da população analisada tenha a mesma chance que os demais, de ser selecionado, em cada uma das amostras (tomadas e analisadas).

Na superfície de um corpo de minério estendendo-se próximo a superfície do terreno, se poderá colher uma amostra satisfatoriamente aleatória, locada em relação a área amostrada, mediante a abertura de um poço raso de pesquisa. O mesmo poderá ser feito em relação a área de uma face exposta de um bloco de minério, locando-se aleatoriamente na face, uma amostra de canal ou coletando um fragmento ("chip sample"). Sondagens verticais a partir da superfície do terreno, atravessando uma determinada espessura do corpo de minério, o qual estende-se horizontalmente em superfície, poderão serem locadas aleatoriamente em área; se todas as sondagens atravessaram o corpo de minério; se de cada uma das sondagens, o material colhido constituir uma única amostra; foi feita uma amostragem aleatória. Também, se de cada uma das sondagens, foi colhido material em intervalos iguais da espessura de minério atravessada; se essas amostras parciais foram analisadas, e considerado, para cada furo, o valor médio; ainda nesses casos a amostragem foi aleatória.

De modo geral, nas duas dimensões de uma superfície, tendendo a horizontalidade e pouco profunda, poderão serem tomadas amostras razoavelmente aleatórias.

Porém na terceira dimensão do espaço, para profundidades maiores, poderá se tornar difícil a coleta de amostras aleatórias. Isso geralmente acontece nos corpos de minério com atitudes fortemente inclinadas, pesquisados por sondagens a partir da superfície. Geralmente é economicamente proibitiva a amostragem aleatória no interior dos corpos de minério, mediante acessos de trabalhos subterrâneos (galerias e poços).

- Amostragem Sistemática:

Consiste em coletar sucessivas amostras em sequência, à intervalos aproximadamente constantes, ao longo dos acessos abertos no interior dos corpos de minério (em poços, galerias ou mesmo nos furos de sondagem).

Também em colher sistematicamente, amostras obtidas por sondagens ou poços perfurados, segundo uma malha com padrão pré-estabelecido. Esse é o procedimento geralmente utilizado em Pesquisa Mineral, e entretanto não produz dados rigorosamente aleatórios. As locações das amostras são condicionadas por procedimento pré-estabelecido não aleatório, e pelo fato de haver maior correlação entre os valores obtidos pelas amostras contíguas ou mais próximas.

Na malha pré-estabelecida por critério geométrico, os pontos não coincidentes com os nós da malha, estarão excluídos, contrariando a condição fundamental de aleatoriedade, no que diz respeito de igual chance de serem testados todos os pontos da área pesquisada.

- Amostragem Estratificada:

É realmente o procedimento mais adotado na Pesquisa Mineral, mediante o qual serão estratificados, os valores obtidos originalmente mediante **amostragem sistemática.**

Amostragens sistemáticas para teores praticados nos corpos de minério geralmente apresentam zoneamento espacial dos valores obtidos. Esse zoneamento é então utilizado para estratificar os dados obtidos. Desse modo são minimizados os inconvenientes devido a não

aleatoriedade da amostragem sistemática, e também dos "Trends" detectados.

Outro natural parcelamento ou critério de estratificação, dos valores obtidos pela amostragem sistemática, consiste em estratificar os valores obtidos, em relação às partes do depósito, nas quais os condicionamentos geológicos mostram razoáveis uniformidades. Desse modo são minimizados os inconvenientes devido a heterogeneidade das diversas porções que compõe o total do corpo de minério pesquisado.

Também o método de coleta de amostras poderá resultar na concentração do ítem útil nas partículas de um dado tamanho (acima ou abaixo do mesmo). Assim o conteúdo do ítem útil no depósito será proporcional às frações com as correspondentes granulometrias do material coletado. Então o fracionamento granulométrico (mediante peneiramento) no processamento das amostras, será outro critério de estratificação dos valores obtidos na amostragem.

- Procedimentos Combinados:

A amostragem **Sistemática-Estratificada** conforme foi visto, é um procedimento combinado. Poder-se-á também adotar critérios aleatórios para selecionar os estratos, de modo a compor os resultados de amostragem estratificada, e o procedimento será então de **Amostragem Estratificada Aleatória**.

Observa-se que cada depósito mineral é um caso singular na natureza, requerendo singulares procedimentos adequados de amostragem e de modelos, para interpretação dos valores resultantes.

Em todos os casos são necessários prévios conhecimentos geológicos para planejar e executar a amostragem. Conhecimentos prévios de distribuição de teores relacionados aos condicionamentos geológicos, são melhor compreendidos com o progresso da pesquisa (ou seja, da operação de amostragem), motivo pelo qual os procedimentos de amostragem evoluem, aperfeiçoando-se nos estágios avançados da mesma.

4.3 - Fundamentos da análise estatística clássica, aplicada na Pesquisa Mineral.

- Conceitos Fundamentais:

- **Universo da Amostragem:**

é a massa total do material contido na área interessante, sendo a origem de todos os dados, que são de interesse para o projeto da amostragem.

O **Universo** pode consistir de uma das múltiplas características mensuráveis (ou atributos) das amostras tomadas no depósito, como por exemplo resultados obtidos das análises para ouro, para cobre (sob as formas de Cu total ou óxidos ou sulfetos), para zinco, etc. Geralmente os limites físicos do **Universo** são estabelecidos antes da execução do projeto, podendo compreender, todo o depósito, uma determinada grande parte do mesmo, um bloco delimitado para mineração, ou outros parcelamentos.

Geralmente, quando comparadas com as dimensões e as quantidades dos incrementos amostrados, as dimensões definidas do **Universo** são muito grandes, podendo serem praticamente consideradas de dimensões infinitas.

- **Unidade Amostrada:**

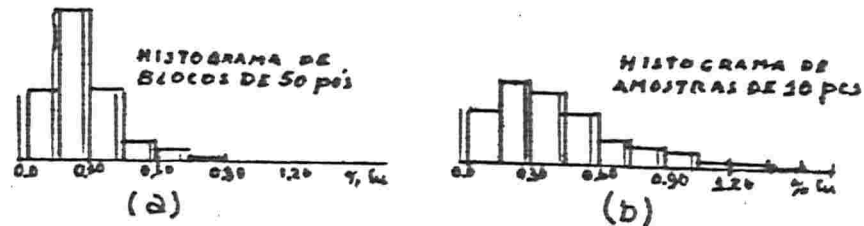
é a parte selecionada do **Universo**, sobre a qual são feitas as medidas. Sobre universos constituídos por pessoas ou por peças (em pesquisa sociológica ou operacional) a **Unidade Amostrada** costuma ser a menor unidade que pode ser selecionada (sendo uma pessoa ou uma peça manufaturada). Num depósito mineral a unidade básica natural seria a molécula. Sendo praticamente impossível selecionar a molécula, são selecionadas porções em peso ou em volumes de material, muito maiores, como sejam 1kg de amostra de canal, 1 metro linear de testemunho colhido numa sondagem, etc. Como também um bloco de minério com dimensões de 15m x 15m, em outros casos.

- **População:**

é uma família de medidas com características definidas, identificadas através das medidas feitas em **Unidades Amostradas** uniformes no **Universo**.

As medidas são para atributos do **Universo**, como sejam valores de análises de cobre (total, oxidado ou sulfetado), de zinco, etc; também de relações interessantes tais como a razão teor chumbo/teor zinco; podem serem medidas físicas como de pesos específicos, porosidades, espessuras (de filão ou de camada) e muitas outras.

Para que Populações sejam definidas, é condição essencial a uniformidade da Unidade Amostrada. Um mesmo atributo analisado a partir de diferentes Unidades Amostradas, resultam em Populações com características diferentes, como mostram as figuras 39 a e b.



HISTOGRAMAS DE FREQUENCIA DOS TEORES DE UM DEPOSITO DE COBRE PORFIRITICO, OBTIDOS A PARTIR DE:-
 EM (a) - DOS TEORES DE BLOCOS DE 50 PCS
 " (b) - " " " AMOSTRAS DE 10 PCS

Fig. REPRODUZIDA DE DAVID 1577

Fig 39

- Histogramas e Curvas de Frequências:

São expressões gráficas das características de distribuição dos valores em uma População. Nos Histogramas, as bases dos retângulos (locados em abscissas), expressam os intervalos "I" das Classes dos valores medidos (intervalos de valores de teores, de espessuras ou de outros atributos). As alturas dos retângulos (locados em ordenadas), podem expressar os números de valores que foram obtidos nos respectivos intervalos, ou nas Classes correspondentes. Nesse caso diz-se que o histograma assim obtido é um Histograma de Distribuição de Frequências Absolutas. As alturas dos retângulos podem também expressar as relações n/N (do número "n" de valores que caiam na Classe, para o número "N" total dos valores obtidos da amostragem). Nesse último caso diz-se que é um Histograma de Frequências Relativas da distribuição. As frequências relativas podem ser expressas sob a forma fracionária " n/N ", ou sob a forma de percentagem ($n/M \cdot 100$). Num e no outro caso, os somatórios de todas as frequências relativas, serão respectivamente a unidade (1) ou cem (100).

Conforme a definição da Probabilidade Estatística, de ocorrerem valores dentro de uma Classe determinada de População, os conceitos de Probabilidades e de Frequências Relativas, são coincidentes. A curva (suavizada), unindo os meios das bases superiores dos retângulos de um Histograma de Frequências Relativas obtido experimentalmente é o que se denomina Curva Experimental da Distribuição de Frequências ou de Probabilidades, ver figuras 40 a e b.

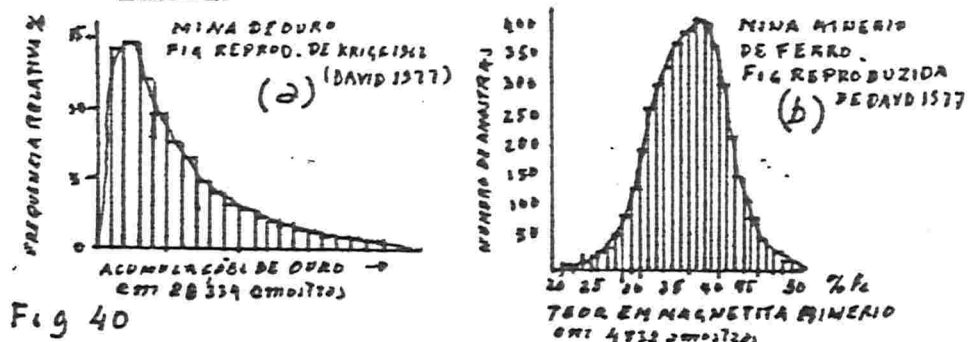


Fig 40

Teoricamente, para cada um dos valores "xi" de uma variável aleatória "x" contínua, corresponderá uma Frequência (teórica) expressa pela ordenada f(x). Então a Probabilidade de um dos valores "xi" da variável "x", estar compreendida no intervalo entre "x" e "x + dx", será f(x)dx. Quando "x" pode variar entre os limites (-∞) até (+∞), tem-se:

$$\text{Probabilidade } (-\infty) < x < (+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{Expressão (17)}$$

exprime a curva teórica de distribuição de frequências, ou de probabilidades nas condições estabelecidas.

Quando a variável "x" somente pode admitir valores maiores do que zero, como no caso de distribuição de teores (teoricamente possíveis), o modelo matemático mais adequado será:

$$\text{Probabilidade } (0) < x < (+\infty) = \int_0^{+\infty} f(x)dx \quad \text{Expressão (18)}$$

Nunca se conhece a verdadeira função teórica f(x)dx, de uma distribuição de Frequência. O que é possível é levantar uma Curva Experimental, a partir de dados de amostragem, analisados e ensaiados. Processos de ensaio de distribuição constam dos manuais de estatística experimental. Ver quadros nos 15 e 16 à página 115.

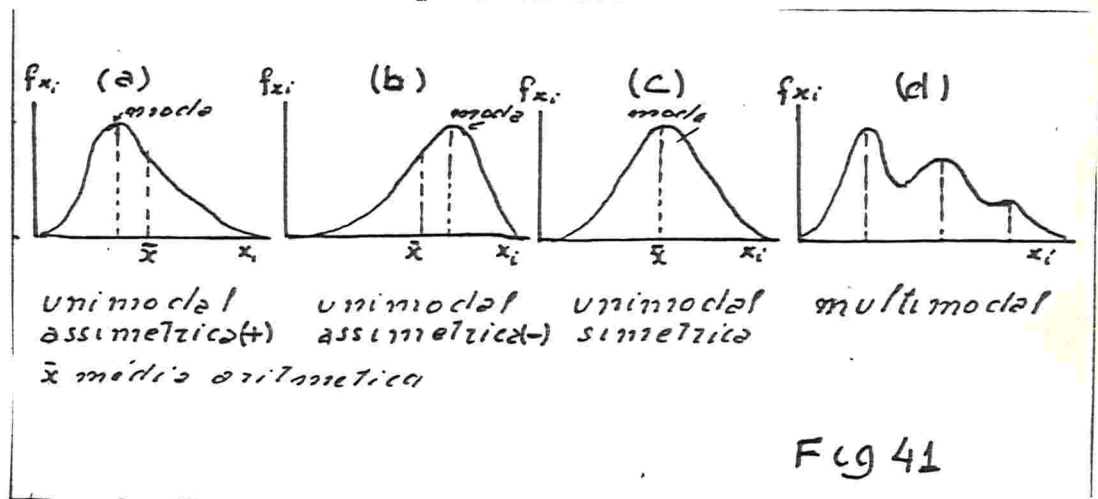
Admitindo-se que os dados originais que servirão para construção de uma **Curva Experimental de Distribuição de Frequências**, foram obtidas de forma razoavelmente **Aleatória** e a partir de um número "N" suficientemente grande de valores obtidos na experiência, essa curva poderá ser interpretada mediante análise estatística clássica.

Para isso se deverá adotar modelos adequados, caracterizados por **Tipos e Parâmetros**, específicos do modelo.

- **Tipos e Parâmetros** dos modelos de distribuição de frequências

- **Distribuições Unimodal e Multimodal**

Curvas experimentais de distribuição de frequências poderão se apresentarem como mostram as figuras 41 a, b, c e d, as quais podem preliminarmente serem classificadas nos tipos **Unimodal** (figuras 41 a, b e c) e **Multimodal** (figura 41 d).



Distribuições **Multimodais** podem terem sido causadas por erros sistemáticos cometidos na amostragem ou nas análises, caracterizando diferentes populações coexistentes expressas na curva; podem ainda serem expressão de diferentes eventos de mineralização no **Universo** amostrado, através das correspondentes diferentes **Populações**, coexistentes; podem expressar diversidades das características de populações de diversas

partes do jazimento amostradas indiscriminadamente. De modo geral expressam coexistência nos itens ensaiados, de mais do que uma população.

Uma **Curva Unimodal** poderá tender a ser **Simétrica** podendo ser adequada para ser assimilada ao tipo teórico de distribuição **Gaussiana** (ou de **Distribuição Normal**). Quando uma **População** constituída dos erros de avaliação de teores num depósito razoavelmente uniforme; quando os erros cometidos não foram sistemáticos, mas sim devidos a multiplas causas **Aleatórias**, muito numerosas e independentes; poderão gerar uma distribuição **Simétrica**, tendendo a uma **Curva Normal** (como mostra a figura 42)



Fig 42

Distribuição de teores nos depósitos minerais (razoavelmente uniformes), assim como de conteúdos dos elementos analisados em prospeção geoquímica em amostragem de solos sobre uma única formação, geralmente geram curvas de distribuição de frequências **Unimodais**, porém **Assimétricas**. Parâmetro de **Forma de Assimetria ("SKEWNESS")** Positiva, significando distribuição com **excesso de valores baixos** em relação a distribuição **Normal** ou **Gaussiana**, é característica comum dos jazimentos de baixos teor.

Como mostra a figura 40a, a curva é assimétrica com os valores altos deslocados para a **esquerda** (em relação ao que acontece numa distribuição **Normal**). Exemplo comum em jazimentos auríferos.

Parâmetro de Forma de Assimetria ("SKEWNESS")
Negativa, significando distribuição com **excesso** de valores **altos**, em relação ao que acontece no caso de distribuição **Normal**, é característica comum aos jazimentos de altos teores, como por exemplo os de minério de ferro. Como mostra a figura 40b a curva é assimétrica com os altos valores deslocados para a **direita** (em relação ao que acontece na distribuição **Normal**).

Entretanto parece **inexistir** correlação entre modelos de distribuição de frequências de teores (ou de outros tipos de atributos como a espessura, peso específico, etc.), com os tipos genéticos dos jazimentos minerais.

Simetria e Assimetria (ou "SKEWNESS"), Positiva ou Negativa; assim como **Curtose (ou "Kurtosis")**, são Parâmetros de Forma de curvas Unimodais. **Curtose** expressa o achatamento (ou agudesa) da forma curva.

- **Parâmetro de Tendência Central** de uma curva teórica de distribuição de frequências de uma variável **Aleatória "x"**, é o **Valor Esperado, E(x)** da variável "x", ou seja a **Verdadeira Média Estatística " μ "**, da população da variável "x".

Quando "x" é uma variável contínua que pode assumir todos os valores entre $(-\infty)$ à $(+\infty)$, tem-se:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot F(x) dx \quad \text{Expressão (19a)}$$

Quando "x" admitir somente valores positivos, como no caso de teores, tem-se:

$$\mu = E(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot F(x) dx \quad \text{Expressão (19b)}$$

O **Parâmetro de Tendência Central " μ "** ou a **Verdadeira Média**, é o parâmetro mais importante que se pesquisa nos problemas de avaliação das jazidas, embora nunca poderá ser perfeitamente conhecido (somente poderá ser Estimado).

- **Verdadeiro Parâmetro de Dispersão " σ "**, é outro parâmetro muito importante da variável aleatória "x", sendo expresso por:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx} \quad \text{Expressão (20)}$$

Da mesma forma como nunca se conhece a verdadeira função de **Distribuição de Frequência** (ou de **Probabilidades**), dos teores (ou de outros atributos de um jazimento), também nunca se conhece sua **Verdadeira Média ou Dispersão**.

Nas análises estatísticas dos valores pesquisados, adota-se um modelo matemático, considerado mais adequado ao modelo experimental conhecido, e então de acordo com o modelo teórico, adota-se **Estimadores**, como por exemplo:

- A média aritmética:

$\bar{x} = 1/N \sum_{i=1}^N x_i$, para o padrão de tendência central (ver também item 4.4.1 e 4.4.2 à página 127).

- O desvio padrão aritmético:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / (N - 1)}; \text{ ou}$$

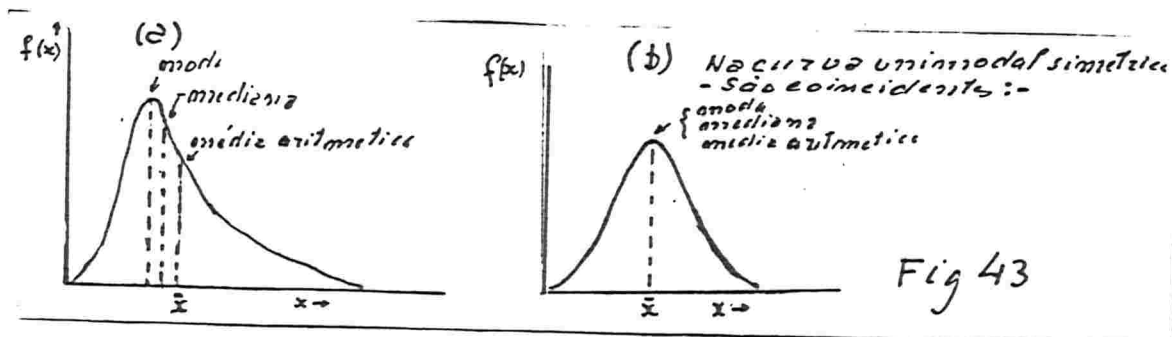
- A variância aritmética:

$$s^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1); \text{ estes últimos para o parâmetro de dispersão.}$$

Esses são somente adequados quando a distribuição é **normal** (Gaussiana), e entretanto são os **estimadores** mais utilizados em Pesquisa Mineral, embora com as muitas restrições a serem abordadas mais adiante.

- Outros estimadores do parâmetro de tendência central:

Outros estimadores do parâmetro de tendência central também utilizados (com muitas restrições) para **Distribuições de Frequências Unimodais** (ver também item 4.4.1) à página 127.



- **Mediana** (ver figura 43a) - É definida como o valor do ponto médio de uma distribuição de frequência, de modo que 50% dos valores experimentais ensaiados estão acima ou abaixo da **Mediana** (ver também no item 4.4.4. **Mediana**, à página 128).

Quando os valores de "x" obtidos no ensaio, são tabulados de forma crescente, a Mediana será:

- O valor central, quando o número "N" de valores ensaiados for ímpar.
- O valor médio dos dois valores ensaiados centrais, quando o número "N" de valores for par.

Num ensaio de distribuição de frequências experimental a **mediana** poderá ser calculada conforme a seguinte fórmula:

Mediana = Limite inferior do intervalo mediano +

$$+ \frac{((N/2) - \text{freq. acumulativa dos interv. de teores precedes})}{(\text{frequência do intervalo mediano})} \times$$

x interv. de teores utilizado no ensaio de distrib. de freq

Exemplificando com o ensaio de distribuição de frequências dos valores de ppm Zn do Quadro nº 15 à página nº 115 :

Nº de valores ensaiados: $N = 2180$; $N/2 = 2180/2 = 1090$

Intervalo de classe: 9 ppm Zn

Frequência acumulada até a 2ª classe (ou grupo):

$$150 + 525 = 675$$

Frequência acumulada até a 3ª classe (ou grupo):

$$150 + 525 + 553 = 1228$$

$$675 < 1090 < 1228$$

Intervalo mediano é o da 3ª classe (o qual contém mediana);

Então:

$$(2180/2) - 675)$$

$$\text{Mediana} = 22 \text{ ppmZn} + \frac{\quad}{553} \times 9 \text{ ppmZn} = 29 \text{ ppmZn}$$

Quando o número "N" de itens ensaiados é pequeno a Mediana não pode ser calculada com acuracidade.

A Mediana é a mediação mais típica quando existe grande número de itens e os valores dos mesmos são estreitamente concentrados.

- **Moda** - Definido como o valor de maior frequência no ensaio de distribuição de frequências; ou seja o valor de "x" correspondente a abscissa da ordenada f(x) máxima da curva (ver também o item 4.4.6 à página 129).

Como mostra a figura 43a, no caso de distribuição do tipo unimodal simétrica (como por exemplo no caso da Distribuição "Gaussiana" ou Normal), os valores da Média Aritmética " \bar{x} ", da Mediana e da Moda, coincidem.

- **Distribuição de Frequências Acumulada**, também chamada de **Cumulativa**, coincidente com o conceito de **Probabilidade Acumulada (ou Cumulativa)**

- Define-se:

Frequência Acumulada do valor, ou classe de valores de ordem "n" de uma distribuição (absoluta ou relativa), é a soma das frequências dessa distribuição, desde a primeira ou a última, até a ordem "n" inclusive.

Assim a **Frequência (ou a Probabilidade) Acumulada**, com que uma variável "x" aleatória, continua e sempre positiva, seja sempre inferior a um determinado valor da variável "x₀" seria expresso por:

$$\text{Frequência } \{x \leq 0\} = \int_{x=0}^{x=x_0} f(x)dx = F(x_0) \quad \text{Expressão (21)}$$

F(x₀) é a função que se denomina **Frequência ou Probabilidade Acumulativa**, até o valor "x₀". Funções acumulativas de frequência (ou de probabilidades) experimentais, são calculadas a partir dos ensaios de distribuição de frequência, servindo para caracterizar populações e seus parâmetros determinantes. Ver exemplo nº 13 à página 113 e seguintes

4.3 - Modelos matemáticos estatísticos utilizados nas análises das curvas experimentais de distribuição de frequências (ou de probabilidade).

Os modelos correntemente utilizados são os da **Distribuição Normal (ou Gaussiana)** e o da **Distribuição Lognormal**, os quais serão abordados nos itens que se seguem 4.3.1 e 4.3.2.

Como base no modelo de **Distribuição Binomial** foi desenvolvido método para prever o número de amostras que deverão ser tomadas, objetivando estimar com uma determinada acuracidade o teor do minério de ferro, desmontado num plano de fogo, na operação de lavra.

Esse é um método particular restrito às condições de que o jazimento seja razoavelmente uniforme, e que também o teor médio do jazimento seja conhecido. Deixamos de abordá-lo neste texto, indicando para consulta na bibliografia referida Hazen 1967 e David 1977.

Com base no modelo de **Distribuição de Poisson** foi desenvolvido método para estimar a acuracidade da análise obtida, quando uma determinada freqüência como por exemplo de 10 g de amostra de minério de baixo teor ao ser preparada para análise, tenha sido moída até a malha 100 mesh (ver em David 1977).

Esse é o modelo mais utilizado para análise estatística em problemas de cominuição na preparação de amostras para análise química.

Também com base no modelo de Poisson foi desenvolvido método para testar a aleatoriedade da amostra numa companhia de Pesquisa Mineral (ver em Hazen 1963).

4.3.1 - Distribuição Normal ou Gaussiana

4.3.1.1 - Conceituação e principais parâmetros:

Resguardando-se as restrições apontadas anteriormente com respeito a adequação desse modelo, para representar as distribuições de valores condicionados de forma determinística pelos fenômenos geológicos, é um modelo correntemente utilizado para avaliações de precisões em amostragem. É o mais aplicado para se obter resultados médios preliminares, estimação de níveis de confiabilidade (com seus respectivos intervalos de confiança), assim como para avaliar os **Coefficiente de Variação V** dos depósitos minerais.

A **Distribuição Normal** é uma **Distribuição Simétrica** que idealmente será obtida, quando as causas que intervêm para que aconteçam os valores resultantes sejam totalmente aleatórios, independentes e em número muito grande (praticamente infinito).

Sua função, estabelecida por Gauss, é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2 \cdot (x - \mu/\sigma)^2} \quad \text{Expressão (22)}$$

μ e σ são os verdadeiros parâmetros, de tendência central e de dispersão; e, é a base dos logaritmos neperianos (naturais).

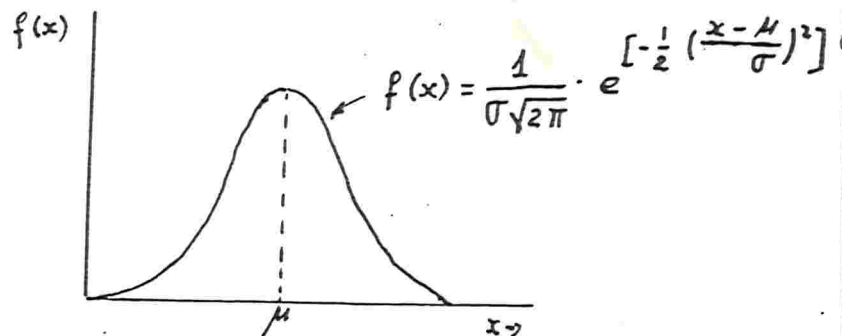


Fig 44

O estimador do parâmetro de tendência central mais adequado a esse modelo é a **média aritmética** " \bar{x} "

$$\bar{x} = 1/N \cdot \sum_{i=1}^{i=N} x_i; \quad \text{expressão (23)}$$

(ver também **Média Aritmética** ítem 4.4.2, à página 127).

No caso de um ensaio experimental de distribuição de frequências de "N" valores, a **Média Aritmética** " \bar{x} " poderá ser calculada através da expressão (24):

$$\bar{x} = \frac{\sum (f_i \cdot (p_{im}))}{N} \quad \text{expressão (24)}$$

Sendo:

- f_i as frequências absolutas dos valores das análises compreendidas em cada uma das **classes** de valores (considerados no ensaio);
- p_{im} a abscissa do ponto médio de cada uma das classes;

- N o número total de valores "xi" ensaiados da variável "x" pesquisada.

Exemplificando, com o ensaio de distribuição de frequências dos valores de ppmZn do Quadro nº 15 à página 115 :

$$\sum f_i(p_{im}) = 150 \times 8,5 + 525 \times 17,5 + \dots + 2 \times 134,5 = 75950 \text{ ppmZn}$$

Média Aritmética $\bar{x} = 75950/2180 = 34,8 \text{ ppmZn}$.

A **Média Aritmética** é um **Estimador Eficiente** quando o número "N" de valores ensaiados for muito grande, significando que para altos valores de "N" ela tem **Variância** mínima.

Os estimadores do verdadeiro parâmetro de dispersão adequados para a dispersão **Normal** são a **Variância Aritmética "s²"** e o **Desvio Padrão Aritmético "s"**, expressos por:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum (x_i)^2}{N} - (\bar{x})^2 \quad \text{expressão (25)}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2}{N} - (\bar{x})^2} \quad \text{expressão (26a)}$$

Assim a **Variância Aritmética** da variável "x" é definida como:

- A média dos quadrados dos desvios em relação a **Média Aritmética**, dos valores "xi" da variável "x"; ou também como:
- A diferença entre a média aritmética dos quadrados dos valores "xi", da variável "x" e a média aritmética " \bar{x} " desses mesmos valores elevada ao quadrado.

O **Desvio Padrão** aritmético será definido como a raiz quadrada da **Variância Aritmética**.

(Ver também item 4.4, utilização dos parâmetros estatísticos na Pesquisa Mineral, sub item 4.4.8, à página 129).

O **Desvio Padrão Aritmético** calculado conforme a expressão (26a) é **tendencioso para mais**, não sendo portanto **Imparcial**. Isso é devido a razões matemáticas relacionadas ao fato de que o grau de liberdade dos desvios da média $(x_i - \bar{x})$ ser em número $(N - 1)$ em lugar de "N".

Por essa razão, e para atenuar essa tendenciosidade o Desvio Padrão Aritmético é calculado geralmente pela expressão:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad \text{Expressão (26b)}$$

Obviamente, quando o número "N" de valores ensaiados for grande, ambas as expressões (26a) e (26b) dão resultados sensivelmente iguais.

Nos ensaios experimentais de distribuição de frequências, (quando o número de itens ensaiados "N" é grande), por comodidade, se poderá utilizar a expressão (27) para calcular o **Desvio Padrão Aritmético**

$$s = \sqrt{\frac{\sum ((f_i) \cdot (P_{im}))^2}{N} - \left(\frac{\sum (f_i) \cdot (P_{im})}{N}\right)^2} \quad \text{Expressão (27)}$$

onde (f_i) e (P_{im}) representam os mesmos valores utilizados na expressão (24).

4.3.1.2 - Distribuição de Frequência Acumulada (ou Acumulativa) da Distribuição Normal:

A **Distribuição de Frequência Acumulada**, é a série estatística que se obtém somando-se sucessivamente as frequências absolutas ou relativas, de uma distribuição de frequências (ver também no item 4.2.3 a definição de Distribuição de Frequência Acumulada à página 90).

Os valores da função de **Frequências Acumulativas F(x₀)** até cada valor "x₀" da distribuição Normal, encontra-se em tabelas nos tratados de estatística aplicada. Esses valores tabelados são expressos em função de uma nova variável "Z", estandarizada, em relação ao **Desvio Padrão**, tal que:

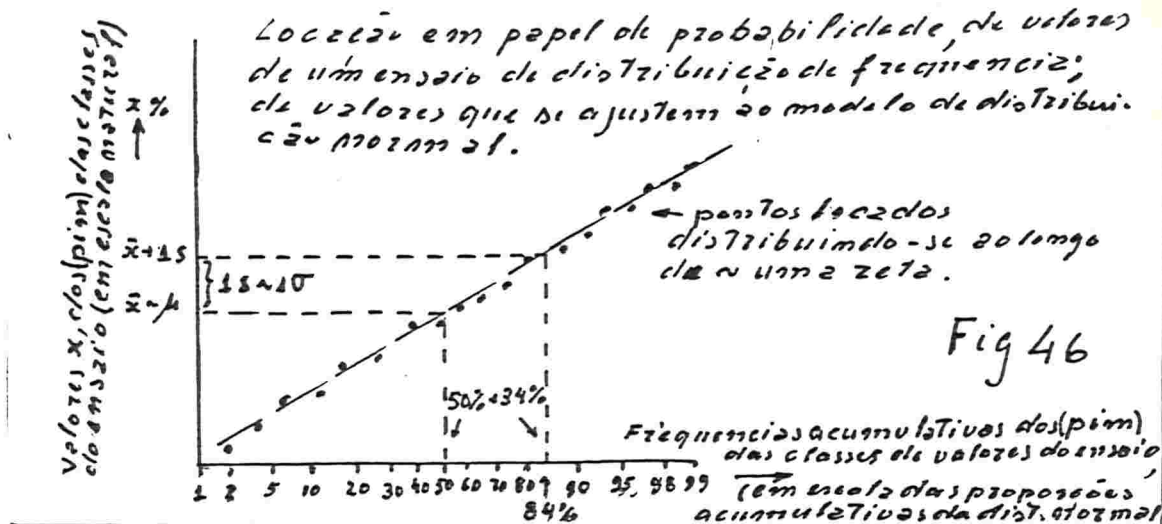
$$Z = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} \sim \frac{x_0 - \bar{x}}{s}$$

<i>z</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

FUNÇÃO F(Z), acumulativa da distribuição normal, para:
 $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ (área sob a curva normal)



Com base nessa distribuição Acumulativa expressa em função de "Z", obtêm-se valores típicos da Distribuição Acumulativa Normal, os quais podem ser facilmente memorizados, e são de grande utilidade nas análises estatísticas experimentais. Assim conforme está anotado na figura 45 esses valores são aproximadamente (para a distribuição Normal):



Observação: Outro procedimento de análise estatística utilizado para verificar a aderência ao modelo de distribuição normal, mediante o parâmetro estatístico **Qui Quadrado**, poderá ser motivo de consulta em Maranhão 1983 ou em Hazen 1967.

4.3.2 - Distribuição Log Normal

4.3.2.1 - Conceituação e objetivos de sua utilização: Quando os **logaritmos dos valores** possíveis da variável "x", obedecem a distribuição de frequências Normal (ou Gaussiana), diz-se que a distribuição de frequências da variável "x" é **Log Normal**.

Essa mesma definição é válida para ambos os casos nos quais os Logaritmos dos valores referidos, sejam neperianos ou decimais.

Admitindo-se que a distribuição normal seja a dos logaritmos naturais da variável (ln x) de acordo com a expressão (22), a **Curva de Distribuição Log Normal** será representada pela equação (28):

$$f(\ln x) = \frac{1}{\beta \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta} \right)^2} \quad \text{Expressão (28)}$$

onde:

f(ln x) = frequência dos valores dos logaritmos naturais (ou neperianos) da variável "x" (função da variável x);

β = Parâmetro de dispersão (verdadeiro) dos logaritmos naturais da variável "ln x";
 α = Verdadeira média dos "ln x".

O conceito de **Distribuição Log Normal** em Matemática Estatística é mais abrangente, definindo-se conforme Rodrigues, 1956, como aquela que obedece uma variável aleatória "x", se a distribuição de $\log(x - a)$, para "a" constante, for **Normal**.

Portanto quando é somada uma constante (positiva ou negativa ou zero) aos valores da variável "x", seus logaritmos distribuem-se conforme a curva **Normal**, a distribuição da variável "x" é dita **Log Normal**.

A curva da distribuição Log Normal é uma curva do tipo **Unimodal Assimétrica**, a qual torna-se **Simétrica**, conforme a curva Normal (Gaussiana), quando os valores da variável "x" mais constante (+/-a), são substituídos pelos seus respectivos logaritmos. Ver figura 47.

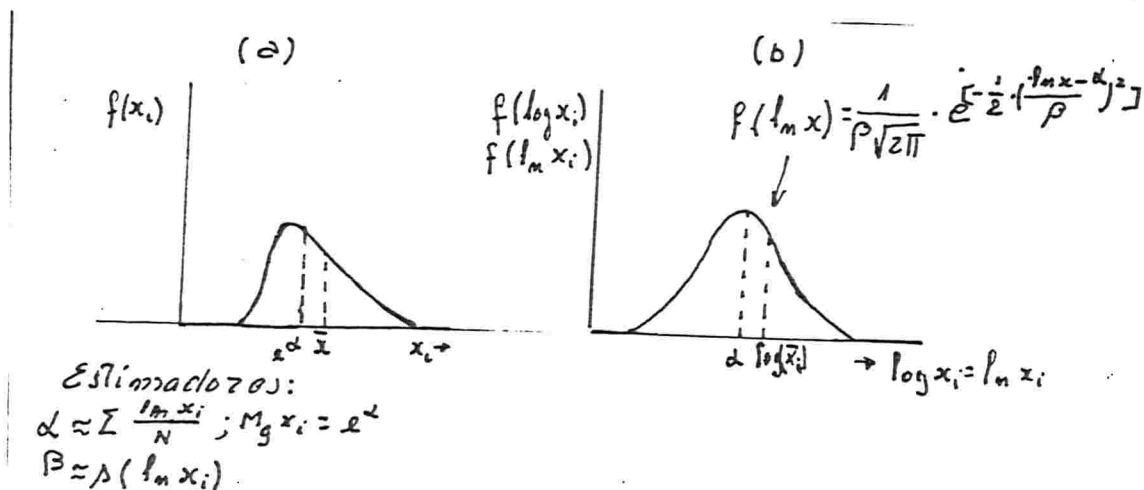


Fig 47

Nos problemas de amostragem dos jazimentos de baixo teores, e também na prospecção geoquímica (na amostragem de solos ou de sedimentos ativos de corrente), as curvas de distribuição de frequências dos valores ensaiados, mesmo quando unimodais, de modo geral, são assimétricas. Entre outras causas isso é consequência de que os valores da amostragem são influenciados pelos controles genéticos do jazimento, produzindo assimetria.

A assimetria da curva de distribuição dos valores, dificulta a aplicação de Estatística, para que sejam definidos seus parâmetros. Principalmente no que diz respeito ao parâmetro de tendência central (valor médio), necessário para definir a média dos teores do jazimento, ou background (no caso de prospecção geoquímica).

Por esse motivo, procura-se **Normalizar** a curva experimental. Esse procedimento consiste em substituir a variável "x" pesquisada, por uma função derivada da mesma, cuja distribuição seja mais adequada à ser assimilada ao modelo Normal de distribuição.

A experiência universal em Pesquisa Mineral, tem mostrado que a adoção dos logaritmos dos valores de "x" (ou de "x" mais uma constante), em lugar dos valores de "x" é artifício muito adequado para **Normalizar**. Esse procedimento, consiste em adotar o modelo **Log Normal** para interpretar os valores da variável "x" pesquisada. As curvas adequadas ao modelo Normal, obtidas com os logaritmos de "x" (ou de x + a), são assim facilmente interpretadas. Os antilogaritmos dos parâmetros interpretados, serão os parâmetros interessantes pesquisados dos valores "x" (ou de x + a).

Geralmente são utilizados diretamente os valores dos logaritmos para se adequar a distribuição ao **Modelo Log Normal**. Em pesquisa de desenvolvimento em minas, por vezes, a experiência indica uma constante "a", obtendo-se o modelo Log Normal da variável (x + a). Nestes últimos casos a constante "a", é excluída dos resultados finais obtidos (após interpretação).

4.3.2.2 - Estimadores do Parâmetro de Tendência Central da Distribuição Log Normal.

Ver ítem 4.4 e subítemos 4.4.3; 4.4.4 e 4.4.5 às páginas 127 e 1281.

4.3.2.2.1 - Média Geométrica, M_{gx} , (ver também ítem 4.4.3 à página 127). Tendo-se para curvas normalizadas (com logaritmos decimais ou neperianos):

$$M_{gx} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_N} = \text{antilog } 1/N \sum^N \log \cdot x_i \quad \text{Expressão (29a)}$$

$$M_{gx} = e^{\frac{1}{N} (\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N)} = \text{antilog } \frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N}{N}$$

$$= \text{antilog } 1/N \sum^N \ln x_i \quad \text{Expressão (29b)}$$

Nos cálculos dos ensaios experimentais de distribuição de frequência, a média geométrica M_{gx} pode ser calculada mediante as expressões (30 a e b):

$$\log(M_{gx}) = \frac{\sum f_i(\log P_{im})}{N} \quad \text{Expressão (30a)}$$

$$M_{gx} = \text{antilog} \frac{\sum f_i(\log P_{im})}{N} \quad \text{Expressão (30b)}$$

Sendo:

P_{im} = ponto médio de cada um dos intervalos da distribuição;

f_i = frequência para cada um dos intervalos ou classes da distribuição.

A **Média Geométrica** é um **Estimador Eficiente** somente quando o número de itens ensaiados for grande, sendo em geral considerado **Pessimista** nos casos experimentais.

