UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Mariana Lima Duro

DESENVOLVIMENTO DA ESTIMATIVA NUMÉRICA: instrumentos de avaliação e estratégias de solução

Porto Alegre
2017

Mariana Lima Duro

DESENVOLVIMENTO DA ESTIMATIVA NUMÉRICA: instrumentos de avaliação e estratégias de solução

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Doutora em Educação.
Orientadora: Prof. Dra. Beatriz Vargas Dorneles
Linha de Pesquisa: Aprendizagem e Ensino

Porto Alegre
2017

CIP - Catalogação na Publicação

Duro, Mariana Lima
DESENVOLVIMENTO DA ESTIMATIVA NUMÉRICA: instrumentos de avaliação e estratégias de solução / Mariana Lima Duro. -- 2017.
199 f.

Orientadora: Beatriz Vargas Dorneles.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2017.

1. Estimativa Numérica. 2. Desenvolvimento Matemático. 3. Estimativa na Reta Numérica. 4. Estimativa Numérica de Quantidades. 5. Estratégias de Estimativa Numérica. I. Dorneles, Beatriz Vargas, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Mariana Lima Duro

DESENVOLVIMENTO DA ESTIMATIVA NUMÉRICA: instrumentos de avaliação e estratégias de solução

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Aprovada em 19 jul. 2017

Profa. Dra. Beatriz Vargas Dorneles – Orientadora

Prof. Dr. Sérgio Roberto Kieling Franco – UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso - UFRGS

Profa. Dra. Rosane da Conceição Vargas – PUCRS

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profa. Dra. Beatriz Vargas Dorneles, por se dedicar às discussões acerca do tema da estimativa numérica, em todas as fases de realização desta tese, com cuidado científico e carinho amigo.

Às escolas, representadas por seus responsáveis e professores, que se disponibilizaram a participar da pesquisa e aos alunos, que entenderam a importância da pesquisa para o desenvolvimento da educação matemática e dedicaram seu tempo para contribuir com ela.

Ao Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), minha instituição de origem, representado pelo diretor do IFRS - *Campus* Canoas, Mariano Nicolao e pela diretora de ensino, Cristiane Silva, que possibilitaram meu afastamento integral de minhas atividades docentes para que pudesse dedicar-me exclusivamente a esta pesquisa.

Aos meus colegas de área: Jaqueline Molon, Carina Andrade, Claudiomir Siqueira e Eduardo Pompermayer, que assumiram minha carga-horária durante meu afastamento para que eu pudesse permanecer integralmente focada no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus alunos, que compreenderam minha saída repentina da instituição e que sempre estiveram torcendo pelo meu sucesso enquanto aguardavam, carinhosamente, o meu retorno.

Ao estatístico Luciano Guimarães, pela contribuição essencial na análise dos dados que compuseram os resultados da pesquisa.

Às minhas colegas do grupo de pesquisa: Camila Nogues, Clarissa Pereira, Helena Oliveira, Isabel Vasconcelos, Jacqueline Enricone, Marcela Ríos, Rosane Vargas e Yasmini Sperafico, pela colaboração em todos os momentos de construção da tese.

Ao meu marido, Rogerio Sena, pelo incentivo e pela paciência durante o processo de produção da tese, correspondendo minha ausência com carinho e companheirismo.

À minha família, em especial à minha mãe, Geisa Lima, pela torcida constante, pela preocupação diária e por acompanharem todos os momentos importantes da minha vida.

Por fim, gostaria de agradecer a todos que contribuíram, seja com um gesto de carinho, seja com uma conversa motivadora ou mesmo com contribuições teóricas relevantes, para que esta tese fosse concluída.

RESUMO[1]

Há um conjunto de evidências que tem relacionado a habilidade de estimativa numérica ao desempenho matemático. Entretanto, observa-se que os resultados trazidos por estudos desta área são ainda inconsistentes e, muitas vezes, contraditórios. Assim, a presente tese tem como objetivo compreender o desenvolvimento da estimativa numérica. Para isso, em primeiro lugar, realizou-se um apanhado dos principais estudos sobre o tema, nas últimas três décadas. Em seguida, foram realizados três estudos complementares. O primeiro estudo analisou o desenvolvimento da Estimativa Numérica de Quantidades discretas (ENQ), para diferentes formas de apresentação de estímulos, em 730 sujeitos, estudantes do 2º ao 6º ano escolar (de uma escola pública e uma privada), da cidade de Porto Alegre/RS e comparou o desempenho desses estudantes com o de adultos, estudantes do ensino médio (Proeja) e do ensino superior em licenciatura em matemática, de uma escola pública federal da região metropolitana da cidade de Porto Alegre/RS. Foi realizado um estudo transversal quantitativo, com objetivo de observar possíveis níveis de desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas. Os resultados foram obtidos a partir do cálculo da precisão relativa apresentada por cada estudante, a partir de um Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ), e indicaram diferentes níveis de desenvolvimento para cada uma das diferentes situações apresentadas nas tarefas. Concluiu-se que as crianças de 2º e 3º ano são capazes de realizar estimativas tal como os adultos do ensino médio, em grande parte das tarefas. Entretanto, os alunos do ensino superior apresentaram melhor desempenho que os demais alunos dos níveis escolares analisados, em todas as tarefas do teste. A partir disso, sugeriu-se que a estimativa numérica de quantidades seja uma habilidade que pode ser desenvolvida e aprimorada ao longo de toda a vida. O segundo estudo relacionou a precisão da estimativa numérica em dois testes de desempenho em estimativa numérica: o TENQ e o Teste de Estimativa na Reta Numérica (TERN), de alunos do 5º e 6º ano escolar, de uma escola pública e outra particular de Porto Alegre/RS. Os mesmos alunos tiveram seu desempenho em estimativa comparado ao desempenho em um teste padronizado de aritmética (TDE). O principal objetivo desse estudo foi verificar em qual tarefa de estimativa as crianças apresentam maior precisão e se esses resultados estão relacionados ao desempenho aritmético. Os dados indicam que as crianças realizam estimativas mais precisas quando a tarefa envolve quantidades discretas do que quando precisam estimar os numerais posicionando-os em uma reta numérica, sugerindo que as tarefas requerem diferentes funções cognitivas, mesmo que apresentada moderada correlação entre elas, para escalas numéricas maiores. Quanto ao desempenho aritmético, observou-se que houve correlação com o desempenho em estimativa, em ambas as tarefas, quando considerado o intervalo numérico de 0 a 100. Esse resultado indicou que conhecimentos aritméticos podem estar relacionados à habilidade em realizar estimativas. O terceiro estudo verificou quais as estratégias foram mais utilizadas por 30 crianças do 2º ao 6º ano escolar (6 de cada ano), de uma escola pública da cidade de Porto Alegre/RS, para realizar estimativa numérica nas duas tarefas do estudo anterior: TENQ e TERN, a partir de entrevistas individuais semiestruturadas. O principal objetivo desse estudo foi, além de elencar as principais estratégias apresentadas, indicar quais foram mais frequentes e/ou eficientes. Foram encontradas 7 diferentes estratégias para as tarefas do TENQ e 8 estratégias para as do TERN, que variavam de simples contagem exata até estratégias mais complexas, envolvendo estruturas multiplicativas de fator proporcional. Os resultados indicaram que, para o TENQ, as crianças, dos diferentes anos escolares não diferiram quanto ao tipo de estratégia utilizada, mas sim na eficiência da sua utilização. Além disso, as crianças apresentaram maior frequência e precisão em estratégias de contagem exata para pequenas quantidades, mantendo a alta frequência, mas diminuindo a precisão, no uso desta estratégia para grandes quantidades. Para o TERN, a estratégia de contagem continuou sendo a de maior frequência, porém com baixa precisão. Para este teste, os estudantes com maior nível de escolaridade utilizaram estratégias mais complexas, que ainda não estavam acessíveis aos de menor escolaridade, e estas estratégias possibilitaram estimativas mais precisas. Em geral, os resultados encontrados nos três estudos apresentaram evidências de que a habilidade de realizar estimativa numérica passa por um processo progressivo de construção, que pode estender-se por toda a vida, sendo que diferentes tarefas possam envolver diferentes processos cognitivos, que de alguma forma estão relacionados a habilidades aritméticas.

Palavras-chave: Desenvolvimento Matemático. Estimativa na Reta Numérica. Estimativa Numérica de Quantidades. Desempenho Aritmético. Estratégias.

---

[1] DURO, M. L. **Desenvolvimento da Estimativa Numérica: instrumentos de avaliação e estratégias de solução**. 2017. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ABSTRACT[2]

There is evidence that has related the ability of numerical estimation to mathematical performance. However, it is observed that the results brought by studies in this area are still inconsistent and often contradictory. Thus, the present thesis aims to understand the development of numerical estimation. Therefore, firstly, a survey of the main studies on the subject was made during the last three decades. After that, three complementary studies were performed. The first study analyzed the development of the Numerical Estimate of Discrete Quantities (ENQ), for different ways of stimulus presentation in 730 people, students from the 2nd to the 6th school year (from a public and a private school), in the city of Porto Alegre / RS and compared the performance of these students with the adults performance, high school students (Proeja) and students with mathematics degree, from a federal public school in the metropolitan region of the city of Porto Alegre / RS. A quantitative cross-sectional study was carried out to observe possible levels of development of the ability to make estimation. The results were obtained from the calculation of the relative precision showed by each student, based on a Numerical Estimation of Quantities Test (TENQ), and indicated different levels of development for each of the different situations presented in the tasks. It was concluded that children in grades 2 and 3 are able to make estimation such as high school adults, in most tasks. However, the higher education students presented better performance in all tasks of the test than the other students of the school levels analyzed. Due to this result, it was suggested that the numerical estimation of quantities to be a skill that can be developed and improved throughout life. The second study related the accuracy of the numerical estimation in two numerical estimation tests: TENQ and a Number Line Estimate Test (TERN), of students in the 5th and 6th grade, from a public school and a private school in Porto Alegre / RS. The same students had their performance in estimation compared to performance in a standardized arithmetic test (TDE). The main objective of this study was to verify in which estimation task children present higher precision and if these results are related to the arithmetic performance. Data indicated that children make more accurate estimation when the task involves discrete quantities rather than when estimating numerals on a numerical line, suggesting that tasks require different cognitive functions, even if there is a moderate correlation between them, for larger numerical scales. Regarding arithmetic performance, it was observed that there was a correlation, from moderate to strong, with the performance in estimation in both tasks, considering the numerical interval from 0 to 100. This result indicated that arithmetic knowledge is related to ability in making estimation. The third study verified which strategies were most used by 30 children from 2nd to 6th grade (6 students of each grade), from a public school, in the city of Porto Alegre / RS, to perform numerical estimations in the two tasks of the previous study: TENQ and TERN, made in individual semi-structured interviews. Besides listing the main strategies presented, the main objective of this study was to indicate which strategies were more frequent and / or efficient. We found 7 different strategies for the TENQ tasks and 8 strategies for the TERN tasks which ranged from simple exact counting to more complex strategies involving multiplicative structures of proportional factor. The results indicated that, for the TENQ, the children of different school years did not differ in the type of the strategy used, but in the efficiency of its use. In addition, children presented higher frequency and accuracy in exact counting strategies for small amounts, maintaining high frequency but decreasing accuracy when using this strategy for large quantities. For the TERN, the counting strategy continued to be the one with higher frequency, but with low precision. For this test, students with higher level of education used more complex strategies, which were not accessible to those with less schooling , and these strategies made more accurate estimation possible. In general, the results found in the three studies presented evidence that the ability to perform numerical estimation undergoes a progressive process of construction, which can be extended throughout life, and different tasks may involve different cognitive processes, which are related to arithmetic skills somehow.

Keywords: Mathematical Development. Number Line Estimate. Numerical Estimation of Quantities. Arithmetic Performance. Strategies.

---

[2] DURO, M. L. **Desenvolvimento da Estimativa Numérica: instrumentos de avaliação e estratégias de solução.** 2017. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A – Aglomerado
AL – Aleatório
Ano – Ano Escolar
ANS – *Approximate Number System* / Sistema de Aproximação Numérica
DA - Desempenho em Aritmética
DP – Desvio Padrão
E – Espaçado
E10 - Matriz 10x1
E20 - Matriz 10x2
E100 - Matriz 10x10
EJA – Educação de jovens e Adultos
ENQ – Estimativa(s) Numérica(s) de Quantidades
EQ1 até EQ7: Estratégia de Estimativa de Quantidades 1 a 7
ER1 até ER9: Estratégia de Estimativa na Reta Numérica 1 a 9
ERN – Estimativa na Reta Numérica
GT - Grupos de Transição
MC - Máximo Conhecido
MD - Máximo Desconhecido
N – Número de sujeitos
N1, N2, N3 e N4 – Nível 1 ao Nível 4
P - Proeja
Pa – Escola Particular
PA - Precisão Absoluta
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
Pu - Escola Pública
PR - Precisão Relativa
PROEJA – Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos
S – Ensino Superior (Licenciandos em Matemática)
SN - Senso Numérico
TDE – Teste de Desempenho Escolar
TENQ - Teste de Estimativa Numérica de Quantidades
TENQ-A - Teste de Estimativa Numérica de Quantidades para itens Aglomerados
TENQ-E - Teste de Estimativa Numérica de Quantidades para itens Espaçados
TERN – Tarefa de Estimativa na Reta Numérica
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, a matemática preocupa-se com a resolução de problemas de origem prática, sobretudo para satisfazer necessidades de problemas cotidianos que exigem respostas mais rápidas do que exatas. Percebendo essa necessidade, a sociedade vem provocando alterações nos objetivos educacionais, entre as quais ler, escrever e calcular, passaram a não ser mais suficientes, enfatizando o desenvolvimento do cálculo mental e, eventualmente, da estimativa.

Quando se analisa as expressões como: “matematicamente”, “exatamente” ou “precisamente”, que ressaltam a exatidão como um atributo essencial, falar de estimativa no contexto matemático pode representar uma contradição. No entanto, o que se percebe é que, em algumas circunstâncias, a estimativa é mais útil do que a própria resposta exata, sendo também muito utilizada em Estatística, no Cálculo Numérico e na Matemática Aplicada, por exemplo.

Uma estimativa nada mais é que um palpite matemático inteligente (SMOOTHEY, 1998). Não se trata de um número qualquer, escolhido ao acaso, mas de um número escolhido pela observação e pelo estabelecimento de estratégias que visem melhor precisão, mesmo que sem exatidão. Estimativas mais precisas são aquelas menos desviadas (para mais ou para menos) da quantidade/posição real. Por exemplo, em situações nas quais os valores são variáveis, como a temperatura ao longo de um dia ou a população de uma região, é interessante realizar uma previsão, com uma precisão razoável.

Embora sempre representem quantidades, algumas estimativas não envolvem relações numéricas, podendo estar relacionadas à intensidade de brilho ou a comprimentos de ondas (sonoras, por exemplo). Outras estimativas implicam em relações numéricas, como a realização de cálculos por estimativa (estimativa numérica computacional), a quantificação de objetos em um conjunto (estimativa numérica de quantidades) e as estimativas de posição de números em uma linha numerada (estimativa na reta numérica).

Partindo da premissa de que a estimativa numérica assume importância como base para o conhecimento matemático geral e também para habilidades específicas de aritmética (BOOTH & SIEGLER, 2006; GEARY; BAILEY & HOARD, 2009; MAZZOCCO; FEIGENSON; HALBERDA, 2011; PARK & BANNON, 2013), torna-se importante que estudos em educação matemática considerem três aspectos: o processo de desenvolvimento desta habilidade desde a infância até a vida adulta; as principais tarefas de avaliação de estimativa e sua relação com habilidades aritméticas; e a compreensão das diferentes estratégias utilizadas para ajudar as crianças a desenvolver a habilidade de realizar estimativas numéricas.

Nesta perspectiva da diversidade de situações que envolvem estimativas (numéricas ou não), este trabalho focou-se em compreender o desenvolvimento da estimativa numérica, observando o desenvolvimento desta habilidade em crianças e comparando-o com o desempenho de adultos. Em seguida, buscou-se avaliar o desempenho de crianças nas tarefas de estimativa numérica de quantidades e de estimativa na reta numérica, comparando-os com o desempenho aritmético. Complementando estes objetivos, buscou-se elencar e analisar as estratégias utilizadas em ambas as tarefas, a partir da eficiência do uso de cada uma e da combinação de mais de uma.

1.1 JUSTIFICATIVA

O desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas numéricas é o tema principal desta tese. A escolha por trabalhar com um grupo de estudantes do ensino fundamental e um grupo de estudantes adultos, com diferentes níveis de escolarização, partiu do interesse da pesquisadora por esse tema específico, considerando os frequentes relatos de dificuldades de aprendizagem de matemática em todos os níveis de ensino e sua relação com a habilidade de realizar estimativas.

A vontade de desenvolver uma pesquisa nesta área relaciona-se com a formação acadêmica da pesquisadora em Educação Matemática e seu interesse pelo estudo acerca da aprendizagem desta área, com intuito de contribuir efetivamente em seu ensino. Questões relacionadas à realidade e ao contexto dos educandos, principalmente, permitem refletir sobre novas e urgentes possibilidades para o ensino de matemática na educação básica. Nesse sentido, à medida que se dirige o foco para a aprendizagem, isto é, para a compreensão do desenvolvimento da habilidade de realizar estimativa numérica, esta pesquisa torna-se uma importante ferramenta para a reflexão acerca deste tema do campo da educação matemática.

A literatura da educação matemática argumenta repetidamente sobre a importância da estimativa, ressaltando que tarefas de estimativa numérica são particularmente úteis para fornecer informações sobre representações numéricas, pois se suspeita requerer do sujeito integração do conhecimento conceitual e processual dos números (SIEGEL; GOLDSMITH & MADSON, 1982). Esse tema continua sendo bastante atual, já que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), documento que, atualmente, orienta o trabalho docente no Brasil, trazem a ideia de que o desenvolvimento de estratégias de estimativa numérica auxilia no aprendizado da matemática, possibilitando aos alunos julgar o grau de precisão necessário para resolver uma situação específica (BRASIL, 1998).

Por fim, a questão mais discutida na literatura considera a possibilidade de a estimativa refletir a forma como se representa mentalmente os números (reta numérica mental) ou como o desempenho em tarefas desse tipo pode ser afetado por um conhecimento limitado de número (EBERSBACH; LUWEL & VERSCHAFFEL, 2015). Entretanto, a mais consistente conclusão é que as pessoas não são boas em realizar estimativas. Mesmo que já exista considerável tradição em estudos sobre este tema, no Brasil, até onde se sabe, a estimativa numérica não foi investigada e, nas pesquisas internacionais, ainda há pouco consenso sobre os resultados, embora muitos relatem a falta do seu ensino nas escolas. O cenário teórico descrito anteriormente demonstra a necessidade de mais estudos sobre o tema da estimativa numérica.

1.2 A PRESENTE PESQUISA

Esta pesquisa integra um projeto mais abrangente, intitulado “Diversidade na aprendizagem da matemática inicial: a compreensão da estimativa numérica” (Plataforma Brasil e Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob o número 31575913.6.0000.5347), coordenado pela professora Beatriz Vargas Dorneles, que está sendo desenvolvido junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRGS. O projeto tem como proposta o estudo da diversidade na aprendizagem da matemática, no que se refere à compreensão da estimativa numérica em diferentes grupos de alunos.

A variabilidade no conhecimento e processos requeridos por diferentes tarefas de estimativa tem impedido progressos na compreensão da estimativa (SIEGLER & BOOTH, 2005). Entretanto, as limitações de espaço e tempo, juntamente com o vasto e variado conjunto de tarefas que envolvem estimativa, exigem concentrar este estudo em um subconjunto de temas sobre estimativa. Por isso, decidiu-se focar os estudos aqui relatados na estimativa numérica de quantidades discretas e na estimativa na reta numérica (tarefas clássicas nos estudos dessa área), não deixando de destacar a importância das demais tarefas de estimativa, em especial, a de estimativa computacional. Esta decisão reflete o interesse em compreender o desenvolvimento da estimativa nas crianças comparando-o a esse desempenho na fase adulta, excluídos alguns conhecimentos externos, tais como unidades de medida ou conhecimentos gerais sobre situações do cotidiano, que vão além dos conhecimentos subjacentes ao processo de realização de estimativas.

Sendo assim, nesta pesquisa, estudou-se o desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas, quando (e se) as crianças alcançam a habilidade de realizar estimativas semelhante à dos adultos, quais as relações envolvidas no desempenho em estimativa de quantidades e em estimativa na reta numérica e como ambas se relacionam com o desempenho em aritmética. Além disso, analisaram-se diferentes estratégias de estimativa utilizadas pelas crianças nas diferentes tarefas de estimativa numérica.

Após introdução geral sobre estimativa numérica, reunindo argumentos que justificam a presente pesquisa, no capítulo subsequente, foi realizado um apanhado teórico retrospectivo (de 1982 a 2016) sobre os estudos já publicados em estimativa numérica de quantidades e estimativa na reta numérica. Nesse capítulo, além de trazer o conjunto de estudos e suas interlocuções em diferentes épocas, foram destacados os conhecimentos já consolidados acerca da estimativa numérica. Em seguida, foram apresentados os três estudos que compõem esta tese, os quais são descritos resumidamente a seguir.

1.2.1 Estudo 1: Desenvolvimento da Estimativa Numérica de Quantidades

É um estudo transversal quantitativo, realizado com crianças do 2º ao 6º ano e com adultos estudantes do ensino médio e superior. Os dados deste estudo foram obtidos a partir de um Teste de Estimativa Numérica de Quantidades, criado pela pesquisadora, aplicado em 730 pessoas (crianças e adultos), com o intuito de ampliar comprovações empíricas de que há um avanço no desempenho em estimativa de quantidade nas diferentes etapas escolares e diferentes escolas. Este estudo também analisou a precisão da estimativa de quantidades em diferentes escalas numéricas e diferentes formas de apresentação dos estímulos. Além desta análise sobre o avanço da precisão das estimativas de quantidades das crianças, a novidade desse estudo está na comparação desse desenvolvimento à capacidade de realizar estimativa numérica dos adultos, nas situações em que foi possível verificar tal fato.

1.2.2 Estudo 2: Estimativa Numérica e Desempenho Aritmético

É um estudo populacional quantitativo e comparativo, realizado com crianças do 5^{o} e 6^{o} ano em duas escolas, uma pública e uma privada, em que se analisa a precisão das estimativas das crianças em duas tarefas de estimativa: uma que exige a estimativa de quantidades de itens em um conjunto e outra que exige a estimativa da posição de números em uma reta numérica, nas situações em que são controlados os valores a serem estimados e a escala numérica. Além disso, relacionou-se estes resultados ao desempenho em aritmética, a partir de um teste de aritmética padronizado. A novidade deste estudo é a comparação do desempenho em estimativa numérica de crianças do 5^{o} e 6^{o} ano em dois diferentes testes de estimativa numérica, relacionando com o desempenho em aritmética dessas crianças, pois, até onde se sabe, nenhuma pesquisa realizou tal comparação tripla.

1.2.3 Estudo 3: Estratégias de Estimativa Numérica

É um estudo amostral, quantitativo e qualitativo, realizado com 30 crianças do 2^{o} ao 6^{o} ano de uma escola pública e que tem como objetivo, a partir de entrevistas semiestruturadas, verificar as estratégias utilizadas pelas crianças em duas tarefas de estimativa numérica, destacando as mais eficientemente utilizadas. Também se verificaram possíveis combinações de estratégias que pudessem auxiliar na precisão das estimativas. Estas estratégias foram, então, listadas e categorizadas. A novidade deste estudo, além da categorização de estratégias, é de relatar quais estratégias mostraram-se mais precisas para cada situação apresentada.

Após relatar os três estudos realizados, por fim, descreveram-se as conclusões gerais da pesquisa, destacando suas possibilidades de ampliação futuras e as limitações encontradas durante a sua aplicação e a análise dos seus resultados. Através da interlocução dos achados deste estudo com os resultados já consolidados em estudos já realizados, busca-se contribuir com avanços no ensino de estimativa numérica nas escolas.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral desta tese foi compreender o desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas numéricas. Tendo em vista a necessidade de preencher algumas lacunas ainda presentes na literatura atual, relacionadas ao conhecimento sobre estimativa numérica, nesta tese discutiram-se questões relacionadas aos seis objetivos específicos listados a seguir:

1. Identificar se o desenvolvimento da estimativa numérica de quantidades é progressivo e se existem níveis de precisão semelhantes para uma mesma etapa escolar em estudantes do 2º ao 6º ano escolar nas diferentes situações de apresentação dos estímulos (Estudo 1).
2. Verificar em que momento do desenvolvimento cognitivo as crianças discriminam quantidades de forma confiável ou com o mesmo grau de precisão que dos adultos (Estudo 1).
3. Constatar em que situações, em duas tarefas de estimativa, as crianças são mais precisas (Estudo 2).

4. Comparar o desempenho de crianças em diferentes tarefas de estimativa numérica com o desempenho em aritmética (Estudo 2).

5. Descrever quais as estratégias as crianças usam para realizar estimativas em duas diferentes tarefas, identificando possíveis padrões ou categorias (Estudo 3).

6. Verificar quais categorias de estratégias são mais eficientes, para cada situação apresentada, em diferentes tarefas de estimativa numérica (Estudo 3).

Para atingir os objetivos propostos, esta tese está organizada em três estudos complementares.

1.4 HIPÓTESES

A partir de uma perspectiva interacionista, de inspiração piagetiana, pressupõe-se que o desenvolvimento da estimativa numérica é dado por níveis de conhecimento cada vez mais complexos e que, em algum momento, as crianças passam a realizar estimativas tão precisas quanto os adultos. Ou seja, a habilidade de realizar estimativas seria ampliada com o passar do tempo e com a experiência, até a chegada de um patamar formal de conhecimento, com estimativas realizadas com um grau de precisão comparável ao dos adultos (Estudo 1). O desenvolvimento dessa habilidade explicaria a relação entre o desempenho em diferentes tarefas de estimativa e o desempenho aritmético. Além disso, por observar, através da experiência docente, que a reta numérica é um instrumento pouco utilizado nas escolas brasileiras (enquanto a quantificação de elementos é bastante difundida), também se traz como hipótese a ideia de que as crianças poderiam ser mais precisas na tarefa de estimativa de quantidades em comparação ao desempenho observado na tarefa da reta numérica, mas que ambas estariam correlacionadas com o desempenho em aritmética (Estudo 2). Essa hipótese é suportada pela ideia de que ambas as tarefas de estimativa demandam processos cognitivos que estão relacionados à matemática. Para isso, diferentes e mais elaboradas estratégias são desenvolvidas, também com a idade e a experiência, a fim de realizar estimativas mais precisas (Estudo 3).

Dessa forma, espera-se que este estudo contribua, não só para o desenvolvimento científico na área de aprendizagem de matemática, mas também que traga subsídios para o desenvolvimento da estimativa numérica nas salas de aula de matemática das escolas brasileiras.

1.5 MÉTODO

Esta pesquisa adotou uma abordagem mista, analisando dados qualitativos e quantitativos, no intuito de qualificar a comparação entre os efeitos observados. Participaram da pesquisa um total de 730 sujeitos, crianças e adultos, estudantes de instituições públicas e de uma escola privada, pertencentes à região metropolitana de Porto Alegre/RS. Os critérios para seleção das escolas foram o fato de terem alunos estudantes das etapas escolares pertinentes para pesquisa (alunos do 2º ao 6º ano do ensino fundamental e adultos do ensino médio e superior) e de atenderem a populações com características sócio econômicas distintas, para uma possível comparação, baseando-se em dados apresentados pelas escolas.

A escolha dos anos escolares das crianças desta amostra deu-se, em limite inferior (2º ano), pelo fato de as crianças já terem sido apresentadas às centenas. Ou seja, nesta etapa escolar as crianças da amostra já são capazes de reconhecer e compreender as magnitudes numéricas até 100. Em limite superior (6º ano), a escolha deu-se pelo fato de que nesta etapa as crianças já possuem conhecimentos matemáticos escolares suficientes que as tornem capazes de realizar estimativas com maior grau de precisão, tal como os adultos. A escolha por adultos em tempo de escolarização teve em vista evitar possibilidade da interferência do tempo de afastamento da escola na habilidade de realizar estimativas.

A primeira etapa de seleção da amostra da pesquisa deu-se por meio de uma visita da pesquisadora às instituições de ensino, momento no qual foi feita a apresentação da proposta da pesquisa, a solicitação do espaço físico (sala de aula com projetor), a autorização da direção para a participação da escola (Anexos A e B) e a adesão dos professores (Anexo C), que forneceram o tempo e o espaço de suas aulas, bem como informações sobre aspectos cognitivos dos estudantes, relevantes à pesquisa.

Todos os sujeitos aceitaram participar da pesquisa, na condição de terem acesso a seus resultados (Anexo E). Para os participantes menores de idade, um termo de aceite de participação também foi enviado aos pais ou responsáveis (Anexo D). Todos os participantes tiveram sua identidade preservada durante todas as etapas de desenvolvimento da pesquisa, bem como na divulgação dos resultados. O método detalhado de cada estudo foi descrito no seu capítulo correspondente.

REFERÊNCIAS

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, p. 189–201, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC / SEF, 1998.

EBERSBACH, M.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. The Relationship Between Children's Familiarity with Numbers and Their Performance in Bounded and Unbounded Number Line Estimations*. Mathematical Thinking and Learning*, 17:2-3, p.136-154, 2015.

GEARY, D. C.; BAILEY, D. H.; HOARD, M. K. Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: the number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27, p. 265-279, 2009.

MAZZOCCO, M. M. M.; FEIGENSON, L.; HALBERDA, J. Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. *PlosOne*, 6 (9), 2011.

PARK, J.; BRANNON, E. M. Training the approximate number system improves math proficiency*. Psychol Sci,* 24(10), p. 2013-9, 2013.

SIEGEL, A. W.; GOLDSMITH, T. H.; MADSON, C. R. Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 211–232, 1982.

SIEGLER, R.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation: A Review. In CAMPBELL, J. I. D. *Handbook of Mathematical Cognition*. Psychology Press: New York. Cap. 2, p. 197-212, 2005.

SMOOTHEY, Marion. *Atividades e jogos com estimativas*. São Paulo: Scipione, 1998.

2 RETROSPECTIVA DOS ESTUDOS EM ESTIMATIVA NUMÉRICA (1982-2016)

Neste capítulo, foram revisados trabalhos de investigação relacionados ao desenvolvimento da estimativa numérica desde a década de 1980 até os dias atuais, a partir dos primeiros estudos indexados encontrados até os mais atuais. Foi realizada uma revisão assistemática da literatura e observou-se que, desde a década de 80 já eram ressaltadas as tentativas de se esclarecer quais as habilidades matemáticas seriam necessárias para o sucesso na vida adulta (LEVINE, 1982). Ainda nesta época, a capacidade de realizar estimativas numéricas mentais aparecia em muitas dessas listas, destacando-se sua utilidade em situações cotidianas que envolvem números, inclusive para julgar se o resultado exato obtido é razoável para o seu propósito.

Sabe-se que o sistema de contagem decimal, utilizado em inúmeros países, incluindo o Brasil, estabelece uma quantificação exata das quantidades, permitindo reconhecer diferenças precisas, diferentemente do que acontece quando se realizam estimativas. No entanto, crianças e adultos, mesmo possuindo estas representações exatas, também utilizam estimativas durante toda sua vida (FEIGENSON; LIBERTUS & HALBERDA, 2013), tendo em vista que a capacidade de realizar estimativas com razoável precisão torna a vida mais fácil (SIEGLER & BOOTH, 2004) e, em determinados contextos, é mais conveniente que a quantificação exata (AZEVEDO, 1996).

Concorda-se com a perspectiva de Siegler e Booth (2005) de que estimativa numérica é um processo de tradução entre representações quantitativas alternativas, nas quais pelo menos uma não é exata e, pelo menos, uma é numérica. Por exemplo, a estimativa na reta numérica requer traduzir um número em uma posição espacial ou traduzir uma posição espacial em um número. Da mesma forma, a estimativa de quantidades requer traduzir uma representação quantitativa de objetos não-numérica em um número e a estimativa computacional envolve a tradução de uma representação numérica exata (por exemplo, 75 × 29) para uma inexata (cerca de 2200).

Para compreender os aspectos relacionados à estimativa numérica, estudiosos vêm discutindo, há mais de três décadas, quais habilidades cognitivas são as possíveis bases mentais que originam esta habilidade, de que forma a estimativa pode estar relacionada com a representação mental das magnitudes numéricas, quais as diferentes maneiras de avaliar o desempenho em estimativa e também de comparar ao desempenho em matemática, bem como, de que maneira se desenvolve esta habilidade e o uso de estratégias de estimativa. Sendo assim, buscou-se concentrar aqui os principais estudos e seus resultados a fim de situar o leitor no contexto atual dos estudos nesta área.

2.1 PERSPECTIVA TEÓRICA ADOTADA

O grande desafio da pesquisa em educação ainda recai sobre a ideia de como o ser humano aprende, a fim de criar condições que possibilitam o aprendizado. Para isso, é necessário discutir as teorias que discorrem sobre o tema e de que forma a maneira como entendem o aprendizado encaminham o método e influenciam os resultados das pesquisas em educação. Tratando-se de estimativa numérica, considera-se o fato de que, em sua grande parte, as pesquisas desenvolvidas trazem uma base inatista da capacidade numérica (DEHAENE, 1997; STARKEY & COOPER, 1980; OPFER & SIEGLER, 2012; PARK & BRANNON, 2013), considerando esta ser uma habilidade cognitiva presente ao ser humano desde o nascimento.

É verdade que teóricos construtivistas (ou interacionistas) não se propuseram a discutir esta habilidade em especial. Desta forma, aqui neste trabalho, embora se discuta os resultados encontrados por pesquisadores cognitivistas, procurou-se realizar uma perspectiva dialógica entre as teorias, pressupondo uma capacidade inata de quantificação, mas que só pode ser ampliada, de forma a tornar o sujeito capaz de realizar estimativas de quantidades por influência desses fatores internos inatos, a partir de relações de pensamento que se originam de relações sociais e com o meio ambiente. Nessa perspectiva, a teoria construtivista prevê que o sujeito tenha potencialidades próprias, inclusive inatas, mas o meio social é fator primordial para o desenvolvimento ou não dessas habilidades (PIAGET, 1978).

O inatismo postula uma base orgânica (aptidões ou habilidades), na qual o conhecimento posterior se ampara (DEHAENE, 1997). Entendendo a estimativa numérica dessa forma, ensiná-la seria um fator sem importância, já que o conhecimento só precisaria aflorar no momento adequado. Entretanto, o que se percebe é que a estimativa exige a elaboração de estratégias eficientes e eficazes para que a quantificação realizada pelo sujeito ou o posicionamento de um número em uma linha numérica sejam tão próximos quanto possível da quantidade/posição real. Ou seja, para realizar estimativas, uma gama de estratégias precisa ser elaborada, reelaborada e escolhida, não ao acaso, pelo sujeito, de maneira a suprir as necessidades do problema proposto, considerando a precisão necessária para cada situação apresentada.

Considera-se que, para realizar estimativas, não basta que o sujeito simplesmente observe o estímulo unicamente com mecanismos perceptivos, é preciso estabelecer relações entre os fatores conhecidos, gerando novos conhecimentos dentro do conteúdo abordado (PIAGET, 1978; 1981). Por exemplo, para realizar a estimativa de uma quantidade de pontos dispostos em uma grade quadriculada, não basta observar os pontos, nem mesmo contá-los (devido ao tempo escasso). Para isso, pode-se tanto realizar contagem dos elementos faltantes (no caso de a matriz estar quase cheia) e reduzir esta quantidade do valor total de pontos de uma matriz completa, ou mesmo multiplicar a quantidade de linhas e colunas completas, adicionando uma estimativa rápida dos elementos que não preenchem uma linha completa.

Além dessas, outras estratégias também podem ser acessadas ou elaboradas pelo sujeito, demonstrando a necessidade de retirar informações sobre as quantidades que não estão nos objetos, mas nas relações quantitativas presentes entre eles, exigindo conhecimentos superiores aos unicamente perceptivos. Nesse caso, realizar uma subtração de pontos pode ser mais fácil do que a multiplicação de linhas e colunas, que pressupõe uma noção inicial de área coberta pela matriz, por exemplo. No caso de posicionar números em uma linha numérica, é preciso conhecer os pontos inicial e final da reta para realizar a estimativa dessa posição, considerando os espaçamentos entre os números. Para isso, não basta simplesmente posicioná-los de maneira aleatória, é preciso perceber, por exemplo, se o número a ser posicionado está mais próximo a uma região central desta reta ou a outros pontos de referência que podem ser criados a partir de uma relação proporcional de espaçamento estabelecido pelo sujeito.

A perspectiva de Piaget (1978, 1981), com a qual se concorda, é a de que o cognitivo se desenvolve a partir de estádios que se modificam de forma qualitativa, com o tempo e com a experiência. Para o pesquisador, estes estádios estariam distribuídos em sensório motor (0 a 2 anos); pré-operatório (2 a 6 anos); operatório concreto (7 a 11 anos) e operatório formal (12 anos em diante), sendo a idade variável e não fixa para diferentes indivíduos e diferentes contextos/conteúdos. Pressupõe-se que os participantes desta pesquisa estejam distribuídos entre os dois últimos estádios de desenvolvimento descritos por Piaget (1978, 1981), entretanto, considera-se necessário retomar os principais aspectos trazidos dos estádios anteriores para compreender o desenvolvimento lógico humano de maneira geral.

O estádio sensório-motor, como o próprio nome já diz, é baseado em percepções sensoriais e em esquemas motores que auxiliam na resolução de problemas práticos, como: pegar, jogar, morder e agir sobre eles de uma forma "pré-lógica". Reflete-se em atividades como colocar um objeto dentro, ou em cima ou embaixo de outro, construindo conceitos como maior/menor, indispensáveis para realizar estimativas futuras. O estádio seguinte, o pré-operatório, é marcado pelo aparecimento da linguagem oral e pelo desenvolvimento da capacidade simbólica. Com isso, os sujeitos passam a construir as habilidades que, posteriormente, permitirão expressar suas estratégias de estimativa e realizar ações mentais que permitam atribuir números a quantidades. Entretanto, os sujeitos deste estádio ainda não sejam capazes de relacionar mais de uma dimensão. Não possuir esta habilidade impede o desenvolvimento de um raciocínio proporcional multiplicativo, muito utilizado no estabelecimento de estimativas. Os estádios seguintes são particularmente importantes para este trabalho, pois, à princípio, é onde se encontram os sujeitos pesquisados (PIAGET, 1978; 1981).

No estádio operatório concreto há mais raciocínio do que percepção. Esse fato destaca os aspectos estratégicos adotados na realização de estimativas. Com as operações (ações interiorizadas) tornando-se cada vez mais reversíveis, estratégias como a de subtração de elementos de uma matriz ou de posição final à inicial de uma reta podem ser evocadas. Já é possível classificar objetos de acordo com suas características, inclusive inserindo um mesmo objeto em classes distintas. Entretanto, é a partir do estádio das operações formais que é possível utilizar palavras e símbolos sem precisar de referências concretas. Todos esses estádios são, ao mesmo tempo, contínuos (surgem a partir do estádio anterior) e descontínuos (não são apenas adicionados ao estádio anterior, mas o transformam) (PIAGET, 1978; 1981).

Um diálogo entre a corrente inatista, que trata do conhecimento numérico como sendo inato e de origem biologicamente determinado, e a corrente construtivista, que não discutiu especificamente questões de estimativa numérica, mas que considera a aprendizagem humana como um processo de construção, é possível, tendo em vista que um aspecto não exclui o outro. Ou seja, pode-se partir da hipótese de que bases orgânicas possam existir previamente para que sejam desenvolvidas futuramente (ou não), dependendo das relações estabelecidas e das interações proporcionadas ao sujeito ao longo de sua vida. Também é necessário destacar que existem limitações para este diálogo, à medida que não se considere possível admitir que crianças pequenas e animais possam distinguir quantidades, a não ser que estas sejam tidas como representações puramente visuais e perceptivas que envolvem outros aspectos que não os aspectos quantitativos propriamente ditos.

Antes de continuar a sequência de estudos desta tese, ressalta-se o motivo de não serem considerados como base para futuras análises os estudos que argumentam que as crianças são dotadas de um senso numérico inato e já predeterminado no seu nascimento (por exemplo, XU & SPELKE, 2000). Esses estudos consideram resultados obtidos a partir de comparação de representações numéricas não-simbólicas na distinção entre quantidades, relações e números; fatores que se consideram essenciais para as habilidades numéricas e para compreender como os números são usados para modelar o mundo. Pensa-se que, raciocinar sobre as relações entre quantidades é distinto de perceber as diferenças entre quantidades. Em suma, considera-se que não haja evidências suficientes de que os bebês podem representar objetos de maneira numérica cardinal, como os adultos. Dessa forma, ao discriminar pequenas quantidades ou comparar quantidades quando a diferença entre elas é suficientemente grande, os bebês podem apenas estar respondendo a estímulos físicos que não estão relacionados às quantidades em si, mas a características perceptíveis dos conjuntos apresentados.

Ou seja, alguns autores (DEHAENE, 1997; BOOTH & SIEGLER, 2006; PARK & BRANNON, 2013) valorizam evidências empíricas que levam à conclusão de que o senso numérico, do qual a estimativa numérica faz parte, é inato. Entretanto, existem poucos pesquisadores que trabalham com o tema da estimativa numérica e que valorizam a cultura no desenvolvimento dessa habilidade, numa perspectiva mais construtivista, como por exemplo, Ebersbach, Luwel e Verschaffel (2015) e Geary, Bailey e Hoard (2009). Nuerk e colaboradores (2004) trazem uma perspectiva interacionista, de inspiração piagetiana, com a qual concorda-se, de que, embora a estimativa parta de uma base inicial orgânica, essa base não determina um conjunto de habilidades que são construídas posteriormente.

Nesse sentido, para essa pesquisa, foram utilizados os resultados trazidos por pesquisadores inatistas a fim de discutir as tarefas utilizadas para avaliação da habilidade de estimativa numérica, relativizando a maneira como entendem as possíveis bases cognitivas que originam esta habilidade. Para esses aspectos, ideias construtivistas foram trazidas, ressaltando os processos de desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas e a capacidade de escolha e de construção de estratégias pelas crianças.

2.2 POSSÍVEIS BASES COGNITIVAS DA ESTIMATIVA NUMÉRICA

Já foi discutido que a competência matemática compreende uma grande variedade de diferentes habilidades e processos cognitivos e que algumas habilidades matemáticas elementares, como a discriminação de pequenas quantidades ou cálculos aritméticos com pequenos conjuntos de objetos são observadas em crianças (STARKEY & COOPER, 1980). Esses achados foram interpretados por alguns pesquisadores como evidências de que o cérebro humano seria dotado de um senso numérico inato (DEHAENE, 1997).

Ainda anteriormente à aquisição da quantificação exata, alguns pesquisadores consideram a existência de uma capacidade de enumerar pequenas quantidades de 3 ou 4 itens apresentadas por curtos períodos de tempo (DEHAENE, 1997), chamada de “*subitizing*”. Apesar da concordância geral entre os pesquisadores de que a enumeração é tratada de forma diferente dentro do intervalo de *subitizing*, tem havido algum debate sobre se o *subitizing* utiliza mecanismos iguais ou diferentes para a estimativa de intervalos numéricos maiores.

Os resultados de Libertus, Feigenson e Halberda (2011), que mediram a acurácia do Sistema de Aproximação Numérica (ANS) de crianças, forneceram evidências de que uma relação entre o senso numérico primitivo e a capacidade matemática começa desde o nascimento, apoiando a noção de uma ligação estreita entre um senso numérico primitivo e habilidades matemáticas formais. Park e Brannon (2013) também encontram correlação entre a acuidade da ANS e desempenho em matemática simbólica, mostrando que a adição e subtração aproximadas de matrizes de pontos melhoram a adição e subtração simbólicas. Tal pressuposto sustenta a hipótese de que as habilidades matemáticas complexas são fundamentalmente ligadas às habilidades quantitativas pré-verbais.

Ao contrário, Gebuis e Reynvoet (2012) propõem que os seres humanos estimam quantidades através da ponderação dos diferentes elementos visuais presentes nos estímulos. Assim, esta não seria uma capacidade quantitativa propriamente dita e estaria relacionada com fatores viso-espaciais. Halberda e Feigenson (2008) investigaram o ANS em crianças e adultos com duas matrizes contendo entre 1 e 14 itens para ser escolhida a matriz que apresentava a maior quantidade de itens. Eles mostraram que essa habilidade continua a crescer durante toda a infância, com níveis de acurácia atingidos surpreendentemente tarde no desenvolvimento, não antes do início da adolescência. Os autores destacam que o ANS é observado em crianças desde muito antes do ensino de matemática simbólica, por isso, pode ter um papel causal no desempenho matemático individual e que a capacidade de raciocinar sobre números simbólicos está profundamente entrelaçada com ANS. Ou seja, para estes pesquisadores, a capacidade de realizar estimativas de quantidades vai além do senso numérico (no sentido inato) e se desenvolve com a idade e com a experiência.

Pesquisadores como Verschaffel e colaboradores (1998), embora afirmem que a estimativa e a quantificação exata não sejam caminhos opostos e que podem estar estreitamente relacionadas, tal como pensam os construtivistas, consideram diversos fatores da Psicologia Cognitiva em suas constatações sobre o desenvolvimento da estimativa numérica. Essa perspectiva dialógica parece ser interessante, tendo em vista que a capacidade matemática pode ter uma origem biológica, mas seu desenvolvimento depende de fatores externos e das interações que possam ocorrer na vida do sujeito para a aquisição de conhecimentos mais complexos.

A origem do SN ainda é um ponto divergente entre os pesquisadores. Corso e Dorneles (2010) consideram que o SN é construído e que está relacionado à interação com números e ao desenvolvimento de estratégias. Em contrapartida, a ciência cognitiva trata o SN como uma capacidade inata localizada no sistema neuronal juntamente com a quantificação exata (DEHAENE, 1997). Para integrar essas duas concepções, Berch (2005) propõe uma perspectiva que aceita uma possível base orgânica para capacidade numérica das pessoas, mas que esta base não impossibilitaria uma construção deste sistema posteriormente, através das experiências. É nesta perspectiva de diálogo que foram discutidos os achados desta pesquisa.

2.3 MODELOS DE REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA MENTAL

Numa série de estudos, Siegler e colaboradores (BOOTH & SIEGLER, 2006; LASKI & SIEGLER, 2007; SIEGLER & BOOTH, 2004; SIEGLER & OPFER, 2003) indicaram que, durante os primeiros anos de escolaridade, o conhecimento das crianças sobre magnitudes numéricas sofre alterações fundamentais. O pressuposto de que o conhecimento numérico das crianças durante esses anos não apenas cresce quantitativamente, mas, acima de tudo, que os padrões subjacentes de representações numéricas sofrem uma mudança qualitativa, foi investigado em diferentes tarefas de estimativa.

Alguns autores sugerem que as representações mentais de número são realizadas por meio de uma reta numérica mental (LASKI & SIEGLER, 2007; LINK, NUERK & MOELLER, 2014) e que a tradução de números em posições na reta numérica está relacionada a representações mentais de magnitudes numéricas. Para isso, uma das tarefas amplamente utilizadas para compreender a representação mental dos números é a tarefa de estimativa na reta numérica (BARTH & PALADINO, 2011; DEHAENE et al., 2008; EBERSBACH et al., 2008; MOELLER et al., 2009; MULDOON et al., 2011; SIEGLER & BOOTH, 2004; SIEGLER & OPFER, 2003).

Os dados empíricos coletados a partir da tarefa de estimativa na reta numérica levaram pesquisadores a proporem vários modelos de representação numérica mental. Esses modelos são descritos a seguir, no intuito de compreender de que forma essa representação vem sendo discutida.

2.3.1 Modelo Acumulador ou Linear

Em um primeiro momento, Gibbon e Church (1981) propõem um modelo em que a distância entre os números posicionados na reta numérica mental seria constante e linear. Ou seja, que a razão entre a variabilidade da estimativa e a magnitude a ser estimada mantém-se constante (variabilidade escalar), aumentando a imprecisão conforme aumentam as magnitudes a serem representadas. Do mesmo modo, a representação de grandezas de magnitudes próximas seria mais difícil de ser discriminada do que a representação de grandezas mais afastadas.

2.3.2 Modelo Logarítmico

Ao contrário do modelo anterior, esse modelo sugere que a percepção de quantidade aumenta logaritmicamente, preservando as relações de razão, em vez de diferenças absolutas (DEHAENE, 1997). Ou seja, exagera-se a distância entre os números pequenos e minimizam-se a distância entre médios e grandes números. Como um caso extremo, Dehaene e colaboradores (2008) ainda encontraram evidências, em um estudo realizado na Amazônia, da presença de tal modelo em adultos, sem linguagem matemática estruturada, apoiando a ideia de que a representação logarítmica é o caminho inicial e intuitivo de mapeamento numérico.

Siegler e Opfer (2003) sugeriram um modelo que concilia os dois modelos descritos anteriormente, prevendo uma possível mudança logarítmico-linear, baseada nas habilidades quantitativas das crianças. Este modelo conciliador sugere que a representação logarítmica é dominante no início do desenvolvimento e, com a idade, a experiência e o conhecimento de um intervalo numérico cada vez maior, a representação tornar-se-ia linear. Concluíram também que, embora a representação das crianças possa ser melhor descrita por um modelo linear para intervalos numéricos menores, ela ainda pode ser logarítmica para intervalos maiores (SIEGLER & OPFER, 2003; SIEGLER & BOOTH, 2004).

O apoio mais forte para a hipótese de mudança logarítmica-linear veio de um grande número de estudos realizados por Siegler e seus colegas (BOOTH & SIEGLER, 2006; 2008; LASKI & SIEGLER, 2007; SIEGLER & BOOTH, 2004; SIEGLER & MU, 2008; SIEGLER & OPFER, 2003). Eles identificaram diferentes idades em que as crianças americanas se afastam de representações logarítmicas e desenvolvem representações lineares para diferentes intervalos numéricos. Especificamente, eles descobriram que a linearidade no intervalo numérico de 0-10 foi atingida por pré-escolares, que a linearidade na faixa de 0-100 foi atingida por alguns alunos da 1ª e 2ª séries, e que a linearidade na faixa 0-1000 foi atingida por alunos da 4ª, 5ª e 6ª séries.

Tanto o modelo logarítmico quanto o modelo acumulador (linear) fornecem dados de como as pessoas representam quantidades. No entanto, parece provável as crianças conhecerem e usarem várias representações de quantidades numéricas e que o contexto numérico influencie a escolha da representação utilizada. Possuir múltiplas representações é útil porque podem ser igualmente boas em situações diferentes, sendo a mudança de representação (de logarítmicas para linear) importante por razões teóricas e empíricas. Em nível teórico, as representações lineares refletem a estrutura do sistema de numeração; representar adequadamente essa estrutura é fundamental para compreender aritmética, notação decimal, álgebra e outros aspectos da matemática. Em nível empírico, essa mudança está fortemente relacionada aos resultados dos testes de desempenho de matemática, pois sugere que um melhor conhecimento numérico possa refletir diretamente no desempenho matemático aritmético ou de matemática geral (SIEGLER & BOOTH, 2004).

Os estudos de Siegler e colaboradores (BOOTH & SIEGLER, 2006; SIEGLER & BOOTH, 2004; SIEGLER & OPFER, 2003) confirmaram os achados anteriores, indicando que a reta numérica mental exibiria principalmente uma forma logarítmica, em especial para números maiores e crianças mais novas. Além disso, a capacidade de fazer estimativas lineares na reta numérica externa parece estar intimamente relacionada com a idade e com a melhoria das habilidades numéricas. No entanto, embora esses pesquisadores assumam que as habilidades numéricas das crianças possam afetar a representação numérica mental, eles não avaliaram essas habilidades especificamente, a fim de testar a hipótese de familiaridade das crianças com os números testados.

2.3.3 Modelo Duplo-linear

Com base nas representações numéricas de números de dois dígitos, Moeller e colaboradores (2009) propuseram um modelo representado por duas ou mais funções lineares. Nesse modelo, a representação mental de números poderia ser descrita, alternativamente, por uma combinação de dois padrões lineares com diferentes inclinações. Nuerk e colaboradores (2004) constaram que as dezenas e as unidades de números de dois dígitos são processadas separadamente (da esquerda para a direita) e não em sua totalidade. A explicação dos autores para este achado estaria no fato de que as crianças demorariam mais tempo a fazer comparações quando o dígito da unidade em um número é maior do que o dígito da dezena (por exemplo, 19 e 91). Os autores argumentam que os números são decompostos por seus dígitos separadamente.

