

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Estudo do comportamento da equação da
onda imagem na análise sísmica do subsolo**

por

Cassinara Gomes Teixeira

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestra em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli
Orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2020.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Gomes Teixeira, Cassinara

Estudo do comportamento da equação da onda imagem na análise sísmica do subsolo / Cassinara Gomes Teixeira.— Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2020.

67 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2020.

Orientador: Luiz De Bortoli, Álvaro

Dissertação: Vibração, Controle, Sistemas e Sinais remigração, onda-imagem, diferenças finitas, análise numérica

Estudo do comportamento da equação da onda imagem na análise sísmica do subsolo

por

Cassinara Gomes Teixeira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestra em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibração, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli

Banca examinadora:

Prof.^a Dr.^a Eliete Biasotto Hauser
PUCRS

Prof. Dr. Rommulo Vieira Conceição
PPGGEO/UFRGS

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha
DMPA/UFRGS

Dissertação apresentada
24/01/2020.

Prof. Dr. Esequia Sauter
Coordenador

Sou grata pela minha luta, sem ela eu não teria tropeçado em minhas forças.

Alexandra Elle

18 dias, 14 horas e 25 minutos

RESUMO

Neste trabalho, estuda-se a equação da onda imagem e sua utilização para o problema de remigração na profundidade através de métodos numéricos. O problema consiste na reconstrução de uma imagem das camadas geológicas do subsolo a partir de uma imagem previamente migrada com um modelo de velocidade. O principal objetivo desta dissertação é a investigação de métodos numéricos para a solução da equação da onda imagem, e para isso realizou-se a investigação teórica e a análise numérica. Assim, elaborou-se esquemas numéricos consistentes e estáveis, e a viabilidade dos algoritmos desenvolvidos foi testada numericamente. Os testes numéricos mostram que o método de diferenças finitas com aproximações centradas é o mais eficiente. Além disso, as implementações mostram a similaridade, tanto do aspecto físico como analítico, com a equação da onda clássica. Esta semelhança é útil, pois podemos considerar métodos já conhecidos e extensivamente estudados para a equação da onda clássica, e aplicá-los à investigações da equação da onda imagem para o problema de remigração na profundidade.

ABSTRACT

In this work, we study the image wave equation and its use for the depth remigration problem through numerical methods. The problem is to reconstruct an image of the underground geological layers from an initial image migrated with a velocity model. The main objective of this dissertation is the investigation of possible numerical methods for the solution of the image wave equation and, for that, a theoretical investigation and a numerical analysis were performed. In this way, consistent and stable numerical schemes were elaborated, and the viability of the developed algorithms was numerically tested. Numerical tests show that the finite difference method with centered approximations is the most efficient. In addition, the implementations show a physical and analytical similarity to the classical wave equation. Such similarity is useful because we can consider known and extensively studied methods for the classical wave equation, and apply them to investigations of the wave image equation for in-depth remigration problems.

Sumário

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA SÍSMICA E EQUAÇÃO DA ONDA IMAGEM	6
2.1 Introdução ao processamento sísmico	6
2.2 Equação da onda imagem	8
2.3 Solução analítica da equação da onda imagem	21
3 PROCEDIMENTO NUMÉRICO E ANÁLISE DE ESTABILIDADE	25
3.1 Revisão dos métodos aplicados na migração sísmica	25
3.2 Desenvolvimento do método numérico	26
3.3 Análise de estabilidade e consistência	32
3.3.1 Consistência	32
3.3.2 Estabilidade	34
4 RESULTADOS NUMÉRICOS	38

4.1	Implementações	38
4.2	Equação da Onda Clássica e Equação da Onda Imagem	43
4.3	Equação da Onda Imagem: Esquemas Centrado e Avançado para derivada mista	45
4.4	Comparativo entre aproximações centradas e incrementos de velocidade	48
4.5	Análise dos resultados	50
5	CONCLUSÕES	53
5.1	Possibilidade futuras	54
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
	APÊNDICE A EQUAÇÃO DA ONDA IMAGEM - DEDUÇÃO ALTERNATIVA	62
A.1	Propriedades cinemáticas da Onda Imagem	62

Lista de Figuras

Figura 2.1	Exemplo de reflexão simples com apenas uma camada	7
Figura 3.1	Domínio (x, z)	29
Figura 4.1	Subsolo para três camadas e respectivas velocidades de migração.	41
Figura 4.2	Propagação da onda para três camadas e velocidades de migração: 1500m/s, 4100m/s e 1350m/s.	42
Figura 4.3	Propagação da onda para aproximações centradas de ordem 2 .	43
Figura 4.4	Propagação da onda para aproximações centradas e avançadas .	44
Figura 4.5	Solução da equação da onda imagem com aproximação de ordem 2 e incremento de velocidade 2m/s	45
Figura 4.6	Solução da equação da onda imagem para aproximação de ordem 2 com incremento de velocidade 8m/s	46
Figura 4.7	Solução da equação da onda imagem com incremento de veloci- dade 2m/s e 8m/s	48
Figura 4.8	Solução da equação da onda imagem com incremento de veloci- dade 2m/s e 0.04m/s	49
Figura A.1	Geometria da migração na profundidade de um ponto P e seu respectivo ponto imagem migrado R	64

LISTA DE SÍMBOLOS

$D\phi$	Operador diferencial
$D^\Delta\phi$	Operador discretizado
k_1, k_2, c, d, c_1, c_2 e c_3	Constantes
k_x e k_z	Número de onda na direção horizontal e na vertical
I_0 e K_0	Funções de Bessel modificadas de ordem zero
m, n, l, j	Índices
$p(x, z, t)$	Campo de ondas de pressão acústica
$p(x, z, v)$	Campo de ondas imagem
$p_0(x, z)$	Frente de onda imagem migrada com velocidade v_0
$P(x, z)$	Ponto refletor no domínio (x, z)
v_{min}	Velocidade mínima de propagação da onda imagem
x, z, t, v	Variáveis
(x, t)	Domínio no tempo
(x, z)	Domínio na profundidade
z_{max}	Profundidade máxima do domínio
α, β	Ângulos de incidência
$\Delta x, \Delta z$ e Δv	Incrementos de números positivos
δ	Parâmetro que influencia posição vertical
ϵ	Parâmetro que influencia posição lateral
$\phi(x, z, v)$	Função suave
$\eta = \Lambda^2 \tau \mu$	
Λ	Autovalor
$\mu = \ln v$	
ξ	Fator de amplificação
$\tau = \frac{z^2}{2}$	

1 INTRODUÇÃO

No campo da Geofísica, objetiva-se obter bases das propriedades físicas da Terra e de que maneira elas se organizam e se difundem na subsuperfície. A interpretação de dados sísmicos tem sido muito importante na exploração e caracterização de reservas de petróleo e, mais ainda, na situação atual de escassez dos recursos naturais, como do próprio petróleo e da água potável. A quantidade de reservatórios está diminuindo rapidamente enquanto a necessidade por óleo e gás está aumentando [17].

No início do século XX, o interesse na exploração de petróleo era localizar estruturas geológicas adequadas para acumulação de hidrocarbonetos. Porém, a localização exata dessas estruturas só era possível após perfurações no subsolo, procedimento que possui riscos e custos operacionais altíssimos. Quanto maior a profundidade, menor é a resolução que levantamentos gravitacionais ou magnéticos podem fornecer. Sob estas condições, métodos de reflexão sísmica tornam-se úteis e desempenham papel proeminente na busca por estruturas geológicas adequadas [1].

Atualmente, a migração sísmica é o método mais utilizado para determinar a estrutura e as propriedades da subsuperfície na exploração sísmica de hidrocarbonetos [26]. As imagens sísmicas, além de outras informações são usadas para gerar perspectivas de perfuração de petróleo e gás. Desta forma, determina-se o mapeamento das estruturas geológicas e, em consequência, obtém-se o reservatório da massa rochosa para a exploração [21]. Contudo, busca-se desenvolver métodos para estimar propriedades em subsuperfície e delinear estruturas geológicas em maior escala, de forma mais rápida, acessível e menos invasiva.

Assim, faz-se necessário não apenas conhecer as estruturas geológicas, mas também estudar suas propriedades, objetivando quantificar e minimizar riscos,

e desta forma diminuir custos. Entre os diversos métodos geofísicos desenvolvidos para tais propósitos, destaca-se o método sísmico de reflexão, utilizado amplamente na prospecção de hidrocarbonetos e outros recursos minerais [5].

A reflexão sísmica é um processo baseado na reflexão de ondas sísmicas, logo a análise de dados sísmicos envolve a criação de ondas e imagens sísmicas que são usadas para delinear estruturas geológicas abaixo da superfície. A migração de dados sísmicos é um processo que objetiva construir uma imagem do interior da Terra a partir de dados de campo gravados, reposicionando estes dados em sua “real” posição geológica, usando várias aproximações numéricas dadas pela teoria de ondas ou teoria de raios que descrevem a propagação de ondas no subsolo [19]. Assim, o processo de migração pode ser entendido como uma previsão de mudanças no campo sísmico quando fontes e receptores são movidos dentro da Terra [39].

Encontra-se na literatura ampla variedade de métodos para análise de dados sísmicos. Entre as principais técnicas de migração, destaca-se:

- A migração em conjunto de ângulos [12, 29], onde são determinadas imagens sísmicas para diferentes ângulos de reflexão. Considera-se ser esta uma alternativa aos algoritmos convencionais de geração de imagens no domínio do tempo, pois o conjunto de ângulos determinados contém informações suficientes sobre o tempo de trânsito para estimativa de velocidade e caracterização das estruturas geológicas subterrâneas. [20];
- A migração no domínio de frequência, fundamentada na equação da onda, incluindo efeitos de difração. Também é referenciada como migração de frequência em número de ondas ou migração por transformação de Fourier [20];

- A remigração no domínio da profundidade. Processo usado para construir uma imagem sísmica de uma profundidade a partir de outra já disponível de uma migração prévia, para um modelo de velocidade diferente [33, 18]. Esta técnica é preferida, pois evita múltiplas migrações, reduzindo tempo e custo operacional [36, 25];
- O processamento no domínio do tempo é uma poderosa ferramenta reconhecidamente utilizada. Entre as vantagens apontadas, a técnica de migração possibilita a construção do modelo de velocidade da subsuperfície no tempo, podendo ser posteriormente expresso nas coordenadas cartesianas de profundidade, através de uma subsequente conversão do tempo para profundidade [38].

Considerando a técnica de migração sísmica, define-se um refletor como uma fronteira entre camadas geológicas. E a imagem de um refletor em um domínio, como pulsos de um corpo de ondas elementar, em uma imagem capturada. Aqui o pulso representa uma onda correspondente a uma perturbação simples. Esta propagação de imagens é referenciada como onda imagem [18], onde podemos tomar como variável de propagação qualquer parâmetro envolvido na migração sísmica.

Desta forma, a migração é o processo de reconstruir uma imagem das camadas geológicas a partir da imagem obtida no tempo. Esta imagem é obtida pela geração de ondas no subsolo e o registro do movimento resultante das partículas da superfície da Terra. Para isso é necessário conhecer o modelo das velocidades de propagação das ondas no subsolo em consideração, chamada velocidade de migração [6].

Um bom modelo de velocidade é necessário para muitas técnicas habituais de imagem sísmica [20]. Contudo, quando se utilizam dados reais, praticamente nunca se conhece a velocidade correta na subsuperfície [12]. Portanto, é importante

entender os efeitos da velocidade nas técnicas de migração. A continuação da velocidade descreve como uma imagem sísmica é alterada, devido a uma mudança na velocidade de migração. Essa descrição é um processo de propagação de ondas, no qual as imagens mudam ao longo do eixo de velocidade [4].

A propagação de uma imagem em função da velocidade de migração é muito desejável na sísmica, uma vez que a velocidade de migração correta geralmente não é conhecida e migrações com várias velocidades se tornam necessárias. Para evitar múltiplas migrações é conveniente a utilização da onda imagem [36].

Neste trabalho, usa-se a velocidade de migração como variável de propagação, e não o tempo como acontece para ondas físicas. Analogamente à equação da onda conhecida, podemos obter equações diferenciais parciais que descrevem a propagação de ondas-imagem como função de um problema específico da variável de propagação. Neste caso, as equações são chamadas de equação onda imagem e equação iconal da onda imagem [18].

À vista disso, além da revisão da literatura e a análise dos diferentes métodos utilizados na solução da equação da onda imagem, o principal objetivo desta dissertação é a elaboração de um esquema numérico consistente e estável, tal que sua implementação possibilite determinar imagens do subsolo correspondentes à diferentes velocidades de migração. Conseqüentemente, visa-se obter soluções aproximadas para o problema proposto, aprimorando um modelo de velocidade para técnica de migração em profundidade.

Desta forma, este trabalho divide-se em cinco capítulos: No capítulo **2**, explica-se brevemente o processamento de dados sísmicos, abordando a técnica de migração utilizada no campo da geofísica. Mostra-se a dedução da equação da onda imagem e sua equação iconal associada; estas equações foram demonstradas e aplicadas para meios isotrópicos, apresentando também suas respectivas soluções

analíticas. No capítulo **3**, apresenta-se uma revisão dos principais métodos utilizados na literatura, o método numérico desenvolvido: esquema com aproximações por diferenças finitas com implementação explícita no programa *Fortran95* e sua análise teórica quanto à consistência, estabilidade e convergência. No capítulo **4**, apresenta-se os resultados obtidos, e no capítulo final a análise numérica, conclusões e possibilidades futuras.

2 TEORIA SÍSMICA E EQUAÇÃO DA ONDA IMAGEM

Neste capítulo será apresentado um breve resumo sobre o processamento de dados sísmicos e a técnica de migração utilizados no campo da geofísica. A seguir mostra-se a dedução da equação da onda imagem e sua equação iconal associada, conforme detalhada em [18], para meios isotrópicos. Por fim apresenta-se suas respectivas soluções analíticas.

2.1 Introdução ao processamento sísmico

O processamento de dados sísmicos envolve a aplicação sequencial de vários algoritmos e, através desses processos os registros de campo são convertidos em imagens sísmicas que revelam a estratigrafia da subsuperfície [8]. Considera-se uma fonte que se propaga pela subsuperfície, um artifício mecânico ou químico que gera uma onda sísmica, e um receptor mecânico ou elétrico que registra as amplitudes das ondas sísmicas. O registro de um único receptor é chamado traço sísmico que são amostras das amplitudes em função do tempo. A coleção de vários traços sísmicos é denominada seção sísmica e, por fim, o conjunto de várias seções sísmicas formam os dados sísmicos. A sua aquisição dá-se o nome de levantamento sísmico, que é feito de maneira ordenada.

Então, a metodologia de um levantamento sísmico consiste em registrar na superfície o tempo de trânsito e amplitude da onda refletida nas interfaces de camadas em subsuperfície. A duração deste registro, ou seja, do traço sísmico, é da ordem de 4-10 segundos, do momento da detonação de uma fonte de energia sísmica controlada, até atingir o receptor geralmente localizado na superfície. As ondas são afetadas pelo contraste das características físicas da subsuperfície e carregam

informações do meio que podem ser recuperadas por algum processo de inversão. Assim, estima-se a estrutura que gerou a reflexão [5].