Mediana (ver também outros Parâmetros de Tendência Central para Distribuições de Frequências Unimodais, no item 4.2) - Numa distribuição **Log Normal** a **Mediana** é igual, ou muito próxima, do valor da **Média Geométrica**, tendo-se no caso de logaritmos naturais, $M_{diana} = e^{\alpha}$, onde α é a média aritmética dos logaritmos naturais, da variável "x".

Média Aritmética " \bar{x} " - De modo geral é um estimador inadequado no caso de distribuição **Log Normal**. Seu valor sempre será superior ao da **Média Geométrica**, sendo tendencioso para mais.

4.3.2.2.2 - Estimador "t" de Sichel (ver também item 4.4.5 à página 128).

Pelo fato da **Média Geométrica** ser um critério pessimista de estimação, principalmente quando o número de itens "N" analisado é pequeno, o pesquisador **Sichel**, estudando jazimentos auríferos da África do Sul, em 1951, desenvolveu esse novo estimador, o qual é o mais adequado, quando testes preliminares, demonstram boa aderência à **Distribuição Log Normal**.

Com base em análise matemática de valores que obedecem a distribuição **Log Normal**, Sichel estabeleceu a seguinte expressão, a qual define o **Estimador "t" Sichel**:

$$t_{\text{Sichel}} = M_{gx} \cdot Y(V) = e^x \cdot Y(V) \quad \text{Expressão (31)}$$

Sendo:

M_{gx} = média geométrica dos valores da variável "x" ensaiada;

$Y(V)$ é uma série; a qual é função da Variância "V" dos Logaritmos Naturais dos valores ensaiados da variável "x", e do número "N" desses itens;

$$Y(V) = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot V + \frac{N-1}{2^2 \cdot 2! \cdot (N+1)} \cdot V^2 + \frac{(N+1)2}{2^2 \cdot 3! \cdot (N+1) \cdot (N+2)} \cdot V^3 \dots \right) \quad \text{Expressão (32)}$$

Nota: Para facilidade de consulta na literatura referida (David 1977, Hazen 1967 e Maranhão 1983) e nas tabelas de Sichel, conservou-se neste texto, o símbolo "V" representando a Variância do Logaritmos dos valores "xi", somente quando relacionados ao estimador de Sichel. Em outras referências deste texto, o mesmo parâmetro é anotado pelo símbolo "(s2lnxi)".

Sichel publicou tabelas do fator (V), para variâncias dos logaritmos naturais entre 0,00 até 6,00; e para valores de "N" (número de itens ensaiados) entre 2 e 20, e também entre 50 e 1000. Essas tabelas são reproduzidas em David 1977, em Maranhão 1983 e em Sad, Grossi, J. H. 1986 (ver reprodução à página 102).

Assim o Estimador de Sichel "t" é a média geométrica dos valores ensaiados $M_{gx} = e^x$, corrigido do fator (V) obtido das tabelas referidas através do valor da Variância dos Logaritmos Naturais "V", calculado.

Ver exemplo nº 11 de cálculo desse estimador à página 103.

TABELA DE SICHEL-CÓPIA DA REPRODUÇÃO DE SACHS-G. J. H. - 1982

Tabela 5.12 - FATOR γ_M (V) PARA ESTIMAR A MÉDIA DA POPULAÇÃO LOGNORMAL. EXEMPLO: $\gamma_{\sigma}(0.20) = 1.104$

γ \ N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	50	100	1000
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,02	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010	1,010
0,04	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020
0,06	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030	1,030
0,08	1,040	1,040	1,040	1,040	1,040	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041	1,041
0,10	1,050	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051	1,051
0,12	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,061	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062
0,14	1,071	1,071	1,071	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072	1,072
0,16	1,081	1,082	1,082	1,082	1,082	1,082	1,082	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083
0,18	1,091	1,092	1,092	1,093	1,093	1,093	1,093	1,093	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094	1,094
0,20	1,102	1,102	1,103	1,103	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,104	1,105	1,105	1,105	1,105
0,3	1,154	1,156	1,157	1,158	1,158	1,159	1,159	1,159	1,160	1,160	1,160	1,160	1,160	1,161	1,161	1,162	1,162
0,4	1,207	1,210	1,212	1,214	1,215	1,216	1,216	1,217	1,217	1,218	1,218	1,219	1,219	1,219	1,220	1,221	1,221
0,5	1,260	1,266	1,269	1,272	1,273	1,275	1,276	1,276	1,277	1,278	1,279	1,279	1,280	1,280	1,282	1,283	1,284
0,6	1,315	1,323	1,328	1,332	1,334	1,336	1,337	1,338	1,339	1,341	1,342	1,343	1,344	1,344	1,348	1,349	1,350
0,7	1,371	1,382	1,389	1,393	1,397	1,399	1,401	1,403	1,404	1,406	1,408	1,409	1,410	1,411	1,416	1,417	1,419
0,8	1,427	1,442	1,451	1,457	1,462	1,465	1,468	1,470	1,472	1,475	1,477	1,478	1,480	1,481	1,487	1,490	1,492
0,9	1,485	1,503	1,515	1,523	1,529	1,533	1,537	1,540	1,542	1,546	1,549	1,551	1,552	1,554	1,562	1,565	1,568
1,0	1,543	1,566	1,580	1,591	1,598	1,604	1,608	1,612	1,615	1,620	1,623	1,626	1,628	1,630	1,641	1,645	1,649
1,1	1,602	1,630	1,648	1,661	1,670	1,677	1,682	1,687	1,691	1,697	1,701	1,705	1,708	1,710	1,723	1,728	1,733
1,2	1,662	1,696	1,718	1,733	1,744	1,752	1,759	1,765	1,770	1,777	1,782	1,787	1,790	1,793	1,810	1,816	1,822
1,3	1,724	1,764	1,789	1,807	1,820	1,831	1,839	1,846	1,851	1,860	1,867	1,872	1,876	1,880	1,900	1,908	1,916
1,4	1,786	1,832	1,862	1,884	1,900	1,912	1,922	1,930	1,936	1,947	1,955	1,961	1,966	1,971	1,995	2,004	2,014
1,5	1,848	1,903	1,938	1,963	1,981	1,996	2,007	2,017	2,025	2,037	2,047	2,054	2,060	2,065	2,095	2,106	2,117
1,6	1,912	1,975	2,015	2,044	2,066	2,082	2,096	2,107	2,116	2,131	2,142	2,151	2,158	2,164	2,199	2,212	2,226
1,7	1,977	2,049	2,095	2,128	2,153	2,172	2,188	2,201	2,212	2,229	2,242	2,252	2,260	2,267	2,308	2,323	2,340
1,8	2,043	2,124	2,177	2,214	2,243	2,265	2,283	2,298	2,310	2,330	2,345	2,357	2,367	2,375	2,422	2,440	2,460
1,9	2,110	2,201	2,260	2,303	2,336	2,361	2,382	2,399	2,413	2,436	2,453	2,467	2,478	2,487	2,542	2,563	2,586
2,0	2,178	2,280	2,347	2,395	2,431	2,460	2,484	2,503	2,519	2,545	2,565	2,581	2,594	2,604	2,668	2,692	2,718
2,1	2,247	2,360	2,435	2,489	2,530	2,563	2,589	2,611	2,630	2,659	2,682	2,700	2,714	2,726	2,800	2,827	2,858
2,2	2,317	2,442	2,526	2,586	2,632	2,669	2,698	2,723	2,744	2,778	2,803	2,824	2,840	2,854	2,937	2,969	3,004
2,3	2,388	2,526	2,618	2,686	2,737	2,778	2,811	2,839	2,863	2,900	2,929	2,952	2,971	2,987	3,082	3,118	3,158
2,4	2,460	2,612	2,714	2,788	2,846	2,891	2,928	2,959	2,986	3,028	3,060	3,086	3,108	3,125	3,233	3,274	3,320
2,5	2,533	2,699	2,812	2,894	2,957	3,008	3,049	3,084	3,113	3,160	3,197	3,226	3,250	3,270	3,391	3,438	3,490
2,6	2,607	2,789	2,912	3,003	3,073	3,128	3,174	3,213	3,245	3,298	3,339	3,371	3,398	3,420	3,557	3,610	3,669
2,7	2,682	2,880	3,015	3,114	3,191	3,253	3,304	3,346	3,382	3,441	3,486	3,522	3,552	3,577	3,730	3,791	3,857
2,8	2,759	2,973	3,120	3,229	3,314	3,382	3,437	3,484	3,524	3,589	3,639	3,680	3,713	3,740	3,912	3,980	4,055
2,9	2,836	3,068	3,228	3,347	3,440	3,514	3,576	3,627	3,671	3,743	3,799	3,843	3,880	3,911	4,102	4,178	4,263
3,0	2,914	3,166	3,339	3,469	3,570	3,651	3,718	3,775	3,824	3,902	3,964	4,013	4,054	4,088	4,301	4,387	4,482

(From H. S. Sichel, Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, March 1966)

Quando o número "N" de itens ensaiados é grande, maior do que cem (100), a expressão (32) torna-se sensivelmente igual à $e^{(1/2V)}$, assim que o Estimador de Sichel poderá ser expresso por:

$$t_{\text{Sichel}} \approx t'_{\text{Sichel}} = e^{(\alpha + V/2)}$$

Expressão (33)

Expressão do estimador de Sichel, chamado de **Tendencioso**.

A expressão (33) permite o cálculo aproximado do estimador de Sichel sem o uso de tabela. Observe-se porém que o valor "t'" é sempre maior que "t", sendo por isso **Tendencioso**, e a diferença é sensível quando é pequeno o número "N" de itens analisados. Ver Exemplo nº 11 de cálculo, apresentado na página 106. Quando na avaliação de jazidas de baixos teores, como por exemplo, jazimentos auríferos, e quando se desconhece o modelo de distribuição mais adequado, é lícito que se presuma ser mais provável, que a adequação da distribuição dos valores analisados, o seja ao modelo **Log Normal**, em lugar do modelo **Normal**. Assim, nessas condições, deve-se admitir que o **Estimador de Sichel**, será mais verossímil do que a **Média Aritmética**; sendo também preferível à **Média Geométrica** (esta última considerada em geral pessimista, como foi visto).

Exemplo nº 11

Aplicação da média geométrica e do estimador de SICHEL na avaliação do teor médio de amostragem de uma tríncheira com os mesmos dados do Exemplo nº 2, apresentado a página 20 (ver quadro 2 à página 21). Cálculo da média geométrica e a variância dos logaritmos neperianos das acumulações Z_{Au} para ouro, (produtos das espessuras amostradas W_n, pelos teores T_{nAu}, obtidos nas amostras) na planilha do Quadro nº 12.

Quadro nº 12

! Ámos. !	! Espessura !	! Tn . Au !	! ZAu=TnAu.Wn !	! ln ZAu !	! (ln ZAu)2 !
! Nº !	! Wn (cm) !	! ppm Au !	! ppm . cm !		
! 01 !	! 70 !	! 31,50 !	! 2205 !	! 7,6985 !	! 59,2666 !
! 02 !	! 100 !	! 36,62 !	! 3662 !	! 8,2058 !	! 67,3346 !
! 03 !	! 100 !	! 36,00 !	! 3600 !	! 8,1887 !	! 67,0546 !
! 04 !	! 100 !	! 50,25 !	! 5025 !	! 8,5222 !	! 72,6276 !
! 05 !	! 100 !	! 1,71 !	! 171 !	! 5,1417 !	! 26,4367 !
! 06 !	! 100 !	! 1,92 !	! 192 !	! 5,2575 !	! 27,6413 !
! 07 !	! 100 !	! 6,22 !	! 622 !	! 6,4329 !	! 41,3827 !
! 08 !	! 100 !	! 0,42 !	! 42 !	! 3,7377 !	! 13,9702 !
! 09 !	! 100 !	! 3,75 !	! 375 !	! 5,9269 !	! 35,1285 !
! 10 !	! 100 !	! 3,60 !	! 360 !	! 5,8861 !	! 34,6462 !
! 11 !	! 60 !	! 11,25 !	! 675 !	! 6,5147 !	! 42,4415 !
! 12 !	! 90 !	! 1,57 !	! 141 !	! 4,9488 !	! 24,9402 !
! 13 !	! 90 !	! 15,00 !	! 1350 !	! 7,2079 !	! 51,9532 !
! 14 !	! 90 !	! 3,60 !	! 324 !	! 5,7807 !	! 33,4170 !
! 15 !	! 100 !	! 0,57 !	! 57 !	! 4,0431 !	! 16,3463 !
! 16 !	! 100 !	! 1,14 !	! 114 !	! 4,7362 !	! 22,4316 !
! 17 !	! 100 !	! 2,42 !	! 242 !	! 5,4889 !	! 30,1284 !
! 18 !	! 100 !	! 3,30 !	! 330 !	! 5,7991 !	! 33,6295 !
! 19 !	! 100 !	! 4,91 !	! 491 !	! 6,1964 !	! 38,3959 !
! 20 !	! 100 !	! 5,40 !	! 540 !	! 6,2916 !	! 39,5838 !
! 21 !	! 100 !	! 1,14 !	! 114 !	! 4,7362 !	! 22,4312 !
! 22 !	! 100 !	! 15,00 !	! 1500 !	! 7,3132 !	! 53,4832 !
! 23 !	! 100 !	! 2,70 !	! 270 !	! 5,5984 !	! 31,3423 !
! 24 !	! 100 !	! 13,12 !	! 1312 !	! 7,1793 !	! 51,5425 !
! 25 !	! 100 !	! 40,87 !	! 4087 !	! 8,3156 !	! 69,1486 !
! 26 !	! 100 !	! 8,62 !	! 862 !	! 6,7593 !	! 45,6875 !
! 27 !	! 100 !	! 5,17 !	! 517 !	! 6,2480 !	! 39,0380 !
! 28 !	! 100 !	! 11,25 !	! 1125 !	! 7,0255 !	! 49,3582 !
! 29 !	! 100 !	! 0,58 !	! 58 !	! 4,0604 !	! 16,4872 !
! 30 !	! 100 !	! 0,45 !	! 45 !	! 3,8067 !	! 14,4907 !
! 31 !	! 100 !	! 6,77 !	! 677 !	! 6,5177 !	! 42,4800 !
! 32 !	! 100 !	! 11,25 !	! 1125 !	! 7,0255 !	! 49,3582 !
! 33 !	! 100 !	! 20,62 !	! 2062 !	! 7,6314 !	! 58,2387 !
! 34 !	! 100 !	! 1,50 !	! 150 !	! 5,0106 !	! 25,1065 !
! 35 !	! 100 !	! 3,75 !	! 375 !	! 5,9269 !	! 35,1285 !
! 36 !	! 100 !	! 2,85 !	! 285 !	! 5,6525 !	! 31,9506 !
! 37 !	! 100 !	! 0,30 !	! 30 !	! 3,4012 !	! 11,5681 !
! Soma. !	! 3600 !		! 35112 !	! 224,2138 !	! 1425,1469 !
! Média !	! 97,3 !			! 6,0598 !	! 38,5175 !

Sendo alfa a média aritmética do ln Z, igual a 6,0598 tem-se:

Média Geométrica Mg ZAu = $e^{\alpha} \approx 428,3$ ppmAu . cm correspondendo ao teor médio para a espessura média de 97,3 cm:

$$TnAu = 428,3 \text{ ppmAu.cm} / 97,3 \text{ cm} = 4,4 \text{ ppmAu} \approx 4 \text{ ppmAu}$$

Comparando-se com as estimativas pelos métodos clássicos feitos no problema nº 2, verifica-se ser esta última, a estimativa **mais pessimista**.

Para se calcular a estimativa de SICHEL:
Conforme expressão (25) ou (34a),

Variância (ln Z) = $s^2 \ln Z = V$; (do quadro 12):

$$V = 38,5175 - (6,0598)^2 = 1,796$$

Valores de $\gamma(V)$, lidos na tabela de SICHEL e interpolando-se (ver tabela reproduzida à página 102)

$$V = 1,7 \rightarrow \begin{matrix} \gamma(V) = 2,267; \\ N=20 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \gamma(V) = 2,308 \\ N=50 \end{matrix} \quad \therefore \begin{matrix} \gamma(V) = 2,269 \\ N=37 \end{matrix}$$

$$V = 1,8 \rightarrow \begin{matrix} \gamma(V) = 2,375; \\ N=20 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \gamma(V) = 2,422 \\ N=50 \end{matrix} \quad \therefore \begin{matrix} \gamma(V) = 2,402 \\ N=37 \end{matrix}$$

Diferença: + 0,133

$$V = 1,796 \rightarrow \begin{matrix} \gamma(V) = 2,269 + 0,128 = 2,397 \\ N=37 \end{matrix}$$

Estimador de SICHEL para as acumulações ZAu, conforme expressão (31):

$$ZAu = t_{SICHEL} = e^{\alpha} \cdot \gamma(V) = e^{\alpha} \cdot 2,397 = 1026,6 \text{ ppmAu.cm}$$

Correspondendo ao teor médio para a espessura média de 97,3 cm

$$TmAu = 1026,6 \text{ ppmAu.cm} / 97,3 \text{ cm} = 10,6 \text{ ppmAu} \approx 11 \text{ ppmAu}$$

Chega-se a um resultado muito coerente com o que foi obtido aplicando-se métodos clássicos para estimar (aplicando fórmula de Truscott) do exemplo nº 2.
Estimador t' de SICHEL (**tendencioso**).

Não se dispondo da tabela γ (V) de SICHEL, poderá se aplicar o chamado estimador t' de SICHEL, dado pela expressão (33),

$$t' = e^{\frac{\text{SICHEL}}{(\alpha + V/2)}} \quad , \text{ tendo-se:}$$

$$Z_{Au} = t' = e^{\frac{\text{SICHEL}}{(6,0598 + 1,796/2)}} = 1051,3 \text{ ppmAu.cm}$$

Correspondendo ao teor T_{Au} para a espessura média de 97,3 cm:

$$T_{Au} = 1051,3 \text{ ppmAu.cm} / 97,3 \text{ cm} = 10,8 \text{ ppmAu} \approx 11 \text{ ppmAu}$$

Esta última estimativa é tendenciosa para mais, em relação a anterior; porque o número "N" de valores interpretados é pequeno. Porém no presente exemplo a diferença é insignificante.

Observação 1:

Sendo grande a variância "V" o intervalo de confiança é grande como se verifica no cálculo dos limites inferior e superior, apresentado no fim do item 4.4.12 no Exemplo nº 18, à página 141.

Observação 2:

Na falta de melhores informações, a aplicação do estimador de SICHEL, fundamenta-se na presunção de adequação ao modelo **Log Normal**, a qual é comum na distribuição de frequências de teores de jazimentos de baixos teores.

No caso do presente exemplo, embora o número de dados interpretados seja pequeno para servir para análises estatísticas, os testes a seguir, de ensaio de distribuição de frequência dos logaritmos neperianos das acumulações Z_{Au} , mostra que há razoável adequação a esse modelo (ver quadro nº 13 e figura 48):

- Ensaio de **Distribuição de Frequências Acumulativas**, dos logaritmos neperianos das acumulações.

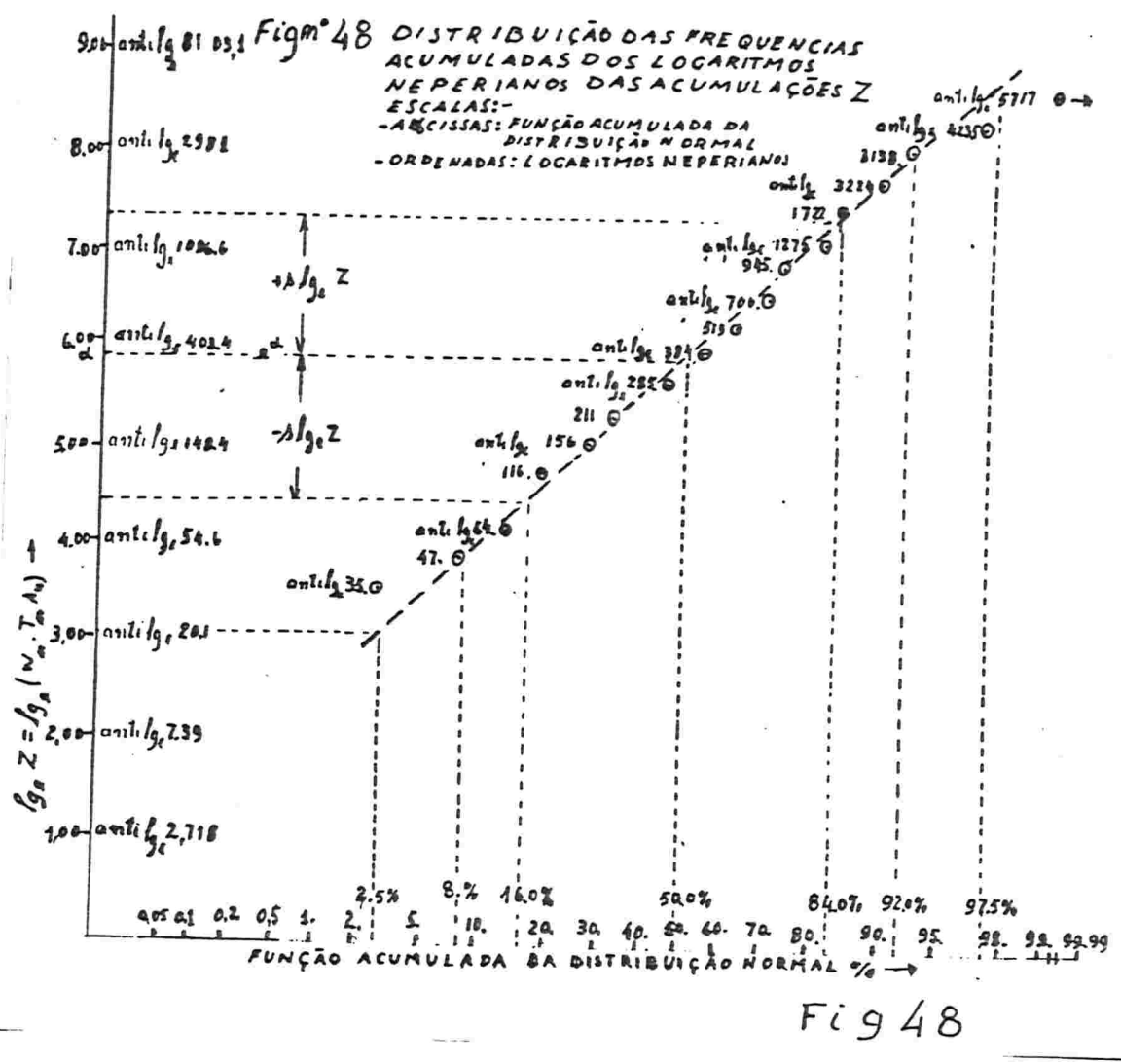
$Z_n = T_{Au} \times W_n$ (ver também item 4.3.2.4 -Distribuição Acumulativa da Distribuição Log Normal à página 112).

Quadro nº 13

!Classes de intervalos! !"it" dos ln ZAu	!Frequências "fit"! !fit !acum.!% acum!			it pm ln	! it pm ! ant. ln !
! 3,4012 - 3,7012	! 1 !	! 1 !	! 2,7 !	3,5512	! 35 !
! 3,7012 - 4,0012	! 2 !	! 3 !	! 8,1 !	3,8512	! 47 !
! 4,0012 - 4,3012	! 2 !	! 5 !	! 13,5 !	4,1512	! 64 !
! 4,3012 - 4,6012	! 0 !	!	!	!	!
! 4,6012 - 4,9012	! 2 !	! 7 !	! 18,9 !	4,7512	! 116 !
! 4,9012 - 5,2012	! 3 !	! 10 !	! 27,0 !	5,0512	! 156 !
! 5,2012 - 5,5012	! 2 !	! 12 !	! 32,4 !	5,3512	! 211 !
! 5,5012 - 5,8012	! 5 !	! 17 !	! 46,0 !	5,6512	! 285 !
! 5,8012 - 6,1012	! 3 !	! 20 !	! 54,1 !	5,9512	! 384 !
! 6,1012 - 6,4012	! 3 !	! 23 !	! 62,1 !	6,2512	! 519 !
! 6,4012 - 6,7012	! 3 !	! 26 !	! 70,3 !	6,5512	! 700 !
! 6,7012 - 7,0012	! 1 !	! 27 !	! 73,0 !	6,8512	! 945 !
! 7,0012 - 7,3012	! 3 !	! 30 !	! 81,1 !	7,1512	! 1276 !
! 7,3012 - 7,6012	! 1 !	! 31 !	! 83,8 !	7,4512	! 1722 !
! 7,6012 - 7,9012	! 2 !	! 33 !	! 89,2 !	7,7512	! 2324 !
! 7,9012 - 8,2012	! 1 !	! 34 !	! 91,9 !	8,0512	! 3138 !
! 8,2012 - 8,5012	! 2 !	! 36 !	! 97,3 !	8,3512	! 4235 !
! 8,5012 - 8,8012	! 1 !	! 37 !	! 100,0 !	8,6512	! 5717 !
! Somatório	! 37 !	!	!	!	!

Intervalos "it" dos ln ZAU = 0,3000
 Nº de classes com esse intervalo "it" = 18

- Conforme se verifica no gráfico de distribuição acumulada da figura nº 48, 14 pontos dos 17 pontos locados (~ 82% dos pontos), se **alinham retilinearmente**, indicando boa adequação dos valores ZAU (resultantes da amostragem), ao modelo de distribuição Log Normal; somente as três classes de valores extremos, resultantes de quatro amostras (a de teor mais baixo 0,30 ppmAu e as três de teores mais alto 36,62 - 50,25 - 40,87 ppmAu) não se ajustam ao modelo. A frequências desses valores discrepantes representam 11% do total das frequências dos valores ensaiados.



Em muitos casos, a experiência da amostragem para um dado jazimento, leva a adoção de uma constante aos teores das amostras, de modo que os valores de $\log(x + a)$ melhor sejam adequados ao modelo Log Normal.

Segue-se um interessante exemplo apresentado originalmente por SICHEL em 1966, e reproduzido por David 1977 no qual é utilizado o estimador tSICHEL, para estimar a acumulação média, de 5 amostras da Mina africana Harmony Mine, na qual é utilizada uma constante "a" para ajustamento do modelo Log Normal, como foi acima referido.

Exemplo nº 12

Os valores "Z" das cinco amostras em unidades de acumulação polegada-peny weigt (in-dwt ou inch-penyweight), e cálculos subsequentes constam do quadro seguinte nº 14:

Quadro nº 14

!amostras!	Z (in-dwt)!	Z + a	ln(Z + a)!	Ln(Z + 4)E2!
! 1 !	329	409	6,0137	36,16477
! 2 !	217	357	5,8777	34,54778
! 3 !	111	191	5,2523	27,58637
! 4 !	189	269	5,5947	31,30080
! 5 !	5071	5151	8,5469	73,05029
!Total !	5977	6377	33,2893	202,65001
!Média !	1195,4	1275,4	6,25706	40,53000

sendo a = 80 in-dwt, a constante acrescentada aos valores Z para ajustamento do modelo Log Normal.

$$V = 40,53000 - (6,25706)^2 = \sim 1,38$$

Na tabela de SICHEL (reproduzida à página 102):

$$V = 1,3 \text{ para } N = 5 \rightarrow Y_5(1,3) = 1,807$$

$$V = 1,4 \text{ para } N = 5 \rightarrow Y_5(1,4) = 1,884$$

Interpolando-se para:

$$V = 1,38 \text{ para } N = 5 \rightarrow Y_5(1,38) = 1,868$$

$$\text{e Expoente } 6,25706 = \sim 521,7$$

$$\begin{aligned} \text{Estimador de SICHEL para } (Z + a) &= \\ &= (512,7) \cdot (1,868) = 974 \text{ in-dwt} \end{aligned}$$

Valor médio estimado para "Z", eliminando a constante "a":

$$Z_{\text{estimado}} = (974 - 80) = 894 \text{ in-dwt}$$

4.3.2.3 - Estimadores de parâmetros de **Dispersão** da distribuição **Log Normal**:

- Desvio Padrão dos Logaritmos s.logxi e
- Desvio Padrão Logaritmico ou Geométrico sg.
(ver também ítem 4.4 - Utilização dos parâmetros estatísticos em Pesquisa Mineral, subítem 4.4.10, à página 130).

Sendo Normal a distribuição dos logaritmos dos valores "xi" da variável "x", na distribuição Log Normal, a dispersão desses valores será estimada pelo Desvio Padrão Aritmetico dos logaritmos dos valores "xi". Assim, conforme as expressões (26 a e b); tem-se para o caso dos logaritmos naturais:

$$\begin{aligned} s.\lnx &= \sqrt{\frac{\sum (\ln xi - \alpha)^2}{N - 1}} \approx \sqrt{\frac{\sum (\ln xi - \alpha)^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum (\ln^2 xi)}{N} - \alpha^2} \quad \text{Expressão (34a)} \end{aligned}$$

onde:

alfa é a média aritmetica dos logaritmos naturais dos valores "xi" da variável "x", e "N" o número de valores "xi" ensaiados; s.lnx é o Desvio Padrão dos Logaritmos (nesse caso logaritmos naturais).

No caso em que a distribuição Log Normal fosse de logaritmos decimais, teria-se:

$$\begin{aligned} s.\log xi &= \sqrt{\frac{\sum (\log xi - \text{média arit. } \log xi)^2}{N - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum (\log^2 xi)}{N} - (\text{média arit. } \log xi)^2} \quad \text{Expressão (34b)} \end{aligned}$$

Num ensaio em que o número "N" de valores ensaiados, seja grande, costuma-se calcular o desvio padrão dos logaritmos, conforme a expressão (35) (de acordo com a expressão (27)).

$$s.\log x_i = \sqrt{\frac{\sum [f_i(\log p_{im})]^2}{N} - \left[\frac{\sum f_i(\log p_{im})}{N}\right]^2} \quad \text{Expressão (35)}$$

onde:

- s.logxi = Desvio Padrão dos Logaritmos expresso genericamente por "logxi", correspondendo à (lnxi) ou (logxi) conforme os casos de logaritmos naturais ou decimais;
- fi é a frequência de cada uma das classes de valores do ensaio de distribuição de frequência;
- logpim = logaritmo dos pontos centrais (médios) de cada uma das classes (expressos genericamente, correspondendo a ln ou log conforme o caso).

- Desvio Padrão Logaritmico ou também chamado Geométrico "sg", é definido como o antilogaritmo do desvio padrão dos logaritmos s.logxi.

Tem-se então de acordo com a expressão (34a) para o caso de logaritmos naturais:

$$\begin{aligned} sg &= \text{antilog}(s.\ln x_i) = \text{antilog} \sqrt{\frac{\sum (\ln x_i - \bar{d})^2}{N - 1}} = \\ &= \text{antilog} \sqrt{\frac{\sum (\ln x_i - \bar{d})^2}{N}} = \\ &= e^{\sqrt{\frac{\sum \ln^2 x_i}{N} - \bar{d}^2}} \end{aligned} \quad \text{Expressão (36)}$$

Sendo ($e^{\bar{d}}$) a Média Geométrica Mgxi dos valores "xi" ensaiados, pode-se expressar (genericamente, para logaritmos naturais ou decimais):

$$sg = \text{antilog} \sqrt{\frac{\sum (\log x_i - \log Mg_{xi})^2}{N - 1}} \quad \text{Expressão (37)}$$

Observa-se que "sg" quantifica a estimação da dispersão da variável "x", em relação a Média Geométrica "Mgxi".

4.3.2.4 - Distribuição Acumulativa da Distribuição Log Normal

Seja Normal a distribuição de logaritmos dos itens "xi" de uma variável "x" cuja distribuição seja Log Normal, as frequências Acumulativas dos logxi, obedecem a função Acumulativa Normal, F(logxi), visto anteriormente (função estandarizada e tabelada).

Ver exemplo nº 11, figura 48, gráfico de distribuição de frequências acumulativas dos valores logaritmos do Quadro nº 13, às páginas 107 e 108.

Existem folhas impressas para interpretações gráficas de distribuição acumulativa conforme o modelo Log Normal. Essas folhas são graduadas:

- Em abscissas na escala da função F(Z) acumulativa da distribuição de frequências Normal;
- Em ordenadas, a graduação é em escala logarítmica (geralmente de logaritmos decimais), sendo impressos diretamente os valores numéricos dos antilogaritmos respectivos.

Num ensaio experimental de distribuição de frequências, loca-se pontos, cujas ordenadas são os pontos médios das classes do ensaio e em abscissas, as frequências acumulativas das respectivas classes. Quando a distribuição for adequada ao modelo Log Normal os pontos assim locados, tenderão a se alinharem retilinearmente, conforme mostra a figura 49.

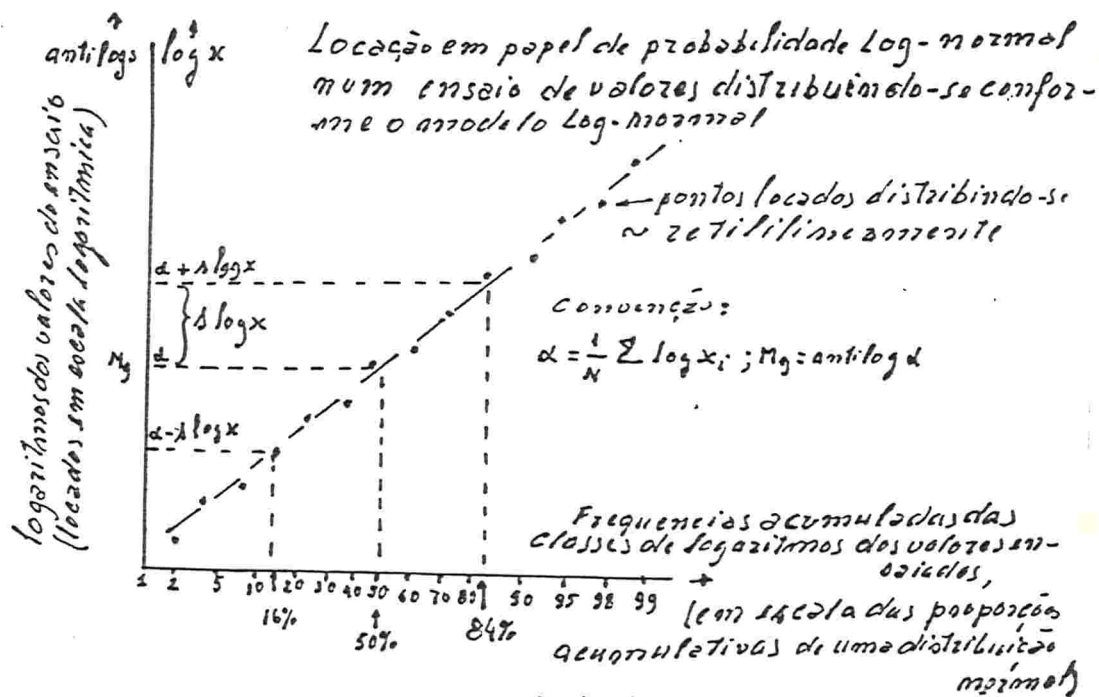


Fig 49

Como é mostrado na figura 49, mediante procedimento simples, se poderá locar graficamente a média e o valor do desvio padrão da população ensaiada, lendo-se diretamente no gráfico os respectivos antilogaritmos desses parâmetros (média geométrica e desvio padrão logaritmico).

Esse procedimento é muito utilizado para individualizar as populações que constituem os valores ensaiados e para testar suas aderências ao modelo Log Normal.

No exemplo nº 11, o gráfico da figura 48 mostra um teste da aderência ao modelo Log Normal, dos valores dos antilogaritmos (correspondentes aos logaritmos neperianos), constantes do Quadro nº 13 (ver página 107); nesse caso a escala das ordenadas foi de logaritmos neperianos. Essa forma de interpretação é muito usada em Prospecção Geoquímica, ver exemplo nº 13 que se segue.

Exemplo nº 13

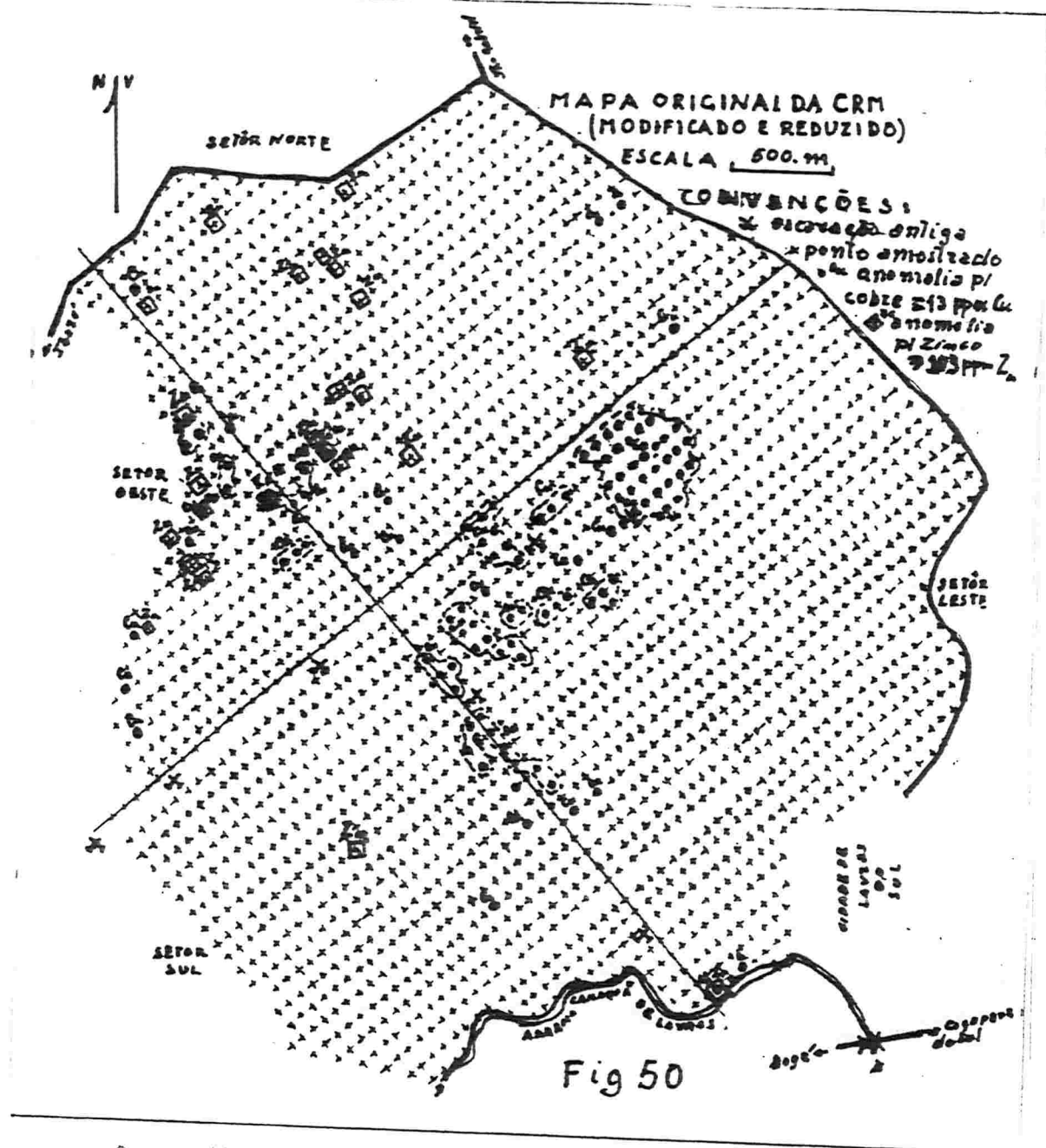
Interpretação de amostragem em prospecção geoquímica, mediante tratamento estatístico utilizando o modelo Log Normal, de distribuição das frequências dos valores analisados.

Os dados deste exemplo, são de amostragem de solos, executada na área da Fazenda da Chácara, em Lavras do Sul - RS - Brasil, no fim da década de 1970, os quais nos foram cedidos, tendo sido liberados para fins didáticos. São dados obtidos em diferentes campanhas de prospecção executadas, nos chamados setores **Norte, Sul, Leste e Oeste** da área. A primeira no setor Oeste foi de um projeto piloto executado como prática de curso de pós-graduação do Instituto de Geociências da UFRGS, com resultados interpretados publicados em Motta Marques 1978. As demais foram executadas e interpretadas por equipes de geologia da Companhia Riograndense de Mineração com relatórios inéditos. No presente exemplo será feita uma interpretação conjunta dos dados obtidos nos quatro setores amostrados.