A proposição de um modelo linear de duas fases lança uma ideia diferente sobre os resultados de Siegler e colaboradores (BOOTH & SIEGLER, 2006; SIEGLER & BOOTH, 2004; SIEGLER & OPFER, 2003) em relação à sua reivindicação de múltiplas representações mentais de número, sugerindo que pode haver apenas um tipo de representação em cada indivíduo, que consiste em, pelo menos, dois segmentos lineares, descartando a hipótese de múltiplas representações.

2.3.4 Modelo de Familiaridade com Números

Considerando as mudanças de conhecimento da magnitude numérica das crianças, Lipton e Spelke (2005) descreveram um modelo que sugere que as estimativas dos números familiares são mais precisas do que as de números desconhecidos, fornecendo apoio empírico a favor da hipótese de que a familiaridade com números leva a estimativas lineares. Ebersbach e colaboradores (2008) constaram que as crianças que contavam melhor tinham suas estimativas mais precisas. Sendo assim, a familiaridade das crianças com os números refletiria diretamente na sua reta numérica mental, sendo esta linear, contanto que os números estejam dentro do intervalo de números familiares às crianças (EBERSBACH et al., 2008).

2.3.5 Modelo de Juízo Proporcional

Mais recentemente, Barth e Paladino (2011) propuseram as versões do modelo de juízo proporcional de um e de dois ciclos para dar conta da mudança de representação logarítmica-linear. O modelo de um ciclo considera a estratégia que utiliza somente os pontos de origem e o ponto final da reta, enquanto o modelo de dois ciclos sugere que as crianças dependem de ambos os pontos, inicial e final, mais o ponto médio, o que leva a um modelo de dois ciclos. Estes modelos indicam que as estimativas são imprecisas longe dos pontos de início e fim e de outros pontos de referência conhecidos. Siegler e Booth (2004) já haviam discutido anteriormente a importância dessas marcações, mas Barth e Paladino (2011) trazem a ideia de que a reta não é uma representação pura, mas que pode estar influenciada pelo conhecimento numérico.

Constatado que a precisão da representação de magnitudes é baixa em diferentes tarefas de estimativa, identificar como as estimativas melhoram levou à construção de vários modelos de representação, tanto concorrentes quanto complementares, no intuito de explicar os mecanismos subjacentes à representação numérica. Considera-se bastante consistente a ideia de complementariedade entre os modelos (DORNELES; DURO; RIOS; NOGUES & PEREIRA, 2017). Recentemente, Dackermann e colaboradores (2015) propuseram essa integração, sugerindo que a cada modelo possa representar a compreensão das magnitudes numéricas, dependendo da idade do sujeito e da sua familiaridade com o intervalo numérico (SIEGLER & BOOTH, 2004; BOOTH & SIEGLER, 2006).

Embora grande parte das pesquisas sobre as representações numéricas mentais tenha se centrado na busca de padrões de desenvolvimento únicos, alguns estudos também examinaram se o desempenho variaria de acordo com as origens culturais. Siegler e Mu (2008) constataram que a estimativa na reta numérica 0-100 de pré-escolares americanos era melhor explicada por uma função logarítmica, diferentemente de seus pares chineses, cujas estimativas eram lineares. Curiosamente, quando crianças chinesas foram pareadas no desempenho aritmético com crianças escocesas, Muldoon e colaboradores (2011) constataram que suas estimativas não eram mais lineares do que as crianças escocesas mais velhas. Ainda, Laski e Yu (2014) investigaram a importância da linguagem e da educação para o desenvolvimento do conhecimento numérico (tendo em vista as evidências de que o sistema de contagem de base 10 facilita a compreensão dos conceitos numéricos), e descreveram que as estimativas de alunos chineses foram mais precisas do que seus pares americanos, que eram fluentes em chinês, mas tinham sido educados nos Estados Unidos. No geral, os resultados sugeriram que a abordagem educacional pode ter uma maior influência no desenvolvimento numérico do que a estrutura linguística do sistema de contagem.

2.4 ESTUDOS DE ESTRATÉGIA EM ESTIMATIVA NUMÉRICA

Ainda na década de 80, Siegel, Goldsmith e Madson (1982) investigaram a capacidade de estimativa de medição de crianças entre 7 e 8 anos e jovens adultos a partir da decomposição em pequenas amostras de medida conhecida e recomposição do todo. Encontraram fraca relação entre a precisão da estimativa e o uso de estratégias, mas uma forte relação entre estimativa e o conhecimento das crianças sobre sistemas de medida, números e cálculos. Os pesquisadores elencaram algumas estratégias de resolução de problemas de estimativa: a) estratégia baseada na capacidade perceptiva, b) estratégia baseada na referência de um padrão conhecido, c) o valor de referência fracionado e múltiplo, correspondente à utilização de um padrão e d) a estratégia de decomposição/recomposição. Na década seguinte, Crites (1992) ampliou os achados de Siegel, Goldsmith e Madson (1982) identificando que estimadores bem-sucedidos tenderam a usar múltiplas estratégias e estimadores não tão bem-sucedidos geralmente usavam estratégias perceptivas.

Com foco nas mudanças de estratégias, Lemaire e Siegler (1995) realizaram um estudo que constatou que crianças da 2ª e da 6ª série não diferem no tipo de estratégia de estimativa utilizada, mas diferem na eficiência com que as aplicavam. Os pesquisadores chamaram essa capacidade de julgar a melhor estratégia de acordo com a situação de “competência estratégica” e distinguiram quatro situações que podiam influenciar na velocidade e na precisão da resposta obtida: a) aquisição de novas estratégias e abandono das antigas, b) utilização com maior frequência de estratégias mais eficientes disponíveis, c) melhoria na fluência e eficiência com que as estratégias são executadas e d) melhoria na capacidade de adaptação no momento da escolha de estratégia.

Como um meio de obter características das estimativas, Siegler e Lemaire (1997) introduziram o método de escolha/não-escolha. Esse método é baseado na possibilidade de a criança escolher uma estratégia para solucionar um conjunto de problemas, sendo que os pesquisadores avaliam a estratégia usada em cada problema, calculam a velocidade média e a precisão para cada estratégia ou sugerem uma estratégia específica que deve ser utilizada na solução dos problemas. Em 2009, Luwel e colaboradores (2009) apresentaram uma discussão sobre o método de escolha/não escolha, afirmando que este sofre de dois problemas graves: 1) os resultados e conclusões sobre a eficiência da estratégia são influenciados por efeitos de seleção, que podem envolver tanto o tipo de problema em que as estratégias são utilizadas, quanto as diferenças individuais de preferência de estratégia; 2) este método não permite estudar a adaptabilidade das escolhas estratégicas das pessoas.

No estudo de Verschaffel e colaboradores (1998), estudantes da 2ª e 6ª série e alunos universitários realizaram estimativas da quantidade de itens em três tarefas apresentadas em uma matriz 10x10. De acordo com os pesquisadores, pelo menos duas diferentes estratégias deveriam ser utilizadas: adição dos grupos e subtração da quantidade de quadrados vazios do total de quadrados da matriz. Seus resultados indicaram que a escolha entre a estratégia da adição ou da subtração é altamente determinada pela quantidade de blocos apresentados na matriz. Mais especificamente, os participantes geralmente escolhem a estratégia de adição nas tarefas em que a matriz contém poucos blocos preenchidos, enquanto adotam a estratégia de subtração nas tarefas que contém uma grande quantidade de blocos, com poucas células vazias. A partir da observação do tempo e da precisão das respostas de cada sujeito, os pesquisadores consideraram que a utilização mista e adaptativa das estratégias aumentaria com a idade, convergindo para evidências de uma tendência para a utilização da estratégia de subtração como a mais eficiente.

Não considerando suficientes as duas estratégias encontradas por Verschaffel e colaboradores (1998), Luwel e colaboradores (2000) investigaram o desenvolvimento das estratégias em estimativa de quantidades, encontrando mais um grupo de estratégias. A pesquisa foi realizada com 69 alunos de ambos os sexos (39 do 2º ano e 30 do 6º ano), escolhidos a partir de seu desempenho em matemática (os melhores e os piores de cada turma), utilizando blocos coloridos em matrizes quadriculadas de três tamanhos diferentes. Tendo em vista o tempo de resposta e a precisão, três principais estratégias foram descritas: a) adição dos grupos de blocos, b) subtração do número de quadrados vazios da quantidade total de blocos e c) uma estimativa grosseira determinada de modo rápido, mas impreciso. Ou seja, encontraram uma terceira estratégia, não antes relatada, utilizada em diferentes situações: tanto em matrizes com maior quantidade de estímulos a serem contados quanto aquelas com menor quantidade de estímulos.

Mesmo que três diferentes estratégias já tivessem sido anteriormente descritas em 2000, em 2001 Luwel e colaboradores (2001) propuseram-se a identificar estratégias e mudanças de estratégias em tarefas de julgamento de quantidades, já que o desempenho em uma tarefa não depende apenas da eficiência com que as estratégias disponíveis são executadas, mas também dos motivos que geram mudanças do uso de determinada estratégia e da frequência e da adaptabilidade com que as estratégias disponíveis são executadas. Para isso, 59 crianças de 2ª e 6ª séries foram instigadas a determinar as quantidades de blocos distribuídos em 3 matrizes de tamanhos diferentes (7×7, 8×8, e 9×9), a partir da perspectiva teórica de "mudança estratégica” de Lemaire e Siegler (1995). Os autores (LUWEL et al., 2001) descreveram três modelos: a) o modelo de uma fase, que corresponde à estratégia de adição para todos os itens; b) o modelo de duas fases, que corresponde ao uso da estratégia da adição para pequenas quantidades de itens e da subtração para grandes quantidades e c) o modelo de três fases, que corresponde a uma estimativa rápida, influenciada pela informação sobre o tamanho da matriz. O modelo de duas fases aumentou com a idade, enquanto que o de uma fase diminuiu com a idade. Além disso, foi encontrada uma relação forte e positiva entre o uso da estratégia de subtração e precisão. Os alunos da 6ª série foram mais precisos do que os alunos de 2ª série apenas quando eles não receberam informação sobre o tamanho da matriz.

Continuando suas pesquisas sobre estratégias de estimativa de quantidades, Luwel e Verschaffel (2003) investigaram o efeito da pressão do tempo sobre as estratégias de estimativa em uma matriz 10x10, com 81 crianças da 6ª série, variando o tempo máximo de apresentação dos estímulos em três diferentes níveis: 5, 10 e 20 segundos. O repertório de estratégias dos participantes e a frequência e eficiência de utilização das estratégias foram afetados pelo tempo, afetando a precisão geral dos estudantes. Os autores observaram uma diminuição não significativa na capacidade de adaptação com o aumento da pressão do tempo, embora tenha havido uma tendência nessa direção.

Com sua constante busca para compreender as estratégias de estimativa, Luwel e Verschaffel (2008) discutiram três estudos que consideravam o modelo de análise de Lemaire e Siegler (1995) para a utilização de estratégias no contexto de uma tarefa de julgamento de quantidades de blocos coloridos em matrizes 5x5, 6x6, 7x7, 8x8 e 9x9. Em seu estudo, realizado com alunos da 3ª (N=25) e 6ª (N=20) séries e universitários (N=37) sobre as mudanças no desenvolvimento de estratégias de julgamento de quantidades, os participantes foram submetidos a três condições: a) uma condição de escolha de estratégia de adição ou de subtração, b) uma condição sem chance de escolha, em que tiveram de aplicar a estratégia de adição sobre todos os problemas da tarefa e c) uma condição sem chance de escolha em que eles tiveram que usar a estratégia de subtração em todos os problemas. Todos os alunos da 6ª série e os adultos aplicaram tanto a estratégia de adição, quanto a de subtração na condição de escolha, enquanto que apenas 60% dos alunos da 3ª série usaram as duas estratégias. Isto significa que 40% dos participantes mais jovens, exclusivamente, utilizaram a estratégia de adição para resolver todas as tarefas na condição de escolha. Outra observação interessante foi que o fornecimento de *feedback* sobre as escolhas de estratégia das crianças resultou em uma melhora maior do que os informar sobre a precisão de seus resultados. Por ser mais demorada e cognitivamente mais exigente, nas matrizes maiores a estratégia de subtração foi menos utilizada.

Assim como nesta pesquisa, Gandini, Lemaire e Dufau (2008) buscaram compreender os processos de estimativa e suas mudanças com a idade. Assim, jovens adultos (N=24) e idosos (N=24) realizaram dois experimentos de estimativas rápidas da quantidade de itens em coleções de 4 a 79 itens, que variavam não só na quantidade, como também na forma de apresentação, em um tempo de até 6 segundos. No primeiro experimento, foram recolhidas informações sobre as estratégias e o desempenho em cada tarefa e, no segundo experimento, foram observados os movimentos dos olhos enquanto os participantes foram testados. Os resultados mostraram que: a) os participantes usaram seis estratégias diferentes; b) os dois grupos de participantes usaram o mesmo conjunto de estratégias, mas variavam em quantas vezes eles usavam cada uma; c) as estratégias dos idosos foram menos precisas que as dos jovens adultos; d) o desempenho dos participantes e os movimentos dos olhos variavam em função da quantidade e da configuração dos itens; e) cada estratégia foi associada com medidas de desempenho e padrões de movimento dos olhos distintos. Os jovens foram quase sempre mais rápidos e mais precisos do que os adultos mais velhos, em cada estratégia.

Doze anos mais tarde que Siegler e Lemaire (1997) introduziram o método de escolha/não-escolha como um meio de obter características das estratégias cognitivas para realizar estimativas, Kovas e colaboradores (2009) examinaram a estimativa numérica de quantidades em 26 crianças de 10 anos de idade com alta e baixa habilidade matemática (avaliada em três ocasiões: aos 7, 9 e 10 anos de idade). Tinham como objetivo investigar os mecanismos cerebrais associados ao julgamento de quantidades e avaliar se as diferenças individuais na capacidade matemática estão associadas a esta tarefa. Os resultados sugeriram que, de forma semelhante aos adultos, múltiplas e distribuídas áreas cerebrais estão envolvidas na estimativa em crianças. E, apesar do desempenho comportamental igual, houve diferenças nos padrões de ativação cerebral entre os grupos de baixa e de alta capacidade matemática durante a tarefa, sugerindo que as diferenças individuais na capacidade matemática são refletidas na resposta do cérebro durante a solução da tarefa.

Para entender as estratégias de quantificação de itens e como elas são selecionadas, Gandini, Ardiale e Lemaire (2010) investigaram alunos da 5ª e 7ª série (N=49). Neste estudo, as crianças foram convidadas a realizar estimativas de quantidades em coleções de 11 a 79 pontos, apresentados em diferentes configurações (aleatória e canônica). Embora Luwel e colaboradores (2000) tenham encontrado três estratégias principais no julgamento de quantidades (adição, subtração e estimativa rápida), Gandini, Ardiale e Lemaire (2010) revelaram seis estratégias: a) fixação: enumeração de alguns pontos (via contagem) e estimativa visual dos pontos restantes com base na primeira enumeração; b) referência: verificação do estímulo visual, recuperação de uma representação numérica na memória de longo prazo, comparação da diferença entre a representação codificada e a representação recuperada, e, em seguida, ajuste da sua resposta com base nesta diferença; c) decomposição/recomposição: separação em pequenos grupos de itens (cerca de 4), estimativa do número de grupos análogos e multiplicação destes resultados; d) aproximação de contagem: percepção aproximada de vários grupos de diferentes tamanhos adicionados, e) contagem exata: contagem de todos os pontos apresentados nas matrizes, adicionando sistematicamente todos os itens (um a um, dois a dois ou três a três) e f) outros: essas estratégias incluem relatos verbais que não correspondem a nenhuma das categorias anteriores.

Com foco ainda na escolha de estratégias, Schillemans e colaboradores (2009) realizaram dois experimentos em 31 adultos para testar se as escolhas estratégicas dos indivíduos em uma tarefa de julgamento de quantidades dispostas em matrizes são afetadas pela estratégia que foi utilizada nos testes anteriores. Para isso, os participantes deveriam resolver problemas, que envolviam grandes quantidades, com a estratégia de subtração e continuar a utilizar esta estratégia para quantidades neutras (nem grandes nem pequenas) e continuar a usá-la até que eles encontrassem uma quantidade de itens para a qual outra estratégia fosse claramente mais benéfica. Os resultados demonstraram que uma estratégia utilizada anteriormente influenciava as escolhas de estratégias posteriores, estando ela limitada aos itens que não têm uma forte associação com uma estratégia específica.

Em 2011, Schillemans e colaboradores (2011) forneceram evidência adicional para o efeito de “repetição da estratégia anterior” ocorrer mais frequentemente do que a mudança para outra estratégia. Nesta segunda ocasião, tendo que determinar o número de células coloridas em matrizes, os participantes tinham como possibilidade o uso da estratégia de adição ou da estratégia de subtração. As diferentes quantidades foram apresentadas em três ordens diferentes: 1) uma ordem ascendente [que começou com poucos itens (adição) e gradualmente aumentou para mais itens (subtração)], 2) uma ordem descendente (ordem inversa) e 3) uma ordem aleatória. Estes testes confirmaram a hipótese de que a quantidade de itens que exigia a troca da estratégia seria maior na ordem ascendente e menor na ordem descendente. Por outro lado, Schillemans e colaboradores (2011) não perceberam dados relevantes que comprovassem que a repetição de determinada estratégia utilizada em problema anterior seria utilizada de maneira mais frequente de que quando ela tivesse sido utilizada por mais de uma vez, em estratégias anteriores.

O estudo de Luwel e colaboradores (2013) investigou a extensão em que a inteligência contribui para a seleção e execução de estratégias em tarefas de julgamento de quantidades em um grupo de 120 crianças de 12 anos de idade. Os resultados indicaram que a inteligência desempenha um papel em todos os parâmetros de competência estratégica, em especial a inteligência verbal e viso-espacial.

Como único estudo encontrado referente a estratégias utilizadas em tarefa de estimativa na reta numérica, Peeters, Verschaffel e Luwel (2016) identificaram que 63 adultos aplicavam espontaneamente estratégias baseadas em quartil, ao resolver uma tarefa de estimativa de Número-Posição e uma de Posição-Número na reta numérica 0-1000, na qual apenas a origem e o ponto final fossem indicados. Além disso, a precisão era maior e a variabilidade menor em números próximos das marcações, sendo a utilização de pontos de referência positivamente relacionada à precisão na reta numérica.

2.5 ESTUDOS DE ESTIMATIVA NUMÉRICA DE QUANTIDADES DISCRETAS

Algumas pesquisas que consideram perspectivas teóricas inatistas sugerem que a discriminação de quantidades venha a ser uma atividade ligada apenas à percepção. Xu e Spelke (2000) realizaram um estudo de discriminação de quantidades de pontos (presumindo este ser o mais primitivo nível de competência numérica), apresentados, de forma alternada, a 16 bebês de 6 meses de idade (8 de cada sexo). Esses pontos variavam em tamanho e posição e estavam em condições controladas quanto ao brilho, ao contorno, à densidade e ao tamanho. Concluíram que os bebês eram capazes de distinguir o maior conjunto entre conjuntos de 8 e 16 pontos, mas não entre conjuntos de 8 e 12 elementos. Esses achados sugeriram a possibilidade de aumentar o limite de 4 itens de estimativa rápida e precisa (*subitizing*), desde que a diferença de proporção entre os dois conjuntos seja suficientemente grande (1:2).

Essa perspectiva propõe que o senso numérico existe em bebês humanos já aos 6 meses de idade (se não antes) e que ele se desenvolve espontaneamente em seres humanos e em outros animais, tendo em vista que a capacidade para representar pequenas quantidades já foi encontrada em animais. Entretanto, a maioria dos investigadores que atribuem o senso numérico das crianças ao mesmo processo feito para discriminar quantidades de outros animais e de adultos não discutem se as crianças realmente distinguem as quantidades apresentadas ou apenas identificam as diferenças da imagem como um todo (como um desenho) e, por isso, não percebem as pequenas diferenças, como a da discriminação de proporção (2:3), por exemplo. Nesta pesquisa, considera-se que os bebês podem representar objetos, mas não sua representação numérica cardinal. Em síntese, quando se assume que bebês de 6 meses de idade são capazes de discriminar pequenas quantidades ou até quantidades maiores, quando a diferença entre essas quantidades for relativamente grande (XU & SPELKE, 2000; XU, 2003), pode aí haver apenas uma resposta às propriedades físicas contínuas como luminosidade, densidade e comprimento, que nada tem a ver com as quantidades discretas apresentadas, mas sim, ser uma reposta às características perceptivas.

Na perspectiva do desenvolvimento da estimativa numérica de quantidades, Huntley-Fenner (2001) pediu a 15 crianças de 5 a 7 anos e adultos para realizarem estimativas das quantidades de 5, 7, 9 e 11 quadrados pretos, apresentados rapidamente e em distribuição aleatória, apontando para os números correspondentes em uma reta numérica que variava de 0 a 20, por 40 vezes cada quantidade, em 4 sessões. Os resultados indicaram estimativas semelhantes para crianças e adultos, exceto pelo fato do desvio padrão das estimativas diminuir com a idade. O que ficou claro a partir desses dados é que, embora os sentidos culturais (exatos e construídos através da linguagem) e analógicos (aproximados e independentes da linguagem) de número possam coexistir a partir do início do desenvolvimento, eles têm diferentes cursos no decorrer do desenvolvimento.

Também utilizando a tarefa de estimativa de quantidades, Lipton e Spelke (2005), encontraram uma relação linear entre as estimativas das crianças e a quantidade não simbólica real somente se a quantidade estava dentro do intervalo numérico ao qual a criança estivesse familiarizada. Em contraste, as crianças dificilmente discriminaram quantidade não simbólica que excederam a seu intervalo de familiaridade.

Surpreendentemente, em um estudo de estimativa numérica de quantidades de objetos em um recipiente, realizado por Booth e Siegler (2006), as crianças menores, da 1ª série, foram menos precisas que as da 2ª série. Porém, ao contrário, as crianças da 3ª série realizaram estimativas mais precisas que as da 4ª série. Os pesquisadores concluíram que a estimativa de quantidades muda com a idade, paralelamente ao desenvolvimento de estimativas na reta numérica. No entanto, encontraram correlação positiva com o desempenho em matemática para alunos da 3ª e 4ª séries, embora não para os alunos da 1ª e 2ª séries.

Quando a estimativa de quantidades foi testada por Lemaire e Lecacheur (2007) em adultos e idosos, observou-se que ambos os grupos etários apresentaram desempenho comparável e que não houve diferenças relacionadas à idade, a não ser que os participantes mais velhos levassem mais tempo do que os jovens adultos para fornecer suas estimativas. Os pesquisadores sugeriram que as tarefas de estimativa de quantidades possam envolver processos cognitivos específicos que são pré-simbólicos e invariantes com a idade adulta.

Existem evidências de que crianças de apenas quatro anos de idade já são capazes de quantificar conjuntos e comparar essa quantidade à quantidade de outro conjunto. Por exemplo, no estudo de Jordan e colaboradores (2006), foram apresentados às crianças cartões com 3, 8, 15, 25 ou 35 pontos distribuídos ao acaso, de modo que o número de pontos aumentasse cada vez que fosse mostrado um novo cartão. A criança recebia uma pontuação correta se estimasse um valor com erro de até 25% do valor real, para mais ou para menos. Constatou-se que, antes mesmo de aprender aritmética convencional, crianças a partir dos 4 anos de idade podem realizar estimativa do tamanho de um conjunto de pontos: avaliar se um conjunto de pontos é maior ou menor do que um valor de referência indicado e julgar se um conjunto encaixa-se dentro de dois valores de referência (JORDAN et al., 2006).

Para determinar se o desempenho em tarefas de quantificação é afetado por propriedades numéricas e perceptivas, Rousselle e Noel (2008) pediram a crianças de 3, 4, 5 e 6 anos para compararem quantidades (quantificação discreta) ou áreas (quantificação contínua) de coleções de pontos ou barras, variando ambas as dimensões. Os pesquisadores concluíram que a percepção de quantidades começa a determinar o processamento perceptivo aos 3 anos de idade e a sensibilidade aos estímulos numéricos aumenta com a idade. Da mesma forma, as propriedades perceptivas começam a interferir no processamento de quantidades com a mesma idade, mas estas influências permanecem bastante estáveis ao longo do desenvolvimento pré-escolar. Estes resultados sugerem que a automatização do processamento de quantidades surge gradualmente ao longo do desenvolvimento, ao passo que o acesso automático à informação perceptiva já está bem desenvolvido em pré-escolares.

Para verificar se o mapeamento espacial de números seria uma invenção cultural ou uma intuição universal compartilhada por todos os seres humanos, independentemente da cultura e da educação, Dehaene e colaboradores (2008) estudaram um grupo indígena da Amazônia (Mundurucus), de léxico numérico reduzido e pouca, ou nenhuma, educação formal. Os índios apresentaram representações logarítmicas para representações simbólicas e não simbólicas de números em todas as idades, enquanto que os adultos ocidentais utilizavam mapeamento linear com números pequenos ou simbólicos e mapeamento logarítmico com números não simbólicos. Os pesquisadores sugeriram que o mapeamento espacial de números é uma intuição universal e que este inicialmente é logarítmico.

Apoiando a hipótese da existência de um mecanismo dedicado a apreender pequenas quantidades diferente do que apreende quantidades maiores, Revkin e colaboradores (2008) realizaram um estudo com 18 adultos utilizando uma tarefa de estimativa de um conjunto de pontos em matrizes que variavam de 1 a 8 itens e de outro que variava de 10 a 80 itens. Várias medidas indicaram variabilidade nula ou muito pequena na faixa 1-4, mas alta variabilidade e erros frequentes para quantidades de 10 a 40 nos conjuntos de 10 a 80 elementos.

Também encontrando relação entre a estimativa de quantidades e matemática, Gilmore, Mccarthy e Spelke (2010) realizaram testes padronizados de matemática em crianças de 5 anos de idade, bem como uma tarefa não-simbólica, em que as crianças observavam uma quantidade de pontos azuis adicionados a outra quantidade de pontos azuis e, então, relatavam se sua soma aproximada era mais ou menos numerosa do que uma quantidade de pontos vermelhos. A precisão das crianças na tarefa não-simbólica correlacionou-se com a sua habilidade matemática.

Na perspectiva de encontrar respostas sobre a representação numérica de magnitudes, Thompson e Siegler (2010) mediram estimativas de quantidades em matrizes de até 1000 pontos. As crianças observaram uma matriz vazia (zero pontos), outra cheia (1000 pontos) e uma terceira, inicialmente vazia, que deveria ser preenchida até que fosse alcançado o número desejado de pontos, utilizando-se as quantidades: “pequenas” (5, 18, 53, 79, 164, ou 237), "médias" (419, 487, 524, 548, 625, ou 632) ou "grandes" (725, 759, 817, 846, 938, ou 962). Neste experimento, as crianças, cuja estimativa global padrão era melhor ajustada pela função linear, utilizavam mais a representação logarítmica quando o número era inferior a 150 do que quando ele estava acima de 150.

Complementando os achados de Jordan e colaboradores (2006), Park e Brannon (2013) constaram que, mais do que quantificar conjuntos, crianças um pouco mais velhas podem ser capazes de operar com quantidades não numéricas. Os pesquisadores fizeram um estudo de intervenção apresentando aos participantes uma imagem de duas matrizes de pontos que continham entre 9 e 36 pontos cada. Em metade dos testes, os participantes foram solicitados a indicar se a soma ou a diferença entre os pontos nas duas matrizes era maior ou menor do que o número de pontos em uma terceira matriz. Na outra metade dos testes, os participantes foram solicitados a escolher qual das duas matrizes continha um número de pontos equivalente à soma ou à diferença entre o número de pontos nas duas matrizes inicialmente apresentadas. Os resultados mostraram que a melhora na tarefa de quantificação resultava em melhora na capacidade matemática simbólica.

Obersteiner e colaboradores (2014) compararam o desempenho de 202 crianças da 1ª série em dois tipos de tarefas informatizadas de enumeração de quantidades entre 1 e 20 pontos, apresentados em arranjos aleatórios ou em matriz. O número de pontos foi um forte preditor do tempo de resposta e das taxas de precisão na tarefa de enumeração com arranjos aleatórios, mas não foi preditor das respostas da tarefa com matriz. O desempenho na tarefa de matriz foi correlacionado com o desempenho em um teste de aritmética, mesmo quando outras variáveis cognitivas foram controladas.

Examinando as trajetórias de desenvolvimento de habilidades de processamento de magnitudes simbólicas e não simbólicas e como elas se relacionam entre si, Matejko e Ansari (2016) testaram 30 crianças do 1º ano (quando as crianças estão se tornando mais fluentes com os números simbólicos). Os pesquisadores levantam a possibilidade de as trajetórias de desenvolvimento para o processamento simbólico e não simbólico mostrarem mais semelhanças no início do desenvolvimento. Por exemplo, as crianças entre 2 e 4 anos poderiam mostrar trajetórias de desenvolvimento semelhantes quando elas são expostas a símbolos numéricos pela primeira vez. As trajetórias mostraram também ter períodos de desenvolvimento diferentes, nos quais o processamento de magnitude não simbólica pode começar mais cedo e progredir mais lentamente do que o desenvolvimento de competências simbólicas. Ou seja, concluíram que as habilidades de processamento de magnitude simbólica e não simbólica tiveram trajetórias de desenvolvimento distintas.

2.6 ESTUDOS DE ESTIMATIVA NA RETA NUMÉRICA

Como já comentado anteriormente, uma tarefa amplamente utilizada para investigar como as pessoas representam números, é a *Tarefa de Estimativa na Reta Numérica* (BERTELETTI et al., 2010; DEHAENE et al., 2008; SIEGLER & OPFER, 2003). Nesta tarefa, os participantes são solicitados a posicionar um dado número em uma reta numérica vazia, que é delimitada por um valor inicial, geralmente zero, no início da linha, e outro valor, tal como 100 ou 1000, no final da reta numérica. Estes números podem ser simbólicos (por exemplo, dígitos arábicos) ou não simbólicos (por exemplo, pontos).

A tarefa da reta numérica parece ideal para examinar as ligações entre as habilidades espaciais e aprendizagem matemática porque requer conhecimentos e processos de ambos os domínios (LEFEVRE et al., 2013). Ela envolve pelo menos três componentes relacionados com números: a compreensão do sistema simbólico numérico, as representações mentais de quantidade numérica e as estratégias de mapeamento de informações numéricas espaciais (SULLIVAN et al., 2011).

Alguns pesquisadores têm argumentado que diferentes tipos de mudanças nas representações numéricas mentais podem implicar em mudanças no desempenho em estimativa na reta numérica. Siegler e Opfer (2003) concluíram que as crianças mais jovens produzem padrões de erro logarítmicos, enquanto as crianças mais velhas e adultos produzem estimativas mais lineares. Entretanto, Barth e Paladino (2011) argumentaram que as tarefas da reta numérica devem ser tratadas como tarefas de estimativa de proporção, porque elas implicam julgamentos em termos de parte/todo. Ou seja, a linha numérica mental parece fornecer uma estrutura conceitual central para a organização de uma ampla gama de conhecimentos numéricos (BOOTH & SIEGLER, 2008). E, para realizar a tarefa, as crianças devem ser relativamente familiarizadas com o sistema numérico no intervalo especificado e precisam usar as habilidades de raciocínio proporcionais (ou alguma outra estratégia) para posicionar o número na reta.

Corroborando a ideia de que as estimativas se tornam mais precisas com a idade, Siegler e Opfer (2003) constataram ainda que, com a idade, as estimativas das crianças de 1^a, 4^a e 6^a séries alteraram substancialmente, especialmente na reta 0-1000. Além disso, as estimativas dos estudantes da 2^a série encaixaram-se muito melhor no padrão logarítmico do que no linear. Na 4^a série, as estimativas foram igualmente ajustadas pelos dois modelos. Em contrapartida, os alunos da 6^o série e os adultos tiveram suas estimativas melhor ajustadas ao modelo linear do que ao modelo logarítmico. A inclusão de um subconjunto de sete números em ambos os testes (0-100 e 0-1000) permitiu aos pesquisadores constatar que a mesma criança pode representar o mesmo número de forma diferente, dependendo da faixa numérica. Além disso, a variação o tempo, de 4 para 30 segundos, não melhorou as estimativas.

Confirmando os resultados encontrados por Siegler e Opfer (2003), Siegler e Booth (2004) utilizaram a tarefa de estimativa na reta numérica 0-100 com 85 crianças, realizando dois experimentos em alunos pré-escolares e da 1^a e 2^a série acerca de suas representações internas. Concluíram que os padrões de estimativas progrediram de forma logarítmica (pré-escolares), a uma mistura de logarítmica e linear (1^a série) e, finalmente, a um padrão principalmente linear (2^a série) e a linearidade foi responsável por melhora na precisão. A variabilidade das estimativas diminuiu com a idade, independente da magnitude numérica. As diferenças individuais na estimativa foram fortemente relacionadas com as diferenças individuais no desempenho em matemática, especialmente para a 1^a e para a 2^a séries.

Booth e Siegler (2006) solicitaram a crianças que localizassem 26 números (3, 4, 6, 8, 12, 14, 17, 18, 21, 24, 25, 29, 33, 39, 42, 48, 52, 57, 61,64, 72, 79, 81, 84, 90 e 96) na reta numérica 0-100, tal qual como realizado em seu estudo anterior (SIEGLER & BOOTH, 2004). As diferenças individuais na linearidade das estimativas na reta numérica foram positivamente relacionadas com as diferenças individuais no desempenho matemático. Ainda, encontraram que, entre 5 e 8 anos, há progressiva precisão na estimativa na reta numérica 0-100.

Baseados na teoria de que a mudança representacional é uma escolha adaptativa e que as crianças, em qualquer idade, possuem e utilizam diferentes estratégias, Opfer e Siegler (2007) examinaram como 93 crianças da 2^a e 4^a séries melhoram suas estimativas na reta numérica. Replicando os resultados de Siegler e Opfer (2003), em que as estimativas das crianças tornaram-se mais lineares com a idade, nesta pesquisa os autores utilizaram uma gama mais ampla de números a serem posicionados e encontraram resultados semelhantes.

A partir de 2008, crescem os estudos de estimativa numérica que utilizam a tarefa da reta numérica como instrumento de avaliação de desempenho nesta área. Preocupados, não tanto com a linearidade das estimativas, mas em compreender de que forma a estimativa estaria relacionada com o desempenho em aritmética, Booth e Siegler (2008) examinaram se a qualidade das representações de magnitude numérica dos alunos da 1ª série (série em que em que, segundo os pesquisadores, há mais diferenças individuais na representação numérica entre 0 e 100) está relacionada de maneira preditiva com a aprendizagem da aritmética. Fizeram um teste de representações das magnitudes numéricas das crianças para correlacionar com o conhecimento aritmético. Verificaram que os resultados obtidos no teste foram capazes de predizer o desempenho em aritmética dos alunos. As relações entre as estimativas na reta numérica, a adição e os resultados dos testes de desempenho em matemática foram substanciais. Mesmo depois de os efeitos de outros aspectos do conhecimento numérico terem sido considerados, a linearidade das representações da magnitude numérica ainda previu a aprendizagem aritmética.

Da mesma maneira, Siegler e Mu (2008) verificaram que crianças pré-escolares (N=29) na China mostraram maior conhecimento numérico geral do que seus pares nos Estados Unidos (N=24), não só para problemas de aritmética, mas também em estimativa na reta numérica, novidade para as crianças de ambos os países. As estimativas das crianças chinesas foram comparáveis às das crianças estadunidenses 1 a 2 anos mais avançadas na escola. As diferenças individuais na aritmética e o desempenho na tarefa da reta numérica foram correlacionados positivamente dentro de cada país. Ou seja, o maior conhecimento dos pré-escolares chineses e estadunidenses em aritmética parece melhorar a sua compreensão de magnitudes numéricas.

Na mesma perspectiva, Schneider, Grabner e Paetsch (2009) realizaram três estudos com um total de 429 alunos da 5ª e 6ª séries, concluindo que o conhecimento conceitual, a inteligência numérica e a estimativa na reta numérica foram bons preditores de desempenho matemático. Estes achados vão ao encontro dos resultados de Siegler e Booth (2004), de que as tarefas de estimativa e um teste padronizado de desempenho matemático estão correlacionados, mesmo após o controle da inteligência e da idade.

Ao contrário de estudos anteriores (SIEGLER & MU, 2008), no estudo de Muldoon e colaboradores (2011) com crianças chinesas (N=85) e escocesas (N=103), as crianças chinesas não apresentam escalas numéricas mais lineares antes que as escocesas e suas estimativas numéricas não foram mais precisas do que as da amostra escocesa de maior idade com habilidade matemática equivalente. Ambos os grupos de crianças eram capazes de contar até 10 e tinham conhecimento de números até 100.

Em especial, para discutir a forma como os números naturais são representados mentalmente, Berteletti e colaboradores (2010) investigaram o desenvolvimento da estimativa numérica em crianças de 3 a 6 anos de idade, usando retas numéricas 1-10, 1-20 e 0-100. Tinham como objetivo avaliar a capacidade das crianças de fornecer estimativas confiáveis (se logarítmica ou linear), tendo em vista que, a partir dos estudos anteriores de Siegler e Booth (2004), a mudança de logarítmica-linear já estaria estabelecida no contexto de 0-100 ou 0-1.000, mas não quando o intervalo numérico é restrito a unidades ou dezenas. Concluíram que as estimativas das crianças passaram de logarítmicas a lineares, sendo que elas se tornaram menos precisas, mas cada vez mais logarítmicas, no intervalo maior. A precisão da estimativa foi correlacionada com o conhecimento de algarismos arábicos e com a magnitude numérica.

Ainda para compreender a relação entre as representações numéricas e a matemática, Thompson e Siegler (2010) investigaram a relação entre as representações de magnitudes numéricas e memória de números em 18 crianças pré-escolares e alunos da 2ª série, utilizando as tarefas das retas numéricas de 0-20 e de 0-1000. Os resultados indicaram que as representações de magnitude das crianças foram mais lineares para os números cujos nomes estão associados às suas grandezas (memória numérica superior).

Ao contrário desses achados, Barth e Paladino (2011) aplicaram modelos de raciocínio de proporcionalidade em estimativas na reta numérica 0-100 em crianças de 5 e 7 anos. A relação entre a posição estimada pelas crianças de 5 anos de idade e a posição real poderia ser descrita por uma adaptação do modelo de um ciclo. Este padrão sugere que as crianças de 5 anos usam a referência dos pontos inferior e superior como auxílio para suas estimativas. As estimativas das crianças de 7 anos, em contraste, eram melhor ajustadas por um modelo de dois-ciclos, o que implica que usavam também o ponto médio para realizar suas estimativas de maneira mais precisa. Esse ajuste dos modelos de representação das crianças para modelos de um ou dois ciclos sugere que estimativas podem ser baseadas numa estratégia de juízo proporcional em vez de refletir diretamente as características da reta numérica mental. Assim, a posição de um único número é estimada em relação à reta toda.

Para verificar estas conclusões, White e Szucs (2012) examinaram o uso de estratégias baseadas em ponto de referência em 67 crianças do 1º ao 3º ano em uma reta numérica 0-20 (intervalo numérico que já deveriam estar familiarizados). Os resultados sugeriram que as crianças do 1º ano apenas utilizavam o ponto de referência inferior como uma orientação para as suas estimativas, tal como indicado pelo modelo logarítmico, gerando estimativas mais precisas e menos variáveis perto do ponto de referência mais baixo. As crianças do 2º ano, em contraste, usaram também o ponto de referência superior para criar um ponto intermediário central, o que gerava estimativas menos variáveis e mais precisas para números também no meio do intervalo numérico, resultando num melhor ajuste do modelo linear. Esta estratégia tornou-se ainda mais evidente em crianças do 3º ano.

Contradizendo a hipótese levantada por Siegler e Opfer (2003), Xu e colaboradores (2013) verificaram que a estimativa numérica pode não ser uma medida tão pura e independente do contexto, pois a cultura permite que as crianças sejam mais hábeis em realizar estimativas. Os pesquisadores (XU et al., 2013) analisaram o desenvolvimento da estimativa numérica de 160 pré-escolares chineses de três grupos etários (3-4, 5 e 6 anos). Para isso, realizaram a tarefa de estimativa na reta numérica 0-10 com números, pontos e objetos e os três tipos de estímulos apresentaram o mesmo padrão de resultados. O grupo mais velho também realizou a atividade nas retas 0-100 e 0-1000. Concluíram que: a) a representação linear de números aumentou com a idade, mas que os chineses já são lineares desde muito cedo; b) a representação numérica foi consistente em todos os três tipos de tarefas; c) os participantes chineses geralmente utilizaram pontos de referência para atingir representações lineares e d) as estimativas de pré-escolares chineses mais velhos sobre as retas 0-100 e 0-1000 foram melhores do que nas demais, sendo o desempenho em matemática dos asiáticos sempre melhor, quando comparado aos seus pares ocidentais.

Mais provas de que estimativa na reta numérica, habilidades matemáticas e contagem estão correlacionadas foram encontradas por Menzies e colaboradores (2013), em uma avaliação longitudinal em 99 crianças da 5ª série, testadas em quatro ocasiões, com intervalos de 3 meses. Os resultados mostraram que a qualidade das estimativas das crianças e o desempenho nas tarefas matemáticas melhoraram ao longo do mesmo período, mas as mudanças em uma não foram associadas a mudanças na outra. Em contraste com as alegações anteriores, de que a linearidade da representação numérica é uma contribuição única para o desenvolvimento matemático das crianças, os dados de Menzies e colaboradores (2013) sugeriram que essa variável não é significativamente privilegiada sobre habilidades numéricas básicas.

Abordando a questão da relação entre o desempenho matemático e habilidades espaciais, Lefevre e colaboradores (2013) coletaram um conjunto de dados longitudinais, durante 4 anos, de 101 crianças da 2ª, 3ª e 4ª séries, que foram testadas uma vez em cada ano. Para isso, realizaram as tarefas de estimativa na reta numérica 0-1000, de aritmética e de conhecimento do sistema numérico. A capacidade espacial foi correlacionada com todas as medidas em matemática nos dois últimos anos, e com o desempenho da reta numérica do 3º para o 4º ano. No entanto, a capacidade espacial não previu um crescimento em aritmética ou sobre o sistema de numeração. Não foram encontradas evidências de que o desempenho na reta numérica é preditivo para cálculo mais do que o cálculo é preditivo no desempenho em estimativa na reta numérica. No entanto, o conhecimento do sistema de numeração no 3º ano foi preditivo de desempenho na reta numérica no 4º ano, independentemente da habilidade espacial. Os autores não encontraram respaldos para a afirmação de que a tarefa na reta numérica seja preditiva do crescimento do conhecimento na aritmética. Mas ainda há divergências e os estudos da área ainda são inconclusivos (LEFEVRE et al., 2013). Em contraste com os postulados de outros pesquisadores, melhoras no desempenho na tarefa de estimativa na reta numérica não parecem estar causalmente associadas a melhoras em outras habilidades matemáticas. Sendo assim, a tarefa de estimativa na reta numérica não seria necessariamente um reflexo do sistema numérico mental.

Contradizendo a afirmação de que o desempenho em comparação (maior/menor número) e em estimativa na reta numérica contém a mesma representação subjacente, Sasanguie e Reynvoet (2013) examinaram a relação entre o ajuste logarítmico-linear em uma tarefa de estimativa na reta numérica e o efeito do tamanho (números mais ou menos distantes entre si), em crianças da 1ª, 2ª e 3ª séries. Nas duas experiências, não encontraram correlação entre estimativa na reta numérica e o efeito do tamanho. Também não encontraram diferença entre os grupos de crianças com uma representação linear ou logarítmica, considerando o efeito do tamanho. Os resultados sugeriram que diferentes mecanismos são subjacentes a ambas as tarefas básicas de processamento numérico.

Evidências de que crianças alemãs e italianas resolvem as tarefas da reta numérica delimitadas e não-delimitadas (nas quais não são sugeridos os pontos finais) de uma maneira diferente foram encontradas por Link, Nuerk e Moeller (2014). Os pesquisadores sugeriram, ainda, que crianças alemãs têm pior desempenho do que italianas na tarefa da reta numérica, levantando a hipótese de que a linguagem poderia interferir neste processo, já que os números são lidos ao contrário na língua alemã (primeiro a unidade e, em seguida, a dezena).

Nessa mesma linha, Ebersbach, Luwel e Verschaffel (2015) avaliaram as habilidades de estimativa de 120 crianças, 40 pré-escolares, 40 da 1ª série e 40 da 2ª série, sobre uma tarefa de estimativa em retas numéricas tridimensionais delimitada e não-delimitada, considerando a familiaridade com números. Na condição de reta não-delimitada, apenas as posições de 1 e 10 foram marcadas. Na condição delimitada, a posição final 100 foi adicionalmente marcada. Os resultados indicaram que as estimativas foram mais precisas e menos variáveis em crianças que estavam familiarizadas com números maiores. A quantidade de pontos de referência não teve efeito de interação com familiaridade, destacando que a familiaridade das crianças com os números é um fator crucial para a qualidade das estimativas na reta numérica.

Em mais uma variação da tarefa de estimativa na reta numérica, Sasanguie e colaboradores (2016) apresentaram três considerações teóricas para o desenvolvimento de padrões de resposta em crianças da 1ª, 2ª e 6ª séries, na tarefa de estimativa na reta numérica (simbólica e não simbólica): a mudança logaritmo-linear, a transformação de duplo-linear para linear e o juízo proporcional. O objetivo do estudo foi esclarecer qual modelo de representação melhor caracteriza o desenvolvimento dos padrões na reta numérica simbólica e não-simbólica. Observou-se que esses três modelos não foram contrastados. No caso de estimativas simbólicas, o julgamento proporcional descreveu melhor os dados. Na estimativa não-simbólica das crianças mais jovens, os padrões foram melhor descritos por um modelo logarítmico, enquanto que para as crianças mais velhas foram melhor descritos pelo modelo linear. Considerando que as crianças em idade escolar podem ser bem-sucedidas na reta numérica simbólica, a aplicação de tais estratégias ainda aparece muito difícil para as retas numéricas não-simbólicas, mesmo para as crianças mais velhas.

Mesmo com a vasta gama de estudos que utilizam a reta numérica como instrumento de medida da capacidade de realizar estimativas, pesquisadores revelaram que estimativas numéricas mapeadas em retas numéricas podem ser altamente intuitivas, visto que a criança facilmente percebe que números menores são localizados mais à esquerda da reta, enquanto números maiores mais à direita (BOOTH & SIEGLER, 2006; SIEGLER & BOOTH, 2004). Neste caso, as estimativas poderiam estar sendo alocadas de maneira mais intuitiva do que necessariamente pensadas em termos de escala pelas crianças. Lefevre e colaboradores (2013) sugerem cautela ao tirar conclusões sobre o desempenho da tarefa de estimativa na reta numérica como um reflexo das representações numéricas subjacentes das crianças. Essa relação também pode refletir a influência mútua do conhecimento conceitual das crianças sobre o sistema numérico e habilidades processuais para resolver um problema matemático, por exemplo.

2.7 QUADRO SÍNTESE: PRINCIPAIS ESTUDOS EM ESTIMATIVA NUMÉRICA

ASSUNTO	ANO	AUTOR	SÍNTESE DOS RESULTADOS
ESTRATÉGIAS DE ESTIMATIVA NUMÉRICA DE QUANTIDADES	1992	Crites	Bons estimadores utilizam múltiplas estratégias e maus estimadores ficam restritos a estratégias perceptivas.
	1995	Lemaire & Siegler	Crianças do 2º ao 6º ano usam as mesmas estratégias, mas a idade melhora a eficiência do uso dessas estratégias.
	1997	Siegler & Lemaire	Criam o método de escolha/não-escolha para avaliar as estratégias, calculando a velocidade e a precisão das estimativas.
	1998	Verschaffel et al.	A combinação das estratégias de adição e de subtração aumenta com a idade e a escolha entre elas é determinada pela quantidade de espaços cheios ou vazios na matriz.
	2000	Luwel et al.	Descrevem uma estratégia de estimativa rápida e imprecisa além das estratégias de adição e subtração descritas anteriormente.
	2001	Luwel et al.	O desempenho em estimativa depende, além da eficiência no uso de estratégias, das mudanças, da frequência e da adaptabilidade com que são executadas. A estratégia da subtração (relacionada com a precisão) aumenta com idade e a da adição diminuiu.
	2003	Luwel & Verschaffel	O repertório de estratégias e a frequência e a eficiência da sua utilização são afetados pelo tempo disponível para realizar as estimativas.
	2008	Gandini et al.	Jovens e idosos utilizam o mesmo conjunto de estratégias, sendo os jovens mais rápidos e precisos. Cada estratégia foi associada a medidas de desempenho e padrões de movimento dos olhos distintos.

	2008	Luwel & Verschaffel	Com o método de escolha/não escolha, alunos da 6ª série e adultos utilizaram estratégia de adição e subtração, na condição de escolha, e só 60% dos alunos da 3ª série usaram a de subtração. O *feedback* sobre a estratégia resultou em uma melhora maior do que sobre a precisão de seus resultados.
	2009	Kovas et al.	Múltiplas e distribuídas áreas cerebrais estão envolvidas na estimativa e, mesmo com desempenho comportamental igual, há diferenças na ativação cerebral entre grupos de baixa e de alta capacidade matemática.
	2009	Luwel et al.	Crítica ao método escolha/não escolha.
	2009	Schillemans et al.	Uma estratégia utilizada anteriormente influencia as escolhas de estratégias posteriores, estando ela limitada aos itens que não têm uma forte associação com uma estratégia específica.
	2010	Gandini et al.	Descrevem 6 diferentes grupos de estratégias: 1) Fixação, 2) Referência, 3) Decomposição/Recomposição, 4) Aproximação de contagem, 5) Contagem exata e 6) Outras.
	2011	Schillemans et al.	Fornecem evidência adicional para o efeito da repetição da estratégia anterior ocorrer mais frequentemente do que a mudança para outra estratégia.
	2013	Luwel et al.	A inteligência desempenha um papel em todos os parâmetros de competência estratégica.
	2016	Peeters et al.	Adultos aplicam espontaneamente a estratégia do quartil. A sua precisão é maior e a variabilidade menor em números próximos das marcações. A utilização de pontos de referência foi relacionada à precisão na reta numérica.
ESTIMATIVA NUMÉRICA DE QUANTIDADES	2000	Xu & Spelke	Bebês distinguem quantidades que estejam em proporção 1:2.
	2001	Huntley-Fenner	Encontraram estimativas semelhantes para crianças e adultos. O desvio padrão das estimativas diminuíram com a idade.
	2005	Lipton & Spelke	Encontraram relação entre a estimativa e a quantidade não simbólica real somente se essa quantidade estivesse dentro do intervalo de números familiares.
	2006	Booth & Siegler	A estimativa de quantidades muda com a idade paralelamente a estimativa na reta numérica.
	2006	Jordan et al.	Antes de aprender aritmética convencional a criança pode realizar estimativa do tamanho de um conjunto de pontos, avaliar se ele é maior ou menor do que um valor de referência indicado e julgar se encaixa-se dentro de dois valores de referência.
	2007	Lemaire & Lecacheur	Não há diferenças relacionadas à idade, para estimativa de quantidades, em jovens e idosos, exceto pelo fato de que os os idosos levam mais tempo para fornecer suas estimativas.
	2008	Rousselle & Noel	As propriedades perceptivas começam a determinar o processamento de quantidades aos 3 anos, mas estas influências permanecem bastante estáveis ao longo do desenvolvimento pré-escolar.
	2008	Dehaene et al.	O mapeamento espacial de números é uma intuição universal e inicialmente é logarítmico.
	2008	Revkin et al.	O mecanismo que apreende pequenas quantidades é diferente do que apreende quantidades maiores.
	2010	Gilmore et al.	Estimativa correlaciona-se com habilidade matemática.
	2010	Thompson & Siegler	Crianças com padrão linear de representação numérica utilizam mais a representação logarítmica quando o número era inferior a 150 do que quando ele estava acima de 150.

