

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Cadernos de Matemática e Estatística
Série B: Trabalho de Apoio Didático

Gráficos na Escola

Vera Clotilde Carneiro
Sergio Cláudio Ramos

Série B, nº 13,
Porto Alegre, dezembro de 1992

O USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DO CALCULO

GRAFICOS
NA
ESCOLA

MANUAL DO USUARIO

REPRESENTAÇÃO E TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Vera Clotilde Carneiro
IM - UFRGS

Sérgio Cláudio Ramos
IM - UFRGS

Neste trabalho propomos uma alternativa pedagógica para o ensino de funções elementares e suas representações gráficas, a nível de 2º grau. Apresentamos um software educacional para uso em microcomputadores compatíveis com IBM PC.

Este procedimento alternativo dá oportunidade ao aluno de construir seu conhecimento. Esta construção se faz pela interação do sujeito com o objeto proporcionada pela manipulação e observação das funções e gráficos nas telas do programa.

Além da máquina, o lápis, o papel e, principalmente, o raciocínio são elementos fundamentais desta atividade. Assim, através da efetiva resolução das questões propostas, o aluno passa por etapas crescentes de conhecimento, numa seqüência de ações e reflexões.

O SOFTWARE

O objetivo principal do software é auxiliar o estudante secundário a construir gráficos sem precisar recorrer a tabelas de pontos.

É apresentado um conjunto de funções básicas, denominadas "mães".

Uma "função-mãe" $y = f(x)$ tem uma família do tipo $y = m \cdot f(px + q) + n$, onde m, n, p, q são parâmetros reais, $m, p \neq 0$.

O software fornece o gráfico de qualquer elemento da família, destaca as transformações que ocorrem no gráfico original - translações, expansões, contrações ou reflexões - e relaciona cada transformação com a alteração de cada parâmetro. Também oferece, através de um HELP, informações teóricas, com observações que evitam os erros mais comuns.

Este trabalho também pode ser utilizado na aprendizagem das funções lineares e quadráticas e para introduzir graficamente a noção de continuidade.

GRÁFICOS NA ESCOLA

◦ Iniciando:

- Ligue o computador.
- No caso do micro não possuir disco rígido (winchester), insira o disco de sistema no drive A e tecle <ENTER>.
- Se o sistema carregou corretamente, você verá o seguinte texto:

A:\>_ ou A>_ ou C:\>_

- Digite: SCHOOL <ENTER>.

◦ Apresentação:

O Uso do Computador no Ensino do Cálculo
GRÁFICOS NA ESCOLA

AUTORES

Vera Clotilde Carneiro
Professora do IM - UFRGS
Sergio Claudio Ramos
Professor do IM - UFRGS
Eduardo Leao Garcia
Aluno do Instituto de Informatica - UFRGS

INFORMACOES: Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matematica
Av. Bento Goncalves, 9500 - Caixa Postal 15040 - CEP 91540-000
Porto Alegre - RS - Brasil

- Pressione alguma tecla para continuar.

◦ Menu Principal:

GRAFICOS NA ESCOLA

O objetivo deste programa é auxiliar o estudante de matemática secundária a fazer gráficos de funções elementares sem o auxílio de tabelas de pontos. Partimos dos gráficos de algumas funções básicas: as "funções-mães".

"FUNCOES-MAES":

	Domínio	Contra-domínio
1) $Y = X$	[-10,10]	[-10,10]
2) $Y = X^n$, n inteiro e/ módulo menor que 8	[-10,10]	[-10,10]
3) $Y = 1/X$	[-10,10]	[-10,10]
4) $Y = 10^X$	[-2,2]	[-100,100]
5) $Y = \text{sen } X$	[-10,10]	[-10,10]
6) $Y = \text{cos } X$	[-10,10]	[-10,10]
7) $Y = \text{tan } X$	[-10,10]	[-10,10]
8) $Y = x $	[-10,10]	[-10,10]
9) $Y = \sqrt{x}$	[-10,10]	[-10,10]

Digite o número da função:

- Digite o número da "função-mãe" desejada.