A área prospectada situa-se totalmente no stock granítico de Lavras do Sul, onde ocorrem vieiros de quartzo, mineralizados principalmente com pirita, os quais até a década de 1930, foram objetos de lavras rudimentares para ouro. Descrição das ocorrências auríferas de Lavras do Sul encontram-se na literatura geológica.

A prospecção geoquímica referida foi mediante amostragem de solos, segundo uma malha regular e retangular de 80 x 50 m, tendo sido analisadas as amostras, para ppm Zn e para ppm Cu.

A figura nº 50 é uma redução do mapa da malha amostrada.
 Na figura 50 foram locadas as áreas anômalas (segundo a presente interpretação), e também as principais ocorrências objeto da mineração no passado.



O quadro nº 15 mostra um ensaio de distribuição de frequências, com o respectivo histograma, dos 2180 valores das análises para zinco. A distribuição do ensaio foi em 15 classes ou grupo de valores, sendo o intervalo de classe 9 ppmZn.

Quadro nº 15

!Grupo!	!Menor!	!Maior!	! Pim !	! Freq !	! %Freq!	! Histograma !
!	!	!	!ppmZn!	!	!	!
! 01 !	! 4 !	! 13 !	! 8,5!	! 150!	! 6,9!	! *****
! 02 !	! 13 !	! 22 !	! 17,5!	! 525!	! 24,1!	! *****
! 03 !	! 22 !	! 31 !	! 26,5!	! 553!	! 25,4!	! *****
! 04 !	! 31 !	! 40 !	! 35,5!	! 334!	! 15,3!	! *****
! 05 !	! 40 !	! 49 !	! 44,5!	! 206!	! 9,4!	! *****
! 06 !	! 49 !	! 58 !	! 53,5!	! 116!	! 5,3!	! *****
! 07 !	! 58 !	! 67 !	! 62,5!	! 79!	! 3,6!	! ***
! 08 !	! 67 !	! 76 !	! 71,5!	! 68!	! 3,1!	! ***
! 09 !	! 76 !	! 85 !	! 80,5!	! 54!	! 2,5!	! **
! 10 !	! 85 !	! 94 !	! 89,5!	! 42!	! 1,9!	! **
! 11 !	! 94 !	! 103 !	! 98,5!	! 21!	! 1,0!	! *
! 12 !	! 103 !	! 112 !	! 107,5!	! 17!	! 0,8!	! *
! 13 !	! 112 !	! 121 !	! 116,5!	! 11!	! 0,5!	!
! 14 !	! 121 !	! 130 !	! 125,5!	! 2!	! 0,1!	!
! 15 !	! 130 !	! 139 !	! 134,5!	! 2!	! 0,1!	!
!	!	!	!	! 2180!	!	!

O Quadro nº 16 mostra um ensaio de distribuição de frequências, com respectivo histograma, dos 2160 valores das análises para cobre. A distribuição do ensaio foi em 13 classes ou grupos de valores, sendo o intervalo de classe 3 ppmCu.

Quadro nº 16

!Grupo!	!Menor!	!Maior!	! Pim !	! Freq !	! %Freq!	! Histograma !
!	!	!	!ppmCu!	!	!	!
! 01 !	! 2 !	! 5 !	! 3,5!	! 655!	! 30,3!	! *****
! 02 !	! 5 !	! 8 !	! 6,5!	! 873!	! 40,4!	! *****
! 03 !	! 8 !	! 11 !	! 9,5!	! 415!	! 19,2!	! *****
! 04 !	! 11 !	! 14 !	! 12,5!	! 117!	! 5,4!	! ***
! 05 !	! 14 !	! 17 !	! 15,5!	! 47!	! 2,2!	! *
! 06 !	! 17 !	! 20 !	! 18,5!	! 17!	! 0,8!	!
! 07 !	! 20 !	! 23 !	! 21,5!	! 9!	! 0,4!	!
! 08 !	! 23 !	! 26 !	! 24,5!	! 13!	! 0,6!	!
! 09 !	! 26 !	! 29 !	! 27,5!	! 3!	! 0,1!	!
! 10 !	! 29 !	! 32 !	! 30,5!	! 3!	! 0,1!	!
! 11 !	! 32 !	! 35 !	! 33,5!	! 4!	! 0,2!	!
! 12 !	! 35 !	! 38 !	! 36,5!	! 3!	! 0,1!	!
! 13 !	! 38 !	! 41 !	! 39,5!	! 1!	! 0,0!	!
!	!	!	!	! 2160!	!	!

Interpretação da amostragem para ppmZn

O histograma do Quadro nº 15 mostra uma distribuição para os valores ppmZn, segundo uma curva de frequência unimodal com forte assimetria positiva (significando excesso de valores baixos, em relação a distribuição Normal ou Gaussiana).

Como método de interpretação o modelo Log Normal geralmente é adequado para representar distribuição de valores de análises, em prospecção geoquímica, objetivando-se obter curvas de frequências normalizadas. Geralmente um intervalo de classes dos logaritmos decimais 0,1 é adequado.

O Quadro nº 17 mostra um ensaio de distribuição de frequências e o respectivo histograma, dos logaritmos decimais dos valores ppmZn, distribuídos em 16 classes ou grupos, com intervalo de classe 0,1.

Quadro nº 17

!Grupo!	!Menor!	!Maior!	!*Pim!	!Freq!	!%Freq!	Histograma
!	!	!	!ppmZn!	!	!	!
!	01	!0,6021!	!0,7021!	4,5!	5!	0,2!
!	02	!0,7021!	!0,8021!	5,7!	2!	0,1!
!	03	!0,8021!	!0,9021!	7,1!	6!	0,3!
!	04	!0,9021!	!1,002!	9,0!	62!	2,8!****
!	05	!1,002!	!1,102!	11,3!	75!	3,4!*****
!	06	!1,102!	!1,202!	14,2!	139!	6,4!*****
!	07	!1,202!	!1,302!	17,9!	304!	13,9!*****
!	08	!1,302!	!1,402!	22,5!	359!	16,5!*****
!	09	!1,402!	!1,502!	28,3!	318!	14,6!*****
!	10	!1,502!	!1,602!	35,6!	292!	13,4!*****
!	11	!1,602!	!1,702!	44,9!	243!	11,1!*****
!	12	!1,702!	!1,802!	56,5!	135!	6,2!*****
!	13	!1,802!	!1,902!	71,1!	117!	5,4!*****
!	14	!1,902!	!2,002!	89,5!	88!	4,0!*****
!	15	!2,002!	!2,102!	112,7!	33!	1,5!***
!	16	!2,102!	!2,202!	141,9!	2!	0,1!
!				2180!		

* antilog Pim = 10 E Pim

O Quadro nº 18 mostra o mesmo ensaio do Quadro anterior (nº 17), porém com o cálculo das frequências acumuladas dos valores dos logaritmos ppmZn.

Em prospecção geoquímica costuma-se acumular as frequências em ordem inversa, isto é, dos maiores valores para os menores, de modo a favorecer a evidência dos efeitos dos mais altos valores, no gráfico à ser construído.

Quadro nº 18

!Grupo!	Pim	!*Pim!	Freq	!%Freq!	Freq. Acum!
!	! log ppmZn	!ppmZn!	!	!	!Decres. %!
! 01 !	0,6521	! 4,5!	5!	0,2!	99,9 !
! 02 !	0,7521	! 5,7!	2!	0,1!	99,7 !
! 03 !	0,8521	! 7,1!	6!	0,3!	99,6 !
! 04 !	0,9521	! 9,0!	62!	2,8!	99,3 !
! 05 !	1,0520	! 11,3!	75!	3,4!	96,5 !
! 06 !	1,1520	! 14,2!	139!	6,4!	93,1 !
! 07 !	1,2520	! 17,9!	304!	13,9!	86,7 !
! 08 !	1,3520	! 22,5!	359!	16,5!	72,8 !
! 09 !	1,4520	! 28,3!	318!	14,6!	56,3 !
! 10 !	1,5520	! 35,6!	292!	13,4!	41,7 !
! 11 !	1,6520	! 44,9!	243!	11,1!	28,3 !
! 12 !	1,7520	! 56,5!	135!	6,2!	17,2 !
! 13 !	1,8520	! 71,1!	117!	5,4!	11,0 !
! 14 !	1,9520	! 89,5!	88!	4,0!	5,6 !
! 15 !	2,0520	!112,7!	33!	1,5!	1,6 !
! 16 !	2,1520	!141,9!	2!	0,1!	0,1 !
!	!	!	2180!	!	!

* antilog Pim = 10^E Pim

A figura 51 é um gráfico desenhado sobre impresso **Folha de Probabilidade Log Normal**, utilizado para interpretação em análises estatísticas. Nesse impresso as ordenadas são graduadas em escala de logaritmos decimais, anotando-se os respectivos antilogaritmos, dos comprimentos das ordenadas dos pontos locados; em abscissas a graduação é em escala das proporções das frequências acumulativas de uma distribuição **Normal**.

Nessas condições locando-se pontos representativos das frequências acumuladas, os pontos deverão se **alinharem retilinearmente**, quando a distribuição dos valores ensaiados obedecem a distribuição **Log Normal**.

No gráfico da figura 51, os pontos anotados com os números 1 à 16, foram locados com os valores do Quadro nº 18. Em ordenadas foram locados através dos antilogaritmos constantes na 3ª coluna desse quadro e em abscissas com os valores da última coluna.

Com excessão dos pontos anotados com os números 3 e 4, observa-se razoavelmente alinhamento retilíneo dos pontos (até o de nº 15), demonstrando muito boa adequação dos valores ensaiados à distribuição Log Normal.

O histograma do Quadro nº 17 mostra a coerência dessa conclusão.

Nessas condições, desconsiderando-se as pequenas distorções irrelevantes, podemos concluir pela evidência de uma única população, com distribuição Log Normal, dos valores ppmZn ensaiados, a qual deverá ser a população dos valores de Background (ou de fundo), na formação. Na figura 51 as construções gráficas simples, estabelecendo os valores respectivos de ppmZn (em ordenadas), correspondendo às proporções acumulativas de 50% e 2,5% (em abscissas), determinam:

- Para o valor médio do background 33 ppmZn

- Para o desvio da média de dois desvios padrões para mais, o valor de 103 ppmZn.

O Threshold (ou limiar), definido como o limite superior além do qual um determinado valor analisado de um ponto amostrado, poderá ser estabelecido como sendo 103 ppmZn. Estabelecendo-se com esse critério, como threshold, o valor médio do background mais dois desvios padrões, haverá um risco de apenas 2,5% de probabilidade de ser selecionado um valor de background como sendo anômalo. Essencialmente esse é um dos critérios geralmente adotados para estabelecer o threshold, nas análises estatísticas em prospecção geoquímica.

Obviamente os critérios de análises estatísticas são utilizados complementando e controlados pelos critérios advindos, diretamente da observação geológica.

Por exemplo é utilizado também o critério de identificar áreas com concentração de altos valores, delimitados mediante traçado de curvas de contorno de isoteores; a uniformidade da formação geológica subjacente nos pontos amostrados, é essencial para condicionar a uniformidade que deve suportar as amostras analisadas.

No mapa da figura 50, estão assinalados os pontos considerados anômalos, com análises ppmZn \geq 103 ppmZn.

Observa-se que o fato de não ter sido evidenciada população anômala nos histogramas nos quadros nºs 15, 17 e no gráfico da figura 51, explica-se pelo pequeno número de valores considerados anômalos ensaiados (totalizando apenas 24 pontos, e com valores próximos ao threshold).

Interpretação da amostragem para ppmCu.

A inspeção preliminar do histograma do Quadro nº 16, mostra uma curva de distribuição dos valores de ppmCu, fortemente assimétrica (aparentemente unimodal), indicando a utilização do modelo Log Normal para sua interpretação.

O Quadro nº 19 mostra um ensaio para distribuição de frequências dos logaritmos decimais e o respectivo histograma, tendo sido 13 o número de classes ou grupos, e 0,1 o intervalo de classes. A omissão de valores na classe 3, decorre da inexistência de valores fracionários de ppmCu, que comportaria o intervalo dessa classe (entre os anti-logaritmos 3,2 ppmCu e 3,9 ppmCu).

O histograma desse quadro, mostra uma curva de distribuição de frequências bimodal (com um segundo pico na classe 7). Presumivelmente isso é devido a coexistência de duas populações com cobertura parcial; (a população de background e a população de valores anômalos).

Quadro nº 19

! Grupo !	! Menor !	! Maior !	! *Pim !	! Freq !	! %Freq !	! Histograma !
!	!	!	! ppmCu !	!	!	!
! 01 !	! 0,3010 !	! 0,4010 !	! 2,2 !	! 81 !	! 3,8 !	! *** !
! 02 !	! 0,4010 !	! 0,5010 !	! 2,8 !	! 180 !	! 8,3 !	! ***** !
! 03 !	! 0,5010 !	! 0,6010 !	! 3,6 !	! 0 !	! 0,0 !	! !
! 04 !	! 0,6010 !	! 0,7010 !	! 4,5 !	! 673 !	! 31,2 !	! ***** !
! 05 !	! 0,7010 !	! 0,8010 !	! 5,6 !	! 351 !	! 16,3 !	! ***** !
! 06 !	! 0,8010 !	! 0,9010 !	! 7,1 !	! 243 !	! 11,3 !	! ***** !
! 07 !	! 0,9010 !	! 1,001 !	! 8,9 !	! 415 !	! 19,2 !	! ***** !
! 08 !	! 1,001 !	! 1,101 !	! 11,2 !	! 93 !	! 4,3 !	! *** !
! 09 !	! 1,101 !	! 1,201 !	! 14,2 !	! 59 !	! 2,7 !	! ** !
! 10 !	! 1,201 !	! 1,301 !	! 17,8 !	! 29 !	! 1,3 !	! * !
! 11 !	! 1,301 !	! 1,401 !	! 22,4 !	! 22 !	! 1,0 !	! * !
! 12 !	! 1,401 !	! 1,501 !	! 28,2 !	! 6 !	! 0,3 !	! !
! 13 !	! 1,501 !	! 1,601 !	! 35,6 !	! 8 !	! 0,4 !	! !
! !	! !	! !	! !	! 2160 !	! !	! !

* antilog Pim = log ppmCu

O Quadro nº 20 mostra o mesmo ensaio anterior (Quadro nº 19), porém com o cálculo das frequências acumuladas (em ordem inversa), dos valores dos log ppmCu.

Quadro nº 20

!Grupo!	Pim	!*Pim!	Freq	!%Freq!	Freq. Acum!
!	! log ppmCu	!ppmCu!	!	!	!Decres. %!
! 01 !	0,3510	! 2,2!	81!	3,8!	100,1 !
! 02 !	0,4510	! 2,8!	180!	8,3!	96,3 !
! 03 !	0,5510	! 3,6!	0!	0,0!	88,0 !
! 04 !	0,6510	! 4,5!	673!	31,2!	88,0 !
! 05 !	0,7510	! 5,6!	351!	16,3!	56,8 !
! 06 !	0,8510	! 7,1!	243!	11,3!	40,5 !
! 07 !	0,9510	! 8,9!	415!	19,2!	29,2 !
! 08 !	1,0510	! 11,2!	93!	4,3!	10,0 !
! 09 !	1,1510	! 14,2!	59!	2,7!	5,7 !
! 10 !	1,2510	! 17,8!	29!	1,3!	3,0 !
! 11 !	1,3510	! 22,4!	22!	1,0!	1,7 !
! 12 !	1,4510	! 28,2!	6!	0,3!	0,7 !
! 13 !	1,5510	! 35,6!	8!	0,4!	0,4 !
!	!	!	2160!	!	!

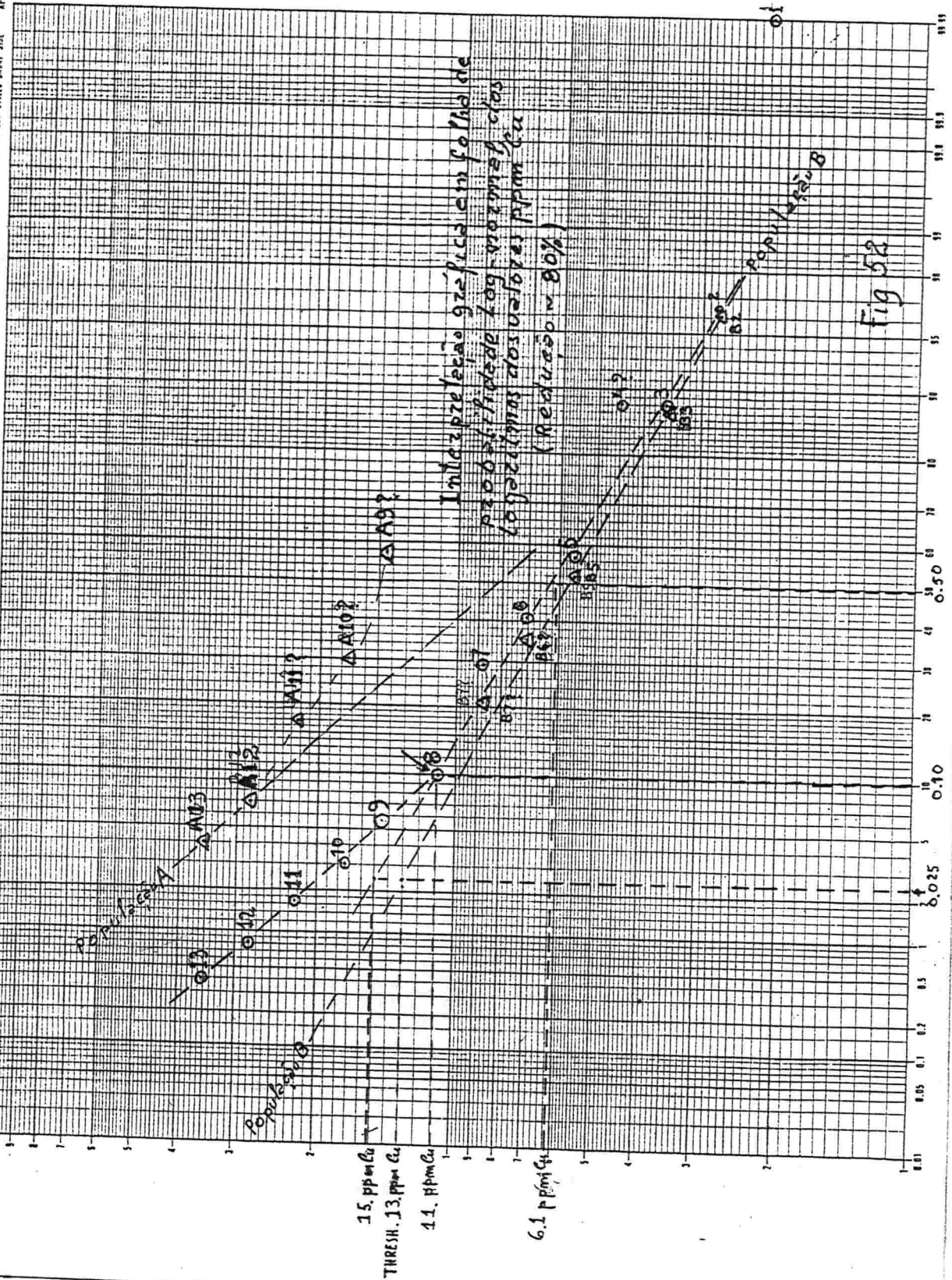
* antilog Pim = 10 E Pim

A figura 52 é um gráfico desenhado sobre impresso **Folha de Probabilidade Log Normal**, no qual foram locados os pontos anotados com os nºs 1 à 13 (com o símbolo @); com os dados do Quadro nº 20 (através dos antilogaritmos da 3ª coluna e das frequências acumuladas da última coluna).

Verifica-se nesse gráfico razoável ajustamento retilíneo de dois segmentos; dos pontos nºs 2 à 8, e dos pontos de nºs 8 à 13.

Isso significa aproximada adequação ao modelo Log Normal de duas populações coexistentes, com cobertura parcial entre elas.

Essa observação é coerente com o que foi evidenciado no histograma do Quadro nº 19. No primeiro segmento a disparidade do ponto de nº 4, explica-se pela omissão na classe de nº 3 do ensaio de distribuição acumulativa (ver Quadro nº 20); a diparidade do ponto de nº 7, (coerente com o segundo pico do histograma do Quadro nº 19), explica-se pela forte influência da superposição da população anômala coexistente (devido aos seus altos valores, ainda que em pequenas proporções relativas).



Os pontos do segundo segmento (de nº 9 a 13) evidenciam excesso de valores altos das amostras analisadas, em relação ao que ocorreria numa única população Log Normal. Isso evidencia grande número de pontos anômalos, caracterizando a respectiva população anômala.

Nessas condições, duas preliminares alternativas se poderia adotar para estabelecer o valor de threshold (ou limiar), separando os valores anômalos dos valores de background:

- Poderia se estabelecer para o threshold o valor 11 ppmCu, correspondente ao ponto de inflexão entre os dois segmentos (assinalado com uma flecha na figura 52);
- Poderia-se, também, estabelecer para o threshold o valor 15 ppmCu, correspondendo ao valor médio da população de background preliminarmente definida, mais dois desvios padrões; a média e o threshold sendo determinados mediante construção gráfica, correspondendo as proporções acumulativas de 50% e 2,5% (este último prolongando-se o primeiro segmento).

Nas condições deste exemplo, esses são critérios muitas vezes adotados na prática. O estabelecimento do threshold, envolve considerações de ordem técnica e econômica.

A opção por um valor baixo evita serem omitidos pontos -possivelmente anômalos cujos valores possam confundir-se com os de background; por outro lado pode gerar desperdício de recursos econômicos, testando-se pseudo anomalias inexistentes, nas operações subsequentes de prosseguimento (follow up) da prospecção.

Existem técnicas especiais para o estabelecimento mais preciso do threshold, quando são bem identificadas duas ou mais populações coexistentes, indicando-se para consulta Sinclair A. J. 1974.

Nas condições deste exemplo, se aplicará o método que se segue, mediante separação das duas populações (recomendado na publicação citada e também em Rose, A. et al 1979).

- Mediante a proporção acumulada, correspondente ao ponto de inflexão (assinalada com uma flecha na figura 52), estima-se a proporção de valores da população anômala "A", e da população de background "B", que compõe a mistura dos valores ensaiados (dos log ppmCu). Assim estima-se em $f(A) = 10\%$ para a população "A", e conseqüentemente em $f(B) = 100\% - 10\% = 90\%$, para a população "B"; sendo $f(A) = 0,10$ e $f(B) = 0,90$, as frações que compõe a mistura observada e ensaiada.

Admitindo-se que no extremo da curva (para os maiores valores) a contribuição de valores da população "B" seja inexpressiva; sendo para o ponto observado nº 13, a proporção observada 0,4% resultará para a contribuição da população "A", nesse ponto, a proporção PA 13 assim estimada:

$$PA. 13 = 0,4\% / (10/100) = (0,4\%/10) \times 100 = 0,4\% / 0,10 = 4\%;$$

0,4% é a proporção observada (lida na abscissa do ponto 13) e o 0,10 a fração estimada "f(A)" da população "A" (que contribui para a mistura dos valores ensaiados).

Loque-se então esse novo ponto "A 13" (com o símbolo Δ) no gráfico da figura 52 (na mesma altura do ponto nº 13). Com o mesmo procedimento loque-se os pontos A 12, A 11, A 10, A 9, até o ponto de inflexão nº 8:

$$PA 12 = (0,7\% / 10) \times 100 = 0,7\% / 0,10 = 7\%$$

$$PA 11 = (1,7\% / 10) \times 100 = 1,7\% / 0,10 = 17\%$$

$$PA 10 = (3,0\% / 10) \times 100 = 3,0\% / 0,10 = 30\%$$

$$PA 9 = (5,7\% / 10) \times 100 = 5,7\% / 0,10 = 57\%$$

Admitindo-se que a população anômala "A" ajuste-se a distribuição Log Normal (o que geralmente acontece), os primeiros pontos (a partir do extremo superior), deverão se alinharem retilineamente, e locando-se sobre a "reta" da distribuição de frequências acumuladas da população anômala "A". Os pontos que se seguem, se afastarão do alinhamento, por efeito da crescente contribuição da população de background "B". No presente caso, presume-se serem alinhados os pontos A 13 e A 12, representando a reta que os contém a população anômala "A"; os pontos A 11, A 10 e A 9 afastam-se progressivamente do alinhamento.

Com o mesmo raciocínio, e admitindo-se que para os pontos observados extremos (de mais baixos valores), seja inexpressiva a contribuição da população anômala "A", loque-se os pontos com as proporções PB 2, PB 3, PB 5, PB 6 e PB 7, calculados como se segue:

$$PB\ 2 = \frac{(100 - 96,3)\%}{(100 - 10)\%} = \frac{(100 - 96,3)\%}{90\%} \times 100 = \frac{(100 - 96,3)\%}{0,90} = 4,1\%$$

100

locando-se B.2 com abscissa $100\% - 4,1\% = 95,9\%$

$$PB\ 3 = (100 - 88)\% / 0,90 = 13,3\% ;$$

B 3 locado com $100\% - 13,3\% = 86,7\%$

$$PB\ 5 = (100 - 56,8)\% / 0,90 = 48\% ;$$

B 5 locado com $100\% - 48\% = 52\%$

$$PB\ 6 = (100 - 40,5)\% / 0,90 = 66,1\% ;$$

B 6 locado com $100\% - 66,1\% = 33,9\%$

$$PB\ 7 = (100 - 29,2)\% / 0,90 = 78,7\% ;$$

B 7 locado com $100\% - 78,7\% = 21,3\%$

Como regra geral, a proporção acumulada dos pontos das duas populações "A" e "B", são calculados, dividindo-se a proporção observada "P" do ponto considerado, pela fração "f(A)" ou "f(B)" estimada, para a população na mistura (como estimada pelo ponto de inflexão); porém para o caso das proporções dos pontos da população de background "B", os valores das proporções observadas e locadas, devem serem lidas em valores complementares das escalas das abscissas. Admitindo-se que a população "B" distribua-se de forma Log Normal, os pontos extremos (de valores mais baixos) deverão se alinharem retilinearmente (por ser para esses valores, inexpressiva a contribuição de valores da população "A", na mistura observada original).

No presente exemplo os pontos B 2, B 3 e B 5 alinham-se retilinearmente, definindo a reta da distribuição acumulativa da distribuição da população de background "B". Os pontos B 6 e B 7 afastam-se do alinhamento, por efeito da influência da população anômala "A" nos pontos de nºs 6 e 7 (da população observada original).

Tendo-se definido separadamente, as duas populações "A" e "B" coexistentes, prolongando-se as retas que as definem, podemos estimar as respectivas proporções das suas contribuições, para as misturas originais observadas, pela relação:

$$P_m \text{ do ponto observado} = f(A) \cdot PA + f(B) \cdot PB ;$$

Desse modo se poderá verificar a coerência do procedimento utilizado para a separação das duas populações, reconstituindo as proporções originais observadas em cada nível:

$$P_m 6 = 0,10 \times 0,61 + 0,90 \times 0,31 = 0,340 \sim 0,405*$$

$$P_m 7 = 0,10 \times 0,50 + 0,90 \times 0,14 = 0,176 \sim 0,292*$$

$$P_m 8 = 0,10 \times 0,39 + 0,90 \times 0,055 = 0,094 \sim 0,100*$$

$$P_m 9 = 0,10 \times 0,27 + 0,90 \times 0,013 = 0,039 \sim 0,057*$$

$$P_m 10 = 0,10 \times 0,18 + 0,90 \times 0,0035 = 0,021 \sim 0,030*$$

$$P_m 11 = 0,10 \times 0,115 + 0,90 \times 0,0005 = 0,012 \sim 0,017*$$

* valor observado; ver Quadro nº 20 e Figura 52

Finalmente, tendo-se a população de background "B" separada, será racional estabelecer para o valor do threshold, o valor médio dessa população (correspondente a proporção 0,50 acumulativa), mais dois desvios padrões da mesma (correspondendo ao antilogaritmo da ordenada do ponto sobre a respectiva reta, com abscissa na proporção acumulativa 2,5%). Então, mediante a construção simples (com esse procedimento), mostrada no gráfico da figura 52, concluímos por estabelecer o valor 13 ppmCu, para o threshold; com a probabilidade de que valores superiores no mesmo serão valores anômalos, com 95% de chances (ou com apenas 2,5% de risco de serem valores de background).

Os pontos amostrados com valores amostrados com valores iguais ou superiores a 13 ppmCu (considerados anômalos) foram locados no mapa da Figura 50, delimitando-se as áreas anômalas para cobre. Destacam-se áreas anômalas a "NE" dos setores Leste e Oeste, sendo que neste último setor as anomalias para zinco coincidem com as áreas anômalas para cobre. Como se verá no Exemplo nº 27 de cálculo do coeficiente de correlação entre os valores de ppmZn e ppmCu (ver página 175), conclue-se ser negativo esse coeficiente. Assim a coincidência de altos valores de ppmZn e ppmCu, confirma a existência de anomalias para zinco nos limites oeste da área prospectada.

4.4 - Utilização em Pesquisa Mineral dos principais parâmetros da estatística clássica.

4.4.1 - Utilização dos estimadores do parâmetro de tendência central (revisão).

Nos problemas de pesquisa mineral, o principal objetivo é o de obter estimadores quantitativos que representem as qualidades (teor, espessura, etc.) dos jazimentos pesquisados.

Os estimadores utilizados nas aplicações de estatística clássica são a **Média Aritmética; a Média Geométrica; a Mediana; o Estimador tsichel e a moda.**

Estes estimadores foram abordados anteriormente acrescentando-se a seguir o resumo dos critérios com que eles são utilizados.

4.4.2 - Média Aritmética (ver também em Modelo de Distribuição Normal, à página 91 ítem 4.3.1.1); expressão $\bar{x} = 1/N \sum x_i$ (23).

É o principal e o mais utilizado dos estimadores. Entretanto geralmente é tendencioso, quando o número "N" de valores "xi" ensaiados é pequeno, e quando a distribuição de frequências dos mesmos é assimétrica.

É um dos mais influenciados pelos valores extremos dispare (altos ou baixos), que ocorrem ocasionalmente. Somente quando "N" é grande, é um estimador **eficiente**, significando que tem **variancia** pequena. O fato de que as curva de distribuição de frequências dos valores característicos dos fenômenos geológicos tendem à assimetria, desfavorece à adequação ao modelo matemático **Normal** e conseqüentemente à da aplicação da **Média Aritmética.**

Essas restrições aplicam-se também às **Médias Aritméticas Ponderadas** utilizadas conforme os critérios clássicos (antigos) de Pesquisa Mineral, obtidos através das expressões (2a, b e c), (3a, b e c), (5), (6), (7).

4.4.3 - Média Geométrica (ver também Distribuição Log Normal, ítem 4.3.2.2.1 à página 99)

$$Mg \ x_i = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_N} = \text{antilog } 1/N \sum \log x_i \quad \text{Expressão (29a)}$$

é uma mediação adequada quando as frequências dos itens ensaiados tendem a se distribuírem conforme uma progressão geométrica (como acontece no caso do modelo Log Normal). Comparando com a Média aritmética, ela é menos influenciada pelos valores extremos altos, motivo pelo qual, é sempre menor do que a média aritmética. Entretanto, em geral, é considerada um estimador muito pessimista, quando se trata de mediação em Pesquisa Mineral. Não é extensivamente utilizada para avaliar teores médios dos jazimentos minerais, exceto sob a forma corrigida, conforme o chamado estimador "t" de Sichel.

Quando a distribuição de frequências dos valores obedece ao modelo **Log Normal**, a **Média Geométrica** é sensivelmente igual a **Mediana**.

- 4.4.4 - Mediana (ver também - Outros estimadores dos parâmetros de tendência central e item 4.3.2.2.1 - Média Geométrica, à página 89). Quando a distribuição de frequências dos itens "xi" ensaiados obedece ao modelo **Log Normal**, a **Mediana** é sensivelmente igual a **Média Geométrica**. Portanto nesse caso particular, vale os comentários feitos com respeito a esta ultima. Em todos os casos a **Mediana** divide ao meio a área compreendida pela curva da distribuição de frequências, sendo uma média de posição. É afetada pelo número "N" dos itens "xi" ensaiados e não pela grandeza desses itens, assim como pelos valores extremos ocasionais dos mesmos. É a mediação mais representativa, quando ocorre simultaneamente as condições de grande número "N" de itens ensaiados, e quando sejam estreitamente concentrados os valores desses itens "xi". A **Mediana** não pode ser calculada com acuracidade, quando o número "N" de itens "xi" é pequeno.

- 4.4.5 - Estimador "t" de Sichel (ver itens 4.3.2 e 4.3.2.2.2 às páginas 99 e 100)

$$t_{\text{SICHEL}} = M_{g.xi} * Y(V) \quad \text{Expressão (31)}$$

é um estimador adequado quando é adotado o modelo matemático da distribuição de frequências **Log Normal** sendo preferível à **Média Geométrica**. O fator $Y(V)$, significa correção da Média Geométrica dando resultados menos pessimistas. É indicado para estimar médias em jazimentos de baixos teores como os dos depósitos auríferos, mesmo quando não se conhece o modelo de distribuição de frequências mais adequado

(presumindo-se, na falta de melhores informações, ser mais provável a adequação ao modelo Log Normal). Por este último motivo, o estimador tSICHEL é preferível à **Média Aritmética**, quando o número "N" de valores "xi" ensaiados é pequeno. O tSICHEL minimiza os efeitos dos valores altos esporádicos e dispares que influenciam muito na **Média Aritmética** (tornando os resultados tendenciosos para mais), (ver exemplo da aplicação de estimador no final do item 4.3.2.2.2, exemplo nº 11 à página 103).

- 4.4.6 - Moda (ver também sua conceituação na página 90, em tipos e parâmetros dos modelos de distribuição de frequências.

É o valor de "xi" que ocorre com maior frequência na população ensaiada. Num ensaio experimental é o valor médio central (x_{pim}) da classe, com a maior frequência, da população ensaiada. Como a **Mediana**, significa uma medição de posição, a qual independe dos valores extremos de "xi" distribuídos. Em Pesquisa Mineral serve somente como indicação da mais alta estimativa que se possa fazer dos valores da população.

- 4.4.7 - "Range"

É um estimador do parâmetro de dispersão, o qual é definido como a amplitude do intervalo dos valores "xi" ensaiados, da variável "x". É medido simplesmente pela diferença entre os valores mais alto e mais baixo dos itens "xi". Somente é utilizado como primeira indicação da dispersão dos dados obtidos na amostragem. É pouco expressivo, principalmente quando um desses valores extremos é dispar, o que ocorre comumente.

- 4.4.8 - Desvio Padrão Aritmético "s" e Variância Aritmética "s²" (ver também no item 4.3.1 Distribuição Normal ou Gaussiana, à página 93)
Expressão (25) e (26a e b)

Expressam quantitativamente a estimação da dispersão (ou seja do espalhamento) dos itens "xi" ensaiados, em relação a média desses valores (estimada pela sua média aritmética " \bar{x} "). São estimadores adequados quando a distribuição de frequência dos valores "xi" ensaiados for mais adequada ao modelo **Distribuição Normal**. Aplicação desses parâmetros serão vistos nos itens que se seguem.

4.4.9 - Relação entre o volume das amostras e a variância "s" da população resultante.

Nos ensaios experimentais de diversas séries de valores "xi", de um mesmo universo, resultante de volumes "i" de amostras diferenciadas:

Para cada série resultarão diferenciadas populações; cada população diferenciada será caracterizada por diferenciada distribuição de frequências e variâncias "s2";

Quando duas séries de amostras foram feitas dum mesmo universo com volumes " λ_1 " e " λ_2 " respectivamente, deverá se verificar a relação:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{ou} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} ; \quad \text{Expressão (38)}$$

Ou seja as variâncias das populações resultantes são inversamente proporcionais aos volumes dos incrementos das amostras tomadas em cada série de amostragem.

Essa relação, possibilita um teste simples de aleatoriedade dos procedimentos de amostragem, quando se dispõe de duas ou mais séries de amostras (com incremento diferente de amostragem) num mesmo universo. Sendo aleatórios os procedimentos das amostragens feitas, a expressão (38) deverá se verificar.

4.4.10 - Desvio padrão e Variância (aritméticos) dos logaritmos dos valores de "xi" (log xi) e Desvio Padrão (sg) e Variância (sg) geométricos (ou Logarítmicos, (ver também no item 4.3.2.3 à página 110)

É obvio que definições, e outros conceitos relacionados aos Desvio Padrão e Variância aritméticos, aplicam-se no caso de uma Distribuição Normalizada de uma Distribuição Log Normal. Significando Distribuição Normalizada, a distribuição dos logaritmos (naturais ou decimais, conforme o caso) dos valores "xi" (ou xi + constante) da variável "x", a qual pela definição de Distribuição Log Normal, obedece ao modelo **Normal ou Gaussiano**.

Assim verificando-se que a distribuição de frequências dos logaritmos dos valores "xi" (ou xi + constante) analisados, ajustam-se ao modelo Log Normal, as interpretações se farão através dos logaritmos de "xi" (ou Log xi + constante), aplicando-se os parâmetros do modelo Normal, aos valores desses logaritmos.

Os resultados finais serão os respectivos antilogaritmos dos resultados (logarítmicos) interpretados. Elimina-se do resultado a constante, no caso em que o ajuste dos valores "xi" foram através de log (xi + constante), ver exemplo nº 12 à página 109 .

Nas interpretações aplicam-se as expressões vistas anteriormente: (34a e b), (35), (36), (37) que podem ser representadas, geralmente, sob as formas:

$$s.\log x_i = \sqrt{\frac{\sum (\log x_i - \alpha)^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum (\log x_i - \alpha)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum \log^2 x_i}{N} - \alpha^2} \quad \text{Expressão (39)}$$

$$sg = \text{antilog} (s\log x_i) \quad \text{Expressão (40)}$$

onde:

log xi são logaritmos naturais ou decimais (conforme o caso), e α as respectivas médias.

4.4.11 - Erro Padrão "sx" da Média Aritmética "x" e Intervalo de Confidência (IC).

Esses conceitos são baseados no teorema da Matemática Estatística chamado "de tendência central", o qual estabelece:

- Sendo dada uma população de uma variável aleatória "x", e os vários valores das diferentes médias aritméticas "xi" resultantes das diferentes séries de "N" valores "xi"; com a condição de que cada série de valores correspondam a "N" amostras independentes tomadas aleatoriamente na mesma população. Os diferentes resultados médios "xi", por sua vez, constituirão uma nova variável "X" aleatória, cujo verdadeiro parâmetro de tendência central " μ " (verdadeira média) será a verdadeira média da população da variável "x" amostrada.

Nessa condição, chamando-se o verdadeiro parâmetro de dispersão de cada uma das distribuições dos valores "xi" (que deram os diferentes resultados "xi"), sua relação com o verdadeiro parâmetro de dispersão dos valores da população da variável "X" será:

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{Expressão (41)}$$

Ainda mais, quando σ^2/N não é grande, a distribuição da variável "X" é Normal, mesmo que a distribuição da variável "x", da população original, seja Assimétrica. Assim com base na função da distribuição, característica de distribuição Normal (ver item 4.3.1.2, à página 96) podemos estimar que:

- Com 95% de probabilidade os diferentes valores de "xi" estarão compreendidos no intervalo entre $\mu +$ ou $- 2\sigma_{\mu}$, ou seja: $\mu - 2\sigma_{\mu} < \bar{x}_i < \mu + 2\sigma_{\mu}$; que também com 68% de probabilidade, estarão compreendidos no intervalo $\mu +$ ou $- 1\sigma_{\mu}$ ou seja $\mu - 1\sigma_{\mu} < \bar{x}_i < \mu + 1\sigma_{\mu}$.

Sabemos que os fatores 1 e 2 referidos são números aproximados típicos característicos da função acumulativa da Distribuição Normal, para confidências de respectivamente 68% e 95%; sabemos que esses fatores variam com a confidência (ou risco), e o número de valores "N" (ver item 4.3.1, sub-item 4.3.1.2 e figura 45 à página 96)

Entretanto nunca se conhece a verdadeira média " μ " e os verdadeiros parâmetros de dispersão " σ_{μ} " e " σ ". Porém podemos estimá-los, com os respectivos estimadores " \bar{x}_i " (média aritmética), e "s" (desvio padrão aritmético). Então podemos estimar " σ_{μ} ", dado pela expressão (41), pelo valor:

$$\text{estimador de } \sigma_{\mu} \approx s(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{s^2}{N}} = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{Expressão (42)}$$

$s(\bar{x}_i)$ é o estimador que constitui o parâmetro estatístico denominado **Erro Padrão da Média Aritmética**, através do qual se estima os desvios $(\bar{x}_i - \mu)$ (desvios de uma média aritmética da verdadeira média da população μ).