	2013	Park & Brannon	Mais que quantificar conjuntos, as crianças podem ser capazes operar com quantidades não numéricas, resultando em uma melhoria substancial na capacidade de matemática simbólica.
	2014	Obersteiner et al.	A quantidade de itens prediz o tempo de resposta e a precisão na tarefa com arranjos aleatórios, mas não com matriz. O desempenho na matriz foi correlacionado com o desempenho em um teste de aritmética.
	2016	Matejko & Ansari	As habilidades de processamento de magnitude simbólica e não simbólica tiveram trajetórias de desenvolvimento distintas.
ESTIMATIVA NA RETA NUMÉRICA	2003	Siegler & Opfer	As estimativas das crianças foram mais precisas com a idade. A 2ª série apresentou padrão logarítmico, a 6º série e os adultos ajustaram-se pelo modelo linear e a 4ª série ajustou-se pelos dois modelos.
	2004	Siegler & Booth	A variabilidade das estimativas diminuiu com a idade, independente da magnitude numérica. As estimativas tornaram-se mais lineares com o aumento da idade e experiência. O aumento da linearidade foi responsável por melhoria na precisão da estimativa.
	2006	Booth & Siegler	Entre 5 e 8 anos há progressiva precisão na estimativa na reta numérica 0-100.
	2008	Ebersbach et al.	A representação mental de números pode ser descrita por uma combinação de dois padrões lineares com diferentes inclinações.
	2007	Opfer & Siegler	As estimativas das crianças tornaram-se mais lineares com a idade.
	2008	Siegler & Mu	O conhecimento de aritmética de pré-escolares chineses parece melhorar a sua compreensão de estimativa quando comparados a crianças estadunidenses. Nos dois grupo correlacionaram-se aritmética e estimativa.
	2008	Booth & Siegler	A qualidade das representações de magnitude numérica dos alunos da 1ª série prediz o desempenho em aritmética.
	2009	Schneider et al.	O conhecimento conceitual, a inteligência numérica e a estimativa na reta numérica foram bons preditores de desempenho matemático.
	2010	Berteletti et al.	As estimativas das crianças passaram de logarítmicas a lineares, mesmo em faixas numéricas pequenas, em crianças pequenas. Elas tornaram-se menos precisas e mais logarítmicas no intervalo numérico maior.
	2010	Thompson & Siegler	As representações de magnitudes das crianças foram mais lineares para os números cujos nomes estão associados com suas grandezas.
	2011	Barth & Paladino	Modelos de proporcionalidade permitiram aos pesquisadores fazer previsões quantitativas precisas sobre a estimativa das crianças, sem observar mudanças de representação logarítmico-linear.
	2011	Muldoon et al.	As crianças chinesas não apresentaram escalas numéricas mais lineares antes que as escocesas. Em vez disso, as estimativas numéricas dos chineses não foram mais precisas do que os de os escoceses mais velhos e com habilidade matemática equivalente.
	2011	Sullivan et al.	As estimativas foram influenciadas pelo tamanho do número apresentado.
	2012	White & Szucs	Identificaram que as crianças empregam estratégias variáveis, que avançam com o desenvolvimento.
	2013	Lefevre et al.	Não foram encontradas evidências de que o desempenho na reta numérica é preditivo para o cálculo mais do que o cálculo é preditivo no desempenho em estimativa na reta numérica.

	2013	Sasanguie & Reynvoet	Sugeriram diferentes mecanismos subjacentes às tarefas básicas de processamento de número: o desempenho em comparação (maior/menor número) e em estimativa na reta numérica.
	2013	Xu et al.	Verificaram que a cultura interfere na habilidade de realizar estimativas das crianças.
	2013	Menzies et al.	Encontraram mais provas de que estimativa na reta numérica, habilidades matemáticas e contagem estão correlacionadas.
	2014	Link et al.	As crianças mostram diferentes padrões de estimativa na tarefa na reta numérica não delimitada, em comparação com a tarefa na reta numérica delimitada.
	2015	Ebersbach et al.	As estimativas foram mais precisas e menos variáveis em adultos que nas crianças mais jovens e em crianças que estavam familiarizadas com números maiores.
	2016	Sasanguie et al.	Os três modelos de representação não foram contrastados. O julgamento proporcional descreveu melhor os dados (estimativa simbólica). Nas crianças mais jovens, os padrões foram descritos pelo modelo logarítmico e as crianças mais velhas pelo linear (estimativa não-simbólica).

2.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Evidencia-se que os estudos em estimativa numérica vêm sendo vastamente discutidos desde a década de 80, senão antes. Todos eles envolvem uma possível relação entre estimativa numérica e conhecimento matemático, tendo em vista que, este último tema, também já vem sendo pesquisado há bastante tempo. Mesmo assim, ainda pouco se sabe sobre as bases que originam o conhecimento matemático e de que forma ele se desenvolve no sujeito, tendo em vista sua relevante importância para o sucesso na vida adulta. Em geral, os estudos em estimativa numérica discutem: a) as possíveis bases que originam esta habilidade, b) a representação mental das magnitudes numéricas, c) as maneiras de avaliar seu desempenho e de compará-lo ao desempenho matemático e d) o uso de estratégias de estimativa.

Quanto às possíveis bases cognitivas da estimativa numérica, pode-se destacar duas grandes correntes teóricas: a vertente inatista, que considera sua origem orgânica e inata, que evolui para a matemática formal. Ao contrário, a perspectiva construtivista entende a matemática como culturalmente construída e aprimorada em termos de complexidade com a idade e a experiência. Embora se entenda que a aprendizagem da matemática é progressiva, são considerados diversos fatores de bases orgânica que possibilitam este desenvolvimento posterior.

Os modelos de representação numérica mental vêm sendo desenvolvidos a partir de tarefas de estimativa na reta numérica. Primeiramente, um modelo mais elementar de representação logarítmica (Modelo Logarítmico) é proposto, para explicar o efeito da distância exagerada entre os números pequenos e minimizada para os grandes números. O Modelo Acumulador (ou Linear) propõe que a distância entre os números posicionados na reta numérica mental seria constante, independentemente da magnitude numérica estimada. Vários pesquisadores propuseram uma possível mudança de representação logarítmica-linear, a partir da idade, da experiência e do conhecimento numérico. Também é discutida a possibilidade de que as crianças possam obter as duas formas de representação concomitantemente, sendo testados o contexto numérico e a familiaridade das crianças com o intervalo numérico. Também foi proposto um modelo que considera duas representações lineares de inclinações distintas (Modelo *Duplo-linear*) e um *Modelo de Juízo Proporcional*, que considera o uso estratégico de estimativas com auxílio de pontos de referência conhecidos. Uma proposta integradora em que cada modelo possa ser considerado dependendo da etapa de desenvolvimento parece bastante plausível.

O desempenho em estimativa numérica vem sendo estudado através de duas tarefas conhecidas: a tarefa de estimativa na reta numérica e a tarefa de julgamento de quantidades discretas em um conjunto. Para realizar estimativa na reta numérica, é necessário representar um número em uma posição espacial ou vice-versa. Para realizar estimativa de quantidades, é necessário representar uma quantidade não-numérica (de itens) com um número. Em geral, os estudos sobre este tema discutem sobre a relação entre estimativa numérica e conhecimento numérico e/ou matemática. Em grande parte deles concluiu-se que a estimativa evolui com a idade, mas ainda não há consenso sobre uma correlação positiva da estimativa com o desempenho em matemática.

Sobre o uso de estratégias de estimativa numérica, os estudos apontaram diferentes perspectivas. Uma parte deles estava focada em compreender a mudança estratégica e outra, na enumeração de diferentes estratégias. Para essa segunda parte, ficou claro que as estratégias de soma e de subtração são as mais amplamente utilizadas, sendo que demais estratégias listadas podem estar dentre estas, como sendo uma situação particular, ou podem não ter sido encontradas em algumas pesquisas.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, M. M. D. O. *A Aprendizagem da Estimação Matemática: um estudo no 2º ciclo*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 1996.

BARTH, H. C.; PALADINO, A. M. The Development of Numerical Estimation: evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14, p. 125- 135, 2011.

BERCH, D. B. Making Sense of Number Sense. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), p. 333-339, 2005.

BERTELETTI, I.; LUCANGELI, D.; PIAZZA, M.; DEHAENEZ, S.; ZORZI, M. Numerical Estimation in Preschoolers. *Developmental Psychology*, 46 (2), p.545–551, 2010.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation. *Developmental Psychology*, 41, p. 189–201, 2006.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning. *Child Development,* 79 (4), p.1016 – 1031, 2008.

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Senso Numérico e Dificuldades de Aprendizagem na Matemática. *Revista Psicopedagogia,* 27, p. 298-309, 2010.

CRITES, T. W. Skilled and Less Skilled Estimators’ Strategies for Estimating Discrete Quantities. *Elementary School Journal*, 5, p. 601–619, 1992.

DACKERMANN, T.; HUBER, S.; BAHNMUELLER, J.; NUERK, H-C.; MOELLER, K. An Integration of Competing Accounts on Children’s Number Line Estimation. *Frontiers in Psychology*, v. 6, n. 884, 2015.

DEHAENE, S. *The Number Sense: How the mind creates mathematics.* New York: Oxford University Press, 1997.

DEHAENE, S.; IZARD, V.; SPELKE, E.; PICA, P. Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures. *Stanislas Science*, 320, p. 1217, 2008.

DORNELES, B. V.; DURO, M. L.; RIOS, N. M. B.; NOGUES, C. P.; PEREIRA, C. S. Number Estimation in Children: an assessment study with number line estimation and numerosity tasks. In Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), 10., 2017, Dublin City University, 2017.

EBERSBACH, M.; LUWEL, K.; FRICK, A.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Relationship Between the Shape of the Mental Number Line and Familiarity with Numbers in 5- to 9-Year Old Children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99, p.1–17, 2008.

EBERSBACH, M.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. The Relationship Between Children's Familiarity with Numbers and Their Performance in Bounded and Unbounded Number Line Estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, 17:2-3, p.136-154, 2015.

FEIGENSON, L.; LIBERTUS, M. E.; HALBERDA, J. Links Between the Intuitive Sense of Number and Formal Mathematics Ability. *Child Development Perspectives*, 7 (2), p. 74–79, 2013.

GANDINI, D.; ARDIALE, E.; LEMAIRE, P. Children' Strategies in Approximate Quantification. *Current Psychology Letters: Behaviour, Brain, & Cognition*, 26, p. 1–14, 2010.

GANDINI, D.; LEMAIRE, P.; DUFAU, F. Older and Younger Adults' Strategies in Approximate Quantification. *Acta Psychologica,* 129, p.175–189, 2008.

GEARY, D. C.; BAILEY, D. H.; HOARD, M. K. Predicting Mathematical Achievement and Mathematical Learning Disability with a Simple Screening Tool: the number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27, p. 265-279, 2009.

GEBUIS, T.; REYNVOET, B. The Role of Visual Information in Numerosity Estimation. *PLoS One,* 7(5), 2012.

GIBBON, J.; CHURCH, R. M. Time Left: Linear Versus Logarithmic Subjective Time. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 7(2), p.87-108, 1981.

GILMORE, C.; MCCARTHY, S.; SPELKE, E. Non-symbolic Arithmetic Abilities and Achievement in the First Year of Formal Schooling in Mathematics. *Cognition,* 115(3), p. 394–406, 2010.

HALBERDA, J.; FEIGENSON, L. Developmental Change in the Acuity of the “Number Sense": the approximate number system in 3, 4, 5, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44, p. 1457-1465, 2008.

HUNTLEY-FENNER, G. Children's Understanding of Number is Similar to Adults' and Rats': numerical estimation by 5±7-year-olds. *Cognition*, 78, p. B27-B40, 2001.

JORDAN, N. C.; KAPLAN, D.; NABORS, L.; LOCUNIAK, M. N. Number Sense Growth in Kindergarten: a longitudinal investigation of children at risk of mathematics difficulties. *Child Development*, 77, p. 153-175, 2006.

KOVAS, Y.; GIAMPIETRO, V.; VIDING, E.; NG, V.; BRAMMER, M.; BARKER, G. J.; HAPPE, F. G. E.; PLOMIN, R. Brain Correlates of Non-Symbolic Numerosity Estimation in Low and High Mathematical Ability Children. *PlosOne*, 4(2), 2009.

LASKI, E. V.; SIEGLER, R. S. Is 27 a Big Number? Correlational and Causal Connections Among Numerical Categorization, Number Line Estimation, and Numerical Magnitude Comparison. *Child Development,* 78 (6), p. 1723 – 1743, 2007.

LASKI, E.; YU, Q. Number Line Estimation and Mental Addition: examining the potential roles of language and education. *Journal of Experimental Child Psychology*, 117, p. 29–44, 2014.

LEFEVRE, J.; LIRA, C. J.; SOWINSKI, C.; CANKAYA, O.; KAMAWAR, D.; SKWARCHUK, S. Charting the Role of the Number Line in Mathematical Development. *Front. Psychol*, 4, 2013.

LEMAIRE, P.; LECACHEUR, M. Aging and Numerosity Estimation. *Journal of Gerontology: Psychological Sciences*, 62B (6), p. 305–312, 2007.

LEMAIRE, P.; SIEGLER, R. Four Aspects of Strategic Change: contributions to children’s learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124 (1), p. 83-97, 1995.

LEVINE, D. R. Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 350-359, 1982.

LIBERTUS, M.; FEIGENSON, L.; HALBERDA, J. Preschool Acuity of the Approximate Number System Correlates with School Math Ability. *Developmental Science*, 14:6, p. 1292–1300, 2011.

LINK, T.; NUERK, H.; MOELLER, K. On the Relation Between the Mental Number Line and Arithmetic Competencies*. The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67:8, p. 1597-1613, 2014.

LIPTON, J. S.; SPELKE, E. S. Preschool Children's Mapping of Number Words to Nonsymbolic Numerosities. *Child Development*, 76:5, p. 978 – 988, 2005.

LUWEL, K.; BEEM, A. L.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. Using Segmented Linear Regression Models with Unknown Change Points to Analyze Strategy Shifts in Cognitive Tasks. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers, 33 (4), p. 470-478, 2001.*

LUWEL, K.; ONGHENA, P.; TORBEYNS, J.; SCHILLEMANS, V.; VERSCHAFFEL, L. Strengths and Weaknesses of the Choice/No-Choice Method in Research on Strategy Use. *European Psychologist,* 14(4), p. 351–362, 2009.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Adapting Strategy Choices to Situational Factors: the effect of time pressure on children's numerosity judgement strategies. *Psychologica Belgica, 43, p.* 269-295, 2003.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Analyzing Strategy Use in Terms of the Four Parameters of Strategic Competence: contributions from a numerosity judgment task. *Anales de Psicología*, 24(2), p. 223-239, 2008.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L; ONGHENA, P.; DECORTE, E. Children's Strategies for Numerosity Judgment in Square Grids of Different Sizes*. Psychologica Belgica,* 40 (3), p. 183-209, 2000.

LUWEL, K.; FOUSTANA, A.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Role of Verbal and Performance Intelligence in Children's Strategy Selection and Execution*. Learning and Individual Differences*, 24, p.134–138, 2013.

MATEJKO, A. A.; ANSARI, D. *Trajectories of Symbolic and Nonsymbolic Magnitude Processing in the First Year of Formal Schooling.* PlosOne, p.1-15, 2016.

MAZZOCCO, M. M. M.; FEIGENSON, L.; HALBERDA, J. Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. *PlosOne*, 6 (9), 2011.

MENZIES, V.; MULDOON, K.; SIMMS, V.; TOWSE, J.; PERRA, O. A Longitudinal Analysis of Estimation, Counting Skills, and Mathematical Ability Across the First School Year. *Developmental Psychology,* 49 (2), p. 250–257, 2013

MOELLER, K.; PIXNER, S.; KAUFMANN, L.; NUERK, H. Children's Early Mental Number Line: Logarithmic or decomposed linear? *Journal of Experimental Child Psychology*, 103 (4), p. 503–515, 2009.

MULDOON, K.; SIMMS, V.; TOWSE, J.; MENZIES, V.; YUE, G. Cross-Cultural Comparisons of 5-Year-Olds' Estimating and Mathematical Ability. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42(4), p. 669–681, 2011.

NUERK, H. C.; KAUFMANN, L.; ZOPPOTH, S.; WILLMES, K. On the Development of the Mental Number Line: More, Less, or Never Holistic with Increasing Age? *Developmental Psychology*, 40(6), p. 1199–1211, 2004.

OBERSTEINER, A.; REISS, K.; UFER, S.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Do First Graders Make Efficient Use of External Number Representations? The Case of the Twenty-Frame. *Cognition and Instruction*, 32(4), p. 353–373, 2014.

OPFER, J. E.; SIEGLER, R. S. Development of Quantitative Thinking. In HOLYOAK, K. J.; MORRISON, R. G. (Eds.), *Oxford Handbook of Thinking and Reasoning.* Cambridge, UK: Oxford University Press, p. 585-605, 2012.

OPFER, J.; SIEGLER, R. Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55, p. 169–195, 2007.

PARK, J.; BRANNON, E. M. Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency*. Psychol Sci,* 24(10), p. 2013-9, 2013.

PEETERS, D.; VERSCHAFFEL, L.; LUWEL, K. Benchmark-Based Strategies in Whole Number Line Estimation. *British Journal of Psychology*, 2016.

PIAGET, J. *Intelligence and Affectivity: their relationship during child development.* Oxford, England: Annual Reviews, 1981.

PIAGET, J. *Seis Estudos de Psicologia.* Editora Forense: Rio de Janeiro, RJ, 1978.

REVKIN, S. K.; PIAZZA, M.; IZARD, V.; COHEN, L.; DEHAENE, S. Does Subitizing Reflect Numerical Estimation? *Psychological Science*, 19(6), p. 607-614, 2008.

ROUSSELLE, L.; NOEL, M. P. The Development of Automatic Numerosity Processing in Preschoolers: evidence for numerosity-perceptual interference. *Developmental Psychology,* 44(2), p. 544-560, 2008.

SASANGUIE, D.; REYNVOET, B. Number Comparison and Number Line Estimation Rely on Different Mechanisms. *Psychologica Belgica*, 53:4, p. 17-35, 2013.

SASANGUIE, D.; VERSCHAFFEL, L.; REYNVOET, B.; LUWEL, K. The Development of Symbolic and Non-Symbolic Number Line Estimations: three developmental accounts contrasted within cross-sectional and longitudinal data. *Psychologica Belgica,* 56(4), pp. 382–405, 2016.

SCHILLEMANS, V.; LUWEL, K.; BULTÉ, I.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Influence of Previous Strategy Use on Individuals' Subsequent Strategy Choice: findings from a numerosity judgement task. *Psychologica Belgica, 49(4), p.* 191-205, 2009.

SCHILLEMANS, V.; LUWEL, K.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Influence of the Previous Strategy on Individuals' Strategy Choices. *Studia psychologica*, 53(4), p. 339-350, 2011.

SCHNEIDER, M.; GRABNER, R. H.; PAETSCH, J. Mental Number Line, Number Line Estimation, and Mathematical Achievement: their interrelations in grades 5 and 6*. Journal of Educational Psychology*, 101, p. 359–372, 2009.

SIEGEL, A. W.; GOLDSMITH, T. H.; MADSON, C. R. Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 211–232, 1982.

SIEGLER, R. S.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development*, 75, p. 428–444, 2004.

SIEGLER, R.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation: a review. In CAMPBELL, J. I. D. *Handbook of Mathematical Cognition*. Psychology Press: New York. Cap. 2, p. 197-212, 2005.

SIEGLER, R.; LEMAIRE, P. Older and Younger Adult's Strategy Choices in Multiplication: testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126 (1), p. 71-92, 1997.

SIEGLER, R. S.; MU, Y. Chinese Children Excel on Novel Mathematics Problems Even Before Elementary School. *Psychological Science*, 19, p. 759-763, 2008.

SIEGLER, R. S.; OPFER, J. E. The Development of Numerical Estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, p. 237-243, 2003.

STARKEY, P.; COOPER, R. G. Perception of Numbers by Human Infants. *Science,* 210, p. 1033–1035, 1980.

SULLIVAN, J. L.; JUHASZ, B. J.; SLATTERY, T. J.; BARTH, H. C. Adults' Number-line Estimation Strategies: evidence from eye movements. *Psychon Bull Rev*, 18, p. 557–563, 2011.

THOMPSON, C. A.; SIEGLER, R. S. Linear Numerical-Magnitude Representations Aid Children's Memory for Numbers. *Psychological Science*, 21(9), p. 1274–1281, 2010.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E.; LAMOTE, C.; DHERT, N. The Acquisition and Use of an Adaptive Strategy for Estimating Numerosity. *European Journal of Psychology of Educuation*, 13, p. 347-370, 1998.

WHITE, S. L. J.; SZŰC, D. Representational Change and Strategy Use in Children's Number Line Estimation During the First Years of Primary School. *Behavioral and Brain Functions*, 8:1, 2012.

XU, F.; SPELKE, E. S. Large Number Discrimination in 6-month-old Infants. *Cognition*, 74, B1–B11, 2000.

XU, F. Numerosity Discrimination in Infants: evidence for two systems of representations. *Cognition*, 89, p. B15–B25, 2003.

XU, X.; CHEN, C.; PAN, M.; LI, N. Development of Numerical Estimation in Chinese Preschool Children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, p. 351–366, 2013.

3 ESTUDO 1: DESENVOLVIMENTO DA ESTIMATIVA NUMÉRICA DE QUANTIDADES

RESUMO

Há um conjunto de evidências que tem relacionado a habilidade de realizar estimativa numérica ao desempenho matemático. Entretanto, observa-se que os resultados trazidos por estudos desta área são ainda inconsistentes e, muitas vezes, contraditórios. Nesta perspectiva, este estudo tem como objetivo caracterizar o desenvolvimento da estimativa numérica de quantidades discretas, para diferentes formas de apresentação de estímulos, em 730 sujeitos, estudantes do 2º ao 6º ano escolar (de uma escola pública e uma privada), da cidade de Porto Alegre/RS e comparar o desempenho desses estudantes com o de adultos, estudantes do ensino médio (Proeja) e do ensino superior em licenciatura em matemática, de uma escola pública federal da região metropolitana da cidade de Porto Alegre/RS. Foi realizado um estudo transversal quantitativo, com objetivo de observar possíveis níveis de desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas. Os resultados foram obtidos a partir do cálculo da precisão relativa apresentada por cada estudante, a partir de um Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ), e indicaram diferentes níveis de desenvolvimento para cada uma das diferentes situações apresentadas nas tarefas. Concluiu-se que as crianças de 2º e 3º ano são capazes de realizar estimativas tal como os adultos do ensino médio, em grande parte das tarefas. Entretanto, os alunos do ensino superior apresentaram melhor desempenho que os demais alunos dos níveis escolares analisados, em todas as tarefas do teste. A partir disso, sugeriu-se que a estimativa numérica de quantidades seja uma habilidade que pode ser desenvolvida e aprimorada ao longo de toda a vida.

Palavras-chave: Estimativa Numérica de Quantidades. Desenvolvimento Matemático.

3.1 INTRODUÇÃO

A competência matemática em geral compreende uma grande variedade de diferentes habilidades e processos cognitivos (SCHNEIDER; GRABNER & PAETSCH, 2009). “As crianças ainda pequenas compreendem, por exemplo, que são ligeiramente mais baixas que o seu irmão mais velho, mas muito mais baixas que o seu pai, e qual dentre montes de bombons é maior etc.” (AZEVEDO, 1996, p.32). No entanto, “a criança não percebe de uma vez só todas essas relações e transformações; ela as compreende progressivamente, à luz de sua experiência ativa no espaço e percorrendo as diferentes etapas de seu desenvolvimento intelectual” (VERGNAUD, 2009, p. 82). Para ser competente matematicamente, além de compreender relações entre quantidades, é preciso dominar a matemática simbólica, começando pelos números e suas relações, sendo a função básica dos números a representação das quantidades.

Nas discussões sobre quais as habilidades matemáticas influenciam a obtenção de sucesso na sociedade adulta, encontra-se a estimativa numérica

(LEVINE, 1982), responsável, justamente, por representar quantidades de forma rápida e sem (ou com pouca) necessidade de precisão. Além disso, a habilidade de realizar estimativas pode ser extremamente relevante na resolução de tarefas matemáticas, tendo em vista que, para sua compreensão, é preciso entender tanto as magnitudes reais quanto as relativas dos números (HURLEY; BOYKIN & ALLEN, 2005). Sendo assim, não ser capaz de realizar estimativas pode significar uma compreensão limitada ou insuficiente dos números. Na mesma perspectiva, Siegler e Booth (2005) ressaltam que alguns estudos acerca das dificuldades em estimativa numérica apontam para limitações de compreensão conceitual, de habilidades de componentes (tais como a contagem e aritmética) e de memória de trabalho. Ou seja, crianças e adultos que realizam estimativas com precisão tendem a ter melhor entendimento conceitual, melhor contagem e habilidade aritmética e maior capacidade de memória de trabalho do que aqueles que realizam estimativas com menor precisão.

Na literatura existente sobre o tema, tem se sugerido uma relação significativa entre a habilidade de realizar estimativas e os conhecimentos matemáticos posteriores, em especial, as habilidades com as operações aritméticas (BOOTH & SIEGLER, 2006; GEARY; BAILEY & HOARD 2009; MAZZOCCO; FEIGENSON & HALBERDA, 2011; PARK & BRANNON, 2013; SCHNEIDER; GRABNER & PAETSCH, 2009; SIEGLER & MU, 2008). Em alguns estudos (CHARD et al., 2005; JORDAN et al., 2006; MULDOON et al., 2011; SIEGLER & BOOTH, 2004) também foi encontrada significativa correlação entre a precisão da estimativa numérica e desempenho em testes padronizados de matemática. Para exemplificar a relação entre o conhecimento matemático e a estimativa numérica, Reys (1986) observou que crianças que realizavam estimativas com maior precisão tinham melhores as habilidades de compreensão de valor posicional, cálculo mental, tolerância para errar, compreensão das propriedades aritméticas, confiança na sua resposta e variabilidade no uso de estratégias. Levine (1982) observou que a capacidade quantitativa, de raciocínio e de cálculo também estavam fortemente relacionadas à habilidade de realizar estimativas. Além destes motivos, a importância da estimativa é explicitada por seu uso contínuo e cotidiano. Saber realizá-la requer ir muito além da aplicação mecânica de procedimentos, exigindo estratégias flexíveis e contextuais, que sejam adequadas a cada situação apresentada.

Apesar da reconhecida importância do tema, o que se observa é que a estimativa numérica foi pouco investigada em comparação à contagem exata (PIAZZA et al., 2006; ROUSSELLE & NOEL, 2008). Sendo assim, ainda é desconhecido se a proficiência em estimativa poderia ser uma das causas de maior habilidade matemática ou o contrário, mas há razões para suspeitar que poderia ser (SIEGLER & BOOTH, 2005). E, embora as habilidades necessárias para a compreensão da estimativa numérica sejam muito básicas e enfatizadas na escola já nos primeiros anos escolares, a própria estimativa raramente tem sido discutida em sala de aula desde muito tempo (SPITZER, 1976). Como reflexo disso, a conclusão mais consistente de investigações sobre o desenvolvimento da estimativa é que as crianças não realizam estimativas com muita habilidade (SIEGLER & BOOTH, 2004), mesmo que no 5º ano escolar já tenham adquirido habilidades suficientes (e até habilidades superiores) para compreender estimativas (HURLEY; BOYKIN & ALLEN, 2005).

Um dos motivos para o conhecimento limitado sobre a estimativa pode ser explicado pela diversidade de tarefas que a envolvem. Por exemplo, realizar estimativa da população de um país, calcular o produto aproximado de dois fatores e a velocidade de um carro em movimento têm pouco em comum, exceto o fato de a resposta ser dada por estimativa (BOOTH & SIEGLER, 2006). Essa diversidade ainda se estende para a quantidade de estratégias possíveis de resoluções, para os níveis de dificuldade das tarefas e para os padrões de desenvolvimento que podem ser encontrados na literatura.

Problemas de estimativa numérica, especificamente, correspondem ao subconjunto de tarefas de estimativa nas quais ou o problema ou a sua solução envolvem números (SIEGLER & BOOTH, 2005). Neste subconjunto, estão incluídas as tarefas de: a) estimativas computacionais, que envolvem a tradução de uma representação numérica (operação) para outra (resultado aproximado); b) estimativas na reta numérica, que traduzem um número em uma posição espacial ou uma posição espacial de um número em um número ou c) estimativas de quantidades de objetos em um conjunto, que traduzem uma representação numérica não quantitativa (não simbólica), para um número. A outra categoria da estimativa (não-numérica), diz respeito a tarefas que envolvem duas representações quantitativas não numéricas, por exemplo, entre o brilho de uma lâmpada e a posição espacial de uma linha (SIEGLER & BOOTH, 2005).

A grande variedade de tarefas que podem envolver estimativas exige que este estudo se concentre apenas em um campo da estimativa, sendo escolhida a Estimativa Numérica de Quantidades discretas em um conjunto (ENQ). Sendo assim, define-se ENQ como o número cardinal que representa a quantidade de elementos de um conjunto de objetos, sem que seja feita a contagem. Então, realizar estimativas de quantidades envolve atribuir um número a um conjunto de elementos discretos (SIEGLER & BOOTH, 2005).

Essa decisão reflete o interesse em compreender o desenvolvimento deste processo desde a infância até a vida adulta, de modo a reduzir os conhecimentos externos exigidos para a realização das tarefas, como o conhecimento de unidades de medida ou conhecimentos específicos sobre informações do mundo real. As ENQ envolvem observar representações numéricas não-simbólicas (como pontos, por exemplo) e tentar expressá-las por meio de símbolos numéricos. Neste estudo, buscou-se verificar como se dá o desenvolvimento da estimativa numérica em crianças do 2º ao 6º ano escolar, bem como constatar em que fase desse desenvolvimento suas estimativas podem ser comparáveis às dos adultos.

Dessa forma, nesse estudo pretendeu-se responder às seguintes perguntas: a) Como se dá o desenvolvimento da *ENQ* em crianças do 2º ao 6º ano escolar nas diferentes situações de apresentação dos estímulos? b) seria este desenvolvimento progressivo de modo que envolva níveis de desenvolvimento semelhantes para a mesma etapa escolar? c) de que maneira o modo de apresentação (diferentes escalas, diferentes densidades, com ou sem matriz de referência) das quantidades pode influenciar na precisão das estimativas nos diferentes anos escolares? d) em que momento e para quais tarefas a precisão na estimativa das crianças é comparável à dos adultos?

Em síntese, o objetivo deste estudo foi duplo. Primeiramente, buscou-se comparar o desempenho das crianças em tarefas de enumeração das quantidades apresentadas. Em seguida, buscou-se compreender em que período desse desenvolvimento o grau de precisão das crianças compara-se com o dos adultos. Teve-se por hipótese que, para todos os diferentes modos de apresentação dos estímulos, os sujeitos mais velhos serão mais precisos que os mais novos, sendo esse desenvolvimento demonstrado por níveis de precisão vinculados à etapa escolar. E, tendo em vista as habilidades matemáticas formais já desenvolvidas na idade adulta, adultos estudantes do ensino médio e do ensino superior terão desempenho semelhante e comparável aos dos estudantes do 6º ano escolar, já que é neste período que a literatura mostra evidências de que as crianças já possuem as habilidades necessárias para realizar estimativas com precisão.

3.2 REFERENCIAL TEÓRICO

3.2.1 Senso Numérico

O Senso Numérico (SN) está relacionado à capacidade numérica das pessoas, sendo a estimativa numérica parte integrante do SN. Não há consenso sobre a origem do SN. A neuropsicologia indica que a localização neuronal do SN é a mesma da quantificação exata (DEHAENE, 1997), sendo o SN uma capacidade inata que possibilita que algumas pessoas nasçam com maior capacidade numérica que outras. Essas ideias vão de encontro com a perspectiva construtivista de que o SN é construído e progressivamente organizado internamente. Corso e Dorneles (2012) afirmam que o SN é uma capacidade construída e que possibilita a interação com números e o desenvolvimento de estratégias eficientes para esta interação.

Para integrar esses dois pontos de vista (inatista e construtivista), Berch (2005) propõe que uma possível base orgânica inata para a capacidade numérica pode ser ponto de partida para habilidades numéricas adquiridas ao longo da vida, ideia compartilhada na análise deste estudo. Considera-se que a habilidade de realizar ENQ vai além do SN*,* no sentido que Dehaene (1997) propõe, e pode se desenvolver com a idade e com a experiência educacional e cultural, permitindo o avanço desta habilidade conforme o desenvolvimento do sistema simbólico da criança (HALBERDA & FEIGENSON, 2008).

3.2.2 Sistema de Aproximação Numérica (ANS)

Alguns pesquisadores (STARKEY & COOPER, 1980; WYNN, 1992; OPFER & SIEGLER, 2012) indicam que o pensamento quantitativo não-simbólico está presente desde muito cedo na criança, sendo ele culturalmente universal e semelhante entre as espécies, em especial, na capacidade de representar e comparar quantidades. Essa forma de representação mental não-verbal primitiva, que suporta um SN intuitivo e inato em humanos e outras espécies de animais, é chamada de Sistema de Número Aproximado (ANS: Aproximate Number System). Ao contrário das habilidades numéricas exigidas na escolaridade formal, representações de magnitude do ANS são independentes das representações simbólicas, tais como os números (MAZZOCCO; FEIGENSON & HALBERDA, 2011), mas serviriam de base para a matemática formal.

Concorda-se com Gebuis e Reynvoet (2012) quando afirmam que a existência de um ANS que pode extrair quantidades independentemente das pistas visuais (superfície total, diâmetro dos pontos etc.) é improvável. Em vez disso, tais pesquisadores propõem que os seres humanos estimam quantidades através da ponderação dos diferentes elementos visuais presentes nos estímulos. Estimativas e pistas visuais também são altamente correlacionadas na vida real. Por exemplo, quando maçãs são adicionadas a uma pilha de maçãs, o tamanho da pilha aumenta; ou quando mais pessoas entram em uma sala, a densidade aumenta. Portanto, a informação visual é importante para a estimativa de quantidades, mas não é suficiente para estabelecer estimativas precisas, o que exigiria muito mais que padrões perceptivos ou sensibilidades inatas de quantificação.

A afirmação sugerida por alguns pesquisadores (STARKEY & COOPER, 1980; WYNN, 1992; OPFER & SIEGLER, 2012) de que a quantificação não-simbólica é semelhante entre espécies só pode considerada quando se trata de uma comparação bruta de quantidades, requerendo uma comparação grosseira de dois conjuntos de itens (maior/menor). Para realizar ENQ, tal como sugerido neste estudo, requer-se um mecanismo logicamente mais elaborado. Ou seja, para fazer apenas julgamentos de menor/maior, considera-se que estas pistas visuais possam ser, de alguma forma suficientes, entretanto, para ENQ mais precisas, elas não seriam suficientes. Dessa forma, o ANS não é um mecanismo relevante para este estudo.

3.2.3 Subitizing

Anterior à quantificação exata mais elaborada, alguns pesquisadores afirmam que a enumeração de objetos brevemente apresentados é precisa para até 3 ou 4 itens e que o reconhecimento de quantidades entre “um” e “quatro” parece ser anterior à aquisição dos princípios de contagem (DEHAENE, 1997). Essa capacidade, presente em diferentes espécies, de identificar precisa e rapidamente pequenas quantidades numéricas é chamada de “*subitizing*”.

Embora o *subitizing* tenha sido estudado extensivamente desde muito tempo, seus mecanismos subjacentes permanecem sendo debatidos. Apesar da concordância geral entre os pesquisadores de que a enumeração é tratada de forma diferente dentro do intervalo de *subitizing*, tem havido algum debate sobre se o *subitizing* utilizaria mecanismos iguais ou diferentes daqueles utilizados na estimativa de intervalos numéricos maiores. Entretanto, deve-se ter o devido cuidado para não tratar as ENQ como habilidades integralmente perceptivas, tal como considera-se ser o caso do *subitizing*. Por esse motivo, não se incluiu nesta pesquisa o conceito de *subitizing*, já que parece envolver um processo diferente do que o envolvido em estimativas de conjuntos maiores.

3.2.4 Quantificação Exata

Para que sejam compreendidos os processos envolvidos na estimativa numérica, é necessário diferenciá-la da quantificação exata, que envolve a contagem e a representação simbólica numérica. Para Piaget (1981), a gênese do número na criança envolve três elementos: a) uma lógica de inclusão de classes em que um conjunto com um elemento está incluída em um conjunto com dois elementos, que por sua vez está incluído em um conjunto com três elementos etc.; b) seriação dos elementos numéricos, compreendendo que 1 é menor que 2, que é menor que 3 etc. e c) conservação da quantidade total de um conjunto, independentemente da forma como os elementos estão dispostos. Nesta perspectiva, para uma real compreensão numérica seria necessária uma coordenação desses três domínios.

Para representar os números simbólicos, a partir da coordenação entre inclusão de classes, seriação de elementos e conservação de quantidades, os seres humanos têm um sistema mediado pela linguagem. Diferentemente do SN ou do ANS, quando tidos como habilidades inatas presentes em diferentes espécies, o pensamento quantitativo simbólico é desenvolvido ao longo do tempo, estando presente apenas na espécie humana. A forma de quantificar itens a partir da escrita ou da fala é bastante diferente entre os grupos culturais (OPFER & SIEGLER, 2012) e proporcionam a base para a maior parte do pensamento matemático formal (FEIGENSON; LIBERTUS & HALBERDA, 2013). Para este estudo, a quantificação exata não foi discutida, servindo apenas como comparativo para diferenciar do processo de interesse neste estudo: a estimativa numérica.

3.2.5 Estimativa Numérica de Quantidades (ENQ)

Como já citado anteriormente, a matemática simbólica é uma capacidade exclusivamente humana (PARK & BANNON, 2013). Entretanto, mesmo que totalmente abstrata, a realização de estimativas não depende do aprendizado de um sistema simbólico, embora possa se estender para julgamentos cada vez mais exatos quando o sistema simbólico se encontra disponível (ANTELL & KEATING, 1983; STARKEY & COOPER, 1980; XU & SPELKE, 2000).

Na literatura atual, a ENQ também é utilizada como instrumento de avaliação de estimativa numérica. Alguns autores (DEHAENE, 1997; XU & SPELKE, 2000; XU, 2003) trabalham com a ideia de que a discriminação de quantidades venha a ser uma atividade ligada apenas à percepção, propondo atividades que envolvem apenas relacionar duas quantidades, escolhendo qual grupo apresenta mais/menos elementos. É evidente que a atividade apenas de comparar quantidades de modo perceptual não é realizar estimativas; ao contrário, dizer quantos elementos têm, sem contar, envolve conhecimentos numéricos, inclusive simbólicos, necessitando atribuir um símbolo a uma quantidade de elementos.

Na pesquisa de Xu e Spelke (2000), bebês foram capazes de comparar conjuntos de objetos diferentes por uma grande proporção, ou seja, quando as quantidades são suficientemente diferentes. Considera-se que os bebês possam representar objetos, mas não sua representação numérica cardinal. Entretanto, sabe-se que a discriminação entre magnitudes numéricas não simbólicas continua a se tornar mais precisa muito além da infância (HALBERDA & FEIGENSON, 2008). Quando se assume que bebês são capazes de discriminar pequenas quantidades (*subitizing*) ou até quantidades maiores quando a diferença entre essas quantidades for relativamente grande (XU & SPELKE, 2000; XU, 2003), pode ser que estejam respondendo apenas às propriedades físicas contínuas (como luminosidade, densidade e comprimento, por exemplo). Ou seja, a resposta aos estímulos pode nada ter a ver com as quantidades discretas apresentadas, mas com propriedades contínuas dos próprios objetos, como uma totalidade.

Piaget (1981) sugeriu que há padrões de mudança na aquisição de novas habilidades e que essas mudanças no desenvolvimento ocorrem em diferentes estádios com padrões progressivos de compreensão. Dentro desta perspectiva, as crianças seriam inicialmente mais limitadas à forma do que às quantidades. Ou seja, para realizar estimativas com maior precisão, as crianças precisariam substituir uma representação não-simbólica e menos avançada para uma simbólica e mais avançada.

Os dados de Siegler e Booth (2005) sugerem que as mudanças nas representações de magnitude numérica, uma vez feitas, são estáveis ao longo do tempo e em geral através de uma série de tarefas. Tal como um estádio formal de desenvolvimento, em que mudanças podem ocorrer, mas não de forma a modificar-se enquanto estrutura de pensamento. Estudos de estimativa têm fornecido apoio a este princípio. Assim, a ideia trazida por esses teóricos, de que o desenvolvimento é marcado por mudanças sistemáticas de lógica de pensamento, pode ser bastante útil como base teórica para estudos atuais sobre o desenvolvimento cognitivo. Corroborando esta ideia, Rousselle e Noel (2008) constataram que o desempenho em uma tarefa de ENQ é afetado por propriedades numéricas e perceptivas. Os pesquisadores concluíram que a automatização do processamento de quantidades surge gradualmente ao longo do desenvolvimento, ao passo que o acesso automático à informação perceptiva já está bem desenvolvido em pré-escolares. Ou seja, se a estimativa de quantidades fosse uma atividade integralmente perceptiva, as crianças deveriam ser capazes de fazê-la desde muito cedo, o que não ocorre.

Em estudo preliminar de Dorneles e colaboradores (2015), em que estudantes foram solicitados a realizar estimativas acerca da quantidade de círculos em uma imagem, comparando conjuntos, observou-se que, quando os grupos de círculos são iguais (ou muito semelhantes) em quantidade, a categoria com o mais elevado grau de aglomeração (ou repetição) é julgada mais numerosa pela criança. Esses resultados foram ao encontro dos obtidos por Piazza e colaboradores (2006), que observaram que quando os grupos de itens são iguais em número, o grupo de maior aglomeração é julgado mais numeroso. Contribuindo com estes achados, Brysbaert (2005) já havia concluído que a enumeração das quantidades maiores é mais fácil quando os itens são apresentados em uma forma canônica do que quando são apresentados em uma configuração aleatória.

Quanto ao efeito da idade e do tamanho da matriz na precisão da estimativa das quantidades, Luwel e colaboradores (2000) concluíram que as precisões das estimativas de alunos da 6ª série foram significativamente melhores do que dos alunos da 2ª série. Surpreendentemente, não foi observado efeito sobre o tamanho da matriz, bem como o efeito de interação entre a idade e tamanho da matriz.

Sugere-se que os resultados dos testes de ENQ podem ser mais confiáveis que o de outras tarefas de estimativa numérica pela familiaridade das crianças brasileiras com tarefas de quantificação, mesmo que estas sejam com foco nas quantificações exatas de itens. Ou seja, a partir de relatos de professores que ensinam os fundamentos da aritmética para crianças, percebe-se ser muito comum realizar atividades de representação numérica a partir da comparação do símbolo numérico a sua quantidade, utilizando como suporte objetos como pedrinhas, balas ou outros itens familiares às crianças.

É importante destacar que é muito difícil discriminar 200 de 201 pontos, mas todos que entendem o sistema decimal sabem, com absoluta certeza, que 201 é maior que 200. Esses dados não implicam que o conhecimento de magnitudes numéricas não simbólicas não desempenhe nenhum papel na aprendizagem das magnitudes dos números simbólicos, pois parece provável que crianças pré-escolares adquiram o significado de pequenos números simbólicos associando-os a representações não simbólicas dos conjuntos correspondentes.

Uma tarefa utilizada para testar a ENQ configura-se em observar itens dispostos em matrizes quadradas por um determinado período de tempo, de modo que não seja possível contá-los, mas que seja suficiente para o estabelecimento de estratégias que possibilitem uma estimativa mais precisa que a obtida apenas por percepção visual dos itens. Ou seja, essa tarefa nada tem a ver com simplesmente comparar conjuntos, indicando qual possui mais ou menos itens.

3.3 MÉTODO

3.3.1 Amostra

Foi realizado um estudo transversal, com uma amostra de 730 estudantes do 2º (N=116), 3º (N=127), 4º (N=94), 5º (N=163) e 6º (N=176) ano escolar e estudantes adultos provenientes do ensino médio da educação de jovens e adultos (Proeja – N=29) e do ensino superior em licenciatura em matemática (N=25). Estes estudantes formavam a população de três escolas: uma escola pública municipal (N=389) e uma escola privada (N=287), onde estudavam as crianças, ambas na cidade de Porto Alegre/RS, e uma instituição pública federal de ensino médio e superior (N=54), onde estudavam os adultos, da região metropolitana de Porto Alegre/RS.

O Proeja é o Programa Nacional de Integração da Educação Básica com a Educação Profissional na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos, que visa unir a formação básica do estudante jovem ou adulto a uma formação técnica específica. Por isso, considera-se suas especificidades em comparação a estudantes do ensino médio regular. Aqui, definimos “adultos” como todos os sujeitos, maiores de 18, tal como a legislação vigente no Brasil considera, não delimitando idade máxima.

A frequência da amostra por ano escolar, escola e sexo estão descritos na Tabela 1.

Tabela 1 - Frequência da amostra por ano escolar, por escola e por sexo

Ano	Sexo	Escola Particular		Escola Pública	
		Frequência	Porcentagem(%)	Frequência	Porcentagem(%)
2º	F	35	57,4	26	47,3
	M	26	42,6	29	52,7
	Total	61	100	55	100
3º	F	26	54,2	30	38
	M	22	45,8	49	62
	Total	48	100	79	100
4º	F	30	68,2	25	50
	M	14	31,8	25	50
	Total	44	100	50	100
5º	F	35	62,5	52	48,6
	M	21	37,5	55	51,4
	Total	56	100	107	100
6º	F	49	62,8	47	48
	M	29	37,2	51	52
	Total	78	100	98	100
P	F			17	58,6
	M			12	41,4
	Total			29	100
S	F			14	56
	M			11	44
	Total			25	100

F – Sexo feminino
M – Sexo masculino
P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior

Os alunos pesquisados aceitaram participar da pesquisa e foram liberados de suas atividades de sala de aula pelo professor, apresentando autorização dos pais ou responsáveis para participar do projeto, quando menores de idade.

3.3.2 Instrumento de Coleta de Dados

Como não há relatos de um teste que avalie o desempenho em estimativa numérica de quantidades de acordo com a precisão relativa (PR) individual e considerando as mesmas variáveis deste estudo, o Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ) foi estruturado e organizado pela pesquisadora e suas tarefas encontram-se disponíveis no Apêndice A. O TENQ avalia a habilidade do sujeito de realizar estimativas numéricas da quantidade de objetos em um conjunto discreto, considerando o tempo destinado para tal, de forma a impedir a contagem os itens.

O instrumento é composto por 64 tarefas, subdivididas em diferentes formas de apresentação e configurações espaciais de seus estímulos, que consistiram em conjuntos de pontos de diferentes quantidades, de mesma cor (preta) e de mesmo tamanho (a fim de reduzir a quantidade de variáveis que possam interferir no julgamento da quantidade pelos participantes). Eles foram irregularmente posicionados sobre a região delimitada pela tela retangular, projetada em um fundo branco.

Para atingir os objetivos a que se propõe, observou-se a necessidade de contemplar diferentes intervalos numéricos (escalas), representados pelas diferentes matrizes (10x1, 10x2 e 10x10), pressupondo diferentes níveis de dificuldade, considerando-se que a habilidade de realizar estimativas é processual e ocorre de forma gradual. Há indícios de que as estratégias e a precisão na realização de estimativa variam com o formato de apresentação, com o fato de conhecer ou desconhecer o número máximo de pontos em cada matriz (intervalo de valores possíveis) e com a distribuição dos itens na grade, que podem apresentar maior (mais aglomerados) ou menor (mais espaçados) densidade. Essas variáveis específicas do instrumento são, então, detalhadas:

(a) Escala: uma maneira de representar quantidades é a utilização de grades (matrizes) que organizam os itens em grupos. A escala 10 (E10) corresponde a uma grade com uma única linha, contendo 10 quadrados brancos (matriz 10x1), a escala 20 (E20) corresponde a uma grade com duas dessas linhas (matriz 10x2) e, finalmente, a escala 100 (E100) é uma grade com 10 linhas, totalizando 100 quadrados brancos e comportando um máximo de 100 pontos pretos, quando completa (matriz 10x10). Os itens também foram apresentados de modo aleatório (AL), sem auxílio da matriz, espalhados na tela.

(b) Densidade: outra maneira de avaliar a precisão das estimativas foi quanto à forma de distribuição dos itens na matriz. Ou seja, as mesmas quantidades foram apresentadas de duas maneiras: com itens aglomerados (A) lado a lado, preenchendo os quadrados vazios sequencialmente, sem deixar espaços vazios, até completar a quantidade total de itens; ou com itens espaçados (E), de modo que estivessem aleatoriamente distribuídos na matriz, podendo existir quadrados vazios entre outros preenchidos por pontos.

(c) Conhecimento do valor máximo: também importante para compreender o desenvolvimento da estimativa, testou-se se ter o máximo de pontos da matriz conhecido (MC) influenciaria em estimativas mais precisas quando comparadas às estimativas realizadas quando o máximo de pontos fosse desconhecido (MD), mesmo que distribuídos em uma matriz de tamanho fixo.

Todas as variáveis interagiram entre si. Por exemplo, na escala 10 (E10) foram distribuídas as quantidades de 4 e 7 pontos, apresentados de maneira aglomerada ou espaçada na matriz. Em um primeiro momento, os alunos desconheciam a informação quanto à quantidade máxima de pontos da matriz completa (Máximo Desconhecido - MD), em um segundo momento eram convidados a realizar a estimativa das mesmas quantidades, porém conhecendo a quantidade da matriz cheia (Máximo Conhecido - MC). Da mesma forma, os estudantes realizaram estimativas das quantidades 4, 7, 9 e 17 em uma matriz 10x2, na escala E20. Por último, os alunos foram convidados a realizar estimativa das quantidades: 4, 7, 9, 17, 25, 49, 78 e 95 em uma matriz 10x10 (E100) nas mesmas condições apresentadas anteriormente. Como última tarefa do instrumento, os sujeitos realizaram estimativas destas mesmas quantidades propostas para E100, com pontos dispostos aleatoriamente na tela e não em matrizes quadriculadas como nas demais tarefas das diferentes escalas.

Reflexões sobre aplicabilidade deste instrumento foram realizadas após as conclusões obtidas de um estudo preliminar (DORNELES et al., 2015), que possibilitou realizar os ajustes necessários para tornar este instrumento uma ferramenta mais confiável para a coleta de dados desta tese.

3.3.3 Procedimento para Coleta de Dados

O procedimento para a realização do TENQ consistiu em avaliar os estudantes separados por turma, dentro da sala de aula, de forma coletiva, de maneira que o ambiente de trabalho e suas atividades fossem o menos afetado possível. O tempo médio de realização do teste foi de 50 minutos por turma. Os alunos foram informados de que estariam participando de um projeto que visa compreender como a estimativa numérica de quantidades se desenvolve. Para as crianças menores, era proposto que tentassem “adivinhar” as quantidades apresentadas, sem contá-las.

Após explicação sobre os objetivos das atividades, os alunos receberam e assinaram um termo de consentimento quanto à participação na pesquisa (Anexo E). Para os alunos menores de idade, documento semelhante já havia sido previamente remetido aos pais ou responsáveis e já estavam em posse da pesquisadora (Anexo D). O professor responsável também assinou um termo de aceite em participar da pesquisa (Anexo C).

As tarefas do TENQ (Apêndice A) foram apresentadas visualmente, com auxílio do software PowerPoint e de um projetor multimídia. A tarefa consistia em ouvir a instrução, observar a imagem projetada e, após alguns segundos de observação, a imagem era retirada da tela, seguida por uma tela branca. Neste momento, os participantes eram convidados a realizar uma estimativa numérica acerca da quantidade observada, anotando em um caderno de respostas previamente distribuído a quantificação que considerassem mais adequada para a imagem apresentada.

O tempo de exibição foi ajustado para cada quantidade de itens, de modo que houvesse tempo suficiente para permitir que os participantes observassem as quantidades, mas que não possibilitasse a contagem. Assim, para cada dezena de itens, um segundo a mais era dado para observação. Ou seja, para quantidades de até 10 elementos, os participantes tinham um segundo de observação; para quantidades de 11 a 20, eram disponibilizados 2 segundos, de 21 a 30, 3 segundos e, assim por diante, até o período máximo de 10 segundos, para quantidades entre 91 e 100 elementos.

Cada nova quantidade só era apresentada se todas as crianças confirmassem que já haviam respondido à tarefa anterior, garantindo que apenas uma pequena percentagem dos dados fosse perdida devido a lapsos de atenção. Encerradas as atividades, os cadernos de respostas devidamente preenchidos foram recolhidos. Não houve *feedback* quanto às respostas na intenção de evitar um aprendizado perceptual.

3.3.4 Análise dos Dados

Para compreender o desenvolvimento da estimativa numérica de quantidades, foi realizada uma análise estatística, considerando a variável dependente *precisão relativa* (PR) em cada uma das escalas (E10, E20 e E100), em cada ano escolar (2º, 3º, 4º, 5, 6º, Proeja-P ou superior-S), nas diferentes escolas (pública-Pu ou privada-Pa). Ainda dentro de cada escala, as variáveis consistiam em a criança conhecer o máximo de pontos possíveis em cada matriz ou não [máximo conhecido (MC) / máximo desconhecido (MD)] e os pontos estarem distribuídos de forma aglomerada (A), espaçadas (E) na matriz ou aleatória (AL), sem matriz auxiliar.