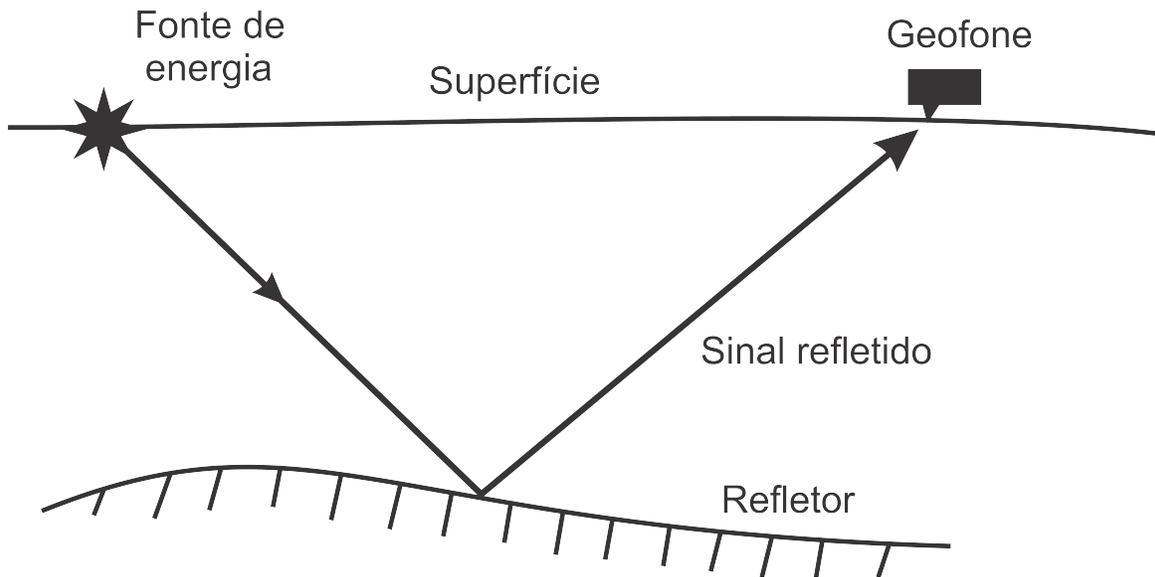


Figura 2.1: Exemplo de reflexão simples com apenas uma camada

Desta forma, a fonte gera uma frente de onda na superfície que se propaga nas camadas inferiores; ao encontrar uma interface parte da onda reflete e parte refrata (veja a figura 2.1). A onda refletida retorna à superfície e os receptores capturam sua chegada, a seguir o conjunto fonte-receptores é transladado sobre uma curva, e então o experimento é realizado novamente nesta nova posição. De posse dos dados obtidos no levantamento sísmico, são efetuadas várias etapas de processamento de sinais, com a finalidade de adquirir elementos da refletividade e referências qualitativa e quantitativa a respeito de outras propriedades.

No processamento sísmico, busca-se obter uma imagem estrutural e atributos que descrevem a subsuperfície de interesse. A finalidade é obter uma imagem para interpretação das estruturas geológicas [5]. Nas seções sísmicas essas estruturas formam padrões, e através da análise destes padrões pode-se obter informações sobre essas estruturas geológicas. Para se obter esta imagem em profundidade, é

necessário realizar o procedimento conhecido como migração sísmica, que estima a distribuição de refletividades em que há contraste de impedância, ou seja, diferença no produto da velocidade do meio e densidade da rocha, entre camadas de subsuperfície. Os atributos de entrada para tal são o dado sísmico e modelos de parâmetros precisos estimados durante o processamento sísmico. Esses parâmetros são as quantidades físicas que governam a propagação da onda sísmica na Terra, tais como modelo de velocidade.

Uma das etapas mais importantes do processamento é a análise da velocidade que permitirá produzir um modelo do campo de velocidade para a propagação de ondas, sendo este modelo utilizado para as etapas posteriores do processamento. A velocidade de propagação das ondas nas rochas pode variar de acordo com a densidade e as constantes elásticas do meio, que por sua vez são dadas em função de características intrínsecas da rocha, tais como porosidade, temperatura, pressão, entre outros[5]. A análise de velocidade é uma ferramenta importante usada para determinar as velocidades sísmicas das camadas geológicas em subsuperfície. O problema da remigração provém do processamento sísmico e seu objetivo é a construção de uma nova imagem do subsolo a partir de uma imagem obtida anteriormente pelo processo de migração, utilizando uma outra velocidade de migração [36]. Quando é feita a migração, geralmente o modelo de velocidade correto não é conhecido, logo ter a possibilidade de mudar a velocidade de migração e construir uma nova imagem migrada correspondente é de extrema importância.

2.2 Equação da onda imagem

A equação da onda imagem deduzida para meios homogêneos e isotrópicos é uma equação diferencial parcial de segunda ordem semelhante à equação da

onda acústica, usada para o problema de remigração de imagens na profundidade, dada por [18, 10]:

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz} = 0 \quad (2.1)$$

onde x e z são as variáveis espaciais e v a velocidade de migração, que no caso das ondas imagens é a variável de propagação. Os subscritos x , z e v denotam a derivada parcial de $p(x, z, v)$ em relação a correspondente variável.

A condição inicial é dada por $p(x, z, v_0) = p_0(x, z)$, que é uma seção (frente de onda imagem) migrada com velocidade incorreta v_0 . A equação (2.1) descreve o deslocamento das reflexões em função da velocidade de migração na profundidade. Associada à equação (2.1) temos a equação iconal da onda imagem [36]:

$$V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z = 0 \quad (2.2)$$

A equação (2.2) descreve a posição da onda imagem, estabelecendo uma relação entre a parte cinemática da propagação da onda imagem e a correspondente equação diferencial parcial, cuja solução tem a forma $p(x, z, v) = p_0(x, z)f[v - V(x, z)]$ para o problema de remigração [36].

Aqui $v = V(x, z)$ representa a imagem de um refletor em função da velocidade de migração, e um campo de onda migrado na profundidade é descrito por $p(x, z, v)$, onde a aparência explícita de v no argumento indica a dependência da imagem migrada pela velocidade de migração utilizada. Ou seja, a equação iconal (2.2) descreve como a propagação de qualquer seção dada depende da variação da velocidade de migração.

A seguir, apresenta-se a fundamentação conceitual necessária para derivação das equações diferenciais (2.1) e (2.2) relativas aos problemas de imageamento de reflexão sísmica, em particular para o problema de remigração na profundidade. A dedução da equação da onda imagem foi demonstrada pelos autores Peter Hubral, integrante do Instituto de Geofísica da Universidade de Karlsruhe-Alemanha, e Martin Tygel e Jörg Schleicher, membros do departamento de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas em 1995.

Em seu trabalho, Hubral et al. [18] introduziram e usaram o conceito de uma onda imagem sísmica relacionado-o com os conceitos clássicos e conectando-os com a conhecida equação da onda acústica. Utilizaram uma abordagem geometricamente atraente, baseada no princípio de ondas de Huygens e, assim, forneceram uma estratégia rigorosa de forma natural e sistemática. No ano seguinte, os mesmos autores juntamente com German Höcht e Frank Liptow, também membros do Instituto de Geofísica da Universidade de Karlsruhe, apresentaram outro tratamento para derivação da equação onda imagem. Em seu estudo, Schleicher et al. [33] apresentaram uma interpretação cinemática para a noção de ondas imagem, deduzindo suas propriedades cinemáticas e sua correspondente equação diferencial para remigração na profundidade. Para tal, fizeram uso da ideia de Círculo de Tales, proporcionando um entendimento geométrico adicional e relevante do processo, especificamente quando a velocidade de migração é constante.

A seguir, detalha-se a demonstração da equação da onda imagem conforme apresentado em [18]; esta dedução foi preferida visto que providencia uma solução para o problema geral. Além disso, as relações familiares da equação da onda acústica são utilizadas de maneira intuitiva e, assim, facilita o entendimento. A demonstração alternativa também é detalhada no apêndice A.

Dedução das equações diferenciais para onda imagem

Na dedução das equações da onda imagem faz-se uma analogia entre ondas imagens e ondas físicas, e para isso são utilizadas algumas propriedades das ondas físicas. Especificamente, trata-se da propagação de ondas volumétricas em meio elástico. A onda física é uma perturbação propagada pelo tempo e espaço, na maioria das vezes com transferência de energia. Já a onda mecânica se propaga ou perpassa o meio; isto se deve às forças de restauração que produzem a deformação. Assim, para descrever a propagação desta energia em tal meio, usa-se a equação da onda, uma equação diferencial parcial de segunda ordem representando o campo de pressão $p(x, z, t)$, onde (x, z) são as coordenadas espaciais e t o tempo de propagação [9]. Considerando a onda sísmica como uma onda mecânica que se propaga dentro da Terra, pode-se interpretar sua propagação como o problema da energia que é transportada de um lugar para outro em determinado instante de tempo [8].

As imagens de um refletor sísmico podem ocorrer no domínio da profundidade ou no domínio do tempo; estas imagens se comportam como pulsos de um corpo de ondas elementares. À esta propagação de imagens denomina-se *ondas imagem*, contudo a variável de propagação não é o tempo como nas ondas físicas. Para o problema proposto, a variável de propagação é a velocidade de migração v . Assim, uma onda imagem não é uma onda física mas se comporta de modo análogo [18]. A fim de enfatizar a correspondência entre a propagação da onda física e da onda imagem, inicia-se com a análise da equação da onda até a solução de sua equação iconal.

Para ajudar no entendimento desta ideia, considera-se a situação conhecida da propagação de ondas físicas, tal que a frente de uma onda elementar é propagada em instantes diferentes de tempo. Desta forma, podemos comparar o cenário em que uma imagem de uma frente de onda é propagada para diferentes "instantes da velocidade de migração". Quando a velocidade de migração é variada

continuamente, a imagem do refletor migrada propaga-se de maneira similar a um corpo de onda elementar.

As definições de frente de onda e onda de Huygens, equivalentemente *frente de onda imagem e onda imagem de Huygens*, são dois conceitos importantes para formulação da equação da onda imagem. O princípio de Huygens, descreve as frentes de onda, de tal forma que cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma nova fonte de ondas elementares, que se propagam para além da região já atingida pela onda original e com a mesma frequência. A onda imagem de Huygens é definida como a fonte pontual elementar hipotética da onda imagem, a qual é excitada em cada ponto da propagação da frente de onda imagem; esta propagação é descrita pela equação iconal da onda imagem [8].

Para dado instante, cada ponto da frente de onda-imagem comporta-se como uma fonte das ondas-imagem elementares de Huygens. A partir deste princípio, conclui-se que, em um meio homogêneo e com as mesmas características físicas em toda sua extensão, a frente de onda se desloca mantendo sua forma, desde que não existam obstáculos [18]. Fontes sísmicas próximas à superfície, geram campos de onda elásticas que se propagam no interior da Terra e sua propagação pode ser modelada pela solução da equação da onda. Em aproximação escalar, a propagação de ondas pode ser descrita pela equação da onda acústica em meios com densidade constante [8]. A propagação física de um corpo de onda acústica é descrita pela equação diferencial parcial homogênea:

$$p_{xx} + p_{zz} - \frac{1}{v^2} p_{tt} = 0 \quad (2.3)$$

Neste caso, a equação (2.3) descreve a propagação de um campo de onda de pressão acústica $p(x, z, t)$ em um meio com velocidade v , assumida como constante. Um subscrito x, z ou t denota a derivada parcial de $p(x, z, t)$ em relação

a correspondente variável. A propagação das frentes de ondas são descritas pela equação iconal:

$$T_x^2 + T_z^2 = \frac{1}{v^2} \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é uma equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem, obtida de (2.3), após substituição de uma solução candidata da forma:

$$p(x, z, t) = p_0(x, z)f[t - T(x, z)] \quad (2.5)$$

Aqui $f(t)$ é um pulso de alta-frequência que pode mudar lentamente sua forma ao longo da frente de onda $t = T(x, z)$. Sua solução para um meio homogêneo e velocidade v , é dada por:

$$t = T(x, z) = t_0 + \frac{1}{v}\sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.6)$$

Note que a equação (2.6) é a descrição cinemática de uma onda de Huygens clássica elementar. No espaço (x, z) , representa um círculo de raio $v(t - t_0)$, centrado em (x_0, z_0) . Quando $z = 0$, isto é, no espaço (x, t) , é uma hipérbole.

Seja um conjunto contínuo de ondas de Huygens que originam todos os pontos ao longo de uma frente de onda $t_0 = T(x, z)$, então de acordo com o princípio de Huygens, cada frente de onda $t = T(x, z)$ para um valor constante de $t > t_0$ é o envelope de todas as ondas de Huygens elementares dadas por (2.6), aplicadas na frente de onda $t_0 = T(x, z)$. Esta ordem no procedimento descreve os passos clássicos para derivar (2.6) de (2.3), contudo o propósito agora é deduzir (2.3) a partir de (2.6). Para tal fim, primeiramente encontra-se a equação iconal (2.4) da equação (2.6), substituindo as derivadas parciais da iconal $T(x, z)$ em (2.6):

$$T_x = \frac{(x - x_0)}{v\sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \quad T_z = \frac{(z - z_0)}{v\sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (2.7)$$

Logo, a equação iconal é derivada da onda de Huygens. A seguir, obtemos a equação da onda (2.3) da equação iconal (2.4), tal que a equação diferencial parcial tem a forma:

$$p_{xx} + p_{zz} - \frac{1}{v^2}p_{tt} + F(p_x, p_z, p_t, p, x, z, t) = 0 \quad (2.8)$$

Esta equação determina a mesma equação iconal (2.4), como resultado da solução (2.5), independentemente da forma particular da função F , que depende apenas dos argumentos listados [14]. Portanto, todas as equações da onda da forma (2.8) compartilham o mesmo comportamento cinemático da propagação ondulatória. Escolhendo-se $F = 0$, obtém-se uma equação que propaga cinematicamente uma ou várias ondas elementares do tipo (2.5), e isto fornece a direção inicial da propagação de todas as ondas [18]. Então, o problema de propagação dado $p(x, z, t)$, incorporando um conjunto de corpo de ondas elementares (2.5) no espaço (x, z) , do instante de tempo t_0 para o instante de tempo $t > 0$, pode ser expresso como o problema de valor inicial:

$$p(x, z, t_0) \rightarrow p(x, z, t) \quad (2.9)$$

Conseqüentemente, o principal objetivo é mostrar como as equações (2.3) e (2.4) podem ser definidas para o problema de remigração na profundidade. Neste sentido, um problema de valor inicial semelhante a (2.9) pode ser formulado.

Remigração na profundidade

O processo de imagem necessário para construir seções sísmicas migradas na profundidade, dadas de uma seção migrada anterior, incluindo um conjunto arbitrário de subsuperfícies de imagens refletidas resultantes da aplicação contínua de velocidades de migração (constantes) é denominado como migração na profundidade [18]. Considerando o domínio (x, z) , sendo v a variável de propagação, a localização da imagem do refletor de uma subsuperfície procurada é dada implicitamente pelas funções da forma $v = V(x, z)$, para diferentes valores de v . Os sinais relacionados à localização do refletor migrado $v = V(x, z)$, podem ser interpretados como uma onda imagem sísmica elementar particular, ou seja, como a imagem de um refletor migrada na profundidade, descrita por:

$$p(x, z, v) = p_0(x, z)f[v - V(x, z)] \quad (2.10)$$

Em comparação com (2.5), a função $v = V(x, z)$ pode ser considerada como uma *onda imagem iconal*. Logo, cada onda imagem elementar $p = (x, z, v)$ em (2.10) se propaga quando se muda continuamente a velocidade de migração v , da mesma forma em que cada onda física elementar $p = (x, z, t)$ em (2.5) se propaga quando se varia o tempo t . Portanto, curvas instantâneas da onda imagem (2.10) no domínio (x, z) em diferentes instantes da velocidade de migração v , descrevem a imagem do refletor migrado na profundidade selecionada para o respectivo valor de v . O problema de transformar a imagem capturada do campo de onda imagem total $p(x, z, v_0)$, envolvendo várias imagens do refletor individuais do tipo (2.10), para a imagem capturada do campo de onda imagem total $p(x, z, v)$, pode ser representado analogamente ao problema (2.9) por:

$$p(x, z, v_0) \rightarrow p(x, z, v) \quad (2.11)$$

onde v_0 é uma constante inicial arbitrária para velocidade de migração.

A dedução da equação (2.1) pode ser feita da imagem remigrada de um ponto refletor, porque todo refletor pode ser entendido como uma sequência de pontos refletores. Assim, sua demonstração se divide em duas etapas: deduzir a posição da imagem remigrada de um ponto refletor e encontrar uma equação diferencial parcial que descreva a variação desta posição com a velocidade de migração [18].

Considera-se uma subsuperfície contínua de um refletor em um instante da velocidade de migração v_0 . De cada ponto da imagem do refletor, uma onda imagem de Huygens surge, que será traçada no instante da velocidade de migração $v > v_0$. Estas ondas imagens de Huygens não mais se assemelham às ondas de Huygens clássicas, pois não se encontram em torno de suas origens; contudo fornecem a imagem da subsuperfície do refletor, ou seja, a imagem da frente de onda propagada no instante de v , como sendo seu envelope comum.