Assim numa primeira aproximação utilizando-se dos valores $s(\bar{x}_i)$, e com base nos valores típicos da distribuição Normal Acumulada (vistos no item 4.3.1, subitem 4.3.1.2 e figura 45 à página 96), se poderá estimar:

- Que com 95% de probabilidade (ou confidência ou confiabilidade) uma média " \bar{x}_i " deverá se desviar da verdadeira média de $(+ \text{ ou } - s(\bar{x}_i).2)$; que com 68%, deverá se desviar $(+ \text{ ou } - s(\bar{x}_i).1)$

Conseqüentemente, existe um risco avaliado em 5% (ou 0,05) de que o valor de uma média " \bar{x}_i ", ocorra fora do intervalo entre $(\mu - 2.s(\bar{x}_i))$ e $(\mu + 2.s(\bar{x}_i))$; ou o risco de 32% (ou 0,32), de " \bar{x}_i " ocorrer fora do intervalo entre $(\mu \pm s(\bar{x}_i))$. Com maior precisão, em lugar dos fatores 1 e 2 (típicos valores aproximados da Distribuição Normal Acumulada), se poderá utilizar os fatores tSTUDENT, os quais são obtidos em tabelas encontradas dos livros textos de Estatística. Esses valores previamente calculados com base na **Distribuição Normal Acumulada**, tabelados e primeiramente publicados por STUDENT (pseudônimo do Matemático W. S. Gosset do início do atual século). Os fatores tSTUDENT tabelados, o são para diversos níveis de **Confidência (ou Risco)**, e para os graus de liberdade ou sejam para o número "N" de valores " x_i " medidos. Então os **Intervalos de Confidência (IC)** de uma média aritmética " \bar{x}_i " serão estimados pela expressão (43):

$$\frac{IC}{2} = \pm s(\bar{x}_i) \cdot tSTUDENT(N, Co) = \pm \frac{s}{\sqrt{N}} \cdot tSTUDENT(N, Co) \quad \text{Expressão (43)}$$

Exemplos de cálculo de **Intervalo de Confidência** de uma média aritmética de teores obtidos em amostragem.

Exemplo nº 14:

Admitindo-se que dez (10) amostras de minério de ferro após analisados deram teores " x_i " cuja média aritmética " \bar{x}_i " foi 60% Fe, e que calculando-se o Desvio Padrão $s = \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 / (N - 1)}$, dos valores de " x_i " analisados, seja 0,948% de Fe. Então o Erro Padrão da Média " \bar{x}_i " será, conforme a expressão (42):

$$s(\bar{x}_i) = 0,948 / \sqrt{10} = 0,300\% \text{ Fe}/N$$

Numa tabela de fatores tSTUDENT para confidência de 95% (ou risco de 5%, ou seja, 2,5% em cada extremo), e para grau de liberdade $N = 10$, obtém-se:

$$t_{STUDENT}(95\%, 10) = 2,228$$

Observa-se que 95% é a confiança convencionalmente exigida para cálculos de Reserva Medida. Então, conforme (43):

$$(IC)/2 = +/- (0,300) \cdot (2,228) = +/- 0,668\% \text{ Fe} \sim 0,7\% \text{ Fe, para a média das "N" amostras.}$$

Então com 95% de Confidência ou Confiabilidade (ou de probabilidade) a verdadeira média " μ " estará entre os limites expressos por:

$$60\% \text{ Fe} - 0,7\% \text{ Fe} = \mu \text{ ou } \mu < 60\% \text{ Fe} + 0,7\% \text{ Fe}$$

ou

$$59,3\% \text{ Fe} = \mu < 60,7\% \text{ Fe}$$

Exemplo nº 15

Com os dados originais do exemplo nº 2 apresentado no final do item 2.3, à página 20, constantes do Quadro 2 (amostragem para cobre e ouro de uma amostragem de pesquisa) tem-se:

Para as acumulações de cobre:

$$ZnCu = TnCu \cdot Wn$$

Número de Valores N = 37 (ver quadro 2 à página 21)

Média Aritmetica ZnCu = 60,3% Cu.cm (ver quadro 2)

Significando o teor médio de cobre para a espessura média de 97,3 cm

$$TnCu = 60,3\% \text{ Cu.cm} / 97,3 \text{ cm} = 0,62\% \text{ Cu}$$

$$\text{Desvio Padrão } s(ZnCu) = \sqrt{\frac{\sum (Zn - \bar{Zn})^2}{N - 1}}$$

conforme a expressão (26b)

$$\text{Desvio Padrão } s(ZnCu) = 60,680\% \text{ Cu.cm}$$

Erro padrão da média ZnCu = 60,3% Cu.cm, conforme expressão (42)

$$s(\bar{ZnCu}) = 60,680 / \sqrt{37} = 9,976\% \text{ Cu.cm} \sim 10,000\% \text{ Cu.cm}$$

Para nível de confiança de 95% (convencionalmente adotado para cálculos de reserva medida); e para o grau de liberdade 37; consultando-se uma tabela de tSTUDENT, tem-se:

$$t_{STUDENT}(0,95;37) = 2,026$$

Conforme expressão (43):

$$IC/2 = +/- (9,976\% \text{ Cu.cm}).(2,026) = +/- 20,2\% \text{ Cu.cm}$$

Significando o intervalo de confiança para o teor médio Tm_{Cu} , e para a espessura medida de 97,3 cm (ver quadro 2):

$$IC/2 = +/- 20,2\% \text{ Cu.cm}/97,3 \text{ cm} = +/- 0,21\% \text{ Cu}$$

Assim com 95% de confiança o teor em cobre na trincheira (com espessura média de 97,3 cm) estaria compreendido entre 0,41 a 0,83% Cu, ou:

$$(0,62\% \text{ Cu} - 0,21\% \text{ Cu}) < Tm_{Cu} < 0,62\% \text{ Cu} + 0,21\% \text{ Cu}$$

Para as acumulações de ouro ($Zn_{Au} = Tn_{Au}.Wn$) com os dados do mesmo problema 2 (constantes do quadro 2 à página 21), tem-se:

Número de Valores $N = 37$

Média Aritmetica $Zn_{Au} = 949 \text{ ppmAu.cm}$

Significando o teor médio em ouro, para a espessura média amostrada de 97,3 cm (ver quadro 2):

$$Tn_{Au} = (949 \text{ ppmAu.cm})/97,3 \text{ cm} = 10 \text{ ppmAu}$$

$$\text{Desvio Padrão das Acumulações } s(Zn_{Cu}) = \sqrt{\frac{\sum(\bar{Zn}_{Au} - Zn)^2}{N - 1}}$$

conforme a expressão (26b)

$$s(Zn_{Au}) = 1250 \text{ ppmAu.cm}$$

Erro padrão médio dos valores (Zn_{Au}), conforme a expressão (42):

$$s(\bar{Zn}_{Au}) = 1250 \text{ ppmAu}/\sqrt{37} = 205,5 \text{ ppmAu}$$

$t_{STUDENT}(0,95;37) = 2,026$ (valor tabelado)

Intervalo de confiança das acumulações (Zn_{Au}); conforme expressão (43):

$$IC/2 = +/- (205,5 \text{ ppmAu}).(2,026) = +/- 416 \text{ ppmAu};$$

significando o intervalo de confiança do teor médio $TnAu$, e para espessura amostrada média de 97,3 cm (ver quadro 2):

$$IC/2 = +/- 416 \text{ ppmAu.cm} / 97,3 \text{ cm} = +/- 4,3 \sim 4 \text{ ppmAu}$$

Assim com 95% de confiança o teor em ouro na trincheira (com espessura média de 97,3 cm), estaria compreendido entre 6 à 14 ppmAu ou:

$$(10 \text{ ppmAu} - 4 \text{ ppmAu}) < TnAu < (10 \text{ ppmAu} + 4 \text{ ppmAu})$$

Exemplo 16:

No exemplo nº 5 à página 42, de cubagem de um filão mediante delimitação do corpo de minério mediante um Perfil Longitudinal composto (ver exemplo referido):

- Com os dados da 6ª coluna do quadro nº 8 à página 43, calculou-se a média aritmética das acumulações $ZnCu = TnCu.Eh$, média aritmética de $ZnCu = 6,4516\% \text{ Cu.m}$; o desvio padrão $s(ZnCu)$ dos valores da 6ª coluna do quadro nº 8 será:

$$s(ZnCu) = +/- \sqrt{\frac{\sum (\bar{ZnCu} - ZnCu)^2}{N - 1}} = 5,189\% \text{ Cu.m}$$

O intervalo de confiança da média dos $N = 15$ valores das acumulações $ZnCu$, será:
Conforme a expressão (43)

$$\begin{aligned} \frac{IC}{2} &= +/- \frac{s(ZnCu)}{\sqrt{N}} \cdot tSTUDENT(15;0.95) = \\ &= +/- \frac{5,189\% \text{ Cu.m}}{15} \cdot 2.131 = +/- 2,855\% \text{ Cu.m} \end{aligned}$$

Então:

$$6,4516 - 2,855 < \mu(ZnCu) < 6,4516 + 2,855$$

A verdadeira média $\mu(ZnCu)$, das acumulações $ZnCu$, estará compreendida então:

$$3,5966\% \text{ Cu.m} < \mu(ZnCu) < 9,3066\% \text{ Cu.m}$$

Admitindo-se uma espessura horizontal média (Eh) para o corpo de minério cubado 5,84 m (ver 3ª coluna do quadro nº 8 à página 43), corresponderia:

$$\frac{3,5966}{5,84} < \mu(\text{tnCu}) < \frac{9,3066}{5,84} \quad \text{ou}$$

$$0,62\% \text{ Cu} < \mu(\text{tnCu}) < 1,59\% \text{ Cu}$$

Resultando o limite mínimo para a estimativa do teor em cobre do minério, delimitado e cubado, a nível de confiança de 95% (compatível com estimativa de reserva medida), de 0,62% Cu.

Em Hazen 1967 e reproduzida em Reedy L. A. 1982 (refs. cits.) existe publicado ábaco de curvas relacionando números de amostras "N", desvios padrões e o respectivo intervalo de confiança, ao nível de 95% de confiabilidade.

4.4.12 - Limites Inferior e Superior de Confidência para o modelo Log Normal

Considerando-se a distribuição Normal dos logaritmos da variável "xi" cujo modelo seja Log Normal e com base nos valores típicos deste último modelo de distribuição (ver subitem 4.3.2.1 à página 97 e figura 45 à página 96).

- **Numa primeira aproximação**, podemos estimar que com 95% de chances, os valores dos logaritmos da variável "x", se desviarão da média desses logaritmos (para mais e para menos) de duas vezes o Desvio Padrão.

$$s.\log xi = \sqrt{\frac{\sum \log^2 xi}{N}} - \alpha^2, \text{ conforme a expressão (39)}$$

Desse modo o **intervalo de confidência**, nesse nível dos logaritmos da variável "log xi", poderá ser estimado como sendo o intervalo entre (+/- 2slog xi).

Conseqüentemente, os **limites inferior e superior** dos logaritmos da variável "x", numa avaliação com 97,5% de confiança, poderão serem estimados (no caso em que os logaritmos sejam naturais), ver figura 45.

- **Limite Inferior** dos $\ln xi = \alpha - 2.s \ln xi$; significando que com probabilidade de 97,5%, os valores dos $\ln xi$ (com distribuição Log Normal), terão valores acima desse limite.

- **Limite Superior** dos $\ln x = \bar{x} + 2s \cdot \ln xi$; significando que com probabilidade de 97,5% os valores dos $\ln xi$, terão valores abaixo desse limite (ou seja 2,5% terão valores acima desse limite).

- Com 95% de probabilidade os valores dos logaritmos naturais da variável "x" ($\ln x$), estarão compreendidos entre esses limites, **inferior e superior.**

Sendo: $\ln xi$ os logaritmos naturais da variável "x", " \bar{x} " a média aritmetica desses logaritmos; $s \cdot \ln xi$ o desvio padrão aritmetico desses mesmos logaritmos.

Portanto os limites **inferior e superior** da variável "x" (com os mesmos níveis de confiança ou probabilidade), serão os respectivos antilogaritmos daqueles limites, tendo-se:

Limite inferior de

$$x = e^{(\bar{x} - 2s \cdot \ln xi)} = \bar{x} \cdot e^{-(2s \cdot \ln xi)} \quad \text{expressão (44a)}$$

Limite Superior de

$$x = e^{(\bar{x} + 2s \cdot \ln xi)} = \bar{x} \cdot e^{+(2s \cdot \ln xi)} \quad \text{expressão (44b)}$$

Em que \bar{x} é a média geométrica da variável x.

As expressões (44a e b) poderão serem anotadas sob as formas equivalentes:

Limite inferior de $x = \bar{x} \cdot \Upsilon(0,975)$ expressão (44c)
(com 97,5% ou 0,975 de probabilidade)

Limite superior de $x = \bar{x} \cdot \Upsilon(0,025)$ expressão (44d)
(com 97,5% ou 0,975 de probabilidade)

$$\Upsilon(0,975) = e^{-(2s \cdot \ln xi)} = \frac{1}{e^{(2s \cdot \ln xi)}}$$

é o fator a ser aplicado à média geométrica " \bar{x} ", para estimar com esse critério o **limite inferior** dos valores da variável "x" com probabilidade de 0,975; isto é os valores de "xi" da variável "x" tem a probabilidade de 97,5% de serem superiores (estarem acima) desse limite;

$$\Psi(0,025) = e^{-(2s \cdot \ln xi)} =$$

é o fator para estimar o **limite superior**, com a mesma probabilidade ou **confidência**; significando que os valores de "xi" da variável "x", terão apenas 0,025 ou 2,5% de probabilidade, de estarem acima desse valor limite superior.

Conseqüentemente, o **Intervalo de Confidência** a nível de 95% da variável "x" Log Normal será a diferença entre esses dois limites. Observa-se que a média geométrica "e^α" **não** estará no centro do **Intervalo de Confidência** (como acontece no caso da média aritmetica no modelo **Normal**), por motivos de não ser simétrica a distribuição de frequência da variável "x".

Exemplo nº 17

Utilizando o mesmo exemplo nº 11 da aplicação do estimador tSICHEL, apresentado no final do item 4.3.2.2.2 à página 103.

No exemplo nº 11, à página 103 (com os mesmos dados originais do exemplo nº 2, apresentado na página 21).

- Para estimação do parâmetro de tendência central das acumulações ZAu = TnAu . Wn, calculou-se naquele exemplo nº 11.

Média geométrica ZAu = e^α = 428,3 ppmAu.cm

Variância "V" = Variância dos logaritmos naturais de ZAu = s².lnZAu = 1,796 (ppmAu.cm)²

Então o desvio padrão dos logaritmos naturais de ZAu = s.lnZAu = \sqrt{V} = 1,796 = 1,340 ppmAu.cm.

Assim, conforme as expressões (44a, b, c e d):

$$\text{- Limite Inferior de ZAu} = e^{\alpha - (2 \times 1,340)} = e^{428,3 - 2,68} =$$

(com 97,5% de probabilidade)

$$= 428,3 \times \frac{1}{e^{2,68}} =$$

$$= 29,4 \text{ ppmAu.cm}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{Limite Superior de ZAu} &= e^{\alpha} \cdot e^{\frac{(2 \times 1,340)}{e}} = \\
 & \text{(com 97,5\% de probabilidade)} \\
 & = 6247 \text{ ppmAu.cm}
 \end{aligned}$$

Tendo sido a espessura média amostrada 97,3 cm (ver quadro nº 12 à página 104), esses resultados corresponderão aos limites da variável $x = \text{TnAu}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Limite Inferior de } x = \text{TnAu} &= \frac{29,4 \text{ ppmAu.cm}}{97,3 \text{ cm}} = \\
 & \text{(c/97,5\% de probabilidade)} \\
 & = 0,3 \text{ ppmAu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Limite Superior de } x = \text{TnAu} &= \frac{6247 \text{ ppmAu.cm}}{97,3 \text{ cm}} = \\
 & \text{(c/97,5\% de probabilidade)} \\
 & = 64,2 \text{ ppmAu}
 \end{aligned}$$

Em pesquisa mineral, nos problemas de avaliação de teores, geralmente é interessante somente o **Limite Inferior**. Nesse problema, o resultado pessimista de 0,3 ppmAu para o Limite Inferior, explica-se pela adoção da média geométrica para estimar o parâmetro de tendência central, pela disparidade dos dados originais, pelo pequeno número "N" desses dados e pelo alto nível de confiança de 97,5% da estimação.

Aprofundando o estudo dos limites de confiabilidade nesses tipos de avaliação, Sichel calculou e publicou tabelas de fatores " Ψ ", para serem aplicados na estimação desses limites, quando o parâmetro de tendência central, é estimado com o estimador t_{SICHEL} . Ver tabelas de Sichel (reproduzidas de Grossi Sad J. H. 1986) à página 142.

Essas tabelas são de fatores $\Psi(0,05)(V,N)$ e $\Psi(0,95)(V,N)$, relacionados ao número "N" de valores "x" mediados, e às Variâncias ($V = s^2 \cdot \ln x$) dos logaritmos naturais da variável "x" (para se estimar respectivamente os limites Inferior e Superior, a nível de confiança de 95% ou 0,95). Significando que o **Intervalo Central** dos valores de "x" entre esses dois limites, tem a probabilidade de 90% (excluindo-se os dois extremos de 5% da curva de distribuição, de valores menores que o **Limite Inferior**, e de valores maiores do que o **Limite Superior**).

Exemplo de estimação dos limites aplicando os fatores da tabela referida:

Exemplo nº 18

Utilizando os mesmos dados originais do exemplo nº 2, de avaliação de teores médios $TnAu$ de amostragem de uma trincheira (ver Quadro nº 2 à página 21 e Quadro nº 12 à página 104 e os resultados do exemplo nº 11 à página 103, da estimação com o estimador $tSICHEL$.

N = número de resultados $ZAu = TnAu \cdot Wn$, das 37 amostras;

V = Variância dos $\ln Z = 1,796 \approx 1,8$ ($ppmAu, cm$)²; calculado no exemplo nº 11 à página 105;

$tSICHEL(ZAu) = 1026,6$ $ppmAu, cm$; calculado no exemplo nº 11 à página 105;

Média aritmética de $Wn = 97,3$; (ver Quadro nº 2 à página 21)

Na tabela de Sichel (reproduzida de Grossi Sad 1986) à página 142, obtém-se interpolando os fatores (0,05) e (0,95) (com 95% de probabilidade):

$\Psi(0,05) (V,N) = \Psi(0,05) (V=1,8; N=37) =$ fator para estimar o **Limite Inferior** = 0,6431

$\Psi(0,95) (V,N) = \Psi(0,95) (V=1,8; N=37) =$ fator para estimar o **Limite Superior** = 2,080

Tendo-se para os limites Inferior e Superior, com 95% de probabilidade, dos valores de $ZAu = TnAu \cdot Wn$

Limite Inferior de $ZAu = tSICHEL(ZAu) \times (0,05)(V,N) =$
 $= 1026,6 \times 0,6431 \approx 660$ $ppmAu, cm$

Limite Superior de $ZAu = tSICHEL(ZAu) \times (0,95)(V,N) =$
 $= 1026,6 \times 2,080 \approx 2135$ $ppmAu, cm$

Esses resultados correspondem as estimativas dos limites **Inferior** e **Superior** para o teor de $x = TnAu$, para uma espessura amostrada média de 97,3 cm (com 95% de probabilidade):

Limite Inferior de $TnAu = \frac{660 \text{ ppmAu, cm}}{97,3 \text{ cm}} =$
 $= 6,78 \approx 7$ $ppmAu$

2135 ppmAu.cm

Limite Superior de TnAu = ----- =
 97,3 cm
 = 21,9 = 22 ppmAu

Isso significa que os teores TnAu, do depósito, representados pela amostragem da trincheira (com espessura média de 97,3 cm) estão compreendidos entre 7 à 22 ppmAu, com a probabilidade de 90%. Sendo mais interessante, como valor representativo da avaliação (com a precisão de 95%, requerida para estimação de reserva **Medida**), é que os teores de TnAu estarão acima do limite Inferior de 7 ppmAu.

Tabela 5.13 - FATOR $\Psi_{0,95}(V_N)$ PARA ESTIMAR O LIMITE SUPERIOR DE CONFIANÇA (COM 95% DE PROBABILIDADE) DE UMA MÉDIA LOGNORMAL.

$\frac{N}{V}$	5	10	15	20	50	100	1000
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,02	1,241	1,117	1,084	1,067	1,038	1,026	1,007
0,04	1,362	1,171	1,122	1,099	1,055	1,037	1,011
0,06	1,466	1,216	1,154	1,124	1,069	1,046	1,013
0,08	1,561	1,256	1,181	1,146	1,080	1,053	1,015
0,10	1,652	1,293	1,207	1,166	1,091	1,060	1,017
0,12	1,740	1,327	1,230	1,184	1,100	1,066	1,019
0,14	1,827	1,361	1,253	1,202	1,109	1,072	1,020
0,16	1,914	1,393	1,274	1,219	1,118	1,078	1,022
0,18	1,999	1,425	1,295	1,236	1,126	1,084	1,023
0,20	2,087	1,455	1,316	1,252	1,135	1,089	1,025
0,30	2,532	1,606	1,415	1,328	1,172	1,113	1,031
0,40	3,019	1,756	1,509	1,399	1,207	1,135	1,037
0,50	3,563	1,910	1,603	1,470	1,240	1,156	1,042
0,60	4,176	2,070	1,682	1,541	1,273	1,175	1,047
0,70	4,870	2,237	1,798	1,614	1,306	1,196	1,052
0,80	5,663	2,415	1,901	1,688	1,338	1,215	1,057
0,90	6,570	2,604	2,006	1,763	1,371	1,235	1,062
1,00	7,605	2,805	2,117	1,842	1,404	1,254	1,067
1,10	8,795	3,019	2,233	1,924	1,437	1,274	1,071
1,20	10,155	3,250	2,355	2,008	1,471	1,294	1,076
1,30	11,718	3,497	2,483	2,096	1,506	1,314	1,080
1,40	13,513	3,761	2,617	2,187	1,540	1,334	1,085
1,50	15,569	4,045	2,758	2,282	1,576	1,354	1,089
1,60	17,928	4,351	2,907	2,380	1,613	1,374	1,094
1,70	20,639	4,680	3,064	2,484	1,650	1,395	1,098
1,80	23,749	5,034	3,229	2,592	1,688	1,416	1,103
1,90	27,318	5,414	3,403	2,704	1,728	1,438	1,107
2,00	31,398	5,825	3,588	2,822	1,767	1,459	1,112
2,10	36,079	6,268	3,783	2,945	1,808	1,481	1,116
2,20	41,444	6,745	3,989	3,074	1,850	1,504	1,121
2,30	47,586	7,260	4,208	3,209	1,893	1,526	1,125
2,40	54,611	7,815	4,438	3,351	1,937	1,549	1,130
2,50	62,661	8,415	4,683	3,498	1,982	1,572	1,134
2,60	71,861	9,061	4,941	3,670	2,029	1,596	1,139
2,70	82,366	9,759	5,214	3,816	2,076	1,620	1,144
2,80	94,377	10,512	5,504	3,986	2,125	1,645	1,148
2,90	108,115	11,326	5,811	4,164	2,175	1,670	1,153
3,00	123,750	12,206	6,137	4,351	2,226	1,695	1,158

Example: $\Psi_{0,95}(1,60:15) = 2,907$
 (From H.S. Sichel, March 1966, and B.M. Weinstein, April 1975, Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy)

Tabela 5.14 - FATOR $\Psi_{0,05}(V_N)$ PARA ESTIMAR O LIMITE INFERIOR DE CONFIANÇA (COM 95% DE PROBABILIDADE) DE UMA MÉDIA LOGNORMAL.

$\frac{N}{V}$	5	10	15	20	50	100	1000
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,02	0,8978	0,9333	0,9458	0,9540	0,9697	0,9782	0,9927
0,04	0,8589	0,9071	0,9246	0,9344	0,9573	0,9692	0,9895
0,06	0,8302	0,8874	0,9079	0,9200	0,9478	0,9622	0,9872
0,08	0,8070	0,8708	0,8943	0,9077	0,9398	0,9564	0,9852
0,10	0,7870	0,8563	0,8821	0,8972	0,9328	0,9512	0,9833
0,12	0,7693	0,8439	0,8716	0,8878	0,9264	0,9464	0,9817
0,14	0,7535	0,8323	0,8617	0,8790	0,9204	0,9420	0,9801
0,16	0,7389	0,8216	0,8527	0,8709	0,9149	0,9380	0,9787
0,18	0,7255	0,8116	0,8442	0,8632	0,9097	0,9341	0,9773
0,20	0,7129	0,8023	0,8360	0,8558	0,9048	0,9304	0,9760
0,30	0,6605	0,7618	0,8008	0,8243	0,8828	0,9139	0,9701
0,40	0,6187	0,7284	0,7717	0,7981	0,8639	0,8996	0,9648
0,50	0,5838	0,6995	0,7462	0,7744	0,8470	0,8867	0,9600
0,60	0,5538	0,6739	0,7270	0,7534	0,8313	0,8741	0,9554
0,70	0,5277	0,6508	0,7020	0,7338	0,8168	0,8632	0,9511
0,80	0,5044	0,6297	0,6825	0,7156	0,8030	0,8525	0,9470
0,90	0,4836	0,6103	0,6646	0,6987	0,7899	0,8421	0,9425
1,00	0,4650	0,5923	0,6476	0,6826	0,7774	0,8322	0,9385
1,10	0,4481	0,5756	0,6317	0,6674	0,7654	0,8226	0,9351
1,20	0,4328	0,5599	0,6165	0,6530	0,7538	0,8133	0,9315
1,30	0,4189	0,5452	0,6023	0,6393	0,7426	0,8042	0,9277
1,40	0,4062	0,5315	0,5888	0,6262	0,7318	0,7954	0,9240
1,50	0,3946	0,5186	0,5760	0,6137	0,7214	0,7868	0,9201
1,60	0,3840	0,5065	0,5637	0,6018	0,7112	0,7784	0,9161
1,70	0,3743	0,4950	0,5521	0,5904	0,7014	0,7702	0,9131
1,80	0,3655	0,4842	0,5410	0,5794	0,6918	0,7622	0,9091
1,90	0,3574	0,4740	0,5305	0,5688	0,6825	0,7544	0,9061
2,00	0,3501	0,4644	0,5203	0,5587	0,6734	0,7466	0,9031
2,10	0,3433	0,4552	0,5106	0,5489	0,6646	0,7391	0,8991
2,20	0,3372	0,4466	0,5014	0,5395	0,6560	0,7317	0,8961
2,30	0,3316	0,4385	0,4925	0,5304	0,6476	0,7245	0,8921
2,40	0,3266	0,4308	0,4840	0,5217	0,6394	0,7173	0,8891
2,50	0,3220	0,4234	0,4759	0,5133	0,6314	0,7104	0,8861
2,60	0,3179	0,4166	0,4681	0,5044	0,6236	0,7035	0,8831
2,70	0,3142	0,4100	0,4606	0,4974	0,6160	0,6967	0,8791
2,80	0,3110	0,4039	0,4535	0,4899	0,6085	0,6901	0,8761
2,90	0,3081	0,3981	0,4467	0,4826	0,6012	0,6836	0,8731
3,00	0,3055	0,3926	0,4401	0,4756	0,5941	0,6772	0,8701

Example: $\Psi_{0,05}(1,60:15) = 0,5637$
 (From H.S. Sichel, March 1966, and B.M. Weinstein, April 1975, Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy)

TABELA DE SICHEL - CÓPIA DA REPRODUÇÃO EM S&C, G.H 1982

PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DO NÚMERO "N" DE AMOSTRAS QUE SÃO NECESSÁRIAS NAS AVALIAÇÕES DE PESQUISA MINERAL.

Esse importante problema é o de estimar-se qual o número de amostras adicionais que serão necessárias, para que a medição signifique um resultado dentro dos limites do erro tolerável pré-estabelecido; e com um determinado nível de confiança desejada.

A solução desse problema, permite estimar a precisão dos resultados, face os objetivos da pesquisa, evitando desperdício econômico, com trabalhos de amostragem super dimensionados.

A solução é muito fácil, quando se admite que a amostragem seja aleatória, e que seja adequado o modelo de distribuição Normal para os seus resultados.

Conhecendo-se a média aritmética " \bar{x}_i " de "N" itens " x_i " analisados, e o respectivo desvio padrão " σ "; o intervalo de confiança (IC) deverá satisfazer a expressão (43), vista no item 4.4.11. (à página 131)

$$\left(\frac{IC}{2} \right) = \pm \sigma \bar{x}_i \times t_{\text{STUDENT}} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times t_{\text{STUDENT}}$$

de onde facilmente se deduz :

$$N = \left[\frac{\sigma \times t_{\text{STUDENT}}}{\frac{IC}{2}} \right]^2 \quad \text{expressão (45a)}$$

Sendo conhecido o desvio padrão aritmético " σ ", t_{STUDENT} será obtido das tabelas, para o número de amostras " N " e a nível de confiança desejada (o qual no caso de avaliação compatível com a Reserva Medida será de 95%).

(IC) é calculado a partir do erro " ϵ " tolerável pré estabelecido; no caso de avaliação com Reserva Medida, $(IC) = 2 \times \epsilon$; sendo " ϵ " o valor positivo de $\pm 20\% \times \bar{x}_i$.

Substituindo-se esses dados na expressão (45a), calcula-se " N ", o qual é o número de amostras compatível com a precisão de Reserva Medida. Sendo $(N > N')$ deverão serem necessários aproximadamente $(N - N')$ amostras adicionais, para que seja

atingida a precisão desejada. Sendo feita a amostragem adicional, deverá-se repetir o teste até que se obtenha um valor "N" menor do que o número das amostras computadas na média.

Observa-se que a nível de confiança 95%, e para valores "N" do número de amostras igual ou superior a 30, $t_{\text{STUDENT}} \cong 2$. Desse modo a expressão (45a) poderá ser simplificada sob a forma:

$$N = \left[\frac{2 \sigma}{\left(\frac{IC}{2} \right)} \right]^2 \quad \text{expressão (45b)}$$

Esse procedimento simples para a solução do problema, é adotado correntemente, sendo indicado em S.M.E. Underground Mining Methods Hand book 1982, servindo de orientação na prática, com restrições (ref.: cit. Ready, L.A. 1982).

EXEMPLO N° 19

Utilizando-se os dados do EXEMPLO N° 2 à página 20 (constantes do quadro n° 2), dos resultados de amostragem para cobre em uma trincheira, calcula-se para as acumulações $ZnCu = TnCu \times Wn$ e $ZnAu = TnAu \times Wn$, para ouro e cobre :

- Número de amostras $N' = 37$

- Desvio padrão $\sigma (ZnCu) = \sqrt{\frac{\sum (\bar{ZnCu} - ZnCu)^2}{N - 1}}$;

dos valores das acumulações Zn para Cobre e,

- Desvio padrão $\sigma (ZnAu) = \sqrt{\frac{\sum (\bar{ZnAu} - ZnAu)^2}{N - 1}}$;

dos valores das acumulações Zn para Ouro ;

- $\sigma (ZnCu) = 60,68\% \text{ Cu.cm}$; ver exemplo 15 à página 134
- $\sigma (ZnAu) = 1250 \text{ ppm Au.cm}$; ver exemplo 15 à página 135
- Média Aritmética $ZnCu = 60,3\% \text{ Cu.cm}$;

ver quadro nº 2 à página 21

- Média Aritmética ZnAu = 949 ppm Au.cm ;
ver quadro nº 2 à página 21.

Estimador t_{STUDENT} lido em tabela, para nível de confiança 95% (compatível com a confiança adotada para avaliações de Minério Medido), e para graus de liberdade $N = 37$:
 $t_{\text{STUDENT}} = 2,027$.

Para estimativas com precisão compatível de Minério Medido (por definição), é tolerável um erro "e" de 20% em relação a média aritmética; então os intervalos de confiança $\left(\frac{IC}{2}\right)$ serão:

- Para as acumulações (ZnCu), para cobre será :

$$\left(\frac{IC}{2}\right), \text{ para Cu} = \pm 0,20 \times 60,3\% \text{ Cu.cm} = 12,06\% \text{ Cu.cm}$$

- Para as acumulações (ZnAu), para ouro será :

$$\left(\frac{IC}{2}\right), \text{ para Au} = \pm 0,20 \times 949 \text{ ppm Au.cm} = 189,8 \text{ ppm Au.cm,}$$

Então aplicando-se a expressão (45a), para que os dados do Quadro nº 2, fossem compatíveis com avaliações com precisão de Minério (ou Reserva) Medido, deveríamos ter :

Para o caso do Cobre :

$$N = \left[\frac{\circ \text{ ZnCu} \times t_{\text{STUDENT}}}{\frac{IC}{2}} \right]^2 = \left[\frac{60,68\% \text{ Cu.cm} \times 2,027}{\pm 12,06\% \text{ Cu.cm}} \right]^2 =$$

$$N \cong 104 \text{ amostras}$$

Ou seja, seriam necessárias cerca de $N - N' = 104 - 37 = 67$ amostras para que a avaliação obtida, fosse compatível com as precisões requeridas para reserva medida (no caso da acumulação para o Cobre).

Para o caso da amostragem para Ouro :

$$N = \left[\frac{\circ \text{ ZnAu} \times t_{\text{STUDENT}}}{\frac{IC}{2}} \right]^2 = \left[\frac{1250 \text{ ppm Au.cm} \times 2,027}{\pm 189,8 \text{ ppm Au.cm}} \right]^2 = 178$$

Estimaria-se igualmente que seriam necessárias cerca de $N - N' = 178 - 37 = 141$ amostras adicionais.

Observação :

A resolução deste tipo de problema, é útil somente como orientação em Pesquisa Mineral. Deve-se ressaltar que as expressões que fundamentam essa forma de resolução, as expressões (43), (45) e (45a), pressupõem que o modelo de distribuição da variável pesquisada seja o modelo NORMAL, o que geralmente não acontece.

EXEMPLO N^o 20

No caso do EXEMPLO N^o 5 à página 42, de cubagem de um filão mediante delimitação num perfil longitudinal composto (ver exemplo referido e fig. n^o 18 à página 45), calcula-se, para os valores $ZnCu = TnCu \times Eh$ (ver 6^a coluna do Quadro n^o 8 à página 43) :

$$\sigma ZnCu = \pm \sqrt{\frac{\sum (\bar{ZnCu} - ZnCu)^2}{N - 1}} = 5,189 \% Cu.cm$$

O intervalo de confiança $\left[\frac{IC}{2} \right]$ com tolerância de erro relativo de 0,20 em relação a média 6,4516 dos valores ZnCu (ver 6^a coluna do Quadro n^o 8 à página 43); compatível com estimação de reserva com precisão de minério medido, será :

$$\left[\frac{IC}{2} \right] = \pm (0,20 \times 6,4516) = \pm 1,2903\% Cu.cm$$

Então conforme a expressão (45b) : $N = \left[\frac{5,189 \times 2}{1,2903} \right]^2 \cong 65$

Seriam então necessárias mais $N - N' = 65 - 15 = 50$ intersecções, na área delimitada do filão (ver fig. 18 à página 45), para que a reserva estimada fosse compatível com a precisão de minério medido. Esse resultado mostra, que no caso de uma pesquisa como a do exemplo n^o 5 (à página 42), torna-se antieconômica a pesquisa mediante sondagens a partir da superfície, para chegar-se a precisão compatível com a reserva medida. Em casos como esse, são indicados trabalhos mineiros subterrâneos para o detalhamento da pesquisa. Observa-se que somente esses trabalhos de pesquisa subterrâneos poderão

fornecer observações de geologia, capazes de levar ao esclarecimento das causas estruturais da inflexão do filão detectada (ver planta da fig. 17 à página 44). Ver também EXEMPLO N.º 25 às páginas 162 à 164.

4.4.14. COEFICIENTE DE VARIACÃO V

COEFICIENTE DE VARIACÃO V, é um parâmetro que aplicado em Pesquisa Mineral, exprime a VARIABILIDADE dos depósitos minerais. Não confundir com a VARIÂNCIA DOS LOGARÍTMOS dos valores da variável (estimador do parâmetro de dispersão) $\sigma^2 \times \ln x_i$ para o qual neste texto, foi adotado o mesmo símbolo V, quando referindo-se ao estimador t_{SICHEL} .

No caso em que se admite o modelo de distribuição NORMAL da variável x, o COEFICIENTE DE VARIACÃO V, é definido pelo quociente, expresso em percentagem, do DESVIO PADRÃO ARITMÉTICO σ , pela MÉDIA ARITMÉTICA \bar{x} , (dos valores x_i da variável x).

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \quad \text{expressão (47a)}$$

V é um coeficiente de CORRELAÇÃO LINEAR sem dimensão, expressando em percentagem a proporcionalidade linear, do DESVIO PADRÃO σ e a média aritmética \bar{x} , sob a forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quando } \bar{x}_i \text{ corresponde a } \sigma, 100 \text{ corresponderá ao} \\ \text{coeficiente } V = \frac{\sigma \times 100}{\bar{x}} \end{array} \right.$$

Alguns autores expressam o coeficiente V simplesmente através da relação $V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$,

Conforme (26a), tem-se também as expressões equivalente,
 (47b) :

$$V = \frac{\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x}_i)^2}}{\bar{x}_i} \times 100 = \sqrt{\frac{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x}_i)^2}{(\bar{x}_i)^2}} \times 100 =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sum x_i^2}{N}}{(\bar{x}_i)^2} - 1} \times 100 = \text{expressão (47b)}$$

Conseqüentemente, no caso da DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL, o COEFICIENTE DE VARIAÇÃO dos LOGARÍTMOS da variável x , (cuja distribuição é NORMAL), será dado por:

$$V_{\ln x_i} = \sqrt{\frac{\frac{\sum \ln^2 x_i}{N}}{\alpha^2} - 1} \times 100 \quad \text{Expressão (48)}$$

Ainda no caso da distribuição LOGNORMAL a relação linear correspondente, dos antilogarítmos respectivos, (ou sejam dos valores x_i da variável x), será definido por um novo coeficiente V_g , cuja expressão será :

$$V_g = \sqrt{\frac{e \frac{\sum \ln^2 x_i}{N}}{e \alpha^2} - 1} \times 100 \quad \text{Expressão (49a)}$$

Da qual se deduz :

$$V_g = \sqrt{e \left[\frac{\sum \ln^2 x_i}{N} - \alpha^2 \right] - 1} \times 100 \quad \text{Expressão (49b)}$$

$$V_g = \sqrt{e (\sigma \ln x_i)^2 - 1} \times 100 \quad \text{Expressão (49c)}$$

Sendo de logarítmos decimais a distribuição NORMALIZADA

teria-se :

$$V_g = \sqrt{10^{(\sigma \log_{10} x_i)^2} - 1} \times 100 \quad \text{Expressão (49d)}$$

Essas expressões (49a, b, c e d), são utilizadas na prática para se calcular e definir o COEFICIENTE DE VARIAÇÃO, para o caso em que o modelo de distribuição seja LOGNORMAL; nas quais : $\sigma \log x_i$ = DESVIO PADRÃO dos logaritmos (neperianos ou decimais dos valores x_i , da variável x pesquisada).

Alguns autores expressam V_g simplesmente pelas relações :

$$V_g = \sqrt{e^{(\ln x_i)^2} - 1} \quad \text{ou} \quad V_g = \sqrt{10^{(\sigma \log x_i)^2} - 1}$$

V.M. Kreiter 1968, originalmente, publicou tabela relacionando características de variabilidade dos depósitos minerais, com coeficiente de variação V , de seus atributos, como sejam teores, espessuras e reservas dos blocos parcelados. Essas tabelas são reproduzidas com modificações por diversos autores, como seja em Maximov 1973, Kuzvart 1978, Maranhão 1983 e Grossi Sad 1986. De Kuzvart 1978, é a tabela reproduzida neste texto

que se segue:

Grupo	Tipo depósito	Variabil.	Coeficiente V	
			V _{espes.}	V _{teor}
I	Sediment. carvão folhelhos combustíveis; materiais para construção; fosfatos minério de ferro; depósitos magmatogênicos simples.	Regulares (geralmente)	5-50%	5-30%
II	Maioria dos metais não ferrosos; alguns depósitos endógenos não metálicos; depósitos de minerais de ferro complexos.	Aleatório (geralmente)	30-80%	40-100%
III	Maioria de metais raros e preciosos; depósitos de metais não ferrosos tectonizados com morfologia mais complexa; alguns depósitos não metálicos endógenos.	Aleatória	50-100%	100-150%
IV	Pequenos depósitos de metais raros com distrib. de teores muito irregular; e grandes depósitos; idem muito tectonizados.	Aleatória	80-150%	130-300%

É admitido que o número mínimo de itens x_i necessários para se calcular o coeficiente V seja: 18 para depósitos de Grupo I; 25 para os do Grupo II; 40 para os do Grupo III.