Considerando que a precisão das estimativas possa fornecer, de forma confiável, informação sobre como os indivíduos realizam juízos de enumeração, em primeiro lugar, para cada problema e para cada aluno, tanto a precisão absoluta (PA) quanto a relativa (PR) foram calculadas. Para o cálculo da PR, utilizou-se a fórmula adaptada de Siegler e Booth (2004), sendo o *Valor Real* o número a ser estimado e *Estimativa* o valor determinado pelo sujeito, então:

$$PR = \frac{|VALOR\ REAL - ESTIMATIVA|}{ESCALA\ (10, 20\ ou\ 100)}$$

Por exemplo, se o valor real for 95 e a estimativa dada pelo sujeito for 97, em uma escala E100, a precisão relativa é dada por $PR = \frac{|95-97|}{100} = \frac{2}{100} = 0{,}02$. Quanto mais próximo de zero for o resultado da PR, mais precisa é esta estimativa. O resultado obtido com o cálculo realizado no numerador da fração é o que se chama de precisão absoluta (PA). Neste caso, $PA = |VALOR\ REAL - ESTIMATIVA|$.

Com fortes indícios de que estimativas demasiadamente superestimadas tenham sido realizadas de forma intuitiva, o critério de razoabilidade de respostas aceitas para análise neste estudo, a partir de estudo estatístico, foi de até o dobro do valor real apresentado. Com isso, foram consideradas apenas as respostas em que a PA máxima fosse até o dobro da escala, com a certeza de não haver prejuízos estatísticos. Sendo assim, na E10, foram consideradas respostas até 20, na E20, respostas até 40 e na E100 respostas até 200. Os valores estimados acima dessas quantidades foram tidos como não compreendidos pelos participantes.

A menos que indicado de outra forma, um nível de confiança alfa de 0,05 foi utilizado para todos os testes estatísticos. Os *p-valores* exatos foram relatados, mas valores muito pequenos foram arredondados para $p<0{,}001$. A partir do teste de normalidade de *Shapiro-Wilk*, foi verificada a distribuição da variável precisão relativa (PR). Apresentando distribuição assimétrica, optou-se por utilizar o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para comparar a distribuição da PR em relação às categorias de sexo (M e F) e escola (pública e particular). Não houve diferença significativa para sexo em nenhuma das escalas, entretanto, o mesmo não ocorreu para as diferentes escolas. Por isso, optou-se por realizar as análises separando os resultados também por escola.

Para a análise estatística da relação entre as variáveis, utilizou-se a *Análise de Modelo de Equações de Estimações Generalizada (GEE*), tendo em vista que o mesmo sujeito respondeu a várias questões de um mesmo teste. Neste caso, o GEE considera cada uma das 64 estimativas realizadas nas tarefas do TENQ como sendo de um mesmo sujeito e não de 64 sujeitos diferentes, o que obteria um total de 46.720 respostas. Também se utilizou uma matriz de correlação trabalho *Exchangeable* e uma matriz de covariância de estimador robusto, considerando-se estes dois testes mais utilizados na literatura para variáveis assimétricas e para uma distribuição normal com função identidade.

Optou-se pela utilização da distribuição normal (mesmo a variável não sendo simétrica) e não a distribuição gama (logarítmica), pois os casos em que o indivíduo acerta o valor real (ou seja, que sua precisão é zero) seriam excluídos, já que o logaritmo de zero não está definido. O teste post-hoc utilizado foi o teste de comparação múltipla de *Bonferroni,* descartando-se o teste *LSD* por ser muito sensível e acusar pequenas diferenças, mesmo que não relevantes.

Ressalta-se que os alunos do Proeja (P) e do ensino superior (S) faziam parte da população de uma escola pública federal e, em alguns momentos, constaram duplamente nas tabelas (uma vez na escola pública e outra na escola particular) para fins de comparação do desempenho das crianças, por escola, com os adultos pesquisados. Vale ressaltar, também, que médias maiores correspondem a menor precisão.

3.4 RESULTADOS

Realizou-se um modelo fatorial entre as quatro variáveis: máximo conhecido ou desconhecido (MC/MD); aglomerado, espaçado ou aleatório (A/E/AL); ano (2º-6º, P e S) e escola pública ou escola particular (Pu/Pa), discriminando suas relações em cada uma das três diferentes escalas (E10, E20 e E100). Para realizar esta primeira análise, fixou-se as variáveis ano e escola e comparou-se as médias dos estudantes em cada uma das escalas. Tanto para a escola pública quanto para a particular, a interação entre as variáveis Escala e Ano foi significativa ($p<0,001$ e $p=0,001$, respectivamente) e a média geral de PR por escala na escola pública é: E10=0,0557; E20=0,0690; E100=0,0904; AL=0,1046 e na escola particular é: E10=0,0389; E20=0,0470; E100=0,0618; AL=0,0933.

Esses dados sugerem que estimativas em escalas menores são mais precisas que em escalas maiores e determinam uma necessidade de analisar as diferentes tarefas não apenas por ano escolar (como é objetivo do estudo), mas também por escola e a partir de cada uma das escalas. Sendo assim, em um primeiro momento, realizou-se a comparação das médias da PR por ano escolar e por escola, nas diferentes escalas. Esses dados foram melhor detalhados na Tabela 2.

Tabela 2 - Médias da Precisão Relativa por ano e escola nas diferentes escalas

Ano	Escola							
	Pública				Particular			
	E10	E20	E100	AL	E10	E20	E100	AL
2o	,0867	,1240	,1419	,1441	,0588	,0626	,0768	,1211
3o	,0943	,0949	,1177	,1441	,0490	,0463	,0687	,0787
4o	,0796	,0852	,1166	,1177	,0447	,0485	,0631	,1120
5o	,0418	,0509	,0846	,0864	,0345	,0411	,0591	,1024
6o	,0324	,0347	,0702	,0916	,0304	,0370	**,0634**	,0913
P	,0333	**,0628**	,0716	,0803	,0333	**,0628**	**,0716**	,0803
S	,0215	,0307	,0301	,0677	,0215	,0307	,0301	,0677

E10, E20 e E100 – Escalas 10, 20 e 100
AL – Itens aleatórios
P – Alunos do Proeja
S – Alunos do Ensino Superior

Em uma análise vertical da Tabela 2, observa-se que, à medida que se aumenta o ano escolar, as médias das precisões tendem a diminuir, exceto para os anos escolares marcados em azul. Ou seja, em geral, quanto maior o nível de escolaridade dos alunos, mais precisos eles são em suas estimativas, exceto no caso do Proeja, que apresentou precisão de estimativa inferior à de seus pares, adultos do ensino superior. A média dos itens aleatórios apresentadas pelo 3º ano na escola particular mostrou-se muito superior às demais dos anos posteriores, por isso marcada na cor rosa na Tabela 2. É fácil ver também que as médias dos alunos da escola particular representam estimativas mais precisas que seus pares de escola pública (exceto no 5º ano para itens aleatórios e no 6º ano para E20, destacados em vermelho na Tabela 2). Das diferenças em termos de média de PR apontadas na Tabela 2, obtém-se as significativas, em cada escala, na Tabela 3.

Tabela 3 - Diferenças significativas entre as médias de Precisão Relativa por ano e escola nas diferentes escalas

Escala	Ano	3o	p	5o	p	6o	p	P	p	S	p
E10	2o			Pu Pa	0,001 <0,001	Pu Pa	<0,001 <0,001	Pu	0,025	Pu Pa	<0,001 0,011
	3o			Pu	0,005	Pu	<0,001	Pu	0,027	Pu	<0,001
	4o					Pu	0,043			Pu	0,028
E20	2o			Pu Pa	<0,001 0,013	Pu Pa	<0,001 <0,001			Pu Pa	<0,001 0,018
	3o			Pu	<0,001	Pu	<0,001			Pu	<0,001
	4o					Pu	0,015			Pu	0,027
	5o					Pu	<0,001				
E100	2o			Pu	<0,001	Pu	<0,001	Pu	0,006	Pu Pa	<0,001 <0,001
	3o			Pu	0,017	Pu	<0,001			Pu Pa	<0,001 <0,001
	4o			Pu	0,014	Pu	<0,001			Pu Pa	<0,001 <0,001
	5o									Pu Pa	<0,001 <0,001
	6o									Pu Pa	<0,001 <0,001
AL	2o	Pa	0,003	Pu	<0,001	Pu	<0,001	Pu Pa	<0,001 0,015	Pu Pa	<0,001 <0,001
	3o			Pu	<0,001	Pu	0,004	Pu	<0,001	Pu	<0,001
	4o							Pu	0,049	Pu	0,001

E10, E20 e E100 – Escalas 10, 20 e 100
AL – Itens aleatórios
P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior
Pu – Escola Pública
Pa – Escola Privada
p – Nível de confiança

A partir destes dados pode-se observar que as possíveis mudanças em termos de desenvolvimento da estimativa ocorrem em diferentes etapas para cada escola.

Observa-se que, no caso da escola pública, em geral, os três primeiros anos não apresentam diferenças estatísticas, seguido de um grupo intermediário, cujas médias de precisão ora assemelham-se ao grupo de menor ano escolar, ora ao grupo de alunos de estágio escolar mais avançado. Os alunos do Proeja não demonstraram um padrão consistente, tendo a média de PR desse grupo não se distinguindo das demais em grande parte das análises. Na escola particular, de maneira geral, observou-se diferença estatística entre os três primeiros anos analisados quando comparados aos demais. Estes últimos não apresentaram diferenças estatísticas entre si. Para ambas as escolas, observa-se que, para a escala 100, os alunos do ensino superior foram significativamente mais precisos que todos os demais estudantes da amostra em todas as escalas, o que, surpreendentemente, não ocorreu para itens aleatórios, exceto se comparado ao 2º ano.

A fim de categorizar os dados apresentados nas Tabelas 2 e 3 e, assim, destacar os diferentes níveis de desenvolvimento de estimativa numérica de quantidades, foram verificadas as semelhanças em termos de precisão dentre os grupos de alunos dos diferentes níveis escolares. Com a substancial diferença apresentada entre os resultados obtidos pelos alunos da escola pública em comparação aos da escola particular, fez-se necessário distinguir diferentes grupos para cada escala apresentada. A partir desse agrupamento, verificou-se que é possível distinguir diferentes níveis de desenvolvimento da estimativa numérica de quantidade nas diferentes escalas, entretanto, alguns grupos (anos escolares) podem ser categorizados em dois ou mais níveis, de acordo com as semelhanças e diferenças estatísticas encontradas, em termos de precisão. Chamar-se-ão estes grupos de *Grupos de Transição* (GT).

Os níveis foram assim delimitados a partir das diferenças estatísticas apresentadas na Tabela 3. Ou seja, o nível 1 (N1) é representado pelos anos escolares que não obtiveram diferenças estatísticas a partir do 2º ano até o ano que apresenta diferenças quando comparado a este. O nível 2 (N2) é composto pelos anos escolares que diferem do nível 1, mas não entre si. Da mesma maneira, distinguem-se os níveis 3 e 4 (N3 e N4), quando houver, compostos pelos anos escolares que diferem dos do N1 e do N2, mas que são iguais entre si, e assim sucessivamente. Em todos os níveis encontrados, pode haver GT que pertençam a mais de um grupo, tendo em vista as diferenças e as semelhanças de precisão quando comparados aos demais anos que pertencem ao grupo. Para facilitar o reconhecimento dos grupos por ano escolar, optou-se por apresentá-los na Tabela 4, destacando os GT em grifo amarelo.

Tabela 4 - Categorização dos anos escolares em Níveis por média de Precisão Relativa nas diferentes escolas e escalas

Escala	Nível	Escola									
		Pública				Privada					
E10	N1	2º	3º	4º		2º	3º	4º	P		
	N2	4º	5º	P		3º	4º	5º	6º	P	S
	N3	5º	6º	P	S						
E20	N1	2º	3º	4º	P	2º	3º	4º	P		
	N2	4º	5º	P		3º	4º	5º	6º	P	S
	N3	6º	P	S							
E100	N1	2º	3º	4º	P	2º	3º	4º	5º	6º	P
	N2	5º	6º	P		S					
	N3	S									
AL	N1	2º	3º	4º		2º	4º	5º	6º		
	N2	4º	5º	6º		3º	4º	5º	6º	P	S
	N3	5º	6º	P	S						

E10, E20 e E100 – Escalas 10, 20 e 100
AL – Itens aleatórios
P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior
N1, N2 e N3 – Níveis 1, 2 e 3

Pôde-se observar que, na escola pública, originaram-se 3 diferentes níveis, enquanto que, na escola particular, apenas 2. Em todos os casos, os alunos do ensino médio na modalidade Proeja não demonstraram padrão de regularidade, isso pode ser devido ao pequeno número de participantes ou à grande diversidade em termos de idade e de vivências dos participantes desta etapa escolar. Em geral, na escola particular, os adultos tiveram suas precisões comparadas às das crianças já no 3º ano. Porém, na escola pública, somente o 6º ano teve o seu grau de precisão comparável aos estudantes do ensino superior. Ou seja, o primeiro nível foi composto pelos três primeiros anos escolares que participaram da pesquisa, sendo que o 6º ano integrou o último nível em todos os casos, exceto para E100, em que o grupo de estudantes do ensino superior foi o único grupo integrante, para ambas as escolas.

Essas constatações nos fazem pensar que AL é igualmente impreciso para todas as pessoas, sejam crianças ou adultas. Apenas na escala 100 pôde-se verificar forte distinção entre as médias e isso pode estar relacionado aos maiores conhecimentos de proporção e de relações aritméticas dos adultos em comparação às crianças. Essa conclusão é ainda fortalecida pela incompatibilidade das médias obtidas pelos adultos do ensino superior (S) com os alunos adultos do ensino médio (P), que muitas vezes tiveram seu desempenho comparado aos anos iniciais do ensino fundamental.

3.4.1 Comparação entre as variáveis Máximo Conhecido (MC)/Máximo Desconhecido (MD) nos diferentes Anos e Escalas

Fixando escala 10 (E10) e realizando a interação com MD/MC, teve-se que a interação MD/MC com ano é significativa para a escola pública (p=0,007, média MD=0,0409; média MC=0,0359), mas não para a escola particular (p=0,110, média MD=0,0522; média MC=0,0589). Em E20, a interação MD/MC e ano não é significativa nem para a escola pública (p=0,615; média MD=0,0706; média MC=0,0674), nem para a escola particular (p=0,360; media MD=0,0539; média MC=0,0398). Quando analisada a E100, obteve-se significativa a interação MD/MC com ano (p<0,001), para ambas as escolas: pública (média MD=0,1033; média MC=0 ,0767) e particular (média MD=0,0790; média MC=0 ,0448). Consideraram-se apenas as médias apresentadas nos diferentes anos para quando o máximo é conhecido ou não, no caso da escala 100, tendo em vista ser essa interação significativa em ambas as escolas. Esses dados são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Médias de Precisão Relativa para Máximo Desconhecido (MD) e Máximo Conhecido (MC) por escola e ano escolar na Escala 100

Ano	Escola Pública		Escola Privada	
	MD	MC	MD	MC
2º	0,1465	0,1369	0,0936	0,0603
3º	0,1172	0,1181	0,0851	0,0523
4º	0,1406	0,088	0,0888	0,0374
5º	0,1167	0,0519	0,0815	0,0371
6º	0,0896	0,0511	0,0912	0,036
P	0,0756	0,0676	0,0756	0,0676
S	0,0369	0,0232	0,0369	0,0232

P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior
MD – Máximo Desconhecido
MC – Máximo Conhecido

Neste caso, mais uma vez, foram encontradas diferenças substanciais entre a precisão das escolas pública e particular, em se tratando de desconhecer o máximo de pontos da matriz apresentada. Na escola particular, obtiveram-se médias não diferentes em todos os anos, inclusive no Proeja, e todos os anos diferiram-se da média de ensino superior, inclusive o próprio grupo de estudantes do Proeja, com representantes adultos na totalidade da sua amostra. Ou seja, não conhecendo o máximo de pontos, o ensino superior é mais preciso que todos os demais sujeitos da escola particular. Muito diferente ocorre na escola pública, na qual o máximo de pontos desconhecido influencia muito a precisão dos estudantes por ano escolar. Neste caso, 2º, 3º e 4º anos têm médias não diferentes, enquanto que 5º e 6º anos têm médias diferentes, sendo que o 6º ano é diferente de todos os anos. Para este caso (MD), não foi encontrado em que momento as crianças estimam tal como os adultos.

Sobre a escola pública, pôde-se dizer que conhecer o máximo de pontos da matriz influencia na precisão dos alunos dos anos escolares, nas diferentes escolas. Tanto para a escola pública quanto para a particular, os resultados foram bastante semelhantes, sendo 2º e 3º ano com médias não diferentes e 4º, 5º e 6º anos também. O 6º ano teve sua média diferente da média de precisão do ensino superior apenas na escola pública, indicando que na escola particular o 6º ano teria precisão estatisticamente igual aos adultos, ao contrário do que acontece no 5º ano. Na Tabela 6 foram realizadas a categorização por grupos, de acordo com a precisão apresentada pelos estudantes.

Tabela 6 - Categorização dos anos escolares em Níveis por média de Precisão Relativa para matrizes com Máximo Conhecido (MC) ou Máximo Desconhecido (MD) em cada escola

MD/MC	Nível	Escola								
		Pública			Privada					
MD	N1	2o	3o	4o	2o	3o	4o	5o	6o	P
	N2	3o	4o	5o	S					
	N3	6o	P							
	N4	S								
MC	N1	2o	3o	P	2o	3o	P			
	N2	3o	4o		4o	5o	6o			
	N3	5o	6o		S					
	N4	S								

P – Alunos do Proeja / S – Alunos do ensino superior
MD – Máximo Desconhecido / MC – Máximo Conhecido

Em amarelo, na Tabela 6, encontram-se destacados os Grupos de Transição. Observa-se que os grupos constituídos a partir da variável MC/MD são bastante distintos, em especial na escola privada. Os alunos do ensino superior foram significativamente mais precisos que os demais estudantes em ambas as escolas, independentemente de conhecer ou não o máximo de pontos da matriz. Embora não obtendo padrões mais precisos de agrupamento, os dados da Tabela 6 mostram que, também neste caso, os alunos com maior escolarização são mais precisos, indicando uma possível construção da habilidade de realizar estimativas de quantidades, mesmo quando não há mais informações sobre a matriz de referência.

3.4.2 Comparação entre as variáveis Aglomerado (A)/Espaçado (E) nos diferentes Anos e Escalas

Fixando a Escala 10 e realizando a interação entre A/E, obteve-se que a interação entre A/E e ano não é significativa para a escola pública (p=0,518, média A=0,0618; média E=0,0761), mas é significativa para a particular (p=0,015, média A=0,0428; média E=0,0340). Em E20, a interação A/E e ano não é significativa nem para a escola pública (p=0,318, média A=0,0618; média E=0,0761), nem para a particular (p=0,064; media A=0,0380; média E=0,0560. Analisada a E100, obteve-se a interação A/E e ano significativa (p=0,017) para a escola pública (média A=0,0731; média E=0,1072), mas não significativa para a particular (p=0,487; média A=0,0438; média E=0,0799). Desconsidera-se a interação significativa obtida na escala 10, levando em conta que itens aglomerados ou espaçados em uma escala pequena podem não fazer sentido. As médias apresentadas nos diferentes anos para itens aglomerados ou espaçados, na escala 100, são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 – Médias de Precisão Relativa para itens Aglomerados (A)/Espaçados (E) por ano escolar e escola na Escala 100

Ano	Escola Pública		Escola Privada	
	A	E	A	E
2º	0,1319	0,1514	0,0626	0,0913
3º	0,1049	0,1304	0,051	0,0866
4º	0,0974	0,1328	0,0466	0,0795
5º	0,0671	0,1023	0,0406	0,0779
6º	0,0474	0,0936	0,0429	0,0838
P	0,0505	0,0926	0,0505	0,0925
S	0,0128	0,0474	0,0128	0,0474

P – Alunos do Proeja; S – Alunos do ensino superior; A – Itens Aglomerados; E – Itens Espaçados

Na escala 100, na escola pública, obteve-se um grupo de estudantes do 2º ao 4º ano com médias estatisticamente não diferentes para itens aglomerados e espaçados. O 5º ano diferiu sua precisão do 6º ano para itens aglomerados, mas não para espaçados e a precisão do 6º ano diferiu significativamente da dos estudantes do ensino superior, em ambas as situações. Os grupos formados por nível de precisão de estimativas, para esses estudantes, são descritos na Tabela 8.

Tabela 8 - Categorização dos anos escolares por Níveis de média de Precisão Relativa para itens Aglomerados (A) e Espaçados (E) na escola pública e na Escala 100

Escala	Nível	Escola Pública					
		Aglomerados			Espaçados		
Escala 100	N1	2o	3o	4o	2o	3o	4o
	N2	5o	P		5o	6o	P
	N3	6o			S		
	N4	S					

P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior
N1, N2, N3 e N4 – Níveis 1, 2, 3 e 4

Nesta categorização é possível perceber semelhanças entre os grupos formados para as diferentes densidades, exceto pela superioridade da precisão apresentada pelos alunos do 6º ano, no caso dos itens aglomerados e dos alunos do ensino superior, em ambas as formas de apresentação dos pontos. Entretanto, essas conclusões não puderam ser confirmadas quando comparados os alunos da escola privada.

3.4.3 Comparação entre as variáveis Aglomerado (A)/Espaçado (E) e Máximo Conhecido (MC)/Máximo Desconhecido (MD) nos diferentes Anos e Escalas

Fixando as escalas 10 e 20 e realizando a interação entre ano, A/E, MD/MC, obteve-se que essa interação não é significativa em nenhuma das escolas: nem na pública ($p=0,369$; $p=0,932$), nem na escola particular ($p=0,347$; $p=0,669$). Quando analisada a escala 100, obteve-se a interação tripla MD/MC, A/E e ano significativa em ambas as escolas, com $p<0,001$. As médias apresentadas nos diferentes anos e escalas, quando o máximo é conhecido ou não, nas distribuições aglomerada ou espaçada, são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 - Média de Precisão Relativa na interação entre as variáveis: Ano, A/E e MC/MD, nos diferentes anos, escolas e escalas

Ano	Escala	Máximo Desconhecido				Máximo Conhecido			
		Pública		Privada		Pública		Privada	
		E	A	E	A	E	A	E	A
2o	E10	,0693	,0898	,0598	,0504	,0864	,1014	,0662	,0583
	E20	,1188	,1157	,0716	,0691	,1275	,1341	,0660	,0443
	E100	,1602	,1327	,1079	,0795	,1426	,1312	,0748	,0458
3o	E10	,0587	,0870	,0406	,0510	,1054	,1303	,0604	,0442
	E20	,1051	,0916	,0632	,0458	,1025	,0809	,0516	,0247
	E100	,1361	,0984	,1057	,0648	,1246	,1115	,0675	,0371
4o	E10	,0522	,0690	,0356	,0500	,1057	,0922	,0295	,0637
	E20	,0874	,0757	,0635	,0580	,0904	,0860	,0425	,0287
	E100	,1507	,1309	,1111	,0666	,1143	,0621	,0480	,0268
5o	E10	,0422	,0481	,0335	,0476	,0368	,0410	,0285	,0283
	E20	,0642	,0553	,0559	,0383	,0499	,0340	,0455	,0248
	E100	,1395	,0938	,1050	,0581	,0640	,0399	,0512	,0230
6o	E10	,0339	,0470	,0294	,0407	,0235	,0250	,0204	,0312
	E20	,0445	,0389	,0508	,0477	,0326	,0232	,0286	,0212
	E100	,1210	,0582	,1213	,0607	,0658	,0365	,0467	,0252
P	E10	,0190	,0431	,0190	,0431	,0277	,0347	,0257	,0327
	E20	,0698	,0523	,0698	,0523	,0784	,0504	,0784	,0504
	E100	,1048	,0466	,1047	,0466	,0807	,0545	,0806	,0544
S	E10	,0200	,0520	,0200	,0520	,0080	,0060	,0080	,0060
	E20	,0505	,0176	,0505	,0176	,0440	,0100	,0440	,0100
	E100	,0550	,0192	,0550	,0192	,0400	,0063	,0400	,0063

E10, E20 e E100 – Escalas 10, 20 e 100
P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior
A – Itens Aglomerados
E – Itens Espaçados

De modo geral, as médias de PR dos alunos da escola privada são menores que a dos estudantes da escola pública, o que significa que são mais precisos. Mas, em ambas as escolas, a precisão tende a ser melhor nos estudantes mais velhos, independentemente das condições apresentadas. As diferenças significativas encontradas entre a precisão apresentada pelos estudantes da escola pública e da escola particular, obtidas na interação tripla para escala 100, estão destacadas na Tabela 10.

Tabela 10 - Diferenças significativas entre as médias de Precisão Relativa nos ano escolares, fixando: Aglomerados(A)/Espaçados(E), Máximo Conhecido(MC)/Máximo Desconhecido(MD) e Escola

A/E	MC/MD	ANO		Pública (p)	Privada (p)
A	MD	2º	5º	0,006	
			6º	<0,001	
			P	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
		3º	6º	0,003	
			P	0,001	
			S	<0,001	<0,001
		4º	5º	0,022	
			6º	<0,001	
			P	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
		5º	6º	<0,001	
			P	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
		6º	S	<0,001	<0,001
	MC	2º	4º	0,002	
			5º	<0,001	0,001
			6º	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
		3º	5º	<0,001	
			6º	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
		4º	S	<0,001	<0,001
		5º	S	<0,001	<0,001
		6º	S	0,001	0,001
E	MD	2º	6º	0,002	
			P	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
		3º	P	0,052	
			S	<0,001	<0,001
		4º	P	0,002	
			S	<0,001	<0,001
		5º	P	0,003	
			S	<0,001	<0,001
		6	S	<0,001	<0,001
		P	2º	<0,001	
			S	<0,001	<0,001
	MC	2º	4º		0,006
			5º	<0,001	0,011
			6º	<0,001	0,001
			S	<0,001	<0,001
		3º	5º	0,002	
			6º	0,008	0,043
			S	<0,001	0,009
		4º	5º	0,011	
			6º	0,039	
			S	<0,001	
		5º	S	0,008	

E10, E20 e E100 – Escalas 10, 20 e 100; MD – Máximo Desconhecido; MC – Máximo Conhecido; P – Alunos do Proeja; S – Alunos do ensino superior; p – Nível de confiança

Finalmente, a interação tripla traz informações complementares sobre as situações particulares entre as combinações dos problemas apresentados. Fazendo uma análise do tipo específico de problema, por ano escolar, em cada escola (Tabela 10), obtém-se um padrão geral de desempenho em estimativa de quantidades. Embora diversos padrões possam ser observados na escola pública, é interessante destacar que, na escola particular ocorre uma relação (que, inclusive, se repete na pública): para itens espaçados e com o máximo de pontos conhecido o 6º ano não é diferente em precisão dos alunos do ensino superior, indicando que os adultos escolarizados são sempre muito mais precisos na maioria das situações. A tabela 11 indica os grupos categorizados.

Tabela 11 - Categorização dos anos escolares por Níveis de média de Precisão Relativa, fixando-se as variáveis: MD/MC, A/E e Escola

Escola	MC/MD	A/E	N1	N2	N3	N4
Pu	MD	A	2 3 4	3 5	6 P	S
		E	2 3 4 5	3 4 5 6	6 P	S
	MC	A	2 3 P	3 4 P	4 5 6 P	S
		E	2 3 P	3 4 P	5 6 P	6 P S
Pa	MD	A	2 3 4 5 6 P	S		
		E	2 3 4 5 6 P	S		
	MC	A	2 3 4 6 P	3 4 5 6 P	S	
		E	2 3 P	3 4 5 P	4 5 6 P S	

Pu – Alunos da Escola Pública
Pa – Alunos da Escola Privada
MD – Máximo Desconhecido
MC – Máximo Conhecido
A – Itens Aglomerados
E – Itens Espaçados
P – Alunos do Proeja
S – Alunos do ensino superior
N1, N2, N3 e N4 – Níveis 1, 2, 3 e 4

Os dados categorizados indicam que as crianças só atingiram o grau de precisão apresentados pelos adultos do ensino superior, em ambas as escolas, quando os itens estão apresentados de maneira espaçada na matriz de máximo conhecido. Com os resultados até então encontrados, considera-se importante realizar uma comparação quádrupla entre as variáveis A/E, MC/MD por ano e por escala. Neste caso, somente na escala 100 essa interação foi significativa e, em ambas as escolas o grau de precisão das crianças só atingiu o dos adultos do ensino superior na escala 100, itens espaçados e máximo conhecido na escola particular a partir do 4º ano.

3.5 DISCUSSÃO

Este estudo produziu um conjunto muito grande de dados que procuram responder às perguntas que originaram o estudo, comprovando ou não as hipóteses iniciais. Como resultado geral, observou-se que há um aumento qualitativo em termos de precisão em estimativa numérica, conforme avançam os anos escolares, tal como o previsto. Entretanto, os diferentes níveis destacados nas diferentes situações apresentadas em cada tarefa do teste apresentaram padrões distintos, em especial, nas duas escolas. Neste caso, mais grupos foram gerados pelos estudantes da escola pública, sendo que grupos intermediários constantemente faziam parte de grupos de transição que poderiam pertencer a mais de um grupo ao mesmo tempo, indicando que, naquele ano escolar, os alunos ainda estivessem em uma etapa de transição de nível.

Observou-se uma diferença estatisticamente consistente entre os resultados obtidos na precisão relativa dos estudantes das diferentes escolas: pública e privada. Sendo que os estudantes da escola privada tiveram estimativas mais precisas que os estudantes da escola pública, em todas as situações testadas. Este fato revela uma importante constatação de que as diferenças culturais representadas pelas diferentes escolas podem apresentar mais uma evidência de que a habilidade em estimativa numérica depende do contexto e que pode ser influenciada por fatores externos, não sendo considerada uma habilidade unicamente inata. Esta constatação vem ao encontro dos resultados obtidos em estudos realizados em diferentes culturas, que evidenciaram que fatores culturais e linguísticos podem permitir que as crianças sejam mais ou menos hábeis em realizar estimativas (LASKI & YU, 2014; XU et al., 2013), contradizendo a hipótese levantada por Siegler e Opfer (2003), de que a estimativa numérica é uma medida pura e que independe de conhecimentos externos.

Diferentemente do que ocorreu na escola privada, em que, em geral, apenas dois grupos foram categorizados, com poucos grupos de transição entre os níveis, na escola pública, ao menos três grupos foram distinguidos e, muitas vezes, compostos por grupos de transição. Entretanto, em ambas as escolas se destaca a superioridade da precisão apresentada pelos alunos do ensino superior. Os dados também indicaram que a precisão dos estudantes tende a aumentar em paralelo ao ano escolar.

Exclui-se a possibilidade de um agrupamento mais específico dos adultos do Proeja, pois eles apresentaram precisão variável, poucas vezes diferenciando-se dos demais anos escolares, mas muitas vezes diferenciando-se dos também adultos, alunos do ensino superior, tal como ocorreu na comparação de desempenho desses estudantes com as crianças. Esse resultado sugere que as diferenças apresentadas pelos grupos de alunos adultos possam refletir diferenças relacionadas à escolaridade e à familiaridade com a matemática. Essa diferença encontrada entre os adultos (Proeja e Superior) pode ser uma comprovação consistente de que o desenvolvimento da estimativa numérica é contínuo, podendo ser desenvolvido e aprimorado por toda a vida, a partir de novas experiências, tal como sugerem os teóricos construtivistas, acerca do desenvolvimento da aprendizagem humana, e como foi desenvolvida a discussão teórica deste estudo.

Foi possível classificar o desempenho em estimativa numérica de quantidades de três a quatro diferentes níveis para os estudantes da escola pública e de dois a três níveis para os estudantes de escola particular. O primeiro nível foi sempre composto do 2^o, 3^o e 4^o anos e o último nível, em geral, os estudantes do ensino superior encontravam-se sozinhos. Como o esperado, em todas as escalas, a variável ano teve representação significativa, indicando que a ENQ é diferente para os anos escolares, corroborando os achados das pesquisas anteriores.

Com isso, conclui-se que a estimativa numérica é desenvolvida em crianças e adultos, passando por diferentes níveis de precisão, independente da escola, escala, ter o máximo de pontos da matriz conhecido ou não, ou ter os pontos apresentados de forma aglomerada, espaçada ou aleatória. Ainda é necessário responder sobre quando as crianças estimam com precisão semelhante aos adultos. Para isso, considerar-se-á apenas a comparação com os estudantes do ensino superior, tendo em vista a irregularidade, em termos de categorização, apresentada pelos alunos do Proeja, que pertenceram aos distintos grupos de categorias.

Quando comparadas as diferentes escalas, observou-se que os níveis estruturados para escala 10 e itens aleatórios são os mesmos, sendo que a partir do 5^o ano as crianças estimam como os adultos na escola pública e, a partir do 3^o, na escola particular. Esses dados sugerem que a escala 10 é suficientemente fácil para todos os anos escolares, enquanto que os itens aleatórios apresentaram grau de precisão deficitário para todos. A escala 20 apresentou resultados semelhantes, mas somente na escala 100 os adultos demonstraram superioridade de precisão em relação às crianças. Assim, como já discutido anteriormente sobre representação numérica, Huntley-Fenner (2001) afirmou que, em adultos, pode haver dois tipos de representação: pode ser ou discreta e exata (necessitando de linguagem e culturalmente derivada) ou analógica e aproximada (independente de linguagem e comum a uma série de espécies). Neste caso, o autor indica que as representações numéricas analógicas dos adultos são tais como as das crianças pequenas, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, com uma única exceção: a razão entre o desvio padrão das estimativas diminuiu com a idade. Os resultados de Huntley-Fenner (2001) vieram ao encontro dos achados deste estudo para os estudantes da escola particular, para escalas pequenas. Entretanto, os dados encontrados na escala 100, sugerem que fazer o uso de estratégias mais eficientes e influenciadas por conhecimento de relações numéricas contribui para realizar estimativas mais precisas.

Os dados fornecem evidências de que alguns estudantes não compreendem a dimensão relativa de números maiores que 100. Embora os alunos do 2º e 3º ano conheçam quantidades maiores que 100 e poderiam gerar estimativas corretamente para o número pontos nesta escala, muitos demonstraram dificuldade em realizar padrões comparativos de quantidades até 100, ou a falta de estratégias de realizar estimativas, em especial, para os itens apresentados de forma aleatória. De acordo com os achados de Obersteiner e colaboradores (2014) para crianças da 1ª série, os resultados deste estudo sugerem que as crianças de 2º a 6º ano são mais precisas quando os pontos são apresentados em matriz do que quando eles são apresentados em arranjos aleatórios.

Apesar do vasto apoio empírico, há várias questões em aberto no que diz respeito à eficácia do uso de representações externas, especificamente sobre o seu apoio à aritmética, já que, antes de os alunos serem capazes de fazer uso de tais representações, eles precisam reconhecer sua estrutura. Para utilizar a matriz como referência, as crianças devem reconhecer o número total de pontos e a quantidade de pontos por linha. Compreender esta estrutura pode não ser tão evidente, especialmente para crianças com baixo nível de competências numéricas (OBERSTEINER et al., 2014).

A partir de dados sobre conhecer ou não o máximo da matriz, verificou-se que esta informação só é importante para a precisão das estimativas na escala 100, em que os adultos apresentam precisão superior que os demais anos escolares. Neste caso, mais uma vez são encontradas diferenças substanciais entre a escola pública e a particular, em que conhecer o máximo é um fator que contribui para diferenças no agrupamento dos estudantes da escola particular, gerando, inclusive, um nível a mais de categorização.

Na escala 10, como esperado, os alunos tendem a realizar melhor suas estimativas, gradualmente, em cada ano escolar, em qualquer uma das situações apresentadas (exceto o 3º ano que apresentou média superior ao 2º ano quando o máximo era conhecido). Entretanto, a precisão só é realmente melhorada, no caso de conhecer ou não o máximo de pontos, na escala 10, no 5º e no 6º ano, comparados aos alunos menores, sendo que estes alunos tendem a utilizar melhor a informação sobre a quantidade máxima de pontos. Surpreendentemente, os alunos do 3º ano têm suas estimativas significativamente menores com esta informação. Observou-se um salto qualitativo na realização de estimativas, a partir do 5º ano escolar.

Na escala 20, pôde-se observar que a precisão relativa dos alunos da escola particular é melhor do que a dos alunos da escola pública do 2º ao 5º ano, mas não no 6º ano, fato que também gera surpresa. Mas essa diferença ainda não chega a ser significativa. Pode-se considerar que, analisando as escolas separadamente, uma diferença significativa de precisão só ocorra do 2º para o 5º e 6º ano. Ou seja, na escala 20, as estimativas dos alunos mais velhos já são bem mais precisas que as dos mais novos, mas ainda é preciso verificar se essa diferença acompanha o desempenho apresentado pelos adultos na mesma tarefa.

Considera-se que as respostas mais relevantes sejam buscadas dentro da escala 100, tendo em vista que ela possui uma variedade maior de tarefas e de números a serem estimados, e, mesmo assim, encontra-se em uma faixa numérica com a qual a grande maioria dos sujeitos pesquisados está familiarizada. Então, conclui-se que conhecer o máximo de pontos da matriz é uma informação importante para realizar estimativas em grandes escalas, o que leva a supor que relações matemáticas que exigem conhecer o máximo de pontos são utilizadas em todos os níveis escolares. Entretanto, para todos os casos, os adultos mostraram-se superiores em termos de precisão.

Realizando a interação entre as variáveis de formato de apresentação, aglomerado ou espaçado, com o ano escolar, obteve-se resultado positivo apenas na escala 100 e para os estudantes de escola pública. Em especial, para escalas pequenas, faz pouco sentido falar em itens aglomerados e espaçados, tendo em vista o tamanho da matriz e as quantidades apresentadas. Sendo assim, considera-se que esses resultados não sejam úteis na compreensão do desempenho das precisões com estas variáveis. Ou seja, a variabilidade de resultados encontrados para itens aglomerados e espaçados pode ser explicada pela pequena alteração que esta modificação acomete, tendo em vista ser uma pequena quantidade e, de fato, mesmo que os itens não estejam todos lado-a-lado, sem espaços vazios, todos os pontos acabam ficando de certa forma aglomerados. Neste caso, os grupos de estudantes tiveram precisão estatisticamente semelhante para itens aglomerados e espaçados. Na escola pública, a escala 100 gerou níveis de precisão que distinguiram o 6º ano e os alunos do ensino superior como os mais precisos para itens aglomerados.

Com os resultados até então encontrados, considera-se importante realizar uma comparação quádrupla entre as variáveis de densidade (A/E) e de conhecimento do máximo da matriz (MC/MD) por ano e por escala. Neste caso, somente na escala 100 essa interação foi significativa, em ambas as escolas, e o grau de precisão das crianças só atingiu o dos adultos do ensino superior na escala 100, itens espaçados e máximo conhecido na escola particular, a partir do 4º ano. As distribuições das estimativas das crianças foram distintas das dos adultos. Os dados sugerem que a representação das crianças do número analógico é qualitativamente distinta das dos adultos.

Algumas pesquisam atribuem o fato de crianças menores realizarem estimativas com menor precisão, quando comparadas às de maior idade, à progressiva mudança das representações escalares, pressupondo que, em determinado momento esta representação chegue à representação do adulto (EBERSBACH et al., 2008; NUERK et al., 2004). Na pesquisa de Siegler e Opfer (2003), os dados indicaram que cada criança possui múltiplas representações numéricas e que o aumento da idade e da experiência numérica e o contexto numérico influenciam na escolha da representação. Em contrapartida, Dehaene e colaboradores (2008) mostraram que a representação linear pode não acontecer, mesmo com os adultos, dependendo do tipo de estímulo apresentado.

Considerando os dados, é provável que as estimativas das crianças sigam um padrão semelhante às dos adultos. No entanto, uma vez que as crianças têm menos estratégias de estimativa (ou as utilizem com menor eficiência), espera-se que as suas estimativas sejam geralmente mais variáveis do que os adultos, portanto, diferentes. Embora todas as crianças e os adultos participantes já tenham começado a instrução formal em matemática, os resultados apresentados mostram que a acurácia em estimativa numérica ainda está se desenvolvendo durante todo este tempo.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo central desse estudo foi identificar possíveis níveis de precisão de estimativa numérica de quantidades em estudantes do 2º ao 6º ano escolar, verificando em que ponto desse desenvolvimento as crianças adquirem o grau de precisão semelhante ao dos adultos. Para alcançar esses objetivos, foram propostos quatro questionamentos norteadores: 1) como se dá o desenvolvimento da estimativa numérica em crianças do 2º ao 6º ano escolar em diferentes situações de apresentação dos estímulos?; 2) seria este desenvolvimento progressivo e demarcado por grupos de estudantes de mesmos anos escolares?; 3) de que maneira o modo de apresentação dos estímulos pode influenciar na precisão das estimativas nos diferentes anos escolares? e 4) em que momento e para quais tarefas a precisão na estimativa das crianças é comparável a dos adultos?

Para responder ao primeiro questionamento, a hipótese principal era de que seriam ampliados os resultados já conhecidos a respeito das crianças mais velhas realizarem estimativas com maior precisão quando comparadas às mais novas, em qualquer uma das diferentes situações apresentadas. Ou seja, a habilidade de realizar estimativas seria ampliada com o passar da idade e da experiência. Essa hipótese foi confirmada, já que, para todos os diferentes modos de apresentação dos estímulos, os sujeitos mais velhos foram mais precisos que os mais novos, sendo esse desenvolvimento demonstrado por níveis de faixa etária semelhantes que foram categorizados em diferentes níveis (excetuando-se os adultos do Proeja).

Para o segundo questionamento, era tido como hipótese que o desenvolvimento da estimativa numérica de quantidades é progressivo e que envolve níveis de desenvolvimento semelhantes para a mesma faixa etária ou ano escolar. A hipótese apresentada foi confirmada, já que foi possível estabelecer grupos de anos escolares que apresentaram precisão semelhante entre si e grupos de precisão que diferem destes e diferem por escola. Também foram observados alguns grupos de transição, pertencentes a mais de um grupo ao mesmo tempo. Esses resultados indicaram que a estimativa numérica tem seu desenvolvimento progressivo, mas diferente para cada situação e escola. Além disso, os níveis são distintos de acordo com as condições apresentadas e com as características do grupo. Por exemplo, para uma escala menor, as crianças tornaram-se mais precisas mais cedo do que em escalas maiores (em comparação com a precisão dos adultos). Além disso, em situações de maior dificuldade, as crianças do 6º ano e mesmo os adultos do ensino médio, não tiveram suas estimativas comparáveis às dos estudantes do ensino superior, contrariamente ao que se esperava. Ou seja, o desenvolvimento é progressivo, mas distinto para cada dificuldade apresentada nos estímulos.

Para a terceira questão, discute-se a maneira com a qual o modo de apresentação das quantidades (diferentes escalas, diferentes densidades, com ou sem matriz de referência) poderia influenciar na precisão das estimativas nos diferentes anos escolares. Quanto a isso, as hipóteses do estudo consideravam apenas os níveis de dificuldade que se julgava existir em escalas maiores. Entretanto, o que se encontrou foi que todas as variáveis envolvidas mostraram exercer um papel significativo nas estimativas dos diferentes níveis escolares, em especial para escala 100 e para itens aleatórios.

Por último, a quarta questão discutia a hipótese de que a estimativa das crianças passasse a ser comparável à estimativa dos adultos a partir do sexto ano, quando se esperava um padrão formal de desenvolvimento para esta habilidade. Essa hipótese foi levantada a partir de indícios trazidos pela literatura da área, considerando os estudos de estimativa na reta numérica. Ainda mais adiante, era esperado que as estimativas dos adultos, independentemente da escolaridade, fossem semelhantes. Entretanto, o que se observou é que a capacidade de realizar estimativas desempenha um papel no raciocínio quantitativo por toda a vida, mesmo depois que a capacidade de representar números exatos é atingida. Quanto mais velhos os alunos, mais precisos eles são em suas estimativas, independente da escala. Entretanto, em que momento as crianças passam a realizar discriminações quantitativas tal como os adultos e se a trajetória do desenvolvimento do sistema de aproximação continua na idade adulta, ainda não se sabe, tendo em vista que, mesmo os adultos apresentaram precisão distinta, sendo os alunos do ensino superior mais preciso na grande maioria dos casos.

Os resultados aqui apontados indicaram que a estimativa numérica de quantidades é desenvolvida progressivamente. Esse progresso ocorre ao longo da vida, podendo estender-se, inclusive, para a idade adulta. As diferenças substanciais entre estudantes adultos do ensino médio e do ensino superior também levam a crer que estas habilidades possam ser desenvolvidas não só pela idade, mas também pelas experiências possibilitadas pela escolaridade, indicando que não apenas fatores orgânicos estão relacionados a esta habilidade, mas que é um processo de construção influenciado, também, por fatores externos ao sujeito.

Além das questões e suas respectivas hipóteses, foram encontrados, também, considerável diferença entre a precisão obtida pelos alunos da escola pública e privada nas diferentes tarefas solicitadas, indicando que fatores como o nível socioeconômico e as experiências culturais, por exemplo, podem interferir nesta habilidade. A diferença de conteúdos trabalhados e conhecimentos matemáticos também podem ter influenciado todos os resultados, comparando-se as escolas. Essas são evidências complementares que auxiliam na constatação de que estimativa numérica de quantidades não é uma medida pura e pode ser influenciada por outras habilidades. Pode-se dizer, neste caso, que há diferentes níveis de desenvolvimento da habilidade de estimativa de quantidades, mas que ocorrem em anos distintos nas diferentes escolas. Os resultados sugerem que essas diferenças se relacionam mais com escolarização do que com idade.

Esta abordagem transversal permitiu determinar que a acurácia em estimativa numérica de quantidades se desenvolve nas etapas escolares testadas. No entanto, é importante destacar que este tipo de delineamento transversal pode ter sido influenciado por uma tendência do grupo e/ou pela trajetória de desenvolvimento de cada criança, desconsiderando mudanças descontínuas na precisão em estimativa numérica, que somente seriam reveladas em uma análise longitudinal de seu desempenho individual ao longo do tempo.

Outra importante limitação do estudo foi a falta de testagem dos avanços relacionados à velocidade na realização de estimativas. Pode-se postular que as crianças mais jovens devem ter uma maior fluência com quantidades não simbólicas. Em contraste, os significados dos números simbólicos precisam ser aprendidos. Ou seja, as crianças mais jovens têm fortes representações de número não simbólicas, a partir das quais representações simbólicas adquirem seu significado. Dessa forma, crianças mais novas poderiam realizar estimativas mais rapidamente por utilizarem quantidades não simbólicas no seu cotidiano escolar. Por outro lado, as quantidades simbólicas e as relações numéricas e operações numéricas de quantidades não simbólica também são fatores que agilizam o processo de estimar. Sobre estas afirmações, não se pôde concluir.

Para os alunos mais novos, também se deve considerar os erros de registro das quantidades, a partir de confusões sobre a escrita simbólica dos números e numerais, o que pode, inclusive, ser representado pelas quantidades representadas por números maiores que o dobro da matriz (que não foram consideradas neste estudo). Além disso, erros de estimativa podem ter sido ocasionados, no caso em que a criança apostasse em um valor para o máximo da matriz que não o correto, quando essa informação era desconhecida.

Neste estudo verificou-se como se desenvolve a habilidade de realizar estimativas em crianças e comparou-se com o desempenho de adultos. Já é sabido, por estudos anteriores, que esta habilidade é mais precisa nas crianças mais velhas do que em crianças mais novas, mas não era clara na literatura a existência de diferentes níveis de desenvolvimento na compreensão da estimativa numérica, tal como foi verificada esta habilidade em um estudo transversal com crianças do 2º ao 6º ano escolar.

Os resultados deste estudo mostram que a estimativa numérica de quantidades não é bem desenvolvida em crianças e adultos, quando não são dadas condições de implementação de estratégias de matemática simbólica (como operações matemáticas simples), como em condições em que as quantidades são apresentadas aleatoriamente. Também é novidade o achado de que a estimativa de crianças do 5º e 6º ano já pode ser comparada à de estudantes universitários em condições específicas de apresentação dos estímulos. Pode-se afirmar que, até onde se sabe, que antes desse, nenhum estudo aprofundou o tema do desenvolvimento de estimativa numérica de quantidades em crianças desde a fase da alfabetização matemática (2º ano) até o nível de formalização de conceitos matemáticos (6º ano). Também se desconhecem estudos que realizaram a comparação do desempenho dessas crianças com adultos e em diferentes situações de apresentação dos estímulos.

REFERÊNCIAS

ANTELL, S. E.; KEATING, L. E. Perception of Numerical Invariance by Neonates. *Child Dev*, 54, p. 695–701, 1983.

AZEVEDO, M. M. D. O. *A Aprendizagem da Estimação Matemática: um estudo no 2º ciclo*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 1996.

BERCH, D. B. Making Sense of Number Sense. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), p. 333-339, 2005.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation. *Developmental Psychology*, 41, p. 189–201, 2006.

BRYSBAERT, M. Number Recognition in Different Formats. In CAMPBELL, J. I. D. *Handbook of mathematical cognition*. Psychology Press: New York. Cap. 2, p. 23-42, 2005.

CHARD, D. J.; CLARKE, B.; BAKER, S.; OTTERSTEDT, J.; BRAUN, D.; KATZ, R. Using Measures of Number Sense to Screen for Difficulties in Mathematics: Preliminary Findings. *Assessment for Effective Intervention*, 30, p. 3-14, 2005.

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Qual o Papel que a Memória de Trabalho Exerce na Aprendizagem da Matemática? *Bolema. Boletim de Educação Matemática*. V. 26, n.42b, p. 627-647, 2012.

CRITES, T. W. Skilled and Less Skilled Estimators' Strategies for Estimating Discrete Quantities. *Elementary School Journal*, 5, p. 601–619, 1992.

DEHAENE, S. *The Number Sense: how the mind creates mathematics.* New York: Oxford University Press, 1997.

DEHAENE, S.; IZARD, V.; SPELKE, E.; PICA, P. Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures. *Stanislas Science* 320, p. 1217, 2008.

DORNELES, B. V.; DURO, M. L.; SANTOS, S. N.; PISACCO, N. M. T.; SPERAFICO, Y. L. S.; ENRICONE, J. R. B*. Number Estimation in Children Assessed with a No-number-line Estimation Task*. In Biennial EARLI Conference, 16., 2015, Limassol/Cyprus, 2015.

EBERSBACH, M.; LUWEL, K.; FRICK, A.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Relationship Between the Shape of the Mental Number Line and Familiarity with Numbers in 5- to 9-year old Children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99, p.1–17, 2008.

FEIGENSON, L., LIBERTUS, M. E., HALBERDA, J. Links Between the Intuitive Sense of Number and Formal Mathematics Ability. *Child Development Perspectives*, 7 (2), p. 74–79, 2013.

GEARY, D. C.; BAILEY, D. H.; HOARD, M. K. Predicting Mathematical Achievement and Mathematical Learning Disability with a Simple Screening Tool: the number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27, p. 265-279, 2009.

GEBUIS, T.; REYNVOET, B. The Role of Visual Information in Numerosity Estimation*. PLoSOne*, 7(5), 2012.

HALBERDA, J.; FEIGENSON, L. Developmental Change in the Acuity of the “Number Sense": the approximate number system in 3, 4, 5, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44, p. 1457-1465, 2008.

HUNTLEY-FENNER, G. Children's Understanding of Number is Similar to Adults' and Rats': numerical estimation by 5±7-year-olds. *Cognition*, 78, p. B27-B40, 2001.

HURLEY, E. A.; BOYKIN, A. W.; ALLEN, B. A. Communal Versus Individual Learning of a Math-Estimation Task: African American Children and the Culture of Learning Contexts. *The Journal of Psychology*, 139(6), p. 513–527, 2005.

JORDAN, N. C.; KAPLAN, D.; NABORS, L.; LOCUNIAK, M. N. Number Sense Growth in Kindergarten: a longitudinal investigation of children at risk of mathematics difficulties. *Child Development*, 77, p. 153-175, 2006.

LASKI, E.; YU, Q. Number Line Estimation and Mental Addition: examining the potential roles of language and education*. Journal of Experimental Child Psychology*, 117, p. 29–44, 2014.

LEVINE, D. R. Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 350-359, 1982.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L.; ONGHENA, P.; DECORTE, E. Children's strategies for Numerosity Judgment in Square Grids of Different Sizes. *Psychologica Belgica*, 40 (3), p. 183-209, 2000.

MAZZOCCO, M. M. M.; FEIGENSON, L.; HALBERDA, J. Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. *PlosOne*, 6 (9), 2011.