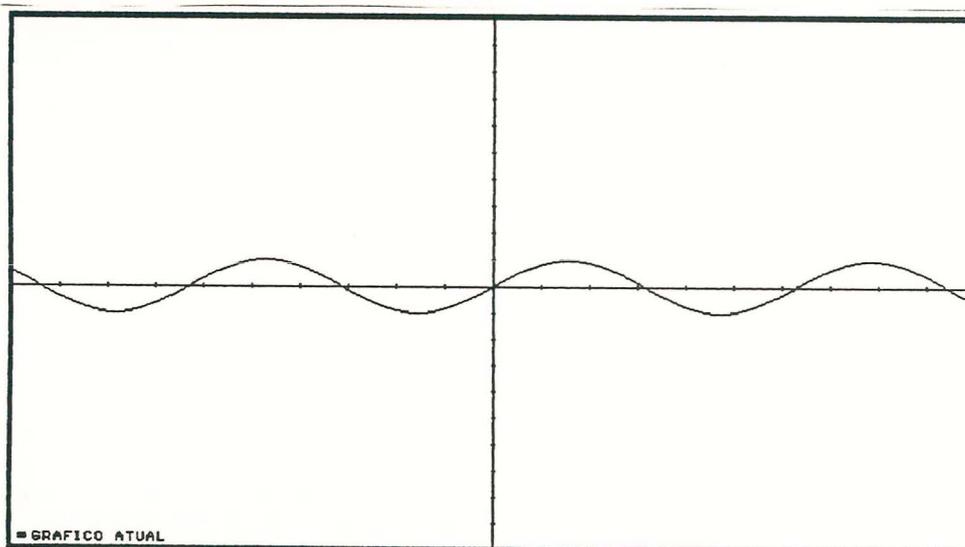
- No caso da função nº 2 ($Y=X^n$), será solicitado o expoente.

Digite o número e tecla <ENTER>.

- Dependendo da função, será oferecida a opção de HELP.

Responda S (Sim) ou N (Não).

◦ Tela de Gráficos:



- É onde os gráficos são traçados.

- Para sair tecla <ESPAÇO>.

◦ Menu de Transformações:

```

A FAMILIA DA "FUNCAO-MAE" y = F(x): y = m * F(p * x + q) + n
      onde m,n,p,q sao parametros reais e m,p nao nulos

A "funcao-mae" y=F(x) tem m=p=1 e n=q=0.
Cada modificacao nos valores dos parametros causa uma transformacao no
grafico da "mae".

m) Y = m * F(x)      m>1 Expansao vertical
                    0<n<1 Contracao vertical
                    n<0 Reflexao relativa ao eixo X
n) Y = F(x) + n      n>0 Translacao vertical para cima
                    n<0 Translacao vertical para baixo
p) Y = F(p * x)      p>1 Contracao horizontal
                    0<p<1 Expansao horizontal
                    p<0 Reflexao relativa ao eixo Y
q) Y = F(x + q)      q>0 Translacao horizontal para a esquerda
                    q<0 Translacao horizontal para a direita

m = 1.00           n = 0.00           p = 1.00           q = 0.00

Qual parametro deseja alterar (G - Grafico/H - Help/F - Nova funcao/S - Sai):
    
```

- Nesta tela podem ser feitas alteraçoes nos parâmetros "m", "n", "p" e "q". Para alterar qualquer um dos parâmetros tecla a letra correspondente (m,n,p,q).

- Para traçar o gráfico tecla <G>.
- Para acessar a tela de HELP tecla <H>.
- Para escolher outra função-mãe tecla <F>.
- Digitando <S> termina o programa.

◦ HELP:

```

                                Y = Sen X

A funcao do tipo y = m*sen(p*x+q)+n tem grafico senoidal.
Os elementos de uma curva senóide sao:

Amplitude = m

                2 * pi
Período = -----
                p

Nível médio = n

OBS: Relacao seno e cosseno

        y = sen(x + pi/2) = cos x

A curva do cosseno resulta de uma translacao horizontal da curva do seno.

*** Pressione <espaco> para continuar ***
    
```

- Na tela de HELP são fornecidos alguns conceitos e fórmulas sobre a função-mãe escolhida. Para sair de uma tela tecla <ESPAÇO>.

ALGUMAS ATIVIDADES PROPOSTAS:

1) a) Faça o gráfico da função

$$y = 3 \operatorname{sen} \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) - 2$$

alterando um parâmetro de cada vez.

Identifique e anote a seqüência de transformações que ocorrem no gráfico da "função-mãe" como consequência da alteração dos parâmetros.

b) Calcule o período, a amplitude e o nível médio da curva senóide obtida.

RESOLUÇÃO:

a) 1ª ação - Escolha da função-mãe.

GRAFICOS NA ESCOLA

O objetivo deste programa é auxiliar o estudante de matemática secundária a fazer gráficos de funções elementares sem o auxílio de tabelas de pontos. Partimos dos gráficos de algumas funções básicas: as "funções-mães".

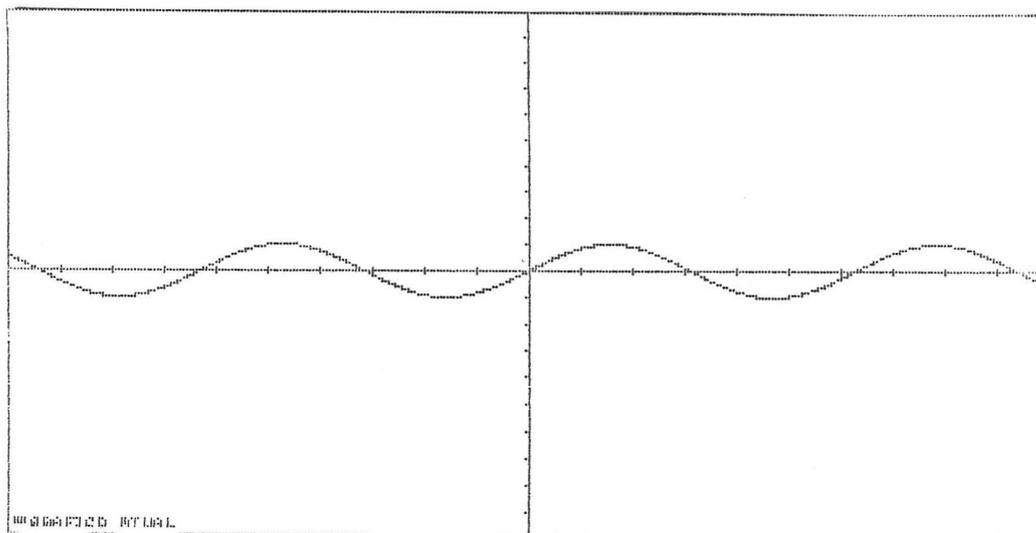
"FUNCOES-MAES":

	Domínio	Contra-domínio
1) $y = x$	$[-10,10]$	$[-10,10]$
2) $y = x^n$, n inteiro c/ módulo menor que 8	$[-10,10]$	$[-10,10]$
3) $y = 1/x$	$[-10,10]$	$[-10,10]$
4) $y = 10^x$	$[-2,2]$	$[-100,100]$
5) $y = \operatorname{sen} x$	$[-10,10]$	$[-10,10]$
6) $y = \operatorname{cos} x$	$[-10,10]$	$[-10,10]$
7) $y = \operatorname{tan} x$	$[-10,10]$	$[-10,10]$
8) $y = x $	$[-10,10]$	$[-10,10]$
9) $y = \sqrt{x}$	$[-10,10]$	$[-10,10]$

Digite o numero da funcao: 5

Deseja auxílio (Sim/Nao)?

2ª ação - Gráfico da função-mãe.



3ª ação - Alteração do parâmetro "m". (m = 3)

A FAMÍLIA DA "FUNÇÃO-MAE" $y = F(x)$: $y = m * F(p * x + q) + n$
onde m, n, p, q são parâmetros reais e m, p não nulos

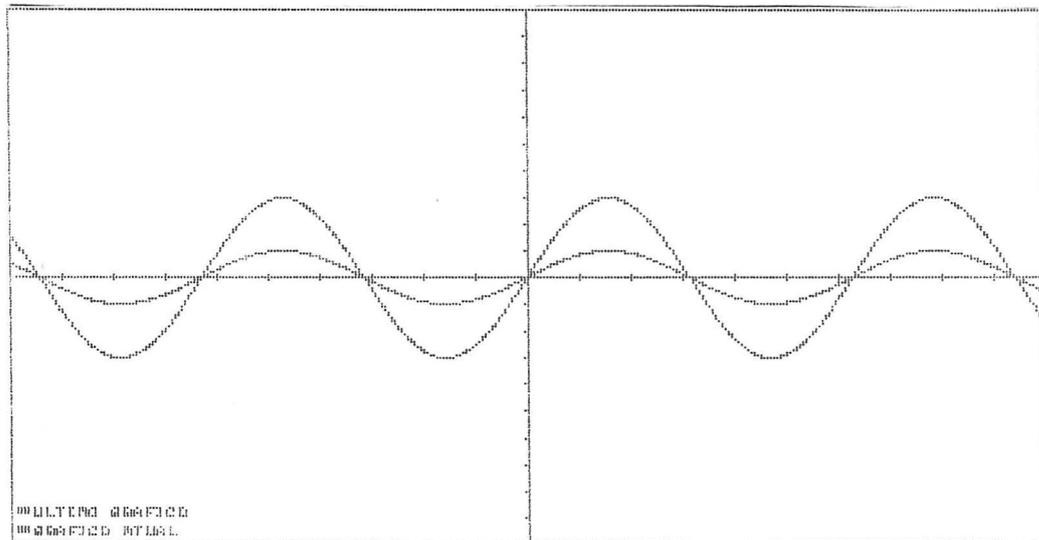
A "função-mae" $y=F(x)$ tem $m=p=1$ e $n=q=0$.
Cada modificação nos valores dos parâmetros causa uma transformação no gráfico da "mae".

m) $Y = m * F(x)$	$m > 1$ Expansão vertical
	$0 < m < 1$ Contração vertical
	$m < 0$ Reflexão relativa ao eixo X
n) $Y = F(x) + n$	$n > 0$ Translação vertical para cima
	$n < 0$ Translação vertical para baixo
p) $Y = F(p * x)$	$p > 1$ Contração horizontal
	$0 < p < 1$ Expansão horizontal
	$p < 0$ Reflexão relativa ao eixo Y
q) $Y = F(x + q)$	$q > 0$ Translação horizontal para a esquerda
	$q < 0$ Translação horizontal para a direita

m = 3.00 n = 0.00 p = 1.00 q = 0.00

Qual parâmetro deseja alterar (G - Gráfico/H - Help/F - Nova função/S - Sai):

4ª ação - Gráfico da função $y = 3 \text{ sen } x$.



OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

A alteração do valor de "m" de 1 para 3 causou uma expansão vertical no gráfico. A amplitude da curva que era 1 agora é 3.

5ª ação - Alteração do parâmetro "n". (n = -2)

A FAMÍLIA DA "FUNÇÃO-MAE" $y = F(x)$: $y = m * F(p * x + q) + n$
 onde m,n,p,q são parâmetros reais e m,p não nulos

A "função-mae" $y=F(x)$ tem $m=p=1$ e $n=q=0$.

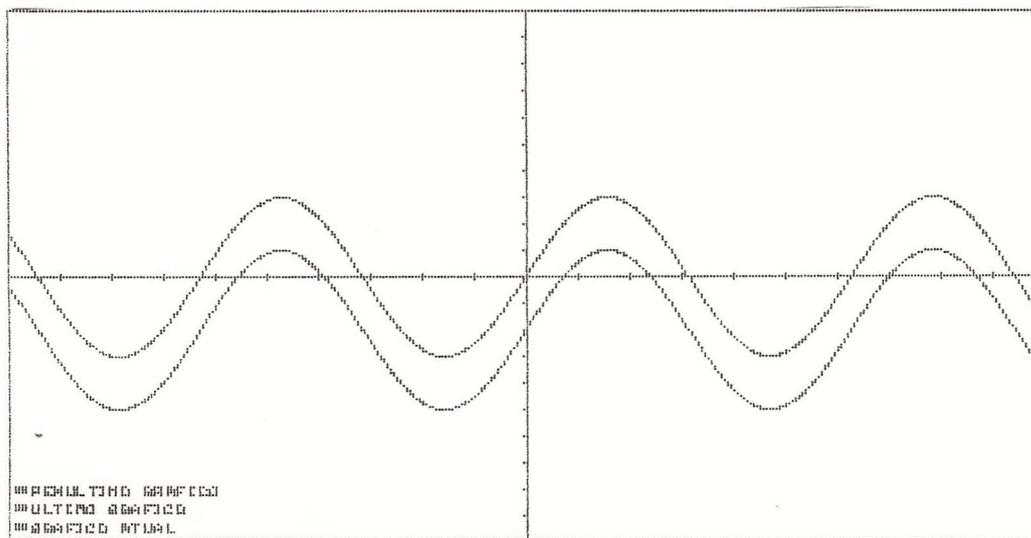
Cada modificação nos valores dos parâmetros causa uma transformação no gráfico da "mae".

m) $Y = m * F(x)$	$m > 1$	Expansão vertical
	$0 < m < 1$	Contração vertical
	$m < 0$	Reflexão relativa ao eixo X
n) $Y = F(x) + n$	$n > 0$	Translação vertical para cima
	$n < 0$	Translação vertical para baixo
p) $Y = F(p * x)$	$p > 1$	Contração horizontal
	$0 < p < 1$	Expansão horizontal
	$p < 0$	Reflexão relativa ao eixo Y
q) $Y = F(x + q)$	$q > 0$	Translação horizontal para a esquerda
	$q < 0$	Translação horizontal para a direita

m = 3.00 n = -2.00 p = 1.00 q = 0.00

Qual parâmetro deseja alterar (G - Gráfico/H - Help/F - Nova função/S - Sai):

6ª ação - Gráfico da função $y = 3 \text{ sen } x - 2$.

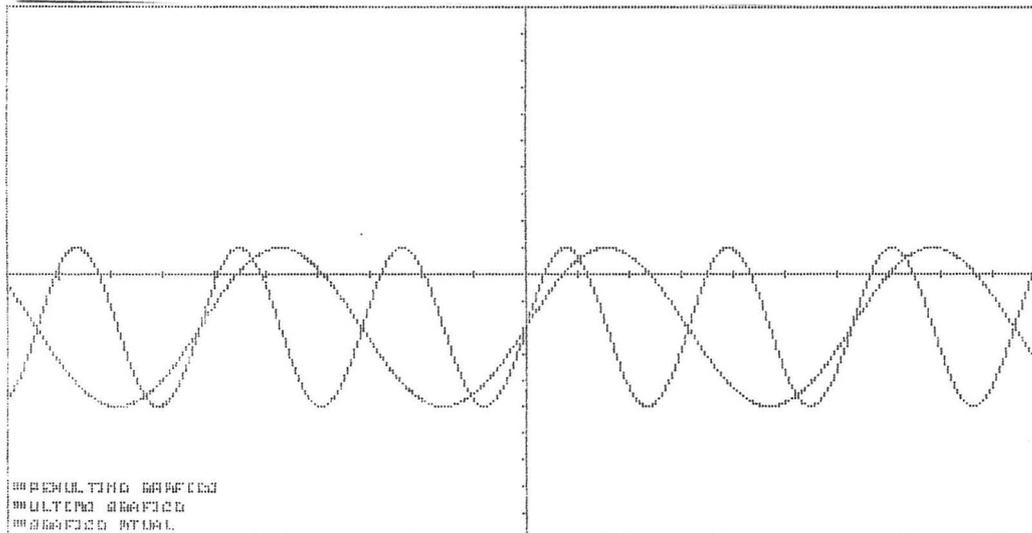


OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

A alteração do valor de "n" causou uma translação vertical para baixo, no sentido do eixo y negativo.

O ponto médio de oscilação da senóide, que era zero, agora é -2.

7ª ação - Alteração do parâmetro "p". (p=2)

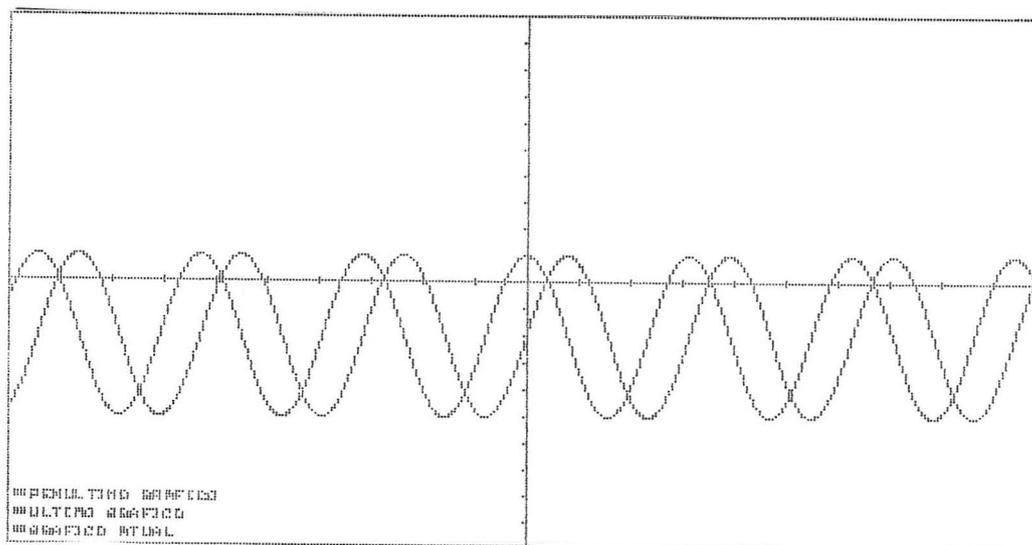


OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

A alteração do valor de "p" causou uma contração horizontal no gráfico. O período, que era 2π , agora é π .

8ª ação - Alteração do parâmetro "q".

$$q = \pi/2 \quad (\pi = 3,14) \quad q = 1,57$$



OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

A alteração do valor de "q" causou uma translação horizontal no gráfico, para a esquerda, no sentido do eixo x negativo. Chegamos a esta conclusão porque o primeiro pico da senóide, que estava à direita do eixo dos y , agora está sobre o eixo. A curva anterior sofreu uma translação de $\pi/4$ (0,8) unidades para a esquerda.

b) HELP

$Y = \text{Sen } X$

A função do tipo $y = m \cdot \text{sen}(p \cdot x + q) + n$ tem gráfico senoidal.
Os elementos de uma curva senóide são:

Amplitude = m

Período = $\frac{2 \cdot \pi}{p}$

Nível médio = n

OBS: Relação seno e cosseno

$y = \text{sen}(x + \pi/2) = \text{cos } x$

A curva do cosseno resulta de uma translação horizontal da curva do seno.

*** Pressione <espaco> para continuar ***

OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

Com a ajuda do Help confirmamos as observações obtidas nos gráficos.

O período é $P = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$; a amplitude é "m" igual a 3 e o nível médio é $n = -2$.

2) a) Escreva a função $y = -2x^2 + 6x - 4$ como um elemento da família $y = m \cdot f(px + q) + n$ onde a função-mãe $y = f(x)$ é a função $y = x^2$.

b) Trace o gráfico da função $y = -2x^2 + 6x - 4$ e observe a sequência de transformações que ocorrem no gráfico mãe como consequência da alteração dos parâmetros.

c) Calcule o vértice e as raízes da parábola

$$y = -2x^2 + 6x - 4$$

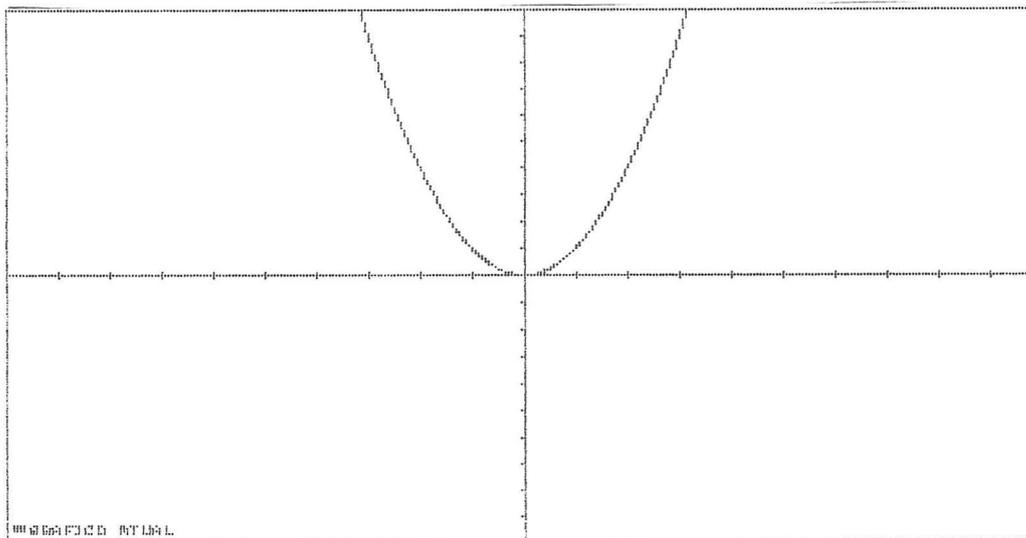
e confira os resultados com o gráfico.

d) Esta parábola tem as mesmas raízes que a parábola

$$y = -x^2 + 3x - 2 ?$$

E tem o mesmo vértice ?

1ª ação - Escolha da função-mãe.



2ª ação - Help

$y = x^2$

A função $y = x^2$ é a "mãe" da família das funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$ com 'a' não nulo.
Qualquer função deste tipo pode ser escrita da forma $y = m(x + q)^2 + n$.

Vejam os:

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + a \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

Assim:

$$m = a, \quad n = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}, \quad q = -\frac{b}{2a} \text{ e } p \text{ mantém-se igual a } 1.$$

Denominamos DISCRIMINANTE: $D = b^2 - 4ac$

Logo: $n = \frac{-D}{4a}$

Os gráficos das funções $y = ax^2 + bx + c$ são parábolas.
*** Pressione <espaço> para continuar ***

As RAÍZES da função $y = ax^2 + bx + c$ são os valores de x que satisfazem a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Isto é:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{D}{4a} \right) = 0$$

Isolando x obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Esta é a FORMULA DE BASKARA da equação.

As raízes correspondem aos pontos de interseção da parábola com o eixo x .

Se $D > 0$ existem dois pontos de interseção.

Se $D = 0$ existe um só ponto de interseção.

Se $D < 0$ não existe interseção.

*** Pressione <espaco> para continuar ***

O VERTICE da parábola $y = x^2$ é $V(0,0)$

O VERTICE da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o resultado de uma translação horizontal seguida de uma translação vertical.

COORDENADAS DO VERTICE:

1°) Translação horizontal

a) na direção de $x > 0$ se $q < 0$

b) na direção de $x < 0$ se $q > 0$

$$\text{Logo, } x \text{ vértice} = -q = -\frac{-b}{2a}$$

2°) Translação vertical

a) na direção de $y > 0$ se $n > 0$

b) na direção de $y < 0$ se $n < 0$

$$\text{Logo, } y \text{ vértice} = n = \frac{-D}{4a}$$

Cálculo dos parâmetros para $y = -2x^2 + 6x - 4$

Anotações do aluno

$$a = -2 \qquad b = 6 \qquad c = -4$$

$$m = a = -2$$

$$n = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(36 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4))}{4 \cdot (-2)} = \frac{-4}{-8} = +0,5$$

$$p = 1$$

$$q = \frac{b}{2a} = \frac{6}{-4} = -1,5$$

$$x \text{ vértice: } -q = 1,5$$

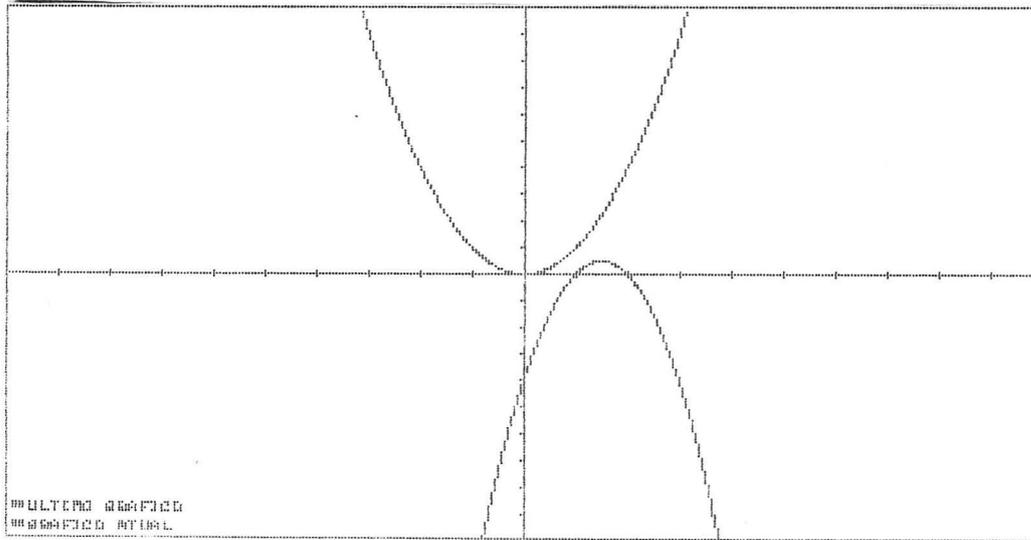
$$y \text{ vértice: } n = 0,5$$

$$\text{Raízes: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-4} = \frac{-6 \pm 2}{-4}$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

3ª ação - Alteração dos valores de m, n, q .

$$m = -2 \quad n = 0,5 \quad q = -1,5$$

4ª ação - Gráfico da função $y = -2x^2 + 6x - 4$



OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

A alteração de "m" para valor negativo causou uma reflexão da curva com relação ao eixo x . A concavidade ficou voltada para baixo. As alterações de "n" e "q" causaram duas translações: uma translação vertical para cima porque "n" é positivo e uma translação horizontal para a direita porque "q" é negativo.

Os valores de "n" e "-q" indicam o vértice da nova parábola: $(1,5 ; 0,5)$.

5ª ação - HELP

Cálculo dos parâmetros para $y = -x^2 + 3x - 2$

ANOTAÇÕES DO ALUNO:

$$a = -1 \quad b = 3 \quad c = -2$$

$$m = a = -1$$

$$n = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(9 - 8)}{-4} = 0,25$$

$$p = 1$$

$$q = \frac{b}{2a} = \frac{3}{-2} = -1,5$$

$$x \text{ vértice: } -q = 1,5$$

$$y \text{ vértice: } n = 0,25$$

$$\text{Raízes: } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$
$$x_1 = 2 \quad x_2 = 1$$

6ª ação - Alteração dos parâmetros

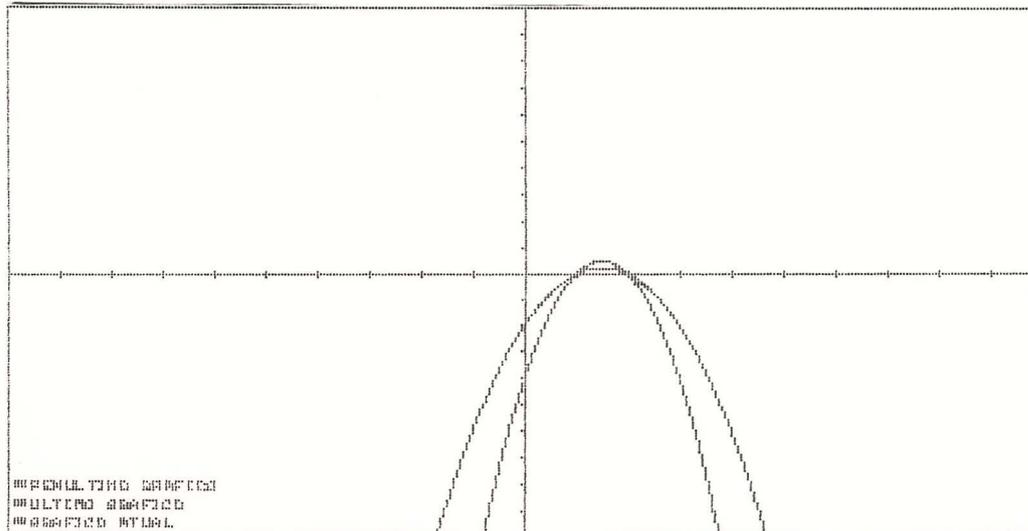
$$m = -1$$

$$n = 0,25$$

$$p = 1$$

$$q = -1,5$$

7ª ação - Gráfico de $y = -x^2 + 3x - 2$



UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

OBSERVAÇÕES DO ALUNO:

As duas parábolas têm as mesmas raízes pois as equações $-x^2+3x-2=0$ e $-2x^2+6x-4=0$ são equivalentes, mas os dois gráficos são diferentes. A abertura e os vértices são diferentes pois a função $y = -2x^2+6x-4$ resulta da multiplicação da $y = -x^2+3x-2$ por um fator 2.

Agradecemos a Eduardo Leão Garcia, bolsista do projeto "O Uso do Computador no Ensino do Cálculo", pela parte computacional e de diagramação do trabalho.

Vera Clotilde Carneiro, professora licenciada em matemática com mestrado em Sistemas Dinâmicos pelo IM - UFRGS, dedica-se ao curso de Licenciatura e a atividades de extensão ligadas ao ensino de Matemática.

Sérgio Cláudio Ramos, professor licenciado em matemática com mestrado em Matemática Aplicada pelo IM - UFRJ. Responsável pelo projeto "O Uso do Computador no Ensino do Cálculo".

INFORMAÇÕES: Prof^ª Vera Clotilde Carneiro ou
Prof. Sérgio Cláudio Ramos
Av. Bento Gonçalves, 9500
Caixa Postal 15040 - CEP 91540-000
Porto Alegre - RS - Brasil

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89.
2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89.
3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90
4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90
5. Sandra R. C. Pizzato - Cálculo Numérico - AGO/91
6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91
7. Elsa Mundstock - Iniciaç ao ao SPSS/PC - SET/91
8. Elisa Haag, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Clotilde - Notas da 1a. Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92
9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos. Coordenaç ao: Profa. Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92
10. Silvío Possoli - Análise Multivariada - JUL/92
11. Dinara Westphalen Fernandez - Números Índices - OUT/92
12. Maria Teresinha Albanese - Coeficiente de Fidedignidade de um instrumento de Medida - OUT/92
13. Vera Clotilde Carneiro e Sérgio Cláudio Ramos - Gráficos na Escola - DEZ/92

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Hégio Trindade

Instituto de Matemática

Diretor: Professor Aron Taitelbaum

Núcleo de Atividades Extra Curriculares

Coordenador: Professor Aron Taitelbaum

Secretária: Faraildes Beatriz da Silva

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série E: Dissertações de Mestrado

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares

Instituto de Matemática - UFRGS

Av. Bento Gonçalves, 9500

91.540-000 - Agronomia - POA/RS

Telefone: 336.98.22 ou 339.13.55 Ramal: 6176