Uma vez que o coeficiente V depende do desvio padrão σ , o qual varia com o tamanho, volume e forma das amostras, admite-se que esses sejam razoavelmente equivalentes aos padrões adotados para amostras de canal.

Assim como Kreiter e Kuz vart, os autores da URSS e de

países sob sua influência, utilizam muito o COEFICIENTE DE VARIACÃO para estabelecerem normas em Pesquisa Mineral, como sejam dimensionamento adotado para tomada de amostras de canal, espaçamento das amostras, etc.

Para a utilização daquelas normas e tabelas geralmente calcula-se os COEFICIENTES DE VARIACÃO adequado ao modelo NORMAL, conforme expressão (47a). Entretanto, em muitos casos, principalmente naqueles em que $V > 100$, será mais racional adotar-se o coeficiente V_g calculado conforme as expressões (49b e c), (adequadas ao modelo LOGNORMAL).

Exemplo de cálculo do COEFICIENTE DE VARIACÃO V .

EXEMPLO N.º 21

Coefficiente de Variação V , dos teores em Cobre e Ouro, e também da espessura (potência) medida de um filão, amostrado ao longo de uma trincheira de pesquisa.

Utilizando os dados de amostragem do Exemplo n.º 2 à página 20, e constantes do Quadro 2 (à página 21). Nesse exemplo, para efeitos práticos, consideramos os coeficientes V para as acumulações $ZnCu = TnCu \times Wn$ e $ZnAu = TnAu \times Wn$, equivalentes respectivamente aos coeficientes V para os teores de Cobre $TnCu$ e de Ouro $TnAu$; porque as espessuras Wn amostradas em ambos os casos, são praticamente uniformes e, muito próximas de 100 cm (média de 97,3 cm), ver 3.ª coluna do Quadro 2 à página 21.

Então :

N de amostras, $N = 37$

Média Aritmética $ZnCu = 60,34\% \text{ Cu.cm}$

$$\text{Desvio Padrão Aritmético } \sigma \text{ de } ZnCu = \sqrt{\frac{\sum (\bar{ZnCu} - ZnCu)^2}{N - 1}}$$

$$= 60,68\% \text{ Cu.cm}$$

Coefficiente de Variação V_{ZnCu} , conforme expressão (47a) :

$$V_{(ZnCu)} = \frac{60,68\% \text{ Cu.cm}}{60,34\% \text{ Cu.cm}} \times 100 = 100,6 \cong 101\%$$

Média Aritmética $\bar{ZnCu} = 949 \text{ ppm Au.cm}$

$$\text{Desvio Padrão Aritmético } \sigma \text{ de ZnAu} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{ZnAu} - ZnAu)^2}{N - 1}}$$
$$= 1250 \text{ ppm Au.cm}$$

Coefficiente de Variação V_{ZnAu} , conforme expressão (47a):

$$V_{(ZnAu)} = \frac{1250 \text{ ppm Au.cm}}{949 \text{ ppm Au.cm}} \times 100 \cong 132 \%$$

Média aritmética das espessuras (potência) medidas na estrutura do filão (constantes da 3^a coluna do Quadro 2).

Média aritmética das espessuras $\bar{E}_n = 59,46 \text{ cm}$

Desvio Padrão aritmético σ das espessuras \bar{E}_n :

$$\sigma E_n = \sqrt{\frac{\sum (\bar{E}_n - E_n)^2}{N - 1}} = 19,29 \text{ cm}$$

Coefficiente de Variação V espessura, conforme expressão (47a):

$$V_{\text{espessura}} = \frac{19,29 \text{ cm}}{59,46 \text{ cm}} \times 100 = 32,4 \%$$

Considerando-se os respectivos coeficientes de variação das acumulações ZnCu e ZnAu, praticamente equivalentes aos coeficientes V de variação para os teores de Cobre e de Ouro (conforme foi observado anteriormente); tem-se:

$$V_{TnCu} \cong 101\% ; V_{TnAu} \cong 132\% ; V_{\text{espessura}} = 32,4\%$$

- Comparando-se com a tabela de Classificação nos jazimentos reproduzida de Kuz vart 1978 (à página 150), conclui-se:

1^o O jazimento para cobre, será classificado nos jazimentos do grupo II, já nos limites dos jazimentos do grupo III (no que se refere aos coeficientes V para os teores de cobre).

2^o O jazimento para Ouro será classificado nos limites dos grupos III e IV (no que se refere ao coeficiente de variação V para os teores em Ouro).

3^o Classificado nos do grupo II, com respeito às variações da

espessura. Esses resultados pouco coerentes, são também pouco confiáveis, porque o número de amostras $N = 37$, é insuficiente para calcular os coeficientes V para os jazimentos dos grupos III e IV.

- Outra restrição para esses resultados, decorre de que os coeficientes V foram calculados com a expressão (47a), inadequada para jazimentos com coeficientes $V > 100\%$.

A expressão (47a) é adequada somente para o modelo de distribuição NORMAL dos valores computados. Nas condições desse problema em que $V > 100\%$ (para teores) dever-se-á utilizar o coeficiente de Variação geométrico V_g , (mais adequado ao modelo de distribuição LOG NORMAL).

Aplicando-se então a expressão (49b)

$$V_g = \sqrt{e \left[\frac{\sum \ln^2 x_i}{N} - \alpha^2 \right] - 1} \times 100$$

conforme (34a) $\left[\frac{\sum \ln^2 x_i}{N} - \alpha^2 \right]$ será respectivamente VARIÂNCIA dos logaritmos naturais das variâncias computadas (ZnCu e ZnAu); Então:

$$V_{g, ZnCu} = \sqrt{e (\sigma \ln ZnCu)^2 - 1} \times 100$$

$$V_{g, ZnAu} = \sqrt{e (\sigma \ln ZnAu)^2 - 1} \times 100$$

$$(\sigma \ln ZnCu)^2 = \sqrt{\frac{(\text{média } \ln ZnCu \cdot \ln ZnCu)^2}{N}} = 0,92705$$

Calculado diretamente dos valores da 6ª coluna do Quadro 2 (à página 21), através da expressão (34a).

$$(\sigma \ln \text{ZnAu})^2 = \sqrt{\frac{(\text{média } \ln \text{ZnAu} \cdot \ln \text{ZnAu})^2}{N}} = 1,7963$$

calculado diretamente, conforme expressão (34a), dos valores das colunas 5^a e 6^a do Quadro n^o 12 (à página 104), através da expressão (34a).

Finalmente :

$$V_{\sigma, \text{ZnCu}} = \sqrt{e^{0,92705} - 1} \times 100 = 124\% ;$$

praticamente equivalente ao coeficiente de variação V_{σ} dos teores de cobre (conforme consideração anterior).

$$V_{\sigma, \text{ZnAu}} = \sqrt{e^{1,7963} - 1} \times 100 = 224\%$$

praticamente equivalente ao coeficiente de variação V_{σ} dos teores de Ouro (conforme consideração anterior). Consultando-se a tabela reproduzida de Kuzvart 1978, (à página 150), classifica-se esse jazimento nos do grupo IV, no que diz respeito ao coeficiente de variação para os teores de Ouro; nos limites do grupo III para o grupo IV, no que diz respeito a cobre. Cabe também a ressalva com respeito à imprecisão dessas conclusões, devido ao pequeno número de valores, ($N = 37$), com que foram determinados os coeficientes de variação, o qual é insuficiente para suporte dos cálculos estatísticos.

4.4.15. ESTIMAÇÃO DO ADENSAMENTO DA MALHA DE PESQUISA, ADEQUADA AS CARACTERÍSTICAS DE VARIABILIDADE DOS DEPÓSITOS PESQUISADOS.

Esse é um problema que ocorre na pesquisa de um corpo de minério, no qual duas de suas dimensões sejam predominantemente. Isso acontece nos jazimentos sedimentares ou estratiformes horizontalizados, nos aluviões, e também nos corpos tabulares, mais ou menos inclinados, como os de filões metalíferos e outros. Consiste em planejar, intersecções mediante sondagens (ou outros meios) em pontos distribuídos na maior superfície do corpo. O objetivo é o de obter amostras cujos resultados x_i interpretados, conduzam à resultados finais, apresentando erros ϵ compatíveis com as precisões necessárias, pré-estabelecidas.

As intersecções deverão tender a serem perpendiculares às superfícies. Na prática, são verticais nas superfícies de corpos tendendo a horizontalidade, e (na medida do possível), tender a serem horizontalizados, nos corpos de atitudes subverticais.

A densidade δ da malha de pesquisa é definida pela relação

$$\delta = \frac{A}{N} \quad \text{expressão (50)}$$

na qual A é a área da superfície pesquisada do corpo de minério e N o número de intersecções (sondagens, etc, atravessando e espessura do corpo de minério).

O número de intersecções N poderá ser estimado conforme o raciocínio que se segue, o qual é baseado no modelo NORMAL de distribuição de frequências (dos valores x_i a serem obtidos na amostragem). Conforme a expressão (43) o intervalo (IC) com a confiança C desejada, do valor da média \bar{x}_i a ser obtida, será dado por :

$$\left(\frac{IC}{2} \right) = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times t_{\text{STUDENT}}(N,C) \quad \text{expressão (43)}$$

deduzida anteriormente.

$\left(\frac{IC}{2} \right)$ será o erro absoluto máximo provável da média \bar{x}_i (para mais

ou para menos), com a confiança C desejada.

Chamando-se ρ (dado em percentagem da média), o erro relativo máximo (em relação a média \bar{x}_i), o qual é pré-estabelecido, de acordo com a precisão requerida na pesquisa, tem-se :

$$\rho \text{ dado em (\%)} = \pm \left[\frac{IC}{2} \right] \times \frac{1}{\bar{x}_i} \times 100$$

substituindo-se (da expressão 43):

$$\rho \text{ dado em (\%)} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times t_{\text{STUDENT}}(N,C) \times \frac{1}{\bar{x}_i} \times 100$$

Essa relação poderá ser anotada:

$$\rho \text{ dado em (\%)} = \left[\frac{\sigma}{\bar{x}_i} \times 100 \right] \times \frac{t(N,C)}{\sqrt{N}}$$

comparando-se com a expressão (47a), tem-se :

$$\rho \text{ dado em \%} = V \frac{t(N,C)}{\sqrt{N}} ; \text{ da qual se deduz :}$$

$$N = \left[\frac{V t_{\text{STUDENT}}(N,C)}{\rho} \right]^2 ; \quad \text{expressão (51a)}$$

em que :

- N é o número de intersecções necessárias (como por exemplo : o número de sondagens requerida na malha de pesquisa);
- V é o coeficiente de variação do atributo do depósito mineral pesquisado;
- ρ é o erro relativo pré-estabelecido tolerável na pesquisa.

Substituindo-se (51a) em (50) chega-se finalmente a:

$$\delta = A \left[\frac{\rho}{V t_{\text{STUDENT}}(N,C)} \right]^2 ; \quad \text{expressão (52a)}$$

δ será a densidade da malha da pesquisa, expressando também a **ÁREA DE INFLUÊNCIA** de cada intersecção (sondagens, etc) da malha.

No caso de confiança $c = 95\%$ para $N \geq 30$, $t_{\text{STUDENT}} \cong 2$;
 Considerando-se satisfatório a confiança $c = 68\%$, $t_{\text{STUDENT}} \cong 1$.

Assim na prática, são adotados:

$$N = \left(\frac{V_2}{\rho} \right)^2 = \frac{A}{\delta} ; \quad \text{expressão (51b)}$$

para confiança $c = 95\%$

$$\delta = A \left(\frac{\rho}{V_2} \right) ; \quad \text{expressão (52b)}$$

para confiança $c = 95\%$

$$N \cong \left(\frac{V}{\rho} \right)^2 = \frac{A}{\delta} ; \quad \text{expressão (51c)}$$

para confiança $c = 68\%$

$$\delta \cong A \left(\frac{\rho}{V} \right)^2 ; \quad \text{expressão (52c)}$$

para confiança $c = 68\%$

Na aplicação dessas expressões, no caso de projetos objetivando estimar RESERVA MEDIDA, a confiança "c" será de 95%, e o erro absoluto máximo tolerável será de 20% em relação a média dos valores computados, tendo-se o erro relativo $\rho = 0,20$:

$$e = \pm \bar{x}_i \times 20 \times \frac{1}{100} = \pm 0,20 \bar{x}_i$$

Observe que essas expressões foram deduzidas com base em parâmetros estatísticos da distribuição NORMAL dos valores amostrados. Sabendo-se que isso raramente acontece, os resultados que se obtêm com a aplicação das mesmas, devem serem considerados com restrições. Servem como primeira orientação para a solução do problema de estabelecimento da MALHA DE PESQUISA (na falta de melhores informações, no início dos trabalhos).

São úteis também como padrões para normalizar critérios de precisão dos trabalhos de pesquisa.

Na prática são aplicadas juntamente com os critérios advindos da observação geológica. Nas fases mais adiantadas da pesquisa, existem outras soluções mais racionais para a

pesquisa, com base em GEOESTATÍSTICA (ver conceito e utilização do VARIOGRAMA a serem abordados mais adiante). Observa-se, que nenhum critério matemático, dispensa os critérios advindos da observação da geologia.

Para orientação no início dos trabalhos de pesquisa, os autores da escola soviética, apresentam tabelas indicando espaçamento adequados de pesquisa, para diversos tipos de jazimentos, estabelecidos com base na experiência, e referindo-se aos coeficientes V de variação. (ver em Kreiter 1968, em Kuz̄vart 1978).

Exemplos de estimativas de malhas de pesquisa, com utilização das expressões (50), (51) e (52):

EXEMPLO N^o 22

Suponhamos que se queira estimar o espaçamento de uma malha de sondagens verticais para a pesquisa de um jazimento típico de carvão sul-brasileiro. Com base na tabela de Kuz̄vart 1978 (ver tabela à página 150), para jazimentos do grupo I, com as características que consideramos adequadas a esses jazimentos, arbitramos:

- Para o coeficiente de variação V de espessura da camada $V = 50\% = 0,50$.

- Admitindo-se que a área da autorização de pesquisa seja $A = 2000 \text{ ha} = 2.0E07 \text{ m}^2$.

- Considerando-se a confiança $c = 95\% = 0,95$ (para estimação compatível com a precisão requerida para RESERVA MEDIDA), tem-se: $t_{\text{STUDENT}} \cong 2$; Erro tolerável em relação a média $\rho = 20\% = 0,20$. Conforme a expressão (52b), calcula-se:

$$\delta = 2.0 \times 10^7 \text{ m}^2 \left(\frac{0,20}{0,50 \times 2} \right)^2 = 8.0E05 \text{ m}^2 ; \text{ para área de}$$

influência de cada sondagem. Da expressão (51b):

$$N = \left(\frac{V \rho}{\rho} \right)^2 = \frac{A}{\delta} = \frac{A}{A \left(\frac{\rho}{V \rho} \right)^2} = \frac{2 \cdot 10^7 \text{ m}^2}{8 \cdot 10^5 \text{ m}^2} = 25$$

$N = 25$ sondagens

Numa malha uniformemente distribuída, ter-se-á, para o raio r de influência das sondagens:

$$2 \times \pi \times r^2 = \delta = 8,0 \text{ E}05 \text{ m}^2 \quad \therefore \quad r = \sqrt{\frac{8 \times 10^5 \text{ m}^2}{2 \times \pi}} \cong 357 \text{ m.}$$

O espaçamento estimado entre as sondagens será:

$$2 \times r = 2 \times 357 \text{ m} = 714 \text{ m}$$

Essas estimativas referem-se somente a avaliação das espessuras médias das camadas de carvão do jazimento, desconsiderando-se a existência de perturbações estruturais (falhas ou pseudo intrusões) para cujo mapeamento seria necessário uma malha de sondagem bem mais densa (com espaçamento da ordem de 250 m, de acordo com a experiência regional).

EXEMPLO Nº 23

- Estimativa do espaçamento necessário entre as intersecções produzidas por sondagens inclinadas (ou outros trabalhos de pesquisa), em um jazimento filoneano de atitude subvertical, de cobre, semelhante ao Filão São Luiz da Mina de Camaquã, no RGS. Admitindo-se que a pesquisa se estendesse até ao longo de 500 metros no comprimento da estrutura pesquisada, e até a profundidade de 300 metros, resulta para área A pesquisada (medida num plano aproximadamente paralelo ao plano da estrutura):

$$A = 300\text{m} \times 500\text{m} = 15 \text{ E}04 \text{ m}^2$$

Na tabela de Kuzvart 1978 (ver tabela à página 150), classifica-se o jazimento como do grupo III, sendo o coeficiente de variação para teor (o atributo mais variável) estimado em

$V=125\%$ ou $1,25$. Para pesquisa compatível com RESERVA MEDIDA, arbitra-se o erro ρ tolerável, em 20% da média = $0,20$, e confiança $c = 95\%$.

Então de acordo com (51b) e (52b), calcula-se :

$$\delta = 15 \times 10^4 \text{ m}^2 \times \left[\frac{0,20}{1,25} \times 2 \right]^2 = 960 \text{ m}^2 \text{ para área de influência de cada intersecção (ou sondagens);}$$

$$N = \left[\frac{\sqrt{A}}{\rho} \right]^2 = \frac{A}{\delta} \cong 156 \text{ intersecções (ou sondagens);}$$

O raio de influência de cada intersecção será:

$$r = \sqrt{\frac{\delta}{2 \times \pi}} \cong \sqrt{\frac{960 \text{ m}^2}{2 \times \pi}} \cong 12,36 \text{ m ;}$$

resultando espaçamento $2 \times r$ entre as intersecções necessárias : $2 \times r \cong 25 \text{ m}$; sendo esse espaçamento coerente com os que seriam adotados na pesquisa de desenvolvimento.

Para uma pesquisa preliminar poderia-se adotar os mesmos parâmetros, porém com a confiança $c = 68\%$, tendo-se de acordo com (51c) e (52c).

$$\delta = 15 \times 10^4 \text{ m}^2 \left[\frac{0,20}{1,25} \right]^2 = 3840 \text{ m}^2 \text{ área de influência das intersecções;}$$

$$N = \frac{A}{\delta} \cong 39 \text{ intersecções ;}$$

Raio de influência das intersecções r , e respectivos espaçamentos ($2 \times r$):

$$r = \sqrt{\frac{3840 \text{ m}^2}{2 \times \pi}} \cong 25 \text{ m ; } 2 \times r = 50 \text{ m.}$$

Esses espaçamentos seriam os adotados numa pesquisa preliminar mediante sondagens inclinadas, partindo da superfície do terreno.

EXEMPLO N^o 24

No caso da trincheira amostrada do EXEMPLO N^o 2 (ver página 20), sendo o comprimento visível do filão amostrado aproximadamente de 80m, querendo-se pesquisar até a profundidade de 50 m. Sendo a atitude do filão aproximadamente vertical, a área da superfície onde será disposta a malha será $A = 80m \times 50m = 4000 m^2$.

Conforme foi calculado no exemplo n^o 21 (à página 152), $VZnAu = 132\%$ (o atributo de maior coeficiente de variação). Então, para a densidade de malha de pesquisa com confiança de 95%, de acordo com a expressão (52b) :

$$\delta = 4 \cdot 10^3 m^2 \left(\frac{0,20}{1,32 \times 2} \right)^2 = 22,96 m^2; \quad N^o \text{ de intersecções na malha:}$$

$$N' = \left(\frac{V \times 2}{\rho} \right)^2 = \frac{A}{\delta} = 174 ; \text{ conforme (51b)}$$

Raio da área de influência de cada intersecção (ou sondagem):

$$r = \sqrt{\frac{\delta}{2 \times \pi}} \cong \sqrt{\frac{22,56 m^2}{2 \times \pi}} \cong 1,91 m ;$$

Resultando o espaçamento $2 r = 4 m$ aproximadamente.

- Para pesquisa com confiança de 68% se calcula de modo semelhante:

$$\delta = 4 \cdot 10^3 m^2 \times \left(\frac{0,20}{1,32} \right)^2 = 91,83 m^2 ; \text{ conforme expressão (52c);}$$

$$N'' = \left(\frac{V}{\rho} \right)^2 = 44 \text{ intersecções; conforme (51c)}$$

$$r = \sqrt{\frac{\delta}{2 \times \pi}} \cong \sqrt{\frac{91,83 m^2}{2 \times \pi}} \cong 3,82 m ;$$

espaçamento entre as intersecções $2 \times r = 8 m$ (aproximadamente)

Observação :

Devido ao alto coeficiente de variação V do jazimento, verifica-se a necessidade da malha de pesquisa muito densa. Em casos como esse, será mais econômica a pesquisa mediante trabalhos subterrâneos, servindo a sondagem somente para verificar preliminarmente, a continuidade do jazimento.

EXEMPLO N^o 25

Analiseemos com base no coeficiente de variação V , os dados do EXEMPLO N^o 5 (à página 42), da pesquisa preliminar de um filão mediante delimitação do corpo de minério num Perfil Longitudinal, ver figuras n^o 17 e 18, às páginas 44 e 45 e os dados contidos no Quadro n^o 8 (à página 43).

Calculamos primeiramente os coeficientes de variação V TnCu, e V Eh, com os dados obtidos pelas sondagens. Acrescentemos os dados referentes as sondagens que atingiram o corpo de minério fora da área delimitada na figura n^o 18 (à página 45), aos dados constantes nas 3^a e 4^a colunas do Quadro n^o 8 da página 43.

QUADRO N^o 14

	Eh (m)	TnCu (% Cu)
F 25	0,07	0,30
F 26	2,29	0,45
F 14	3,94	0,60
F 21	0,59	0,80
Σ	94,54	19,95
MÉDIAS	4,98	1,02
DESVIO PADRÃO	4,367	0,475

As totalizações Σ , MÉDIAS e DESVIO PADRÃO "s", deste último Quadro nº 14, referem-se aos totais calculados acrescentando-se os dados das 3ª e 4ª colunas do Quadro nº 8 da página 45. Referem-se aos resultados considerando-se 19 valores computados (15 do Quadro nº 18 e 4 do Quadro nº 14).

Tem-se para o coeficiente de variação V_{TnCu} e E_h , dos dados respectivamente, de teores em cobre e de espessura horizontais nas 19 intersecções obtidas na face do corpo de minério :

$$V_{TnCu} = \left(\frac{0,475\% \text{ Cu}}{1,02\% \text{ Cu}} \right) \times 100 = 46,6 \cong 47\% ;$$

conforme expressão (47a)

$$V_{E_h} = \left(\frac{4,367 \text{ m}}{4,98 \text{ m}} \right) \times 100 = 87,7\% \cong 88\% ;$$

conforme expressão (47a)

De acordo com a tabela de Kuzvart 1978 (à página 150), o jazimento será classificado:

- Nos jazimento do grupo II no que se refere ao coeficiente de variação dos teores.
- Nos limites dos jazimentos dos grupos III e IV no que se refere ao coeficiente de variação das espessuras do corpo de minério.
- Com restrição de que o número de valores computados $N = 19$ é menor do que 40, portanto insuficiente para determinação de coeficientes de variação.

Esses resultados são entretanto coerentes com o que se conhece da geologia do jazimento, motivo pela qual poderão serem utilizados, com as ressalvas devidas a imprecisão.

- Nessas condições, e adotando-se o coeficiente de variação $V_{E_h} = 88\%$ (o mais desfavorável); para estimar-se o adensamento da malha de pesquisa na área rentável delimitada da fig. 18 (à

página 45), para chegar-se a precisões compatíveis com Reserva Medida :

- Número de intersecções N' , para estimar-se a espessura média, (compatível com Reserva Medida):

$$N' = \left[\frac{V \times 2}{\rho} \right]^2 = \left[\frac{0,88 \times 2}{0,20} \right]^2 \cong 77 \text{ intersecções;} \\ \text{conforme a expressão (51b)}$$

Esse resultado é razoavelmente, coerente com o resultado do EXEMPLO N^o 20 (à página 146), cabendo as mesmas observações feitas no fim da resolução daquele exemplo. Querendo-se um estimativa à nível de confiança de 68%, mais compatível com uma Pesquisa preliminar, (objetivo da pesquisa que serviu de exemplo), utilizaria-se a expressão (51c), tendo-se:

$$N' = \left[\frac{V}{r} \right]^2 = \left[\frac{0,88}{0,20} \right]^2 \cong 19 \text{ intersecções.}$$

Esse é um número compatível com os dados do problema. É também compatível com o objetivo daquela pesquisa, pretendendo-se atingir precisão compatível com RESERVA INDICADA. A pesquisa a nível de precisão RESERVA MEDIDA, em tipos de jazimentos como o do presente exemplo, seria atingida nos trabalhos de desenvolvimento posteriores, mediante trabalhos mineiros subterrâneos.

4.5 - OUTROS CONCEITOS E PARÂMETROS DA ESTATÍSTICA CLÁSSICA UTILIZADOS EM PESQUISA MINERAL E EQUAÇÃO DE KRIGE.

4.5.1 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES E DEPENDENTES DIAGRAMAS CORRELAÇÃO

Sendo "x" a variável aleatória teor, de um corpo de minério numa dada porção desse corpo, e "y" a variável aleatória do teor do mesmo corpo de minério, porém de uma outra parte de mesmo corpo: O teor " x_i " de uma amostra colhida em qualquer ponto na primeira porção, poderá nada informar com respeito ao teor de uma amostra " y_i " (tomada na outra parte). Isso acontece desde que os pontos em que sejam tomadas as amostras " x_i " e " y_i " estejam separados por uma distância maior do que o que se denomina, "raio de AREA DE INFLUÊNCIA" dessas amostras. Contrariamente, se os pontos em que possam serem tomadas as amostras x_i e y_i estiverem à uma distância menor do que o "RAIO DA AREA DE INFLUÊNCIA", x e y serão DEPENDENTES, e o conhecimento de uma, algo informa com respeito a outra.

Em Estatística a INDEPENDÊNCIA OU DEPENDÊNCIA de duas variáveis aleatórias se expressam pela chamada PROBABILIDADE COMPOSTA entre as duas variáveis, a qual é anotada por $\rho \left\{ \frac{y}{x} \right\}$

ou por $\rho \left\{ \frac{x}{y} \right\}$; significando a probabilidade de que um valor de uma das variáveis acontecer, desde que aconteceu um valor da outra variável.

Quando x e y são INDEPENDENTES :

$\rho \left\{ \frac{y}{x} \right\} = \rho \left\{ y \right\} \rightarrow$ probabilidade de acontecer um valor de y; e também

$\rho \left\{ \frac{x}{y} \right\} = \rho \left\{ x \right\} \rightarrow$ probabilidade de acontecer um valor de x.

Quando as duas variáveis x e y são DEPENDENTES :

$$\rho \left\{ \frac{y}{x} \right\} = \frac{\rho \{y, x\}}{\rho \{x\}} \quad \text{ou também}$$

$$\rho \left\{ \frac{x}{y} \right\} = \frac{\rho \{x, y\}}{\rho \{y\}}$$

$\rho \{y, x\} = \rho \{x, y\}$ é o que se denomina PROBABILIDADE CONJUNTA de acontecer um valor, em cada uma das duas variáveis x e y , tendo-se

$$\rho \{x, y\} = \rho \{x\} \times \rho \{y\}$$

Num minério composto de dois conteúdos úteis, como por exemplo de cobre e molibdênio, os teores em % Cu e % Mo serão duas variáveis x e y as quais poderão serem dependentes ou independentes. A dependência ou independência de uma, em relação a outra, poderão se expressar através de um DIAGRAMA DE CORRELAÇÃO.

Esse diagrama como mostram as figuras 53a e 53b, é construído locando-se pontos em um sistema cartesiano, cujas respectivas abscissas e ordenadas são os teores obtidos em cada amostra. No caso x_i será o teor em cobre dada em % Co, e y_i o teor de Molibdênio dado em % Mo.

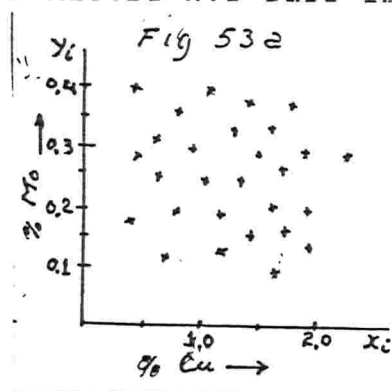


Fig. 53a. - Diagrama NÃO se observando Correlação

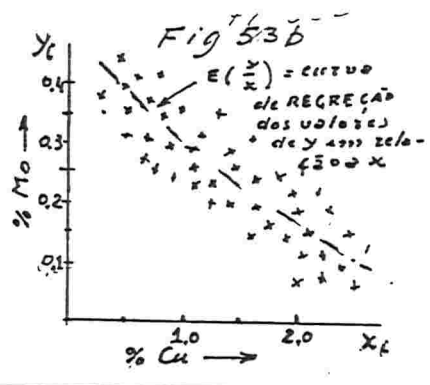


Fig. 53b - Diagrama observando-se Correlação

Na fig. 53b observa-se uma ordenação dos pontos do diagrama, indicando existência de CORRELAÇÃO (Negativa) entre os teores de Cu e Mo; Esses teores são variáveis DEPENDENTES. Na fig. 53a, não se observa CORRELAÇÃO, indicando INDEPENDÊNCIA das variáveis.

No caso em que as duas variáveis fossem totalmente aleatórias, e suas frequências se distribuíssem conforme o modelo NORMAL, e ambas as escalas das ordenadas e abscissas fosse a mesma, os pontos se distribuiriam no interior de uma elipse. No caso em que as duas variáveis fossem INDEPENDENTES os eixos da elipse seriam paralelos aos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente.

O ponto correspondente aos valores das médias aritméticas x_i e y_i seria o centro da elipse. No caso em que as variáveis fossem DEPENDENTES os eixos da elipse seriam inclinadas em relação aos eixos.

No caso em que as frequências dos valores das variáveis x e y , se distribuíssem conforme o modelo LOGNORMAL o mesmo aconteceria, desde que a escala das abscissas e das ordenadas fossem em escalas logarítmicas.

Essas propriedades são utilizadas para interpretação de amostragem geoquímica de solos ou de sedimentos de correntes (Ref. Motta Marques, 1978).

Nos casos de DEPENDÊNCIAS das variáveis a função da REGRESSÃO dos valores de uma variável em relação a outra dependente, poderá expressar-se no DIAGRAMA, mediante curva, de regressão, conforme mostra a figura 53b.

4.5.2. - COVARIÂNCIA ENTRE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO.

Define-se a COVARIÂNCIA de duas variáveis aleatórias pelo VALOR ESPERADO DOS PRODUTOS DOS DESVIOS DE SEUS VALORES POSSÍVEIS x e y EM RELAÇÃO AS SUAS RESPECTIVAS MÉDIAS μ_x e μ_y .

Anotando-se:

$$\text{COV}(x,y) = E[(x-\mu_x) \times (y-\mu_y)] \quad \text{expressão (53a)}$$

Outras notações equivalentes utilizadas para representar COVARIÂNCIA:

$$\text{COV}(x,y) = \sigma(x,y) = \sigma_{x,y}$$

O ESTIMADOR DA COVARIÂNCIA entre duas variáveis aleatórias x e y , anotado por $\text{COV}^*(x,y)$, é:

$$\text{COV}^*(x,y) = \frac{1}{N} \left[(x_i - \bar{x}_i) (y_i - \bar{y}_i) \right] \quad \text{expressão (53b)}$$

Na qual x_i e y_i são os N valores obtidos para as respectivas variáveis x e y ; \bar{x}_i e \bar{y}_i são os estimadores de suas médias (geralmente as médias aritméticas).

A COVARIÂNCIA é dita POSITIVA quando as duas variáveis x e y crescem ou decrescem juntas; é NEGATIVA, quando uma cresce quando a outra decresce.

A COVARIÂNCIA de duas variáveis x e y decresce em valores absolutos (positivos ou negativos) quando decresce a DEPENDÊNCIA entre elas; a COVARIÂNCIA tende para zero, atingindo esse limite, quando as variáveis são INDEPENDENTES (não havendo COVARIÂNCIA entre eles).

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

A COVARIÂNCIA entre duas variáveis aleatórias x e y , poderá ser estandarizada, dividindo-a pelo produto dos respectivos PARÂMETROS DE DISPERSÃO das mesmas, tendo-se:

$$\frac{\text{COV}(x,y)}{\sigma(x) \times \sigma(y)} = \frac{E[(x-\mu_x) \times (y-\mu_y)]}{\sigma(x) \times \sigma(y)} = \text{COVARIÂNCIA ESTANDARTIZADA}$$

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO r , é um ESTIMADOR da COVARIÂNCIA ESTANDARTIZADA, sendo expresso por:

$$r = \frac{\text{COV}^*(X,Y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{\frac{1}{N} \sum [(x_i - \bar{x}_i) \times (y_i - \bar{y}_i)]}{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2}{N}} \times \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2}{N}}}$$

expressão (54a)

na qual σ_x e σ_y são os desvios padrões (aritméticos) das variáveis x e y .

Simplificando-se ter-se-á :

$$r = \frac{\sum [(x_i - \bar{x}_i) \times (y_i - \bar{y}_i)]}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2 \times \sum (y_i - \bar{y}_i)^2}}$$

expressão (54b)

O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO é um número que pode variar entre (+1) e (-1); quando r se aproxima de (\pm) 1, significa máxima CORRELAÇÃO (ou COVARIÂNCIA), respectivamente, POSITIVA ou NEGATIVA. Quando r aproxima-se de ZERO, significa mínima CORRELAÇÃO, significando, no limite Zero, INDEPENDÊNCIA DAS VARIÁVEIS.

Esse parâmetro estatístico é utilizado em Pesquisa Mineral para avaliar quantitativamente relações de variabilidade entre atributos interessantes pesquisados, como por exemplo, a possível correlação entre teores de cada metal em um minério polimetálico: idem entre teores em metal útil e substância indesejável e etc.

Em Prospecção Geoquímica a correlação entre conteúdos em (ppm) dos elementos analisados, poderá definir quanto a significância de anomalias detectadas para dois elementos.

EXEMPLO Nº 26

Utilizando os dados do EXEMPLO Nº 2 (à página 20), de

amostragem de uma trincheira de pesquisa num jazimento mineralizado com cobre e ouro. Calculemos o coeficiente de correlação;

- r_{ZnCu} e r_{ZnAu} das acumulações para cobre e para ouro
 $ZnCu = (TnCu \times Wn)$ e $ZnAu = (TnAu \times Wn)$;

sendo $TnCu$ e $TnAu$ os respectivos teores em cobre e ouro das amostras, e Wn as espessuras amostradas (comprimento dos canais como foram tomadas as amostras).

Calculemos também os coeficientes de correlação :

- $r_{ZnCu, En}$ e $r_{ZnAu, En}$, das respectivas acumulações em cobre e em ouro ($ZnCu$ e $ZnAu$), com as espessuras En medidas diretamente na estrutura do filão (como ele se apresenta à vista nas partes amostradas).

- Cálculo do coeficiente $r_{ZnCu, ZnAu}$

Ver Quadro nº 21, a seguir, contendo:

- Na 1ª coluna os números das amostras;
- Na 2ª coluna as acumulações $ZnCu$ (dados do Quadro nº 2, à página 21);
- Na 3ª coluna os desvios em relação a média dos valores de $ZnCu$, $dZnCu = (ZnCu - Média ZnCu)$;
- Na 4ª coluna os quadrados dos desvios $d(ZnCu)^2$;
- Na 5ª coluna as acumulações $ZnAu$ (dados do Quadro nº 2, à página 21);
- Na 6ª coluna, os desvios em relação a média dos valores de $ZnAu$, $dZnAu = (ZnAu - Média ZnAu)$;
- Na 7ª coluna os quadrados dos desvios $(dZnAu)^2$;
- Na 8ª coluna os produtos dos desvios $(dZnCu \times dZnAu)$.

QUADRO Nº 21

Am. Nº	ZnCu %Cu cm	dZnCu %Cu cm	(dZnCu) ² (%Cu cm) ²	ZnAu ppmAu cm	dZnAu ppmAu cm	(dZnAu) ² ppm ² Au cm	dZnCu dZnAu %Cu ppmAu cm ²
01	31.5	- 28.8	828.44	2205	+ 1256	1577536	36173
02	58.0	- 2.3	5.29	3662	+ 2713	7360369	6240
03	82.0	+ 21.7	470.89	3600	+ 2851	7027801	57527
04	120.0	+ 59.7	3564.09	5025	+ 4076	16613776	243337
05	80.0	+ 19.7	388.09	171	- 778	605284	15327
06	86.0	+ 25.7	660.49	192	- 757	5733049	19455
07	96.0	+ 35.7	1274.49	622	- 327	106929	11674
08	100.0	+ 39.7	1576.09	42	- 907	822649	36008
09	84.0	+ 23.7	561.69	375	- 574	328476	13604
10	102.0	+ 41.7	1738.89	360	- 569	346921	24561
11	27.8	- 31.5	992.25	675	- 274	75076	8631
12	27.8	- 32.4	1049.76	141	- 808	632864	26179
13	70.2	+ 9.9	98.01	1360	+ 401	160801	3970
14	8.1	- 52.2	2724.84	324	- 625	390625	32625
15	26.0	- 34.3	1176.49	57	- 892	795664	30598
16	21.0	- 39.3	1544.49	114	- 835	697225	32816
17	23.0	- 37.3	1391.29	242	- 707	498849	23371
18	19.0	- 41.3	1705.69	330	- 619	383161	25665
19	50.0	- 10.3	106.09	481	- 458	204764	4717
20	73.0	+ 12.7	161.29	540	- 409	167281	5194
21	50.0	- 10.3	106.09	114	- 835	697225	8601
22	24.0	- 36.3	1317.69	1500	+ 551	303601	20001
23	24.0	- 40.3	1624.09	270	- 679	461041	27364
24	77.0	+ 16.7	278.09	1312	+ 363	131769	6082
25	354.0	+ 293.7	86259.69	4087	+ 3136	9847044	928631
26	136.0	+ 75.7	5730.49	862	- 87	7569	6586
27	78.0	+ 17.7	313.29	517	- 432	186624	7646
28	84.0	+ 23.7	561.69	1125	+ 176	30876	4171
29	7.0	- 53.3	2840.89	58	- 891	793881	47490
30	4.0	- 56.3	3169.69	45	- 904	817216	50895
31	27.0	- 33.3	1108.89	677	- 272	73984	9056
32	48.0	- 12.3	151.29	1125	+ 176	30876	2165
33	62.0	+ 1.7	2.89	2062	+ 1113	1239769	1892
34	8.0	- 52.3	2735.29	150	- 799	638401	41788
35	24.0	- 36.3	1317.69	375	- 574	328476	20536
36	20.0	- 40.3	1624.09	285	- 664	440096	26759
37	23.0	- 37.3	1391.29	30	- 919	844561	34279
Σ	2332.5	(0)=-1.4	132552.76	35112	(0)= 1	56265109	+ 1485526
HKD	60.3	-	-	949	-	-	-

QUADRO Nº 22

Amostra Nº	Zh (cm)	dZh (cm)	(d Zh) ² (cm ²)	dZhCur dZh % Cur cm ²	dZhAu dZh ppm Au cm ²
01	40	- 19.46	378.69	+ 560.4	- 24442
02	50	- 9.46	89.49	+ 21.8	- 25665
03	50	- 9.46	89.49	+ 205.3	- 25078
04	50	- 9.46	89.49	- 564.8	+ 38559
05	50	- 9.46	89.49	- 166.4	+ 7360
06	50	- 9.46	89.49	+ 243.1	+ 7161
07	50	- 9.46	89.49	- 337.7	+ 3083
08	50	- 9.46	89.49	- 375.6	+ 8580
09	60	+ 0.54	0.29	+ 12.8	- 310
10	60	+ 0.54	0.29	+ 22.5	- 318
11	30	- 28.46	867.89	+ 928.0	+ 8072
12	30	- 28.46	867.89	+ 954.5	+ 23804
13	30	- 28.46	867.89	- 291.7	+ 11813
14	30	- 28.46	867.89	+ 1.537.8	+ 18413
15	50	- 9.46	89.49	+ 324.5	+ 8438
16	50	- 9.46	89.49	+ 371.6	+ 7899
17	50	- 9.46	89.49	+ 352.9	+ 6888
18	50	- 9.46	89.49	+ 390.7	+ 5856
19	50	- 9.46	89.49	+ 97.4	+ 4333
20	50	- 9.46	89.49	+ 120.1	+ 3969
21	50	- 9.46	89.49	+ 97.4	+ 7899
22	70	+ 10.54	111.09	- 424.6	+ 9908
23	70	+ 10.54	111.09	- 424.8	+ 9908
24	70	+ 10.54	111.09	+ 176.0	- 36226
25	80	+ 20.54	421.89	+ 6.032.6	+ 64455
26	80	+ 20.54	421.89	+ 363.6	+ 1787
27	80	+ 20.54	421.89	+ 249.8	+ 8873
28	70	+ 10.54	111.09	- 29.0	- 481
29	60	+ 0.54	0.29	- 30.4	- 488
30	60	+ 0.54	0.29	- 1.350.0	- 11027
31	100	+ 40.54	1.643.49	+ 6.6	+ 95
32	60	+ 0.54	0.29	+ 68.9	+ 45121
33	100	+ 40.54	1.643.49	- 28.2	+ 431
34	60	+ 0.54	0.29	- 1.417.6	- 23270
35	100	+ 40.54	1.643.49	- 21.8	- 359
36	60	+ 0.54	0.29	- 1.512.1	- 37258
37	100	+ 40.54	1.643.49	+ 6.536.6	+ 25311
Σ	2200	(0)=0.38	13.369.13	-	-
HKD	59.46	-	-	-	-

Aplicando a expressão (54b), fazendo:

$$(x_i - \bar{x}_i) = dZnCu \quad ; \quad (y_i - \bar{y}_i) = dZnAu \quad \text{tem-se :}$$

$$r_{ZnCu, ZnAu} = \frac{1485526 \text{ em ppm Au cm}^2}{\sqrt{132582,78 (\%Cu)^2 \times 562651109 (\text{ppm Au})^2 \text{ cm}^2}} =$$

$$r_{ZnCu, ZnAu} = + 0,54$$

O coeficiente +0,54 indica correlação positiva entre as acumulações em Cobre e Ouro, o que é coerente com o conhecimento da mineralização do depósito. O cobre e o Ouro, ocorrem predominantemente : O primeiro nos minerais sulfetos (como a calcopirita); e o segundo, associado aos sulfetos metálicos.