MULDOON, K.; SIMMS, V.; TOWSE, J.; MENZIES, V.; YUE, G. Cross-Cultural Comparisons of 5-Year-Olds' Estimating and Mathematical Ability. *Journal of Cross-Cultural Psychology,* 42(4), p. 669–681, 2011.

NUERK, H. C.; KAUFMANN, L.; ZOPPOTH, S.; WILLMES, K. On the Development of the Mental Number Line: More, Less, or Never Holistic with Increasing Age? *Developmental Psychology*, 40(6), p. 1199–1211, 2004.

OBERSTEINER, A.; REISS, K.; UFER, S.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Do First Graders Make Efficient Use of External Number Representations? The Case of the Twenty-Frame*. Cognition and Instruction*, 32(4), p. 353–373, 2014.

OPFER, J.; SIEGLER, R. Development of Quantitative Thinking. In K. Holyoak and R. Morrison (Eds.), *Oxford Handbook of Thinking and Reasoning*, 2012.

PARK, J.; BRANNON, E. M. Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency*. Psychol Sci*, 24(10), p. 2013-9, 2013.

PIAGET, J. *Intelligence and Affectivity: their relationship during child development.* Oxford, England: Annual Reviews, 1981.

PIAZZA, M.; MECHELLI, A.; PRICE, C. J.; BUTTERWORTH, B. Exact and Approximate Judgments of Visual and Auditory Numerosity: An fMRI study. *Brain Research,* 1106, p. 177–188, 2006.

REYS, B. J. Teaching Computational Estimation: concepts and strategies. In: SHOEN, H. L.; ZWENG, W. J. (Eds.). *Estimation and mental computation*, VA: National Concil of Teachers of Mathematics, p. 31-44, 1986.

ROUSSELLE, L.; NOËL, M. P. The Development of Automatic Numerosity Processing in Preschoolers: evidence for numerosity-perceptual interference. *Developmental Psychology*, 44(2), p. 544-560, 2008.

SCHNEIDER, M.; GRABNER, R. H.; PAETSCH, J. Mental Number Line, Number Line Estimation, and Mathematical Achievement: their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101, p. 359–372, 2009.

SIEGLER, R. S.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development*, 75, p. 428–444, 2004.

SIEGLER, R.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation: a review. In CAMPBELL, J. I. D. *Handbook of Mathematical Cognition*. Psychology Press: New York. Cap. 2, p. 197-212, 2005.

SIEGLER, R. S.; MU, Y. Chinese Children Excel on Novel Mathematics Problems Even Before Elementary School. *Psychological Science*, 19, p. 759-763, 2008.

SIEGLER, R. S.; OPFER, J. E. The Development of Numerical Estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, p. 237-243, 2003.

SPITZER, H. *The Teaching of Arithmetic*. Boston: Houghton Mifflin, 1976.

STARKEY, P.; COOPER, R. G. Perception of Numbers by Human Infants. *Science*, 210, p. 1033–1035, 1980.

VERGNAUD, G. *A Criança, a Matemática e a Realidade*. Curitiba: Ed da UFPR, 2009.

WYNN, K. Addition and Subtraction by Human Infants. *Nature*, 358, p. 749–750, 1992.

XU, F.; SPELKE, E. S. Large Number Discrimination in 6-month-old Infants. *Cognition*, 74, B1–B11, 2000.

XU, F. Numerosity Discrimination in Infants: evidence for two systems of representations. *Cognition*, 89, p. B15–B25, 2003.

XU, X.; CHEN, C.; PAN, M.; LI, N. Development of Numerical Estimation in Chinese Preschool Children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, p. 351–366, 2013.

4 ESTUDO 2 – ESTIMATIVA NUMÉRICA E DESEMPENHO ARITMÉTICO

RESUMO

Há um conjunto de evidências que tem relacionado a habilidade de estimativa numérica ao desempenho matemático. Entretanto, observa-se que os resultados trazidos por estudos desta área são ainda inconsistentes e, muitas vezes, contraditórios. Nesta perspectiva, o presente relacionou a precisão da estimativa numérica em dois testes de desempenho em estimativa numérica: o TENQ e o Teste de Estimativa na Reta Numérica (TERN), de alunos do 5º e 6º ano escolar, de uma escola pública e outra particular de Porto Alegre/RS. Os mesmos alunos tiveram seu desempenho em estimativa comparado ao desempenho em um teste padronizado de aritmética (TDE). O principal objetivo desse estudo foi verificar em qual tarefa de estimativa as crianças apresentam maior precisão e se esses resultados estão relacionados ao desempenho aritmético. Os dados indicam que as crianças realizam estimativas mais precisas quando a tarefa envolve quantidades discretas do que quando precisam estimar os numerais posicionando-os em uma reta numérica, sugerindo que as tarefas requerem diferentes funções cognitivas, mesmo que apresentada moderada correlação entre elas, para escalas numéricas maiores. Quanto ao desempenho aritmético, observou-se que houve correlação de moderada a forte com o desempenho em estimativa, em ambas as tarefas, quando considerado o intervalo numérico de 0 a 100. Esse resultado indicou que conhecimentos aritméticos possam estar relacionados, de alguma forma, à habilidade em realizar estimativas.

Palavras-chave: Estimativa Numérica de Quantidades. Estimativa na Reta Numérica. Desempenho Aritmético.

4.1 INTRODUÇÃO

Estimativas numéricas são utilizadas para obter respostas quantitativas rapidamente, sem o compromisso com a exatidão, mas suficientemente precisas para a situação em questão. Em geral, a estimativa numérica pode ser representada em três diferentes situações: para realizar estimativas do resultado de um cálculo aritmético (estimativa computacional), para realizar a estimativa da quantidade de um conjunto de objetos sem contá-los (estimativa numérica de quantidades) e para realizar a estimativa da posição de um número na reta numérica (estimativa na reta numérica).

Sabe-se que a competência matemática envolve um grupo de habilidades e processos cognitivos ainda não totalmente conhecidos, sendo a estimativa numérica um deles (LEVINE, 1982). Embora sua importância tenha sido destacada (ROUSSELLE & NOEL, 2008), a estimativa numérica tem sido menos estudada do que a quantificação exata (PIAZZA et al., 2006), mesmo que ela possa estar relacionada ao desempenho em diferentes áreas da matemática, incluindo aquelas que exigem quantificação exata, como a aritmética (SIEGLER & BOOTH, 2004;

BOOTH & SIEGLER, 2006; SCHNEIDER; GRABNER & PAETSCH, 2009; MAZZOCCO; FEIGENSON & HALBERDA, 2011; LASKI & SIEGLER, 2007).

Alguns conhecimentos matemáticos parecem estar muito naturalmente relacionados com a habilidade de realizar estimativas, tais como: a compreensão de valor posicional, o cálculo mental, a tolerância para o erro, a compreensão de propriedades aritméticas etc. Entretanto, muitas crianças consideram a estimativa como uma alternativa inferior ao cálculo exato, dificultando a aquisição de experiências e, consequentemente, da confiança em juízos de estimativa (AZEVEDO, 1996).

Nessa perspectiva, é importante entender a estimativa, em suas mais diferentes formas de realização, compreendendo qual tarefa é mais facilmente realizada pelos estudantes e qual o papel da estimativa no desempenho aritmético. Também, avaliar o desempenho da estimativa pode ser válido, tendo em vista que o seu desenvolvimento tem sido considerado um bom preditor de habilidades matemáticas simbólicas posteriores (PARK & BRANNON, 2013). Sendo assim, comparar o desempenho em diferentes tarefas de estimativa com o desempenho matemático aritmético dos estudantes pode ser uma boa alternativa para compreender melhor essas relações.

Os testes mais utilizados para avaliar a capacidade de realizar estimativas são: a) o Teste de Estimativa na Reta Numérica (TERN – SIEGLER & BOOTH, 2004), em que o sujeito é convidado a posicionar um número em uma reta numérica, cujo marco da esquerda representa a origem (ponto 0) e o marco mais a direita corresponde à escala da reta, em geral representado pelos valores 10, 20, 100 ou 1.000 e b) o Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ), que requer que o sujeito estime a quantidade de pontos em um conjunto (LUWEL & VERSCHAFFEL, 2003). Até onde se sabe, não há pesquisa que tenha se dedicado a comparar qual dessas tarefas gera estimativas mais precisas em determinadas faixas etárias ou classes sociais e, portanto, qual delas seria melhor para aplicação na pesquisa e nas escolas, exceto por um estudo preliminar realizado pelo grupo de pesquisa, do qual participa a pesquisadora (DORNELES; DURO; RIOS; NOGUES & PEREIRA, 2017), que comparou estas tarefas em 60 crianças 2º e 3º ano em uma escola pública de Porto Alegre (Brasil).

Ainda que os processos envolvidos na estimativa numérica já venham sendo estudados há pelo menos 30 anos, não há consenso se ela reflete uma representação numérica, tal como uma reta numérica mental (SIEGLER & OPFER, 2003). O TERN é o instrumento de medida de desempenho em estimativa mais utilizado nas pesquisas recentes e tem trazido subsídios para a criação de modelos representação numérica mental (SIEGLER & OPFER, 2003; BARTH & PALLADINO, 2011; EBERSBACH; LUWEL & VERSCHAFFEL, 2015). Em contrapartida, tarefas de comparação de quantidades têm sido frequentemente utilizadas em pesquisas que tratam esta habilidade como sendo inata e compartilhada por animais não humanos. Entretanto, estas pesquisas (DEHAENE, 1997; XU & SPELKE, 2000; XU, 2003) utilizam tarefas que exigem apenas a comparação maior/menor entre conjuntos e não uma quantificação aproximada dos itens apresentado, tal como o TENQ.

A hipótese subjacente a tais pesquisas é a de que as habilidades simbólicas, que são tipicamente ensinadas na escola, seriam fomentadas por um sistema numérico não simbólico pré-existente (SASANGUIE & REYNVOET, 2013). E, longe de se compartilhar dessa ideia de que existe um Sistema de Número Aproximado (ANS) inato, considera-se que o TENQ proposto neste estudo possa refletir estratégias de estimativa numérica, assim como o TERN, em especial, quando os itens são apresentados em subescalas de 10, tal como o sistema numérico decimal ocidental.

Considera-se inovadora a proposta deste estudo, tendo em vista que a comparação do desempenho em estimativa numérica de crianças do 5º e 6º ano em dois diferentes testes de estimativa numérica, relacionando esses resultados com o desempenho em aritmética de crianças de 5º e 6º ano, até onde se sabe, não foi investigada em outro estudo, exceto pelo trabalho já referido, realizado com crianças menores (DORNELES et al., 2017). A partir de tais aspectos, considera-se que avaliar a capacidade de realizar estimativas utilizando diferentes tarefas poderia ser um bom ponto de partida para analisar a importância dessa habilidade e para destacar o tema em educação matemática. Nesta perspectiva, comparou-se o desempenho em estimativa numérica de 284 crianças do 5º e do 6º ano de uma escola pública e uma particular de Porto Alegre/RS, com objetivo de determinar em qual das tarefas (TERN ou TENQ) os estudantes são mais precisos em suas estimativas. Após esta comparação intratestes, buscou-se verificar se o desempenho nesses testes estaria relacionado ao desempenho aritmético dessas crianças em um teste padronizado de matemática (TDE).

Neste estudo focou-se nas atividades realizadas em crianças. A principal justificativa está nos achados de Sullivan e colaboradores (2011), que concluíram que os adultos são extremamente rápidos e precisos em estimativas na reta numérica e que essa precisão extrema pode estar relacionada com uma compreensão mais madura do sistema numérico simbólico (SIEGLER & OPFER, 2003). E também, sabendo-se que as crianças de ambas as escolas estavam acostumadas desde pequenas a realizar tarefas de contagem utilizando elementos enumeráveis (tais como os apresentados no TENQ) e que grande parte delas não teve contato com a reta numérica até a realização desse estudo, assumiu-se que os alunos deveriam ter melhor desempenho no TENQ do que no TERN. Além disso, teve-se por hipótese que ambos os testes devem refletir no desempenho em aritmética das crianças, tendo em vista as evidências de que estimativa e aritmética são habilidades intimamente relacionadas.

4.2 REFERENCIAL TEÓRICO

4.2.1 Representação Numérica Mental

Algumas evidências empíricas sugerem que alguns animais, humanos ou não, possuem uma representação interna de número tal como uma reta numérica mental (DEHAENE, 1997). A reta numérica é uma linha na qual os números estão dispostos em ordem crescente e separados em uma escala de magnitude pré-estabelecida. Para alguns autores, a estimativa na reta numérica pode oferecer conhecimentos importantes, não só sobre as representações mentais de número, mas também sobre o desenvolvimento numérico (MENZIES et al., 2013). A partir da tarefa em que as crianças são convidadas a posicionar números em uma reta numérica (BERTELETTI et al., 2010; BOOTH & SIEGLER, 2006), os pesquisadores passaram a desenvolver modelos detalhados de como os números são representados mentalmente.

O *Modelo Acumulador* de Gibbon e Church (1981) propõe que a representação numérica mental é linear, sendo que as distâncias entre as magnitudes numéricas são iguais em escala. Ao contrário, o *Modelo Logaritmo,* proposto por Dehaene (1997), pressupõe que a representação numérica está em uma escala numérica mental comprimida para números maiores e com grande espaçamento entre números pequenos. Mais tarde, os pesquisadores passaram a sugerir a existência de uma dupla representação numérica, passando de logarítmica dominante no início do desenvolvimento e, com a idade e a experiência numérica, tornando-se cada vez mais linear (MENZIES et al., 2013), evidenciando que a distribuição das estimativas na reta numérica segue um padrão de mudança logarítmico-linear conforme as crianças ficam mais velhas (BOOTH & SIEGLER, 2006, 2008; SIEGLER & BOOTH, 2004; SIEGLER & OPFER, 2003). As evidências empíricas para apoiar o modelo de mudança logarítmico-linear vêm em grande parte do TERN, proposto por Siegler e Booth (2004).

Ainda há relatos de que essa mudança de representação logarítmica-linear pode não estar apenas relacionada com a idade, mas também com o conhecimento numérico da criança. Essa constatação deu origem ao *Modelo Duplo-linear.* Este modelo sugere que, as crianças podem apresentar uma representação mental linear quando o número a ser estimado encontra-se dentro de sua faixa de contagem e uma representação logarítmica para números além dessa faixa (BERTELETTI et al., 2010). Esta última hipótese já foi investigada por alguns pesquisadores (EBERSBACH et al., 2008; NUERK et al., 2004) que afirmaram que a chamada representação logarítmica observada em crianças menores seria, na verdade, duas funções lineares separadas, uma com um declive mais acentuado (para números menores) e outra com um leve declive (para números maiores). Entretanto, não há consenso sobre o ponto de ruptura entre os dois segmentos. Ebersbach e colaboradores (2008) sugerem que esse ponto é variável e caracterizado pelo final da série numérica à qual as crianças são familiarizadas. Em outras palavras, essa representação linear de números muda de acordo com a idade e a faixa numérica conhecida pelas crianças. Em contrapartida, Moeller e colaboradores (2009) consideram que esse ponto de interrupção é fixo e representa mudanças entre números de um e dois dígitos.

Um terceiro modelo foi proposto: *o Juízo Proporcional* (BARTH & PALADINO, 2011). Neste modelo, a estimativa na reta numérica é vista como uma aplicação proporcional do comprimento total da reta. Inicialmente, estima-se as magnitudes apenas confiando no ponto inicial e ponto final da reta numérica. Mais tarde, usa-se outros pontos de referência intermediários como auxílio para as estimativas. Assim, de acordo com o intervalo numérico, quanto mais pontos de referência forem disponibilizados, mais precisa é a estimativa, especialmente perto desses pontos.

Apesar do debate em curso (BARTH & PALADINO, 2011; EBERSBACH et al., 2008; MOELLER et al., 2009), até onde se sabe, a resposta à pergunta sobre qual destes modelos de representação reflete melhor os padrões de evolução das estimativas, é inconclusiva. Para superar essa lacuna, Dackermann e colaboradores (2015) apresentaram uma proposta de integração desses modelos, cuja ideia é aqui compartilhada (DORNELES; DURO; RIOS; NOGUES & PEREIRA, 2017), sugerindo que a representação numérica pode refletir a compreensão das relações numéricas em suas diferentes etapas, considerando o intervalo numérico adotado, da idade do sujeito pesquisado e a sua familiaridade com o intervalo (SIEGLER & BOOTH, 2004; BOOTH & SIEGLER, 2006).

Embora haja diferenças importantes nas teorias de representação do número, são consensuais as conclusões obtidas até o momento de que a) as estimativas tornam-se mais precisas e lineares com a idade, b) o desempenho em estimativa está ligado de alguma forma ao desempenho matemático e c) tanto a estimativa quanto o desempenho de matemático estão relacionados com a capacidade de contar e à familiaridade com números.

4.2.2 Estimativa na Reta Numérica e Desempenho Matemático

A maior parte dos estudos envolvendo estimativa numérica utiliza a reta numérica com instrumento para comparar magnitudes. A tarefa da reta numérica envolve a compreensão do sistema numérico, as representações mentais de quantidade numérica e as estratégias de mapeamento de informações numéricas espaciais (SULLIVAN et al., 2011). O grupo de pesquisadores que defende que o desempenho na tarefa da reta numérica reflete a representação numérica mental (DEHAENE et al., 2008; SIEGLER & OPFER, 2003) e que essa representação pode fornecer a estrutura conceitual para o desenvolvimento de conhecimentos numéricos mais complexos (BOOTH & SIEGLER, 2008) foi contestado (WHITE & SZUCS, 2012).

Em geral, os estudos sobre estimativa na reta numérica focam-se em dois principais aspectos: a linearidade e consequente precisão aumentada com a idade e a relação entre as diferenças individuais na estimativa com as diferenças individuais no desempenho matemático geral ou aritmético. Alguns estudos utilizando a tarefa da reta numérica, tais como o de Ebersbach e colaboradores (2008), focam apenas nos padrões de estimativa, mas não na precisão dessas estimativas, como é o foco deste estudo.

Sobre o fato de as estimativas tornarem-se mais lineares e, por isso, mais precisas com a idade, Siegler e Opfer (2003) trouxeram um estudo bastante conclusivo que fornece evidências de que alunos da 2ª série apresentam padrão logarítmico de representação numérica, na 4ª série os alunos apresentam tanto padrão logarítmico como linear e, a partir da 6ª série, passam a apresentar unicamente um modelo linear de representação, especialmente na reta 0-1000. Complementando esses achados, Siegler e Booth (2004) verificaram que os padrões de estimativas progridem de uma forma logarítmica em pré-escolares a uma mistura de logarítmica e linear na 1ª série a, finalmente, um padrão principalmente linear na 2ª série, em se tratando de uma escala na reta 0-100. Replicando os estudos de Siegler e Opfer (2003), Opfer e Siegler (2007) chegaram às mesmas conclusões, aplicando uma gama mais ampla de números a serem posicionados na reta numérica.

Em estudos interculturais, Xu e colaboradores (2013) também concluíram que a representação linear de números aumenta com a idade, mas que crianças chinesas já possuem representações lineares desde muito cedo, contradizendo a hipótese levantada por Siegler e Opfer (2003), de que a estimativa numérica é uma medida pura, e concluindo que a cultura possibilita que as crianças sejam mais hábeis em realizar estimativas. Na pesquisa de Siegler e Mu (2008), crianças chinesas apresentam escalas numéricas mais lineares antes do que estadunidenses, ao contrário dos achados de Muldoon e colaboradores (2011), cujos dados evidenciaram que crianças chinesas não apresentam escalas numéricas mais lineares (e, portanto, mais precisas) antes que crianças escocesas, com habilidade matemática equivalente.

Uma conclusão consistente sobre a relação entre linearidade das estimativas e precisão foi encontrada por Berteletti e colaboradores (2010), que confirmaram que as estimativas das crianças passaram de logarítmicas a lineares, sendo que elas se tornaram menos precisas, mas cada vez mais logarítmicas para intervalos numéricos em que não estivessem familiarizadas. E, em contraste com as alegações anteriores, de que a linearidade da representação numérica é uma contribuição única para o desenvolvimento matemático das crianças, os dados de Menzies e colaboradores (2013) sugeriram que essa variável não é significativamente privilegiada sobre habilidades numéricas básicas.

Mais especificamente, a correlação da estimativa na reta numérica com o desempenho em aritmética foi destacada por diversos pesquisadores (SIEGLER & BOOTH, 2004; BOOTH & SIEGLER, 2008; SIEGLER & MU, 2008; SCHNEIDER; GRABNER & PAETSCH, 2009; MULDOON et al., 2011; BOOTH & SIEGLER, 2008;

LEFEVRE et al., 2013). Siegler e Booth (2004) encontraram uma correlação entre tarefas de estimativa e um teste padronizado de desempenho matemático, mesmo após o controle da inteligência e da idade. Replicando esses achados, Schneider, Grabner e Paetsch (2009) concluíram que o conhecimento conceitual, a inteligência numérica e a estimativa na reta numérica foram bons preditores do desempenho matemático. Booth e Siegler (2006) concluíram que o desempenho em estimativa foi capaz de predizer o desempenho em aritmética e, mais tarde (BOOTH & SIEGLER, 2008), concluíram que a linearidade das representações da magnitude numérica ainda previa a aprendizagem aritmética. Corroborando estes achados, Menzies e colaboradores (2013) encontraram mais evidências de que estimativa na reta numérica, habilidades matemáticas e procedimentos de contagem estão correlacionados. Berteletti e colaboradores (2010) destacaram a correlação entre a precisão da estimativa e o conhecimento de algarismos arábicos e ordem numérica.

Em suas discussões, Siegler e Booth (2004) sugerem que as representações de magnitudes numéricas das crianças incluem um componente espacial forte, de tal forma que números maiores são posicionados em condições espacialmente maiores. Da mesma maneira, Lefevre e colaboradores (2013) encontraram que a capacidade espacial foi correlacionada com todas as medidas em matemática em um estudo com estudantes da 3ª e 4ª séries. Esta pode ser uma razão para que crianças, a partir dos 5 anos, realizem a tarefa de estimativa na reta numérica de maneira razoável, depois de 30 segundos.

Contradizendo a maior parte dos estudos em estimativa na reta numérica, Lefevre e colaboradores (2013) não encontraram evidências de que o desempenho na reta numérica é preditivo para cálculo mais do que o cálculo é preditivo do desempenho em estimativa na reta numérica. Ou seja, há divergências sobre esta relação causal e os estudos da área ainda são inconclusivos.

4.2.3 Estimativa Numérica de Quantidades e Desempenho Matemático

Uma gama de pesquisas utilizou tarefas de estimativa de quantidades de itens em um conjunto. Dentre os estudos sobre este tema, podem-se destacar três tipos: a) a relação da habilidade de estimativa e o conhecimento primitivo de quantidade, b) a sua correlação com o desempenho em matemática e c) as diferenças de linearidade de representação e/ou acurácia, relacionadas à idade. Para este estudo, discutir tais fatores é importante, pois compreender as bases dessa habilidade é fundamental para relacionar o desempenho na tarefa de estimativa de quantidades a outras tarefas de estimativa e, ainda assim, comparar essa habilidade com o desempenho aritmético dos estudantes.

a) Alguns autores trabalham com a ideia de que a discriminação de quantidades venha a ser uma atividade ligada apenas à percepção (DEHAENE, 1997; XU & SPELKE, 2000; XU, 2003). Entretanto, a maioria desses investigadores não discute em seus estudos se as crianças realmente distinguem as quantidades que lhes são apresentadas ou se apenas verificam diferenças nas propriedades físicas contínuas dos objetos. Nessa perspectiva, tendo em vista a relação da habilidade de estimativa com o conhecimento primitivo de quantidade, Huntley-Fenner (2001) explicou o desempenho progressivo da estimativa como intimamente relacionado com o conhecimento intuitivo de quantidade. Complementando, Lemaire e Lecacheur (2007) afirmaram que as tarefas de estimativa de quantidade envolvem processos cognitivos específicos pré-simbólicos que não variam na idade adulta. Na direção contrária, Rousselle e Noel (2008) verificaram que o processamento de quantidades surge gradualmente ao longo do desenvolvimento, ao passo que a informação perceptiva já está bem desenvolvida em pré-escolares. Ou seja, as habilidades de perceber e comparar quantidades podem ser bem desenvolvidas desde muito cedo, porém, estabelecer estimativas mais complexas exige um conhecimento que é construído de forma gradual ao longo da infância, pelo menos. Recentemente, os pesquisadores Matejko e Ansari (2016) sugeriram que as trajetórias de desenvolvimento do processamento simbólico e não simbólico são mais semelhantes no início de desenvolvimento, sendo que o processamento de magnitude não simbólica pode começar mais cedo e progredir mais lentamente do que o simbólico. Ou seja, concluíram que as habilidades de processamento de magnitude simbólica e não simbólica tem trajetórias de desenvolvimento distintas, ideia com a qual se concorda.

b) Quanto à relação entre a estimativa numérica de quantidades e o desempenho em matemática, Booth e Siegler (2006) encontraram correlação positiva para alunos da 3ª e 4ª séries, embora não para os alunos da 1ª e 2ª séries. Gilmore, Mccarthy e Spelke (2010) verificaram que a precisão das crianças na tarefa não-simbólica se correlacionou positivamente com a sua habilidade matemática. Da mesma maneira, Obersteiner e colaboradores (2014) mostraram que o desempenho na tarefa de estimativa de quantidades foi correlacionado com o desempenho em um teste de aritmética, mesmo quando outras variáveis cognitivas foram controladas estatisticamente. Ao contrário, Park e Brannon (2013) encontraram que uma melhoria substancial na tarefa de aritmética aproximada resultou em uma melhoria também substancial na capacidade matemática simbólica, sugerindo uma mudança de causalidade entre as habilidades de estimativa e as habilidades aritméticas. Lipton e Spelke (2005) trouxeram a questão da familiaridade das crianças com o intervalo numérico das quantidades apresentadas como fator essencial para a discriminação das quantidades. Nessa perspectiva, Booth e Siegler (2006) sugeriram que representações não-lineares podem ser uma fonte de dificuldade na aprendizagem de matemática, pois, em estudo desenvolvido pelos autores, a qualidade das estimativas em uma tarefa na reta numérica correlacionou-se com a capacidade do desempenho em problemas de adição simples. Este tipo de correlação eleva a preocupação sobre o desenvolvimento de representações lineares que podem influenciar na aprendizagem matemática.

c) Em termos de padrão mental de representação, Thompson e Siegler (2010) concluíram que as crianças, cuja estimativa tinha padrão linear, utilizavam mais a representação logarítmica para números além do intervalo numérico em que estivessem familiarizados. Um fator importante para esse estudo são as diferenças relacionadas à idade, tendo em vista que se considera que existam diferentes níveis de desenvolvimento da estimativa desde a infância até a estimativa adulta, mais precisa. Booth e Siegler (2006) afirmam que a estimativa de quantidades muda com a idade (paralelamente ao desenvolvimento de estimativas na reta numérica). Da mesma maneira, Gandini, Lemaire e Dufau (2008) buscaram compreender os processos de estimativa e suas mudanças com a idade e seus dados forneceram evidências de que os jovens são quase sempre mais rápidos e mais precisos do que os idosos. Ao contrário dessas pesquisas, Huntley-Fenner (2001) encontrou estimativas semelhantes para crianças e adultos, porém o desvio padrão das estimativas parecia diminuir com a idade. Corroborando estes achados, Lemaire e

Lecacheur (2007) concluíram que adultos e idosos apresentam desempenho comparável e que não há diferenças relacionadas à idade para estimativa de quantidades, a não ser que os participantes mais velhos levam mais tempo do que os jovens adultos para fornecer suas estimativas. Ou seja, a representação simbólica e não-simbólica de números pode coexistir a partir do início do desenvolvimento, mas têm diferentes cursos no decorrer do desenvolvimento.

A pouca precisão das estimativas das crianças e essa relação positiva entre desempenho em estimativa e desempenho matemático (SIEGLER & BOOTH, 2004) levaram os pesquisadores a atribuir uma importância crescente à estimativa, pelo menos nas últimas três décadas. Em geral as pesquisas têm demonstrado que o desempenho em estimativa numérica se correlaciona com testes aritméticos padronizados (BOOTH & SIEGLER, 2006; SIEGLER & BOOTH, 2004), tarefas de adição simples (SIEGLER & MU, 2008) e também com processos numéricos específicos, tais como aritmética e comparação de magnitude (SIEGLER & BOOTH, 2005; LASKI & SIEGLER, 2007). Ressalta-se que Muldoon e colaboradores (2011) encontraram resultados contrários em um estudo sobre a capacidade matemática de crianças ocidentais e orientais em que a linearidade e exatidão mostravam-se independentes da habilidade matemática.

Desempenho aritmético é uma construção complexa, não só composta por cálculos como adição e subtração, mas também pela capacidade de operar com números de uma forma flexível (OBERSTEINER et al., 2014). Sendo assim, conhecimento sobre números pode restringir a quantidade de possíveis respostas a problemas aritméticos, excluindo respostas improváveis e qualificando a gama de outras mais prováveis. Em 1982, Levine (1982) constatou que os alunos com boa capacidade aritmética usam estimativa com mais frequência do que aqueles com pior capacidade aritmética. Os achados atuais indicam que as representações de magnitudes numéricas não são apenas positivamente relacionadas com uma variedade de tipos de conhecimento numérico, mas também preditivo de sucesso na aquisição de novos dados numéricos, em particular, respostas para problemas aritméticos (BOOTH & SIEGLER, 2008).

4.3 MÉTODO

4.3.1 Amostra

Comparou-se o desempenho em estimativa numérica em um grupo de 284 estudantes do 5º (N= 138) e 6º (N=146) ano escolar, que formavam a população de duas escolas: uma escola pública municipal de ensino fundamental (N=89 – 5º ano e N=77 – 6º ano e uma escola privada (N=49 – 5º ano e N=69 – 6º ano), ambas na cidade de Porto Alegre/RS. Os alunos participantes, bem como seus responsáveis, aceitaram participar da pesquisa assinando um termo de consentimento quanto à participação na pesquisa (Anexo E e Anexo D). Os estudantes foram liberados de suas atividades de sala de aula pelo professor. O professor responsável também assinou um termo de aceite em participar da pesquisa (Anexo C).

4.3.2 Instrumentos de Coleta de Dados

Para coleta de dados, foram utilizados três testes: dois de avaliação de desempenho em estimativa numérica: a) o Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ), adaptado de Luwel e Verschaffel (2003) e b) o Teste de Estimativa na Reta Numérica (TERN), adaptado de Siegler e Booth (2004) e c) um teste de avaliação de desempenho aritmético (TDE – Subteste de aritmética), de Stain (1994).

a) Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ): Este instrumento foi estruturado e organizado pela pesquisadora e consiste em atribuir um número a um conjunto discreto de pontos apresentados. Para este estudo, foi utilizada apenas uma parte do teste deste completo do Estudo 1, correspondendo a 28 tarefas do total de 64, considerando o fato de as crianças conhecerem o número máximo de pontos da matriz apresentada, a fim de viabilizar a comparação com o TERN, no qual as crianças conheciam os pontos inicial e final da reta. Os estímulos do teste consistiram em conjuntos de pontos, de diferentes quantidades, de mesma cor (preta) e de mesmo tamanho (a fim de reduzir a quantidade de variáveis que pudessem interferir no julgamento da quantidade pelos participantes), posicionados sobre a região delimitada pela tela retangular projetada em um fundo branco em uma grade regulamente espaçada (matriz).

O TENQ exige que as crianças estimem a quantidade de pontos distribuídos em uma matriz quadriculada em diferentes escalas 10x1 (E10), 10x2 (E20) e 10x10

(E100). Em cada linha da matriz os quadrados são agrupados em conjuntos de dez, de forma que a estrutura se assemelhe à estrutura do sistema de numeração decimal. Antes de iniciar a tarefa, os alunos foram informados que a matriz vazia continha 0 pontos e a matriz completa continha 10, 20 ou 100 pontos, de acordo com a escala da matriz apresentada. Sabendo-se que a precisão pode variar com o formato de distribuição dos itens na matriz, apresentando maior (mais aglomerados) ou menor (mais espaçados) densidade, os itens foram apresentados dessas duas maneiras, dividindo o teste em dois subtestes: TENQ-A (para itens aglomerados em cada escala) e TENQ-E (para itens espaçados em cada escala).

As tarefas do TENQ foram apresentadas visualmente, com auxílio de um projetor multimídia. O teste consistiu em ouvir a instrução, observar a imagem projetada e, após alguns segundos de observação, a imagem foi seguida por uma tela branca, momento em que os participantes foram convidados a realizar uma estimativa numérica acerca da quantidade observada, anotando em um caderno de respostas previamente distribuído a resposta que considerasse mais adequada. Para reduzir a possibilidade de contagem verbal, os estímulos foram apresentados rapidamente (1 segundo para cada grupo de dez pontos apresentados). Ou seja, para quantidades de até 10 elementos (4, 7 e 9 itens), os participantes tiveram um segundo de observação. Para quantidades de 11 a 20 (17 itens), foi disponibilizado 2 segundos, de 21 a 30 (25 itens), 3 segundos, e assim por diante (49, 78 e 95 itens) até o período máximo de 10 segundos para quantidades de 90 a 100 elementos.

b) Teste de Estimativa na Reta Numérica (TERN): Este instrumento exige que os sujeitos marquem pontos correspondentes a números específicos ao longo de uma reta numérica delimitada por um ponto inicial e um final, por estimativa (esses números foram escritos no quadro e verbalizado pela pesquisadora). Para avaliar o desempenho da estimativa na reta numérica, utilizou-se o instrumento construído a partir da proposta de Siegler e Booth (2004), utilizando as mesmas quantidades e escalas do TENQ, a fim de comparar seus resultados. No total, 14 números foram posicionados, sendo que eles foram apresentados em ordem aleatória.

O TERN utilizou as três escalas antes utilizadas por Menzies e colaboradores (2013): 0-10, 0-20 e 0-100. Ou seja, cada linha, com 25 cm de comprimento, continha o número 0 na extremidade esquerda e o número 10, 20, ou 100 na extremidade direita, dependendo da escala. Foi realizado um teste inicial em que foi mostrado às crianças o número médio de cada escala (isto é, 5, 10 ou 50), sendo este posicionado pela pesquisadora em uma reta numérica desenhada previamente no quadro negro. Os números-alvo a serem estimados eram: 4 e 7 em todas as escalas, 9 e 17 nas escalas 20 e 100 e 25, 49, 78 e 95 na escala 100. A ordem de posicionamento foi aleatória, mas a mesma para todas as crianças, sendo a escala 0-10 apresentada em primeiro lugar, seguida pela reta 0-20 0 e, finalmente, pela reta numérica 0-100.

A familiaridade individual das crianças com números não foi avaliada, mas foi pressuposto que elas estavam familiarizadas com as faixas numéricas testadas. Além disso, considerando que os pesquisadores Siegler e Opfer (2003) não encontraram diferença na precisão dos estudantes ao variar o tempo para estimativa de 4s para 30s, optou-se pelo maior tempo, solicitando às crianças que posicionassem apenas uma vez cada número, para evitar o cansaço desnecessário na realização da tarefa.

A precisão das estimativas na reta numérica foi determinada a partir da comparação da medida da posição das marcas manuscritas dos participantes sobre as retas com a medida real, através de um gabarito construído em plástico transparente. Foi considerada apenas uma casa decimal para fins de correção, limitando-se a inteiros e meios, desconsiderando demais valores decimais intermediários. Ou seja, se para estimar a posição do número 9 fosse constado que a posição dada pela criança correspondia à posição real do número 9,3, considerou-se que a estimativa da criança foi 9,5 (pois 9,3 está mais próximo de 9,5 do que de 9).

c) Teste de Desempenho Escolar – Subteste de Aritmética (TDE): Para avaliação de desempenho em aritmética, foi utilizado o *Teste de Desempenho Escolar (TDE) – Subteste de Aritmética,* desenvolvido por Stein (1994), com o objetivo de avaliar habilidades de cálculo aritmético. A escolha deste subteste considerou, principalmente, a possibilidade de aplicação coletiva em estudantes do 3º ao 7º ano do Ensino Fundamental, a obtenção dos padrões estatísticos estabelecidos a partir de seus resultados e por sua padronização ter sido realizada com populações socioeconômicas e culturais semelhantes as dos sujeitos do estudo.

Este subteste é composto de duas partes: uma parte oral e outra parte de escrita de cálculos. A parte oral contém três problemas que envolvem comparação de quantidades e operações de adição e subtração simples. A outra parte envolve 35 questões de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com números naturais, decimais, fracionários e inteiros. O teste inclui uma tabela de classificação de desempenho (inferior, médio ou superior) para cada ano de escolaridade. Para obter o resultado do teste, basta contabilizar a quantidade de acertos. Por tratar-se de um teste comercializado, de autoria de terceiros, não é possível disponibilizá-lo nos anexos do estudo.

4.3.3 Procedimento para Coleta de Dados

Todos os testes foram aplicados coletivamente, em dias diferentes, na sala de aula, para que as atividades escolares fossem afetadas o mínimo possível. Para todos eles, não houve *feedback* para respostas corretas ou erradas. Em geral, os estudantes utilizaram uma hora/aula (45 a 50 minutos) para realizar cada um dos testes.

4.3.4 Análise dos Dados

Realizou-se uma análise comparativa dos resultados obtidos pelas crianças dos diferentes anos escolares e das diferentes turmas, em duas tarefas de estimativa numérica: TERN e TENQ (TENQ-A e TENQ-E), com objetivo de observar em qual das tarefas as crianças são mais precisas. Para isso, foi realizado um estudo estatístico envolvendo as variáveis comuns em ambas as tarefas, considerando cada uma das escalas estudadas: escala 10 (E10), escala 20 (E20) e escala 100 (E100), ano escolar (5º e 6º) e tipo de escola (pública-Pu ou particular-Pa). Para o TENQ, além das variáveis comuns aos instrumentos, as variáveis "pontos aglomerados" (TENQ-A) e "pontos espaçadas" (TENQ-E) na matriz também foram consideradas. Todas elas foram comparadas à variável independente precisão relativa (PR) e desempenho em aritmética (DA), obtido pelo somatório de pontos do TDE – Subteste de Aritmética (TDE).

Para iniciar as análises foi calculada a precisão relativa (PR) de cada uma das tarefas dos testes de estimativa. Para o cálculo da PR, utilizou-se a fórmula adaptada de Siegler e Booth (2004), sendo assim, considerou-se como "Valor Real" o valor real a ser estimado e "Estimativa" a resposta dada pela criança, então:

$$PR = \frac{|VALOR\ REAL - ESTIMATIVA|}{ESCALA\ (10, 20\ ou\ 100)}$$

Por exemplo, se a quantidade a ser estimada (valor Real) for 95 e a resposta da criança (Estimativa) tiver sido 97, em uma escala E100, a precisão é dada por $PR = \frac{|95-97|}{100} = \frac{2}{100} = 0{,}02$. A criança é tão mais precisa quanto mais próximo de zero for o valor da PR calculado. O resultado obtido com o cálculo realizado no numerador da fração é o que se chama de Precisão Absoluta (PA). Neste caso, $PA = |VALOR\ REAL - ESTIMATIVA|$.

Pressupondo que o desempenho dos participantes pode não ser tão preciso por causa de uma tendência a adivinhar aleatoriamente as quantidades ou posições em alguns ensaios, o critério de razoabilidade de respostas aceitas para análise neste estudo foi o dobro do valor real. Com isso, foram consideradas apenas as respostas em que a precisão absoluta (PA) máxima fosse até o dobro da escala considerada, com a certeza de não haver prejuízos estatísticos. Sendo assim, na E10, foram consideradas respostas até 20, na E20, respostas até 40 e na E100 respostas até 200. Quando estimavam acima destas quantidades considerou-se que a atividade não foi compreendida pela criança.

Em seguida, realizou-se uma análise descritiva da precisão de cada ano escolar e escola, para identificar o padrão geral de desempenho para cada tarefa. Utilizou-se apenas uma medida de estimativa para cada valor estimado, porque a análise anterior (DORNELES et al., 2017) mostrou que a diferença entre duas respostas para cada número em ambas as tarefas não foi significativa, nem para o TERN (p = 0,24), nem para o TENQ (p = 0,06). Provas relacionadas à velocidade com que as crianças realizaram as estimativas não foram testadas nesta análise, considerando que o tempo de execução foi o mesmo para todos os participantes.

Para realizar a avaliação de desempenho em aritmética, inicialmente foi calculada a quantidade de acertos de questões do TDE, para verificar quais as questões de aritmética eram mais frequentemente acertadas pelas crianças e quais apresentavam maior percentual de erro. Essa resposta é importante para, no caso de haver correlação entre o desempenho no teste de aritmética e o desempenho nas tarefas de estimativa, possa ser possível identificar quais tarefas de aritmética podem estar relacionadas às habilidades de estimativa numérica.

4.4 RESULTADOS

Foi realizado um *Modelo de Equações de Estimações Generalizadas* para comparar as médias da Precisão Relativa (PR) como os fatores: ano (5º ou 6º), escola (Pu ou Pa), escala (E10, E20 ou E100) e instrumentos (TENQ e TERN). Esse tipo de análise é realizado quando um sujeito possui mais de uma medida testada no mesmo estudo. Nesse caso, cada estudante respondeu a 28 questões. Foram respondidas questões de dois instrumentos de avaliação de estimativas: TERN (14 questões envolvendo números na reta numérica) e TENQ (14 questões envolvendo pontos aglomerados – TENQ-A e 14 questões envolvendo pontos espaçados – TENQ-E)

A menos que indicado de outra forma, um nível de confiança alfa de 0,05 foi utilizado para todos os testes estatísticos. Os p-valores exatos foram relatados, mas valores muito pequenos foram arredondados para p<0,001. Inicialmente, avaliou-se a diferença da PR entre os sexos. Os meninos tiveram uma precisão média de 5,13% [4,89 - 5,37] e as meninas uma média de 4,92% [4,68 - 5,16], não apresentando diferença estatística entre as medidas (p=0,219). Sendo assim, não foi realizada distinção entre os sexos nas análises seguintes.

Na Tabela 12 apresentam-se as médias da precisão relativa entre as combinações de três fatores: ano, escala e instrumento (p=0,010); ano, escola e instrumento (p=0,011) e escala, escola e instrumento (p=0,694). A interação quádrupla não pôde ser realizada por problemas de estimativa, pois provocaram intervalos de confiança muito grandes. Sendo as duas primeiras interações significativas, elas foram analisadas na sequência.

Tabela 12 - Médias de Precisão Relativa na combinação de três fatores entre as variáveis: Ano, Escola, Escala e Instrumento

Fator1	Fator2	Fator 3 - Instrumentos			p interação tripla
		TENQ Aglomerado	TENQ Espaçado	TERN	
		média	média	média	
Ano	**Escala**				
5º	10	0,035	0,033	0,086	0,010
	20	0,030	0,047	0,073	
	100	0,034	0,057	0,078	
6º	10	0,029	0,023	0,054	
	20	0,023	0,031	0,067	
	100	0,034	0,058	0,061	
Ano	**Escola**				
5º	Pa	0,024	0,046	0,048	0,011
	Pu	0,038	0,054	0,094	
6o	Pa	0,026	0,038	0,047	
	Pu	0,034	0,053	0,075	
Escala	**Escola**				
10	Pa	0,031	0,024	0,046	0,694 não sig.
	Pu	0,033	0,031	0,086	
20	Pa	0,023	0,036	0,054	
	Pu	0,029	0,042	0,082	
100	Pa	0,025	0,048	0,045	
	Pu	0,041	0,065	0,087	

TENQ – Teste de Estimativa Numérica de Quantidades / TERN – Teste de Estimativa na Reta Numérica
Pu – Escola Pública / Pa – Escola Privada
p – Nível de confiança

4.4.1 Interação Ano, Escala e Instrumento

Considerando as diferenças estatísticas encontradas entre os testes TENQ e TERN, obtém-se que, no 5º ano, na escala 10, a média da precisão do TENQ-A é distinta da média do TERN. Nas escalas 20 e 100 a média da precisão do do TENQ-E diferem da média do TERN, sendo, as crianças menos precisas em TERN que em qualquer uma das variações do TENQ. No 6º ano, nas escalas 10 e 20, as médias de precisão do TENQ-A e do TENQ-E diferem da média do TERN, sendo sempre mais precisos em TENQ que em TERN. Na escala 100, as médias do TENQ-A são diferente das médias do TERN. Em síntese, quando comparados os instrumentos por escala, observou-se que realizar a estimativa de itens em um conjunto discreto gera estimativas significativamente mais precisas que estimar a posição desses mesmos números em uma reta numérica.

4.4.2 Interação Ano, Escola e Instrumento

Ao fazer a comparação estatística entre os instrumentos TENQ e TERN, por ano e por escola, obtiveram-se os seguintes resultados: no 5º ano da escola particular a média do TENQ-A difere do TERN. Na escola pública, os dois instrumentos diferem entre si, assim como no 6º ano, tanto na escola pública quanto na escola particular, os dois instrumentos diferem entre si, em todas as suas variações. Ou seja, o desempenho dos estudantes ao realizar estimativas de pontos foi sempre mais preciso, independente da escola.

A média geral de acertos das 35 questões do TDE dentre os estudantes de 5º e 6º ano de ambas as escolas foi de 18,11 (51,43%). Constatou-se que as questões mais acertadas, com mais de 90% das respostas corretas, foram as questões de soma e subtração com um algarismo, apresentadas de duas maneiras: por cálculos escritos horizontalmente e por algoritmo, multiplicação com um algarismo e soma com duas parcelas com números de dois algarismos em cada uma. Acima da média ainda tiveram as questões de subtração com “empréstimo”, multiplicação e soma de números com mais de um algarismo e divisão exata com dividendo de dois algarismos e divisor com um número de um algarismo. As questões com maior frequência de erros envolviam combinação de soma com subtração, números decimais, frações, potenciação e operações com números negativos. As que obtiveram menos de 10% de acertos envolviam divisão com resposta decimal, potência de expoente dois, multiplicação de números negativos, soma de frações de numeradores distintos, soma de potências e divisão de frações.

Para determinar a relação entre os dois testes foi realizada uma correlação de *Spearman*. A correlação é a melhor análise para medir o grau de relação entre os instrumentos. Foram calculados três escores para cada sujeito. Para isso, foi calculada a soma da precisão relativa para cada sujeito, nas 14 questões de cada um dos instrumentos: TENQ-A, TENQ-E e TERN. Após essa construção, foi realizada a correlação entre esses escores, discriminando por escola, escala e ano. A precisão foi correlacionada com o desempenho obtido pelos estudantes no TDE. Correlações entre 0,3 e 0,6 podem ser consideradas moderadas. Correlações entre 0,6 a 0,9 são classificadas como forte e entre 0,9 e 1,0 são classificadas como muito forte. Esses dados aparecem descritos na Tabela 13.

Tabela 13 - Correlação dos instrumentos TENQ-A, TENQ-E, TERN e TDE por ano, escala e escola

			Escola Privada			Escola Pública		
Escala	Ano	Instrumento	TENQ-E	TERN	TDE	TENQ-E	TERN	TDE
			r (p)	r (p)	r (p)	r (p)	r (p)	r (p)
10	5º	TENQ-A	**0,306 (0,039)**	-0,077 (0,609)	-0,089 (0,556)	0,151 (0,188)	0,159 (0,164)	-0,216 (0,058)
		TENQ-E	1	-0,240 (0,108)	-0,254 (0,088)	1	-0,164 (0,150)	-0,028 (0,810)
		TERN		1	-0,084 (0,577)		1	**-0,231 (0,041)**
	6º	TENQ-A	-0,019 (0,876)	-0,014 (0,908)	-0,014 (0,907)	0,191 (0,125)	-0,093 (0,458)	0,049 (0,697)
		TENQ-E	1	**0,273 (0,024)**	-0,159 (0,196)	1	0,125 (0,319)	0,060 (0,633)
		TERN		1	-0,139 (0,259)		1	**-0,333 (0,006)**
20	5º	TENQ-A	**0,310 (0,036)**	**0,408 (0,005)**	-0,238 (0,111)	0,194 (0,088)	0,066 (0,566)	**-0,309 (0,006)**
		TENQ-E	1	0,010 (0,950)	0,021 (0,892)	1	0,134 (0,241)	**-0,314 (0,005)**
		TERN		1	-0,198 (0,188)		1	-0,139 (0,226)
	6º	TENQ-A	**0,401 (0,001)**	0,188 (0,125)	-0,091 (0,462)	0,232 (0,061)	0,046 (0,716)	-0,153 (0,220)
		TENQ-E	1	0,128 (0,299)	-0,065 (0,599)	1	-0,121 (0,334)	-0,025 (0,843)
		TERN		1	**-0,250 (0,040)**		1	-0,033 (0,790)
100	5º	TENQ-A	0,240 (0,107)	0,272 (0,068)	**-0,304 (0,040)**	**0,274 (0,015)**	**0,459 (<0,001)**	**-0,299 (0,008)**
		TENQ-E	1	**0,326 (0,027)**	-0,155 (0,304)	1	**0,345 (0,002)**	**-0,301 (0,007)**
		TERN		1	**-0,465 (0,001)**		1	**-0,462 (<0,001)**
	6º	TENQ-A	**0,372 (0,002)**	**0,572 (<0,001)**	-0,152 (0,215)	**0,414 (0,001)**	**0,317 (0,009)**	-0,175 (0,160)
		TENQ-E	1	**0,454 (<0,001)**	**-0,290 (0,016)**	1	0,174 (0,162)	-0,079 (0,529)
		TERN		1	**-0,270 (0,026)**		1	-0,087 (0,489)

TENQ-A/ TENQ-E – Teste de Estimativa Numérica de Quantidades para itens Aglomerados/ Espaçados
TERN – Teste de Estimativa na Reta Numérica
TDE – Teste de Desempenho Escolar (sub-teste de aritmética)

Na Tabela 13, indicaram-se as correlações nos retângulos coloridos para facilitar a leitura dos dados apresentados. Em vermelho, destacaram-se as correlações fracas (menores que 0,3) que ocorrem, individualmente, na escola particular ou na escola pública. Em amarelo, destacaram-se as correlações individuais, de modo geral, moderadas. E, em verde, destacaram-se as correlações que ocorrem em ambas as escolas. As correlações positivas, mesmo que moderadas, sugerem ou que ambas as tarefas demandam algumas funções cognitivas semelhantes ou que estão relacionadas com outras habilidades que não foram medidas neste estudo, mas que podem vir a ser em estudos futuros.

Analisando as correlações encontradas, verificou-se que elas ocorrem unicamente de maneira fraca ou moderada, ou seja, não há forte correlação entre os instrumentos. Separadamente por escala e por ano escolar, destacou-se, na escala 10, na escola particular, correlação moderada no 6º ano entre TDE e TERN. Na escala 20, outras correlações são encontradas, como TENQ-A e TERN no 5º ano, na escola pública. Já na escola particular, ambas as tarefas de TENQ foram moderadamente correlacionadas com o TDE, no 5º ano. Entretanto, as escalas 10 e 20 pouco mostram sobre uma possível correlação entre os instrumentos, demonstrando, talvez, serem escalas que permitam estimativas mais intuitivas em todas as tarefas, trazendo poucas informações sobre um possível preditor de habilidades estimativas ou aritmética dos estudantes.

Quando comparada às demais escalas, a escala 100 é a que pode trazer maior quantidade de correlações entre os instrumentos e, em sua maioria, correlações concordantes em ambas as escolas. Em síntese, tanto na escola pública quanto na escola particular obteve-se correlação moderada no 5º ano entre TENQ-A e TERN com TDE e TENQ-E e TERN. E, no 6º ano, obteve-se correlação positiva entre TERN e TENQ-A. Na escola particular ainda foi encontrada correlação entre TENQ-E e TDE, no 5º ano. Na escola pública ainda se correlaciona TERN e TENQ-E, no 6º ano. Resumindo, em E100 obteve-se diversas correlações, porém distintas para 5º e 6º ano.

Pode-se sugerir que habilidades de estimativa para itens aglomerados e, portanto, de fácil contagem multiplicativa, estão relacionadas a habilidades de estimativa de itens aleatoriamente distribuídos em uma grade e a posicionar números em uma reta numérica para os dois anos estudados. Estes achados revelam que padrões de diferenças individuais e de desenvolvimento também estão presentes em tarefas numéricas de estimativa.

4.5 DISCUSSÃO

Tanto o Teste de Estimativa na Reta Numérica quanto o Teste de Estimativa Numérica de Quantidades são de interesse para esse estudo, pois trabalham com a representação simbólica e não simbólica do número, sem exigir conhecimento específico de unidades de medida, por exemplo. Entretanto, como já discutido, nem por isso podem ser consideradas medidas puras de estimativa, já que outros fatores, como habilidades viso-espaciais e familiaridade das crianças com números podem estar fortemente relacionadas às habilidades de estimativa. Se esses testes revelassem uma medida pura, seus resultados não seriam influenciados por outras variáveis e habilidades. Ou seja, a estimativa numérica pode até ser uma boa medida de representação interna, mas não é pura, pois é influenciada por outras habilidades.

No Brasil, a discriminação de quantidades discretas é uma atividade amplamente realizada para a compreensão numérica inicial e introdução de operações matemáticas, e, talvez por isso, as crianças tenham apresentado maior precisão no TENQ quando comparada à outra tarefa de estimativa. Ao contrário de Siegler e Opfer (2003) que, para seus estudos, consideraram a atividade de estimativa na reta numérica de alta validade ecológica, já que as crianças estariam familiarizadas com a reta numérica, ainda nos primeiros anos de educação formal.

Nesse estudo, encontrou-se que a precisão obtida no TENQ é sempre melhor do que a obtida no TERN, em qualquer variação (aglomerado ou espaçado), em qualquer escala e em qualquer escola, discordando de achados anteriores de Dorneles e colaboradores (2017) para alunos de 2º e 3º ano, sendo este, até onde se sabe, o único estudo que buscou comparar o desempenho em duas tarefas de estimativa numérica. Para ambas as tarefas, pode ser considerado que as crianças são relativamente familiarizadas com as habilidades básicas necessárias para sua compreensão, como o sistema numérico no intervalo especificado e raciocínio proporcional para posicionar números na reta numérica e deduções multiplicativas entre as linhas e colunas das matrizes apresentadas.

Relacionando as duas tarefas de estimativa (TENQ e TERN) com o TDE, para a escala 100, o desempenho em TENQ sempre esteve correlacionado com o desempenho em TERN, bem como, o desempenho de ambos também apresentaram correlação forte ou moderada com o TDE. Ou seja, nesta escala, as crianças que são habilidosas em um tipo de estimativa tendem a ser mais hábeis em outra tarefa de estimativa numérica, mostrando avanços paralelos para anos escolares semelhantes. Da mesma maneira, o desempenho em estimativa esteve moderadamente correlacionado ao desempenho aritmético.

Como já destacado em estudo anterior de Dorneles e colaboradores (2017), para tentar explicar essas diferenças encontradas nos diferentes testes de estimativa, pode-se destacar os seguintes fatores: 1) o TERN exige uma transposição de um conhecimento numérico (simbólico e discreto) para uma posição em uma linha (conhecimento numérico não simbólico e contínuo), enquanto que o TENQ requer a transposição de uma estimativa perceptiva (não simbólica) a um conhecimento numérico simbólico; 2) no TENQ, na situação de itens espaçados, não é possibilitado à criança realizar contagem discreta dos itens (também em virtude do tempo de apresentação), ao contrário do que ocorre na situação de itens aglomerados, em que, assim como no TERN as crianças podem tentar uma representação de quantidade discreta, por estratégias multiplicativas. Contudo, considerando os resultados deste estudo, pode-se dizer que ambas as tarefas trazem medidas relevantes de estimativa numérica, e que se encontram correlacionadas entre si, quando algumas habilidades estão envolvidas.

As diferenças encontradas nos estudos sobre correlação entre habilidades de estimativa e aritmética (BOOTH & SIEGLER, 2006; SIEGLER & MU, 2008; MULDOON et al., 2011) comprovam ligações entre as habilidades espaciais e conhecimentos do sistema numérico (pelo menos para o intervalo especificado), requerendo conhecimentos e processos de ambos os domínios. Por isso, parece bastante provável que, mesmo que ambos os testes meçam habilidades de estimativa, as moderadas correlações entre as os testes podem indicar que suas tarefas estejam relacionadas a algumas funções cognitivas subjacentes diferentes.

4.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A principal questão que foi discutida neste estudo é em qual das tarefas de estimativa, estudantes de 5º e 6º ano são mais precisos, observando as diferentes escalas e os diferentes instrumentos de estimativa, além de comparar o desempenho nas diferentes tarefas de estimativa com o desempenho em aritmética. Para alcançar esse objetivo, foi comparada a precisão de crianças em duas tarefas de estimativa: Teste de Estimativa de Quantidades e Teste de Estimativa na Reta Numérica, variando o intervalo numérico e a densidade de pontos, além de comparar o desempenho de crianças nessas tarefas de estimativa, com o desempenho obtido em um teste padronizado de desempenho escolar aritmético, o TDE.

Na comparação da precisão dos estudantes de 5º e 6º ano nos diferentes testes de estimativa (TERN ou TENQ), tinha-se como hipótese que as crianças seriam mais precisas na tarefa de estimativa de quantidades quando comparada a tarefa de estimativa na reta numérica. Essa suposição foi gerada a partir da constatação de que a reta numérica é um instrumento pouco utilizado nas escolas brasileiras, enquanto a quantificação de elementos é bastante difundida, em especial nos anos iniciais. Após analisados os resultados, essa hipótese foi confirmada.

Por último, compararam-se os resultados obtidos nos dois testes de estimativa com o desempenho em aritmética, a partir do TDE. Tinha-se como hipótese que ambos os testes devem refletir no desempenho em aritmética das crianças, tendo em vista as evidências de que estimativa e aritmética são habilidades que têm se mostrado intimamente relacionadas. Nos dados da pesquisa, não foi encontrado respaldo para a afirmação de que o TERN ou o TENQ sejam preditivos do conhecimento em aritmética ou o contrário, em conformidade com outros estudos ainda inconclusivos, mas correlações moderadas a fortes foram estabelecidas quando considerado o intervalo numérico de 0 a 100.

Esta última afirmação abre a discussão para pesquisas futuras, sugerindo ampliação de escala na comparação entre tarefas. Entretanto, ressalta-se a ideia de que estratégias de estimativa numérica nos seus mais diversos tipos de tarefas devem ser discutidas em sala de aula. Mesmo que estudos futuros cheguem a conclusões consistentes de que não há uma relação de causalidade entre estimativa e contagem exata, somente a frequência do uso cotidiano desta habilidade já justificaria essas discussões.

Entendende-se como uma das limitações do estudo, sugere-se ampliação da quantidade de diferentes valores testados, sendo que, neste estudo, apenas oito números foram estimados em ambas as tarefas. Também se ressalta a diferença entre os tempos dados para a realização de cada teste, sendo poucos segundos (1 a 10) para cada tarefa do TENQ, 30 segundos para cada tarefa do TERN e tempo livre, restrito ao período escolar (50 min) para todas as tarefas do TDE. Esse também pode ter sido um fator influenciador nos resultados encontrados.

Para pesquisas futuras, sugere-se, ainda, verificar e analisar os processos cognitivos envolvidos em ambas as tarefas, para compreender se seria possível ou não estabelecer uma relação de causalidade entre estimativa e aritmética. Sabe-se que variações possíveis das tarefas, como quando se aplicam quantidades numéricas maiores, estimar números já posicionados ou quantidades sugeridas a grupos de itens também poderiam mostrar resultados diferentes.

Não foi controlado o conhecimento do sistema numérico dos sujeitos, embora tenha-se fortes indícios de que todas as crianças estivessem familiarizadas com os três intervalos numéricos apresentados. Não foi discutido se a tarefa de estimativa na reta numérica reflete ou não uma reta numérica mental interna, uma vez que este não era o objetivo do estudo. Da mesma forma, não se discutiu sobre os modelos de representação interna nas conclusões sobre as análises. Provas relacionadas à velocidade com que as crianças realizaram as estimativas não foram testadas neste estudo, considerando que o tempo de execução de cada teste foi o mesmo para todos os participantes.

Sobre a reta numérica, a partir dos mais diversos estudos existentes e discutidos aqui, considera-se que ela possa ser uma ferramenta útil para melhorar a compreensão numérica. Além disso, fornecer feedback sobre locais reais dos números pode aumentar a compreensão do sistema decimal e a dependência de representações lineares de números, o que pode favorecer o estabelecimento de estimativas mais precisas. Assim, a experiência com a estimativa na reta numérica pode ajudar as crianças a compreender o significado dos números.

A estimativa de pontos em um conjunto pode apresentar diferentes vantagens matemáticas. Quando dispostos em uma matriz, podem sugerir que as crianças elaborem conceitos intuitivos de área relacionando a quantidade de linhas e colunas da matriz. Em outra perspectiva, quando estes itens são aleatoriamente distribuídos, algumas estratégias de contagem precisam ser ativadas. Em especial, estas estratégias são de grande utilidade no cotidiano e em muitas situações substituem a contagem exata.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, M. M. D. O. *A aprendizagem da Estimação Matemática: um estudo no 2o ciclo.* Dissertação de Mestrado. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 1996.

BARTH, H. C.; PALADINO, A. M. The Development of Numerical Estimation: Evidence Against a Representational Shift. *Developmental Science*, 14, p. 125- 135, 2011.

BERTELETTI, I.; LUCANGELI, D., PIAZZA, M.; DEHAENEZ, S.; ZORZI, M. Numerical Estimation in Preschoolers. *Developmental Psychology*, 46 (2), p.545–551, 2010.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation. *Developmental Psychology*, 41, p. 189–201, 2006.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning. *Child Development*, 79 (4), p.1016 – 1031, 2008.

DACKERMANN, T.; HUBER, S.; BAHNMUELLER, J.; NUERK, H-C.; MOELLER, K. An Integration of Competing Accounts on Children's Number Line Estimation. *Frontiers in Psychology*, v. 6, n. 884, 2015.

DEHAENE, S. *The Number Sense: How the mind creates mathematics.* New York: Oxford University Press, 1997.

DEHAENE, S.; IZARD, V.; SPELKE, E.; PICA, P. Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures. *Stanislas Science,* 320, p. 1217, 2008.

DORNELES, B. V.; DURO, M. L.; RIOS, N. M. B.; NOGUES, C. P.; PEREIRA, C. S. Number Estimation in Children: an assessment study with number line estimation and numerosity tasks. In Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), 10., 2017, Dublin City University, 2017.

EBERSBACH, M.; LUWEL, K.; FRICK, A.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Relationship Between the Shape of the Mental Number Line and Familiarity with Numbers in 5- to 9-year old children: evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99, p.1–17, 2008.

EBERSBACH, M.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. The Relationship Between Children's Familiarity with Numbers and Their Performance in Bounded and Unbounded Number Line Estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, 17:2-3, p.136-154, 2015.

GANDINI, D.; LEMAIRE, P.; DUFAU, F. Older and Younger Adults' Strategies in Approximate Quantification. *Acta Psychologica*, 129, p.175–189, 2008.

GIBBON, J.; CHURCH, R. M. Time Left: Linear Versus Logarithmic Subjective Time. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 7(2), p.87-108, 1981.

GILMORE, C.; MCCARTHY, S.; SPELKE, E. Non-symbolic Arithmetic Abilities and Achievement in the First Year of Formal Schooling in Mathematics. *Cognition*, 115(3), p. 394–406, 2010.

HUNTLEY-FENNER, G. Children's Understanding of Number is Similar to Adults' and Rats': numerical estimation by 5±7-year-olds. *Cognition*, 78, p. B27-B40, 2001.

LASKI, E. V.; SIEGLER, R. S. Is 27 a Big Number? Correlational and Causal Connections Among Numerical Categorization, Number Line Estimation, and Numerical Magnitude Comparison. Child Development, 78 (6), p. 1723 – 1743, 2007.

LEFEVRE, J.; LIRA, C. J.; SOWINSKI, C.; CANKAYA, O.; KAMAWAR, D.; SKWARCHUK, S. Charting the Role of the Number Line in Mathematical Development. *Front. Psychol,* 4, 2013.

LEMAIRE, P.; LECACHEUR, M. Aging and Numerosity Estimation. Journal of Gerontology: *Psychological Sciences*, 62B (6), p. 305–312, 2007.

LEVINE, D. R. Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 350-359, 1982.

LIPTON, J. S.; SPELKE, E. S. Preschool Children's Mapping of Number Words to Nonsymbolic Numerosities. *Child Development*, 76:5, p. 978 – 988, 2005.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Adapting Strategy Choices to Situational Factors: the effect of time pressure on children's numerosity judgment strategies. *Psychologica Belgica*, 2003.

MATEJKO, A. A.; ANSARI, D. Trajectories of Symbolic and Nonsymbolic Magnitude Processing in the First Year of Formal Schooling. *PlosOne*, p.1-15, 2016.

MAZZOCCO, M. M. M.; FEIGENSON, L.; HALBERDA, J. Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. *PlosOne*, 6 (9), 2011.

MENZIES, V.; MULDOON, K.; SIMMS, V.; TOWSE, J.; PERRA, O. A Longitudinal Analysis of Estimation, Counting Skills, and Mathematical Ability Across the First School Year. *Developmental Psychology*, 49 (2), p. 250–257, 2013PlosOne, 6 (9), 2013.

MOELLER, K.; PIXNER, S.; KAUFMANN, L.; NUERK, H. Children's Early Mental Number Line: Logarithmic or decomposed linear? *Journal of Experimental Child Psychology*, 103 (4), p. 503–515, 2009.

MULDOON, K.; SIMMS, V.; TOWSE, J.; MENZIES, V.; YUE, G. Cross-Cultural Comparisons of 5-Year-Olds' Estimating and Mathematical Ability. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42(4), p. 669–681, 2011.

NUERK, H. C.; KAUFMANN, L.; ZOPPOTH, S.; WILLMES, K. On the Development of the Mental Number Line: more, less or never holistic with increasing age? *Developmental Psychology*, 40(6), p. 1199–1211, 2004.

OBERSTEINER, A.; REISS, K.; UFER, S.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Do First Graders Make Efficient Use of External Number Representations? The Case of the Twenty-Frame. *Cognition and Instruction*, 32(4), p. 353–373, 2014.

OPFER, J.; SIEGLER, R. Representational Change and Children's Numerical Estimation. *Cognitive Psychology*, 55, p. 169–195, 2007.

PARK, J.; BRANNON, E. M. Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. *Psychol Sci*, 24(10), p. 2013-9, 2013.

PIAZZA, M.; MECHELLI, A.; PRICE, C. J.; BUTTERWORTH, B. Exact and Approximate Judgments of Visual and Auditory Numerosity: An fMRI study. *Brain Research*, 1106, p. 177–188, 2006.

ROUSSELLE, L.; NOËL, M. P. The Development of Automatic Numerosity Processing in Preschoolers: Evidence for numerosity-perceptual interference. *Developmental Psychology*, 44(2), p. 544-560, 2008.

SASANGUIE, D.; REYNVOET, B. Number Comparison and Number Line Estimation Rely on Different Mechanisms. *Psychologica Belgica*, 53:4, p. 17-35, 2013.

SCHNEIDER, M.; GRABNER, R. H.; PAETSCH, J. Mental Number Line, Number Line Estimation, and Mathematical Achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101, p. 359–372, 2009.

SIEGLER, R. S.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development*, 75, p. 428–444, 2004.

SIEGLER, R. S; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation: A Review. In CAMPBELL, J. I. D. *Handbook of Mathematical Cognition*. Psychology Press: New York. Cap. 2, p. 197-212, 2005.

SIEGLER, R. S.; MU, Y. Chinese Children Excel on Novel Mathematics Problems Even Before Elementary School. *Psychological Science*, 19, p. 759-763, 2008.

SIEGLER, R. S.; OPFER, J. E. The Development of Numerical Estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, p. 237-243, 2003.

STEIN, L. TDE: *Teste de Desempenho Escolar: manual para a aplicação e interpretação.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

SULLIVAN, J. L.; JUHASZ, B. J.; SLATTERY, T. J.; BARTH, H. C. Adults' Number-line Estimation Strategies: Evidence from eye movements. *Psychon Bull Rev*, 18, p. 557–563, 2011.

THOMPSON, C. A.; SIEGLER, R. S. Linear Numerical-Magnitude Representations Aid Children's Memory for Numbers. *Psychological Science*, 21(9), p. 1274–1281, 2010.

WHITE, S. L. J.; SZŰC, D. Representational Change and Strategy use in Children's Number Line Estimation During the First Years of Primary School. *Behavioral and Brain Functions*, 8:1, 2012

XU, F.; SPELKE, E. S. Large Number Discrimination in 6-month-old Infants. *Cognition*, 74, B1–B11, 2000.

XU, F. Numerosity Discrimination in Infants: Evidence for two systems of representations. Cognition, 89, p. B15–B25, 2003.

XU, X.; CHEN, C.; PAN, M.; LI, N. Development of Numerical Estimation in Chinese Preschool Children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, p. 351–366, 2013.

5 ESTUDO 3 - ESTRATÉGIAS DE ESTIMATIVA NUMÉRICA

RESUMO

Há um conjunto de evidências que tem relacionado a habilidade de estimativa numérica ao desempenho matemático. Entretanto, observa-se que os resultados trazidos por estudos desta área são ainda inconsistentes e, muitas vezes, contraditórios. Nesta perspectiva, o presente estudo teve como objetivo verificar quais as estratégias foram mais utilizadas por 30 crianças do 2º ao 6º ano escolar (6 de cada ano), de uma escola pública da cidade de Porto Alegre/RS, para realizar estimativa numérica nas duas tarefas do estudo anterior: TENQ e TERN, a partir de entrevistas individuais semiestruturadas. O principal objetivo desse estudo foi, além de elencar as principais estratégias apresentadas, indicar quais foram mais frequentes e/ou mais precisas. Foram encontradas 7 diferentes estratégias para as tarefas do TENQ e 8 estratégias para as do TERN, que variavam de simples contagem exata até estratégias mais complexas, envolvendo estruturas multiplicativas de fator proporcional. Os resultados indicaram que, para o TENQ, as crianças, dos diferentes anos escolares não diferiram quanto ao tipo de estratégia utilizada, mas sim na eficiência da sua utilização. Além disso, as crianças apresentaram maior frequência e precisão em estratégias de contagem exata para pequenas quantidades, mantendo a alta frequência, mas diminuindo a precisão, no uso desta estratégia para grandes quantidades. Para o TERN, a estratégia de contagem continuou sendo a de maior frequência, porém com baixa precisão. Para este teste, os estudantes com maior nível de escolaridade utilizaram estratégias mais complexas, que ainda não estavam acessíveis aos de menor escolaridade, e estas estratégias possibilitaram estimativas mais precisas.

Palavras-chave: Estimativa Numérica de Quantidades. Estimativa na Reta Numérica. Estratégias de Estimativa.

5.1 INTRODUÇÃO

Estimativa numérica é a capacidade de realizar suposições razoáveis de respostas aproximadas a problemas, sem a execução prévia de cálculos ou quantificações exatas (DOWKER, 1992), sendo de fundamental importância, tanto na escola quanto fora dela. Além disso, já é sabido que o desempenho em estimativa se correlaciona com o desempenho em matemática (BOOTH & SIEGLER, 2006; LASKI & SIEGLER, 2007; SIEGLER & BOOTH, 2004), com a aprendizagem de aritmética (BOOTH & SIEGLER, 2008; LASKI & SIEGLER, 2007; LEFEVRE et al., 2013; SIEGLER & BOOTH, 2004), e com a memorização de números (THOMPSON & SIEGLER, 2010).

A capacidade de realizar estimativas com maior precisão pode ajudar o sujeito a selecionar uma estratégia adequada para solução de um problema (REYS, 1986). Ao realizar estimativas, cada indivíduo utiliza determinado procedimento ou estratégia que melhor se adapte a suas estruturas de pensamento. Define-se estratégia de resolução de um problema de estimativa todo o processo que envolve a escolha do método de estimativa, desde a preparação dos dados, da quantificação mental, da compensação, da avaliação, até a indicação do resultado (AZEVEDO, 1996). Esse conjunto de procedimentos utilizados na busca por uma resposta plausível e adaptada aos conhecimentos e necessidades do sujeito, tende a gerar caminhos diversos.

Estudos recentes têm mostrado que as pessoas conhecem e utilizam várias estratégias para realizar tarefas cognitivas (LUWEL & VERSCHAFFEL, 2003). Por este motivo, em estimativa, podem ser distinguidas diferentes estratégias de resolução e essa variabilidade das estratégias é explicada por Huntley-Fenner (2001) como sendo o resultado do pouco conhecimento sobre estratégias de estimativa, já que, grande parte das estratégias utilizadas por pessoas com grande capacidade de realizar estimativas, foram desenvolvidas independentemente do ensino formal da escola (REYS, 1986). Uma consequência importante dessa variabilidade estratégica é que, para cada situação, o indivíduo é desafiado a escolher uma estratégia que é mais adaptável para sua solução.

Entretanto, mesmo tendo sido sugerida uma variedade de métodos de realizar estimativa, pouco se sabe sobre como as pessoas de fato realizam estimativas (LEMAIRE & LECACHEUR, 2007; LEVINE, 1982). Em estudos de processamento numérico com adultos (DOWKER, 1992), determinou-se que muitas estratégias diferentes podem ser utilizadas para resolver um problema único, sendo que a seleção da estratégia individual para o mesmo problema pode variar. Grande parte das pesquisas sobre estratégias de crianças descrevem o uso de determinada estratégia para resolver uma tarefa específica em uma determinada idade, sendo esta estratégia modificada quando elas tornam-se um pouco mais velhas e, assim, até que atinjam uma estratégia considerada mais refinada (LUWEL et al., 2000).

No entanto, outras pesquisas sobre o desenvolvimento das estratégias de crianças têm revelado que elas, em determinada idade, passam a utilizar uma variedade de estratégias para resolver um único problema (LUWEL & VERSCHAFFEL, 2003; LUWEL et al., 2001). Essa nova perspectiva parece bastante interessante do ponto de vista da educação matemática, tendo em vista que o uso de múltiplas estratégias permite adaptar a solução de um problema às suas características inerentes, como o seu grau de dificuldade e as exigências da situação a qual é proposto, observando o tempo de resposta e a precisão necessários para sua resolução.

O desenvolvimento cognitivo é caracterizado por dois fatos fundamentais: a coexistência de diferentes procedimentos para realizar uma tarefa e a mudança constante na utilização e na frequência destes procedimentos (LEMAIRE & SIEGLER, 1995). Esta variabilidade decorre de mudanças nos fatores internos (cognitivos) e de fatores externos (características individuais dos problemas apresentados). De acordo com Lemaire e Siegler (1995), diferentes componentes cognitivos devem ser considerados para melhor descrever o desempenho dos participantes: o repertório, a distribuição, a execução e a seleção de estratégias. Essas dimensões referem-se às diferentes estratégias utilizadas por um indivíduo para realizar uma tarefa, o desempenho resultante da utilização de uma determinada estratégia e as variáveis que influenciam a forma como os participantes as escolhem.

Nesse contexto, o presente estudo foi projetado para a) avaliar o desempenho em estimativa de 30 crianças do 2º ao 6º ano através da avaliação de duas tarefas de estimativa numérica; b) compreender, através de seus relatos e ações frente a solução dos problemas, o pensamento estratégico envolvido em cada situação, c) fazer um levantamento sobre as principais estratégias utilizadas nas diferentes etapas escolares e d) verificar se existe uma relação entre o tipo de estratégia de estimativa e a precisão do resultado

A análise de estratégias de estimativas sugere a hipótese de que, se o conhecimento numérico e as habilidades cognitivas gerais são desenvolvidos com a idade e com a experiência, a precisão dos julgamentos de quantidade e da posição na reta numérica também deveriam aumentar com a idade, assim como quanto maior o tamanho da matriz e, por consequência, das quantidades, maior a chance de obter uma resposta menos precisa. Embora desde os estudos de Levine (1982), pelo menos, já se soubesse de uma variedade de métodos de estimativa, ainda pouco se sabe sobre como as pessoas realizam estimativas, mesmo entendo que sejam relevantes as contribuições desses achados para o ensino de matemática.

5.2 REFERENCIAL TEÓRICO

5.2.1 Estratégias de Estimativa Numérica de Quantidades

Sabe-se que o número de estratégias que as pessoas usam aumenta com a idade e a experiência (CRITES, 1992; SIEGEL; GOLDSMITH & MADSON,1982), assim como a sofisticação das estratégias que são utilizadas (SIEGLER & BOOTH, 2005). Atendando-se para pesquisas sobre as mudanças de estratégias, Lemaire e

Siegler (1995) verificaram que crianças de 2ª e de 6ª série utilizam as mesmas estratégias para ENQ, entretanto, os mais velhos são capazes de julgar a melhor estratégia, de acordo com a situação.

Dois anos depois, os mesmos pesquisadores (SIEGLER & LEMAIRE, 1997) criaram um método bastante utilizado para identificar características das estimativas: o método de escolha/não-escolha, no qual o sujeito é solicitado a realizar estimativas podendo escolher a estratégia (escolha) ou sendo exigida a utilização de estratégia específica (não escolha). Entretanto, mais de uma década depois da introdução do método de escolha/não escolha por Siegler e Lemaire (1997), Luwel e colaboradores (2009) apresentaram questionamentos sobre o fato dos resultados desse método serem influenciados pelo tipo de problema em que as estratégias são utilizadas e quanto às diferenças individuais de preferência de estratégia, além de o método não permitir estudar a adaptabilidade das escolhas estratégicas.

No estudo de Verschaffel e colaboradores (1998), estudantes da 2ª e 6ª série e alunos universitários realizaram estimativas da quantidade de blocos apresentados em uma matriz 10x10 de quadrados. De acordo com os pesquisadores, pelo menos duas diferentes estratégias deveriam ser utilizadas: adição dos grupos de blocos e subtração da quantidade de quadrados vazios do total de quadrados da matriz. Os resultados mostraram que os participantes geralmente escolhem a estratégia de adição dos itens para poucas quantidades apresentadas e a estratégia de subtração de itens para grandes quantidades.

Mais adiante, Luwel e colaboradores (2000) complementaram a lista de estratégias encontradas anteriormente, sugerindo uma terceira estratégia, que foi utilizada tanto para matrizes mais cheias quanto mais vazias, que consistia em uma estimativa rápida e imprecisa dos itens. Os autores seguiram pesquisando as estratégias e, em 2001, Luwel e colaboradores (2001) verificaram que o uso da estratégia de adição (para pequenas quantidades apresentadas) e de subtração (para grandes quantidades) aumentou com a idade, consequentemente diminuindo com a idade o uso exclusivo da estratégia de adição. Além disso, a informação sobre o tamanho da matriz foi essencial para que os alunos da 6ª série fossem mais precisos do que os da 2ª série. Mais tarde, ampliando ainda mais a lista de estratégias utilizadas para resolver tarefas ENQ proposta por Luwel e colaboradores (2000) – adição, subtração e estimativa rápida – Gandini, Ardiale e Lemaire (2010) revelaram seis estratégias a) fixação, b) referência, c) decomposição/recomposição, d) aproximação de contagem, e) contagem exata e f) outras.

Continuando suas pesquisas sobre estratégias de ENQ, Luwel e Verschaffel (2003) verificaram que o repertório de estratégias dos participantes e a frequência e eficiência de utilização das estratégias foram afetados pelo tempo. A grande maioria das crianças aplicou a estratégia de adição e subtração, mas, com o aumento das limitações de tempo, mais participantes usaram estratégias alternativas. Este resultado é consistente com os resultados de estudos anteriores, em que o tamanho da matriz, em vez do tempo de apresentação, foi manipulado (LUWEL et al., 2000; 2001). Estes estudos demonstraram uma mudança semelhante no repertório estratégico das crianças quando o tamanho da matriz aumentava.

Sobre a frequência relativa com que as estratégias foram aplicadas, Luwel e Verschaffel (2003) observaram que houve uma diminuição significativa da utilização das estratégias de adição e subtração relativamente precisas com o aumento da pressão de tempo e da aplicação de um número de estratégias alternativas relativamente menos precisas. Este achado está de acordo com os resultados dos estudos de Luwel e colaboradores (2000, 2001), que mostraram que, quanto maior o tamanho da matriz, menos as estratégias de adição ou de subtração são utilizadas. Luwel e Verschaffel (2008) observaram que o fornecimento de *feedback* sobre as escolhas de estratégias das crianças resultou em melhoria de suas estimativas mais do que apenas os informar sobre a precisão de seus resultados.

Também foi comprovada a influência da estratégia utilizada anteriormente na escolha da estratégia subsequente, desde que não fosse evidente o uso de uma estratégia específica para a tarefa (SCHILLEMANS et al., 2011). Por outro lado, os pesquisadores não encontraram dados relevantes que comprovassem que a repetição de determinada estratégia utilizada em problema anterior seria utilizada de maneira mais forte de que quando ela tivesse sido utilizada por mais de uma vez em estratégias anteriores.

Sabe-se que as estratégias utilizadas para ENQ podem variar de acordo com o formato de apresentação do estímulo (SIEGLER & BOOTH, 2005). Por exemplo, quando os itens são apresentados em uma grade regularmente espaçada e de proporções conhecidas (por exemplo, 10 linhas e 10 colunas), ou quando sua distribuição é aleatória. Algumas estratégias gerais utilizadas para este tipo de estimativa já foram identificadas, em especial, para itens espaçados regularmente e apresentados numa grade de proporções conhecidas (matriz). Também já foi discutido que as opções de estratégia são, em grande parte, determinadas pelos números relativos de espaços vazios e cheios da matriz. Para arranjos irregulares de objetos, pouco se sabe sobre como as estratégias de estimativa de quantidades são escolhidas (SIEGLER & BOOTH, 2005).

Os estudos de estratégia em Estimativa Numérica de Quantidades (ENQ) tem uma forte tradição se considerado estudos sobre mudança estratégica, por exemplo. Entretanto, não há relatos que comparem a escolha estratégica em diferentes tarefas de estimativa, como foi proposto neste estudo.

5.2.2 Estratégias de Estimativa na Reta Numérica

A capacidade das crianças em traduzir números em posições sobre retas numéricas pode fornecer informações importantes sobre sua representação da magnitude numérica (SIEGLER & BOOTH, 2005). Questionando o fato de a estimativa na reta numérica ser ou não uma medida pura de representação da magnitude numérica interna, alguns autores propõem que a melhoria de desempenho nessa tarefa pode ser explicada pela variedade de estratégias disponíveis e não por mudanças de sua representação mental (PEETERS; VERSCHAFFEL & LUWEL, 2016). A precisão individual da estimativa na reta numérica foi relacionada à habilidade matemática geral (SIEGLER & BOOTH, 2004) e melhora com a idade (SIEGLER & OPFER, 2003). Entretanto, estudos que utilizaram diferentes métodos de avaliação, sugeriram que alterações da faixa de números testados poderiam influenciar o desempenho em estimativa (SULLIVAN et al., 2011).

Tal como acontece com outros tipos de estimativa, sabe-se que crianças e adultos usam várias estratégias para realizar estimativa na reta numérica. Entretanto, as estratégias para estas tarefas, diante de revisão realizada, ainda são pouco discutidas. Booth e Siegler (2006; 2008) sugerem que as crianças não usam de estratégias para resolver ERN, mas que fazem uma relação com uma reta numérica interna, que seria a tradução da sua forma de representação numérica mental. Ao contrário, Barth e Paladino (2011) sugerem que as crianças criam estratégias de ERN na medida que se utilizam de marcos de referência, além dos pontos de início e fim da reta numerada, para realizar estimativas proporcionais. Ou seja, particionam a reta ao meio ou em quartos, por exemplo, para posicionar números próximos a estes marcos a partir de um julgamento de proporção.

Entretanto, mesmo que o desempenho na reta numérica, como reflexo de uma reta numérica mental interna, possa ser questionado, o progresso do desempenho mais linear pode ser usado como um índice do crescimento na compreensão das crianças sobre o sistema numérico simbólico (BOOTH e SIEGLER, 2006). Sendo assim, pode-se considerar que o conhecimento do sistema de numeração é também um preditor do desempenho em ERN, na medida em que se utilizem estratégias que envolvem a criação de um ponto de referência para realizar a estimativa do tamanho de uma parte da reta em relação ao tamanho total dela (BARTH & PALADINO, 2011).

A linearidade da ERN também depende da familiaridade das crianças com o intervalo numérico apresentado. Por exemplo, alunos da 2ª série contam com a representação linear para números na escala de 0-100, mas contam com a representação logarítmica para a escala 0-1000 (SIEGLER & OPFER, 2003). Mais recentemente tem se observado progressos usando de rastreamento ocular (SCHNEIDER; GRABNER & PAETSCH, 2009), sugerindo variação nas estratégias das crianças com base em características estruturais, tais como orientação ou pontos de referência.

Crianças mais novas, frequentemente, usam estratégias de contagem, que envolvem quebras imaginárias discretas em uma reta contínua. O uso da estratégia de contar envolve, primeiramente, decidir onde começar a contagem. As três estratégias de contagem mais comuns são: a) contagem total; b) contagem para cima/para baixo a partir do menor/maior valor e c) realizar estimativa de um valor médio e contar para cima ou para baixo a partir dele (SIEGLER & OPFER, 2003). Então, a variabilidade das estimativas, também estaria relacionada à distância do número a ser estimado até um ponto de referência subjetivamente criado.

De tal modo, a contagem de 1 em 1 resulta numa estimativa fortemente influenciada pela distância dada a partir do ponto de referência mais próximo. Quando as crianças usam uma representação logarítmica, as posições espaciais aumentam muito rapidamente para os números menores e depois estabilizam na parte superior do intervalo. Entretanto, evidências consideráveis indicam que as crianças usam ambas as representações. Melhor utilização de estratégias de contagem, por sua vez, parece refletir o desenvolvimento das habilidades de contagem e de compreensão conceitual de magnitude numérica.

Já as crianças mais velhas usam estratégias de raciocínio proporcional para posicionar números na reta numérica, em que cada número é representado como uma proporção da reta numérica (BARTH & PALADINO, 2011), refletindo o modelo de proporcionalidade, baseado em pontos de referência que dividem a reta numérica em pontos específicos e servem como referência para orientar as estimativas (PEETERS; VERSCHAFFEL & LUWEL, 2016). Assim, as estimativas de números que estão mais próximos dos marcos seriam mais precisas do que as estimativas dos números localizados mais distantes dos marcos.

5.3 MÉTODO

5.3.1 Amostra

Este estudo foi realizado individualmente com 30 crianças do 2º ao 6º ano (6 alunos de cada ano) de uma escola pública municipal de ensino fundamental, na cidade de Porto Alegre/RS. A escolha da amostra se deu a partir da disponibilidade e aceitação em participar desta etapa individual da pesquisa e porque os alunos realizaram todas as partes anteriores da pesquisa, que contém os demais estudos desta tese, sendo liberados de suas atividades de sala de aula pelo professor. Foram escolhidas crianças a partir do 2º ano escolar por já ser constatado, a partir de informação da equipe pedagógica, que estes alunos já estão familiarizados com números até 100 (intervalo numérico máximo utilizado na pesquisa) e já conhecerem os fundamentos conceituais ou processuais das operações de adição, subtração e multiplicação.

5.3.2 Instrumentos de Coleta de Dados

Para compreender os processos de realização de estimativas numéricas, utilizou-se dois instrumentos: TENQ e TERN.

a) Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ): Para compreender as estratégias utilizadas para realizar estimativas numéricas de quantidades utilizou-se o TENQ (Apêndice A), instrumento estruturado e organizado pela pesquisadora, que consiste em atribuir um número a um conjunto discreto de pontos pretos, de igual tamanho. O instrumento é composto por 64 tarefas subdivididas em diferentes formas de apresentação e diferentes quantidades de itens, que poderiam estar sobre uma grade regularmente espaçada (matriz) ou aleatoriamente distribuídos na tela.

A primeira escala (E10), consistia em uma matriz 10x1 de quadrados brancos, contendo as quantidades de 4 e 7 pontos distribuídos. A segunda escala (E20), em uma matriz 10x2, estavam distribuídas as quantidades 4, 7, 9 e 17. Por último, os alunos foram convidados a realizar estimativas das quantidades: 4, 7, 9, 17, 25, 49, 78 e 95 em uma matriz 10x10 (E100). Destaca-se que foi levado em consideração os indícios de que as estratégias e a precisão na realização de estimativa variam com o formato de apresentação, bem como com o fato de conhecer ou desconhecer o número máximo de pontos em cada matriz (intervalo de valores possíveis). Então, para cada uma das três escalas, os pontos poderiam estar distribuídos de forma aglomerada (A) ou espaçadas (E) na matriz, ou de maneira aleatória (AL), sem o auxílio da grade. Em uma primeira apresentação de cada quantidade os alunos desconheciam a quantidade máxima de pontos da matriz (Máximo Desconhecido – MD) e, posteriormente, realizavam as mesmas estimativas conhecendo esta informação (Máximo Conhecido – MC).

b) Teste de Estimativa na Reta Numérica (TERN): O TERN (Apêndice B) exige que os sujeitos marquem pontos correspondentes a números específicos ao longo de uma reta numérica de 25 cm, delimitada à esquerda por 0 e à direita por 10, 20 ou 100, dependendo da escala adotada. Para compreender o processo de realização de estimativa na reta numérica, utilizou-se as mesmas quantidades e escalas do TENQ, a fim de comparar seus resultados. No total, 14 números deveriam ser posicionados em ordem aleatória: 4 e 7 em todas as escalas, 9 e 17 nas escalas E10 e E20 e 25, 49, 78 e 95 na escala E100. A precisão das estimativas na reta numérica foi determinada pela medida da posição das marcas manuscritas dos participantes sobre as retas e, em seguida, as essas distâncias foram comparadas com o espaço real, através de um gabarito construído em plástico transparente.

5.3.3 Procedimentos para Coleta de Dados

Após explicação sobre os objetivos da atividade, os alunos receberam e assinaram um termo de consentimento quanto à participação na pesquisa (Anexo E). Sendo que, documento semelhante já havia sido previamente remetido aos pais e responsáveis e já estava em posse da pesquisadora (Anexo D). Enquanto realizavam as atividades, o foco da análise era em compreender os processos estratégicos individuais realizados em cada uma das tarefas dos testes.

Usando dois testes diferentes (TENQ – Apêndice A e TERN– Apêndice B), realizou-se uma entrevista semiestruturada (Apêndice C), individualmente, com as 30 crianças. Elas ocorreram durante o período de aula, sendo os entrevistados retirados da sala um a um, permanecendo os demais alunos com a professora. A entrevista foi filmada, a fim de que todos os procedimentos do aluno, sejam eles escritos, verbalizados ou gesticulados pudessem ser analisados e descritos posteriormente. O tempo para realizar as atividades foi de cerca de 45 minutos por teste, ou seja, 1h30 cada entrevista. Todos os participantes foram testados durante uma única sessão.

Apenas permitir que os estudantes realizassem suas estimativas, pouco revelaria sobre os processos usados para obter estimativas. Para determinar quais as estratégias que estavam sendo utilizadas, bem como para garantir que o sujeito estivesse realizando uma estimativa e não um cálculo exato, as crianças foram convidadas a descrever verbalmente seu raciocínio na resolução das tarefas propostas e explicar por que não resolveram o problema de outra maneira. Os protocolos verbais imediatos forneceram dados para compreender as estratégias dos participantes.

De forma alguma a pesquisadora orientou o raciocínio ou o método de solução utilizado pelos alunos, nem sequer interviu durante o processo individual. Apenas ouviu, ao final de cada atividade, o que o aluno tinha a dizer sobre seu pensamento, sugerindo novas perguntas, caso necessário, para a compreensão da lógica utilizada. Também não foi dado *feedback* quanto às respostas corretas ou incorretas.

5.3.4 Análise dos Dados

A pesquisadora viu e ouviu os protocolos gravados, tendo em vista que muitos alunos têm dificuldade de expressar seu pensamento de maneira escrita, e buscou categorizar as respostas. As semelhanças de estratégias forneceram subsídios para a organização da classificação quanto aos tipos de estratégias de estimativas realizadas, de acordo com a forma e a frequência de utilização. Em uma primeira etapa, os dados foram organizados de modo que semelhanças que indiquem tendências fossem consideras mais relevantes. Ainda assim, na sequência, foram formadas categorias de análise entre as estratégias mais comuns utilizadas pelos estudantes, na tentativa de generalizá-las.

5.4 RESULTADOS

Para discutir a frequência e eficácia no uso destas estratégias, realizou-se uma análise estatística baseada em análise descritiva para conhecer a amostra e obter dados sobre a frequência relativa e absoluta, médias e desvio-padrão das respostas, além do mínimo e máximo. Para maiores detalhes sobre a eficácia em termos de precisão baseada nas estratégias utilizadas, realizou-se a análise de *Modelo de Equações de Estimações Generalizada (*GEE) para comparar as médias das Precisões Relativas (PR). Foi utilizado no modelo uma matriz de correlação trabalho independente e uma matriz de covariância de estimador robusto. As comparações múltiplas foram feitas pelo teste de *Bonferroni.*

Para descrever as estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa, alunos do 2º ao 6º ano, e categorizá-las em grupos de procedimentos semelhantes, procedeu-se a análise dos protocolos individuais a partir das entrevistas realizadas. Cada participante pôde escolher a estratégia que considerasse mais adequada para cada situação. A condição de escolha da estratégia forneceu informações sobre o repertório de estratégias dos participantes e sobre a frequência do uso dessas estratégias.

5.4.1 Estratégias de Estimativa Numérica de Quantidades

Foram reveladas sete estratégias utilizadas pelos participantes. Essas estratégias foram categorizadas a partir das características semelhantes entre as estruturas de elaboração dos sujeitos. Quando as quantidades apresentadas eram pequenas (4, por exemplo), os sujeitos tendiam a contar os itens, um a um, de forma a adicioná-los para gerar sua estimativa final. Chamou-se esta estratégia de "Contagem Exata ou Adição".

As estratégias baseadas em estimar subgrupos dentro do agrupamento total de itens, sendo esses grupos compostos de quantidades iguais ou diferentes entre eles, geravam estimativas a partir da adição das quantidades apresentadas em cada grupo ou na multiplicação da quantidade de grupos pela quantidade de itens de cada grupo (no caso de subgrupos de mesma quantidade). Por exemplo, para realizar estimativa de 25 pontos, o sujeito poderia estimar que a imagem apresentava 2 grupos de 10 itens e um grupo de 5 itens, gerando a estimativa 10+10+5=25, ou, para esta mesma situação, o sujeito poderia estimar que continham 5 grupos de 5 itens cada, estimando seu resultado a partir da operação 5x5=25. Para estes casos, categorizou-se a estratégia de “Contagem Aproximada por Grupos”.

Chamou-se de “Subitizing” as estratégias que consistiam, assim como no caso anterior, da separação de itens em subgrupos. Entretanto, esses subgruopos eram bastante pequenos (com até 4 elementos). Ao final dessa subcategorização dos grupos, as crianças poderiam somar as quantidades de cada um deles ou multiplica-las. Retomando o exemplo dos 25 itens, utilizado para exemplificar a categoria de estratégias anterior, um sujeito poderia estimar que na imagem pudessem estar distribuídos 6 grupos de 4 elementos ou 8 grupos de 3 elementos cada, gerando uma estimativa de 6+6+6+6=24 ou 6x4=24, por exemplo.

Outra estratégia encontrada, muito citada na literatura sobre estratégias de estimativa de pontos como estratégia de “Subtração”, supõe, como o próprio indica, a subtração da quantidade de quadrado vazios da quantidade de quadrados que o sujeito acreditava ser a total da matriz. Em geral, esta estratégia foi apresentada para matrizes quase cheias, em que houvesse poucos quadrados vazios. Por exemplo, para estimar 95 pontos em uma matriz 10x10, os sujeitos calculavam os 100 pontos que representaria a matriz cheia e retiravam os 5 quadrados vazios que estimavam a partir da imagem (100-5=95).

Chamou-se de “Fixação”, mantendo o nome sugerido na literatura para esse tipo de estratégia, as situações em que as crianças tentavam enumerar as quantidades apresentadas de uma maneira perceptiva ou até por contagem e, devido ao tempo esgotado de observação, realizavam estimativa rápida e geral dos pontos restantes. A soma dessas duas quantidades estimadas geraria a estimativa final. Por exemplo, para estimar 49 pontos, um sujeito poderia identificar quantidades até 20 por contagem e perceber que a quantidade não enumerada era maior que a já contabilizada, sendo assim, chegaria num valor estimado maior que o dobro de 20, ou seja, maior que 40 pontos.

Outro tipo de pensamento apresentado pelas crianças foi, após o início da contagem de itens da imagem, a tentativa de prosseguir com a contagem a partir de uma imagem mental criada pela sua memória de curto prazo. Esta estratégia foi chama de “Contagem com Recuperação de Memória”. Exemplificando, para estimar uma quantidade de 17 itens, as crianças poderiam contar cerca de 6 pontos, o que era possível devido ao tempo de apresentação da imagem, e, quando aplicada a tela branca, a criança seguia sua contagem, pelo tempo que quisesse, a partir da imagem mental por ela construída.

Por fim, algumas crianças não conseguiram elaborar estratégias para determinadas situações, ou por não se sentirem seguras para tal ou por não obter estruturas suficientes para elabora-las, gerando uma “Estimativa Rápida” dada por intuição. Essas estimativas, em geral, eram dadas ou quando o indivíduo não possuía o tempo necessário, a motivação e/ou os conhecimentos e as habilidades necessários para determinar as quantidades. Essas estratégias e suas características definidoras estão listadas na Tabela 14 e foram obtidas a partir das estimativas realizadas pelos 30 estudantes.

Tabela 14 - Síntese das Estratégias utilizadas no TENQ

Código	Nome	N	%	Descrição
EQ1	Contagem Exata ou Adição	584	29,3	Contagem dos pontos exibidos de forma que sejam adicionados sistematicamente.
EQ2	Contagem Aproximada por Grupos	245	12,3	Separação dos itens em grupos por estimativa e adição/multiplicação das quantidades de cada grupo.
EQ3	*Subitizing* (contagem de grupos de até 4 itens)	51	2,66	Realização de contagem de grupos de até quatro elementos somando-se a quantidade total de grupos.
EQ4	Subtração	183	9,2	Subtração da quantidade de quadrados vazios do total de quadrados da matriz.
EQ5	Fixação (Enumeração + Estimativa)	198	9,9	Enumeração perceptiva de alguns pontos seguido de estimativa geral dos pontos restantes.
EQ6	Contagem com Recuperação de Memória	496	24,9	Contagem um a um seguida de enumeração dos itens a partir de representação mental da imagem.
EQ7	Estimativa Rápida	273	11,9	Relatórios verbais que não correspondem às categorias anteriores e que, em geral, relacionam-se a estratégias de estimativas rápidas e imprecisas.

Analisando os dados apresentados na Tabela 14, verificou-se uma predominância da estratégia de *Contagem Exata ou Adição (EQ1)* em 29,3% dos casos de estimativa, seguida da estratégia *Contagem com Recuperação de Memória* (EQ6 - 24,9%), mostrando que as estratégias mais utilizadas pelos participantes envolvem a contagem exata dos elementos. Ou seja, na maioria dos casos (54,2%) os participantes preferem realizar a contagem individual dos itens do que estabelecer estratégias multiplicativas ou de subtração para obtê-las. Muitas vezes, a recuperação mental da estratégia de *Contagem com Recuperação de Memória* (EQ6) incluía certa contagem nos dedos, indicando também uma soma de blocos estimados.

Em seguida das estratégias de contagem, seguiu-se a estratégia de *Contagem Aproximada por Grupos* (EQ2), com 12,3% de frequência. Considera-se essa uma possibilidade de se obter as estimativas por contagem de linhas completas ou pela soma de quantidades diferentes da linha completa. Sabe-se que essas estratégias envolvem processos viso-espaciais, pois, desde que não se tenha nenhuma boa referência de intervalo para determinada quantidade de pontos apresentados, é preciso decompor o problema. Cada pedaço do todo precisa ser decomposto em pedaços menores que possam ser observados ao mesmo tempo.

As estratégias utilizadas para a estimativa de quantidades variam de acordo com o formato de apresentação do estímulo e a configuração dos pontos. Ainda, se considera importante discutir a frequência destas estratégias considerando-se o ano escolar (Tabela 15) e a estimativa realizada (Tabela 16), indicando qual o principal fator que determina a escolha pela estratégia: o ano escolar e, consequentemente, a idade e a experiência, ou se esta escolha se dá independentemente disso, considerando as características do problema apresentado. Neste caso, as crianças de todos os anos escolares estariam munidas de todo o repertório de estratégias.

Tabela 15 – Frequência de utilização das Estratégias, por ano escolar

	Ano Escolar				
	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano
Estratégia	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)
EQ1	131 (33,5)	115 (29,2)	83 (20,3)	119 (29,6)	136 (34,2)
EQ2	23 (5,9)	37 (9,4)	70 (17,2)	57 (14,2)	58 (14,6)
EQ3	8 (2)	21 (5,3)	3 (0,7)	3 (0,7)	15 (3,8)
EQ4	22 (5,6)	12 (3)	45 (11)	54 (13,4)	50 (12,6)
EQ5	27 (6,9)	33 (8,4)	37 (9,1)	60 (14,9)	41 (10,3)
EQ6	112 (28,6)	117 (29,7)	129 (31,6)	86 (21,4)	52 (13,1)
EQ7	68 (17,4)	59 (15)	41 (10)	23 (5,7)	46 (11,6)
Total	391 (100)	394 (100)	408 (100)	402 (100)	398 (100)

É fácil perceber que as estratégias de *Contagem Exata ou Adição* (EQ1) e de *Contagem com Recuperação de Memória* (EQ6) são as mais frequentes dentre os alunos do 2º ao 5º ano, sendo que no 6º ano a EQ6 não se destaca das demais estratégias, em termos de frequência de utilização, mesmo que EQ1 continue sendo a estratégia mais utilizada. Também á fácil concluir que todas as estratégias estão presentes no repertório dos alunos, independentemente da idade.

Sendo os alunos mais novos incapazes de fazer uma estimativa precisa para quantidades maiores de itens, a estratégia de adição era substituída por uma estratégia cognitivamente menos exigente e mais propensa a erros como a de estimativa rápida, que se chamou de EQ7. Estes mesmos alunos, que ainda não se sentiam plenamente capazes de utilizar a estratégia de *Subtração* (EQ4), continuam a usar outras estratégias de adição (de elementos ou grupos), mesmo quando a grade está quase cheia. Para analisar as estratégias mais utilizadas para cada quantidade apresentada, foram distribuídos os dados coletados na Tabela 16.

Tabela 16 – Frequência das Estratégias utilizadas, por estimativa

	Estimativa							
	4	7	9	17	25	49	78	95
Estratégia	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)
EQ1	390 (100)	177 (45,2)	14 (5,2)	2 (0,7)	0	1 (0,6)	0	0
EQ2	0	22 (5,6)	16 (5,9)	53 (18,7)	38 (24,5)	45 (26,6)	44 (25,9)	27 (16,7)
EQ3	0	27 (6,9)	3 (1,1)	6 (2,1)	5 (3,2)	4 (2,4)	3 (1,8)	2 (1,2)
EQ4	0	20 (5,1)	18 (6,6)	41 (14,4)	2 (1,3)	18 (10,7)	34 (20)	50 (30,9)
EQ5	0	14 (3,6)	18 (6,6)	36 (12,7)	26 (16,8)	39 (23,1)	41 (24,1)	24 (14,8)
EQ6	0	128 (32,7)	182 (67,2)	104 (36,6)	41 (26,5)	21 (12,4)	11 (6,5)	9 (5,6)
EQ7	0	4 (1)	20 (7,4)	42 (14,8)	43 (27,7)	41 (24,3)	37 (21,8)	50 (30,9)
Total	390 (100)	392 (100)	271 (100)	284 (100)	155 (100)	169 (100)	170 (100)	162 (100)

Para verificar quais as quantidades exigiam determinadas estratégias, observou-se uma forte tendência em utilizar a estratégia de *Contagem com Recuperação de Memória* para até 25 itens, sendo essa estratégia substituída pelas estratégias de *Contagem Aproximada por Grupos e Enumeração com Estimativa* para 49 e 79 itens dando espaço para, igualmente, as estratégias de *Subtração* e *Estimativa Rápida* determinarem a quantidade nos casos em que a grade foi quase completamente preenchida com círculos (isto é, 95 pontos). Ou seja, até onde os itens pudessem ser enumerados com o tempo disponível, eles foram.

Importante destacar que, para tarefas de estimativa com 4 itens, independentemente da forma de apresentação e do tamanho da matriz, todos os participantes relataram contar os pontos um a um. Essas estratégias de contagem com (EQ6) ou sem (EQ1) recuperação de memória continuam sendo muito utilizadas para quantidades de até 25 elementos. Ou seja, pode-se pressupor que quantidades maiores que esta sejam dificilmente memorizadas em um espaço tão curto de tempo (2 segundos para 17 e 25 elementos), sendo que quantidades entre 4 e 9 itens puderam ser contadas, simplesmente. Então, novas estratégias passam a ser buscadas pelos participantes, quando a quantidade de pontos aumenta, envolvendo outras abordagens que facilitem uma aproximação das quantidades.