Sob estas condições, seja um ponto refletor $P_0(x_0, z_0)$ localizado no subsolo. O tempo t de propagação da onda emitida pela fonte, situada na superfície em $(a, 0)$, até ser captada pelo receptor, situado no mesmo ponto e com velocidade v_0 , é expresso em função de a , por:

$$t(a)^2 = \left(\frac{a - x_0}{\frac{v_0}{2}} \right)^2 + \left(\frac{z_0}{\frac{v_0}{2}} \right)^2 \quad (2.12)$$

onde v_0 é a velocidade de propagação no subsolo, supostamente homogêneo, ou seja, v_0 é constante [36]. Assim a equação (2.12) determina um conjunto de hipérboles de difração, também chamadas curvas de Huygens, no domínio (x, t) . De fato, estas curvas tem o mesmo comportamento das ondas de Huygens clássicas, que se afastam de uma frente de onda fixa $t_0 = T(x, z)$ e formam uma frente de onda avançada $t = T(x, z)$ como seu envelope para $t > t_0$. Note que para um dado ponto $(a, 0)$, temos um conjunto de pontos que satisfaz a equação (2.12) para a mesma

velocidade v_0 ; então temos um mesmo tempo de propagação t correspondente a este par fonte-receptor para todos os pontos $P(x, z)$. Sejam $x_0 = x$ e $z_0 = z$, substituindo em (2.12) para o mesmo instante t e velocidade v_0 , temos:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2}{v_0} \sqrt{(x-a)^2 + z^2} \\
 \left(\frac{v_0 t}{2}\right)^2 &= (x-a)^2 + z^2 \\
 z &= \sqrt{\left(\frac{v_0 t}{2}\right)^2 - (x-a)^2} \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Esta equação descreve uma semi-circunferência de raio $\frac{v_0 t}{2}$ denominada *isócrona* tal que todos os pontos nesta curva possuem o mesmo tempo de propagação. Em outras palavras, uma isócrona é o lugar geométrico dos pontos que possuem mesmo tempo de trânsito, tal que o envelope das isócronas é o refletor [43]. Assim, cada valor de a define um ponto $(a, 0)$ com seu respectivo $t(a)$ que gera uma nova isócrona. Logo, todas essas isócronas passam por P_0 , e esta construção é implicitamente realizada por uma migração com velocidade v_0 . Porém, se a velocidade de migração correta não for v_0 , as isócronas do ponto $(a, 0)$ são descritas pela equação (2.13) substituindo v_0 por v . Então a sua intersecção não será o ponto $P_0(x_0, z_0)$, pois o raio da isócrona é proporcional à velocidade. O conjunto das isócronas representa a nova imagem do ponto refletor para a nova velocidade v .

Para cada $v \neq v_0$, temos um novo envelope. Desta forma, temos a ideia de propagação de uma onda imagem [36]. Portanto a equação que descreve a posição da onda imagem é a equação que descreve estes envelopes. Sua formulação é derivada da onda imagem de Huygens [18].

Lembrando que temos um mesmo tempo de propagação t correspondente ao par fonte-receptor para todos os pontos $P(x, z)$, que satisfazem à equação (2.12), mas $v \neq v_0$, logo:

$$\frac{2}{v_0} \sqrt{(x_0 - a)^2 + z_0^2} = \frac{2}{v} \sqrt{(x - a)^2 + z^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade encontramos o conjunto das isócronas parametrizado por a :

$$F(x, z, a) = (x - a)^2 + z^2 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 [(x_0 - a)^2 + z_0^2] = 0 \quad (2.14)$$

O envelope deste conjunto é a onda imagem de Huygens no instante em que a velocidade de migração é v . A condição para a curva do envelope é $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ [18], que determina o valor estacionário de a :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2(x - a) + 2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 (x_0 - a) = 0$$

$$a - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 a = x - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 x_0$$

$$a = \frac{x - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 x_0}{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.15) em (2.14), temos:

$$\left[x - \left(\frac{x - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 x_0}{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \right) \right]^2 + z^2 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \left\{ \left[x_0 - \left(\frac{x - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 x_0}{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \right) \right]^2 + z_0^2 \right\} = 0$$

Reduzindo a equação ao mesmo denominador e isolando z , temos:

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right)^2} \left[(x_0 - x)^2 + z_0^2 \left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 (x_0 - x)^2 \right] \\
z^2 &= \frac{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right)^2} \left[(x_0 - x)^2 \left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right) + z_0^2 \left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right)^2 \right] \\
z &= \left(\frac{v}{v_0}\right) \sqrt{\frac{(x_0 - x)^2}{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2} + z_0^2} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Assim, encontramos a equação da onda imagem de Huygens que descreve o envelope, ou seja, descreve a posição da onda imagem.

Calculando esta posição para vários valores de $v \neq v_0$, obtemos a propagação desta imagem. A próxima etapa é estabelecer a relação entre esta parte cinemática da propagação da onda imagem e a correspondente equação diferencial parcial. A equação iconal da onda é definida como a equação que descreve a cinemática da propagação de ondas acústicas e a equação da onda [3], correspondentemente a equação iconal da onda imagem descreve a sua cinemática [18].

A equação iconal da onda imagem é deduzida substituindo a velocidade de migração v da equação (2.16) por um iconal da onda imagem, $v = V(x, z)$, e então calculando as derivadas parciais desta equação modificada em relação a x e z [18]. Por conveniência fazemos $W(x, z) = \frac{V(x, z)}{v_0}$, e encontramos:

$$\begin{aligned}
0 = W_x \left\{ \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - W^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{W^2(x - x_0)^2}{(1 - W^2)^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - W^2} \right]^{\frac{-1}{2}} \right\} \\
- \frac{W(x - x_0)}{1 - W^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - W^2} \right]^{\frac{-1}{2}} \tag{2.17}
\end{aligned}$$

e

$$1 = W_z \left\{ \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - W^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{W^2(x - x_0)^2}{(1 - W^2)^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - W^2} \right]^{\frac{-1}{2}} \right\} \quad (2.18)$$

Substituindo essas derivadas parciais novamente em (2.16), temos:

$$\left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - W^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{W}$$

Das derivadas parciais (2.17) e (2.18), simplifica-se:

$$\frac{x - x_0}{1 - W^2} = \frac{z}{W^2} \frac{W_x}{W_z}$$

Substituindo a expressão acima em (2.18) e eliminando x_0 , z_0 e v_0 , temos:

$$Wx^2 + Wz^2 - \frac{W}{z}W_z = 0 \quad (2.19)$$

Voltando a $W(x, z) = \frac{V(x, z)}{v_0}$, obtemos a equação iconal da onda imagem (2.2) desejada:

$$V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z = 0$$

Analogamente à dedução da equação da onda acústica (2.3), a mesma equação iconal da onda imagem resulta da equação da onda imagem (2.1) quando aplicada uma solução da forma (2.10). Com auxílio desta equação, o problema de valor inicial (2.11) pode ser resolvido. O valor inicial $p(x, z, v_0)$ é obtido por uma migração na profundidade para velocidade de migração v_0 [18].

2.3 Solução analítica da equação da onda imagem

A equação da onda imagem para o problema de remigração na profundidade em um meio homogêneo e isotrópico é uma equação diferencial parcial de segunda ordem semelhante à equação da onda acústica.

Devido a estas semelhanças, suas soluções analíticas podem ser determinadas de forma similar às equações convencionais da onda acústica. A fim de facilitar a interpretação física do fenômeno que ocorre no problema proposto, decidiu-se resolver analiticamente a equação da onda imagem reduzindo uma dimensão. Usando esta estratégia pretende-se conhecer o comportamento da solução. Sendo assim, considere a equação:

$$p_{xx} + \frac{v}{z}p_{vz} = 0 \quad (2.20)$$

Os subscritos x, z ou v denotam a derivada parcial de $p(x, z, v)$ em relação à correspondente variável. Aqui encontra-se a primeira dificuldade, pois a equação possui coeficiente variável para derivada mista. Na tentativa de contornar essa limitação, faz-se uma mudança de variáveis. Sejam:

$$\tau = \frac{z^2}{2}, \quad e \quad \mu = \ln v$$

Utilizando a regra de cadeia, calculamos as derivadas de τ em relação à z e de μ em relação à v , e então reescrevemos a derivada mista da equação (2.20):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial \mu} \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial \mu} \frac{z}{v}$$

Desse modo, transformamos a equação (2.20) na seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem linear com coeficientes constantes:

$$p_{xx} + p_{\tau\mu} = 0 \quad (2.21)$$

Para resolver a equação (2.21), optou-se pelo método de separação de variáveis. Assim supõe-se que a solução da equação (2.21) é uma função da forma:

$$p(x, \tau, \mu) = R(x)T(\tau\mu)$$

Calculando as derivadas da função candidata, de segunda ordem em relação à x e a derivada mista em relação à τ e μ , substituindo em (2.21) determina-se a constante de separação $-\Lambda^2$ e o par de equações:

$$\begin{cases} R_{xx} + \Lambda^2 R = 0 \\ T_{\tau\mu} - \Lambda^2 T = 0 \end{cases}$$

Nessa etapa, precisa-se fazer novamente uma mudança de variável para eliminar a derivada mista da segunda equação. Seja $\eta = \Lambda^2 \tau\mu$. Daí reescrevemos o sistema, de forma a resolver um problema de autovalores e autofunções para as equações diferenciais:

$$\begin{cases} R_{xx} + \Lambda^2 R = 0 \\ \eta T_{\eta\eta} + T_{\eta} - \Lambda^2 T = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema é:

$$\begin{cases} R(x) = K_1 \sin \Lambda x + K_2 \cos \Lambda x = 0 \\ T(\tau\mu) = cI_0(2\Lambda\sqrt{\Lambda^2\tau\mu}) + dK_0(2\Lambda\sqrt{\Lambda^2\tau\mu}) \end{cases}$$

onde I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas de ordem zero e K_1, K_2, c, d são constantes a serem determinadas com condições iniciais. Além disso, o autovalor Λ

da equação para R pode ser determinado com condições de contorno aplicadas na autofunção R .

Solução da equação iconal

A equação iconal (2.2)

$$Vx^2 + Vz^2 - \frac{V}{z}V_z = 0, \quad (2.22)$$

descreve cinematicamente a propagação da onda imagem para qualquer conjunto arbitrário de condições iniciais. Na seção anterior, mostrou-se a dedução da equação iconal, e baseando-se na mesma estratégia para obter a solução da equação da onda imagem, reduzimos a ordem desta equação:

$$V_x^2 - \frac{V}{z}V_z = 0. \quad (2.23)$$

Daí, aplica-se novamente o método de separação de variáveis com uma função candidata da forma:

$$V(x, z) = R(x)S(z)$$

De forma análoga chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} R_x^2 + \Lambda^2 R^2 = 0 \\ S_z + \Lambda^2 z S = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} R(x) = c_1 \sin \Lambda x + ic_2 \cos \Lambda x \\ S(z) = c_3 e^{\frac{-\Lambda^2 z^2}{2}} \end{cases}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes a serem determinadas com a condição inicial. O autovalor Λ da equação para R pode ser determinado com condições de contorno na autofunção R .

Usando soluções analíticas, as imagens modificadas para atualizar os valores do modelo podem ser determinadas diretamente de uma imagem original, que tenha sido obtida com estimativas anteriores do modelo. Tal imagem original faz o papel de condição inicial para as soluções das equações da onda imagem [2].

Uma expressão explícita para $V(x, z)$ pode ser encontrada resolvendo a equação (2.16) para v :

$$z = \left(\frac{v}{v_0}\right) \sqrt{\frac{(x_0 - x)^2}{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2} + z_0^2}$$

Após algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{(x - a)^2 + z^2}{((x_0 - a)^2 + z_0^2)}} \quad (2.24)$$

Como mostrado na seção anterior, a equação (2.16) descreve a posição da onda imagem de Huygens para remigração na profundidade excitada com as condições iniciais (x_0, z_0, v_0) . Além disso, demonstrou-se que a equação iconal para onda imagem é encontrada substituindo v por $V(x, z)$ em (2.16), tomando as derivadas em relação a x e z da expressão resultante para eliminar as constantes x_0, z_0 e v_0 .

Logo, a função (2.24) é solução da equação iconal da onda imagem para as condições iniciais (x_0, z_0, v_0) . Portanto, a equação iconal da onda imagem descreve as propriedades cinemáticas da propagação das ondas imagem para qualquer conjunto arbitrário de condições iniciais em função da velocidade de migração [30].

3 PROCEDIMENTO NUMÉRICO E ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão dos principais métodos utilizados na literatura, o método numérico desenvolvido e sua análise teórica quanto à consistência, estabilidade e convergência.

3.1 Revisão dos métodos aplicados na migração sísmica

Entre as principais técnicas de migração, usadas para problemas de reflexão-imagem na análise sísmica, destaca-se na literatura:

- A migração em conjunto de ângulos [12, 29], onde são determinadas imagens sísmicas para diferentes ângulos de reflexão.
- A migração no domínio de frequência, fundamentada na equação da onda, incluindo efeitos de difração. Esta também é referenciada como migração de frequência em número de ondas ou migração por transformação de Fourier [20];
- A remigração no domínio da profundidade. Processo para construir uma imagem sísmica de uma profundidade a partir de outra já disponível de uma migração prévia, para um modelo de velocidade diferente [33, 18].

Embora o processamento no domínio do tempo seja utilizado amplamente, a remigração no domínio da profundidade é preferida, pois evita múltiplas migrações, reduzindo tempo e custo operacional [36, 25].

Os principais métodos numéricos para o problema da remigração na profundidade encontrados na literatura resumem-se a:

- Aproximações por diferenças finitas [32, 15, 25, 24];
- Método de volumes finitos [25];
- Método de traçamento de raios [8, 45];
- Técnicas espectrais [18, 11, 10];
- Técnicas Integrais [18, 28].

Notou-se que há preferência pelo método em diferenças finitas, devido à facilidade na aproximação das equações diferenciais parciais, como na equação da onda imagem, pela grande variedade de esquemas que podem ser usados para aproximar as equações. Constatou-se em Munerato et al. [25] que o método de volumes finitos aplicado para o problema de remigração na profundidade para a equação da onda imagem, apesar da convergência, apresenta dispersão maior do que os esquemas em diferenças finitas, e acréscimo no tempo computacional.

Também neste mesmo estudo [25], foram comparadas diferentes formas de implementação para esquemas em diferenças finitas explícitos e implícitos. Contudo os autores concluíram que os esquemas implícitos possuem o mesmo comportamento de dispersão que os esquemas explícitos. Em relação aos tempos computacionais o esquema explícito foi o mais eficiente.

3.2 Desenvolvimento do método numérico

Após análise dos principais métodos utilizados para o problema de remigração em profundidade encontrados na literatura, optou-se pelo método de apro-

ximações por diferenças finitas. A escolha deste método foi feita por permitir implementações práticas [11], apresentando custo computacional menor que o método de elementos finitos [25].

O esquema desenvolvido foi formulado levando em consideração a interpretação do fenômeno físico determinado no problema da remigração em profundidade. No caso de migração em profundidade a imagem refletida migrada é propagada no domínio de profundidade, ou seja, o espaço (x, z) e a variável de propagação é a velocidade de migração v e não o tempo como na onda física [18].

Sob estas condições, para as variáveis espaciais x e z foi utilizado um esquema centrado com erro de truncamento local de segunda ordem e de quarta ordem para as derivadas segundas, de acordo com [40]. Implementou-se o código computacional usando ordens diferentes com o objetivo de verificar o resultado apresentado em [34], onde a aproximação de quarta ordem foi preferida por fornecer resultados mais precisos em experimentos numéricos do que a de segunda ordem [34].

Para a derivada mista, primeiramente utilizou-se uma aproximação também centrada com erro de truncamento local de ordem 2, que parece descrever melhor o caráter elíptico da propagação de ondas. Além disso, não encontrou-se na literatura resultados com aproximações centradas para derivada mista. Para fins de comparação foram elaborados mais dois esquemas, ambos centrados com erro de truncamento local de segunda e quarta ordem para as derivadas segundas como anteriormente, porém para a derivada mista foram utilizados um esquema atrasado em v e centrado em z com erro de truncamento local de primeira ordem e outro esquema foi elaborado usando uma aproximação avançada em v e z , também com erro de truncamento local de primeira ordem, como em [36]. Além de averiguar a convergência dos esquemas formulados, objetiva-se comparar os resultados obtidos com as conclusões apresentados em [36, 25, 24].

Assim, todos os esquemas foram elaborados utilizando aproximações centradas para as derivadas espaciais nas variáveis x e z . Para a derivada mista, as aproximações diferem da seguinte forma:

- Esquema com aproximações centradas;
- Esquema com aproximações avançadas;
- Esquema com aproximação atrasada para variável v e centrada para variável z .

Fez-se também uma análise com a equação da onda clássica, visando comparar as equações. Para isso, foi elaborado um esquema com aproximações centradas com erro de truncamento local de segunda e quarta ordens para a equação da onda clássica. Tal comparativo foi feito considerando: primeiramente, do ponto de vista físico, o problema da remigração em profundidade possui caráter hiperbólico, semelhante à propagação de um campo de ondas, porém para tempo suficientemente grande tem-se um cenário elíptico. Sob o ponto de vista matemático, foi demonstrado no capítulo dois que a dedução da equação da onda imagem pode ser realizada de maneira análoga à dedução da equação da onda.

Levando em consideração que cada onda física elementar $p(x, z, t)$ se propaga quando se varia o tempo t , cada onda imagem $p(x, z, v)$ se propaga em diferentes instantes de tempo da velocidade de migração v .

Primeiramente, definimos uma malha de pontos (x, z, v) :

- Sejam $\Delta x, \Delta z$ e Δv números positivos;
- A malha conterá os pontos $(x_m, z_n, v_l) = (x_j + m\Delta x, z_j + n\Delta z, v_j + l\Delta v)$ para quaisquer números inteiros m, n, l , tal que $(m = 1 \dots M, n = 1 \dots N, l = 1 \dots L)$;

- (x_j, z_j) representa o ponto inicial da malha.

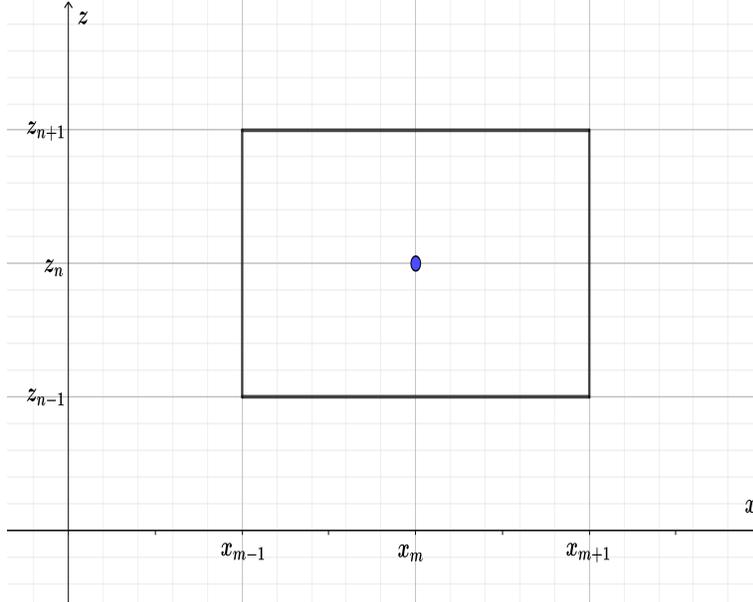


Figura 3.1: Domínio (x, z)

Considere as aproximações para derivada segunda usando diferença central com erro de truncamento local de quarta ordem para as variáveis x e z , respectivamente:

$$(p_{xx})_{m,n}^l = \frac{-p_{m+2,n}^l - p_{m-2,n}^l + 16(p_{m+1,n}^l + p_{m-1,n}^l) - 30p_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} = \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} \quad (3.1)$$

$$(p_{zz})_{m,n}^l = \frac{-p_{m,n+2}^l - p_{m,n-2}^l + 16(p_{m,n+1}^l + p_{m,n-1}^l) - 30p_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} = \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} \quad (3.2)$$

As aproximações para derivada segunda usando diferença central com erro de truncamento local de segunda ordem para as variáveis x e z , respectivamente, são:

$$(p_{xx})_{m,n}^l = \frac{p_{m+1,n}^l - 2p_{m,n}^l + p_{m-1,n}^l}{(\Delta x)^2} = \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{(\Delta x)^2} \quad (3.3)$$

$$(p_{zz})_{m,n}^l = \frac{p_{m,n+1}^l - 2p_{m,n}^l + p_{m,n-1}^l}{(\Delta z)^2} = \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{(\Delta z)^2} \quad (3.4)$$

Da aproximação para derivada mista usando diferença centrada para variável v e z , tem-se:

$$(p_{zv})_{m,n}^l = \frac{1}{4\Delta z \Delta v} (p_{m,n+1}^{l+1} + p_{m,n-1}^{l-1} - p_{m,n+1}^{l-1} - p_{m,n-1}^{l+1}) \quad (3.5)$$

A aproximação para derivada mista usando diferença atrasada para variável v e centrada em z é:

$$(p_{zv})_{m,n}^l = \frac{1}{2\Delta z \Delta v} (p_{m,n+1}^l - p_{m,n-1}^l + p_{m,n+1}^{l-1} - p_{m,n-1}^{l-1}) \quad (3.6)$$

A aproximação para derivada mista usando diferença avançada para variável v e z é:

$$(p_{zv})_{m,n}^l = \frac{1}{\Delta z \Delta v} (p_{m,n+1}^{l+1} - p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n+1}^l + p_{m,n}^l) \quad (3.7)$$

Substituindo as aproximações (3.1), (3.2) e (3.5) na equação (2.1), temos:

$$\frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} + \frac{v}{z} \frac{1}{4\Delta z \Delta v} (p_{m,n+1}^{l+1} + p_{m,n-1}^{l-1} - p_{m,n+1}^{l-1} - p_{m,n-1}^{l+1}) = 0$$

$$p_{m,n+1}^{l+1} + p_{m,n-1}^{l-1} - p_{m,n+1}^{l-1} - p_{m,n-1}^{l+1} = -\frac{4z\Delta z \Delta v}{v} \left(\frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} \right)$$

Isolando o termo $p_{m,n+1}^{l+1}$, encontramos o primeiro esquema em diferenças finitas desejado:

$$p_{m,n+1}^{l+1} = p_{m,n+1}^{l-1} + p_{m,n-1}^{l+1} - p_{m,n-1}^{l-1} - \frac{4z\Delta z\Delta v}{v} \left(\frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} \right) \quad (3.8)$$

Substituindo as aproximações (3.1), (3.2) e (3.6) na equação (2.1), temos:

$$\frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} + \frac{v}{z} \frac{1}{2\Delta z\Delta v} (p_{m,n+1}^l - p_{m,n-1}^l - p_{m,n+1}^{l-1} + p_{m,n-1}^{l-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_{m,n+2}^l + p_{m,n-2}^l - 16(p_{m,n+1}^l + p_{m,n-1}^l) + 30p_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} = \\ & \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{v}{2z\Delta z\Delta v} (p_{m,n+1}^l - p_{m,n-1}^l - p_{m,n+1}^{l-1} + p_{m,n-1}^{l-1}) \end{aligned}$$

Isolando o termo $p_{m,n+2}^l$, encontramos o segundo esquema em diferenças finitas:

$$\begin{aligned} p_{m,n+2}^l &= (\Delta z)^2 \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{(\Delta x)^2} - p_{m,n-2}^l + (16 + \rho)p_{m,n+1}^l \\ &+ (16 - \rho)p_{m,n-1}^l - 30p_{m,n}^l + \rho(p_{m,n-1}^{l-1} - p_{m,n+1}^{l-1}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\rho = \frac{12\Delta z v_l}{z_n \Delta v}$.

Para o próximo esquema, usamos as mesmas aproximações para as derivadas segundas espaciais, porém a aproximação para a derivada mista será diferente, usando diferença avançada para variável v e z . Substituindo as aproximações (3.1),

(3.2) e (3.7) na equação (2.1), e isolando o termo $p_{m,n+1}^{l+1}$, temos o último esquema para equação da onda imagem a ser implementado:

$$p_{m,n+1}^{l+1} = p_{m,n}^{l+1} + p_{m,n+1}^l - p_{m,n}^l - \frac{z\Delta z\Delta v}{v} \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} \quad (3.10)$$

Para a equação da onda clássica (2.3) foi elaborado um esquema em diferenças finitas com aproximações centradas de segunda ordem para as derivadas espaciais e para a variável t . Substituindo as aproximações (3.14), (3.4) na equação (2.3), e isolando o termo $p_{m,n+1}^{l+1}$, temos:

$$p_{m,n}^{l+1} = 2p_{m,n}^l - p_{m,n}^{l-1} - v^2\Delta t \left(\frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{(\Delta z)^2} \right) \quad (3.11)$$

3.3 Análise de estabilidade e consistência

Nesta seção, apresenta-se a análise dos esquemas elaborados e a discussão sobre suas implementações. O objetivo é verificar sua convergência e sua utilização para simulações numéricas da propagação da onda imagem. Um esquema de diferenças finitas pode ser usado para a determinação de uma solução aproximada de uma equação diferencial parcial, se a sua solução converge para a solução exata. Pelo *Teorema de Equivalência de Lax* [41], um esquema é convergente se for consistente com a equação diferencial e estável. A seguir, analisa-se a consistência e estabilidade dos esquemas propostos.

3.3.1 Consistência

Um esquema de diferenças finitas é consistente com a correspondente equação diferencial parcial, se para qualquer função suave $\phi(x, z, v)$, a diferença

entre o operador diferencial, D , e o operador discretizado em um ponto (x_m, z_n, v_l) , aplicados a esta função ϕ tende a zero quando $\Delta x, \Delta z$, e Δv tendem a zero [41], ou seja:

$$D\phi - D^\Delta\phi \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \Delta x, \Delta z, \Delta v \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

onde $D^\Delta\phi = D_{xx}^\Delta\phi + D_{zz}^\Delta\phi + D_{zv}^\Delta\phi$ representa o operador discretizado do operador:

$$D = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{v}{z} \frac{\partial}{\partial z \partial v}$$

Aplicando este conceito à equação (2.1) para o esquema (3.8), obtém-se:

$$D\phi - D^\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{zz} + \left(\frac{v_l}{z_n}\right)\phi_{vz} - \left[\phi_{xx} + O(\Delta x^4) + \phi_{zz} + O(\Delta z^4) + \left(\frac{v_l}{z_n}\right) (\phi_{vz} + O(\Delta z^2) + O(\Delta v^2)) \right]$$

com $v_l = v_j + l\Delta v$ e $z_n = z_j + n\Delta z$. Assim:

$$D\phi - D^\Delta\phi = O(\Delta x^4) + O(\Delta z) + O(\Delta v)$$

Logo, $D\phi - D^\Delta\phi \rightarrow 0$, quando $\Delta x, \Delta z, \Delta v \rightarrow 0$. Portanto, concluímos que o esquema (3.8) é incondicionalmente consistente com a equação diferencial (2.1). De maneira semelhante, verifica-se o mesmo resultado para os esquemas (3.9) e (3.10).

3.3.2 Estabilidade

Baseado no critério de estabilidade de Von Neumann [40, 16], para verificar a estabilidade dos esquemas (3.8), (3.9) e (3.10), substituímos nas equações discretizadas (3.8), (3.9) e (3.10) a expressão:

$$p_{m,n}^l = \xi^l e^{imk_x \Delta x} e^{ink_z \Delta z} \quad (3.13)$$

onde k_x e k_z são os números de onda, ou seja, as frequências espaciais em x e z , respectivamente, e ξ é chamado de fator de amplificação. A seguir verificamos se a condição

$$|\xi| \leq 1 \quad (3.14)$$

é satisfeita. Se esta desigualdade for verdadeira dizemos que o esquema de diferenças finitas é *estável*. Quando este critério é satisfeito sob certas condições, o esquema de diferenças finitas é dito *condicionalmente estável*. Para o caso da condição não ser satisfeita sob hipótese alguma, o esquema de diferenças finitas é *instável*. Então, aplicando o critério de estabilidade, substituímos a expressão (3.13) nas equações discretizadas (3.8), (3.9) e (3.10), e assim, as dividimos por (3.13). Para conveniência da análise, começamos pelo esquema (3.10), e usamos as seguintes identidades e relações trigonométricas como em [25]:

- $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$;
- $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$;
- $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$;
- $\sin^2 \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4 \sin^4 \frac{\theta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})$.

Desta forma, encontramos:

$$\xi = \frac{1}{(e^{ik_z\Delta z} - 1)} \left\{ \frac{16z\Delta v\Delta z}{12v(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} \left[3 + \sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} \right] + \frac{16z\Delta v\Delta z}{12v(\Delta z)^2} \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \left[3 + \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \right] + 1 \right\}$$

Fazendo λ igual a expressão entre chaves, simplifica-se a expressão anterior conforme:

$$\lambda = \left\{ \frac{4z\Delta v\Delta z}{3v(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} \left[3 + \sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} \right] + \frac{4z\Delta v\Delta z}{3v(\Delta z)^2} \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \left[3 + \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \right] \right\}$$

Assim, reduzimos a expressão para ξ à forma:

$$\xi = \frac{\lambda}{(e^{ik_z\Delta z} - 1)} + 1 = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) - i \left(\frac{\lambda \cos \frac{k_z\Delta z}{2}}{2 \sin \frac{k_z\Delta z}{2}} \right) \quad (3.15)$$

Verifica-se que $|\xi| < 1$, assim:

$$\lambda^2 \left[\frac{1}{4 \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2}} \right] - \lambda < 0 \quad (3.16)$$

Como o coeficiente que multiplica λ^2 é sempre maior que zero, concluí-se que:

$$0 < \lambda < 4 \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \quad (3.17)$$

Logo,

$$0 < \left\{ \frac{z\Delta v\Delta z}{3v(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} \left[3 + \sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} \right] + \frac{z\Delta v\Delta z}{3v(\Delta z)^2} \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \left[3 + \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \right] \right\} < \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2}$$

Para uma malha uniforme $\Delta x = \Delta z$ e $k_x = k_z$, tal que v_{\min} é a velocidade mínima de propagação da onda imagem e z_{\max} a profundidade máxima do domínio, temos que $\sin^2 \frac{k_x\Delta x}{2} = \sin^2 \frac{k_z\Delta z}{2} \neq 0$. Dividindo a expressão acima por este termo, obtém-se a seguinte condição para que o esquema (3.10) seja estável para todos os valores de v e z envolvidos:

$$0 < \frac{4z_{\max}\Delta v}{3v_{\min}} + \frac{4z_{\max}\Delta v}{3v_{\min}} < 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta v < \frac{3v_{\min}}{8z_{\max}}\Delta z \quad (3.18)$$

onde $v = \frac{3}{8}$ para $k_x \approx k_z$ e $v = \frac{3}{4}$ para $k_x \ll k_z$.

A condição (3.18) mostra que o passo será restrito e positivo, logo o incremento deverá estar dentro deste intervalo de estabilidade. Nota-se que, da equação (3.15), quando $\sin \frac{k_z\Delta z}{2}$ tende a zero, o limite de ξ tende a um, ou seja:

$$\lim_{\sin \frac{k_z\Delta z}{2} \rightarrow 0} \xi = 1 \quad (3.19)$$

Portanto, a condição (3.18) vale para todos os valores numéricos de $k_z\Delta z$, uma vez que não é possível fazer $k_z\Delta z$ assumir o valor de um múltiplo exato de π [36].

Observa-se que esta condição de estabilidade dificilmente será satisfeita para um dado migrado com número de ondas arbitrário [24]. Para $k_z\Delta z \ll 1$, o número de onda é baixo na direção vertical, então a restrição (3.17) é muito rigorosa, porque o intervalo para valores permitidos de λ fica muito pequeno. Contudo,

dados realistas têm número de onda limitado, permitindo assim que a condição de estabilidade (3.17) seja satisfeita [24].

Nota-se que a condição $k_x \ll k_z$ é realista em meios com camadas predominantemente horizontais, situação geológica comum. Por outro lado, para $k_x \approx k_z$ pode se ter camadas com inclinações em torno de 45° . Observa-se ainda que em meios com camadas predominantemente verticais, onde $k_x \gg k_z$, a condição de estabilidade (3.17) dificilmente será satisfeita, uma vez que o lado esquerdo se aproxima de zero, porém esta situação é considerada geologicamente rara [25, 24].

Aplicando o critério de estabilidade na equação discretizada do esquema (3.9), analogamente ao esquema anterior $|\xi| < 1$, obtém-se:

$$\lambda^2 \left(\frac{1}{\sin^2 k_z \Delta z} \right) > 0. \quad (3.20)$$

Note que esta condição é satisfeita para qualquer valor de λ . Portanto, este esquema é incondicionalmente estável, permitindo flexibilidade na escolha do passo para a velocidade de migração. De maneira análoga, calcula-se o critério de estabilidade para o esquema de aproximações centradas (3.8).

Após análise quanto à estabilidade, verificou-se que:

- O esquema (3.10) em que a aproximação para derivada mista é avançada, é condicionalmente estável sob $\Delta v < \frac{3v_{\min}}{8z_{\max}} \Delta z$ para $k_x \approx k_z$ e $v = \frac{3v_{\min}}{4z_{\max}}$ para $k_x \ll k_z$;
- O esquema (3.9), em que a aproximação para derivada mista é atrasada na variável velocidade e centrada na variável z , juntamente com o esquema (3.8), com aproximações centradas para ambas variáveis, são incondicionalmente estáveis.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresenta-se os resultados obtidos com os esquemas elaborados para aproximação da equação da onda imagem e para aproximação da equação da onda clássica, juntamente com as implementações desenvolvidas. Pretende-se verificar a convergência dos esquemas formulados e comparar os resultados obtidos em [36, 25, 24].

Os esquemas desenvolvidos para aproximação da equação da onda imagem foram implementados usando aproximações centradas de segunda e quarta ordens para as variáveis espaciais x e z e para a derivada mista uma aproximação centrada com erro de truncamento local de ordem 2. A fim de comparação, implementou-se o esquema como em [36], onde para a derivada mista utiliza-se uma aproximação avançada em v e z , com erro de truncamento local de primeira ordem. Objetivando analisar o comportamento das equações da onda imagem e da onda clássica também implementou-se um esquema com aproximações centradas de segunda e quarta ordens para equação da onda clássica.

Em relação ao ambiente computacional, os esquemas foram implementados em Fortran 95 com compilador gfortran no sistema operacional linux mint 19.3, e a máquina não executou outras rotinas simultaneamente.

4.1 Implementações

Na fase de implementação surgiram as primeiras limitações, pois o problema a ser aproximado depende de três variáveis $p(x, z, v)$. Escrevemos a aproximação da variável mista em função do diferencial dz e o indexador de v em função do indexador de z .

As condições de contorno foram tomadas nulas como em [36]. As condições iniciais para o problema de remigração são os dados obtidos de um processo de migração inicial para $p(x_0, z_0, v_0)$, onde a velocidade inicial v_0 é geralmente incorreta. Portanto, o objetivo principal é corrigir tal velocidade usando a remigração.

Neste trabalho, as implementações foram realizadas considerando a velocidade $v_0 = 2000\text{m/s}$ como em [36, 32, 25] e velocidade inicial zero. Em ambas situações foi utilizada a mesma fonte inicial, $f(x, z) = 100000$.

Em relação ao coeficiente que multiplica a derivada mista, $\frac{v}{z}$, onde $v(x, z)$ é uma função que depende das coordenadas espaciais x e z , a convergência foi obtida isolando o termo $p_{m,n}$ para o esquema de aproximações centradas (3.8). Para as aproximações avançadas (3.10), o coeficiente foi calculado separadamente para o laplaciano e a derivada mista. Dessa forma, os esquemas foram implementados isolando o termo $p_{m,n}^l$, e ainda considerando:

- Velocidade inicial zero e 2000m/s ;
- Espaçamentos de 10m nas direções x e z , pois são os menores utilizados na prática em problemas sísmicos [36];
- Passo de velocidade de 2m/s , 8m/s e 0.04m/s , que estão de acordo com as condições de estabilidade obtidas;
- Espaçamentos $1/199$ na direção x e $1/99$ na direção z para os testes de refinamento da malha;
- Aplicação de mesma fonte no mesmo ponto da superfície.

Os esquemas implementados foram:

- Para equação da onda imagem:

- Esquema 1 com aproximações centradas para derivada mista (3.8);
 - Esquema 2 com aproximações avançadas para derivada mista (3.10).
- Para equação da onda:
 - Esquema com aproximações centradas (3.11).

Para simular a propagação de ondas no subsolo, foi elaborado um modelo simples com três camadas, representando meio não-homogêneo e suas respectivas velocidades de migração. Considerando a importância na exploração e caracterização de reservas de petróleo e água, optou-se por:

- Iniciar com velocidade de migração constante igual a 1500 m/s , caracterizando a primeira subsuperfície com água;
- Colocar uma segunda camada com velocidade de migração constante igual a 4100 m/s para arenito;
- Colocar uma última camada com velocidade de migração constante igual a 1350 m/s para petróleo.

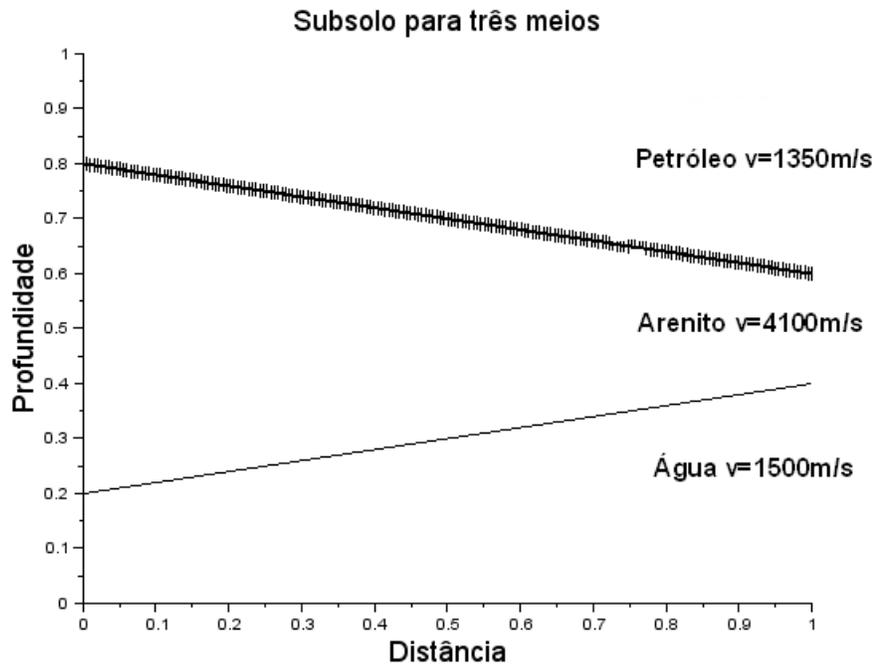


Figura 4.1: Subsolo para três camadas e respectivas velocidades de migração.

A fim de ilustrar a propagação de ondas na profundidade, mostra-se a simulação da propagação de um campo de ondas no subsolo realizada com o esquema (3.11), elaborado com aproximações centradas para equação da onda clássica.

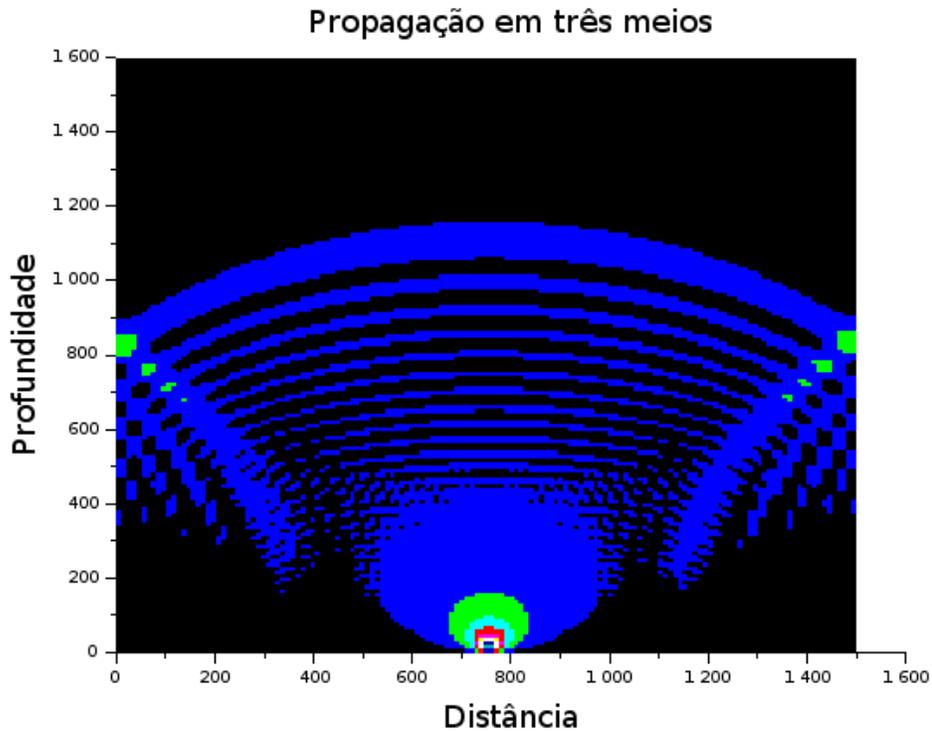


Figura 4.2: Propagação da onda para três camadas e velocidades de migração: $1500m/s$, $4100m/s$ e $1350m/s$.

Na figura 4.2 mostra-se a propagação da onda clássica após $1,2s$, implementada com aproximações centradas de ordem 4, e as velocidades de migração $1500m/s$, $4100m/s$ e $1350m/s$, caracterizando camadas geológicas com água, arenito e petróleo, respectivamente.

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos dos testes numéricos realizados para meio homogêneo. O modelo foi simplificado para uma camada, iniciando com velocidade zero até atingir a velocidade de migração da respectiva profundidade escolhida. Para estas simulações, optou-se por $1600m$ para a profundidade máxima, conforme os esquemas numéricos desenvolvidos no capítulo 3.

Primeiramente, foi feita uma análise do comportamento das equações da onda clássica e da onda imagem, em que compara-se a propagação gerada por aproximações centradas e avançadas.

4.2 Equação da Onda Clássica e Equação da Onda Imagem

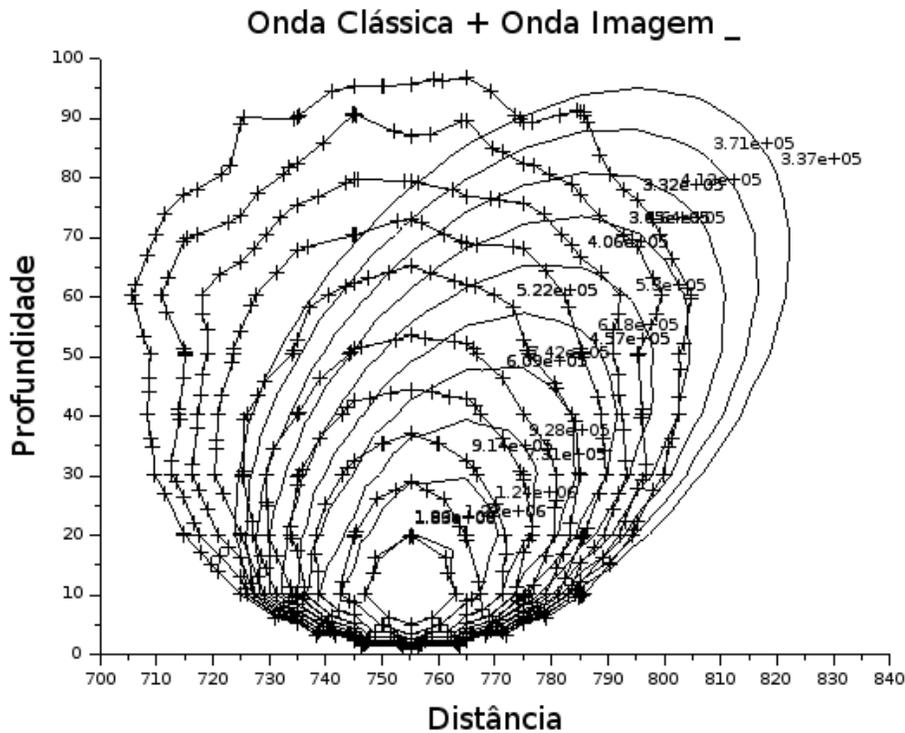


Figura 4.3: Propagação da onda para aproximações centradas de ordem 2

Na figura 4.3 mostra-se a propagação da onda clássica após 0,6s e da onda imagem, implementadas com aproximação de ordem 2, com espaçamentos de 10m nas direções x e z . Neste teste as equações foram iniciadas com velocidade zero. Nota-se a semelhança no início do registro das propagações, porém à medida que a velocidade aumenta, a propagação se desloca com inclinação diferente. Ao

iniciar com velocidade zero, ambas as equações se reduzem ao laplaciano em duas dimensões espaciais. Considerando que a variável de propagação na equação da onda clássica é o tempo e na equação da onda imagem é a velocidade, percebe-se certa equivalência entre os passos escolhidos, 0.001 segundos para o tempo e 2m/s para velocidade.

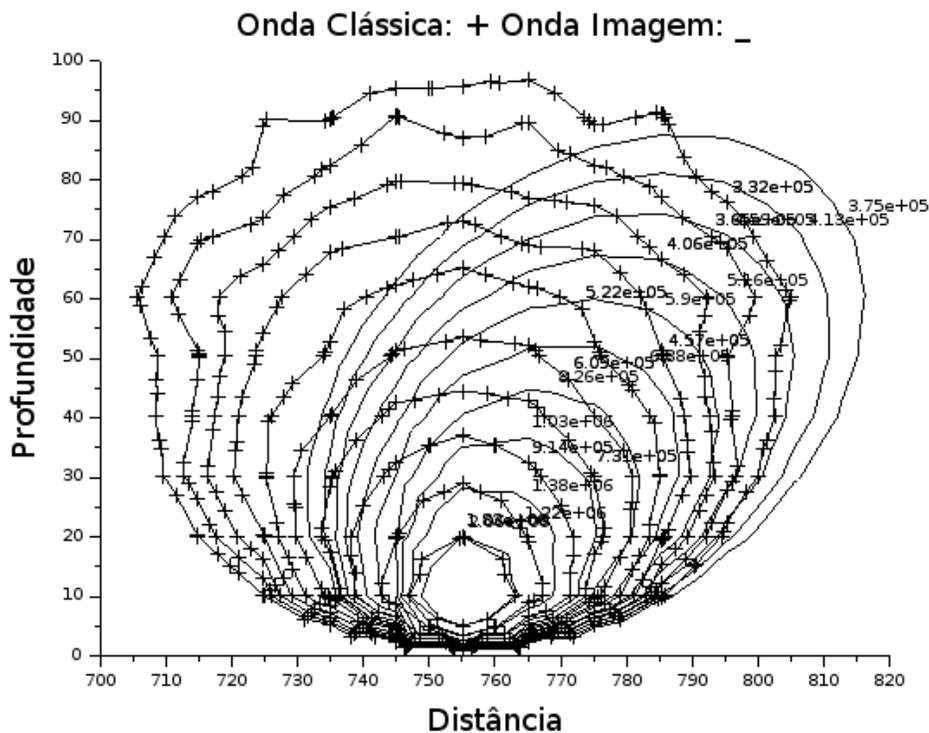


Figura 4.4: Propagação da onda para aproximações centradas e avançadas

Na figura 4.4 compara-se a propagação da onda clássica após 0,6s e da onda imagem, implementada com aproximação avançada para derivada mista. Nota-se a semelhança com a figura 4.3, indicando haver forte similaridade entre as aproximações centrada e avançada para derivada mista.

A seguir, apresenta-se a comparação entre os esquemas elaborados com aproximações centradas (Esquema 1) e avançadas (Esquema 2), para a derivada mista da equação da onda imagem.

4.3 Equação da Onda Imagem: Esquemas Centrado e Avançado para derivada mista

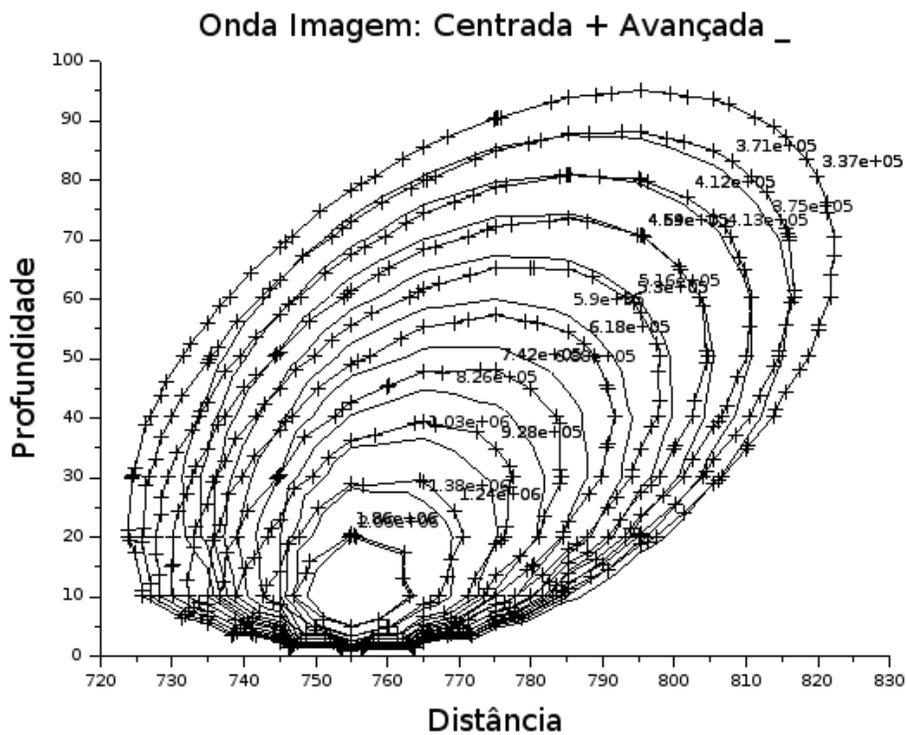


Figura 4.5: Solução da equação da onda imagem com aproximação de ordem 2 e incremento de velocidade 2m/s

Na figura 4.5 mostra-se propagação da onda obtida com esquema em aproximação centrada e avançada para derivada mista da onda imagem, implementadas com aproximação de ordem 2, e com mesmos espaçamentos de 10m nas direções

x e z . Ambos esquemas foram iniciados com velocidade zero e mesmo passo de 2m/s.

A escolha do incremento de velocidade foi determinada pela condição de estabilidade obtida para o esquema 2 (aproximação avançada para derivada mista), que satisfaz as condições para números de onda verticais e horizontais próximos: 4.6875m/s. Este valor satisfaz também as situações geológicas mais comuns, em que as camadas são predominantemente horizontais [24]: 9.375m/s. Verifica-se, que o resultado numérico está de acordo com a previsão teórica, como mostra a figura 4.5.

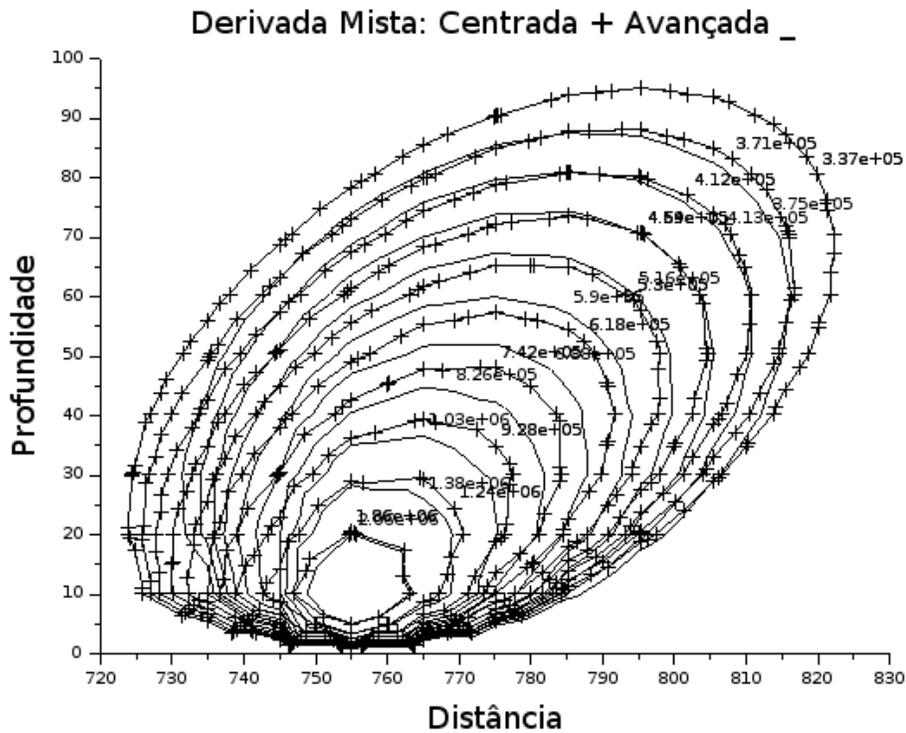


Figura 4.6: Solução da equação da onda imagem para aproximação de ordem 2 com incremento de velocidade 8m/s

A figura 4.6 mostra a propagação dos esquemas centrado e avançado para derivada mista da onda imagem, implementadas com aproximação de ordem

2, iniciando com velocidade zero e incremento de velocidade $\frac{dv}{dz} = 8\text{m/s}$. O aumento no incremento de velocidade não apresentou mudança significativa na propagação do campo de ondas para ambos esquemas.

Ao comparar os esquemas, verifica-se a semelhança na propagação do campo de ondas. Contudo, o esquema avançado apresenta maior oscilação entre as ondas.

A seguir mostra-se comparativo entre incrementos de velocidade e o esquema centrado. Objetiva-se analisar se as escolhas determinadas pelas condições de estabilidade também se verificam para o esquema em aproximações centradas.

4.4 Comparativo entre aproximações centradas e incrementos de velocidade

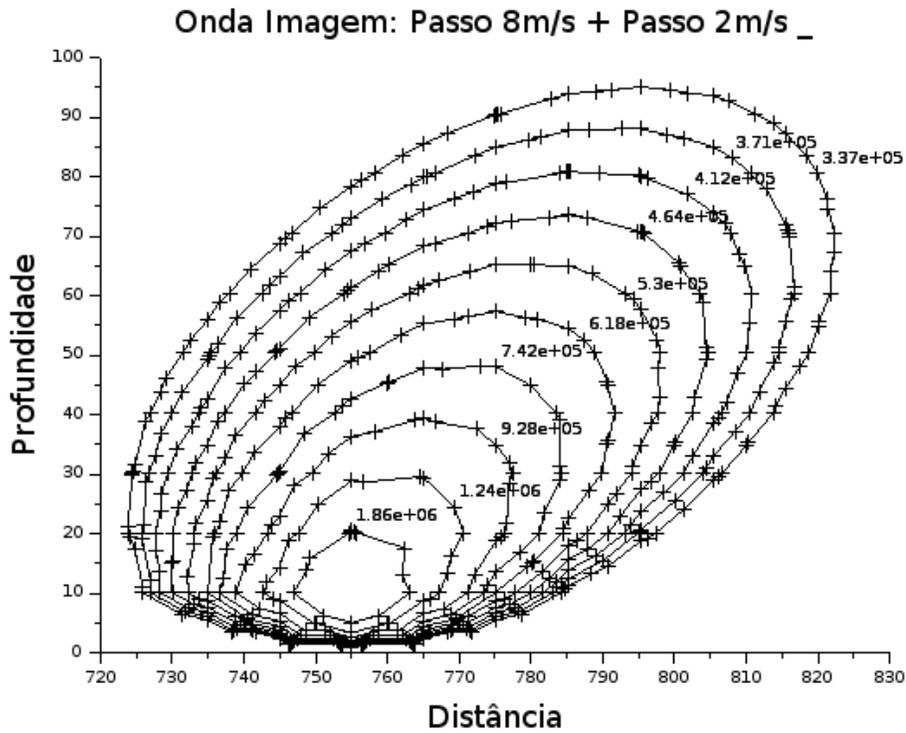


Figura 4.7: Solução da equação da onda imagem com incremento de velocidade 2m/s e 8m/s

A figura 4.7 apresenta o comparativo entre os incrementos de velocidade escolhidos a partir das condições de estabilidade determinadas, iniciando com velocidade zero e incrementos de velocidade em 2m/s e 8m/s, respectivamente. O aumento do incremento da velocidade não altera a propagação das ondas.

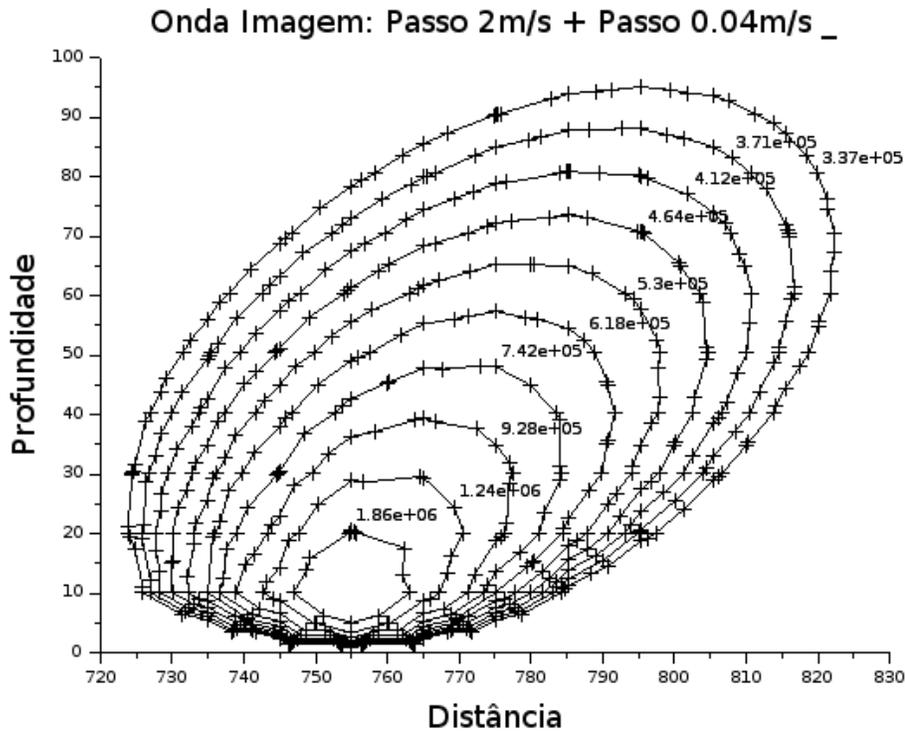


Figura 4.8: Solução da equação da onda imagem com incremento de velocidade 2m/s e 0.04m/s

Na figura 4.8 tem-se velocidade inicial zero e incrementos de velocidade de 2m/s e 0.04m/s, respectivamente. Como previsto da análise teórica, o aumento ou redução do incremento de velocidade não provoca alterações no campo de ondas para o esquema com aproximações centradas, estando de acordo com a expectativa teórica já que o esquema é incondicionalmente estável.

Para comparar tempos de execução, realizou-se uma simulação para propagação da onda clássica e da onda imagem em 6 segundos, com mesma malha, condições iniciais, e mesmo incremento para variável de propagação: $\Delta t = 0.001s$ para equação da onda clássica e $\Delta v = 0.001m/s$ para equação da onda imagem.

- O esquema em aproximações centradas para equação da onda clássica executou 6000 iterações em 36,453 segundos;
- Os esquemas para equação da onda imagem apresentaram tempo computacional menor para as mesmas condições:
 - Aproximações centradas: 14,227 segundos com redução de 59,47%;
 - Aproximações avançadas: 16,626 segundos com redução de 54,39%.

4.5 Análise dos resultados

Na medida em que os esquemas foram sendo implementados, notou-se que a interpretação física do fenômeno (ondas) é relevante, uma vez que cada classe de equações está associada a uma categoria diferente de fenômenos físicos. Tendo em vista que o problema modelado pela equação da onda evolui com o tempo, ou seja, é transiente, pois a amplitude de sua propagação varia em função do tempo e da posição, a primeira ideia foi utilizar uma aproximação avançada de acordo com [36], já que a equação da onda imagem é uma equação diferencial parcial semelhante à equação da onda.

Porém, a partir de certo intervalo de tempo o fenômeno físico pode ser interpretado como um processo estacionário [13]. Logo, optou-se também, por usar aproximações centradas levando em conta o caráter elíptico da propagação de ondas observado, com a finalidade de comparar o comportamento da equação da onda clássica com a equação da onda imagem.

Dessa forma, foi usado o esquema (3.8) com aproximações centradas para a equação da onda imagem e o esquema (3.11) em diferenças centradas para equação da onda clássica. Também foi formulado o esquema (3.10) com aproximações centradas para as derivadas segundas e aproximação avançada para derivada

mista, a fim de contrastar com os resultados apresentados na literatura [36, 25, 24], trabalhos em que foram utilizados o mesmo esquema porém com implementação diferente.

Considerando a análise teórica, os esquemas (3.8), (3.9) e (3.10) são incondicionalmente consistentes com a equação da onda imagem. Em relação às condições de estabilidade, o esquema (3.10), cuja derivada mista é avançada, é condicionalmente estável sob $\Delta v < \frac{v_{\min}}{z_{\max}} \Delta z$ com $v = \frac{3}{8}$ para $k_x \approx k_z$, caso em que as camadas da subsuperfície podem apresentar inclinações de até 45 graus. E $v = \frac{3}{4}$ para $k_x \ll k_z$ onde as camadas da subsuperfície são predominantemente horizontais [24].

Os esquemas (3.8) e (3.9) em que a aproximação para a derivada mista é centrada primeiramente, e depois atrasada na variável velocidade e centrada na variável z , é incondicionalmente estável, permitindo flexibilidade na escolha do incremento para a velocidade de migração.

Dessa forma, conforme os resultados apresentados, constata-se que os testes numéricos confirmam as previsões quanto à consistência e estabilidade obtidas, verificando-se assim a convergência dos métodos elaborados para a equação da onda imagem. Além disso, estão de acordo com as conclusões apontadas na literatura [36, 25, 24].

Considerando o coeficiente $\frac{v}{z}$, que multiplica a derivada mista, foi observado que este pode ser um fator de divergência dependendo do refinamento da malha, especialmente na direção z . Testes utilizando espaçamento $\frac{1}{199}$ na direção x e $\frac{1}{99}$ na direção z revelaram divergência em poucas iterações, principalmente para o esquema com aproximações avançadas para a derivada mista. Este fato coincide com os resultados obtidos em [24]. Deste estudo, os autores concluíram que a observação dos critérios de estabilidade na escolha da malha é crucial para equação da

onda imagem, apontando que a estabilidade piora quando se diminui o tamanho dos incrementos. Acredita-se que uma possível causa da divergência deve-se à discretização do coeficiente, onde a velocidade não é constante como na equação da onda clássica e sim uma função que depende de x e z .

Em relação aos métodos numéricos, o esquema formulado em diferenças centrais tanto para derivadas segundas como para derivada mista, utilizado na aproximação da solução para a equação da onda imagem, mostrou-se mais eficiente com tempo computacional de execução menor. O esquema em aproximações avançadas apresentou certa instabilidade, tanto na variação da velocidade inicial, como no refinamento da malha. Esse fato comprova a expectativa da interpretação do fenômeno físico para escolha do método, a qual levou em consideração um cenário elíptico. Além disso, sob o ponto de vista numérico, a preferência pelas aproximações centrais no contexto elíptico está em conformidade com [44][37], onde mostra-se que o erro no uso de aproximações em diferenças centrais é menor.

No que diz respeito à implementação, diferentemente dos procedimentos adotados em testes numéricos no campo da geofísica, os quais utilizam pacotes e programas específicos para métodos de migração e remigração sísmica [15, 31, 35, 27], os esquemas foram implementados em Fortran 95, e mesmo para uma malha bem refinada, onde se fez necessário grande número de iterações, o programa se mostrou eficiente com execução veloz. Isto facilitou a verificação dos critérios de estabilidade, modificações na malha, mudanças de implementação do coeficiente da derivada mista e na averiguação da convergência dos esquemas utilizados.

5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresenta-se as conclusões e possibilidades futuras.

Em consequência dos resultados obtidos e apresentados no capítulo anterior, conclui-se que os testes numéricos confirmam as previsões quanto à consistência e estabilidade, estando de acordo com o *Teorema de Equivalência de Lax* [41]. Assim, confirma-se teórica e numericamente, que os esquemas utilizados para a equação da onda imagem são convergentes. Além disso, estão de acordo com as conclusões apontadas na literatura [36, 25, 24].

Em relação aos métodos numéricos, o esquema formulado em diferenças centrais tanto para derivadas segundas como para derivada mista, utilizado na aproximação da solução para a equação da onda imagem, mostrou-se mais eficiente com tempo computacional de execução menor. O esquema em aproximações avançadas apresentou certa instabilidade, tanto na variação da velocidade inicial, como no refinamento da malha. Esse fato comprova a expectativa da interpretação do fenômeno físico para escolha do método, a qual levou em consideração um cenário elíptico.

As implementações elaboradas e os testes numéricos executados foram capazes de alcançar os objetivos previstos para solução numérica da equação da onda imagem, ainda que os mesmos tenham sido gerados sem auxílio de rotinas ou algoritmos típicos da sísmica.

A equação da onda imagem se comporta, até certo ponto, como um conjunto de corpo de ondas, porém com inclinação diferente. O resultado observado sugere que o deslocamento depende da velocidade de migração e da profundidade. Ela difere da equação da onda clássica pela termo da derivada mista, que varia de acordo com a velocidade v e a profundidade z .

Para que o método de remigração tenha significado prático, deve ser executável mais rápido do que uma migração repetida [25]. Portanto, a otimização de um modelo é relevante no processo de remigração sísmica. Desta forma, podemos considerar que o objetivo principal desta dissertação foi atingido. Buscou-se analisar os diferentes métodos utilizados na solução da equação da onda imagem; foram elaborados esquemas numéricos consistentes e estáveis. Entre eles, o método de aproximações em diferenças finitas centradas foi o mais eficiente.

Os resultados obtidos mostraram-se em conformidade com os apontados na literatura. Além disso, os esquemas para equação da onda imagem apresentaram tempo computacional menor que o esquema para equação da onda clássica. Ainda, verificou-se a similaridade, tanto do aspecto físico como analítico, com a equação da onda clássica.

Enquanto a equação da onda clássica descreve a propagação de um corpo de ondas físicas em diferentes instantes de tempo, a equação da onda imagem descreve a propagação das ondas imagens em função da velocidade de migração na profundidade, em diferentes instantes de velocidade de migração.

Esse comportamento semelhante é bastante útil tanto para o trato físico, analítico e numérico pois podemos considerar características e métodos particulares da equação da onda já conhecidos e extensivamente estudados, e aplicá-los à investigações da equação da onda imagem para o problema de remigração na profundidade. Assim, contribuiu-se para facilitar o processo de análise de velocidade para posterior análise do subsolo.

5.1 Possibilidade futuras

Entre as possibilidades futuras, destaca-se a próxima etapa do processo de remigração, na qual usando modelos de velocidade para a equação da onda

imagem é possível determinar imagens do subsolo correspondentes a diferentes velocidades de migração e sua extensão à geometrias de subsolo mais complexas. Como descrever precisamente modelos geológicos ondulares é muito relevante na resolução das propagações de ondas sísmicas [45].

Pretende-se verificar e estender as derivações para meios anisotrópicos. Anisotropia sísmica é a variação da velocidade em função da direção. Este fenômeno pode afetar as conversões tempo-profundidade de dados sísmicos que, em contrapartida, irão resultar em imagens incorretas das estruturas do subsolo. Esta representação errônea pode alterar seriamente a localização dos alvos de exploração [22]. Logo, a análise em meios anisotrópicos é de extrema relevância, pois podemos otimizar o acesso à esses alvos, reduzindo os riscos e custos envolvidos.

Técnicas de exploração sísmica estão sendo cada vez mais aprimoradas na indústria petrolífera para determinação de estruturas geológicas em subsuperfícies mais complexas, com presença de meios com altos contrastes de propriedades, tal como acontece no pré-sal [5]. Desta forma, métodos para aplicações em escala industrial e desenvolvimentos tecnológicos em computação e aquisição sísmica estão sendo realizados considerando também o meio anisotrópico. Contudo, existem limitações quando são considerados graus de liberdade adicionais, pois a ambiguidade entre diferentes parâmetros aumenta a não-linearidade do problema [5].

Assim, uma técnica de migração que seja capaz de estimar outros parâmetros, além da velocidade, é necessária para determinar imagens destas regiões de geometria mais complexa caracterizadas pelas propriedades anisotrópicas. Sob este aspecto, é importante considerar tanto parâmetros elásticos, como velocidade cisalhante e densidade, quanto parâmetros típicos de anisotropia, em especial os parâmetros de Thomsen, δ e ϵ , onde δ é uma combinação de parâmetros elásticos totalmente independente da velocidade horizontal exercendo maior influência na po-

sição vertical, enquanto o parâmetro ϵ exerce maior influência no posicionamento lateral [42].

Além destes, relacionam-se o ângulo de fase das frentes de onda, definido como ângulo entre a frente de onda normal e o eixo vertical, e por último o coeficiente de elipticidade determinado pela razão das velocidades vertical e horizontal [30]. A estimativa destes parâmetros é fundamental para determinar características da rocha, como porosidade, densidade e velocidade sísmica. Sob estas condições, outra possibilidade é o desenvolvimento de um modelo de velocidade efetivo para estimar velocidades que possam gerar imagens com maior resolução, aplicando uma técnica de migração derivada para meio anisotrópico.

Referências Bibliográficas

- [1] AHUJA, N. J., AND DIWAN, P. An expert system for seismic data interpretation using visual and analytical tools. *International Journal of Scientific & Engineering Research* 3, 4 (2012), 1–13.
- [2] ALEIXO, R., AND SCHLEICHER, J. Solving the image-wave and eikonal equations for remigration in elliptically anisotropic media. In *CNMAC* (2007).
- [3] BLEISTEIN, N. *Mathematical methods for wave phenomena*. Academic Press, 1984.
- [4] BURNETT, W., AND FOMEL, S. Azimuthally anisotropic 3D velocity continuation. *International Journal of Geophysics* (2011).
- [5] CARNEIRO, M. S. R. Estratégias de inversão de multiparâmetros utilizando a equação completa da elastodinâmica. *Tese de doutorado* (Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017).
- [6] CLAERBOLT, J. F. *Imaging the Earth's interior*. Stanford University Press, 1985.
- [7] COGNOT, R., THORE, P., AND HAAS, A. Tying seismic to well data using structural uncertainties. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1994*. Society of Exploration Geophysicists, 1994, pp. 494–497.
- [8] COIMBRA, T. A. A. Solução da equação da onda imagem para continuação do afastamento mediante o método das características. *Dissertação de mestrado* (Universidade Estadual de Campinas, 2010).
- [9] EVANS, L. C. Partial differential equations. *Grad. Stud. Math* 19 (2002).

- [10] FOMEL, S. Method of velocity continuation in the problem of seismic time migration. *Russian Geology and Geophysics* 35, 5 (1994), 100–111.
- [11] FOMEL, S. Time-migration velocity analysis by velocity continuation. *Geophysics* 68, 5 (2003), 1662–1672.
- [12] FOMEL, S., AND PRUCHA, M. Angle-gather time migration. *Stanford Exploration Project* 100 (1999), 359–368.
- [13] FORTUNA, A. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp, 2000.
- [14] GOLDIN, S. V. A geometrical approach to seismic processing: the method of discontinuities. *Stanford Exploration Project, Rept 67* (1990), 171–209.
- [15] GOMES, G. R. Análise de velocidade de migração em profundidade mediante continuação de velocidade em famílias de ponto imagem comum. In *VII Simpósio Brasileiro de Geofísica* (2016).
- [16] GREENSPAN, D., AND V., C. *Numerical analysis for applied mathematics, science, and engineering*. Perseus Publishing, 1988.
- [17] HOANG, P. Rock physics depth trend analysis using seismic stacking velocity. Master’s thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2006.
- [18] HUBRAL, P., TYGEL, M., AND SCHLEIDER, J. Seismic image waves. *Geophysical Journal International* 125, 2 (1996), 431–442.
- [19] JONES, I. Tutorial: migration imaging conditions. *First Break* 32, 12 (2014), 45–55.
- [20] KHOSHNAVAZ, M. J., BÓNA, A., AND UROSEVIC, M. Velocity-independent estimation of kinematic attributes in vertical transverse iso-

- tropy media using local slopes and predictive painting velocity-less estimation of attributes. *Geophysics* 81, 5 (2016), U73–U85.
- [21] LAU, A., AND YIN, C. Geometric theory of inversion and seismic imaging. *Physics.geo-ph* (2015).
- [22] LESLIE, J. M., AND LAWTON, D. C. Anisotropic pre-stack depth migration. *The Recorder* 3, 10 (1998), 23–26.
- [23] LIPTOW, F., AND P., H. Migrating around in circles. *The Leading Edge* 14 (1995), 1125–1127.
- [24] MUNERATO, E. P., SCHLEICHER, J., NOVAIS, E. A., ET AL. Equation implementational forms-study of image-wave for depth remigration. *Revista Brasileira de Geofisica* (2008).
- [25] MUNERATO, F. P., ET AL. Remigração na profundidade mediante a equação da onda imagem. *Dissertação de mestrado* (Universidade Estadual de Campinas, 2006).
- [26] NITA, B. G. A comparison of the imaging and principles in depth migration algorithms. *International Journal of Tomography & Statistics* 4, F06 (2006), 5–16.
- [27] SANTOS, H. B., COIMBRA, T. A., SCHLEICHER, J., AND NOVAIS, A. Remigration-trajectory velocity analysis: Improved derivation and proof of concept. *Annual WIT Report* 18 (2014), 91–106.
- [28] SANTOS, L. T., SCHLEICHER, J., TYGEL, M., AND HUBRAL, P. Seismic modeling by demigration. *Geophysics* 65, 4 (2000), 1281–1289.
- [29] SAVA, P., AND FOMEL, S. Angle-gathers by Fourier transform. *Stanford Exploration Project* 103 (2000), 391–401.

- [30] SCHLEICHER, J., AND ALEIXO, R. Time and depth remigration in elliptically anisotropic media using image-wave propagation. *Geophysics* 72, 1 (2006), S1–S9.
- [31] SCHLEICHER, J., AND BILOTI, R. Dip correction for coherence-based time migration velocity analysis. *Geophysics* 72, 1 (2006), S41–S48.
- [32] SCHLEICHER, J., COSTA, J. C., AND NOVAIS, A. Time-migration velocity analysis by image-wave propagation of common-image gathers. *Geophysics* 73, 5 (2008), VE161–VE171.
- [33] SCHLEICHER, J., HUBRAL, P., HÖCHT, G., AND LIPTOW, F. Seismic constant-velocity remigration. *Geophysics* 62, 2 (1997), 589–597.
- [34] SCHLEICHER, J., AND NOVAIS, A. Propagação de ondas imagem por diferenças finitas. In *Resumos de XXIV CNMAC* (2001).
- [35] SCHLEICHER, J., NOVAIS, A., AND COSTA, J. C. Vertical image waves in elliptically anisotropic media. *Studia Geophysica et Geodaetica* 52, 1 (2008), 101–122.
- [36] SCHLEICHER, J., NOVAIS, A., AND MUNERATO, F. P. Análise numérica da equação da onda imagem na profundidade. *Trends in Applied and Computational Mathematics* 4, 2 (2003), 267–276.
- [37] SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- [38] SRIPANICH, Y., AND FOMEL, S. Fast time-to-depth conversion and interval velocity estimation in the case of weak lateral variations. *Geophysics* 83, 3 (2018), S227–S235.
- [39] STOLT, R. H. Migration by Fourier transform. *Geophysics* 43, 1 (1978), 23–48.

- [40] STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes for Partial Differential Equations*. Pacific Grove, reprinted by Chapman & Hall, New York, 1989.
- [41] THOMAS, J. W. *Numerical partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [42] THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics* 51, 10 (1986), 1954–1966.
- [43] TYGEL, M., SCHLEICHER, J., HUBRAL, P., ET AL. Dualities involving reflectors and reflection-time surfaces. *Journal of Seismic Exploration* 4, 2 (1995), 123–150.
- [44] WROBEL, L. C. *Métodos numéricos em recursos hídricos*. Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1989.
- [45] ZHANG, M., XU, T., BAI, Z., LIU, Y., HOU, J., AND YU, G. Ray tracing of turning wave in elliptically anisotropic media with an irregular surface. *Earthquake Science* 30, 5-6 (2017), 219–228.

Apêndice A EQUAÇÃO DA ONDA IMAGEM - DEDUÇÃO ALTERNATIVA

Neste apêndice, apresenta-se uma dedução alternativa para a equação da onda imagem conforme mostrada em [33], onde usa-se uma abordagem geométrica distinta da utilizada no capítulo 2, que teve como base ondas de Huygens. Aqui, empregam-se princípios da teoria de raios e círculos de Tales.

A dedução da equação da onda imagem está estruturada em duas etapas:

- Derivação das propriedades cinemáticas de uma onda imagem e sua relação com círculo de Tales;
- Derivação da equação diferencial parcial correspondente a esta onda imagem, em particular para remigração na profundidade.

A.1 Propriedades cinemáticas da Onda Imagem

Como mostrado no capítulo 2, a sequência das ondas imagem dadas por $v = V(x, z)$, são determinadas pela equação diferencial chamada *Equação da Onda Imagem* [33]:

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{v}{z}u_{vz} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Mostrou-se, que a equação da onda imagem (A.1) pode ser associada com a sua correspondente *Equação Iconal da Onda Imagem*, e que esta equação iconal descreve como a propagação de qualquer frente de onda imagem depende da variação da velocidade de migração:

$$V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z = 0 \quad (\text{A.2})$$

Em analogia com a propagação de ondas físicas, também existem pseudo-raios associados com a propagação da onda imagem. Estes *Raios de Onda Imagem* são definidos pelo conjunto de todas as possíveis posições migradas de um ponto de curva de uma reflexão sísmica no tempo. Os raios de onda imagem são as características da equação iconal (A.2), ou seja, são as curvas que propagam as informações cinemáticas da onda imagem.

A seguir, detalha-se as considerações geométricas reconhecidas independentemente de [7] e [23]. A estratégia é baseada no fato de que as curvas que representam as propriedades cinemáticas da onda imagem são círculos para remigração na profundidade.

Assim, utiliza-se uma abordagem geométrica para mostrar a dependência de um ponto de reflexão migrado na profundidade pela velocidade de migração. Mostra-se como os raios de onda imagem podem ser usados para uma remigração na profundidade ponto-a-ponto. Conseqüentemente, pretende-se derivar a equação (A.1) de maneira mais simples.

Migração Cinemática

Considerando o comportamento cinemático, apresenta-se um exemplo da técnica de migração em profundidade. Primeiramente, representa-se a migração para um ponto refletido de uma reflexão linear em função do tempo dado. Após, verifica-se que o resultado também se aplica a qualquer curva de reflexão.

Seja um ponto P com coordenadas (x_P, t_P) de uma curva de reflexão escolhida e identificada com afastamento nulo ($h = 0$), tal que $\Gamma_R(t) = \tau_R(x)$, onde

t é a coordenada tempo e x é a distância lateral. Em P , constroi-se a tangente T_R à Γ_R , assim T_R tem a mesma inclinação p , que Γ_R em P , tal que:

$$p = \left. \frac{\partial \tau_R}{\partial x} \right|_P = \tan \alpha \quad (\text{A.3})$$

Observa-se na figura A.1 a seguir, que o ponto P define dois pontos no eixo- x ; assim, determina-se:

- α : ângulo que T_R faz com o eixo- x ;
- O ponto B com coordenadas $(x_P, 0)$, onde o raio normal emerge, definindo a reflexão em P ;
- O ponto A com coordenadas $(x_A, 0)$, onde T_R corta o eixo- x .

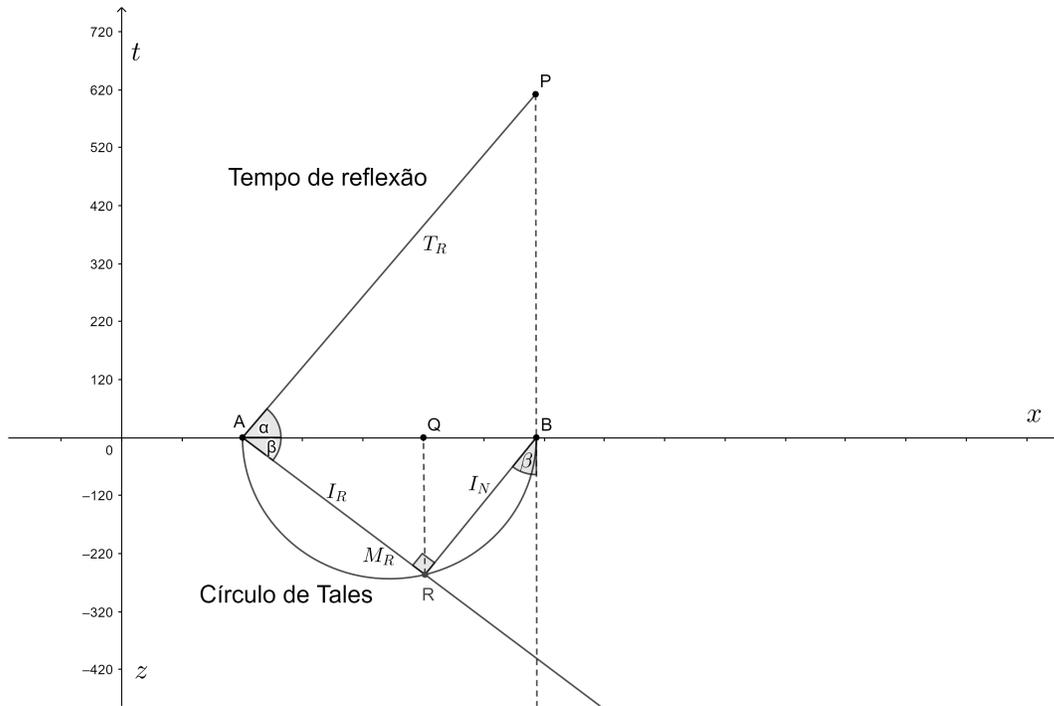


Figura A.1: Geometria da migração na profundidade de um ponto P e seu respectivo ponto imagem migrado R

Usando relações trigonométricas, tem-se:

$$x_A = x_P - t_P \cot \alpha \quad (\text{A.4})$$

e, da observação (A.3):

$$x_P - x_A = \frac{t_P}{p} \quad (\text{A.5})$$

A construção de uma imagem migrada na profundidade M_R , de uma curva T_R , para uma dada velocidade de migração v , é feita da seguinte forma:

Para cada ponto P em T_R , traça-se um raio normal ao ponto B tal que seu ângulo de emergência β é determinado pela Lei de Snell [33]:

$$\frac{\sin \beta}{v} = p \quad (\text{A.6})$$

onde p é o ângulo de T_R dado pela equação (A.3). O ponto imagem R migrado na profundidade com coordenadas (x, z) do ponto P , encontra-se quando o comprimento l_N do raio normal é igual a $t_P v$.

Note que t_P é o tempo de ida e volta de B para R , então a velocidade de migração correta v é igual a metade da velocidade média, tal que $v = \frac{v_m}{2}$. A imagem do refletor M_R corta o eixo- x em A sob o ângulo β definido pela equação (A.6).

Um refletor é considerado uma fronteira entre camadas geológicas [39]. Para especificar analiticamente onde o ponto P na curva T_R é migrado para qualquer velocidade v , introduz-se o ponto Q com coordenadas $(x, 0)$, ou seja, a projeção de R no eixo- x .

Observando as relações determinadas pelos triângulos BQR e ARB , temos:

$$(x_P - x)^2 + z^2 = l_N^2 \quad (\text{A.7})$$

onde $l_N = \overline{BR}$ é o comprimento do raio normal BR .

$$(x - x_A)^2 + z^2 = l_R^2 \quad (\text{A.8})$$

e $l_R = \overline{AR}$ é a distância de A até R ao longo da imagem do refletor M_R . Como o raio normal BR é perpendicular à M_R , observa-se do triângulo ARB que:

$$l_R = l_N \cot \beta \quad (\text{A.9})$$

Inserindo a equação (A.9) em (A.8), garante-se as hipóteses para usar (A.6):

$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + z^2 &= l_N^2 \frac{1 - p^2 v^2}{p^2 v^2} \\ &= \frac{t_P^2}{p^2} - t_P^2 v^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde usa-se o comprimento do raio normal conhecido $l_N = t_P v$. Para encontrar as expressões para as coordenadas x e z de R , dada uma velocidade de migração v , resolve-se as equações (A.7) e (A.10) para x e z . Para tanto, reescrevemos (A.10) como:

$$(x - x_P + x_P - x_A)^2 + z^2 = \frac{t_P^2}{p^2} - t_P^2 v^2 \quad (\text{A.11})$$

ou

$$(x_P - x_A)^2 + (x - x_P)^2 + 2(x - x_P)(x_P - x_A) + z^2 = \frac{t_P^2}{p^2} - t_P^2 v^2 \quad (\text{A.12})$$

Os primeiros termos de ambos os lados da equação (A.12) cancelam-se devido a (A.5). Subtraindo de (A.7), vem:

$$2(x - x_P) \frac{t_P^2}{p} = -2t_P^2 v^2 \quad (\text{A.13})$$

Aqui, usou-se novamente (A.5). Logo, chega-se em:

$$x = x_P - t_P p v^2 \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.14) em (A.7), resulta em:

$$z = t_P v \sqrt{1 - p^2 v^2} \quad (\text{A.15})$$

A inclinação q da imagem do refletor migrada na profundidade em M_R é obtida da relação entre os ângulos α e β dados por (A.3) e (A.4):

$$q = \tan \beta = \frac{pv}{\sqrt{1 - p^2 v^2}} \quad (\text{A.16})$$

Das três últimas equações, determinam-se:

- As coordenadas (x, z) da imagem R do ponto P migrada na profundidade;
- O ângulo do refletor q em R , dados como funções das coordenadas (x_P, t_P) do ponto P ;

- A inclinação q da curva de reflexão no tempo em P , com dependência da velocidade de migração v , que faz o papel de um parâmetro livre.

Assim, mostra-se a dependência de um ponto de reflexão migrado na profundidade pela velocidade de migração, conforme desejado.

Raios de onda imagem

Nesta etapa, objetiva-se encontrar a equação que determina a localização de todas as possíveis imagens de um ponto de reflexão para qualquer velocidade de migração v . A equação é deduzida determinando as expressões para os raios de onda imagem. Mostra-se a relação com a equação do *Círculo de Tales*, e como esta equação também pode ser utilizada no processo de remigração, ou seja, para determinar uma nova imagem do refletor, dada por uma nova velocidade v . Por último, apresenta-se as expressões análogas para a remigração cinemática.

Observa-se da construção geométrica apresentada, que todas as imagens migradas R do ponto P para todas as velocidades de migração v de zero à $v_{\max} = \frac{1}{p}$, recaem em um semi-círculo inferior através de A e B com diâmetro $\overline{AB} = x_P - x_A$.

Esta conclusão se deve ao fato da observação do filósofo grego Tales, quem primeiro reconheceu que quaisquer duas retas perpendiculares passando pelos pontos A e B tem que interceptar o círculo acima descrito. Por essa razão, refere-se como *Círculo de Tales* [23].

Estendendo a ideia do Círculo de Tales ao problema particular de migração, nota-se que as retas perpendiculares são as imagens de T_R e seu raio normal correspondente.

Assim, encontrar a expressão para o círculo de Tales, significa encontrar uma equação para a localização de todas as possíveis imagens R de ponto P para todas as velocidades v . Com esse propósito, formula-se uma equação independente

para velocidade e as coordenadas (x, z) de R . Para isso, elimina-se v das equações (A.14), (A.15) e adiciona-se as equações (A.7) e (A.10), resultando em:

$$(x_P - x)^2 + (x - x_A)^2 + z^2 = \frac{t_P^2}{p^2} \quad (\text{A.17})$$

Toma-se $x_M = \frac{(x_P + x_A)}{2}$, como a coordenada do ponto médio entre os pontos A e B . Divide-se por 2 e insere-se a equação (A.5), e por fim chega-se a :

$$(x - x_M)^2 + z^2 = \frac{t_P^2}{4p^2} = \frac{1}{4}(x_P - x_A)^2 \quad (\text{A.18})$$

A equação (A.18) é exatamente o círculo de Tales descrito anteriormente. O ponto R sobre o círculo de Tales refletido do ponto P , correspondente a uma velocidade de migração v , que é determinado a partir da construção da isócrona em torno do ponto B é:

$$(x - x_P)^2 + z^2 = t_P^2 v^2 \quad (\text{A.19})$$

Desta forma, temos o círculo com seu ponto médio em B e raio $r = t_P v$, onde t_P é o tempo de ida e volta do ponto P . O ponto refletor R do ponto P dado, encontra-se no ponto onde a isócrona corta o círculo de Tales, passando pelos pontos A e B .

Assim, mostra-se que pontos de reflexão na profundidade se deslocam ao longo do respectivo círculo de Tales, quando se varia a velocidade de migração. Conclui-se, que o círculo de Tales determina a trajetória espacial dos pontos de reflexão para todas as imagens do refletor migradas na profundidade.

Remigração cinemática

Por fim, verifica-se a relação do círculo de Tales com o processo de remigração, de forma semelhante à construção apresentada para técnica de migração.

Deseja-se construir uma nova imagem do refletor com velocidade de migração aperfeiçoada v , de uma imagem anterior obtida com velocidade de migração v_0 . Para isso, constroi-se a isócrona para o ponto B , dada pela equação (A.19), isto é, o círculo de raio $r = l_N = \frac{v}{v_0}d_0$, onde d_0 é a distância de R_0 a B . O ponto onde a isócrona corta o círculo de Tales define a nova reflexão, o ponto R . Para escrever essas observações, usa-se considerações similares às equações (14), para velocidade de remigração v_0 :

$$x_0 = x_P - t_P p v_0^2 \quad (\text{A.20})$$

$$z_0 = t_P v_0 \sqrt{1 - p^2 v_0^2} \quad (\text{A.21})$$

$$q_0 = \frac{p v_0}{\sqrt{1 - p^2 v_0^2}} \quad (\text{A.22})$$

Resolvendo-se as equações acima para x_P, t_P e p , tem-se:

$$x_P = x_0 + z_0 q_0 \quad (\text{A.23})$$

$$t_P = \frac{z_0}{v_0} \sqrt{1 + q_0^2} \quad (\text{A.24})$$

$$p = \frac{p_0}{v_0 \sqrt{1 + q_0^2}} \quad (\text{A.25})$$

Fazendo-se uso das equações (19), reconstrói-se o ponto P da imagem do ponto R_0 dado. Logo, pode-se demigrar R_0 , inserindo as equações (19) nas equações (14). Desta forma, obtém-se diretamente as equações para remigração:

$$x = x_0 + \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) z_0 q_0 \quad (\text{A.26})$$

$$z = z_0 \frac{v}{v_0} \sqrt{1 + q_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right)} \quad (\text{A.27})$$

$$q = q_0 \frac{v}{v_0} \left(\sqrt{1 + q_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right)} \right)^{-1} \quad (\text{A.28})$$

Estas equações mostram como uma imagem de um refletor no ponto $R_0 = (x_0, z_0)$ com inclinação q_0 se move quando a velocidade de migração é modificada de v_0 para v . Portanto, as considerações acima aplicam-se não apenas para uma reta mas também para qualquer curva de reflexão no tempo, podendo ser vistas como o envelope de um conjunto de retas [33].

Equação onda imagem

Dadas as interpretações e construções geométricas apresentadas até aqui, pode-se deduzir a equação da onda imagem. Para isso, considera-se toda a seção sísmica, e não apenas um ponto de reflexão. Desta forma, não é necessário identificar, ou construir as imagens refletidas individualmente.

Como mostrado anteriormente, a propagação das imagens de um refletor, migradas na profundidade se comportam como uma frente de onda ao longo do círculo de Tales, em função da velocidade de migração v . Desse modo, os círculos de Tales podem ser entendidos como os raios associados a uma equação diferencial

parcial particular, semelhante à equação da onda, a qual define-se como *equação de remigração da onda imagem*.

Assim, captura-se uma imagem da propagação das ondas, para dado modelo de velocidade no domínio da profundidade (x, z) e velocidade de migração v . Representa-se a inclinação da imagem de um refletor, para uma curva de reflexão no tempo dada, pela função:

$$u(x, z, t) = f \left(t - \frac{(x - x_0) \sin \beta + z \cos \beta}{v} \right) \quad (\text{A.29})$$

Aqui, a direção de propagação da onda é dada pelo vetor unitário $n = (\sin \beta, \cos \beta)$, onde β é o ângulo da imagem do refletor e a função $f(t)$ um pulso arbitrário.

Quando $z = 0$, pode-se simular e observar as reflexões ao longo da curva $t = \frac{(x-x_0) \sin \beta}{v}$. A inclinação da imagem do refletor é então representada por uma imagem capturada desta onda no instante de tempo $t = 0$.

Mais precisamente, a função $u(x, z, t = 0)$ descreve a imagem do refletor. Então, reescreve-se u como $u(x, z, v)$, pois $u(x, z, t = 0)$ não depende de t ou v . Dessa maneira, diferentes velocidades de migração v , mudam $u(x, z = 0, t)$ dado em diferentes imagens do refletor. Logo, o parâmetro v , em analogia com o parâmetro t na propagação das ondas físicas, pode ser interpretado como a variável de propagação.

Assim, a direção de propagação da onda imagem considerada, dada pelo ângulo β , não é constante mas depende da variação da velocidade de migração v . Esta dependência em função da inclinação p e velocidade de migração v , está de acordo com (A.6). Sob estas condições, substitui-se em (A.29), as relações (A.6) e $\cos \beta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta}$. Logo, obtém-se:

$$u(x, z, v) = f \left(-(x - x_0)p - \frac{z}{v} \sqrt{1 - p^2 v^2} \right) \quad (\text{A.30})$$

Nota-se que a dependência de $u(x, z, v)$ por v é agora explícita. Calculando as derivadas parciais de $u(x, z, v)$ em relação a x, z e v , tem-se:

$$u_{xx} = f'' p^2 \quad (\text{A.31})$$

$$u_{zz} = f'' \frac{1}{v^2} (1 - p^2 v^2) \quad (\text{A.32})$$

$$u_{vz} = -f'' \frac{1}{v} \sqrt{1 - p^2 v^2} \left(\frac{z}{v^2} \sqrt{1 - p^2 v^2} + \frac{z}{v} \frac{p^2 v}{\sqrt{1 - p^2 v^2}} \right) \quad (\text{A.33})$$

onde f'' denota a segunda derivada da função f . As derivadas de primeira ordem foram negligenciadas pois o interesse é somente pela propagação cinemática da onda imagem, o que é garantido pelas derivadas de segunda ordem [33]. Portanto, realizando as multiplicações necessárias em (A.33), escreve-se:

$$u_{vz} = -f'' \frac{z}{v^3} (1 - p^2 v^2) - f'' \frac{z}{v} p^2 \quad (\text{A.34})$$

Substituindo as equações (A.31) e (A.32) em u_{xx} e u_{zz} , obtém-se:

$$u_{vz} = -\frac{z}{v} u_{zz} - \frac{z}{v} u_{xx} \quad (\text{A.35})$$

E, por fim, chega-se a equação da onda imagem desejada dada por (2.1):

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z} p_{vz} = 0$$