- Cálculo dos coeficientes de correlação r_{ZnCu, E_n} e r_{ZnAu, E_n} .

O quadro a seguir nº 22, mostra os resultados dos somatórios dos produtos dos desvios ($d E_n$), com os desvios $dZnCu$ e $dZnAu$. (Estes últimos calculados no quadro anterior nº 21).

Então na expressão (54b)

$$(x_i - \bar{x}_i) = dZnCu \quad ; \quad (y_i - \bar{y}_i) = dE_n \quad ; \quad \sum (d E_n)^2 = 13389,13 \text{ cm}^2$$

(Ver Quadro 22)

$$\sum (dZnCu \times dE_n) = + 6536,6 \% Cu \text{ cm}^2$$

(Ver Quadro 22)

$$\sum (dZnAu \times dE_n) = + 25311 \% Au \text{ cm}^2$$

(Ver Quadro 22)

$$\sum (x_i - \bar{x}_i)^2 = \sum (dZnCu)^2 = 132582,78 (\% Cu \times \text{cm}^2) \quad ;$$

(Ver Quadro 21)

$$\sum (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum (dZnAu)^2 = 56265109 \text{ ppm}^2 \text{ Au} \times \text{cm}^2 ;$$

(Ver Quadro 21)

Então:

$$r_{ZnCu, E_n} = \frac{+ 6536,6 \% \text{ Cu cm}^2}{\sqrt{132552,78 \%^2 \text{ Cu cm}^2 \times 13389,13 \text{ cm}^2}} = + 0,15$$

$$r_{ZnAu, E_n} = \frac{+ 25311 \text{ ppm Au cm}^2}{\sqrt{56265109 (\text{ppm})^2 \times 13389,13 \text{ cm}^2}} = + 0,03$$

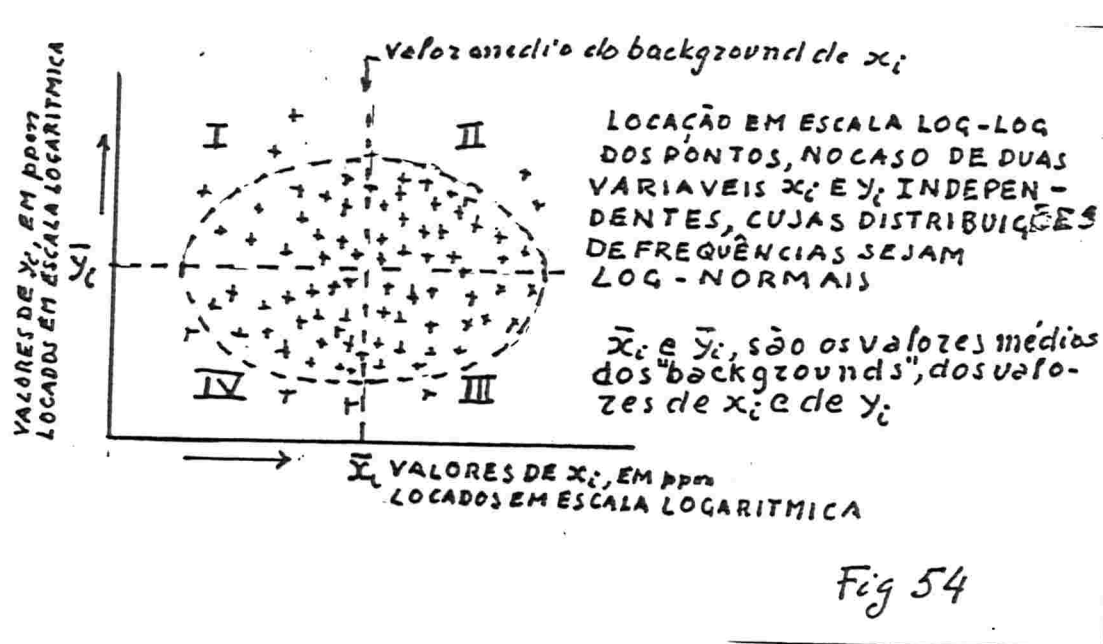
Ambos os coeficientes calculados, indicam que praticamente não existem correlações entre os conteúdos em Cobre ou em Ouro das amostras, com as espessuras da estrutura dos filão (como são observadas) nas partes amostradas.

Entretanto, sendo praticamente uniforme os comprimentos W_n dos canais das amostras (exceto das amostras de n^{os}. 01 e 11), seria de se esperar que houvessem grande correlação positiva entre os conteúdos em Cobre e em Ouro, com as espessuras E_n do filão (como observado), o que não acontece. Esse resultado indica que a mineralização ocorre também nas salbandas do veio, junto a rocha encaixante. Esse foi o motivo pelo qual foi adotado o critério de tomada das amostras com comprimentos dos canais W_n maiores do que E_n . Os coeficientes de correlação r_{ZnCu} e r_{ZnAu, E_n} , foram úteis para comprovar que esse critério de amostragem foi adequado.

PROCEDIMENTO GRÁFICO PARA CALCULAR O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO.

O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO poderá também ser calculado, mediante procedimento baseado no DIAGRAMA DE CORRELAÇÃO dos atributos pesquisados (x_i e y_i).

Admitindo-se que as duas variáveis pesquisadas sejam distribuídas conforme o modelo LOG NORMAL (como se admite em prospecção geoquímica); locando-se em papel Log-Log os valores (x_i e y_i) obtém-se o DIAGRAMA DE CORRELAÇÃO como mostra a fig. 54.



Levantando-se perpendiculares a partir dos valores dos antilog do valor médio dos log (x_i) e dos log (y_i) (locados em escala logarítmica), isto é, dos valores dos respectivos "background" de (x_i e y_i); o diagrama ficará dividido nos quadrantes I, II, III e IV, como mostra a fig. 54.

Contando-se N_1 igual ao número de pontos locados nos quadrantes I e III, e N_2 igual ao número de pontos locados nos quadrantes II e IV; o COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO (r) será obtido

pelo seno do ângulo (medido em radianos), dado pela fórmula :

$$r = \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \times \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right] \quad \text{expressão (55)}$$

Observação:

Esse procedimento é usado em Prospecção Geoquímica, indicando-se para consulta Ref. Motta Marques, 1978.

Na prática não é necessário a locação gráfica dos pontos no diagrama, desde que se conheça os respectivos "backgrounds" de (x_i e y_i). A partir dos dados do problema:

Chamando-se \bar{x}_i "background" dos valores de x_i e \bar{y}_i o "background" dos valores de y_i ;

N_1 será o número de amostras com valores $x_i < \bar{x}_i$ e $y_i > \bar{y}_i$, mais o número de amostras com valores $x_i > \bar{x}_i$ e valores $y_i < \bar{y}_i$;

N_2 será o número de amostras em $x_i < \bar{x}_i$ e $y_i < \bar{y}_i$, mais aqueles com $x_i > \bar{x}_i$ e $y_i > \bar{y}_i$.

Esse procedimento é correntemente usado na determinação de (r), em prospecção geoquímica.

EXEMPLO N° 27

Na interpolação dos dados das campanhas de prospecção geoquímica mediante amostras de solos, que foram utilizados para o EXEMPLO N° 13 (à página 113); com os valores das análises das amostras em ppm Zn sendo os valores x_i e os valores das análises das amostras em ppm Cu sendo dos valores y_i :

Conclui-se ser 33 ppm Zn, o valor médio \bar{x}_i do "background" para ppm Zn (ver página 119) e ser 6 ppm Cu, o valor médio \bar{y}_i do "background", para ppm Cu (ver na figura 52 à página 112).

Contando-se os pontos nos quatro quadrantes I,II,III e IV como acima foi explicado, obteve-se :

$$N_1 = 882 \quad \text{e} \quad N_2 = 1628$$

Calculando-se então:

$$r = \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \times \frac{883 - 1628}{883 + 1628} \right] = \text{sen} \left[0,30 \times \frac{\pi}{2} \right] = - 0,45$$

Finalmente conclui-se haver sensível correlação negativa entre os teores ppm Cu e ppm Zn nos pontos amostrados.

4.5.3. EXPRESSÕES MATEMÁTICAS PARA COMPUTAÇÃO DE VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS; EQUAÇÃO DE KRIGE.

Para compreender a Equação de Krige é necessário o conhecimento das expressões que se seguem :

- VARIÂNCIA do produto de uma constante (a) por uma variável (x); $\tau^2(ax)$, sendo a VARIÂNCIA de $x = \tau^2(x)$

$$\tau^2(ax) = a^2 \tau^2(x) \quad \text{expressão (56)}$$

- Variância de $(x + y)$ e de $(x - y)$, da adição e da diferença de duas variáveis x e y , sendo as variâncias dessas variáveis $\text{VAR } x = \tau^2(x)$, $\text{VAR } y = \tau^2(y)$, e a covariância das mesmas $\text{COV}(x,y) = \tau(x,y)$:

$$\text{VAR}(x + y) = \tau^2(x + y) = \tau^2(x) + \tau^2(y) + 2\tau(x,y) \quad \text{expressão (57)}$$

$$\text{VAR}(x - y) = \tau^2(x - y) = \tau^2(x) + \tau^2(y) - 2\tau(x,y) \quad \text{expressão (58)}$$

- COVARIÂNCIA, da soma de duas variáveis $(x + y)$, com uma terceira variável z ; sendo as COVARIÂNCIAS de x com z , e de y com z , respectivamente $\text{COV}(x,z) = \tau(x,z)$ e $\text{COV}(y,z) = \tau(y,z)$:

$$\text{COV} \left[(x + y), z \right] = \tau \left[(x + y), z \right] = \tau (x, z) + \tau (y, z)$$

expressão (59)

VARIÂNCIA de uma combinação linear do tipo:

$$\text{VARIÂNCIA} \left[\sum_{j=1}^{j=n} a_j x_j \right] = \tau^2 \left[\sum_{j=1}^{j=n} a_j x_j \right]$$

Isto é variância de um somatório dos produtos $(a_j x_j)$, em que $j=1, 2, 3, \dots, j, k, \dots, n$; quando x_j são variáveis dependentes entre si, e que as covariâncias entre elas sejam :

$$\text{COV} (x_1, x_2), \text{COV} (x_1, x_3), \dots, \text{COV} (x_1, x_j), \dots, \text{COV} (x_2, x_3), \dots$$

$$\text{COV} (x_2, x_4), \dots, \text{COV} (x_2, x_j), \dots, \text{COV} (x_3, x_4), \dots, \text{COV} (x_3, x_j), \dots$$

$$\text{COV} (x_j, x_k), \dots, \text{COV} (x_j, x_{k+1}), \dots;$$

ou sejam genericamente $\text{COV} (x_j, x_k)$;

a_j , representando uma sequência de fatores constantes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, a_k, \dots$, dos produtos $(a_j a_k)$ como foram definidos.

Tem-se conforme duas notações equivalentes :

$$\text{VAR} \left[\sum_{j=1}^{j=n} (a_j x_j) \right] = \sum_j \sum_{k=j+1} a_j a_k \text{COV} (x_j, x_k) ;$$

expressão (60)

OU

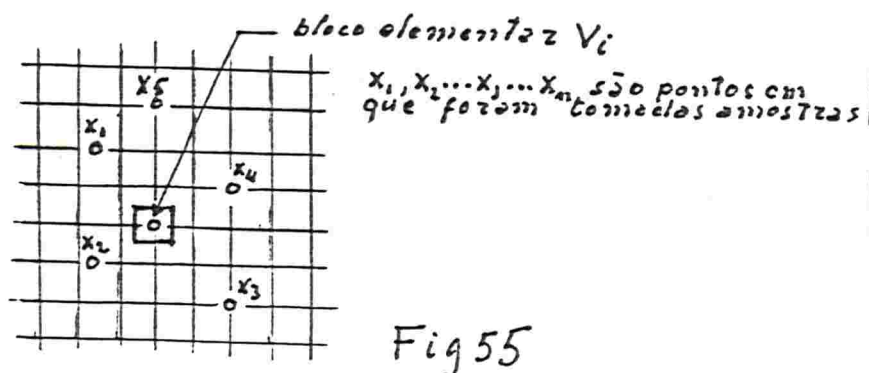
$$\tau^2 \left[\sum_{j=1}^{j=n} (a_j x_j) \right] = \sum_j \sum_{k=j+1} a_j a_k \tau (x_j, x_k) ;$$

expressão (60)

EQUAÇÃO DE KRIGE

Essa equação exprime as relações da VARIÂNCIA DO ERRO de ESTIMAÇÃO ϵ_1 , do teor de um bloco elementar V_i do parcelamento da reserva de um corpo de minério. Chamaremos o teor verdadeiro desse bloco elementar $Z(V_i)$.

Suponhamos, como mostra a fig. 55, que no mesmo corpo de minério, foram tomadas amostras nos pontos X_1, X_2, \dots, X_j , externamente ao bloco elementar V_i , e situados à diferentes distâncias (conhecidas) até o centro do bloco V_i .



Para simplicidade, representou-se na fig. 55 o bloco elementar V_i e as amostras X_j num mesmo plano; entretanto sem alterar o raciocínio que se segue, o bloco V_i e cada uma das amostras X_j poderiam estar em diferentes planos e a figura seria tridimensional (ver também fig. 59 à página 186).

Suponhamos que após analisadas as amostras X_j , obtiveram-se os teores que chamaremos $Z(X_1) = x_1$; $Z(X_2) = x_2$; $Z(X_3) = x_3$; \dots ; $Z(X_j) = x_j$.

Em qualquer procedimento analítico de ESTIMAÇÃO do teor do bloco V_i , mediante as análises das amostras X_j , o critério adotado será sempre o seguinte:

O teor médio do bloco V_i , sempre será um somatório dos teores das amostras, ponderando-se cada uma, por um fator a_1, a_2, \dots, a_j . Esses fatores são estabelecidos conforme o critério

particular do método de estimação utilizado. Então, para qualquer método analítico de estimação tem-se :

$$\begin{aligned} Z^* (V_i) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j + \dots = \sum_{j=1}^{j=n} a_j x_j \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} a_j Z(x_j) \end{aligned}$$

$Z^* (V_i)$ é o TEOR ESTIMADO para o bloco elementar (de acordo com o critério do procedimento de avaliação utilizado).

Então o erro cometido na estimação ϵ_i do bloco elementar V_i será sempre:

$$\epsilon_i = Z(V_i) - Z^*(V_i) \quad ; \quad \text{sendo } Z(V_i) \text{ o verdadeiro teor e } Z^*(V_i) \text{ o teor estimado.}$$

A VARIÂNCIA ϵ_i do erro de estimação será então :

$$\text{VAR}(\epsilon_i) = \tau^2 \epsilon_i = \text{VAR} \left[Z(v_i) - Z^*(V_i) \right] =$$

$$\text{VAR}(\epsilon_i) = \tau^2 \left[Z(v_i) - \sum_{j=1}^{j=n} a_j x_j \right]$$

Conforme a Expressão (58) da VARIÂNCIA da diferença de duas variáveis tem-se:

$$\tau^2(\epsilon_i) = \tau^2 \left[Z(v_i) \right] + \tau^2 (\sum_j a_j x_j) - 2 \tau \left[Z(V_i), \sum_j a_j x_j \right]$$

ou de forma análoga, com a expressão (59)

$$\tau^2(\epsilon_i) = \tau^2 \left[Z(v_i) \right] + \tau^2 (\sum_j a_j x_j) -$$

$$- 2 \sum_j a_j \tau \left[Z(V_i), x_j \right]$$

expressão (61)

Substituindo-se a variância do somatório dos produtos

lineares $\sum_j a_j x_j$, conforme a expressão (60), tem-se finalmente:

$$\begin{aligned} \tau^2 (\varepsilon_i) = \tau^2 \left[Z (v_i) \right] + \sum_j \sum_k a_j a_k \tau (x_j, x_k) - \\ - 2 \sum_j a_j \tau \left[Z (v_i), x_j \right] \end{aligned}$$

expressão (61)

Com outra notação equivalente, a expressão (61), poderá ser anotada :

$$\begin{aligned} \text{VAR} (\varepsilon_i) = \text{VAR} \left[Z (v_i) \right] + \sum_j \sum_k a_j a_k \text{COV} (x_j, x_k) - \\ - 2 \sum_j a_j \text{COV} \left[Z (v_i), x_j \right] \end{aligned}$$

A expressão (61), é a que se denomina a EQUAÇÃO DE KRIGE. Ela foi desenvolvida pelo pesquisador D.G. KRIGE, anteriormente aos trabalhos de MATHERON, o qual aplicou desenvolvendo por sua vez, os métodos analíticos de avaliação dos teores dos blocos elementares, conhecidos como métodos GEOESTATÍSTICOS. Mais particularmente, esses métodos são chamados de KRIGAGEM (correspondente português do nome inglês "KRIGING METHOD"). A KRIGAGEM, fundamenta-se na determinação dos fatores de ponderação a_j de modo à minimizar a VARIÂNCIA DO ERRO DE ESTIMAÇÃO ε_i , dos blocos elementares, e em consequência, otimizar a qualidade da avaliação. No final deste texto (ver item 5.4.5, à página 215), se voltará a abordar o método de KRIGAGEM, mostrando seus fundamentos, baseados na equação de KRIGE.

5. MÉTODOS ANALÍTICOS PARA CUBAR CORPOS DE MINÉRIO, E FUNDAMENTOS DE GEOESTATÍSTICA.

5.1 GENERALIDADES COM RESPEITO AOS MÉTODOS ANALÍTICOS.

O uso de computadores levou ao desenvolvimento de procedimentos para arquivar os dados de amostragem nas memórias dos mesmos e também ao desenvolvimento de programas capazes de executar as rotinas da interpretação.

Presentemente existem "softwares", para tratamento estatístico dos resultados de amostragem, e também para tratamento mediante critérios geométricos (objetivando correlações, delimitações de blocos e cubagens).

Ao lado dos processos computadorizados das rotinas dos métodos chamados geométricos de cubagem, os computadores facilitaram soluções analíticas, em muitos casos, mais adequadas.

As metodologias dessas soluções constituem o que se denomina métodos analíticos.

Por sua vez os métodos analíticos vem progredindo no sentido da racionalidade e da sofisticação.

Assim os critérios de extrapolação dos resultados obtidos mediante amostragem em pontos do jazimento, os quais são básicos na Pesquisa Mineral, evoluíram:

- Nos métodos geométricos, geralmente é adotado o critério da Meia Distância. Nesse os resultados são extrapolados uniformemente até a metade da distância de uma outra amostra vizinha; mais raramente é admitido o critério de considerar que os valores variem de forma linear e inversamente proporcional, às distâncias da extrapolação;

Já no método analítico "DOS INVERSOS QUADRADOS", o mais simples dos métodos analíticos, admite-se que os atributos analisados numa amostra variem inversamente com o quadrado das distâncias;

As primeiras evoluções dos métodos analíticos, consistiram em admitir variação inversamente proporcional a uma

determinada potência da amostra, sendo e expoente m dessa potência, ajustado para as características do jazimento (através do melhor ajustamento com as informações obtidas no conjunto da amostragem);

Com esses mesmos critérios, em certos casos, considera-se diferentes valores para o expoente m , para diferentes direções; isso para ajustar às condições de variabilidade dos depósitos que apresentem anisotropia de suas qualidades com as direções;

Nos métodos analíticos chamados GEOESTATÍSTICOS, os mais sofisticados, são consideradas as VARIÂNCIAS e as COVARIÂNCIAS dos valores obtidos na amostragem.

No critério GEOESTATÍSTICO chamado de KRIGAGEM, procura-se minimizar a VARIÂNCIA DO ERRO DE ESTIMAÇÃO. Para isso, quando se estima um atributo para um bloco de minério, mediante extrapolação de valores de várias amostras, adota-se média ponderada para fatores diferenciados, os quais são estabelecidos em função das COVARIÂNCIAS das amostras mediadas. As COVARIÂNCIAS são expressões das variabilidades do depósito pesquisado, conforme são conhecidas, na Teoria das VARIÁVEIS REGIONALIZADAS a qual fundamenta a GEOESTATÍSTICA.

De modo geral, os métodos analíticos tem-se mostrado mais adequados que os métodos geométricos, nas avaliações de jazidas de relativa uniformidade, isto é, quando os condicionamentos tectônicos são relativamente simples. São mais úteis nas fases avançadas da pesquisa, quando se dispõe de grande número de informações (obtidas na amostragem). Nessas condições as precisões dos resultados são melhores. Em jazimentos filonianos muito complexos, suas aplicações são mais restritas, pelo menos nos atuais estágios do desenvolvimento desses métodos analíticos. Considera-se entretanto, que os métodos analíticos foram concebidos e foram desenvolvidos a partir da década de 1960, e muita pesquisa continua sendo feita para aperfeiçoá-los.

5.2. SIMULAÇÃO DOS CORPOS DE MINÉRIO NAS MEMÓRIAS DOS COMPUTADORES, E METODOLOGIA GERAL, DE CUBAGEM POR MÉTODOS ANALÍTICOS.

Para armazenar as informações obtidas na pesquisa nas memórias dos computadores, como sejam das estruturas geológicas, das litologias, dos teores e de outros atributos interessantes, são feitas discretizações paramétricas das informações, para blocos elementares idealizados. Esses são delimitados e espacialmente situados, através dos parâmetros numéricos de suas coordenadas.

O conjunto dos blocos elementares, assim concebidos e simulados na memória do computador, torna-se representativo do corpo de minério, conforme ele é "visto" através das informações obtidas na amostragem, e do mapeamento topogeológico.

A fig. 56 procura mostrar como são feitas as parametrizações das qualidades do corpo de minério, através de blocos elementares discretando informações estruturais.

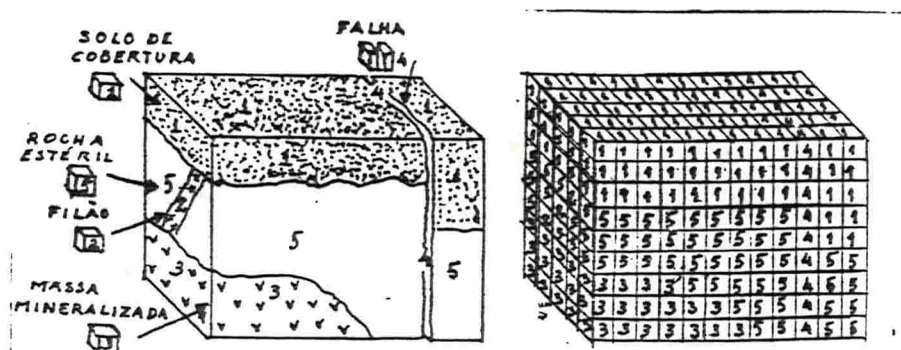


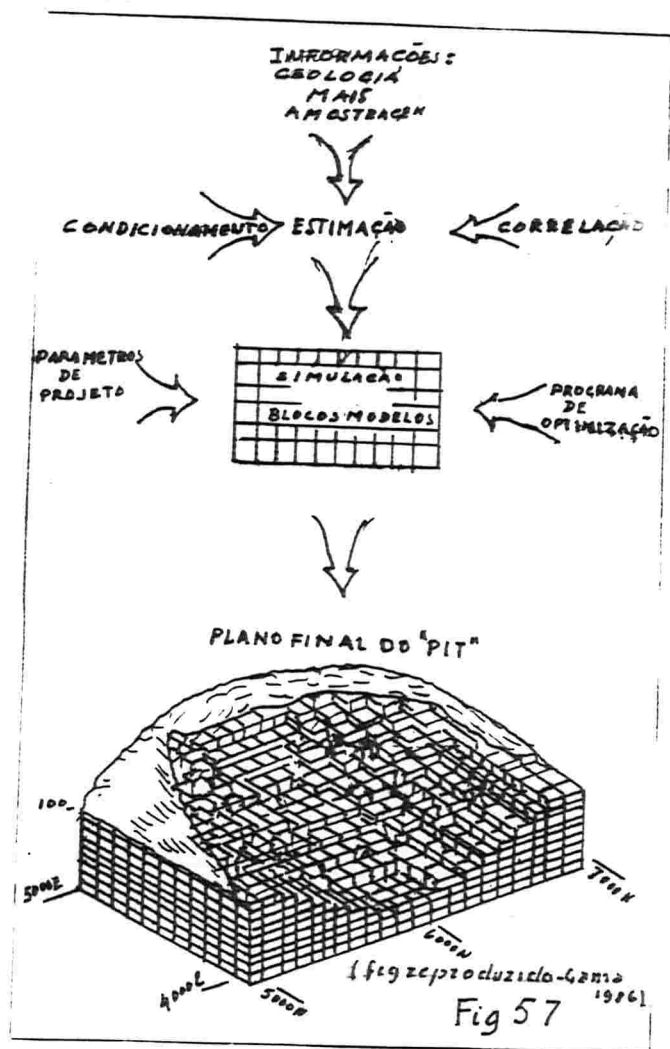
Fig 56 DISCRETAÇÃO DAS INFORMAÇÕES COM RESPEITO A ESTRUTURA GEOLÓGICA, PARA ARMAZENAMENTO NA MEMÓRIA DO COMPUTADOR
(Fig. reproduzida de Gemo 1986)

De modo geral o fracionamento idealizado, em blocos elementares do corpo de minério, será de modo que cada um dos blocos

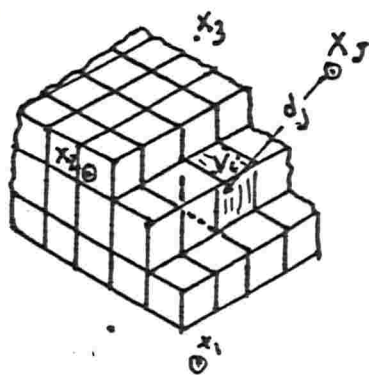
elementares constitua-se no menor volume praticável, para assimilar a discretização das informações com respeito à :

- Um determinado teor ;
- Uma continuidade geológica ;
- Uma tonelagem (essa condicionada pelas capacidades dos equipamentos e tempo de extração e de outros parâmetros do projeto de lavra previsto).

A fig. 57 representa um fluxograma geral de uma simulação de um corpo de minério, finalizando com o projeto de um "pit" de mineração à céu aberto.



A fig. 58 representa uma secção como é obtida por computação, num projeto de " OPEN PIT " de mineração em que foram considerados, parâmetros relacionados aos teores de



- Teores conhecidos nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_j = Z(x_j)$
- Teor estimado para um bloco V_i
 - $Z^*(V_i) = \sum_j a_j Z(x_j)$
- a_1, a_2, \dots, a_j são fatores de ponderação para a medição.

Fig 59

Conforme mostrado na fig. 59, o problema consistirá em estimar o teor x_i de um determinado bloco V_i , o qual chamamos $Z^*(V_i)$. A estimação será feita através dos N valores conhecidos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n$, obtidos das análises de amostras as quais foram tomadas nos pontos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_j, \dots, X_n$. Esses teores são função das respectivas situações espaciais das amostras podendo-se escrever, de modo geral que :

$$x_j = Z(X_j)$$

A estimação $Z^*(V_i)$ do teor do bloco, sempre será obtida através de um somatório, conforme a expressão seguinte :

$$\begin{aligned} Z^*(V_i) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_j x_j + \dots + a_n x_n = \\ &= \sum_{j=1}^{j=N} a_j Z(X_j) \end{aligned}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, \dots, a_n$, serão fatores de ponderação atribuídos aos teores x_i obtidos, nas análises das amostras $Z(X_j)$.

O critério com que são atribuídos os fatores a_j referidos, constituem a essência do método analítico de cubagem utilizado.

Entretanto, seja qual for o critério (ou método) utilizado, para atribuir os fatores a_j , será condição essencial, que :

$$E \left[\sum_{j=1}^{j=N} a_j x_j \right] = E [x] = \mu ;$$

Isto é :

O valor esperado do somatório dos produtos $(a_j \times x_j)$ deverá ser igual ao valor esperado dos valores das amostras, o qual por sua vez deverá ser igual a verdadeira média μ desses valores. Isso não acontecendo a medição utilizada será tendenciosa. Conseqüentemente, sempre $\sum_{j=1}^{j=N} a_j = 1$. Essa é condição primeira e essencial, para que o critério (ou um método da estimação) não seja tendencioso, ou que ele seja IMPARCIAL.

5.3. MÉTODO " DOS INVERSOS EXPOENTES DAS DISTÂNCIAS "; " MÉTODO DOS INVERSOS QUADRADOS ".

5.3.1. FUNDAMENTOS DO MÉTODO

Admite-se que teores em diversos pontos do jazimento, sejam variáveis DEPENDENTES entre si, desde que os pontos estejam separados por distâncias menores, do que convencionam-se chamar RAI0 DA ÁREA DE INFLUÊNCIA. É racional admitir-se que as relações de dependência sejam uma função da distância. Essa função é desconhecida. No método DOS INVERSOS DAS DISTÂNCIAS, admite-se como aproximação, que a função seja proporcional a um expoente inverso das distâncias.

Assim, se tivermos um bloco elementar V_i , como o representado na fig. 60, e fossem tomadas N amostras, (cujos teores x_j conhecidos das análises) fossem tomados nos pontos X_j (dentro do RAI0 DA ÁREA DE INFLUÊNCIA R do centro do bloco V_i); sendo d_j as respectivas distâncias dos pontos X_j ao centro do bloco V_i (para $j=1,2,3,\dots,j,\dots$).

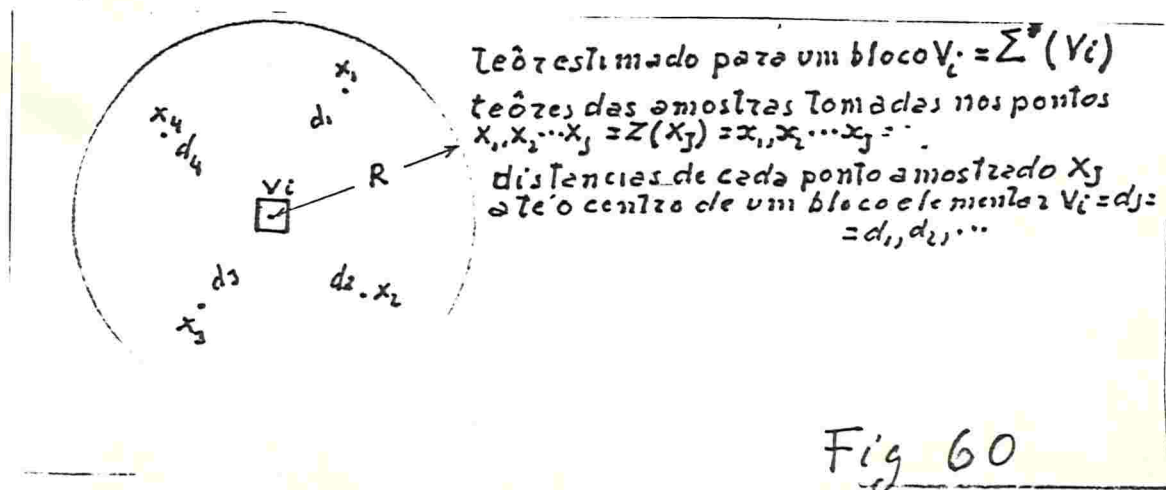


Fig 60

Situando-se V_i dentro das áreas de influência das N amostras X_j , é racional que se estime o teor do bloco V_i (isto é, o valor $Z^*(V_i)$), mediante uma média ponderada, expressando as influências de cada uma das amostras, admitidas inversamente relacionadas as respectivas distâncias, como a que se segue:

$$Z^*(V_i) = \frac{\frac{1}{d_1^m} x_1 + \frac{1}{d_2^m} x_2 + \frac{1}{d_3^m} x_3 + \dots + \frac{1}{d_j^m} x_j + \dots}{\sum \frac{1}{d_j^m}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{d_1^m}}{\sum_1^N \frac{1}{d_1^m}} x_1 + \frac{\frac{1}{d_2^m}}{\sum_1^N \frac{1}{d_2^m}} x_2 + \dots + \frac{\frac{1}{d_j^m}}{\sum_1^N \frac{1}{d_j^m}} x_j$$

$$= \frac{\sum \frac{1}{d_j^m} x_j}{\sum \frac{1}{d_j^m}} ; \quad \text{Expressão (62 a)}$$

chamando-se α_j os fatores da ponderação :

$$\alpha_j = \frac{\frac{1}{d_j^m}}{\sum \frac{1}{d_j^m}} ; \text{ tem-se}$$

$$Z^*(V_i) = \sum \alpha_j x_j ; \quad \text{Expressão (62 b)}$$

As expressões (62 a e b) definem o critério da extrapolação dos valores das amostras x_j para o bloco V_i , ou seja, definem o chamado MÉTODO DOS EXPOENTES DAS DISTÂNCIAS.

Evidentemente $\sum_{j=1}^{j=N} \alpha_j = 1$. Na fig. 60 representou-se num mesmo plano as situações das amostras x_j e do bloco V_i , porém poderiam estar em diferentes planos, sem alterar o raciocínio com que foram estabelecidas as expressões (62 a e b). Nessa caso R seria definido como o raio das " esferas de influência ".

O raio de influência R das amostras poderá ser estabelecido com base na experiência local (da mesma forma com que é estabelecido nos métodos geométricos).

Com o desenvolvimento do conceito GEOESTATÍSTICO de VARIOGRAMA, obteve-se um critério matemático para estabelecer o raio de influência R (ver em noções de GEOESTATÍSTICA, no item 5.4.2 à página 204). O expoente m , da função exponencial também deverá ser previamente estabelecido. No método dos INVERSOS QUADRADOS, m é ARBITRARIAMENTE estabelecido $m=2$; entretanto foram desenvolvidas técnicas para estabelecer o valor ou os valores do expoente m , de modo a que o mesmo seja ajustado as condições de variabilidade do jazimento. Essas técnicas serão abordadas mais adiante.

5.3.2. MÉTODO DOS INVERSOS QUADRADOS

Nos primórdios da utilização dos métodos analíticos, convencionou-se considerar $m=2$, dando origem ao chamado MÉTODO DOS INVERSOS QUADRADOS, o qual ainda é muito utilizado na prática.

Esse critério de considerar que os teores variem inversamente com o quadrado das distâncias, explica-se somente por analogia admitida, com a lei universal da Física de atração das massas.

Esse método constitui um caso particular, simplificado, do método dos INVERSOS DOS EXPOENTES.

EXEMPLO N° 28

Tendo-se num determinado nível do corpo de minério, 4 amostras nos pontos x_1 , x_2 , x_3 , e x_4 , cujas situações sejam dadas pelas suas coordenadas :

$$X_1 = \begin{cases} 140 \text{ m N} \\ 150 \text{ m E} \end{cases} ; \quad X_2 = \begin{cases} 174 \text{ m N} \\ 169 \text{ m E} \end{cases} ;$$

$$X_3 = \begin{cases} 110 \text{ m N} \\ 240 \text{ m E} \end{cases} ; \quad X_4 = \begin{cases} 80 \text{ m N} \\ 120 \text{ m E} \end{cases}$$

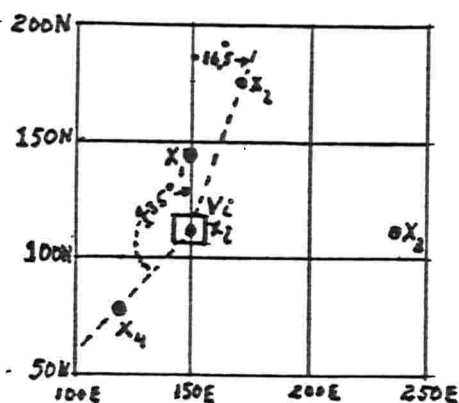


Fig 61

Queremos estimar, através de seu ponto central X_i , de coordenadas $X_i = \begin{cases} 110 \text{ m N} \\ 150 \text{ m E} \end{cases}$, o teor Z^* (V_i) de um bloco que chamamos V_i .

Os teores X_j das amostras, sendo :

$$x_1 = Z (X_1) = 0,50 \% \text{ Cu} ; \quad x_2 = Z (X_2) = 1,20 \% \text{ Cu} ;$$

$$x_3 = Z (X_3) = 0,40 \% \text{ Cu} ; \quad x_4 = Z (X_4) = 0,60 \% \text{ Cu} .$$

As distâncias d_j , entre os pontos amostrados e o ponto X_i ,

serão :

$$d_1 = d_{X_1} - X_i = \sqrt{(140 - 110)^2 + (150 - 150)^2} = \sqrt{30^2} = 30 \text{ m}$$

$$d_2 = d_{X_2} - X_i = \sqrt{(170 - 110)^2 + (169 - 150)^2} = \\ = \sqrt{(60 - 19)^2} = 62,94 \text{ m}$$

$$d_3 = d_{X_3} - X_i = \sqrt{(110 - 110)^2 + (240 - 150)^2} = \sqrt{90^2} = 90 \text{ m}$$

$$d_4 = d_{X_4} - X_i = \sqrt{(80 - 110)^2 + (120 - 150)^2} = \\ = \sqrt{(30^2 - 30^2)} = 42,43 \text{ m}$$

No método dos INVERSOS QUADRADOS, $m=2$;

Os fatores da ponderação a_j , da expressão (62 a e b)

$$a_j = \frac{\frac{1}{d_j^2}}{\sum \frac{1}{d_j^2}} \quad , \text{ serão :}$$

$$a_1 = 0,544 \quad ; \quad a_2 = 0,124 \quad ; \quad a_3 = 0,060 \quad ; \quad a_4 = 0,272 \\ \text{tendo-se } \sum_1^4 a_j = 0,544 + 0,124 + 0,060 + 0,272 = 1,000$$

Então :

$$Z^* (V_i) = Z (X_j) = \sum_{j=1}^{j=4} a_j \times Z (X_j)$$

O teor estimado para o bloco V_j , pelo método dos INVERSOS QUADRADOS, será então :

$$Z^* (V_i) = 0,544 \times 0,50 \% \text{ Cu} + 0,124 \times 1,20 \% \text{ Cu} + \\ + 0,060 \times 0,40 \% \text{ Cu} + 0,272 \times 0,60 \% \text{ Cu} = \\ = 0,608 \cong 0,61 \% \text{ Cu}$$

Observação :

Nesse exemplo (observando-se a fig. 60), nota-se que as amostras X_1 e X_2 foram tomadas aproximadamente numa mesma direção (direção contendo o centro de V_i , e as duas amostras referidas).