Sobre a possibilidade de combinação estratégica, a fim de verificar se essa característica pode contribuir para estimativas mais precisas, concluiu-se que apenas 71 questões (das 1920), representando 3,7% do total, foram respondidas tendo como base a combinação de duas ou mais estratégias. Nenhuma delas foi combinada com grande destaque sobe as demais formas de combinação e apenas duas respostas foram baseadas em uma combinação de três estratégias. Com uma análise descritiva, a partir da representação por médias, foi possível analisar as questões que tiveram estratégias combinadas pelos participantes e apresentá-las na Tabela 17.

Tabela 17 – Frequência das respostas com Estratégias combinadas

Variáveis	Categorias	n (%)
SEXO	Meninos	0
	Meninas	71 (100)
ANO	2º	6 (8,5)
	3º	10 (14,1)
	4º	24 (33,8)
	5º	18 (25,4)
	6º	13 (18,3)
ESCALA	10	1 (1,5)
	20	7 (10,3)
	100	60 (88,2)
MD/MC	MD	46 (64,8)
	MC	25 (35,2)
A/E/AL	A	39 (54,9)
	AL	3 (4,2)
	E	29 (40,8)
ESTIMATIVA	7	2 (2,8)
	9	1 (1,4)
	17	14 (19,7)
	25	5 (7)
	49	18 (25,4)
	78	20 (28,2)
	95	11 (15,5)

E10, E20 e E100 – Escalas 10, 20 e 100
MD – Máximo Desconhecido
MC – Máximo Conhecido
A – Itens Aglomerados
E – Itens Espaçados
AL – Itens aleatórios

Observou-se que todos os indivíduos que combinaram estratégias foram do sexo feminino, sendo que a maioria foi do 4º ano e para escala 100. Pouquíssimas combinações ocorreram para itens apresentados de forma aleatória, sendo que ocorreram em maior quantidade para quantidades de itens entre 49 e 78.

As escolhas das estratégias mostraram-se sensíveis às características do problema. Para objetos regularmente espaçados (aglomerados) em uma matriz de proporções conhecidas, opções de estratégia são, em grande parte, determinada pelo número relativo de espaços vazios e cheios. Para verificar a precisão das estratégias e compará-las, usou-se o novamente o Teste GEE, verificando possíveis diferenças em termos de precisão das respostas dadas pelas crianças. Estes resultados são apresentados nas Tabelas 18, 19 e 20.

Tabela 18 – Médias de Precisão Relativa por Estratégia (p<0,001)

Estratégia	Médias	IC95%
EQ1	0,008a	[0,005 - 0,010]
EQ2	0,058b	[0,044 - 0,072]
EQ3	0,132bcd	[0,086 - 0,179]
EQ4	0,062bcd	[0,043 - 0,081]
EQ5	0,124ce	[0,101 - 0,146]
EQ6	0,059d	[0,049 - 0,068]
EQ7	0,098de	[0,080 - 0,116]

* letras distintas representam médias estatisticamente diferentes
IC – Índice de Confiança

Observando os dados apresentados, foi concluído que EQ1 (*Estratégia de Adição*) é a estratégia que leva a resultados mais precisos. Entretanto, esta é a estratégia mais utilizada para pequena quantidade de itens, o que pode influenciar mais a precisão das respostas que a própria estratégia utilizada. As estratégias EQ2, EQ6 e EQ4 foram as que levaram a resultados mais precisos. Essas estratégias envolvem *Contagem por Grupos* (EQ2), *Contagem com Recuperação de Memória* (EQ6) e *Subtração,* indicando que estratégias que envolvem, de certa forma, a contagem, ainda continuam sendo as mais precisas. Na sequência, as estratégias de *Estimativa Rápida* (EQ7), *Subitizing* (EQ3) e *Fixação* (EQ5) foram as que levaram a resultados menos precisos, o que já era esperado. Em geral, as estimativas foram mais precisas quando os participantes usaram estratégia de contagem exata do que quando eles usaram estratégias de contagem aproximada, mas, ao contrário, quando as quantidades eram maiores.

Estatisticamente, a estratégia de contagem EQ1 é mais precisa do que todas as demais estratégias (p<0,001), estando vinculada à contagem exata e, portanto, talvez não devesse ser tratada como estimativa. A contagem aproximada por grupos, que também envolve estratégia de contagem, é mais precisa que EQ5 (*Fixação*) e EQ7 (*Estimativa Rápida*). E EQ6 (*Adição*) e EQ4 (*Subtração*) são mais precisas que EQ5 (*Fixação*). Para finalizar a comprovação de que estimativas rápidas são menos precisas que a contagem, EQ1 e EQ6 são estatisticamente mais precisas que EQ7.

Para conclusões baseadas em dados estatísticos acerca das diferenças de precisão de cada estratégia, por ano escolar, elaborou-se a Tabela 19.

Tabela 19 – Médias de Precisão Relativa das Estratégias, por ano escolar ($p<0,001$)

Estratégia	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano
	Média	Média	Média	Média	Média
EQ1	0,010a	0,011a	0,001a	0,007ac	0,007a
EQ2	0,072ab	0,038a	0,049bc	0,046abc	0,087b
EQ3	0,310b	0,142b	0,000a	0,083bc	0,061b
EQ4	0,058ab	0,028a	0,050abc	0,060bc	0,085b
EQ5	0,135b	0,185b	0,117b	0,101b	0,108b
EQ6	0,087b	0,091b	0,027c	0,027c	0,056b
EQ7	0,121b	0,118b	0,086b	0,059c	0,069b

* letras distintas representam médias estatisticamente diferentes

Na análise por ano escolar, temos uma constatação bastante interessante, de que a estratégia de contagem (EQ1) tem a mesma precisão que a de subtração (EQ4) no 2º, 3º e 4º ano, exceto no 6º ano, em que EQ1 é estatisticamente mais precisa que todas as demais estratégias e no 5º ano, em que EQ1 é diferente de EQ4, EQ5 (Fixação) e EQ6 (Contagem com recuperação de memória). As duas estratégias de contagem por grupos (EQ2 e EQ3) têm a mesma precisão de EQ1 em todos os anos. Sendo que, para o 2º, 3º e 4º ano, EQ1 é mais preciso que EQ5, EQ6 e EQ7. Pra 4º e 5º ano, EQ5 (estimativa) é menos preciso que EQ6 (contagem). Ou seja, em todos os anos foi encontrada uma significativa diferença entre estratégias de contagem e estratégias que envolvem estimativas rápidas. Em síntese, por ano escolar, manteve-se estratégia de contagem exata como sendo a mais precisa (exceto no 4º ano) e a estratégia de enumeração com estimativa foi a menos precisa (exceto no 2º ano).

A análise estatística para as diferentes quantidades estimadas foi apresentada na Tabela 20.

Tabela 20 – Médias da Precisão Relativa das Estratégias, por estimativa (p<0,001)

Estratégia	7	9	17	25	49	78	95
	Média	Média	Média	Média	Média	Média	Média
EQ1	0,020a	0,047a	0,004a	-	0,000ac	-	-
EQ2	0,011a	0,011ab	0,025b	0,016a	0,084b	0,095a	0,144ac
EQ3	0,098b	0,047ab	0,068abc	0,039ab	0,130abc	0,467b	0,655b
EQ4	0,077ab	0,005b	0,027ab	0,055ab	0,084ab	0,120ac	0,058ac
EQ5	0,044ab	0,020ab	0,040c	0,059b	0,099ab	0,228c	0,306a
EQ6	0,023a	0,027a	0,082c	0,075b	0,211c	0,257abc	0,254ac
EQ7	0,005a	0,012ab	0,099c	0,051b	0,120abc	0,198c	0,087c

* letras distintas representam médias estatisticamente diferentes

Tendo como base as estimativas que deveriam ter sido feitas pelos estudantes, perceberam-se que, para a quantidade de 4 itens, todos usaram a estratégia de contagem EQ1 (N=390), que foi sempre precisa. Para estimar 7 itens, EQ3 (subitizing) foi menos precisa que EQ1, EQ2, (ambas de contagem) EQ6 (contagem com recuperação de memória) e EQ7 (estimativa rápida). Ou seja, para realizar a estimativa de 7 elementos a estimativa rápida (EQ7) pode ser bem precisa. Para a estimativa de 9 itens, a estratégia de subtração (EQ4) foi mais precisa que as próprias estratégias de contagem: EQ1 e EQ6. Para estimar 17 itens, EQ1 e EQ2 são mais precisas que EQ5 (contagem e estimativa rápida), entretanto, a estratégia EQ5 mostrou-se mais precisa que que EQ6 e EQ7. Além disso, EQ6 e EQ7 são menos precisas que EQ2 e EQ4.

Para realizar a estimativa de 25 itens para cima, nenhum sujeito utilizou a estratégia de contagem EQ1. Para 25 pontos, as estimativas realizadas através de EQ2 foram muito mais precisas que as por EQ5, EQ6 e EQ7. Para 49 itens, EQ6 foi a estratégia menos precisa, talvez pela grande quantidade de itens a serem armazenados na memória de curto prazo, em especial quando comparada as estratégias EQ2, EQ4 e EQ5. Para mais itens (78 e 95), EQ3 mostrou-se ser a estratégia menos precisa quando comparada às demais. Para 78 pontos, EQ2 foi mais precisa que EQ5 e para 95 pontos EQ5 foi menos precisa que EQ4 e até que EQ7. Esses resultados reforçam a ideia de que estratégias de estimativas são mais precisas que outras dependendo do tipo de tarefa realizada.

Para saber se estratégias combinadas são mais precisas que estratégias simples, calculou-se a média da Precisão Relativa (PR) da estratégia simples (M=0,051) e da estratégia combinada (M=0,131) e, com p<0,011, pôde-se afirmar que combinar estratégias é ainda menos preciso que realizar uma única estratégia de estimativa.

5.4.2 Estratégias de Estimativa na Reta Numérica

Como em todos os outros domínios, a variedade de estratégias na tarefa da reta numérica não ocorre somente quanto ao tipo de estratégia que se tem disponível, mas também quanto ao fato de que um único indivíduo pode usar várias estratégias para resolver problemas diferentes. Na ocasião deste estudo, oito estratégias foram detectadas para realizar estimativas na reta numérica.

A primeira estratégia encontrada, a de "Contagem", consistia em realizar marcações (imaginárias ou à caneta) sobre a reta. Cada marcação correspondia à posição de cada número na reta, em ordem crescente, a partir do início, até que se chegasse à posição do número estimado. Os espaços entre estas marcações poderiam ou não ser de igual tamanho ou estar bem distribuídos na reta. Por exemplo, para estimar a posição do número 25 na reta numérica 0-100, o sujeito poderia fazer vinte e cinco pequenas marcações na reta, sendo que, a última marcação indicaria a posição do número na reta. Entretanto, muitas vezes essas marcações não possuíam distanciamento de igual tamanho entre eles ou, também, não correspondiam a 1/100 do tamanho total da reta, o que gerava estimativas bastante imprecisas.

Semelhante à estratégia de "Contagem" já descrita, a estratégia de "Contagem inversa" correspondia à contagem uma a um de números na reta, porém, na ordem inversa; ou seja, do final para o início da reta. Por exemplo, para estimar a posição de números grandes, tal como 78, na reta 0-100, o sujeito poderia iniciar sua contagem a partir do ponto final da reta (100) e contar em ordem decrescente os espaçamentos criados até posicionar o número 78.

Alguns sujeitos conseguiam elaborar estratégias de criar outros pontos de referência a fim de facilitar suas estimativas. Alguns utilizavam o ponto central da reta, dividindo-a em duas partes (estratégia de "Divisão ao Meio") ou em quatro partes (estratégia de "Divisão em Quartos"). Ambas são estratégias que envolvem relação proporcional de compreender partes da reta como integrantes do todo. Porém, o segundo caso envolve dividir o próprio meio ao meio; ou seja, dividir a reta em quatro partes de igual tamanho, gerando três novo pontos de referência para suas estimativas. Por exemplo, para estimar o número 9, o sujeito poderia dividir a reta 0-20 em duas partes, a partir de uma marcação no seu centro, posicionando o 9 próximo a este ponto (10). Da mesma maneira, para estimar a posição do número 25 em uma reta 0-100, o sujeito poderia encontrar o centro da reta (50) e encontrar novamente o centro de 0-50, para posicionar o número 25.

Diferentemente de simplesmente realizar uma “Contagem” sem se preocupar com o tamanho de cada subdivisão realizada, a estratégia de “Subdivisão Integral” consistia em dividir a reta integralmente, ponto a ponto, considerando os pontos inicial e final para posicionar o número. Ou seja, para realizar esta estratégia, o sujeito já é capaz de compreender que todos os números que contêm o intervalo numérico da reta devem estar representados para ter a certeza de que “caberão”. Sendo assim, para posicionar o número 78 em uma reta 0-100, por exemplo, o sujeito precisaria fazer todas as marcações correspondentes aos números do intervalo 0-100, para então localizar o 78.

Outra maneira de subdividir a reta apresentada pelos estudantes, que não em meios, quartos ou integralmente, foi a chamada estratégia de “Subdivisão 10 em 10”, que consistia em dividir a reta integralmente, porém em blocos de 10 números. Ou seja, para posicionar o número 95, por exemplo, o sujeito dividia a reta 0-100 em 10 blocos, localizando o bloco onde continha o intervalo 90-100 para estimar o número 95. Essa estratégia também denota um conhecimento de relações proporcionais.

Alguns sujeitos utilizavam a estimativa feita anteriormente para basear as estimativas das posições dos números seguintes. Esta estratégia foi chamada de “Referência Anterior”. Por exemplo, um sujeito que tenha realizado a estimativa do número 25 em uma reta 0-100, pode ter usado essa referencia para encontrar a posição do número 78, mesmo que não tenha a certeza de que está certo o posicionamento anterior.

Por fim, alguns estudantes realizavam estratégias que não correspondiam às categorias anteriores e que, em geral, relacionam-se a estratégias de “Estimativa Rápida”, baseadas apenas na intuição de posição. Sínteses dessas oito estratégias foram listadas e descritas na Tabela 21.

Tabela 21 - Síntese das Estratégias utilizadas no TERN

Código	Nome	N	%	Descrição
ER1	Contagem	243	51,8	Realizar marcações a partir do início da reta, em ordem crescente, até que se chegue a posição do número estimado.
ER2	Contagem Inversa	50	10,7	Contagem um a um, do final para o início da reta.
ER3	Divisão ao Meio	60	12,8	Utilizar o ponto central da reta como referencia.
ER4	Divisão em Quartos	6	1,3	Dividir o próprio meio ao meio; ou seja, dividir a reta em quatro partes de igual tamanho, gerando três novo pontos de referência.
ER5	Subdivisão Integral	9	1,9	Dividir a reta integralmente, ponto a ponto, considerando os pontos inicial e final.
ER6	Subdivisão 10 em 10	19	4,1	Dividir a reta integralmente, porém em blocos de 10 números.
ER7	Referência Anterior	9	1,9	Utilizar a marcação feita anteriormente para basear a estimativa do novo número.
ER8	Estimativa Rápida	73	15,6	Inclui estratégias que não correspondem às categorias anteriores e que, em geral, relacionam-se a estratégias de estimativas rápidas.

Observando a Tabela 21, percebeu-se que, para realizar estimativas na reta numérica, a estratégia mais utilizada continua sendo uma estratégia de contagem (ER1), em 51,8% dos casos, tal como ocorreu no TENQ. A segunda estratégia mais utilizada pelos participantes foi a ER8 (estimativa rápida), o que é um dado bem interessante, pois mostra que a grande maioria dos entrevistados (51,8% + 15,6% = 67,4%), se não conta um a um os espaços na reta, não consegue estabelecer uma estratégia de estimativa, propondo um posicionamento rápido e sem reflexão do número sugerido. Na sequência, usar o ponto médio da reta (ER3) e contar de trás para frente (ER2) também foram estratégias utilizadas no total de 23,5% dos casos. Ou seja, as demais estratégias foram pouco utilizadas quando comparadas a essas quatro citadas.

Em alguns momentos, as crianças usaram estratégias baseadas em decisões que consideravam a proximidade das extremidades, por exemplo, para representar o número 78, fizeram marcas de 100 a 78, em ordem decrescente. O número central (5, 10 ou 50) também foi entendido por alguns alunos como uma referência usada para a estimativa dos outros números; alternativamente, alguns decidiram começar desse ponto central e fizeram marcas até a posição desejada em uma sequência ascendente ou descendente. Outra estratégia foi marcar os quartos (por exemplo 25, 50, 75 na reta 0-100), como marcos de referência. Entretanto, as crianças apresentaram um repertório relativamente pequeno de pontos de referência de suas estimativas, optando por fracionar toda a reta, embora, muitas vezes, não utilizaram unidades apropriadas de fracionamento, fazendo subdivisões com estimativas acidentais. Ou seja, com o número de decomposições sucessivas não programado a priori, muitas das subdivisões não seguiram padrão de proporcionalidade que resultassem em estimativas mais precisas. Para discutir a frequência destas estratégias, considerando-se o ano escolar e a estimativa realizada, apresentou-se os dados obtidos durante a pesquisa de maneira mais clara e sintetizada nas Tabelas 22 e 23.

Tabela 22 – Frequência das Estratégias, por ano escolar

	Ano Escolar				
	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano
Estratégia	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)
ER1	59 (69,4)	69 (80,2)	56 (59,6)	20 (19,2)	39 (39)
ER2	5 (5,9)	3 (3,5)	9 (9,6)	16 (15,4)	17 (17)
ER3	-	5 (5,8)	5 (5,3)	27 (26)	23 (23)
ER4	-	-	-	5 (4,8)	1 (1)
ER5	-	-	5 (5,3)	4 (3,8)	-
ER6	1 (1,2)	3 (3,5)	11 (11,7)	4 (3,8)	-
ER7	1 (1,2)	2 (2,3)	2 (2,1)	1 (1)	3 (3)
ER8	19 (22,4)	4 (4,7)	6 (6,4)	27 (26)	17 (17)
Total	85 (100)	86 (100)	94 (100)	104 (100)	100 (100)

Quando separadas por ano escolar, as estratégias continuam apresentando a distribuição de frequência de maneira semelhante ao apresentado na Tabela 21, exceto pelo fato de a ER1 (contagem) diminuir em termos de uso no 5º e no 6º ano, perdendo, inclusive, para ER3 (divisão ao meio) no 5º ano. Interessante que, no 5º ano, embora a estratégia de contagem não seja tão evidente frente a outras estratégias, a ER8 (estimativa rápida) também aparece com frequência dentre estes estudantes.

Observa-se que, mais da metade das crianças contam a partir de 1 quando solicitadas a realizar estimativas das posições dos números, até o 4º ano, reduzindo essa frequência de uso entre os alunos do 5º e do 6º ano. Até o final do 4º ano, a maioria das crianças não estimam um valor médio, passando a contar a partir do ponto médio quando o número que está sendo estimado é próximo da metade da escala da reta somente a partir do 5º ano.

No 2º ano, pôde-se dizer que apenas as estratégias de contagem (ER1) e de estimativa rápida (ER8) foram realizadas. Em poucas oportunidades, também ocorreu a estratégia de contagem inversa (ER2). No 3º ano, ainda se manteve a forte frequência, inclusive maior que no 2º ano, da ER1, mas se abriu espaço para o surgimento de uma nova estratégia, a divisão da reta ao meio (ER3). No 4º ano, inseriu-se a estratégia de de subdivisão integral da reta (ER5), gerando uma preocupação sobre o espaçamento interno da reta ao fazer uma contagem de forma que coubessem todos os números da escala em questão. Somente no 5º ano todas as estratégias estiveram presentes, abrindo um espaço bem maior para ER3.

Para observar como o valor a ser estimado influenciou da escolha da estratégia utilizada, construiu-se a Tabela 23.

Tabela 23 – Frequência das Estratégias, por estimativa

Estratégia	Estimativa							
	4	7	9	17	25	49	78	95
	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)	n (%)
ER1	70 (69,3)	58 (56,3)	37 (57,8)	34 (50,7)	18 (52,9)	11 (32,4)	10 (27,8)	5 (16,7)
ER2		8 (7,8)	1 (1,6)	12 (17,9)	1 (2,9)	10 (29,4)	9 (25)	19 (63,3)
ER3	14 (13,9)	15 (14,6)	12 (18,8)	2 (3)	5 (14,7)		2 (5,6)	
ER4	3 (3)			1 (1,5)	1 (2,9)		1 (2,8)	
ER5	2 (2)	2 (1,9)		2 (3)	1 (2,9)	2 (5,9)		
ER6	1 (1)	2 (1,9)	3 (4,7)	4 (6)	3 (8,8)	3 (8,8)	3 (8,3)	
ER7		5 (4,9)		1 (1,5)		2 (5,9)	1 (2,8)	
ER8	11 (10,9)	13 (12,6)	11 (17,2)	11 (16,4)	5 (14,7)	6 (17,6)	10 (27,8)	6 (20)
Total	101 (100)	103 (100)	64 (100)	67 (100)	34 (100)	34 (100)	36 (100)	30 (100)

A estratégia de contagem permaneceu sendo a mais frequente para quantidades até 25, até dividir lugar com estratégias mais sofisticadas para quantidades de 49 e 78 itens e até ser superada por outra estratégia de contagem, porém inversa, para 95 itens. Somente a estimativa do número 17 gerou um movimento de todo o repertório de estratégias apresentado pelos participantes. As estratégias opostas (ER1 e ER2) foram utilizadas como a grande maioria das estratégias de estimativa das quantidades 4 e 95, respectivamente, o que continua a demonstrar a característica da contagem como uma forte predominância na realização de estimativas, pois são as estratégias prevalentes em todos os valores testados. Dessa forma, diferentemente dos resultados obtidos no TENQ, em que as estratégias de estimativa numérica dependiam das características e da forma de apresentação dos itens, aqui, as estratégias passam a aumentar em complexidade, a partir da idade e da experiência do sujeito testado, representado pelo ano escolar mais avançado.

Sobre a possibilidade de combinação de estratégias, a fim de verificar se essa característica pode contribuir para estimativas mais precisas, obteve-se que apenas 44 questões (das 420), representando 10,5% do total, foram respondidas tendo como base a combinação de duas, três ou até quatro estratégias. O que se observa é que, no caso do TERN, a combinação estratégica, embora de pouca ocorrência, é realizada em mais que o dobro das situações, quando comparada ao TENQ. A única combinação que se destacou dentre as demais formas de combinação foram ER1 e ER3, representando 3,8%, e somente uma situação culminou na combinação de quatro estratégias. Com uma análise descritiva pôde-se verificar possíveis estratégias combinadas pelos participantes e apresentá-las na Tabela 24.

Tabela 24 – Frequência de questões com estratégias combinadas

Variáveis	Categorias	n (%)
SEXO	Meninos	23 (52,27)
	Meninas	21 (47,73)
ANO	2º	1 (2,27)
	3º	2 (4,55)
	4º	8 (18,18)
	5º	18 (40,91)
	6º	15 (34,09)
ESCALA	10	9 (20,45)
	20	16 (36,36)
	100	19 (43,18)
ESTIMATIVA	4	11 (25)
	7	12 (27,27)
	9	4 (9,09)
	17	5 (11,36)
	25	4 (9,09)
	49	2 (4,55)
	78	6 (13,64)

Também de forma diferente do que foi encontrado no TENQ, em que apenas meninas combinaram estratégias, no TERN houve uma distribuição igual entre os sexos e a frequência dessas combinações cresce conforme o ano escolar e a escala. Além da frequência de utilização das estratégias, buscou-se analisar em que situações estas estratégias são mais precisas. Foi usado o GEE para verificar a precisão das estratégias e compará-las, verificando possíveis diferenças em termos de precisão das respostas dadas pelas crianças. Os resultados quanto às estratégias mais precisas em geral, por ano escolar e por estimativa realizada foram apresentados nas Tabelas 25, 26 e 27, respectivamente.

Tabela 25 – Médias da Precisão Relativa das Estratégias (p<0,001)

Estratégia	Médias	IC95%
ER1	0,163a	[0,145 - 0,182]
ER2	0,078bc	[0,054 - 0,102]
ER3	0,074bc	[0,049 - 0,098]
ER4	0,043bc	[0,012 - 0,073]
ER5	0,092ab	[0,039 - 0,144]
ER6	0,076bc	[0,047 - 0,105]
ER7	0,141ab	[0,024 - 0,257]
ER8	0,116ac	[0,087 - 0,145]

*letras distintas representam médias estatisticamente diferentes

Analisando as estratégias utilizadas pelos participantes, independentemente de idade, foi verificado que a ER1, embora sendo a estratégia mais frequente em todas as situações, mostrou-se ser menos precisa que todas as demais estratégias. Em especial, são estatisticamente menos precisas que ER2 (contagem inversa), ER3 (divisão ao meio), ER4 (divisão em quartos) e ER6 (divisão 10 em 10). Da mesma maneira, a estratégia mais elaborada de divisão em quartos, ER4 (presente a partir do 5º ano), teve suas estimativas muito superiores em termos de precisão que ER8 (estimativa rápida), também de grande frequência de utilização.

Para verificar se esta ordem geral de precisão se manteve nos diferentes anos escolares, analisar-se-á os dados apresentados na Tabela 26.

Tabela 26 – Médias de Precisão Relativa das Estratégias, por ano escolar

Estratégia	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano
	p=0,003	p<0,001	p<0,001	p=0,018	p<0,001
ER1	0,210a	0,168a	0,160a	0,121ab	0,111ab
ER2	0,086b	0,040bc	0,074ab	0,080ab	0,083ab
ER3		0,029bc	0,090ab	0,059ab	0,097ab
ER4				0,031a	0,100a
ER5			0,083ab	0,103ab	
ER6	0,170a	0,057bc	0,071bc	0,083ab	
ER7	0,125b	0,213ac	0,020b	0,080b	0,198ab
ER8	0,142ab	0,110ac	0,260ac	0,108ab	0,052b

*letras distintas representam médias estatisticamente diferentes
p – Nível de confiança

Quando analisada a precisão das estratégias por ano escolar, observou-se que, no 2º ano, ER1 (contagem) é menos precisa que ER7 (referência anterior) e ER2 (contagem inversa), respectivamente. ER2 e ER7 também são mais precisas que ER6 (subdivisão 10 em 10). No 3º ano, ER1 é menos precisa que ER2, ER3 (divisão ao meio) e ER6. No 4º ano, ER1 é menos precisa que ER6 e ER7 e ER7 mostrou-se muito mais precisa que ER8 (estimativa rápida). No 5º e 6º ano, ER1 não aparece com diferenças de precisão quando comparada às demais estratégias. Observou-se que a precisão de ER1 evolui com o ano escolar, o que não ocorre com as demais estratégias. As precisões das estimativas, tendo como base o número a ser estimado, são apresentadas na Tabela 27.

Tabela 27 – Médias da Precisão Relativa das Estratégias, por estimativa

Estratégia	4	7	9	17	25	49	78	95
	p<0,001	p<0,001	p<0,001	p<0,001	p<0,001	p<0,001	p=0,016	p=0,307
ER1	0,141a	0,198a	0,131a	0,191a	0,198a	0,144a	0,124ac	0,128
ER2		0,127ab	0,025b	0,060bc	0,030bc		0,137a	0,049
ER3	0,057b	0,124ab	0,065ab	0,100abc	0,056bc	0,041bc	0,040b	
ER4	0,042bc			0,050c	0,000b		0,080bc	
ER5	0,013bc	0,163ab		0,153abc	0,100bc	0,035bc		
ER6		0,045b	0,063ab	0,085b	0,123ac	0,013b	0,140abc	
ER7	0,000c	0,215ab		0,070bc		0,020bc	0,080bc	
ER8	0,089abc	0,204ab	0,125a	0,054bc	0,138ac	0,112bc	0,105bc	0,082

*letras distintas representam médias estatisticamente diferentes
p – Nível de confiança

Em termos estatísticos, ER1 (contagem) é menos precisa que todas as demais estratégias utilizadas para realizar estimativa da posição do número 4 na reta numérica, exceto quando comparada a ER8 (estimativa rápida), que não obteve diferenças significativas. No caso do número 7, ER1 foi significativamente menos precisa que ER6 (subdivisão 10 em 10). Por motivos que parecem óbvios, no caso do número 9, ER1 e ER8 foram significativamente menos precisas que ER2 (contagem inversa), parecendo bastante provável que, para este número, a contagem de trás para frente possa resultar em estimativas mais razoáveis para este número, em especial na escala 10, na qual 9 se aproxima no ponto final da reta e na escala 20 em que se aproxima da metade dela.

O posicionamento do número 17 foi único a requerer todo o repertório de estratégias apresentadas pelos estudantes dos diferentes anos escolares. Neste caso, ER1 (contagem) foi significativamente menos preciso que ER2 (contagem inversa), ER4 (divisão em quartos), ER6 (subdivisão 10 em 10), ER7 (referência anterior) e ER8 (estimativa rápida). Para o ponto que demarca ¼ da reta 0-100, o 25, as estratégias também foram bastante diversificadas, são sendo utilizadas apenas a

ER7. Neste caso, ER1 é significativamente menos precisa que ER2, ER3 (divisão ao meio), ER4 e ER5 (subdivisão integral) e ER4 apresentou precisão extrema, diferente significativamente de ER6.

Para posicionar o número 49 na reta numérica (número escolhido propositadamente por estar muito próximo ao meio da reta), mais uma vez ER1 mostrou-se menos precisa quando comparada às estratégias ER3, ER5, ER6 e ER7, sendo que ER6 apresentou-se a mais precisa delas, também significativamente mais precisa que ER8. Para os números maiores (78 e 95) nenhuma estratégia mostrou-se significativamente mais precisa que outras, embora na comparação entre médias ER1 continue no topo como uma das estratégias menos precisas. A contagem para a frente desenvolve-se mais rapidamente do que a contagem para trás, entretanto, isso não contribuiu para a precisão das estimativas de números na parte inferior da escala, em comparação às estimativas de números na extremidade alta da reta.

Diferentemente do que se encontrou no TENQ sobre estratégias combinadas, no TERN estratégias simples obtiveram média de precisão relativa igual a 0,136, enquanto que em estratégias combinadas, a média ficou em 0,098, mostrando-se significativamente mais precisa que estratégias simples (p=0,04). Sobre as estratégias mais utilizadas, observou-se que 23,33% (7 alunos) usaram somente ER1 como estratégia, enquanto que as mais utilizadas foram ER1, ER2 e ER3, utilizadas por 6 diferentes alunos.

Em geral, para ambos os instrumentos, alunos do 2º e 3º ano usaram com menos eficiência as estratégias mais frequentemente do que os alunos mais velhos. A resposta "não sei" também ocorreu com maior frequência entre esses alunos do que entre os alunos mais velhos. Estes dados mostram que, com uma exceção, bons estimadores tendem a usar as estratégias mais elaboradas ao passo que maus estimadores eram mais propensos a dizer "não sei ", ou a usar adivinhações.

5.5 DISCUSSÃO

O principal objetivo desse estudo foi compreender as estratégias utilizadas pelos participantes nas duas tarefas de estimativa numérica (TENQ e TERN) e categorizá-las, se possível, em grupos de estratégias utilizadas com maior frequência, discutindo sobre a sua eficiência em termos de precisão. As perguntas que geraram este estudo partem de: 1) quais as estratégias os participantes usam para fornecer estimativas? 2) as crianças usam uma única ou várias estratégias? 3) quais estratégias foram utilizadas com mais frequência e em que situações foram mais eficientes? Para responder essas perguntas, serão discutidos separadamente as estratégias utilizadas em cada um dos instrumentos utilizados.

5.5.1 Estratégias de Estimativa Numérica de Quantidades

Análise de frequência geral mostrou que estratégias de contagem são as mais utilizadas. É provável que a preferência por este tipo de estratégia esteja associada a maior quantidade de tarefas em que as quantidades apresentadas eram pequenas, facilitando o processo de contagem no tempo estabelecido para a tarefa, inclusive por contagem nos dedos. Entretanto, a estratégia de maior frequência quando não consideradas as de contagem exata foi a de contagem por grupos (embora muito menos utilizada).

Nesses casos, em princípio, os alunos tenderam a dividir os grupos de elementos em grupos que, visualmente, possuíssem a mesma quantidade. Aí também seria possível o uso de estratégias de pensamento multiplicativo, já que, quando se procura observar o todo de uma única vez, é mais difícil estimar com mais precisão. O maior problema desta situação é que a própria decomposição é uma estimativa.

Estimativas rápidas (EQ7) foram as quartas colocadas, dentre as sete descritas no *ranking* de frequência de uso de estratégias. Às vezes a estimativa dada era influenciada pelo número da questão, ou seja, quando o indivíduo não sabia como realizar a estimativa da quantidade apresentada, ele repetia o número da questão. Também, algumas respostas de estimativa rápida eram dadas antes do tempo terminar. Nesse caso, entendeu-se que, verificar que não existe uma estratégia possível, também pode ser considerada uma estratégia. Porém, a causa mais provável é que as crianças deixaram de utilizar estratégias de estimativa para as relações mais difíceis e, em vez disso, adivinharam as quantidades aleatoriamente.

A estratégia da *Subtração* (EQ4 - LUWEL et al.; 2000, 2001; VERSCHAFFEL et al., 1998), aplicada a quantidades maiores, em que se subtrai o número de espaços vazios da matriz, também é uma forma de representação externa de contagem um a um, fundamental para o desenvolvimento aritmético. Essa estratégia faz uso de agrupamentos e exige compreensão sobre a relação entre os números (por exemplo, se tiver 95 pontos na matriz, são necessários mais 5 para ter os 100 que a completam) e matriz pode ser um instrumento útil para visualizar tais relações entre os números. Eventualmente, isso também pode preparar compreensão das crianças sobre o sistema de numeração decimal, no qual o agrupamento por 10 é a ideia mais fundamental (OBERSTEINER et al., 2014). Esse necessário conhecimento sobre números e suas relações podem ter contribuído para que essa estratégia fosse uma das menos utilizadas pelos estudantes.

Estratégias de estimativa podem envolver pensamentos mais complexos dependendo de como são utilizadas. Por exemplo, estimar 95 pontos distribuídos em uma grade 10x10 pode ser feito percebendo a falta das 5 unidades no total de itens da matriz ou por multiplicação da quantidade de linhas completas na grade. Essa segunda necessita de um pensamento multiplicativo mais complexo que a subtração necessária na realização da estratégia anterior. Neste caso, uma das estratégias pode ser realizada com mais sucesso do que outra, independentemente da capacidade de quem está realizando a estimativa.

Entretanto, observaram-se sutis mudanças quando comparada a frequência geral do uso de estratégias às frequências dessas mesmas estratégias considerando-se o ano escolar. Em geral, as estratégias de contagem exata continuaram a ser a mais frequentes, entretanto, todos os anos escolares, apresentaram todo o repertório estratégico. Ou seja, a precisão das estimativas não parece estar relacionada ao ano escolar, mas a boa escolha da estratégia considerando as especificidades do problema a ser estimado. Nesse sentido, observa-se que, mesmo que os estudantes, já no 2º ano escolar utilizem estratégias semelhantes aos estudantes do 6º, essas estratégias são utilizadas com melhor eficiência pelos mais velhos, indicando que a habilidade no uso das estratégias é construída pelo sujeito.

Os resultados encontrados nesse estudo estão de acordo com os resultados da literatura sobre estratégias de estimativa numérica, indicando que as escolhas de estratégia dependem das características dos problemas e do indivíduo. Sobre as características do problema, observou-se que os participantes aplicam cada estratégia sobre os problemas em que eles consideravam mais vantajoso (mais rápido), ou seja, a estratégia de adição foi aplicada principalmente nos problemas de menor quantidade de itens, enquanto que a estratégia de subtração foi usada principalmente nos problemas em que eram apresentadas maiores quantidades de pontos e mais espaços vazios na matriz. É importante a constatação de que, nos casos em que a grade foi quase completamente preenchida, a estratégia de estimativa rápida foi tão utilizada quanto a estratégia de subtração. Esse resultado indica que os sujeitos evitaram realizar este tipo de operação, mesmo já tendo domínio conceitual e procedimental para tal e mesmo que subtrair o número de quadrados vazios a partir do máximo conhecido requer menos esforço que a contagem, tendo em vista o tamanho total da grade (LUWEL et al., 2000).

A opção sobre qual estratégia escolher não depende exclusivamente das características objetivas de tarefa, mas também depende da própria avaliação dos participantes (LUWEL & VERSHAFFEL, 2008). O referencial teórico estudado sugeriu a necessidade de centrar-se em duas principais características em termos de estratégia em estimativa numérica de quantidades: 1) a variabilidade de estratégias: as crianças também usam mais de uma estratégia para resolver cada um dos problemas e também, embora poucas vezes, usam mais de uma para determinado problema e 2) as estratégias são escolhidas de acordo com o problema e suas características e com a idade. Sendo que, esta última variação ocorre não no repertório de estratégias, que mostrou ser o mesmo em todos os anos, mas na eficiência da utilização em cada situação. Então, melhorias na precisão das estimativas relacionadas à idade podem estar parcialmente relacionadas a adoção de novas estratégias, de qualidade superior.

Ainda, se a quantidade apresentada parecesse grande para os estudantes, ao invés de tentarem aplicar algum método de referência para facilitar a solução do problema, as crianças inicialmente deram uma resposta como "Nossa, são muitos!", demonstrando estarem baseados em estratégias basicamente perceptivas de solução.

O Testes de Estimativa Numérica de Quantidades (TENQ) é particularmente útil para testar uma variedade de hipóteses sobre a seleção e execução das estratégias de estimativa, considerando a associação entre a precisão de cada estratégia de um problema particular e a quantidade de itens na matriz e sua distribuição. Além disso, os simples recursos cognitivos necessários para a execução da estratégia possibilitam que, embora a estimativa de quantidades nunca tenha sido ensinada na escola, as crianças soubessem criar suas estratégias, mesmo com pouca educação formal.

Já era esperado que estratégias de contagem fossem mais precisas que estratégias mais elaboradas, como a de subtração, por exemplo. Pôde-se supor, então, que a estratégia de subtração é cognitivamente mais exigente do que a estratégia da adição, não apenas pela dificuldade maior da operação, mas porque ela exige também mais passos na sua execução, tais como: a) a determinação do tamanho da matriz, b) a determinação do número de quadrados vazios, e c) subtrair o número de quadrados vazios a partir do número total de quadrados na matriz. Em contraste, a aplicação da estratégia de adição envolve apenas um passo, semelhante ao passo b da estratégia de subtração, ou seja, a determinação do número de blocos na matriz (LUWEL & VERSHAFFEL, 2008). Da mesma maneira, a estratégia multiplicativa por grupos exige um conhecimento matemático mais profundo e baseados nas relações de proporção parte-todo.

Quantidade de 4 elementos foi precisa em todos os casos. Como não se testou aqui a ideia de *subitizing* trazida por pesquisadores inatistas, considera-se que esse resultado tenha se dado devido ao tempo (1s) de observação, que permitiria a contagem dos itens e, por ser tão pequena, mostrou-se essa contagem foi correta em todos os casos. Nas demais situações a precisão da estratégia por estimativa foi bastante variável, dependendo da interpretação do sujeito e dando poucos indícios de uma regularidade.

Outra hipótese levantada era que a precisão seria consideravelmente menor para a estratégia de estimativa rápida EQ7 do que quando utilizada outras estratégias. Essa hipótese não foi confirmada. Entretanto, se pressupôs que a precisão seria menor para a estratégia de subtração que para as estratégias de adição, tendo em vista a familiaridade das crianças com as operações de adição. Essa hipótese confirmou-se.

Enfim, sobre as estratégias da estimativa de quantidades em crianças do 1º ao 6º ano escolar, a partir da estimativa de pontos dispostos em grades quadriculas 10x1, 10x2 e 10x10, concluiu-se que os grupos etários distintos não diferem no conjunto de estratégias utilizadas, mas que os mais velhos aplicam a estratégias mais sofisticadas, como a de subtração, com mais frequência e fluência. O aparecimento precoce e inesperado dessa estratégia entre os alunos do 2º ano sugere que o tamanho das matrizes desse estudo possa ter algumas vantagens em comparação a outros não múltiplas de 10. Na verdade, quase não houve diferença na quantidade de alunos que utilizaram a estratégia da subtração em todos os anos escolares, mas poucos alunos do 2º ano utilizaram estratégias multiplicativas.

5.5.2 Estratégias de Estimativa na Reta Numérica

Para posicionar números em uma reta numérica, as crianças também fizeram, com maior frequência, o uso de estratégias de contagem um a um, tal como fizeram para estimar quantidades. Tirando as estratégias de estimativa rápida, de uso do ponto médio e de contar de trás para frente, que apresentaram frequência relativamente mais acentuada, as demais estratégias foram pouco utilizadas.

Entretanto, diferentemente do que ocorreu para as estimativas de quantidades, para estimar números em uma reta numérica nem todas as estratégias estiveram presentes no repertório dos alunos em todos os anos escolares, sendo que suas especificidades e dificuldades foram apresentadas dependendo da idade e experiência. Ou seja, a escolha das estratégias parece estar relacionada ao ano escolar e, além de utilizarem as estratégias mais simples com maior eficiência, os alunos mais velhos possuem um repertório maior de estratégias.

Em termos de precisão, a estratégia de contagem, que foi a mais utilizada mostrou-se, em contrapartida, ser a mais imprecisa. Sendo as estratégias mais elaboradas, de raciocínio proporcional, as mais precisas. Várias fontes de evidências já sugeriram que os adultos, bem como as crianças, ao realizar uma tarefa de estimativa na reta numérica, usam estratégias baseadas em padrões de referência, tais como a origem, ponto médio (ER3), e ponto final (PEETERS; VERSCHAFFEL & LUWEL 2016) e que o uso mais frequente de estratégias de pontos de referência gera estimativas mais precisas (BARTH & PALADINO, 2011).

Peeters, Verschaffel e Luwel (2016) encontraram estimativas mais precisas próximas aos pontos das extremidades, mas que a mera apresentação de pontos de referência externos na reta numérica não levaria automaticamente para um melhor desempenho em estimativa. Entretanto, a utilização de tais valores de referência pareceu ser afetada pela familiaridade com o intervalo numérico apresentado. Schneider, Grabner e Paetsch (2009) relataram evidências, através de rastreamento ocular em crianças, que elas gastavam bastante tempo olhando para o ponto médio e pontos finais da reta numérica, na tentativa de estimativa da localização de números inteiros. E, quanto mais referências numéricas eram encontradas, menos elas precisariam realizar a estimativa do todo, não necessitando compreender a magnitude bruta apresentada, mas sim pequenas partes proporcionalmente reduzidas desse todo. Os resultados deste estudo estão em acordo com achados anteriores, que indicam que o uso de estratégias mais sofisticadas na reta numérica está relacionado com estimativas mais precisas (BARTH & PALADINO, 2011).

O uso dessas estratégias sugere que estimativas na reta numérica não são dadas por acaso, mas sim, coordenando conhecimento matemático e habilidades espaciais para avaliar o local e marcação, tal como sugerido no *Modelo de Juízo Proporcional* de Barth e Paladino (2011). Entretanto, neste estudo, foi encontrado que, para os alunos mais novos, há forte tendência a não reconhecerem os pontos médios, embora reconhecessem ser o meio entre o ponto inicial e final. Observou-se dificuldade, por parte desses estudantes, em desconstruir a ideia de contar 1 a 1 para posicionar o número, mesmo que essa ideia não estivesse de acordo com a posição na qual deveria estar o número central. Alguns confiaram tanto na sua contagem, que utilizam como base para as demais estimativas.

No caso das estimativas na reta numérica, o uso de unidades mentais de referência foi utilizado para produção de estimativas, em especial para os alunos mais velhos. Siegler e Opfer (2003) notaram que as estimativas em uma reta numérica 0-1000 eram menos variáveis para números perto de 0, 250, 500, 750 e 1000 do que para outros números, levantando a hipótese de que a tarefa de estimativa na reta numérica envolve a segmentação da linha em quartos (ER4). Entretanto, neste estudo, estas estratégias só estiveram acessíveis para as crianças do 5º e do 6º ano e, mesmo assim, com baixa frequência de utilização. Entretanto, é possível perceber que os alunos tiveram um pouco de noção que o 25, por exemplo, não pode estar muito perto do 100 e que deve vir depois do 17 e antes do 78, entretanto, a distância real e o espaçamento adequado entre os números são um desafio a ser superado.

As entrevistas realizadas com os estudantes apontaram que eles muitas vezes mudam suas estimativas iniciais após serem questionados e postos em contradição. E, às vezes, ao refazerem suas estratégias de pensamento, encontraram uma estimativa mais razoável. Entretanto, estimadores menos qualificados frequentemente adivinhavam e não ajustavam as suas estimativas (mesmo quando entravam em contradição) e não foram hábeis em verbalizar suas estratégias de pensamento.

Resumidamente, as estratégias apresentadas diferem dentre os anos escolares, essencialmente, na quantidade e na qualidade de esforço cognitivo necessário para executá-las; o que também pode influenciar na precisão da resposta encontrada. Essa escolha também pode ser realizada devido a características individuais de cada sujeito em termos de limitação cognitiva ou nível de conhecimento da tarefa proposta. Em suma, uma dada estratégia pode ser considerada mais eficaz do que outras em um contexto e menos eficaz do que elas em outro contexto. Para os diferentes anos escolares, os alunos mais velhos, mesmo quando não diferissem suas estratégias termos de repertório, apresentaram estratégias diferentes em qualidade de aplicação do que os alunos mais novos. Esses dados sugerem que há um processo construtivo de estratégia mais eficientes e de qualidade de aplicação de uma mesma estratégia, mesmo que já se tenham conhecimentos prévios suficientes para usar as estratégias com igual eficiência em todos os anos escolares.

5.6 CONDIDERAÇÕES FINAIS

Em várias situações, as pessoas conhecem e usam diferentes estratégias e representações. Parece provável que este seja o caso em estimativas. O objetivo central desse estudo foi de compreender e descrever quais as estratégias que crianças do 2º ao 6º ano usam para fornecer estimativas de quantidades discretas e estimativas na reta numérica, verificando estratégias mais frequentes e/ou eficientes na precisão estimativa. Para alcançar esses objetivos, os dados foram organizados de modo que as semelhanças entre as estratégias utilizadas indicassem categorias. Em seguida, constatações estatísticas acerca das diferenças na frequência e na precisão permitiram que fossem respondidos os questionamentos iniciais.

Não havia hipóteses quanto aos grupos estratégicos que seriam encontrados, exceto os de adição, de subtração e de estimativas rápidas, no Teste de Estimativa Numérica de Quantidades (que já haviam sido relatados em estudos anteriores), e o de subdivisões proporcionais da linha numérica, no Teste de Estimativa na Reta Numérica (também anteriormente descrito em resultados de estudos já realizados). Quanto à frequência de estratégias, já era previsto que estratégias de contagem fossem mais utilizadas em ambos os testes, devido ao fato da grande importância dada à precisão exata na sociedade. Tal hipótese foi confirmada. Quanto à combinação de estratégias, considerava-se que fosse ser responsável por estimativas mais precisas, o que não foi comparado para o teste de estimativa de quantidades, mas, confirmado para as estimativas na reta numérica. Para concluir acerca dos principais achados deste estudo, pensa-se ser conveniente separá-los em dois grandes grupos de resultados: um referente às estimativas numéricas de quantidade e outro referente aos resultados obtidos na tarefa de estimativa na reta numérica, para que possam ser detalhados.

5.6.1 Considerações sobre Estratégias de Estimativa de Quantidades

No caso de estratégias de estimativa numérica de quantidades avaliadas pelo instrumento TENQ, destaca-se o resultado que confirmou a hipótese de que as crianças não diferem quanto ao tipo de estratégia utilizada, mas na eficiência dessa aplicação. Ou seja, observou-se que os alunos mais velhos aplicam estratégias mais sofisticadas com mais frequência e precisão que os mais novos. A estratégia escolhida variava, principalmente, considerando o formato de apresentação do estímulo e configuração dos pontos.

Para estimativas numéricas de quantidades, foram categorizados sete diferentes tipos de estratégias: EQ1) *Contagem Exata ou Adição* dos pontos; EQ2) *Contagem Aproximada por Grupos* de tamanhos iguais ou diferentes; EQ3) *Subitizing* para grupos de até 4 elementos; EQ4) *Subtração* da quantidade de quadrados vazios; EQ5) Fixação a partir da enumeração perceptiva e posterior estimativa rápida; EQ6) *Contagem com Recuperação de Memória* dos itens após a imagem ser apresentada e EQ7) *Estimativas rápidas*. De todas estas, há predominância das estratégias de contagem, sendo esta a que demonstrou resultados mais precisos, em especial, para poucos itens.

Houve combinação de estratégias em apenas 3,7% das estimativas realizadas, contradizendo a hipótese de que esta seria uma alternativa para a obtenção de estimativas mais precisas, em especial, para os alunos mais velhos. De fato, o que foi observado é que o desempenho em estimativa pode estar relacionado à adoção de novas e mais elaboradas estratégias. Em geral, as estimativas foram mais precisas quando os participantes usaram estratégia de contagem exata do que quando eles usaram estratégias de contagem aproximada, mas, ao contrário quando as quantidades apresentadas eram grandes. Ou seja, quando apresentadas quantidades maiores de itens, as estratégias de contagem por aproximação geravam estimativas mais precisas do que quando as crianças tentavam contar os pontos um a um.

Quanto à precisão, obteve-se uma constatação bastante interessante, de que a estratégia de Contagem tem a mesma precisão que a estratégia de Subtração no 2º, 3º e 4º ano, exceto no 5º e no 6º ano. Em geral, em todos os anos encontrou-se diferenças significativas entre estratégias de contagem e estratégias que envolvem estimativas rápidas, variando qual a mais precisa dependendo da tarefa em que são aplicadas.

5.6.2 Considerações sobre Estratégias de Estimativa na Reta Numérica

Para as estratégias de estimativas feitas na reta numérica, utilizando-se o instrumento TERN, os resultados indicaram oito categorias de estratégias que foram utilizadas pelos sujeitos da pesquisa: ER1) *Contagem* de marcações unitárias sobre a reta; ER2) *Contagem Inversa*, do final para o início da reta; ER3) *Divisão ao meio*, tendo o ponto central da reta como referência adicional aos pontos de início e fim; ER4) *Divisão em quartos*, gerando três novo pontos de referência; ER5) *Subdivisão integral* da reta; ER6) *Subdivisão* de blocos *de 10 em 10* unidades; ER7) Utilização da estimativa realizada anteriormente como *Referência*; ER8) *Estimativas rápidas*.

Da mesma forma que observado no outro instrumento (TENQ), a estratégia de contagem continua sendo a de maior frequência, diminuindo em termos de frequência no 5º e 6º ano, porém, neste teste, esta estratégia foi a que gerou estimativas menos precisas. Entretanto, diferentemente do que ocorreu no TENQ, no TERN nem todas as estratégias estão presentes no repertório dos alunos, sendo que suas especificidades e dificuldades são apresentadas dependendo da idade e experiência. Ou seja, a escolha das estratégias parece estar relacionada ao ano escolar e não somente com as características dos problemas.

Sobre a combinação de estratégias, apenas 10,5% do total das estimativas realizadas utilizaram essa possibilidade. Porém, diferentemente do que se encontrou no TENQ, no TERN as estratégias simples foram menos precisas que as estratégias combinadas. Os resultados deste estudo estão em acordo com achados anteriores que indicam que o uso de estratégias mais sofisticadas na reta numérica está relacionado com estimativas mais precisas.

As demandas cognitivas ajudam os estudantes a realizar estimativas com mais precisão, mesmo tendo pouca experiência. Isso foi comprovado, tendo em vista que nenhuma das crianças testadas estava familiarizada com os testes propostos. Entretanto, é mais difícil relacionar o TENQ ao acesso ao conhecimento do sistema numérico, uma vez que ele não fornece pistas que permitam aos alunos adotar algumas estratégias de julgamento de proporção coordenadas com o seu conhecimento do sistema de numeração. Entretanto, isso não é verdade quando os itens se encontram dispostos de maneira aglomerada, já que estratégias aditivas e multiplicativas foram frequentemente adotadas.

Observou-se, informalmente, no presente estudo, que a conhecimento particular dos sujeitos sobre números influenciou a qualidade das suas estimativas, embora não tenha sido explorado este fator sistematicamente. Mesmo noções básicas como "grandes" e "pequenas" quantidades pareceram ter diferentes significados para diferentes crianças nesse estudo e deve ter, portanto, afetado suas estimativas. Por exemplo, dois alunos do 2º ano explicaram suas estimativas para a determinada quantidade dizendo que havia "um monte" de bolinhas: para uma delas, um monte era 25 bolinhas, para a outra era 95.

Algumas pesquisas relatam que as crianças podem dividir mentalmente a reta numérica em pontos de referência específicos, que as guiam ao indicar a posição de determinado número. Dessa maneira, a precisão da localização é maior quando o número a ser localizado é numericamente mais próximo de um desses pontos de referência. Por exemplo, para posicionar o número 49 em uma reta 0-100, facilmente pode-se posicionar o número próximo ao meio, 50, não refletindo necessariamente como o número 49 é, de fato, mentalmente representado. Nesse caso, a familiaridade da criança com o número localizado no ponto de referência e sua magnitude também pode ser um problema. Assim, as crianças que estão familiarizadas com este número podem aplicar outras estratégias de estimativa diferentes daquelas aplicadas a números que as crianças não estão familiarizadas, resultando em diferentes padrões de estimativa. Do mesmo modo, parece inteiramente plausível que uma má compreensão das unidades fracionárias para subdivisões da reta ou de multiplicação de linhas/colunas nas matrizes, tornaria difícil para as crianças realizar estimativas precisas.

A variabilidade de estratégias tem importante implicação educacional e teórica. Tornou-se evidente que nem sempre há uma forma única ou melhor de resolver uma tarefa de estimativa, superando a ideia de que na matemática sempre há uma única resposta certa com um único procedimento de resolução. Entretanto, a gama de estratégias encontradas aqui pode ser específica para o conjunto de estímulos utilizados nesse estudo e suas diferentes configurações. Isto é, os participantes podem ter usado mais ou menos estratégias se tivessem sido apresentados apenas a itens aleatórios, como em muitos estudos anteriores. Também, é possível que as decisões numéricas realizadas pelas crianças pequenas nesta tarefa pudessem ser influenciadas pela sensibilidade quanto às propriedades espaciais das matrizes; o aumento da densidade, por exemplo, poderia sugerir estimativas maiores, por exemplo.

Entretanto, como os participantes escolhem e executam suas estratégias permanecem em questão. Trabalhos anteriores investigaram as estratégias baseando-se em aliados perceptuais (por exemplo, a superfície coberta pelos estímulos, o tamanho e o arranjo dos estímulos), que é muitas vezes correlacionada com a quantidade. Este estudo demonstra diretamente que, para além de basear as suas estimativas nas características visuais dos estímulos, as pessoas usam uma grande variedade de estratégias de estimativa.

Os resultados de ambos os testes estimativa e a entrevista sugerem que a capacidade dos alunos para fazer estimativas é geralmente pobre. Essa incapacidade nesta área poderia estar relacionada a uma variedade de fatores como a falta de senso numérico, a não compreensão de grandes quantidades ou a estimativa computacional não desenvolvida. No entanto, considerou-se que a principal razão pode ser simplesmente o fato de que o estudo sistemático de estimativa não está incluído no currículo de matemática do ensino fundamental. Para que os alunos adquiram esta habilidade é preciso propor experiências práticas para que eles criem referências individuais em cada situação. Uma vez que seja possível estabelecer pontos de referência próprios, estratégias de estimativa específicas que envolvam a utilização dessas referências naturalmente irão evoluir.

Sabe-se que os resultados do presente estudo não permitem chegar a conclusões definitivas sobre o desenvolvimento, tendo em vista que as entrevistas foram realizadas com apenas 30 estudantes e uma amostra de apenas 6 deles por ano escolar. Além disso, os principais resultados desse estudo, relativos à utilização de estratégias, foram baseados em julgamentos a partir de relatórios verbais. Como qualquer método de recolha de dados, relatórios verbais podem não ser fiéis ao pensamento do sujeito. No entanto, uma vez que se pediu aos participantes para verbalizar as suas estratégias imediatamente depois de cada tarefa (em vez de todas ao mesmo tempo ou apenas ao final da experiência), considerou-se que foi aumentada a confiabilidade da tarefa. Sendo assim, pôde-se tirar conclusões consistentes sobre as estratégias mais utilizadas para realizar as duas tarefas de estimativa utilizadas neste estudo.

Também se considera o fato de que alguns participantes podem ter utilizado estratégias mais simples na primeira aplicação do instrumento, mas podem ter modificado sua abordagem na segunda atividade de análise de estratégias, tanto devido a um efeito de aprendizagem geral quanto da construção de uma estratégia mais eficiente ou do uso mais eficiente das estratégias disponíveis, podendo isso ocorrer, inclusive, dentro de uma mesma sessão. As crianças podem melhorar o seu desempenho em uma tarefa específica por: a) aquisição de novas estratégias, mais avançadas e o abandono das mais antigas e menos eficientes, b) uma crescente dependência de estratégias mais avançadas e um uso menos frequente de menos estratégias eficientes, c) uma melhora na velocidade e precisão com que cada uma das diferentes estratégias é executada, e d) um ajuste das escolhas da estratégia para os problemas e os limites do próprio desempenho. Sendo assim, pode-se argumentar que, ao apresentar repetidamente aos participantes o mesmo conjunto de itens, pode ser considerado efeitos de prática ou de aprendizagem em suas respostas.

Tendo em vista as respostas obtidas neste estudo, considerando suas limitações, novos questionamentos passam a fazer parte de uma importante continuidade a estes achados. Seria a escolha da estratégia, dentro de certos limites, essencialmente aleatória? Seria ela influenciada por fatores externos, tais como quem a faz ou qual a habilidade numérica está melhor desenvolvida no sujeito? Seria essa escolha de estratégia totalmente regrada de maneira que seriam possíveis de serem previsíveis após uma quantidade suficiente de testagens de um mesmo sujeito? Mais pesquisas são necessárias para que essas perguntas possam ser respondidas.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, M. M. D. O. *A aprendizagem da Estimação Matemática: um estudo no 2o ciclo.* Dissertação de Mestrado. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 1996.

BARTH, H. C.; PALADINO, A. M. The Development of Numerical Estimation: evidence against a representational shift. *Developmental Science,* 14, p. 125- 135, 2011.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation. *Developmental Psychology*, 41, p. 189–201, 2006.

BOOTH, J. L.; SIEGLER, R. S. Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning. *Child Development,* 79 (4), p.1016 – 1031, 2008.

CRITES, T. W. Skilled and Less Skilled Estimators' Strategies for Estimating Discrete Quantities. *Elementary School Journal*, 5, p. 601–619, 1992.

DOWKER, A. Computational Estimation Strategies of Professional Mathematician. *Journal for Researching Mathematics Education*, 23 (1), p. 45-55, 1992.

GANDINI, D.; ARDIALE, E.; LEMAIRE, P. Children' Strategies in Approximate Quantification. *Current Psychology Letters: Behaviour, Brain, & Cognition*, 26, p. 1–14, 2010.

HUNTLEY-FENNER, G. Children's Understanding of number is Similar to Adults' and Rats': numerical estimation by 5±7-year-olds. *Cognition*, 78, p. B27-B40, 2001.

LASKI, E. V.; SIEGLER, R. S. Is 27 a Big Number? Correlational and Causal Connections Among Numerical Categorization, Number Line Estimation, and Numerical Magnitude Comparison. *Child Development,* 78 (6), p. 1723 – 1743, 2007.

LEFEVRE, J.; LIRA, C. J.; SOWINSKI, C.; CANKAYA, O.; KAMAWAR, D.; SKWARCHUK, S. Charting the Role of the Number Line in Mathematical Development. *Front. Psychol,* 4, 2013.

LEMAIRE, P.; LECACHEUR, M. Aging and Numerosity Estimation. *Journal of Gerontology: Psychological Sciences*, 62B (6), p. 305–312, 2007.

LEMAIRE, P.; SIEGLER, R. Four Aspects of Strategic Change: Contributions to Children’s Learning of Multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General,* 124 (1), p. 83-97, 1995.

LEVINE, D. R. Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 350-359, 1982.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Adapting Strategy Choices to Situational Factors: The effect of time pressure on children's numerosity judgement strategies. *Psychologica Belgica*, 2003.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L.; ONGHENA, P.; DECORTE, E. Children's Strategies for Numerosity Judgment in Square Grids of Different Sizes. *Psychologica Belgica,* 40 (3), p. 183-209, 2000.

LUWEL, K.; BEEM, A. L.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. Using Segmented Linear Regression Models with Unknown Change Points to Analyze Strategy Shifts in Cognitive Tasks. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, 33 (4), p. 470-478, 2001.

LUWEL, K.; ONGHENA, P.; TORBEYNS, J.; SCHILLEMANS, V.; VERSCHAFFEL, L. Strengths and Weaknesses of the Choice/No-Choice Method in Research on Strategy Use. *European Psychologist*, 14(4), p. 351–362, 2009.

LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Analyzing Strategy Use in Terms of the Four Parameters of Strategic Competence: Contributions from a numerosity judgment task. *Anales de Psicología*, 24(2), p. 223-239, 2008.

OBERSTEINER, A.; REISS, K.; UFER, S.; LUWEL, K.; VERSCHAFFEL, L. Do First Graders Make Efficient Use of External Number Representations? The Case of the Twenty-Frame. *Cognition and Instruction,* 32(4), p. 353–373, 2014.

PEETERS, D.; VERSCHAFFEL, L.; LUWEL, K. Benchmark-based Strategies in Whole Number Line Estimation. *British Journal of Psychology,* 2016.

REYS, B. J. Teaching Computational Estimation: Concepts and strategies. In: SHOEN, H. L.; ZWENG, W. J. (Eds.). *Estimation and mental computation*, VA: National Concil of Teachers of Mathematics, p. 31-44, 1986.

SCHILLEMANS, V.; LUWEL, K.; ONGHENA, P.; VERSCHAFFEL, L. The Influence of the Previous Strategy on Individuals' Strategy Choices. *Studia psychologica*, 53(4), p. 339-350, 2011.

SCHNEIDER, M.; GRABNER, R. H.; PAETSCH, J. Mental Number Line, Number Line Estimation, and Mathematical Achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101, p. 359–372, 2009.

SIEGEL, A. W.; GOLDSMITH, T. H.; MADSON, C. R. Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 211–232, 1982.

SIEGLER, R. S.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development*, 75, p. 428–444, 2004.

SIEGLER, R.; BOOTH, J. L. Development of Numerical Estimation: A Review. In CAMPBELL, J. I. D. *Handbook of Mathematical Cognition*. Psychology Press: New York. Cap. 2, p. 197-212, 2005.

SIEGLER, R.; LEMAIRE, P. Older and Younger Adult's Strategy Choices in Multiplication: Testing Predictions of ASCM Using the Choice/No-Choice Method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126 (1), p. 71-92, 1997.

SIEGLER, R. S.; OPFER, J. E. The Development of Numerical Estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, p. 237-243, 2003.

SULLIVAN, J. L.; JUHASZ, B. J.; SLATTERY, T. J.; BARTH, H. C. Adults' Number-Line Estimation Strategies: Evidence from eye movements. *Psychon Bull Rev*, 18, p. 557–563, 2011.

THOMPSON, C. A.; SIEGLER, R. S. Linear Numerical-Magnitude Representations Aid Children's Memory for Numbers. *Psychological Science*, 21(9), p. 1274–1281, 2010.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E.; LAMOTE, C.; DHERT, N. The Acquisition and Use of an Adaptive Strategy for Estimating Numerosity. *European Journal of Psychology of Education*, 13, p. 347-370, 1998.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ato de realizar estimativas está presente em diversas situações cotidianas das pessoas. Por exemplo, podem-se realizar estimativas da *distância* de um local a outro, do *tempo* de deslocamento desta distância, do *comprimento* de objetos, da *capacidade* volumétrica de um recipiente, dentre outras. A estimativa está presente em expressões como: “cerca de”, “aproximadamente”, “mais do que”, “menos do que”, “quase”, “mais ou menos”, “por volta de” etc.

Embora a estimativa seja um processo da vida cotidiana, é uma habilidade pouco desenvolvida em crianças e adultos. Esta dificuldade tem sido atribuída a estruturas conceituais centrais inadequadas, à manipulação simbólica descuidada, à falta de senso numérico e à incompreensão da aritmética. Para distinguir as habilidades cognitivas necessárias para o desenvolvimento da estimativa é preciso ter conhecimento sobre os processos que são exigidos para realizar estimativas.

Grande parte das investigações sobre a estimativa numérica concentra-se em como magnitudes numéricas podem ser representadas mentalmente e como essas representações podem mudar com o tempo e a experiência. Vários grupos de pesquisadores levantaram a hipótese de que a estimativa das crianças reflete sua representação interna dos números. Entretanto, os estudos revelam variadas explicações acerca dessas representações.

Alguns modelos buscam descrever a representação numérica interna: o *Acumulador* (linear) em que a distância entre os números em uma reta numérica mental seria igualmente distribuída, o *Logarítmico*, no qual a distância entre os números menores são maiores e vão reduzindo conforme aumenta a magnitude numérica a ser estimada, sendo que alguns autores propõem mudanças logaritmo-linear ou até mesmo a coexistência de representações, dependendo da idade, experiência, contexto e familiaridade com números. Além desses, ainda são propostos o *Modelo Duplo-Linear,* que trata a representação numérica como uma combinação de duas (ou mais) funções lineares e o *Modelo de Juízo Proporcional* que propõe que a estimativa numérica é uma comparação parte-todo e, por isso, geraria estimativas mais precisas próximas a pontos pré-determinados conhecidos na reta numérica mental. Entretanto, se algum desses modelos realmente reflete a representação mental de magnitude numérica ainda é uma incógnita. Considera-se que é possível pensar em uma proposta conciliadora em que cada modelo de representação possa estar presente, de acordo com o período de desenvolvimento.

O objetivo geral dessa tese foi estudar o desenvolvimento da habilidade de realizar estimativas, avaliando em que ponto do desenvolvimento as crianças alcançam a habilidade de realizar estimativas semelhante à dos adultos, quais as relações envolvidas entre o desempenho em estimativa de quantidade e em estimativa na reta numérica e como ambas se relacionam com o desempenho em aritmética, verificando a diversidade estratégica das crianças para ambas as tarefas de estimativa numérica. Para alcançar esse objetivo, foram desenvolvidos três estudos complementares.

O primeiro teve como propósito identificar os níveis de precisão de estimativa numérica de quantidades em estudantes do 2º ao 6º ano escolar, verificando em que ponto do desenvolvimento as crianças adquirem o grau de precisão semelhante ao dos adultos. A hipótese principal era de que a habilidade de realizar estimativas é ampliada em termos qualitativos com o passar da idade e da experiência, até a chegada de um patamar formal de conhecimento, com estimativas realizadas com o grau de precisão comparável ao dos adultos. Essa hipótese foi parcialmente confirmada, já que, para todos os diferentes modos de apresentação dos estímulos, os sujeitos mais velhos foram mais precisos que os mais novos (exceto para os adultos do ensino médio), sendo esse desenvolvimento demonstrado por níveis de faixa etária semelhantes, mas diferentes de acordo com o modo de apresentação dos pontos. Entretanto, para grande parte das formas de apresentação dos estímulos, os adultos tiveram suas estimativas significativamente diferentes das estimativas dos demais estudantes. Os resultados deste estudo mostram que a estimativa numérica de quantidades não é bem desenvolvida em crianças nem em adultos, mas seu desenvolvimento é progressivo, inclusive, na idade adulta, à medida que novos níveis de dificuldade são inseridos nas tarefas propostas.

O segundo estudo teve como objetivo verificar em qual das tarefas de estimativa os estudantes de 5º e 6º ano são mais precisos, considerando as diferentes escalas e dois diferentes instrumentos de avaliação da estimativa, além de comparar o desempenho nas diferentes tarefas de estimativa com o desempenho em aritmética. A hipótese principal era que as crianças seriam mais precisas na tarefa de estimativa de quantidades quando comparada à tarefa de estimativa na reta numérica, o que se mostrou verdadeiro. Os resultados deste estudo indicaram que as duas tarefas possuem diferentes médias de precisão e, por isso, pode-se supor que exijam diferentes funções cognitivas para sua execução. Entretanto, ao contrário do que era esperado, os argumentos estatísticos que indicaram que os testes de estimativa estão correlacionados com o desempenho aritmético dos estudantes não foram consistentes, apresentando correlação moderada e fraca apenas no intervalo numérico de 0 a 100. Com esse resultado, discutir possibilidades para o aprimoramento de estratégias de estimativas pode ser interessante para o desenvolvimento aritmético para grandes números e quantidades.

O terceiro estudo teve como objetivo compreender e descrever quais as estratégias que 30 crianças do 2º ao 6º ano usam para fornecer estimativas de quantidades discretas e estimativas na reta numérica, verificando-se frequência e eficiência destas estratégias. Não havia hipóteses quanto aos grupos estratégicos que seriam encontrados, nem quanto aos grupos estratégicos que gerariam estimativas mais precisas para nenhuma das tarefas avaliadas. Os resultados indicaram que as crianças não diferem quanto ao tipo de estratégia utilizada, mas na eficiência dessa aplicação (no caso do TENQ), mas avançaram, em termos qualitativos, suas estratégias de acordo com a idade para o TERN. Para o TENQ, foram categorizados sete diferentes tipos de estratégias: *contagem exata, contagem aproximada por grupos*, *subitizing*, *subtração*, *fixação*, c*ontagem com recuperação de memória* dos itens e *outras* estratégias de estimativa rápida. Para o TERN, foram categorizadas oito estratégias: *contagem* unitária, c*ontagem inversa*, *divisão ao meio*, *divisão em quartos*, *subdivisão integral*, *subdivisão* de *10 em 10* unidades; *referência*; e *outras* estratégias de estimativa rápida.

Tanto no TENQ quanto no TENQ, houve poucas estratégias combinadas, mas no TENQ as combinações foram menos precisas que as estratégias simples, ao contrário dos resultados obtidos no TENR. Para ambos os testes, a estratégia de contagem ainda é a mais utilizada, em especial até o final do 4º ano. Considera-se que a principal razão para os alunos não realizarem estimativas tão bem pode ser simplesmente o fato de que o estudo sistemático de estimativa não está incluído no currículo de matemática do ensino fundamental.

Considerando os três estudos descritos, observa-se que o desenvolvimento contínuo, dado por diferentes etapas de compreensão da estimativa numérica de quantidades, está ainda correlacionado ao desempenho em tarefas de estimativa na reta numérica, o que indica que habilidades de estimativa em diferentes formas de realização estão, de alguma forma, relacionadas em termos de habilidades ou, então exigem habilidades semelhantes para sua realização. Além disso, esse desenvolvimento progressivo, cujo desempenho está correlacionado a outras tarefas de estimativa, também se correlaciona ao desempenho em aritmética, mesmo que ainda não seja possível estabelecer qualquer relação de causalidade entre essas habilidades. Por fim, o desenvolvimento progressivo da estimativa numérica de quantidades, correlacionado ao desenvolvimento progressivo, já demonstrado pela literatura, da estimativa na reta numérica é dado por estratégias. Essas estratégias podem ser utilizadas com maior eficiência, no caso das quantidades, ou por diferentes e mais elaboradas estratégias, no caso da reta numérica, quanto mais avançada a etapa escolar do estudante. Sendo assim, esse progresso na habilidade de realizar estimativas pode estar relacionado às estratégias utilizadas para sua resolução. A falta do ensino dessas estratégias, de modo a possibilitar a construção de estratégias mais eficientes para cada situação pode, então, justificar porque as pessoas não são boas em realizar estimativas, já que estratégias mais precisas não são sempre as mais frequentes.

A ciência busca uma explicação, uma descrição melhor sobre o mundo e uma possível generalização dos resultados. A boa pesquisa deve ser replicável em outro contexto, sendo mais descritiva que prescritiva. Neste caso, a educação é um conjunto de ciências aplicadas que precisam, juntas, chegar a respostas sobre o desenvolvimento da aprendizagem humana. A educação tem formulado questões fundamentais, mas ainda necessita de respostas mais precisas para essas questões. Fala-se muito em novos métodos de ensino, mas quase nada sobre o conhecimento do desenvolvimento da criança e suas aprendizagens.

Uma vez que uma estimativa "rápida" é muitas vezes desejável, pesquisas futuras podem examinar como as pessoas estimam, usando estratégias diferentes e quando limitações de tempo estão presentes. Os achados deste estudo não contrariam outros resultados de pesquisa que indicam que a estimativa é um dos preditores do conhecimento matemático, mas sugerem que a relação de causalidade também pode estar invertida, dando nova perspectiva às evidências que indicam que as diferenças individuais em habilidades de estimativa fazem uma contribuição poderosa para aprendizagem matemática das crianças.

Os estudos aqui descritos evidenciaram resultados que podem ter sido influenciados por fatores específicos ligados às situações em que foram realizados. Compreendendo, de forma geral, algumas das limitações evidenciadas, pode-se destacar o número limitado de escolas participantes, que restringiu o número da amostra de sujeitos. Por isso, generalizações dos resultados a outras populações de estudantes devem ser feitas com cautela; sugerindo-se replicação com outras amostras. Se alunos de outras escolas, outras idades ou outras cidades forem estudados, ou se alunos, talvez em mesmas condições, porém não muito habilidosos em estimativa, tivessem participado destes estudos, diferentes resultados poderiam ter sido obtidos.

Outra limitação refere-se à diversidade de tarefas existentes, que avaliam estimativa numérica. Ressalta-se que, na maneira como proposto nesta pesquisa, apenas o instrumento da reta numérica (TERN) já havia sido utilizado antes, entretanto, com maior variedade numérica e na forma de realização, podendo ocorrer na ordem inversa a que é proposta neste estudo: a partir de uma posição, estimar o número. O teste de estimativa de quantidades utilizado (TENQ) foi criado pela própria pesquisadora, não sendo anteriormente validado. No entanto, pensa-se que este fato influencie apenas as conclusões sobre as capacidades relativas a bons e maus estimadores e não às conclusões mais importantes que envolvem o uso de estratégia e evolução da capacidade de realizar estimativas. Também não se pode desconsiderar a limitação imposta pela aplicação coletiva das tarefas de estimativa numérica e pela recolha de dados através de protocolos verbais nas entrevistas individuais do último estudo. Apesar de suas limitações, os resultados encontrados nos três estudos possibilitam ampliar o conhecimento acerca do desenvolvimento da estimativa numérica em crianças, indicando a necessidade de abrir espaço para esta habilidade ser desenvolvida dentro da sala de aula. Mesmo que não se saiba ao certo qual seria a natureza da relação entre estimativa numérica e desempenho aritmético, já é sabido que ela existe. Nesse sentido, torna-se relevante destacar no ensino da matemática o uso de estratégias que aprimorem a habilidade em estimativa.

Pesquisas anteriores sugerem que a estimativa não é uma habilidade independente, mas que parece estar relacionada com outras habilidades matemáticas, tais como computação mental, visualização espacial e de medição, por exemplo. Neste sentido, novas pesquisas podem explorar a associação entre a estimativa da quantidade discreta e outras habilidades matemáticas. Embora este estudo tenha fornecido importantes informações sobre os processos de pensamento das crianças e sobre o uso de estratégia ao realizar estimativas, outras perguntas continuam sem respostas, especialmente as relacionadas às habilidades cognitivas envolvidas nos diferentes processos de estimativa.

Outra importante questão para futuras pesquisas diz respeito às formas mais eficazes de desenvolver a habilidade dos alunos para realizar estimativas. Embora este estudo tenha identificado estratégias que levaram a estimativas mais precisas, os educadores precisam conhecer as maneiras mais eficazes de desenvolver estas estratégias na escola. Por exemplo, como o conteúdo e as atividades devem ser incluídas no currículo e quanto tempo deve ser dedicado a essas atividades.

Pode-se afirmar que, no trabalho docente, não tem sido dada a devida importância à estimativa numérica, mesmo que estas habilidades estejam tão frequentes no cotidiano das crianças e, talvez por isso, pode-se ter a falsa ideia de que ele é matematicamente de fácil entendimento. Nesse sentido, fica evidente a necessidade de mais estudos nesta área de investigação.

ANEXO A – DOCUMENTO DE AUTORIZAÇÃO: ESCOLA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

Eu,..., no cargo de .... venho representar a escola ...., situada no endereço ...., na cidade de ...., no sentido de autorizar o desenvolvimento do projeto "Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção" e a participação livre e espontânea dos alunos das turmas de 2º ao 6º ano. Declaro estar ciente que o projeto será desenvolvido nas dependências da escola e da necessidade de a instituição disponibilizar uma sala equipada com projetor para a realização do projeto.

...., ... de ....de 2015.

____

Assinatura do(a) representante da escola

ANEXO B – DOCUMENTO DE AUTORIZAÇÃO: INSTITUIÇÃO DE ENSINO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção

TERMO DE CONSENTIMENTO DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO

Eu,.., no cargo de .... venho representar a Instituição de Ensino..., situada no endereço..., na cidade de ...., no sentido de autorizar o desenvolvimento do projeto “Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção” e a participação livre e espontânea dos alunos das turmas de 1º, 2º e 3º ano do Proeja, bem como alunos dos cursos superiores. Declaro estar ciente que o projeto será desenvolvido nas dependências da escola e da necessidade de a instituição disponibilizar uma sala equipada com projetor para a realização do projeto.

...., ... de ....de 2015.

____

Assinatura do(a) representante da instituição

ANEXO C – TERMO DE PARTICIPAÇÃO: DOCENTES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção

TERMO DE PARTICIPAÇÃO DO DOCENTE

Eu, ____, professor(a) responsável pela(s) turma(s)____, na instituição de ensino____, aceito participar da pesquisa desenvolvida por Mariana Lima Duro, intitulada “Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção”, fornecendo informações referentes ao desempenho escolar dos estudantes participantes do estudo, bem como cedendo espaço durante o período de aula para que seja realizada a pesquisa.

________________________________, ___ de ________________ de 2015.

____

Professor(a) da Instituição

ANEXO D - TERMO DE CONSENTIMENTO: PAIS OU RESPONSÁVEIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ACEITE DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Autorizo meu(minha) filho(a).. .... a participar da pesquisa intitulada “Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção” coordenada pela doutoranda Mariana Lima Duro da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Estou consciente de que meu(minha) filho(a) participará de atividades que envolvem situações de contagem e estimativa numérica, tema principal da pesquisa, e de que estas atividades serão realizadas em horário de aula, fora do espaço de sala de aula, dentro da escola e o aluno poderá deixar de participar a hora que quiser. Também estou informado(a) de que o grupo de pesquisadores envolvidos se comprometeu a dar uma devolução dos resultados encontrados, em um período de, aproximadamente, dezoito meses e, como benefício da pesquisa, serão indicadas formas pedagógicas adequadas de estimular o desenvolvimento da estimativa numérica para os professores. Autorizo, também, a divulgação dos resultados encontrados, em forma de artigos.

Dados para a pesquisa:

Nome da Escola:..

Série e turma do(a) aluno(a): ....

Data de nascimento do(a) aluno(a): ..../................./................

Sexo do(a) aluno(a): (   ) Feminino (   ) Masculino

___________________________________, ___ de ________________ de 2015.

____

Assinatura dos pais ou do responsável

Obs.: qualquer esclarecimento pode ser feito pelo telefone (51) 9989-6769

ANEXO E - TERMO DE CONSENTIMENTO: ALUNO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
ACEITE DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Declaro que eu, ____, nascido(a) em ______/______/______, estudante da turma e ano ___________, da instituição de ensino____, concordo em participar da pesquisa, intitulada "Estimativa Numérica de Quantidades: desenvolvimento, uso de estratégias e possibilidade de intervenção", realizada pela doutoranda Mariana Lima Duro, da Faculdade de Educação da UFRGS. Estou consciente de as atividades envolvem situações de contagem e estimativa numérica, tema principal da pesquisa, e de que estas atividades serão realizadas em horário de aula, fora do espaço de sala de aula, dentro da instituição de ensino e eu poderei deixar de participar a hora que quiser. Também estou informado de que o grupo de pesquisadores envolvidos se comprometeu a dar uma devolução dos resultados encontrados, em um período de, aproximadamente, dezoito meses e, como benefício da pesquisa, serão indicadas formas pedagógicas adequadas de estimular o desenvolvimento de estimativa numérica para os professores. Autorizo, também, a divulgação dos resultados encontrados, em forma de artigos.

_________________________________, ____/____/2015.

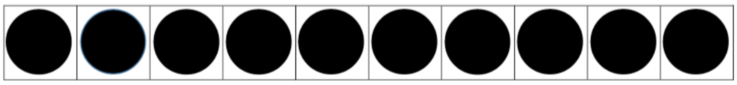
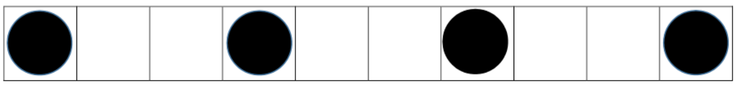
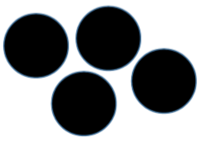
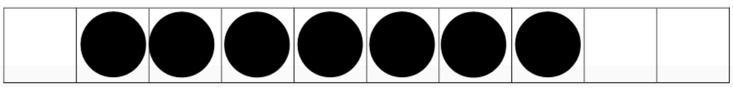
____

Assinatura do Aluno

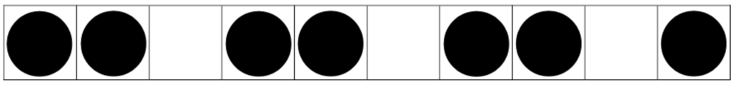
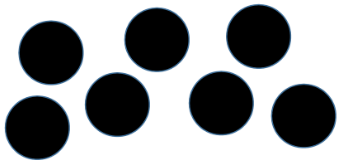
APÊNDICE A – ATIVIDADES DO TENQ

VAMOS TENTAR SABER QUANTOS TEM SEM CONTAR?

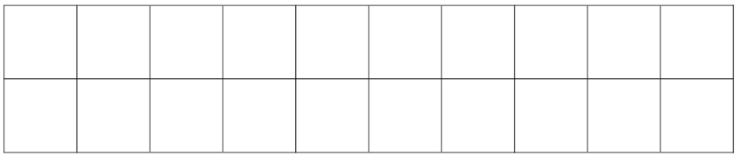
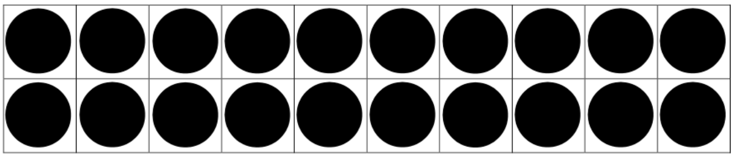
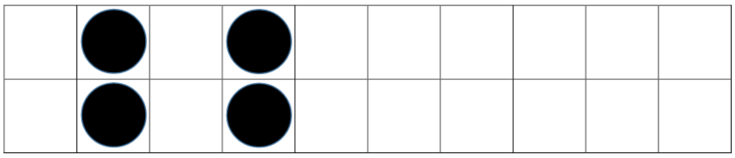
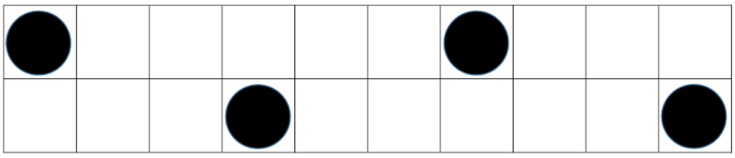
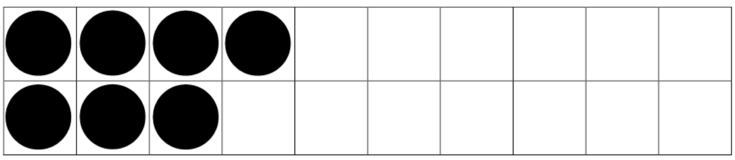
Quantidades até 10

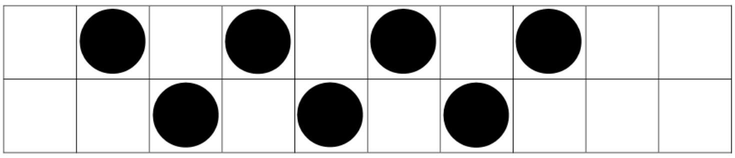
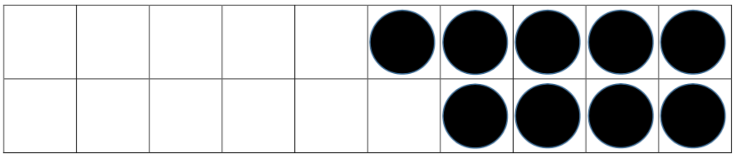
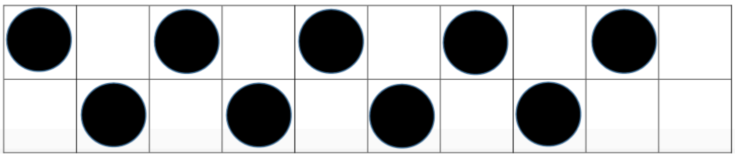
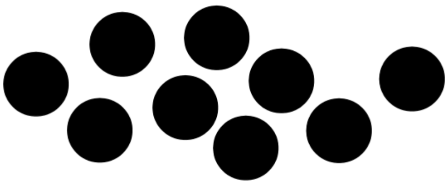
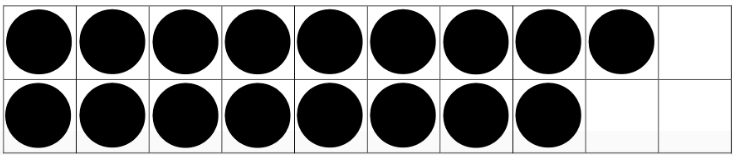
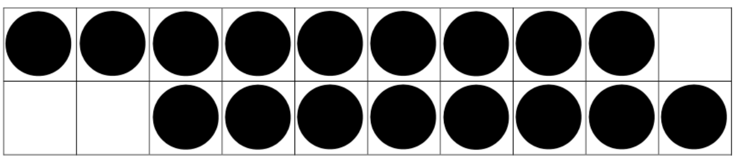
Representação	Q[3]	Característica
	0	Matriz de referência (10x1)
	10	Matriz de referência (10x1)
	4	Pequena quantidade de itens aglomerados em matriz (10x1)
	4	Pequena quantidade de itens espaçados em matriz (10x1)
	4	Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 10
	7	Grande quantidade de itens aglomerados em matriz (10x1)

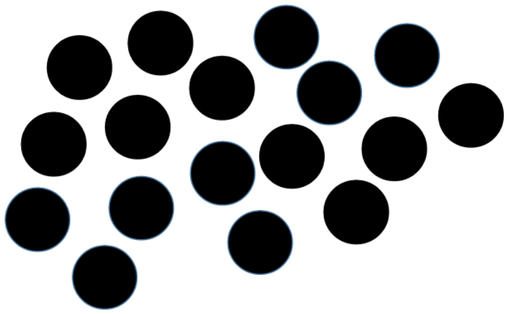
Quantidade

	7	Grande quantidade de itens espaçados em matriz (10x1)
	7	Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 10

Quantidades até 20

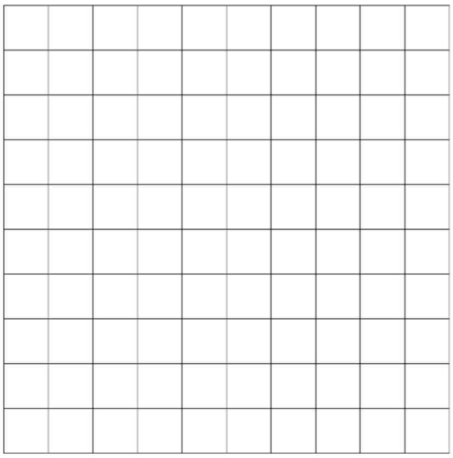
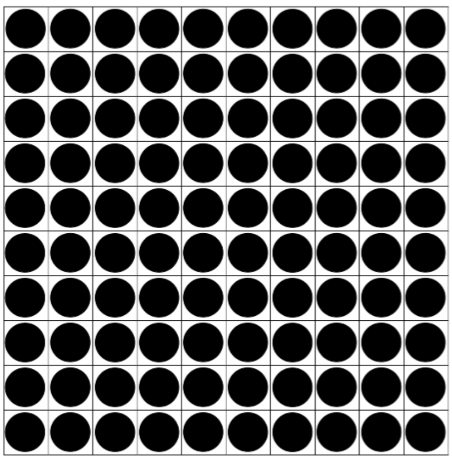
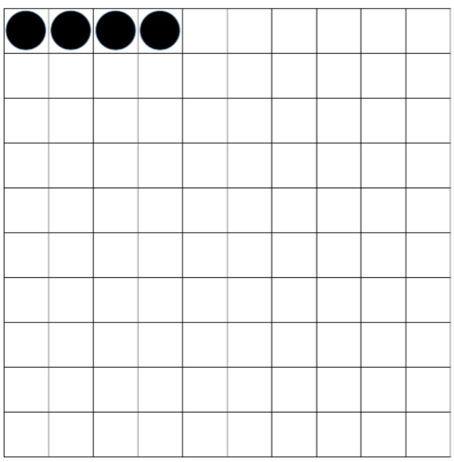
Representação	Q	Característica
	0	Matriz de referência (10x2)
	20	Matriz de referência (10x2)
	4	Pequena quantidade de itens aglomerados e apresentados em uma matriz maior (10x2)
	4	Pequena quantidade de itens espaçados e apresentados em uma matriz maior (10x2)
	7	Mesma quantidade de itens apresentados de forma aglomerada em matriz maior (10x2)

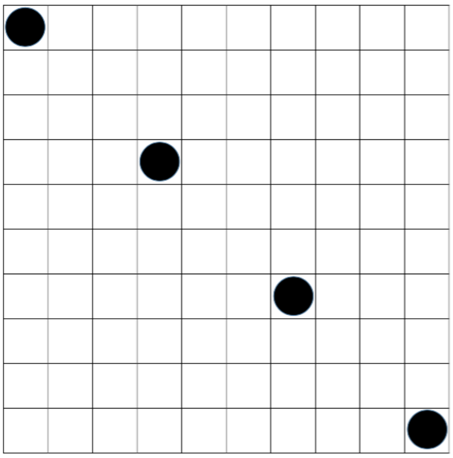
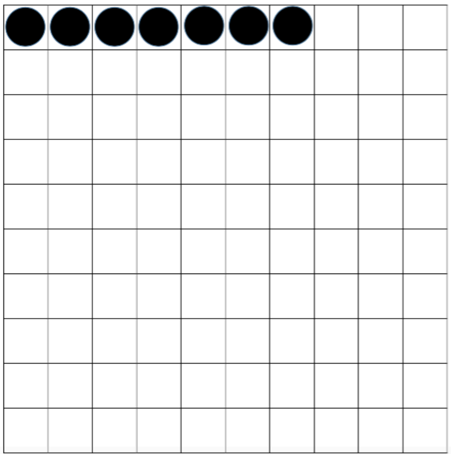
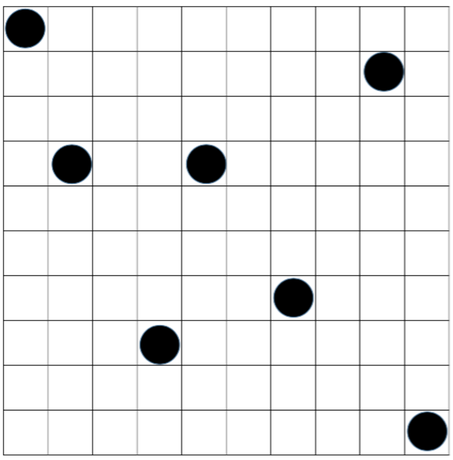
	7	Mesma quantidade de itens apresentados espaçadamente em matriz maior (10x2)
	9	Quantidade próxima a metade da matriz (10x2), com itens aglomerados
	9	Quantidade próxima a metade da matriz (10x2), com itens espaçados
	9	Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 10
	17	Grande quantidade de itens aglomerados em matriz (10x2)
	17	Grande quantidade de itens espaçados em matriz (10x2)

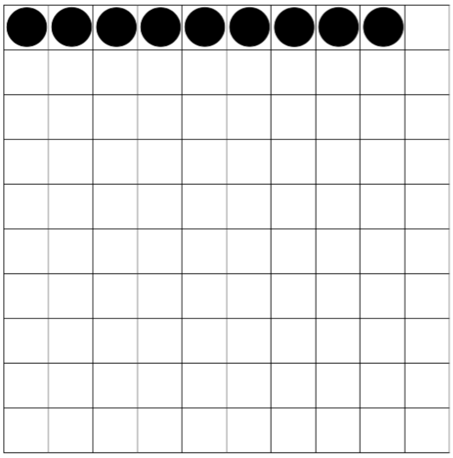
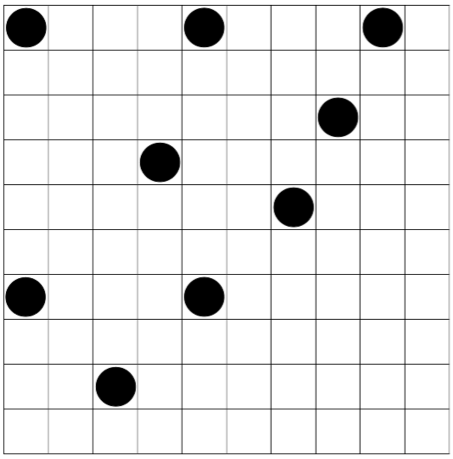
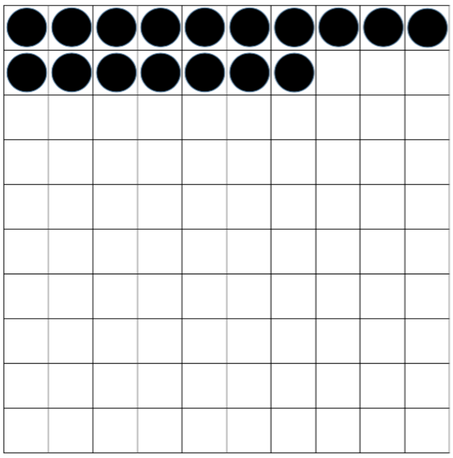


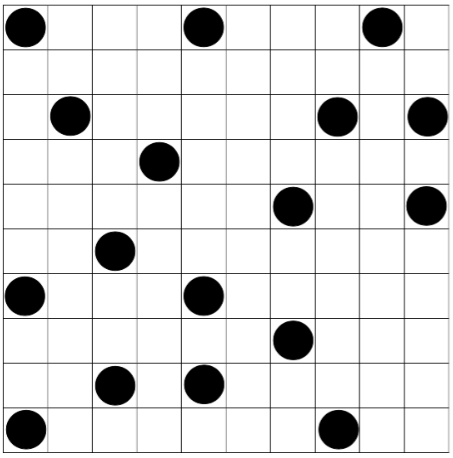
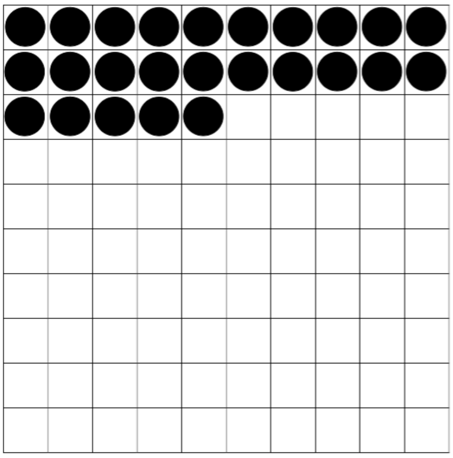
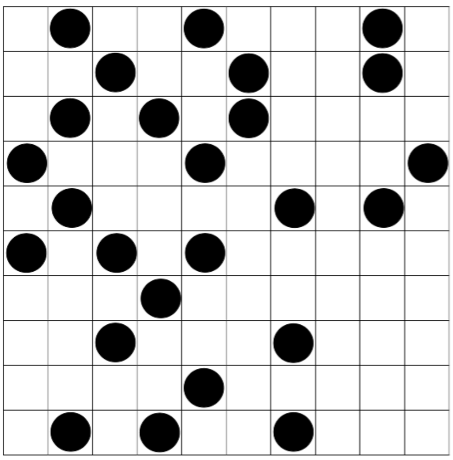
17 Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 20

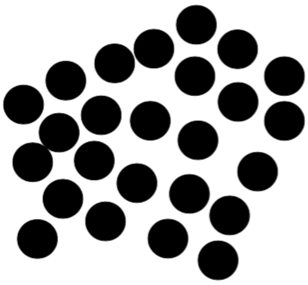
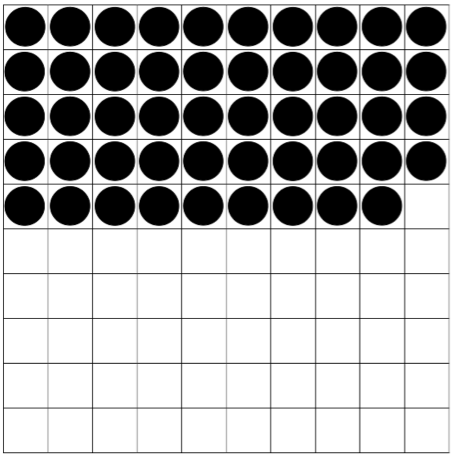
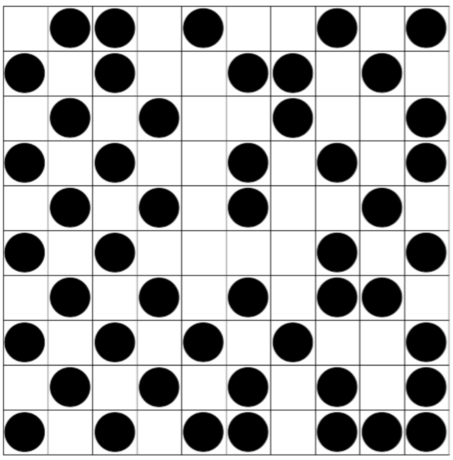
Quantidades até 100

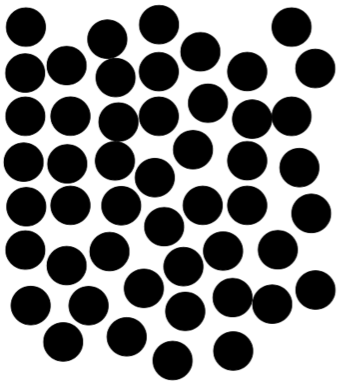
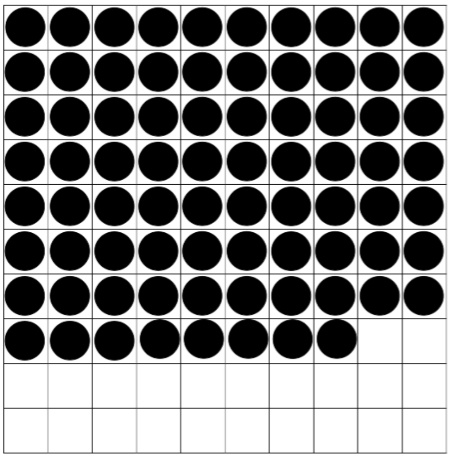
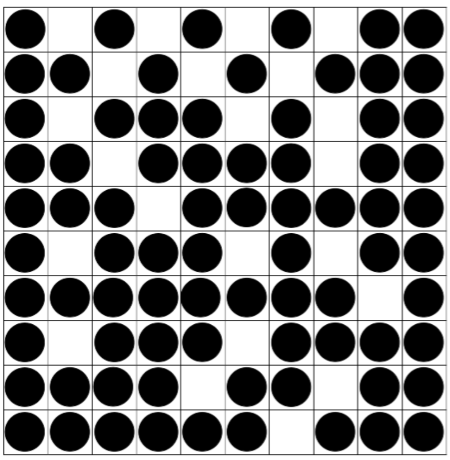
Representação	Q	Característica
	0	Matriz de referência (10x10)
	100	Matriz de referência (10x10)
	4	Pequena quantidade de itens aglomerados e apresentados em uma matriz maior (10x10)

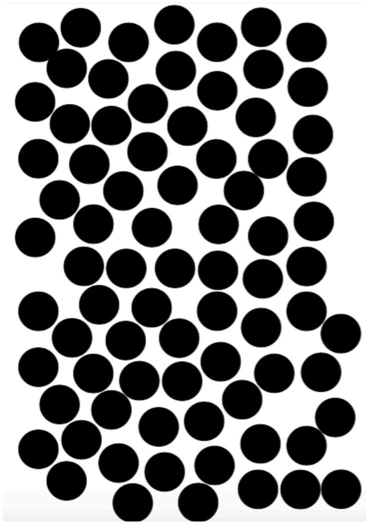
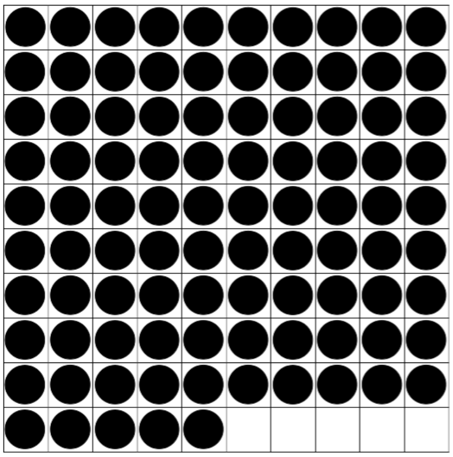
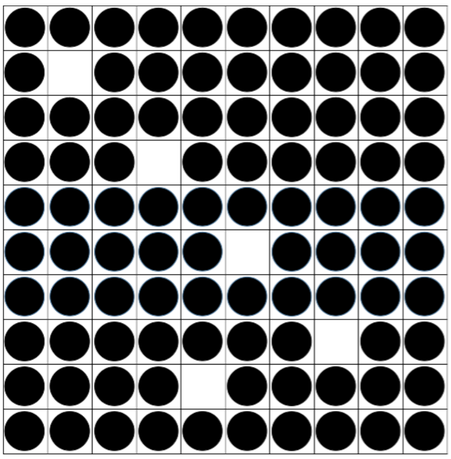
	4	Pequena quantidade de itens espaçados e apresentados em uma matriz maior (10x10)
	7	Mesma quantidade de itens apresentados de forma aglomerada em matriz maior (10x10)
	7	Mesma quantidade de itens apresentados espaçadamente em matriz maior (10x10)

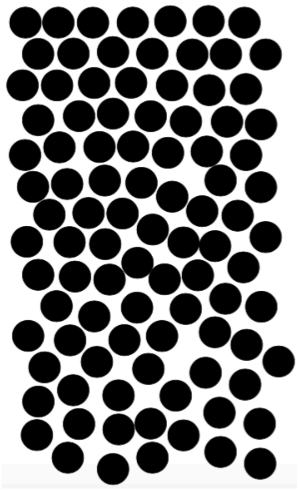
	9	Mesma quantidade de itens apresentados de forma aglomerada em matriz maior (10x10)
	9	Mesma quantidade de itens apresentados espaçadamente em matriz maior (10x10)
	17	Mesma quantidade de itens apresentados de forma aglomerada em matriz maior (10x10)

	17	Mesma quantidade de itens apresentados espaçadamente em matriz maior (10x10)
	25	Quantidade próxima a um quarto da matriz (10x10), com itens aglomerados
	25	Quantidade próxima a um quarto da matriz (10x10), com itens espaçados

	25	Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 100
	49	Quantidade próxima a metade da matriz (10x10), com itens aglomerados
	49	Quantidade próxima a metade da matriz (10x10), com itens espaçados

	49	Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 100
	78	Quantidade próxima a três quartos da matriz (10x10), com itens aglomerados
	78	Quantidade próxima a três quartos da matriz (10x10), com itens espaçados

	78	Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 100
	95	Grande quantidade de itens aglomerados e apresentados em uma matriz (10x10)
	95	Grande quantidade de itens espaçados e apresentados em uma matriz (10x10)



95 Itens distribuídos aleatoriamente para quantidades até 100

APÊNDICE B – ATIVIDADES DO TERN

APÊNDICE C – ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Entrevista semiestruturada para compreensão das estratégias de realização de Estimativas de Quantidades Discretas

Instrução: Algumas bolas pretas irão aparecer na tela e eu gostaria que me dissesses quantas bolas estão sendo apresentadas, sem que as conte.

Questões norteadoras

- Como chegaste a esta quantidade? Que caminhos achas que teu pensamento percorreu para chegares neste valor?
- O que observaste na tela? Descreva o que viu.
- Por que fizeste desta maneira?
- Será que existiria outra maneira de chegar a este valor?
- De que maneira pensas que conseguirias obter esta quantidade com maior rapidez e precisão?
- Se fosse pedido para que realizasse novamente esta tarefa, faria da mesma maneira? Explique.
- Que diferenças podes observar na realização das estimativas quando o intervalo de referência é apresentado e quando não é?
- Como consideras mais fácil realizar estimativa da quantidade de bolas quando elas estão distribuídas na matriz ou quando não estão? Explique.