Isso significa que as influências segundo essa direção das duas amostras se superpõe. Por isso é racional desconsiderar-se o valor da amostra x_2 , a qual em linguagem figurada, diz-se que está na SOMBRA DA AMOSTRA X_1 . Refazendo-se o cálculo com este último critério (excluindo a amostra X_2), tem-se :

$$Z^*(V_i) = \frac{\frac{1}{30^2} \times 0,5\% \text{ Cu} + \frac{1}{90^2} \times 0,4\% \text{ Cu} + \frac{1}{(42,43)^2} \times 0,60\% \text{ Cu}}{\frac{1}{30^2} + \frac{1}{90^2} + \frac{1}{(42,43)^2}}$$

$$a_1 = \frac{\frac{1}{30^2}}{\frac{1}{30^2} + \frac{1}{90^2} + \frac{1}{(42,43)^2}} = 0,6207$$

$$a_2 = 0,0690 \quad ; \quad a_3 = 0,3103$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$Z^*(V_i) = 0,6207 (0,5\% \text{ Cu}) + 0,0690 (0,40\% \text{ Cu}) + 0,3103 (0,60\% \text{ Cu})$$

$$Z^*(V_i) = 0,52\% \text{ Cu} \quad ; \quad \text{esse resultado é mais verossímil.}$$

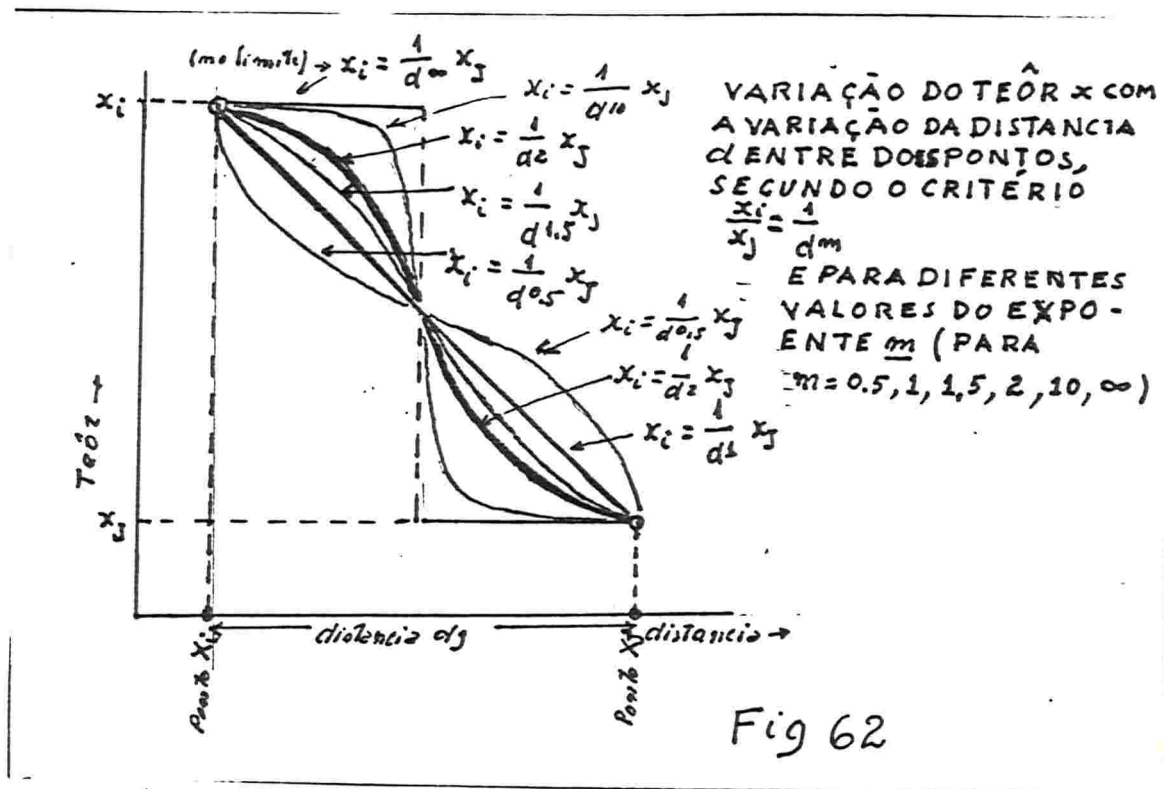
Na publicação referida Hughes, W 1979 Society of Mining Engineers (editor), é recomendado o seguinte critério para exclusão de amostra : Exclusão de amostras que estejam dentro de um ângulo menor do que 18° (ângulo definido pelo vértice no

centro do bloco, e os lados definidos pela localização das duas amostras). No exemplo da fig. 61, o ângulo $(X_1 \hat{v}_i X_2)$ é igual aproximadamente $16,5^\circ$.

Sendo $16,5^\circ < 18^\circ$, a amostra x_2 deverá ser desconsiderada (de acordo com a recomendação citada).

Além disso num caso em que as amostras estivessem situadas praticamente para um lado do bloco, a estimação do teor do mesmo seria melhor definido como resultado de uma extrapolação, em lugar de uma interpolação, como seria desejado. Na publicação citada da Society of Mining Engineers, Hughes W. 1979 é recomendada que as amostras estejam distribuídas em torno do bloco, de modo que o maior ângulo seja menor do que 160° . Na fig. 61 esse ângulo é de 135° , indicando distribuição espacial das amostras aceitável.

5.3.3. SIGNIFICADO DO EXPOENTE m , NA PONDERAÇÃO PELOS INVERSOS DAS DISTÂNCIAS.



Tendo-se dois pontos de um jazimento X_i e X_j , separados por uma distância d_j , e cujos teores variem entre esses dois pontos, segundo um modelo de variação em proporção inversa da potência m da distância, isto é, segundo uma função $\left[\frac{1}{d^m} x \right]$ para $m=0,1, m=1, m=2, \dots, m=10; \dots$; poderia-se representar as diversas funções de variação em um gráfico como mostra a fig. 62.

Para $m=1$, a variação seria retilínea linear; para valores de $m=1,5; 2; \dots; 10; \dots$, a variação seria segundo curvas exponenciais; no limite para $m=\infty$, função seria descontínua com variação zero, e os teores seriam invariáveis. Nos métodos geométricos admite-se geralmente a interpolação segundo a REGRA DA MEIA DISTÂNCIA, o que corresponde adotar este último modelo. Ocasionalmente adota-se também o modelo de variação linear com $m=1$, nos métodos geométricos.

No método dos INVERSOS QUADRADOS, admite-se variação como modelo de $m=2$. No método genérico dos INVERSOS EXPOENTES DAS DISTÂNCIAS, adota-se expoente $m=0,1; 0,2; 0,3; \text{ ou } 0,5; 2; \dots 3$.

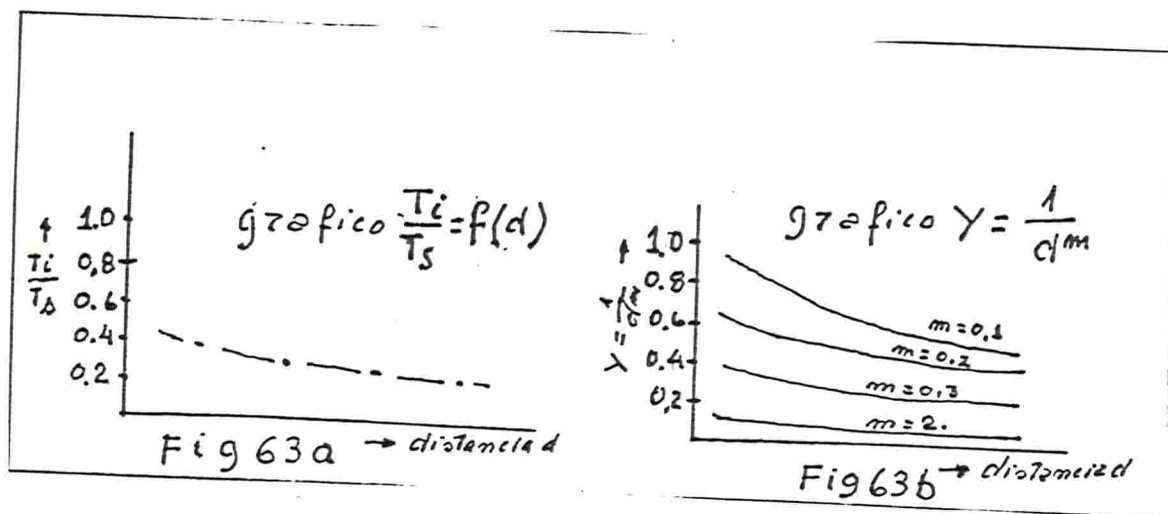
Adota-se um valor de "m" que mais se ajuste ao jazimento, sendo esse valor pesquisado com base na amostragem disponível. Muitas vezes para um mesmo jazimento, a pesquisa do valor m , levará a dois valores diferentes, segundo duas direções principais do corpo de minério; ou mesmo à tres valores diferenciados, para tres direções principais. Nesses casos os diferentes valores de m ajustando-se às diferentes direções, decorrem das características anisotrópicas de variabilidade do jazimento.

5.3.4. PROCEDIMENTOS PARA PESQUISAR O VALOR DO EXPOENTE m , QUE MAIS SE AJUSTE AS CARACTERÍSTICAS DOS JAZIMENTOS.

No tratado referido da Society of Mining Engineers - em Hughes 1979 são explicadas duas técnicas para a pesquisa do

valor a ser fixado para o expoente m , as quais serão reproduzidas resumidamente:

Técnica 1 - Num determinado nível de um depósito pesquisado (como por exemplo, mediante os resultados de uma malha de sondagem), é construído um gráfico como mostra a fig. 63a.



Para isso, fixando-se um ponto, loca-se, em ordenadas, a relação $\frac{T_i}{T_0}$ do teor deste ponto, para o teor de cada um do demais pontos, versus as respectivas distâncias d (locadas em abscissa).

T_i e T_0 , sendo os respectivos teores, mais baixos (inferior) e mais alto (superior), para cada um dos pares de pontos considerados. Então a curva (ajustada) que une os pontos assim locados, representa a relação $f(d) = \frac{T_i}{T_0}$.

A seguir, num segundo gráfico, conforme mostra a fig. 63b, são locados pontos, cujas abscissas sejam as respectivas

distâncias "d" dos pares de pontos anteriormente considerados; as ordenadas sendo as relações $y = \frac{1}{d^m}$ para diferentes valores de $m=0,1; 0,2; 0,3; 0,5; \dots; 2$, etc.

Comparando-se os dois gráficos (das figuras 63a e 63b), verifica-se no segundo gráfico : A curva que mais se aproxima da curva do primeiro gráfico. Então é, escolhido o respectivo valor de m. No exemplo figurado seria escolhido $m=0,3$.

Técnica 2 - Partindo-se do teor em um ponto T_1 , calcula-se separadamente, qual o teor que resultaria para os demais pontos segundo a relação $T_2^* = \frac{1}{d^m} T_1$, e admitindo-se diferentes valores para m; Com esses valores estimados T_2^* , calcula-se os respectivos erros $e = T_2 - T_2^*$ com base nos teores T_2 que são conhecidos pela amostragem naqueles pontos considerados. Acumulando-se os erros verificados (quando se considera os diferentes valores do expoente), será selecionado aquele valor de m, que resultar em menor erro acumulado para todos pontos.

5.4. NOÇÕES DE GEOESTATÍSTICA E MÉTODO GEOESTATÍSTICO.

Essencialmente esse método fundamenta-se nos seguintes conceitos de GEOESTATÍSTICA :

- a) Conceito de variáveis regionalizadas, as quais são expressas pelo que se denomina, a função SEMIVARIOGRAMA, ou mais simplesmente, como é geralmente referido, o VARIOGRAMA.
- b) Conceito de QUALIDADE DA ESTIMAÇÃO, decorrente da avaliação do ERRO DA ESTIMAÇÃO de um bloco elementar, e a conseqüente OTIMIZAÇÃO DA ESTIMAÇÃO, (que constitui o objetivo do método).

Para entendimento do método abordaremos preliminarmente, essas noções essenciais de GEOESTATÍSTICA.

5.4.1. VARIÁVEIS REGIONALIZADAS E VARIOGRAMA

A chamada teoria das VARIÁVEIS REGIONALIZADAS é a base da GEOESTATÍSTICA. Ela foi desenvolvida e publicada primeiramente, em Matheron G. - The theory of regionalized variables and its applications - Ecole Nat. Sup. des Mines de Paris, 1971. Nessa publicação foi proposto o nome GEOESTATÍSTICA, para a análise estatística dos fenômenos geológicos, com base nessa teoria, a qual fundamenta-se no seguinte princípio :

O teor (ou outro atributo analisado) de uma amostra, é uma variável que apresenta a relação estrutural com outras amostras no âmbito da região estudada no depósito mineral ; mas que simultaneamente retém características aleatórias. Assim a variável regionalizada é uma variável cuja grandeza depende dos valores das amostras vizinhas na forma como elas são distribuídas espacialmente, considerando-se duas ou tres dimensões (ou seja no plano ou no espaço).

Contrastando com outras variáveis, como por exemplo, a tensão de um esforço sobre uma viga, que pode ser representada por uma função derivada do conhecimento físico de Resistência dos Materiais, a função VARIÁVEL REGIONALIZADA não pode ser derivada do conhecimento dos seus condicionamentos geológicos.

Porém ela pode ser estudada com base em análises estatísticas de VARIÂNCIAS, essas levantadas experimentalmente. Isso é feito com a utilização de um instrumento o qual é denominado VARIOGRAMA (ou também denominado com melhor propriedade, de SEMIVARIOGRAMA).

VARIOGRAMA OU SEMIVARIOGRAMA

O bom senso e a experiência ensina, que quanto mais próximas duas amostras são tomadas, uma em relação a outra, maior será a tendência de similaridade entre elas.

Da mesma forma, a tendência de similaridade entre as

amostras, tenderá a diminuir, com o aumento da distância que as separa. Obviamente, isso acontece quando os procedimentos da amostragem, sejam invariáveis, e quando não há descontinuidade geológica entre os pontos amostrados (por exemplo falhas).

Tendo-se duas amostras separadas por uma distância \vec{h} , medida numa determinada direção; podemos chamar os valores possíveis dos seus teores (ou de outros atributos analisados), de respectivamente $Z (X)$ e $Z (X + \vec{h})$.

(X) e ($X + \vec{h}$), definem as localizações espaciais dos pontos amostrados, e as funções Z respectivas, definem os teores (ou outro atributo analisado como por exemplo espessuras).

Tomando-se ao longo da mesma direção, em todo o jazimento, pares de amostras separadas de uma distância constante h , as similaridades (ou dissimilaridades) para essa distância h , poderão ser expressas pela média dos valores absolutos das diferenças entre aquelas duas funções, ou seja, pelo valor médio de $| Z (X) - Z (X + \vec{h}) |$.

Para evitar dificuldades decorrentes de computação de valores positivos e negativos, adota-se a técnica usual estatística, de considerar-se, os quadrados dessas diferenças, ou seja, a média de $[Z (X) - Z (X + \vec{h})]^2$, tendo-se :

$$\frac{1}{n (\vec{h})} * \sum^n [Z (X) - Z (X + \vec{h})]^2 = 2 \gamma (\vec{h})$$

Expressão (63 a)

ou também :

$$\frac{1}{2 n (\vec{h})} * \sum^n [Z (X) - Z (X + \vec{h})]^2 = \gamma (\vec{h})$$

Expressão (63 b)

Essa função $\gamma (\vec{h})$ é o que se denomina a função SEMIVARIOGRAMA (mais simplesmente, também se costuma denominá-la, a função VARIOGRAMA). Ela é válida para uma definida direção e para uma determinada distância constante h , ao longo do jazimento; n é o número de vezes em que a distância

h cabe no comprimento pesquisado, ao longo daquela direção no jazimento.

Variando-se o valor do comprimento \vec{h} (numa mesma direção) e calculando-se para cada um desses comprimentos a função $\gamma(\vec{h})$ se poderá representar em um gráfico, pontos cujas abscissas sejam os valores de \vec{h} considerados ; e em ordenadas, as respectivas $\gamma(\vec{h})$.

Idealmente, construindo-se um gráfico dessa maneira, para todas as distâncias \vec{h} (numa mesma direção) que possam ser consideradas no jazimento, obteríamos uma sucessão de pontos, os quais unidos dariam uma curva a qual chamamos VARIOGRAMA.

Essa curva seria representativa das VARIÂNCIAS do jazimento, na direção considerada.

Experimentalmente, utilizando os valores $x = Z(X)$, obtidos em pontos amostrados X , de amostras tomadas sistematicamente ao longo de uma determinada direção, se obterá o VARIOGRAMA EXPERIMENTAL. Esse será um estimador do VARIOGRAMA naquela direção.

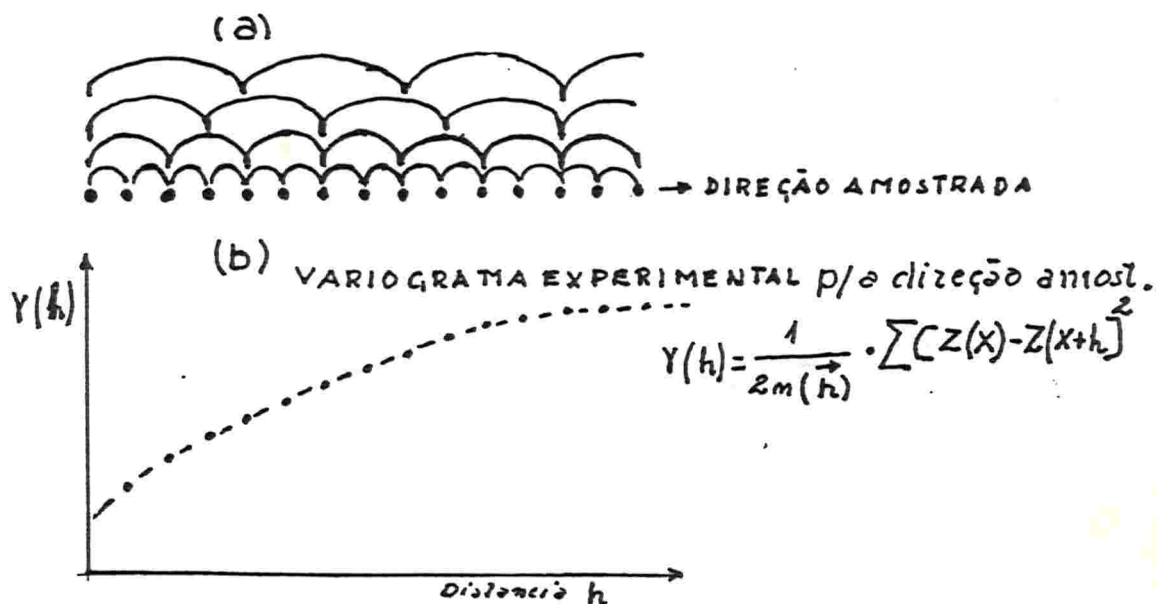


Fig 64

Como mostra a figura 64a, tendo-se uma sequência de pontos amostrados equidistantes, numa determinada direção; Tendo-se os valores das análises x_i de cada uma das amostras; considerando-se as médias dos quadrados das diferenças dos valores de x_i ; para amostras tomadas uma à uma, para amostras tomadas duas à duas, tres à tres, etc; constrói-se o VARIOGRAMA EXPERIMENTAL como mostra a fig. 64b. Nesse gráfico as abscissas de cada ponto são as distâncias h , entre duas amostras vizinhas, entre tres amostras, entre quatro amostras, etc; as ordenadas são as respectivas médias dos quadrados das diferenças dos pares de valores de x considerados, divididas por dois. Esse gráfico é o VARIOGRAMA EXPERIMENTAL, para a direção da sequência de pontos amostrados naquele jazimento. É então uma expressão gráfica estimando a função VARIOGRAMA dada em (63b).

As figuras 65 à 72, mostram algumas feições típicas de VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS, obtidas em diversos tipos de jazimentos, (reprodução de figuras de publicações).

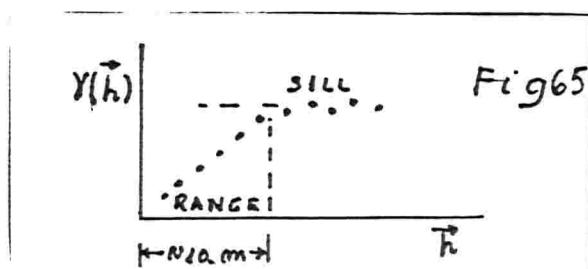


Fig. 65 - VARIOGRAMA TÍPICO de um depósito $Pb - Zn$ com mineralização disseminada mostrando boa continuidade.

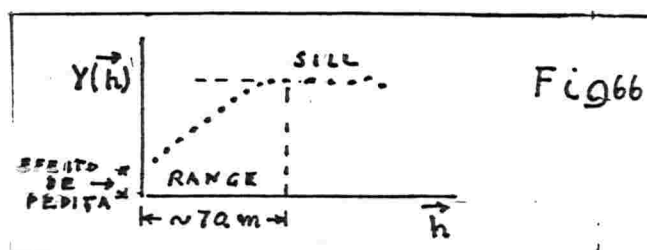


Fig. 66 - VARIOGRAMA NA DIREÇÃO VERTICAL DE um depósito de minério de ferro.

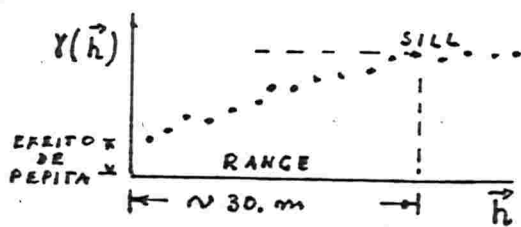


Fig. 67 - VARIOGRAMA de um depósito de MnO_2 mineralizado segundo venulas (tipo porfirítico).

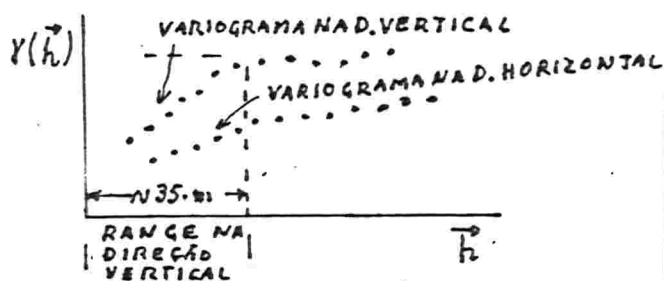


Fig. 68 - DOIS VARIOGRAMAS; um na direção vertical e outro na direção horizontal, de um depósito porfirítico de minério de Cobre.

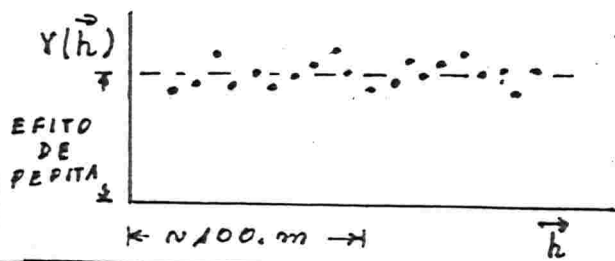
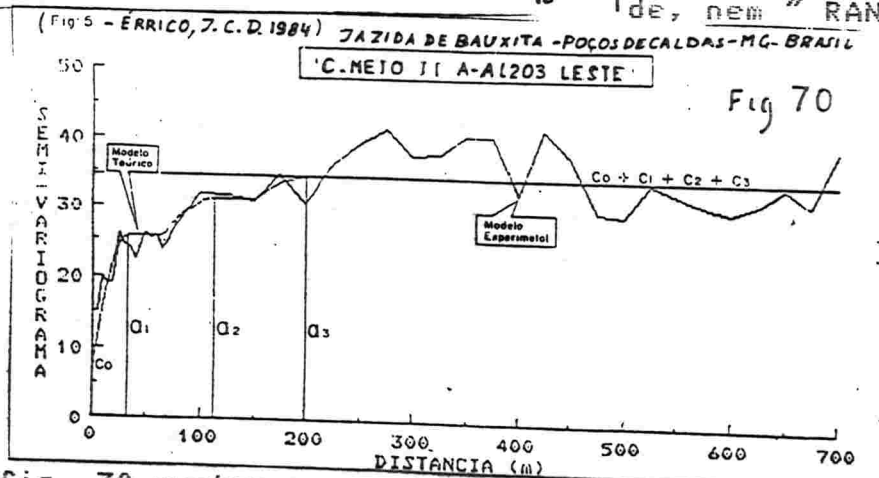
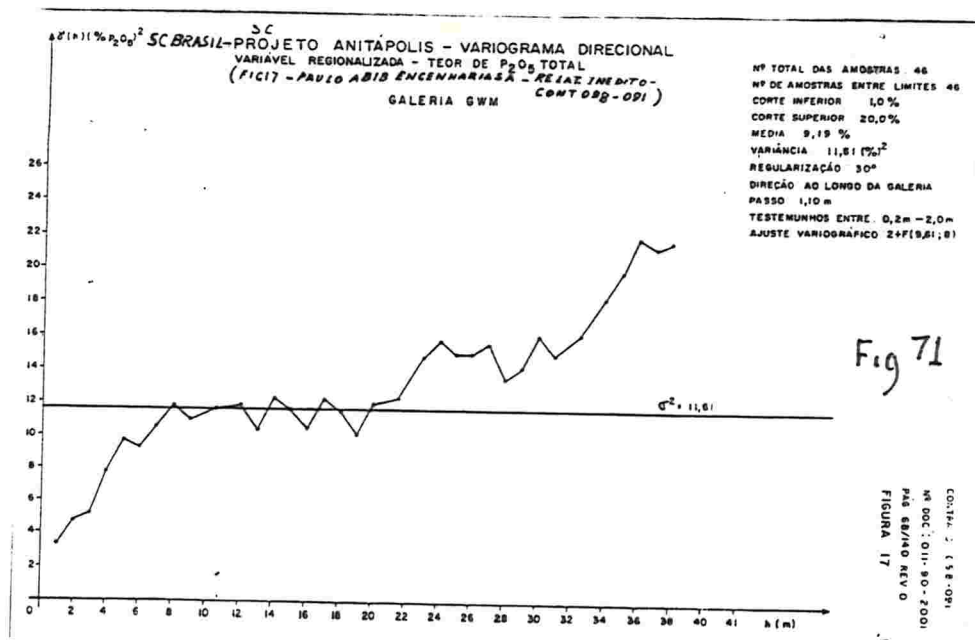


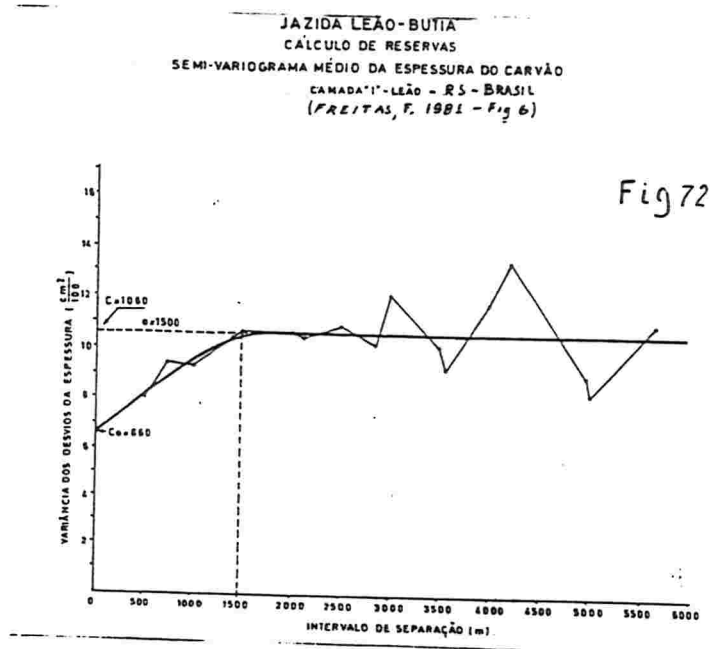
Fig. 69 - VARIOGRAMA TÍPICO de um depósito pneumatolítico aurífero, não mostrando continuidade, nem "RANGE".



A fig. 70 mostra um variograma típico de uma jazida de bauxita em Poços de Caldas, MG - Brasil



A fig. 71 mostra um variograma levantado na jazida de fosfato de Anitópolis, SC - Brasil



A fig. 72 mostra um variograma típico das espessuras da camada de carvão da jazida Leão-Butia, RS - Brasil

Observa-se que o estimador estatístico da VARIÂNCIA (σ^2) da variável, a qual é definida como a diferença de teores entre pontos separados por uma distância constante h , é: - A média aritmética dos quadrados dos desvios em relação a respectiva média aritmética, dessas diferenças.

Assim conforme expressão (25), tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{VARIÂNCIA} \left[Z(X) - Z(X+h) \right] = \\ &= \frac{1}{n} * \left\{ \text{m. aritm.} \left[Z(X) - Z(X+h) \right] - \left[Z(X+h) \right] \right\}^2 \end{aligned}$$

Expressão (64)

onde n é o número dos valores $[Z(X) - Z(X+h)]$.

Sendo a função $2\gamma(\bar{h})$, definida pela expressão (63a), a média aritmética das diferenças entre os valores extremos $Z(X)$ e $Z(X+h)$, compreende-se que seu valor será o duplo daquele estimador (σ^2) da VARIÂNCIA dada pela expressão (64).

Então a função SEMIVARIOGRAMA, $\gamma(\bar{h})$, definida pela expressão (63b), será também o valor dessa VARIÂNCIA.

Portanto, as ordenadas $\gamma(\bar{h})$, da expressão VARIOGRAMA (mais propriamente denominada SEMIVARIOGRAMA), darão diretamente as VARIÂNCIAS DAS DIFERENÇAS de teores (ou de outros atributos), para as distâncias h entre os pontos considerados no depósito (diretamente lidas em abscissas).

5.4.2. Propriedades dos VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS

Certas características dos depósitos que eram conhecidas e utilizadas de forma subjetiva, são expressas quantitativamente pelas VARIOGRAMAS. Assim:

UNIFORMIDADE E CONTINUIDADE da mineralização, são expressas no VARIOGRAMA pela grandeza e maior uniformidade da taxa de crescimento da função $\gamma(\bar{h})$, a partir da origem do variograma. A suavidade da curva expressa a continuidade da mineralização.

A intersecção da curva com o eixo das ordenadas acima da origem, mede o chamado EFEITO DE PEPITA. Esse representa a grandeza do grau de aleatoriedade de uma amostra.

Na fig. 65 o crescimento suave, estável e partindo da origem, indica grande uniformidade, dos teores com alto grau de continuidade, até a distância de 10 metros aproximadamente; tornando-se aleatórios a partir dessa distância.

Na fig. 67 ao lado de boas características de continuidade, indicadas pelo VARIOGRAMA até 30 metros, o variograma mostra um marcante EFEITO DE PEPITA, indicando a aleatoriedade para pequenas distâncias. Isso é explicado pela descontinuidade da mineralização, controlada pelos veios mineralizados, a qual é sensível em pequenas distâncias.

Na fig. 69, o VARIOGRAMA não mostra regularidade e continuidade, distinguindo-se somente o grande EFEITO DE PEPITA. Nesse caso a amostragem produziria uma variável praticamente aleatória, sendo essas características marcantes nos vieiros auríferos pneumatólíticos. Para esses tipos de jazimento pouco contribuem as interpretações por métodos GEOESTATÍSTICOS, sendo mais adequados os critérios da ESTATÍSTICA CLÁSSICA.

ÁREA ou ZONA DE INFLUÊNCIA DE UMA AMOSTRA

Define-se como a área delimitada pelas distâncias ao longo de direções determinadas até onde o elemento regionalizado efetivamente influi. Essa "ZONA" passa a inexistir, a partir de pontos mais afastados. Essa distância (definindo a Zona de INFLUÊNCIA), sempre foi subjetivamente estimada; sendo um conceito clássico da Pesquisa Mineral.

Na maioria dos casos, o VARIOGRAMA mostra uma distância que é denominada o "RANGE", definindo a distância (na direção considerada) até onde atinge a ÁREA ou ZONA DE INFLUÊNCIA, ver figuras 65, 66, 67 e 68. A partir do "RANGE", o VARIOGRAMA geralmente mostra tendência a horizontalidade, sendo essa parte denominada "SILL" ou PATAMAR. No "SILL", a VARIÂNCIA tende a ser constante. Assim as amostras separadas entre si por distâncias maiores do que o "RANGE", tornam-se independentes.

Nessa condição, a função $\gamma(\bar{r})$ define a característica de aleatoriedade (isolada) para qualquer ponto do jazimento. Mesmo em VARIOGRAMAS que não apresentem o "SILL", dever-se-á admitir que, para distâncias maiores, a VARIÂNCIA tenderá a ser constante.

Os "RANGE" obtidos em VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS para diferentes direções do jazimento, como por exemplo ao longo da direção e do mergulho (ou do plunge) das estruturas pesquisadas, constituem parâmetros da maior importância para definir por GEOESTATÍSTICA, as separações dos pontos que devem ser amostrados (ou sondados), de modo a se poder dimensionar racionalmente as malhas de pesquisa.

As próprias coerências dos VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS, que possam serem levantadas com base numa malha de pesquisa, constituem-se em indicadores seguros de que a densidade da malha tenha sido satisfatória, para os objetivos da pesquisa.

"TRENDS" ou TENDÊNCIAS relacionadas com as direções dos jazimentos.

VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS, levantados em diversas direções, mostram TENDÊNCIAS diferenciadas decorrentes dos condicionamentos geológicos dos jazimentos. Atráves dos "TRENDS" assim levantados, tornam-se evidentes as suas características anisotrópicas, como mostrado na fig. 68.

5.4.3. FUNÇÕES INTRÍNSECAS das variáveis dos depósitos e MODELOS MATEMÁTICOS DE VARIOGRAMAS.

Um VARIOGRAMA EXPERIMENTAL de um atributo (a variável pesquisada) levantado de um depósito mineral, constitui-se numa estimativa (a qual nunca é perfeita). O variograma expressa o comportamento espacial do atributo (a VARIÁVEL REGIONALIZADA).

Para que esse variograma possa ser útil às generalizações necessárias para as interpretações geoestatísticas, (como por exemplo, objetivando estimação probabilística dos teores dos blocos elementares), dever-se-á adotar modelos matemáticos (teóricos). Tal modelo deverá ajustar-se ao comportamento

espacial do depósito, devendo também ser uma função matemática contínua, que se ajuste razoavelmente, aos dados experimentais, (esses representados pelo VARIOGRAMA EXPERIMENTAL).

O modelo é denominado FUNÇÃO INTRÍNSECA, porque espera-se que o mesmo represente o comportamento da VARIÁVEL REGIONALIZADA, pesquisada, a qual é característica intrínseca, do corpo mineral que está sendo estudado.

Nos casos mais simples, é possível fazer-se ajustes (ajustando-se ao modelo considerado adequado) através da imagem visual produzida no computador (utilizado para calcular o VARIOGRAMA EXPERIMENTAL).

Para os casos mais complexos, foram desenvolvidos técnicas mais elaboradas de ajustes, indicando-se para consulta ref. Grossi Sad, 1986.

Os principais modelos matemáticos idealizados para interpretar VARIOGRAMAS EXPERIMENTAIS, são os que se seguem :

MODELO LINEAR RETILÍNEO

Expresso pelas funções matemáticas $\gamma(h) = Ah + B$ ou $\gamma(h) = Ah$, Expressão (65). É o modelo intrínseco mais simples que se possa idealizar. Porém considerado inadequado para exprimir fenômenos geológicos, salvo quando aplicada para distâncias muito pequenas (em geral menores do que 5 metros).

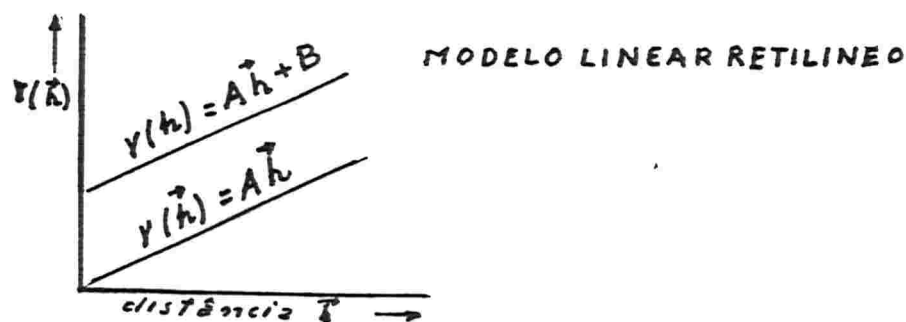


Fig 73

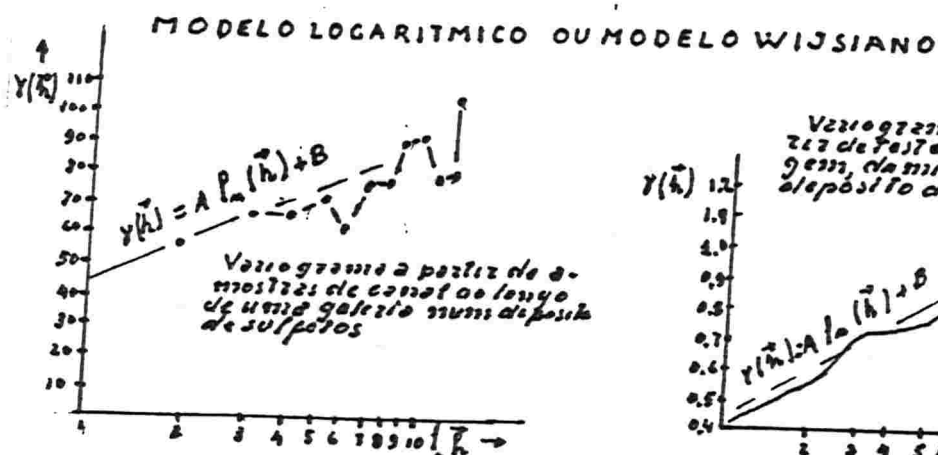


Fig 74

FIGURAS REPRODUZIDAS DE DAYID 1977

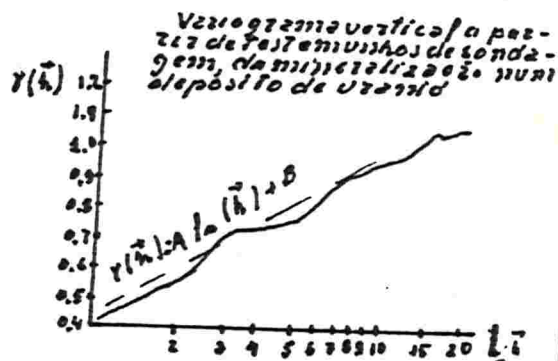


Fig 75

Expresso pela função matemática $\gamma(h) = A \lg_n(h) + B$; expressão (66). Esse modelo foi primeiramente utilizado por H.J. de Wijs, tendo sido considerado o mais adequado para muitos depósitos hidrotermais. Foi o mais utilizado anteriormente as aplicações de computadores (fazendo-se as interpretações mediante ábacos).

Como mostram as figuras 74 e 75 esse modelo é adequado quando, locando-se as distâncias em escala logarítmica, o VARIOGRAMA torna-se linear retilíneo, e não apresenta "RANGE" ou "SILL".

MODELO ESFÉRICO ou MODELO DE MATHERON

Esse modelo foi primeiramente concebido por G. Matheron, sendo atualmente o mais utilizado. Ele tem-se mostrado adequado para os mais diversos tipos de depósitos, em âmbito mundial. Atualmente a tendência é a de ser considerado adequado, para uso universal.

Sua forma ideal é a da fig. 76, sendo definido pelas expressões (67a e 67b).

$$\gamma(h) = C \left[\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right] + C_0$$

Expressão (67a)
para quando $h \leq a$

$$\gamma(\vec{h}) = C_0 + C ;$$

Expressão (67b)

para quando $h \geq a$

$$\gamma(0) = 0 ;$$

Expressão (67c)

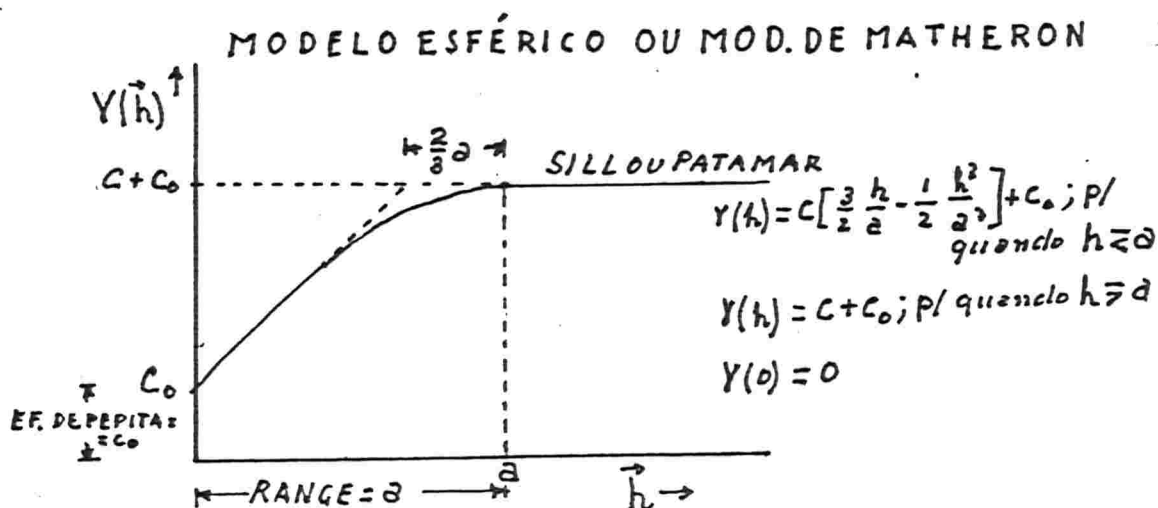


Fig 76

nas quais a é o "RANGE" igual a distância até onde se estende a ÁREA DE INFLUÊNCIA; C_0 é o EFEITO DE PEPITA; $(C + C_0)$ é o "SILL" ou PATAMAR. A origem dessas expressões e do modelo esférico, será explicada mais adiante.

A experiência tem demonstrado, que variogramas experimentais para a maioria dos depósitos, de diferentes tipos, e levantados a partir de medidas de diversos atributos (como sejam teor, espessuras, etc.), tem em comum as características que se seguem :

a) $\gamma(\vec{h})$, para valores maiores do que a distância a que define a ÁREA DE INFLUÊNCIA, tende a tornar-se constante, oscilando em torno de um valor $(C + C_0)$, que independe da distância h .

Isto significa que os valores de duas amostras cujas distâncias entre elas seja $h > a$, são variáveis aleatórias independentes, sendo a covariância entre elas zero.

b) $\gamma(\vec{h})$ para valores de h muito pequenos, tende à um valor C_0 , o qual geralmente é diferente de zero. Esse é o valor que define o EFEITO DE PEPITA, à muito conhecido na Pesquisa Mineral Clássica; Em GEOESTATÍSTICA, C_0 representa a parte totalmente aleatória retida pela variável regionalizada.

c) $\gamma(\vec{h})$ para valores o intervalo maior do que zero, e ($h \leq a$), obedece à uma função intrínseca do jazimento, definida por uma curva do VARIOGRAMA. Essa função exprime a parcela da dependência das variáveis regionalizadas mais a parcela totalmente aleatória retida.

Sendo $Z(X)$ e $Z(X+h)$ os valores de duas amostras tomadas nos pontos X e $(X+h)$, suas COVARIÂNCIAS serão expressas por :

$$\text{COV} [Z(X), Z(X+h)] = (C + C_0) - \gamma(\vec{h}) ; \quad \text{Expressão (68a)}$$

para h no intervalo ($0 < h \leq a$)

$$\text{COV} [Z(X), Z(X+h)] = 0 ; \quad \text{Expressão (68b)}$$

para ($h > a$)

Jazimentos que não apresentam características de continuidade e regularidade, como alguns depósitos auríferos extremamente variáveis (como mostra a figura 69), C_0 coincide com $\gamma(\vec{h})$, para o valor do "SILL" ou PATAMAR. Nesses inexistente a variável regionalizada (como concebida em GEOESTATÍSTICA); as COVARIÂNCIAS das amostras serão zero, para qualquer valor de h que as separe; sendo também C igual a zero nesse caso.

Com base nas expressões (67a, 67b, 68a e 68b) tendo-se um variograma experimental para uma determinada direção ajustado ao modelo esférico, se poderá obter, diretamente do VARIOGRAMA, as estimativas das VARIÂNCIAS e COVARIÂNCIAS das diferenças dos valores $Z(X)$ e $Z(X+h)$, de amostras que estejam separados por

distâncias h conhecidas naquela direção, ver EXEMPLO Nº 29 apresentado na página 220.

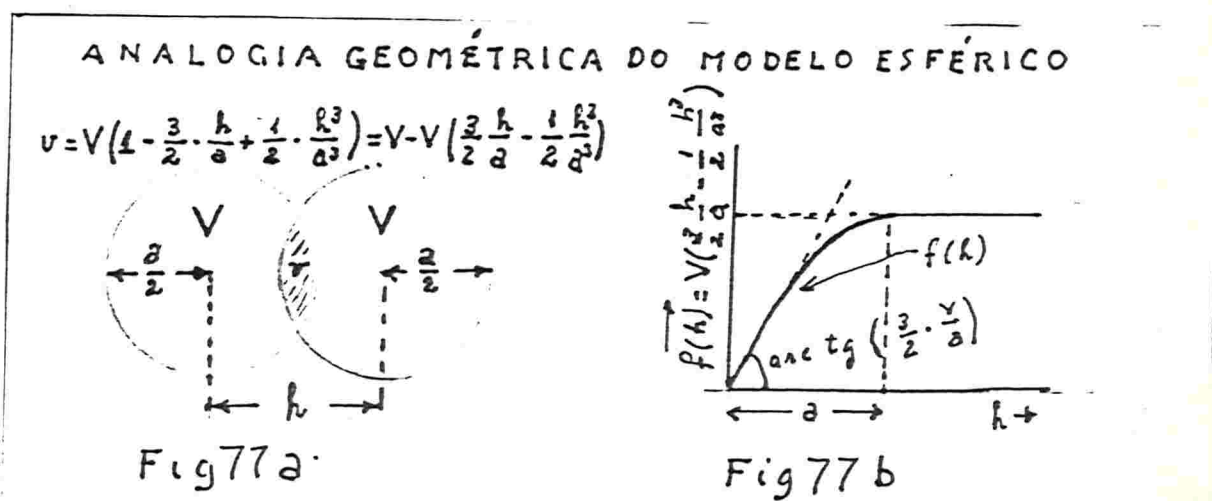
ORIGEM DO MODELO ESFÉRICO

Objetivando adotar um modelo matemático adequado para que nele fossem ajustados os comportamentos das VARIÂNCIAS e das COVARIÂNCIAS de duas variáveis regionalizadas, Matheron concebeu o modelo chamado ESFÉRICO, admitindo os critérios que se seguem: Admitiu a analogia das COVARIÂNCIAS com o modelo geométrico da função do volume v , da intersecção de duas esferas de iguais volumes V , cujos diâmetros fossem iguais a a , e cujos centros estivessem distantes entre si de h (ver fig. 77a).

Da geometria tem-se :

$$v = V \left[1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right] = V - V \left[\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right] ;$$

Expressão (69)



Evidentemente esse modelo será aplicável até o limite em que $h = a$; v para distâncias $h > a$, será igual a zero (como acontece nas COVARIÂNCIAS de duas amostras distantes $h > a$ entre si.

Então para valores crescentes de h e no intervalo $0 < h < a$ o volume v seria decrescente, variando conforme o segundo termo da expressão (69); ou seja, a variação seria de acordo com a

função :

$$f(h) = V \left[\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right]$$

representada na fig. (77b)

Essa função é um modelo adequado para representar a Variância $\gamma(\vec{h})$, desde que sofra o ajustamento, de modo que para $h = 0$, seja admitido que seu valor seja $\gamma(\vec{h}) = C_0$ (significando uma translação vertical de C_0 no sistema de coordenadas). Com esse ajuste, chega-se finalmente ao modelo ESFÉRICO representado na fig. (76), e ao significado das expressões (67a e 67b).

OUTROS MODELOS DE VARIOGRAMA

Outros modelos tem sido idealizados. Muitas vezes, para adequação ao VARIOGRAMA EXPERIMENTAL, é necessário idealizar MODELO COMPOSTO. Neste último considera-se a $\gamma(\vec{h})$ como resultado de comportamento de duas funções intrínsecas mais simples, como sejam de duas funções adequadas à modelos esféricos diferentes.

Em Grossi Sad 1986, é apresentado um interessante exemplo de ajustamento do VARIOGRAMA EXPERIMENTAL da fig. (78) (à qual foi reproduzida dessa publicação citada) à um modelo composto teórico.

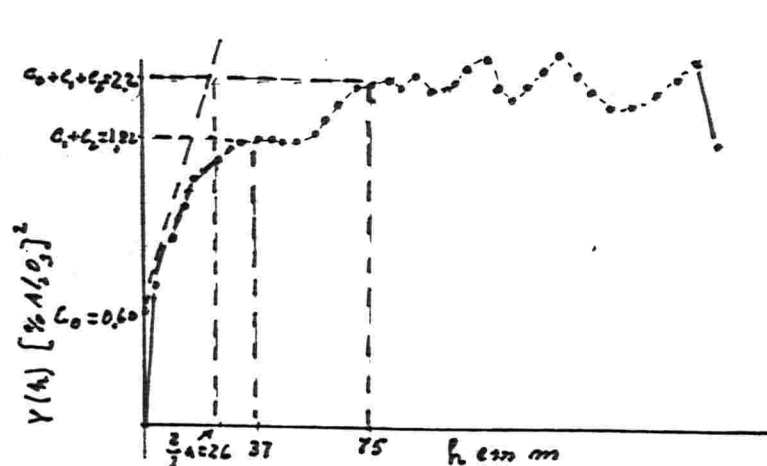
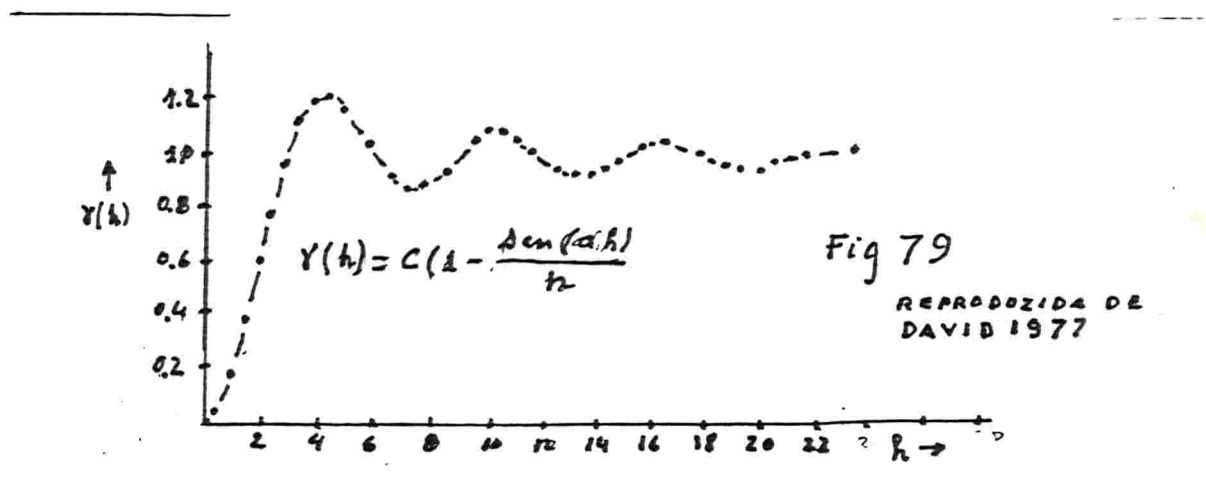


Fig 78 REPRODUZIDA DE GROSSI SAD, 1986

Muitas vezes os variogramas experimentais exibem curvas complexas, como acontece nesse exemplo citado.

A fig. (79) é uma reprodução da figura de David, M. 1977, de um modelo teórico denominado de EFEITO DE BURACO.



Esse modelo é adequado à variogramas experimentais apresentando curvamentos periódicos, devidos a sucessivas zonas enriquecidas, apresentadas na jazida.

Um problema importante de GEOESTATÍSTICA, é o da elaboração do modelo composto adequado ao variograma experimental levantado.

Segundo David 1987, tem sido possível a estimação dos comportamentos de mais de uma centena de depósitos, com base na composição de somente dois modelos mais simples (geralmente de modelos esféricos).

5.4.4. QUALIDADE DA ESTIMAÇÃO DOS BLOCOS ELEMENTARES.

Suponhamos que na discretização das informações por intermédio de $Z(V_i)$ (ou outro atributo interessante) dos blocos elementares, tenham sido estimados os teores de cada bloco V_i (ver fig. 59 à página 186).

Admitamos que utilizando um determinado método de estimação, obtemos para os N blocos elementares V_i do corpo de minério, os teores ESTIMADOS (ou outros atributos estimados), que chamaremos $Z^* (V_1)$; $Z^* (V_2)$; $Z^* (V_3)$; ... $Z^* (V_N)$.

Chamamos $Z (V_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$ os VERDADEIROS teores (ou verdadeiros, outros atributos), de cada um daqueles blocos, em que foram feitas as estimativas.

Ainda que desconheçamos esses VERDADEIROS teores $Z (V_i)$, podemos dizer que os ERROS de ESTIMAÇÃO ϵ_i cometidos na estimação de cada um dos blocos elementares (quando utilizamos um determinado método de estimação) serão :

$$\epsilon_1 = [Z (V_1) - Z^* (V_1)] ;$$

$$\epsilon_2 = [Z (V_2) - Z^* (V_2)] ;$$

..... e genericamente :

$$\epsilon_i = [Z (V_i) - Z^* (V_i)]$$

Ainda que desconheçamos esses ERROS ϵ_i , podemos estabelecer as condições requeridas para as QUALIDADES desejadas das estimações exigidas para qualquer método de estimação.

a) Em primeiro lugar, é necessário que a VERDADEIRA MÉDIA dos valores estimados $Z^* (V_i)$, seja igual a VERDADEIRA MÉDIA dos valores reais $Z (V_i)$; ou em linguagem estatística, que os VALORES ESPERADOS das estimativas e dos valores reais, sejam os mesmos.

Isso se traduz pela exigência de que as estimativas sejam em condições IMPARCIAIS (ou que não hajam condições TENDENCIOSAS). Os erros devem se distribuir em torno do valor zero, para mais e para menos.

b) Em segundo lugar, para a melhor qualidade da estimação, é exigido que os VALORES ABSOLUTOS dos ERROS ϵ_i cometidos, sejam PEQUENOS; alguns dos blocos elementares poderão ter erros absolutos ϵ_i grandes, mas exige-se que esses blocos (cujos erros

são grandes), sejam em pequeno número.

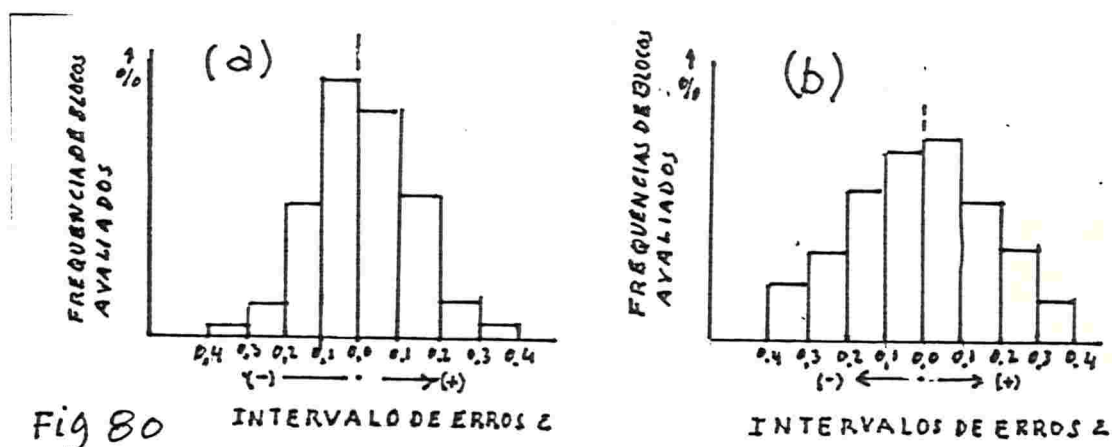
Esta última condição se traduz em linguagem estatística, que:

- A distribuição dos ERROS ACIDENTAIS (inevitáveis) $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_i$, deverão ter PEQUENA VARIÂNCIA; sendo o mesmo que dizer, que os valores estimados deverão ter PEQUENA DISPERSÃO em relação a média.

Representando-se em histogramas, os erros acidentais cometidos, na avaliação dos blocos elementares por um determinado método de avaliação, eles devem apresentarem-se tendendo a distribuição NORMAL, porque as causas dos erros são muitas e aleatórias.

Num determinado depósito, comparando-se os teores obtidos nos blocos elementares quando na lavra dos mesmos, com os teores estimados previamente, obtidos na pesquisa, se poderá construir histogramas experimentais dos erros de avaliação (de acordo com a premissa de que os teores obtidos na lavra, sejam considerados representativos dos teores verdadeiros).

Admitamos, que dessa comparação com os teores estimados mediante dois diferentes métodos de avaliação A e B, obtivéssemos os erros cometidos em cada um dos métodos e, construíssemos os histogramas de distribuição dos erros, representados nas figuras 80a e 80b, respectivamente.



Os dois histogramas apresentam tendência a distribuição NORMAL, porém no caso dos erros cometidos pelo método de

avaliação B, eles se apresentam com dispersão considerada inaceitável (com alta VARIÂNCIA). O método A, mostra melhor qualidade de avaliação.

Assim além de satisfazer a primeira condição de imparcialidade, é condição para melhor qualidade do método de estimação, haver a menor VARIÂNCIA dos erros cometidos na avaliação dos blocos elementares (isto é, a menor dispersão em torno do valor zero).

5.4.5. Fundamento do método GEOESTATÍSTICO DE KRIGEAGEM ou KRIGAGEM

Com base nos conceitos de qualidade de avaliação explicados no item anterior, esse método essencialmente consiste na pesquisa e utilização de pesos de ponderação para mediação das amostras, que sejam os mais adequados para a otimização dos resultados no que diz respeito a menor VARIÂNCIA dos erros de estimação, ao lado da condição essencial de IMPARCIALIDADE.

O método foi desenvolvido por G. Matheron, com base na equação de KRIGE (ver página 178), desenvolvida anteriormente, e no conceito de VARIOGRAMA, (ver item 5.4.1. as páginas 197 à 203).

Foi visto (ver item 5.2, em Metodologia Geral de Cubagem dos Métodos Analíticos as páginas 183 e 185), que qualquer método analítico de estimação dos blocos elementares, é obtida através de uma expressão do tipo:

$$Z^*(V_i) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j x_j, \text{ para } j=1,2,\dots,n, \text{ onde}$$

- x_j são os teores (ou outros atributos pesquisados), que são conhecidos através das amostras analisadas, tomadas em pontos X_j do corpo de minério.

- a_j são fatores de ponderação para ponderação dos valores x_j .

Os critérios com que são estabelecidos os fatores a_j , são os que essencialmente caracterizam um determinado método de

avaliação.

Por exemplo, particularmente no método dos INVERSOS QUADRADOS (ver ítem 5.3.2 à página 189), α_j são estabelecidos em função dos inversos dos quadrados das distâncias dos pontos X_j , ao centro do bloco estimado V_i , tudo conforme as expressões (62a e 62b) à página 188. Consequentemente e de modo geral, quando se estabelece uma série de fatores α_j (de acordo com o critério do método de avaliação adotado), serão cometidos ERROS de estimação ϵ_i para cada bloco elementar, dados pela expressão:

$$\epsilon_i = Z(V_i) - \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j x_j \quad ; \text{ na qual } Z(V_i) \text{ é o}$$

verdadeiro teor de um bloco elementar (dos que estão sendo avaliados no depósito).

Conforme foi visto, a equação de KRIGE (ver ítem 4.5.3. à página 178), estabelece:

$$\begin{aligned} \text{VARIÂNCIA de } (\epsilon_i) = \text{VAR} \left[Z(V_i) \right] + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k \text{COV}(x_j, x_k) - \\ - 2 Z \sum_j \alpha_j \text{COV} \left[Z(V_i), x_j \right] ; \text{ Expressão (61)} \end{aligned}$$

ou com outra notação:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\epsilon_i) = \sigma^2 \left[Z(V_i) \right] + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k \sigma(x_j, x_k) - \\ - 2 \sum_j \alpha_j \sigma \left[Z(V_i), x_j \right] ; \quad \text{Expressão (61)} \end{aligned}$$

Na expressão de KRIGE, $\sigma^2(\epsilon_i)$ é a VARIÂNCIA dos erros ϵ_i de estimação dos blocos elementares; $\sigma^2 \left[Z(V_i) \right]$ é a VARIÂNCIA dos verdadeiro teores dos blocos elementares; x_j e x_k , são valores conhecidos de análises de amostras tomadas em cada dois pontos X_j e X_k de forma a considerar as combinações duas a duas, de todas as amostras utilizadas para a avaliação; α_j e α_k são os fatores adotados para a mediação dos valores das amostras (que caracterizam o método de avaliação); σ^2 e σ são variâncias e covariâncias das variáveis acima definidas

(conforme estão explícitas) na equação de KRIGE).

Para facilitar, anotaremos essa equação sob a seguinte forma simplificada:

$$\sigma^2 \varepsilon = \sigma^2_v + \sum_j \sum_k a_j a_k \sigma(x_j, x_k) - 2 \sum_j a_j \sigma_v x_j$$

expressão (61)

A otimização da avaliação, a qual é o objetivo do método, será obtida mediante a escolha dos fatores de ponderação $a_1, a_2, \dots, a_j, a_k, \dots$, de modo que, resulte na menor VARIÂNCIA do erro de estimação, $\sigma \varepsilon$.

Sabemos que para atender o critério de IMPARCIALIDADE, a soma dos fatores de ponderação à serem adotados, sempre deverá ser a unidade (ver ítem 5.1., em Metodologia Geral de Cubagem à página 185), então :

$$\sum_{d=1}^{d=n} a_j = 1 \quad ; \quad \text{ou} \quad \sum_{d=1}^{d=u} a_j - 1 = 0$$

Para incluir essa condição na expressão (61), somaremos a mesma, um novo termo $2 \mu \left[\sum_{d=1}^{d=u} a_j - 1 \right] = 0$, sem alterá-la.

- μ será uma nova incógnita auxiliar incluída na expressão. Chega-se então a uma nova função F equivalente a expressão (61):

$$F = \sigma^2_\varepsilon = \sigma^2_v + \sum_j \sum_k a_j a_k \sigma(x_j, x_k) - 2 \sum_j a_j \sigma_v x_j + \\ + 2 \mu \left(\sum_j a_j - 1 \right)$$

O objetivo do método será obter-se o mínimo da função $F = \sigma^2_\varepsilon$ (isto é, minimizar a VARIÂNCIA do ERRO DE ESTIMAÇÃO ε). Isso é obtido, determinando-se adequados fatores de ponderação (a_j), agora considerados variáveis.

Conforme o procedimento de Álgebra Superior, o mínimo da função F , com a variação das variáveis a_j e μ , será obtida derivando-se essa função F e igualando-se a derivada a zero, e desse modo, tem-se as equações:

será :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{x_1, x_1} & \sigma_{x_1, x_2} & \sigma_{x_2, x_3} & \dots & \sigma_{x_1, x_n} & 1 \\ \sigma_{x_2, x_1} & \sigma_{x_2, x_2} & \sigma_{x_2, x_3} & \dots & \sigma_{x_2, x_n} & 1 \\ \sigma_{x_3, x_1} & \sigma_{x_3, x_2} & \sigma_{x_3, x_3} & \dots & \sigma_{x_3, x_n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{x_n, x_1} & \sigma_{x_n, x_2} & \sigma_{x_n, x_3} & \dots & \sigma_{x_n, x_n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Sigma]} \times \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ \mu \end{bmatrix}}_{[A]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{v, x_1} \\ \sigma_{v, x_2} \\ \sigma_{v, x_3} \\ \dots \\ \sigma_{v, x_n} \\ 1 \end{bmatrix}}_{[D]} ;$$

$$[A] = \frac{[D]}{[\Sigma]} \quad \text{Expressão (70)}$$

Usando notação simplificada em que :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_1 x_2} &= \sigma_{1,2} \dots \sigma_{x_1 x_n} = \sigma_{1n} ; & \sigma_{v, x_1} &= \sigma_{01} \\
 \sigma_{x_2 x_1} &= \sigma_{2,1} \dots \sigma_{x_2 x_n} = \sigma_{2n} ; & \sigma_{v, x_2} &= \sigma_{02} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sigma_{x_n x_1} &= \sigma_{n,1} \dots \sigma_{x_n x_n} = \sigma_{nn} ; & \sigma_{v, x_n} &= \sigma_{0n}
 \end{aligned}$$

Tem-se essa mesma expressão, anotada de forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{01} \\ \sigma_{02} \\ \sigma_{03} \\ \dots \\ \sigma_{0n} \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \dots & \sigma_{3n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Sigma \end{bmatrix}^{-1}$$

Expressão (70)

O EXEMPLO N^o 29, apresentado a seguir, consistindo na aplicação do método numa situação muito simples, permite a melhor compreensão desses fundamentos ora explicados.

EXEMPLO N^o 29 - Estimação do teor de um bloco elementar pelo método de KRIGEAGEM.

Seja estimar o teor de um bloco elementar, através da estimativa do teor para seu ponto central $x_i = 0$, através de quatro amostras tomadas nos pontos $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ e $x_4=4$, situados em torno do bloco, e na situação da figura 81. Para comparação com a solução do mesmo problema pelo método dos INVERSOS QUADRADOS, admitimos as mesmas condições do EXEMPLO N^o 28, apresentado anteriormente à página 190 (da figura 61).

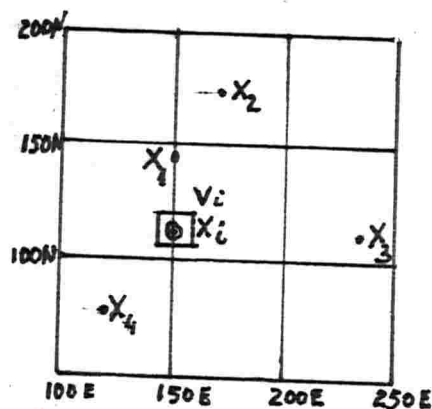


Fig 81

As distâncias do ponto "0" a cada um dos pontos 1 à 4, foram calculadas através de suas coordenadas, anteriormente, (ver EXEMPLO N^o 28 à página 190).

$$d_{01} = 30 \text{ m} ; \quad d_{02} = 62,94 \text{ m}$$

$$d_{03} = 90 \text{ m} ; \quad d_{04} = 42,43 \text{ m}$$

As distâncias entre os pontos das amostras entre si (calculados através de suas coordenadas), são as seguintes :

$$d_{12} = \sqrt{(140 - 174)^2 + (150 - 169)^2} = \sqrt{34^2 + 19^2} = 38,95 \text{ m.}$$

$$d_{13} = \sqrt{(140 - 110)^2 + (150 - 240)^2} = \sqrt{30^2 + 90^2} = 94,87 \text{ m.}$$

$$d_{14} = \sqrt{(140 - 80)^2 + (150 - 120)^2} = \sqrt{60^2 + 30^2} = 67,08 \text{ m.}$$

$$d_{23} = \sqrt{(174 - 110)^2 + (169 - 240)^2} = \sqrt{64^2 + 71^2} = 95,59 \text{ m.}$$

$$d_{24} = \sqrt{(174 - 80)^2 + (169 - 120)^2} = \sqrt{94^2 + 49^2} = 106,00 \text{ m.}$$

$$d_{34} = \sqrt{(110 - 80)^2 + (240 - 120)^2} = \sqrt{30^2 + 120^2} = 123,69 \text{ m.}$$

A expressão matricial (70) particularizada para esse exemplo será:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{01} & & & & \\ & \sigma_{02} & & & \\ & & \sigma_{03} & & \\ & & & \sigma_{04} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & 1 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma \end{bmatrix}^{-1}$$

Para que sejam estimados as covariâncias σ , utilizamos o VARIOGRAMA EXPERIMENTAL ajustado ao MODELO ESFÉRICO.

Neste exemplo, admitimos o caso mais simples de que, para todas as direções do plano (que contém o bloco elementar e as amostras), o VARIOGRAMA EXPERIMENTAL, se ajuste adequadamente a um único MODELO ESFÉRICO de VARIOGRAMA.

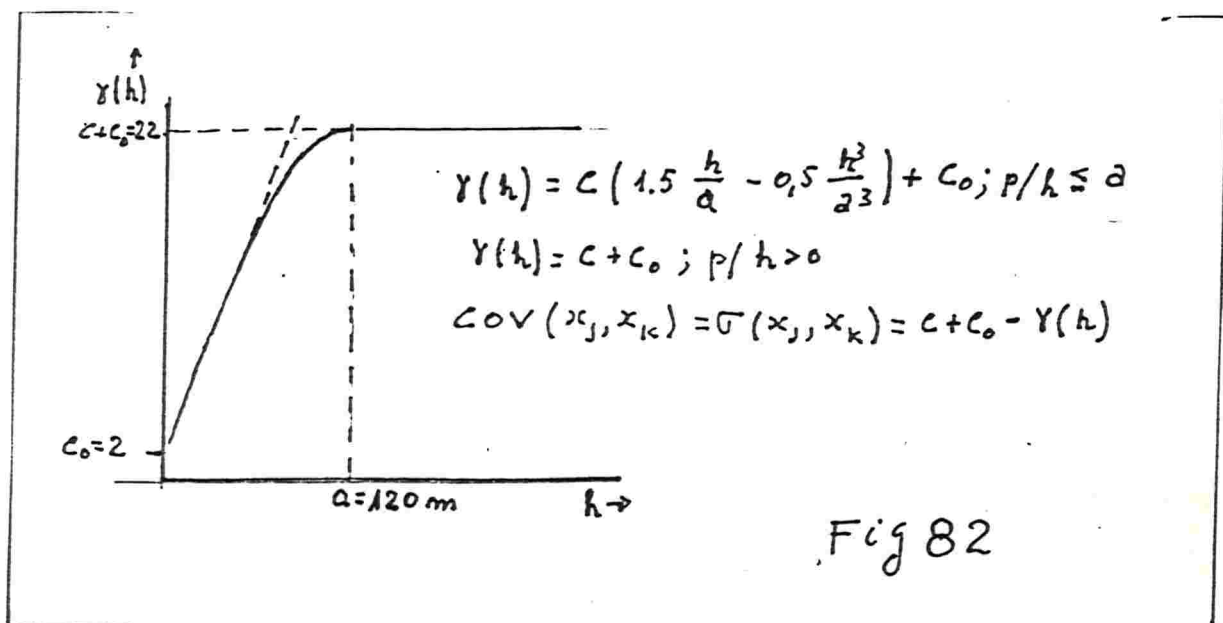
Seja esse modelo, o VARIOGRAMA, representado na figura 82. Conforme expressões (67a, b e c).

$$\gamma(\vec{h}) = C \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \frac{h^3}{a^3} \right) + C_0 \quad \text{para } h \leq a$$

$$\gamma(\vec{h}) = C + C_0 \quad ; \quad \text{para } h > a$$

conforme expressão (68a)

$$\text{COV}(x_j, x_k) = \sigma(x_j, x_k) = C + C_0 - \gamma(h)$$



Observações : Os mesmos raciocínios poderiam ser aplicados se as amostras e o bloco elementar estivessem espacialmente localizados em diferentes planos (como no caso representado pela fig. 59 à página 186).

A adequação à um único VARIOGRAMA, para todas as direções, significa admissão das condições mais simples de isotropia, das características de variabilidade do corpo de minério.

Cálculo das covariâncias σ , conforme as expressões (67a) e (68a), e para as distâncias h respectivas:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{44} \quad \text{para } h=0 \quad ; \quad \gamma(h) = 0 \quad ; \quad \sigma_{11} = C + C_0 = 22$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \text{para } h = 38,95 \text{ m} \quad ;$$

$$\gamma(h) = 20 \left[1.5 \frac{38,95}{120} - 0.5 \frac{(38,95)^3}{(120)^3} \right] + 2 = 11,396$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 22 - 12,165 = 10,604$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad ; \quad \text{para } h = 94,87 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 1,224$$

$$\text{para } h = 67,08 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{14} = \sigma_{41} = 4,977$$

$$\text{para } h = 95,59 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 1,157$$

$$\text{para } h = 106,00 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{24} = \sigma_{42} = 0,392$$

$$\text{para } h = 123,69 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{34} = \sigma_{43} = 0,000 \quad \text{observação : } h > a$$

$$\text{para } h = 30,00 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{01} = \sigma_{10} = 12,656$$

$$\text{para } h = 62,94 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{02} = \sigma_{20} = 5,708$$

$$\text{para } h = 90,00 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{03} = \sigma_{30} = 1,719$$

$$\text{para } h = 42,43 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{04} = \sigma_{40} = 9,835$$

Substituindo-se no sistema de equações matricial (70) particularizada, e resolvendo-se (com o uso de computador):

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,656 \\ 5,708 \\ 1,719 \\ 9,835 \\ 1,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 22,000 & 10,604 & 1,224 & 4,977 & 1 \\ 10,604 & 22,000 & 1,157 & 0,392 & 1 \\ 1,224 & 1,157 & 22,000 & 0,000 & 1 \\ 4,977 & 0,392 & 0,000 & 22,000 & 1 \\ 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 0 \end{bmatrix}^{(-1)} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,503298 \\ 0,0426814 \\ 0,0847429 \\ 0,369278 \\ -0,810762 \end{bmatrix}$$

Chegando-se para os fatores de ponderação:

$$\sum_1^4 a_j \cong 0,503 + 0,043 + 0,085 + 0,369 = 1$$

Sendo

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,50 \text{ \% Cu} \\ x_2 &= 1,20 \text{ \% Cu} \\ x_3 &= 0,40 \text{ \% Cu} \\ x_4 &= 0,60 \text{ \% Cu} \end{aligned}$$

Teores das amostras tomadas nos pontos x_1 , x_2 , x_3 e x_4 (ver EXEMPLO N^o 28 à página 190).

O teor estimado Z^* (V_i) para o bloco V_i cujo centro é o ponto X_0 (anotado 0); solucionando o problema, será :

$$\begin{aligned} Z^* (V_i) &= 0,503 \times 0,50 \text{ \% Cu} + 0,043 \times 1,20 \text{ \% Cu} + \\ &\quad 0,085 \times 0,40 \text{ \% Cu} + 0,369 \times 0,60 \text{ \% Cu} = \\ Z^* (V_i) &= 0,558 \text{ \% Cu} \cong 0,56 \text{ \% Cu} \end{aligned}$$

Observações :

- Para o teor de x_2 da amostra X_2 , tomada à 62,94 m do ponto central do bloco V_i , resultou o fator de ponderação

$\alpha_2=0,043$, muito menor do que o fator de ponderação $\alpha_3=0,085$, para o valor x_3 da amostra X_3 ; esta tomada à distância 90m (bem maior); que o fator α_2 , é o menor dos quatro fatores. Esses resultados mostram que o critério do método de KRIGEAGEM, matematicamente "considerou", a situação espacial desfavorável da amostra X_2 , na "sombra" da amostra X_1 , como foi observado no EXEMPLO N° 28 (ver observação da página 192), e o critério de exclusão da mesma, naquele mesmo problema.

- Nas condições desse exemplo, conclui-se ser mais verossímil o teor estimado de 0,56 % Cu, do que os anteriormente estimadas 0,61 % Cu e 0,52 % Cu conforme o método dos INVERSO QUADRADOS (ver EXEMPLO N° 28 à página 190).

Desse exemplo, compreende-se que o método GEOESTATÍSTICO, dará resultados precisos, desde que as condições permitam a utilização de modelo de VARIOGRAMA realmente adequados às condições do jazimento.

Geralmente os problemas apresentam-se com muito mais complexidade do que a deste exemplo.

A GEOESTATÍSTICA tem atualmente o status de uma nova ciência, sendo uma área de conhecimento muito evoluída e pesquisada, permitindo sua aplicação para solução de grande variedade de problemas, em Pesquisa Mineral.

BIBLIOGRAFIA - REFERÊNCIAS CITADAS

- Badgley, Peter C., 1959 - Structural methods for the exploration geologist, Edit. Harper's Geoscience series Carey croneis-USA
- Barnes, M. P. et alli, 1979 - Open-pit mine planning and design. C 6 Drill-hole interpolation: Estimating mineral inventory 65/80. Edit Society of Mining Engineers Crawford Hustrulid - USA
- David, M., 1977 - Geostatistical ore reserve estimation. Edit Elsevier Scientific Publishing Comp - Inglaterra - 1977
- Errico, J.C.D., 1984 - GEOESTATÍSTICA em jazida de Bauxita, o caso de Poços de Caldas-Artigo solicitado pela SBG para compor parte do BOLETIM ESPECIAL DJALMA GUIMARÃES comemorativo dos 50 anos do DNPM.
- Forrester, J.D., 1946 - Principles of field and mining geology. Edit. John Wiley S Sons Inc. - USA
- Freitas, Fernando, 1981 - Raios de influência e cálculo de reservas em pesquisa de carvão no Rio Grande do Sul por métodos Geoestatísticos. Public. rest.
- Gama, C.D.da, 1986 - Evolução dos métodos de cálculo de reservas minerais. Rev. Brasil Mineral n^o 28 36/41
- Griffith, S.U., 1960 - Alluvial prospecting and mining. Edit Pergamon Press - USA

- Grossi Sad, J.H., 1986 - Fundamentos sobre a variabilidade dos depósitos minerais. Coedit. DNPM-MME - CPRM-MME GEOSOL, RJ - Brasil.
- Hazen, Scott W. Jr 1976 - Some statistical techniques for analyzing mine and mineral deposit sample and assay data - Bulletin 621 Edit. Bureau of Mines - United States Depart. of Interior - USA.
- Hughes, W. et alii 1979 - Open-pit mine planning and design. c.5 Drill-hole interpolation: Mineralization interpolation techniques 51/64. Edit Society of Mining Engineers - Crawford Hustrulid - USA.
- Kreiter, V. M. 1968 - Geological prospecting and exploration - Mir Publishers - URSS
- Krige, D G e Veckermam, H.J. 1963 - Value contours and improved regression techniques for ore reserve valuations - Journal of South African Institute of Mining and Metallurgy - May 1963.
- Kužvart, M. & Böhmer, M. 1978 - Prospecting and exploration of mineral deposits. Co edit. Elsevier Scientific Publishing Comp - Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences - Inglaterra - Tchecoslovaquia.
- Leão, M.L. et alii - Estatística - Apostila - Escola de Engenharia UFRGS.
- Loczy, de Louis e Ladeira, Eduardo A. 1976 - Geologia estrutural e introdução à Geotectônica - Edit. Edgar Blucher Ltda. c/ patrocínio do CNPq-RJ-Brasil.

- Maranhão R. J. L. 1983 - Introdução à Pesquisa Mineral. Edit Banco do Nordeste do Brasil S.A. - ETENE-FO-Brasil
- Maximov, A. et alli 1973 - Short course of geological prospecting and exploration. Edit Mir Publishers, URSS.
- Mc Kinstry, H.E. 1948 - Mining geology. Edit Prentice-Hall Inc. USA
- Motta Marques, J. M. da 1978 - Prospecção geoquímica Edit. Instituto de Geociências da UFRGS - DAEC - RS-Brasil.
- Paulo Abib Engenharia S.A. - Relatório inédito de estudos geoestatísticos sobre a Jazida de Anitápolis no estado de SC, da ILM - Indústria Luchsinger Madörin S.A. (liberado para fins didáticos).
- Ready, L.A. et alii 1982 - Underground mining methods hand book, Section I Ore reserve calculation 17/38 Edit. Society of Mining Engineers - W.A. Hustrulid-USA.
- Rodrigues, M.da S. 1956 - Vocabulário Brasileiro de Estatística. Boletim n° 203 Estatística n° 03. Edit. USP - SP - Brasil.
- Rose, A.W. & Hawkes, H.E. & Webl J.S. 1979 - Geochemistry in minered exploration. Edit. Academie Press USA.
- Sinclair, A.J. 1974 - Selection of threshold values in geochemical data using probability graphs Journal of Geochemical Exploration (Journal of the Association of Exploration Geochimists) 3: 129-148 - USA.

- Stanley, B.T. 1979 - Open-pit mine planning and design C. Mineral block models: Principles of ore-body modeling 43/50. Edit Society of Mine Engineers - Crawford, Hustrulid USA.
- Suffert, Telmo 1978 - Método de cálculo de reservas - Projeto Carvão no Rio Grande do Sul-Fig. 2B Relatório 1978 - CPRM - Superintendência de Porto Alegre - RS.
- Thomas, L.J. 1978 - An introduction to mining. Edit. Robert Burton Printers Pty Ltd. Austrália.
- Truscott, S.J. 1973 - Mine Economics Inglaterra 1937.
- Wolf, H.J. 1957 - How to estimate ore reserves 11/12 pags. - X - 74 Modern operating techniques in open-pit and underground mining - compiled from articles in Engineering and Mining Journal, USA.

ESCOLA DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA