

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**Controle Preditivo Retroalimentado  
por Estados Estimados, Aplicado a  
Uma Planta Laboratorial**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Anderson de Campos Paim

**Porto Alegre**

**2009**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

# **Controle Preditivo Retroalimentado por Estados Estimados, Aplicado a Uma Planta Laboratorial**

Anderson de Campos Paim

Dissertação de Mestrado apresentada como  
requisito parcial para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia

Área de concentração: Pesquisa e  
Desenvolvimento de Processos.

Subárea: Integração, Modelagem, Simulação,  
Controle e Otimização de Processos.

## **Orientador**

Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler

**Porto Alegre**

**2009**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação “*Controle Preditivo Retroalimentado por Estados Estimados, Aplicado a Uma Planta Laboratorial*”, elaborada por Anderson de Campos Paim, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Química.

Comissão Examinadora:

---

Eng. Dr<sup>a</sup>. Nina Paula Gonçalves Salau (DEQUI/UFRGS)

---

Eng. Dr. Pedro Rafael Bolognese Fernandes (TriSolutions)

---

Eng. Dr. Ricardo Guilherme Duraiski (TriSolutions)

---

Eng. Dr. Rodrigo Iván Goytia Mejía (DEQUI/UFRGS)

*“De nada vale ter uma ferramenta muito sofisticada se ela não puder ser eficiente e de fácil implementação prática”.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler pela orientação, incentivo e ajuda. Sua participação ativa e disposição foram elementos indispensáveis à concretização deste trabalho;

Ao Grupo de Integração, Modelagem, Simulação, Controle e Otimização de Processos (GIMSCOP), em especial ao Prof. Dr. Marcelo Farenzena, ao M. Sc. Marcelo Escobar e ao M. Sc. Fabio César Diehl, pela ajuda técnica nos momentos de dificuldade;

Ao Departamento de Engenharia Química (DEQUI) pela estrutura e a todos os professores da pós-graduação pela excelência e dedicação na qualificação dos alunos. Além disso, agradeço ao grande afeto dos colegas e amigos mais próximos: Cassiano, Rodrigo, Cica, Gi, Tatá, Jovani, Thiago, Guilherme, Cris, Dani e Kaká;

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) pela oportunidade, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro;

À minha mãe, Cerlei, pelo amor, carinho, educação, e pelas renúncias feitas para que eu chegasse até aqui;

À minha irmã, Vivian, pelo amor, companheirismo, pelas vezes que deixou seus desejos para mais tarde, para que eu pudesse realizar os meus;

À minha namorada, Martha, pelo amor, carinho, incentivo, pelas muitas ajudas, pela paciência, por estar comigo em todos os momentos difíceis e por me manter sempre com esperança e me fazendo sorrir;

Enfim, a todos os amigos e conhecidos, homens e mulheres de caráter, que de alguma forma colaboram para que hoje eu estivesse onde estou e que assim acreditaram em mim.

# Resumo

A retroalimentação de controladores preditivos que utilizam modelos em espaço de estado pode ser realizada de duas formas: (a) *correção por bias*, em que as saídas preditas são corrigidas adicionando-se um valor proporcional a discrepância encontrada entre o valor medido atual e sua respectiva predição e por (b) *retroalimentação dos estados*, onde se determinam as condições iniciais através da estimação dos estados, e a partir de uma melhor condição inicial se realizam as predições futuras usadas no cálculo das ações de controle. Nesta dissertação estas duas abordagens são comparadas utilizando a *Planta Laboratorial de Seis Tanques Esféricos*.

As técnicas de Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrições (CEKF) foram empregadas para estimar os estados não medidos. Inicialmente foram feitos testes *off-line* destes algoritmos de estimação. Para estes testes são utilizados uma série de dados da planta laboratorial do estudo de caso, na qual são estudadas as influências de diversos fatores de ajuste que determinam a qualidade final de estimação. Estes ajustes serviram de base para a aplicação destes algoritmos em tempo real, quando então, estimadores de estados estão associados ao sistema de controle do processo baseado em um algoritmo de controle preditivo.

Após se ter certificado a qualidade das estimações de estado, partiu-se para sua utilização como uma alternativa de retroalimentação de controladores preditivos. Estes resultados foram comparados com os obtidos através da correção simples por *bias*. Os resultados experimentais apontam para uma marginal piora devido à *retroalimentação por estimadores de estados* frente à *correção por bias*, pelo menos para o caso do controlador preditivo linear utilizado na comparação. Entretanto, espera-se que resultados melhores sejam obtidos no caso de modelos preditivos não-lineares, uma vez que nestes casos o modelo é bem mais sensível à qualidade da condição inicial.

**Palavras Chaves:** Filtro de Kalman Estendido, Controlador Preditivo baseado em Modelo, Espaço de Estado, Processos Multivariáveis, Metodologia RPN

# Abstract

The feedback of controllers that use predictive models in state space can be accomplished in two ways: (a) *bias correction*, where the predicted outputs are corrected by adding a value proportional to the discrepancy found between the current measurement and its respective prediction; and by (b) *state feedback*, which establishes the initial conditions through the states estimation, and from a better initial condition are carried out the future predictions used in the calculation of control. In this thesis these two approaches are compared using a *Laboratorial Plant of Six Spherical Tanks*.

The techniques of Extended Kalman Filter (EKF) and Constraint Extended Kalman Filter (CEKF) were used to estimate the unmeasured states. Initially, tests were carried out *off-line* for these estimation algorithms. For such testing are used a dataset of the plant in case study, in which are studied the influences of several adjustment factors that they determine the final quality of estimation. These adjustments were used of base for the application of these algorithms in real time, when then state estimators are associated with the system of process control based on a predictive control algorithm.

After having ascertained the quality of the state estimates, begins its use as an alternative for feedback of predictive controllers. These results were compared with those obtained by the simple correction of bias. The experimental results show a marginal worsening due to feedback from *state estimated* compared with *bias correction*, at least for the case of linear predictive controller used in the comparison. However, one expects that better results will be obtained in the case of non-linear predictive models, since in these cases the model is much more sensitive to the quality of the initial condition.

**Key Words:** Extended Kalman Filter, Model Predictive Controller, State Space, Multivariable Process, Methodology RPN





# Sumário

<b>Capítulo 1 - Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Áreas de Interesse.....</b>	<b>2</b>
<b>1.2 Campos de Aplicação .....</b>	<b>6</b>
<b>1.3 Técnicas de Estimação .....</b>	<b>6</b>
<b>1.4 Objetivos da Dissertação.....</b>	<b>7</b>
<b>1.5 Estrutura da Dissertação .....</b>	<b>7</b>
<b>1.6 Notação Adotada .....</b>	<b>8</b>
<b>Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 Revisão Sobre Sistemas de Controle.....</b>	<b>9</b>
2.1.1 Controlador Preditivo Baseado em Modelo (MPC).....	9
2.1.2 Estrutura de Realimentação dos Estados.....	12
<b>2.2 Revisão Sobre Estimadores de Estados .....</b>	<b>19</b>
2.2.1 Conceito de Estado.....	23
2.2.2 Premissas da Estimação de Estados .....	25
2.2.3 Estimador Ótimo .....	27
2.2.4 Critérios de Estimação .....	27
2.2.5 Ganho de Kalman.....	30
2.2.6 Cálculo da Matriz de Covariância.....	34
2.2.7 Critérios de Observabilidade.....	37
2.2.8 Filtro de Kalman Estendido (EKF) .....	39
2.2.9 Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF).....	42
2.2.10 Parâmetros de Ajuste dos Filtros.....	47
<b>Capítulo 3 - Planta Laboratorial.....</b>	<b>49</b>
<b>3.1 Descrição da Unidade.....</b>	<b>49</b>
3.1.1 Objetivos de Controle.....	52
<b>3.2 Modelagem do Processo .....</b>	<b>54</b>
3.2.1 Parâmetros do Modelo .....	54
<b>3.3 Identificação de Modelo Para o Projeto do Controlador .....</b>	<b>57</b>
3.3.1 Metodologia de Identificação.....	58
3.3.2 Sistema Adaptado com Malha Cascata .....	62

3.3.3 Variáveis de Estado .....	71
3.3.4 Validação do Modelo Não-Linear .....	73
<b>3.4 Conclusões Parciais do Capítulo 3 .....</b>	<b>76</b>
<b>Capítulo 4 - Validação e Ajuste dos Estimadores de Estado.....</b>	<b>77</b>
<b>4.1 Fonte de Informações Para os Testes de Estimação .....</b>	<b>78</b>
4.1.1 Dados da Planta Laboratorial.....	79
4.1.2 Parâmetros de Sintonia dos Filtros .....	80
4.1.3 Índices de Desempenho dos Estimadores.....	81
4.1.4 Testes de Observabilidade .....	82
<b>4.2 Testes de Comparação dos Estimadores EKF e CEKF.....</b>	<b>83</b>
4.2.1 Teste de Servocontrole.....	83
4.2.2 Teste Regulatório.....	87
<b>4.3 Teste em Relação à Qualidade do Modelo.....</b>	<b>90</b>
<b>4.4 Testes em Relação aos Parâmetros de Ajuste <math>P_0</math>, <math>Q</math> e <math>R</math>.....</b>	<b>93</b>
4.4.1 Teste da Matriz de Covariância Inicial ( $P_0$ ).....	94
4.4.2 Teste com Maior Confiança no Modelo ( $Q < R$ ).....	98
4.4.3 Teste em Relação à Filtragem ( $R > Q$ ) .....	100
<b>4.5 Teste em Relação ao Tempo de Amostragem.....</b>	<b>104</b>
<b>4.6 Conclusões Parciais do Capítulo 4 .....</b>	<b>106</b>
<b>Capítulo 5 - Aplicação dos Estimadores de Estados em Tempo Real .....</b>	<b>109</b>
<b>5.1 Estratégia de Controle.....</b>	<b>109</b>
5.1.1 Modelo em Espaço de Estado.....	110
5.1.2 Sintonia do Controlador.....	111
<b>5.2 Estratégia de Estimação .....</b>	<b>115</b>
5.2.1 Sintonia dos Estimadores de Estados (EKF e CEKF) .....	115
5.2.2 Critérios de Avaliação dos Resultados .....	116
5.2.3 Considerações Especiais Existentes .....	116
<b>5.3 Resultados dos Estimadores Aplicados no Processo.....</b>	<b>117</b>
5.3.1 Teste Sem Estimador de Estados .....	117
5.3.2 Teste com Estimador EKF.....	119
5.3.3 Teste com Estimador CEKF .....	121
5.3.4 Teste com Estimador CEKF (“Modelo B”).....	123
5.3.5 Teste de Predição Com a Matriz de Distúrbio por Decaimento Exponencial .	126

---

5.4 Conclusões Parciais do Capítulo 5 .....	133
<b>Capítulo 6 - Conclusão .....</b>	<b>135</b>
6.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros .....	138
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>139</b>
<b>Apêndice A - Equações do MPC (Matriz Dinâmica de Controle).....</b>	<b>143</b>
<b>Apêndice B - Dedução de Equações do Filtro de Kalman Estendido.....</b>	<b>149</b>

# Índice de Figuras

<b>Figura 1.1:</b> Áreas de aplicação dos estimadores de estados .....	2
<b>Figura 1.2:</b> Formas de retroalimentação em sistemas de controle preditivo .....	5
<b>Figura 2.1:</b> Estrutura básica do MPC.....	10
<b>Figura 2.2:</b> Representação dos horizontes de controle e predição do MPC. ....	11
<b>Figura 2.3:</b> Predição em resposta a perturbação degrau. ....	13
<b>Figura 2.4:</b> Estimador associado ao sistema de controle MPC por <i>feedback</i> . ....	18
<b>Figura 2.5:</b> Técnicas de estimação de estados .....	20
<b>Figura 2.6:</b> Informações necessárias ao estimador de estados.....	21
<b>Figura 2.8:</b> Técnica recursiva do estimador de estados .....	22
<b>Figura 2.9:</b> Representação do comportamento de um sistema em termos de espaço de estado. .....	24
<b>Figura 2.10:</b> Tipos de função custo de minimização do erro estimado. ....	28
<b>Figura 2.11:</b> Representação geométrica dos estados estimados. ....	30
<b>Figura 2.12:</b> Linearização do modelo não-linear.....	39
<b>Figura 2.13:</b> Filtro de Kalman Estendido. ....	40
<b>Figura 2.14:</b> Janela do Estimador de Horizonte Móvel. ....	42
<b>Figura 3.1:</b> Planta laboratorial .....	50
<b>Figura 3.2:</b> Bloco criado para gerar interação entre as malhas.....	51
<b>Figura 3.3:</b> Representação do processo com interação entre os canais .....	53
<b>Figura 3.4:</b> Perturbação sobre o sistema (saída) .....	60
<b>Figura 3.5:</b> Perturbação sobre o sistema (estados) .....	61
<b>Figura 3.6:</b> Representação do processo com adaptação cascata.....	62
<b>Figura 3.7:</b> Bloco com as curvas de conversão em <i>set points</i> de nível.....	64
<b>Figura 3.8:</b> Curvas de conversão de vazão em <i>set points</i> de nível .....	65
<b>Figura 3.9:</b> Determinação das regiões operacionais do processo .....	66
<b>Figura 3.10:</b> Resposta do sistema à perturbação degrau.....	67
<b>Figura 3.11:</b> Identificação do canal $F_1xH_3$ .....	69
<b>Figura 3.12:</b> Identificação do canal $F_1xH_6$ .....	69
<b>Figura 3.13:</b> Identificação do canal $F_2xH_3$ .....	70
<b>Figura 3.14:</b> Identificação do canal $F_2xH_6$ .....	70

<b>Figura 3.15:</b> Validação do modelo para os níveis observados de saída.....	74
<b>Figura 3.16:</b> Validação do modelo para os níveis superiores.....	75
<b>Figura 3.17:</b> Validação do modelo para os níveis intermediários.....	75
<b>Figura 4.1:</b> Dados da planta laboratorial p/ teste de servocontrole.....	84
<b>Figura 4.2:</b> Resultado da estimação no teste de servocontrole p/ EKF.....	85
<b>Figura 4.3:</b> Resultado da estimação no teste de servocontrole p/ CEKF.....	85
<b>Figura 4.4:</b> Dados da planta laboratorial p/ teste regulatório.....	88
<b>Figura 4.5:</b> Resultado da estimação no teste regulatório p/ EKF.....	88
<b>Figura 4.6:</b> Resultado da estimação no teste regulatório p/ CEKF.....	89
<b>Figura 4.7:</b> Resultado da estimação no teste de servocontrole p/ CEKF (“Modelo B”).....	91
<b>Figura 4.8:</b> Resultado da estimação no teste regulatório p/ CEKF (“Modelo B”).....	92
<b>Figura 4.9:</b> Dados da planta laboratorial p/ teste da matriz $P_0$ .....	94
<b>Figura 4.10:</b> Resultado do teste da matriz $P_0$ com valores elevados p/ EKF.....	95
<b>Figura 4.11:</b> Resultado do teste da matriz $P_0$ com valores elevados p/ CEKF.....	95
<b>Figura 4.12:</b> Resultado do teste da matriz $P_0$ com valores reduzidos p/ EKF.....	97
<b>Figura 4.13:</b> Resultado do teste da matriz $P_0$ com valores reduzidos p/ CEKF.....	97
<b>Figura 4.14:</b> Resultado do teste de maior confiança no modelo p/ CEKF.....	99
<b>Figura 4.15:</b> Resultado do teste de filtragem das saídas p/ CEKF – ( $R \ll Q$ ).....	101
<b>Figura 4.16:</b> Resultado do teste de filtragem das saídas p/ CEKF – ( $R > Q$ ).....	102
<b>Figura 4.17:</b> Resultado do teste de tempo de amostragem p/ CEKF.....	104
<b>Figura 5.1:</b> <i>Flowsheet</i> da <i>Planta de Seis Tanques Esféricos</i> com estimador de estados.....	110
<b>Figura 5.2:</b> Resultado de controle para o teste sem estimador de estados.....	118
<b>Figura 5.3:</b> Resultado de controle para o teste com estimador EKF.....	119
<b>Figura 5.4:</b> Resultado de estimação em tempo real (EKF).....	120
<b>Figura 5.5:</b> Resultado de controle para o teste com estimador CEKF.....	121
<b>Figura 5.6:</b> Resultado de estimação em tempo real (CEKF).....	123
<b>Figura 5.7:</b> Resultado de controle para o teste com estimador CEKF (“Modelo B”).....	124
<b>Figura 5.8:</b> Resultado de estimação em tempo real CEKF (“Modelo B”).....	125
<b>Figura 5.9:</b> Resultado de controle para a simulação com matriz de distúrbio por decaimento exponencial.....	128
<b>Figura 5.10:</b> Ações de controle para a simulação com matriz de distúrbio por decaimento exponencial.....	128

<b>Figura 5.11:</b> Resultado de controle para a operação em tempo real com matriz de distúrbio por decaimento exponencial .....	129
<b>Figura 5.12:</b> Ações de controle para a operação em tempo real com matriz de distúrbio por decaimento exponencial.....	129
<b>Figura 5.13:</b> Resultado de estimação em tempo real para a da matriz de distúrbio por decaimento exponencial, com $\alpha = 0,8$ .....	131
<b>Figura 5.14:</b> Resultado de estimação em tempo real para a da matriz de distúrbio por decaimento exponencial, com $\alpha = 0,6$ .....	131

# Índice de Tabelas

<b>Tabela 3.1:</b> Caracterização de fases do sistema .....	52
<b>Tabela 3.2:</b> Dados para obtenção dos coeficientes de descarga dos tanques superiores.....	56
<b>Tabela 3.3:</b> Dados para obtenção dos coeficientes de descarga dos tanques intermediários ..	56
<b>Tabela 3.4:</b> Dados para obtenção dos coeficientes de descarga dos tanques inferiores.....	57
<b>Tabela 3.5:</b> Dados para identificação do sistema .....	67
<b>Tabela 4.1:</b> Parâmetros de sintonia do sistema de controle.....	79
<b>Tabela 4.2:</b> Parâmetros de sintonia dos filtros .....	81
<b>Tabela 4.3:</b> Índices de desempenho para o teste de servocontrole.....	86
<b>Tabela 4.4:</b> Índices de desempenho para o teste regulatório.....	90
<b>Tabela 4.5:</b> Índices de desempenho para o teste de servocontrole com “Modelo B” .....	92
<b>Tabela 4.6:</b> Índices de desempenho para o teste regulatório com “Modelo B” .....	93
<b>Tabela 4.7:</b> Índices de desempenho para o teste de $P_0$ elevado.....	96
<b>Tabela 4.8:</b> Índices de desempenho para o teste de $P_0$ reduzido.....	98
<b>Tabela 4.9:</b> Índices de desempenho para o teste de confiança no modelo ( $Q < R$ ) .....	100
<b>Tabela 4.10:</b> Índices de desempenho para o teste de filtragem ( $R > Q$ ) .....	103
<b>Tabela 4.11:</b> Índices de desempenho para o teste de amostragem ( $T_s = 85s$ ).....	105
<b>Tabela 5.1:</b> Matriz Jacobiana das equações de estado em relação aos estados .....	110
<b>Tabela 5.2:</b> Matriz Jacobiana das equações de estado em relação às entradas .....	111
<b>Tabela 5.3:</b> Matriz Jacobiana das equações de saída em relação aos estados .....	111
<b>Tabela 5.4:</b> Matriz Jacobiana das equações de saída em relação às entradas .....	111
<b>Tabela 5.5:</b> Procedimento de sintonia de MPC's para sistemas MIMO baseado no RPN....	113
<b>Tabela 5.6:</b> Parâmetros de ajuste e sintonia do MPC obtidos pela metodologia RPN.....	114
<b>Tabela 5.7:</b> Restrições adotadas no sistema de controle do processo .....	114
<b>Tabela 5.8:</b> Parâmetros de sintonia dos estimadores.....	115
<b>Tabela 5.9:</b> Índices de desempenho de controle para o teste sem estimador de estados.....	118
<b>Tabela 5.10:</b> Índices de desempenho de controle para o teste com estimador EKF .....	120
<b>Tabela 5.11:</b> Índices de desempenho de estimação para o teste com estimador EKF .....	121
<b>Tabela 5.12:</b> Índices de desempenho de controle para o teste com estimador CEKF.....	122
<b>Tabela 5.13:</b> Índices de desempenho de estimação para o teste com estimador CEKF.....	123
<b>Tabela 5.14:</b> Índices de desempenho de controle para o teste com CEKF (“Modelo B”)....	124

<b>Tabela 5.15:</b> Índices de desempenho de estimação para o teste com CEKF (“Modelo B”).	125
<b>Tabela 5.16:</b> Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com $\alpha = 0,8$ .....	130
<b>Tabela 5.17:</b> Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com $\alpha = 0,6$ .....	130
<b>Tabela 5.18:</b> Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com $\alpha = 0,8$ .....	132
<b>Tabela 5.19:</b> Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com $\alpha = 0,6$ .....	132



# Abreviações

<i>MPC</i>	Controle Preditivo baseado em Modelo ( <i>Model Predictive Control</i> );
<i>KF</i>	Filtro de Kalman ( <i>Kalman Filter</i> );
<i>EKF</i>	Filtro de Kalman Estendido ( <i>Extended Kalman Filter</i> );
<i>CEKF</i>	Filtro de Kalman Estendido com Restrição ( <i>Constrained Extended Kalman Filter</i> );
<i>MHE</i>	Estimador de Horizonte Móvel ( <i>Moving Horizon Estimation</i> );
<i>RPN</i>	Número de Desempenho Robusto ( <i>Robust Performance Number</i> );
<i>MIMO</i>	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas ( <i>Multiple Input – Multiple Output</i> );
<i>DMC</i>	Matriz Dinâmica de Controle ( <i>Dynamic Matrix Control</i> );
<i>GPC</i>	Controlador Preditivo Generalizado ( <i>Generalized Predictive Control</i> );
<i>LTI</i>	Modelo Linear Invariante no Tempo ( <i>Linear Time Invariant</i> );
<i>QP</i>	Programação Quadrática ( <i>Quadratic Programming</i> );
<i>SQP</i>	Programação Quadrática Seqüencial ( <i>Sequential Quadratic Programming</i> );
<i>RTC</i>	Recurso de Tempo Computacional ( <i>Computational Time Resource</i> );
<i>SEQ</i>	Somatório do Erro Quadrático ( <i>Sum Square Estimation Error</i> ).

# Notação e Simbologia

## Processo – *Planta de Seis Tanques Esféricos*

$B_1$	Bomba de alimentação do tanque superior esquerdo ( $T_1$ );
$B_2$	Bomba de alimentação do tanque intermediário esquerdo ( $T_2$ );
$B_4$	Bomba de alimentação do tanque superior direito ( $T_4$ );
$B_5$	Bomba de alimentação do tanque intermediário direito ( $T_5$ );
$F_1$	Vazão de alimentação lateral esquerda;
$F_2$	Vazão de alimentação lateral direita;
$X_1$	Variável de fracionamento da corrente $F_1$ ;
$X_2$	Variável de fracionamento da corrente $F_2$ ;
$H_1$	Nível referente ao tanque superior esquerdo ( $T_1$ );
$H_2$	Nível referente ao tanque intermediário esquerdo ( $T_2$ );
$H_3$	Nível referente ao tanque inferior esquerdo ( $T_3$ );
$H_4$	Nível referente ao tanque superior direito ( $T_4$ );
$H_5$	Nível referente ao tanque intermediário direito ( $T_5$ );
$H_6$	Nível referente ao tanque inferior direito ( $T_6$ );
$CD_i$	Coefficiente de descarga relativo ao tanque $T_i$ ;
$F_{iSS}$	Vazão estacionária relativa ao tanque $T_i$ ;
$H_{iSS}$	Nível estacionário relativo ao tanque $T_i$ ;
$B_{iSS}$	Vazão estacionária relativa à bomba de alimentação $B_i$ ;
$Kc$	Ganho do controlador PI da malha cascata;
$Ti$	Tempo integral do controlador PI da malha cascata;
$K$	Ganho estacionário do processo;
$\tau$	Constante de tempo do processo;
$\phi$	Tempo morto referente ao processo;
$G(s)$	Função de transferência do processo;

**Sistema de Controle – MPC**

$u_i$	Vetor de entrada do processo no instante de tempo $i$ ;
$y_i$	Vetor de saída do processo no instante de tempo $i$ ;
$x_i$	Vetor de estados do processo no instante de tempo $i$ ;
$J$	Função custo do problema de otimização em malha aberta;
$ts$	Tempo de amostragem do controlador;
$P$	Horizonte de predição;
$M$	Horizonte de controle;
$\gamma_i$	Peso sobre os erros das variáveis controladas;
$\lambda_i$	Fator de supressão de movimentos das variáveis manipuladas;
$\Delta u$	Variação sobre as variáveis de entrada do processo;
$yset_i$	<i>Set point</i> para a saída $y$ a cada $i$ instante de tempo;
$\hat{y}_i$	Variável controlada predita pelo MPC a cada $i$ instante de tempo;
$k$	Representação de condição temporal para sistema tempo discretos;
$su$	Matriz dinâmica do sistema;
$sx$	Matriz dinâmica dos estados do sistema;
$\hat{y}_i^0$	Condição inercial do sistema para cada $i$ instante de tempo;
$\hat{w}_i$	Matriz de estimação do erro entre o valor mensurável e o valor predito pelo MPC a cada $i$ instante de tempo;
$A$	Matriz Jacobiana das equações não-lineares do modelo em relação aos estados;
$B$	Matriz Jacobiana das equações não-lineares do modelo em relação às entradas do processo;
$C$	Matriz Jacobiana das equações de saída do modelo em relação aos estados;

**Sistema de Estimação – EKF e CEKF**

$T_s$	Tempo de amostragem dos estimadores de estados;
$Q_k$	Matriz de covariância dos ruídos de processo no instante de tempo $k$ ;
$R_k$	Matriz de covariância dos ruídos de medição no instante de tempo $k$ ;

$P_0$	Matriz de covariância dos erros de estimação dos estados;
$X_0$	Condição inicial dos estados do processo;
$k$	Representação de condição temporal para sistema tempo discretos;
$x_k$	Vetor de estados do processo no instante de tempo $k$ (valor real do estado);
$y_k$	Vetor de saídas do processo no instante de tempo $k$ (valor real de medição);
$\hat{x}_k^+$	Vetor de estimação de estados pelo filtro de Kalman;
$\hat{x}_k^-$	Vetor de predição dos estados pelo filtro de Kalman;
$\hat{y}_k^-$	Vetor das variáveis de saída previstas pelo modelo;
$P_k^-$	Matriz de covariância dos erros de predição dos estados no instante de tempo $k$ ;
$P_k^+$	Matriz de covariância dos erros de estimação dos estados no instante de tempo $k$ ;
$f(x_k, u_k, P_k, k)$	Função não-linear que descreve a transição de um estado $x_k$ do instante de tempo $k$ até seu valor no instante de tempo $k+1$ ;
$h(x_k, u_k, t_k)$	Função não-linear que descreve a transição de um estado $x_k$ até o valor da variável de saída do processo $y_k$ , no mesmo instante de tempo $k$ ;
$\varphi_k$	Matriz de transição que toma o valor do estado $x_k$ do instante de tempo $k$ até o seu valor no instante de tempo $k+1$ ;
$H_k$	Matriz de medição que toma o valor do estado $x_k$ até os valores das variáveis de saída do processo $y_k$ , no instante de tempo $k$ ;
$w_k$	Ruído do processo;
$v_k$	Ruído de medição;
$erro_k^+$	Erro de estimação entre o valor real do estado ( $x_k$ ) e o valor estimado pelo filtro de Kalman para o estado ( $\hat{x}_k^+$ ), para o instante de tempo $k$ ;
$erro_k^-$	Erro de predição entre o valor real do estado ( $x_k$ ) e o valor predito pelo modelo do processo para o estado ( $\hat{x}_k^-$ ), para o instante de tempo $k$ ;
$erro_{y_k}^-$	Erro de predição entre o valor real das variáveis de saída ( $y_k$ ) e o valor predito pelo modelo do processo para as saídas ( $\hat{y}_k^-$ ), para o instante de tempo $k$ ;
$K_k$	Ganho de Kalman;
$E$	Operador-esperança ou valor esperado;
$O$	Matriz de observabilidade dos estados.

# Capítulo 1

## Introdução

A produção industrial encontra-se em meio a um cenário de elevada competitividade, a qual exige o atendimento de diversos indicadores de eficiência. Aspectos como a qualidade de produtos, flexibilidade operacional, produtividade, confiabilidade e o atendimento às condições e restrições de órgãos ambientais são elementos que norteiam as tecnologias implementadas na engenharia de processos.

Por estes fatores, estratégias de monitoramento, otimização e controle de processos deixam de ser ferramentas predominantes de estudos acadêmicos e tornam-se cada vez mais necessárias num âmbito industrial (Tonel, 2008).

Tais recursos tecnológicos, associados aos recentes avanços computacionais e motivados pelo aumento expressivo de lucratividade, têm incentivado que as indústrias mantenham um controle cada vez mais rígido de acompanhamento de estados e parâmetros do processo. Infelizmente, a obtenção destes valores, nos intervalos de tempo necessários para controle, geralmente é difícil. Na maioria dos casos, essas medidas são dispendiosas e envolvem elevados tempos de amostragem e análise (Marcon *et al.*, 2004).

Visando contornar a problemática causada pela dificuldade de medição dessas variáveis, foram desenvolvidos algoritmos capazes de estimar os valores das propriedades de

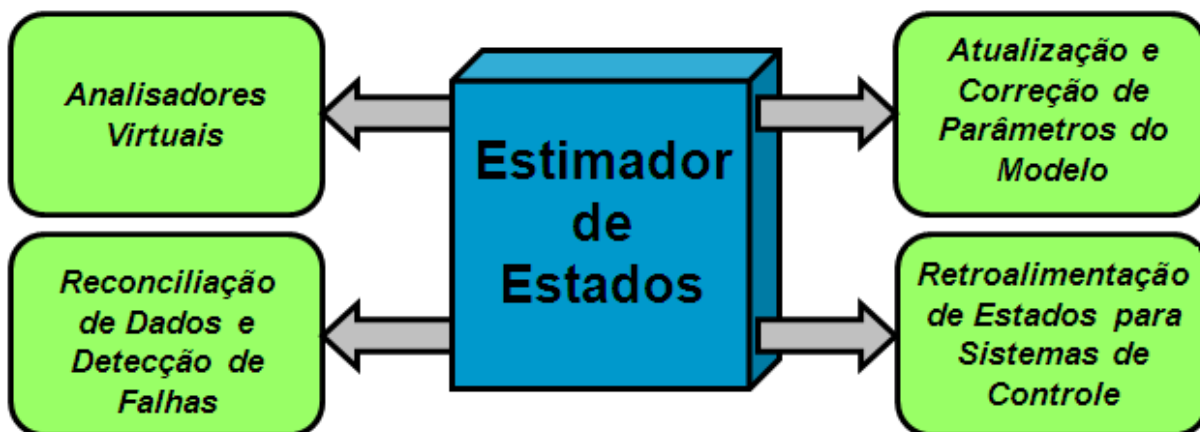
interesse em tempo real, utilizando para isso, um modelo matemático do processo e informações secundárias ou via um subconjunto de estados mensuráveis (medidas de saída do processo), tais como temperaturas, pressões, vazões, entre outras, e que contenham alguma correlação com as variáveis que se deseja conhecer. A esses algoritmos, normalmente é dado o nome de inferidores de propriedades (Ferreira *et al.*, 2002).

Quando as propriedades as quais se deseja inferir são o conjunto de variáveis que representam o comportamento dinâmico do sistema, este algoritmo passa a ser referido como Estimadores de Estados.

## 1.1 Áreas de Interesse

A estimação de estados tem como propósito, utilizar de forma ótima a informação disponível das medições e do modelo do processo, para se obter estimativas de estados imensuráveis do sistema dinâmico. Esta informação pode ser usada para o monitoramento e o controle do processo (Valappil e Georgakis, 2000).

A Figura 1.1 mostra as quatro grandes áreas de interesse na utilização das técnicas de estimação de estados.



**Figura 1.1:** Áreas de aplicação dos estimadores de estados

A seguir, são comentados os principais aspectos de cada uma das quatro grandes áreas de interesse na utilização das técnicas de estimação de estados. As três primeiras áreas são apenas citadas como forma de embasar a qualidade e multifuncionalidade do estimador de estados, enquanto que à quarta área (retroalimentação de estados para sistemas de controle avançado de processos) será dada maior ênfase, por ser o objeto de estudo desta dissertação.

### 1) Analisadores Virtuais

Uma das aplicações mais extensivas e importantes dos estimadores de estados é sua utilização como analisadores virtuais, conferindo a qualidade de produtos e subprodutos.

Os analisadores virtuais inferem as propriedades de interesse realizando uma combinação entre as freqüentes informações medidas (*on-line*) e as infreqüentes (*off-line*) (Ferreira *et al.*, 2002). As medidas de processo em tempo real são utilizadas para se estimar as variáveis primárias (variáveis chave relacionadas diretamente à qualidade de produtos) mediante um modelo dinâmico do processo, enquanto que as medidas esporádicas destas variáveis são empregadas, de tempos em tempos, para corrigir as predições feitas. Essas correções se fazem necessárias uma vez que nenhum modelo é perfeito. Uma maneira eficiente e prática de se conciliar as estimações dessas propriedades e as medições do laboratório de controle de qualidade é a utilização de técnicas de Filtros de Kalman.

### 2) Reconciliação de Dados e Detecção de Falhas

Outra importante área de aplicação dos estimadores de estados é na filtragem e reconciliação dos dados de processo. A reconciliação de dados consiste em uma técnica de ajuste das variáveis medidas em uma determinada planta industrial, de modo a satisfazer um modelo matemático que descreva o processo. A técnica reduz os erros de medição, agregando qualidade aos dados, os quais serão usados nos mais diversos procedimentos decisórios (Afonso *et al.*, 1998).

Devido aos altos riscos e graves conseqüências que acidentes químicos podem causar, por efeito da grande diversidade e complexidade das plantas, alguns autores têm trabalhado com a hipótese de utilizar estimadores de estado como uma importante ferramenta de detecção e diagnóstico instantâneo de falha do processo e de equipamentos (Afonso *et al.*, 1998).

O sucesso de muitos métodos de detecção de falhas e de controladores baseados em modelo depende diretamente da acuracidade do modelo do processo e das estimativas dos estados chaves (Robertson *et al.*, 1995).

Uma falha no dispositivo de medição de uma malha de controle pode induzir o controlador a executar um conjunto de ações de controle indesejáveis e impróprias. (Afonso *et al.*, 1998).

### 3) Atualização e Correção de Parâmetros do Modelo

Estimadores de estados também são freqüentemente utilizados como forma de se determinar alguns parâmetros do modelo. Os modelos matemáticos do processo podem ser obtidos de leis físicas resultando em equações diferenciais ou funções de transferência, ou mesmo, podem ser obtidos a partir de técnicas de identificação do sistema (Freitas *et al.*, 2004). Em ambos os casos, há muitos parâmetros desconhecidos, pois o conhecimento de um modelo ideal que represente a realidade é impraticável. Desta forma, realiza-se constantes correções dos parâmetros do modelo, como forma de reduzir estas disparidades.

### 4) Retroalimentação de Estados para Sistemas de Controle Avançado de Processos

Há ainda, um vasto e importante campo de utilização das técnicas de estimação em ordem a se determinar os estados não mensurados e filtrar os estados medidos. Nesta implementação, estimadores de estados mostram-se ferramentas eficientes no *feedback* de informações do comportamento dinâmico do processo, para uso em sistemas de controle, monitoramento e otimização (Tonel, 2008). Este recurso é sem dúvida relevante para um número elevado de plantas de interesse na engenharia de processos, pois praticamente todas as técnicas de controle mais sofisticadas utilizam em seu projeto a pressuposição de um modelo, a exemplo de controladores de controladores preditivos (Freitas *et al.*, 2004).

A retroalimentação de controladores preditivos que utilizam modelos em espaço de estado pode ser realizada de duas formas (Ogunnaike e Ray, 2004): (a) *correção de bias* (Figura 1.2 (a)), em que as saídas preditas são corrigidas adicionando-se um valor proporcional a discrepância encontrada entre o valor medido atual e sua respectiva predição; e por (b) *estimação dos estados* (Figura 1.2 (b)), onde se determinam as condições iniciais através da estimação dos estados, e a partir de uma melhor condição inicial, se realizam as predições futuras usadas no cálculo das ações de controle.

Normalmente, um sistema tradicional de controle preditivo opera por *correção de bias*, tendo somente as informações das saídas mensuradas como forma de resposta às ações

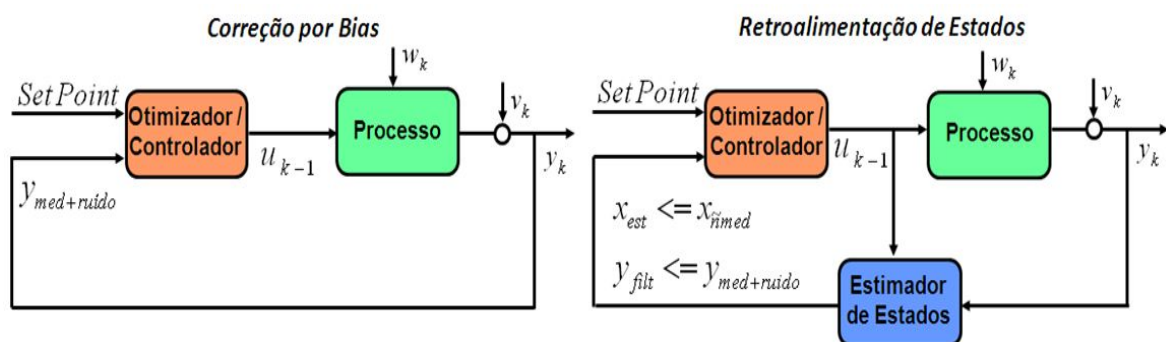


de controle aplicadas no processo (Froisy, 2006). No entanto, para processos multivariáveis, contendo muitas variáveis de estados e com elevados atrasos de tempo, a pouca quantidade de informação pode limitar o desempenho desejado ou mesmo produzir ações de controle equivocadas, podendo inclusive tornar o processo instável (Zhou e Luecke, 1995).

Uma forma possível de melhorar o sistema de controle é realizar a *retroalimentação dos estados* não mensurados, através de um estimador de estados (Lee *et al.*, 1992). A grande diferença, em comparação ao sistema de controle preditivo por *correção de bias*, está no conhecimento das condições iniciais dos estados do processo, a cada instante de tempo (Kwon e Han, 2005). Esta informação sobre a condição inicial possibilita calcular um valor predito mais próximo do valor real, para todo horizonte de predição futuro, levando o controlador a obter ações de controle mais precisas e coerentes (Froisy, 2006). Além disso, o estimador de estados possibilita uma filtragem das variáveis medidas, as quais muitas vezes são corrompidas por ruídos de medição (Schei, 2008).

O conhecimento dos estados possibilita informar ao sistema de controle/otimização sobre o comportamento dinâmico de todo o processo, produzindo ações de controle corretas e otimizadas. Esta técnica é altamente recomendável quando o sistema é fortemente não-linear (Orderud, 2005).

O conhecimento de variáveis chaves para o acompanhamento da qualidade do produto final é essencial para a aplicação de técnicas de controle avançado e conseqüente melhoria operacional do processo (Marcon *et al.*, 2004).



**Figura 1.2:** Formas de retroalimentação em sistemas de controle preditivo

No entanto, quando se fala que uma melhoria dos objetivos finais de controle é possível através da *retroalimentação dos estados* não mensurados, é imprescindível que se

tenha consciência da pressuposição de condições ideais de implementação, modelagem, ajuste e sintonia dos sistemas de controle e estimação.

## 1.2 Campos de Aplicação

Estimadores de estados têm sido aplicados a distintas áreas, tais como em engenharia de processos, aeroespacial, econometria e geofísica, para inferir variáveis não mensuradas (estados e, eventualmente, parâmetros) de um sistema dinâmico a partir de duas fontes de informações incertas: as medições e um modelo matemático (Teixeira, 2008).

## 1.3 Técnicas de Estimação

A solução do problema de estimação de estados é baseada em uma técnica recursiva na qual cada estimativa atualizada dos estados é computada da estimativa precedente e dos novos dados de entrada (Haykin, 2001).

Sob as premissas de um sistema estocástico, linear e com os ruídos de processo e de medição assumidos como variáveis randômicas com distribuições gaussianas de média nula, o Filtro de Kalman (1960) apresenta-se como um algoritmo recursivo ótimo de processamento de dados (Maybeck, 1979).

O Filtro de Kalman é essencialmente um conjunto de equações matemáticas que executam um tipo de estimativa, preditiva - corretiva, a qual tende à ótima estimativa no sentido de minimização das covariâncias dos erros estimados, quando se presume que algumas condições sejam conhecidas (Bishop e Welch, 2006).

Um método direto para gerar um filtro não-linear subótimo, é linearizar o modelo não-linear ao longo da trajetória da estimativa e aplicar a estimação de estado linear para produzir as correções, a cada novo estado predito. O estimador que usa esta idéia é o Filtro de Kalman Estendido (EKF). Indo mais além, e configurando esta técnica de estimação como um problema de otimização, é possível aplicar as restrições físicas do processo implicitamente na montagem do algoritmo de estimação. O estimador que utiliza esta idéia é o Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF).

## 1.4 Objetivos da Dissertação

Este trabalho tem como objetivo inicial testar os estimadores de estados clássicos para processos não-lineares, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), em suas versões discreto-contínuas (também chamadas de híbridas), discutindo as respectivas vantagens e desvantagens, através de dados experimentais obtidos de uma planta laboratorial multivariável. Após estes testes *off-line* para ajuste de parâmetros dos filtros, o objetivo passa a ser a implementação destes estimadores de estados em tempo real associado ao sistema de controle do processo, onde são observadas as melhorias no objetivo final de controle.

## 1.5 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação apresenta-se dividida em seis capítulos, conforme a descrição a seguir:

No Capítulo 2 é realizada uma revisão sobre os sistemas de Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC's) e a vantagem de utilizar modelos em espaço de estados. Na sequência, são apresentadas as estratégias de estimação para sistemas não-lineares, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), mostrando as principais considerações e aspectos de funcionamento destes algoritmos de filtragem e estimação.

No Capítulo 3 é apresentada a planta laboratorial do estudo de caso, onde são descritas as principais características de construção física da planta e também os desafios inerentes de sistemas multivariáveis para o objetivo de controle.

No Capítulo 4 é feita a validação das técnicas de estimações apresentadas, de forma *off-line*, para uma série de dados obtidos da planta em estudo. De forma objetiva são comentados aspectos positivos e negativos, comparando a qualidade dos dois filtros no intuito de servir de justificativa à aplicação em tempo real.

O Capítulo 5 é destinado à obtenção de resultados de testes *on-line*, utilizando os estimadores de estado associados ao controle avançado de processos. São comparados testes

com e sem o uso destes estimadores, por estruturas de controle com o uso de um Controlador Preditivo baseado em Modelo (MPC) em espaço de estados.

No último capítulo são resumidas as conclusões dos principais resultados obtidos, bem como são apresentadas sugestões para trabalhos futuros na área.

## 1.6 Notação Adotada

Este trabalho está focado em métodos de controle/estimação para sistemas tempo-discretos. Desde que modelos de sistemas puramente discretos não podem ser derivados para a maioria dos sistemas reais, modelos discreto-contínuos são considerados. Assim, as variáveis tempo-contínuas são diferenciadas das variáveis tempo-discretas pela notação adotada e, neste caso, uma variável tempo-contínua qualquer é representada pelo subíndice  $t$ , enquanto que para variáveis tempo-discretas utiliza-se como subíndice a letra  $k$ .

Outra notação adotada diz respeito à estimação de estados propriamente dita, visto que em geral os valores estimados não coincidem com valores reais das variáveis de estado. Desta forma, utiliza-se o acento circunflexo (^) para diferenciar o valor predito/estimado do estado de seu valor real. Quando se pensa em diferenciar valores preditos pelo modelo de valores estimados pelo filtro de Kalman, utilizam-se os símbolos matemáticos com subíndice negativo (-) para predição (também conhecido como '*a priori state estimate*') e positivo (+) para estimação (também conhecido como '*a posteriori state estimate*').

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Revisão Sobre Sistemas de Controle

Antes de compreender como funcionam os algoritmos baseados no Filtro de Kalman e antevendo a utilização de sistemas de controle adaptados com estimadores de estados em tempo real, torna-se importante definir claramente a estratégia de controle que será adotada para o processo.

Visto que estratégias de controle multivariáveis frequentemente utilizam técnicas baseado no conhecimento de um modelo para o processo, torna-se válida uma breve apresentação de controladores preditivos baseados em modelo (MPC's) com as respectivas vantagens de usar modelos em espaços de estados e, a este sistema de controle, por conseguinte, a necessidade de aplicação dos estimadores de estados.

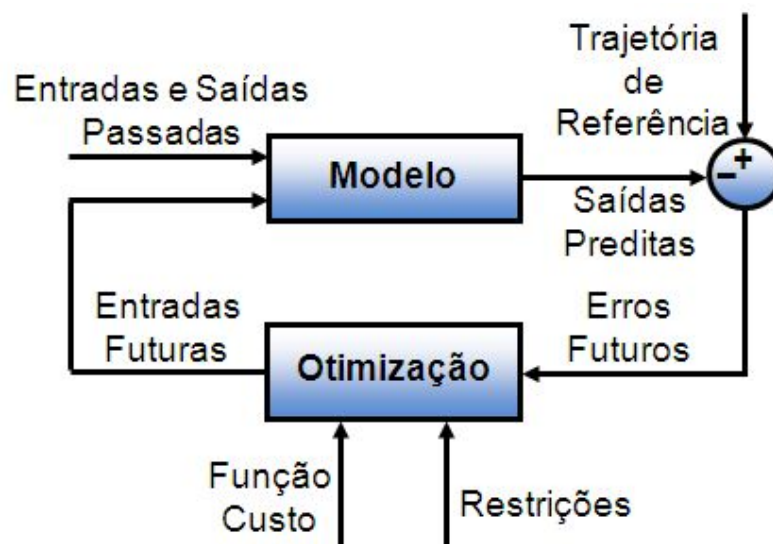
#### 2.1.1 Controlador Preditivo Baseado em Modelo (MPC)

Controladores preditivos baseados em modelos (MPC's) tiveram suas raízes situadas há aproximadamente cinco décadas, quando Zadeh e Whalen (1962) realizaram uma conexão entre o problema de controle ótimo de tempo mínimo e a programação linear, e Propoi (1963) sugeriu pela primeira vez uma aproximação por horizonte móvel para este problema de controle (a qual é a principal característica dos MPC's). Tais estratégias referem-se a uma

classe de algoritmos de controle computacionais que utilizam um modelo explícito do processo para prever as respostas futuras de uma planta (Agachi *et al.*, 2006).

Os MPC's geram valores de entrada para o processo a partir da solução de um problema de otimização em tempo real, onde a cada intervalo de tempo, o algoritmo calcula uma seqüência de ações através da minimização do erro entre os valores preditos pelo modelo para as saídas e os valores de referência dos *set points*. O MPC utiliza o estado atual como condição inicial, e a otimização rende a melhor seqüência de ações dentro de um horizonte de controle pré-determinado, em que somente a primeira ação de controle desta seqüência é aplicada à planta (Qin e Badgwell, 2003).

A Figura 2.1 demonstra a estrutura básica do MPC.



**Figura 2.1:** Estrutura básica do MPC.

As ações de controle do MPC, em sua formulação mais simples, são calculadas tipicamente com base na solução do seguinte problema de otimização em malha aberta (Agachi *et al.*, 2006):

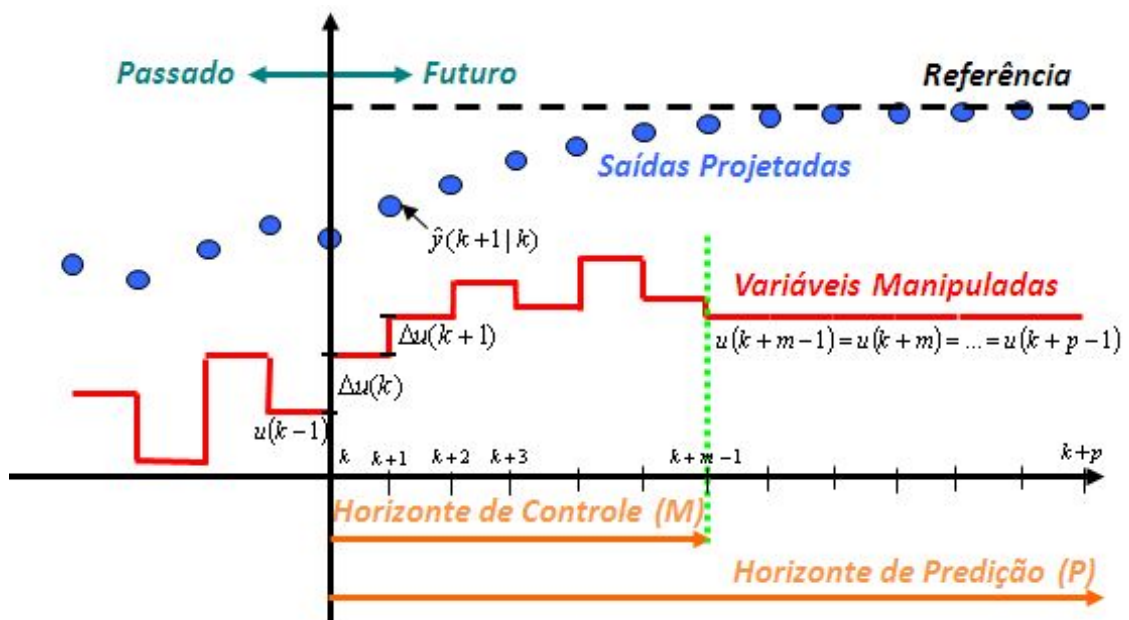
$$J = \min_{\Delta U_0^M} \left( \sum_{i=0}^P \gamma_i \cdot (\hat{y}_i - y_{set_i})^2 + \sum_{i=0}^M \lambda_i \cdot \Delta u_i^2 \right) \quad (2.1)$$

Sujeita as seguintes restrições:

$$\begin{aligned}
 u_{\min} \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} &\leq u \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \leq u_{\max} \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \\
 -\Delta u_{\max} \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} &\leq \Delta u \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \leq \Delta u_{\max} \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{y}_{\min} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} &\leq \hat{y} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \leq \hat{y}_{\max} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Onde  $\gamma_i$  é o peso sobre os erros das variáveis controladas e  $\lambda_i$  é o fator de supressão de movimentos das variáveis manipuladas. As variáveis  $\hat{y}_i$  correspondem às saídas previstas pelo modelo e  $u_i$  correspondem às variáveis de entrada determinadas pela otimização.  $M$  é o horizonte de controle, que contabiliza o tempo futuro no qual serão tomadas ações de controle para levar as variáveis controladas aos seus *set points*.  $P$  é o horizonte de predição, que corresponde ao tempo futuro no qual os erros sobre as variáveis de saídas serão avaliados.

A Figura 2.2 mostra a ação de um MPC hipotético, observando as idéias de horizonte de controle e horizonte de predição (Morari et al., 2002).



**Figura 2.2:** Representação dos horizontes de controle e predição do MPC.

A seguir, são citadas algumas das principais razões pelos quais o MPC é largamente aplicado na indústria e com grande sucesso (Camacho e Bordons, 1999):

- Pode ser utilizado em uma grande variedade de processos, desde aqueles com uma dinâmica mais simples até outros com dinâmicas mais complexas, incluindo sistemas com longos atrasos de tempo e/ou de fase não mínima;
- Pode ser facilmente empregado em sistemas multivariáveis;
- Pode trabalhar com limitações no atuador, e nas variáveis controladas e manipuladas através de restrições explícitas;
- Pode levar em conta informações dos estados intrínsecos do processo;
- Pode operar com sistemas não quadrados, nos quais o número de variáveis manipuladas difere do número de variáveis controladas;
- Pode lidar bem com mudanças estruturais;
- Pode usar *targets* para as variáveis manipuladas, isto é, valores desejáveis para estas variáveis, no qual se sabe que haverá um maior desempenho e lucro;
- Pode fazer o controle das variáveis através de *set point* ou por faixa.

Se o sistema de controle preditivo for implementado adequadamente, tais características de controle conduzem aos seguintes benefícios operacionais (Camacho e Bordons, 1999):

- Redução do tempo de parada da planta;
- Redução da necessidade de manutenção de equipamentos;
- Aumento da flexibilidade e agilidade operacional;
- Aumento de produtividade e lucratividade.

### **2.1.2 Estrutura de Realimentação dos Estados**

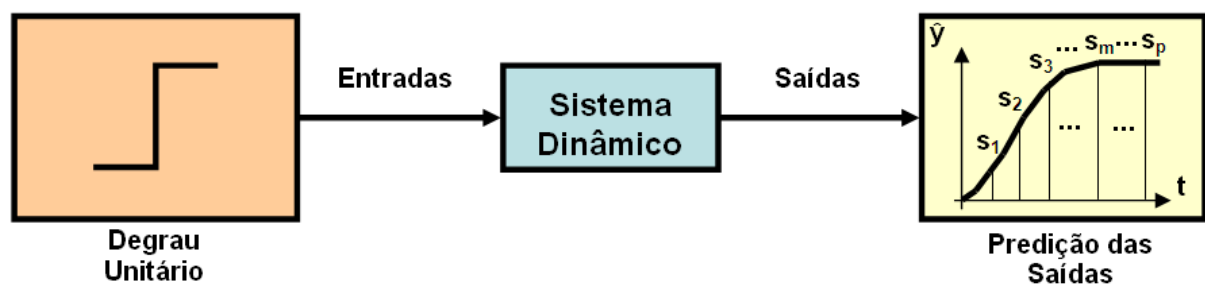
O MPC foi inicialmente aplicado em indústrias petroquímicas em meados dos anos 80, e atualmente há uma ampla e crescente utilização destas técnicas, nos mais diversos ramos industriais, para sistemas monovariáveis e multivariáveis. Isto é possível graças aos freqüentes avanços computacionais e a grande facilidade de implementação e sintonia destes controladores (Orukpe e Jaimoukha, 2005). Embora esta tecnologia já se encontre bem consolidada no nível de controle supervisor e os diversos algoritmos de MPC diferenciem-



se entre si apenas pela forma de modelo explícito e da função-custo adotada, freqüentemente os MPC's são empregados em estruturas tradicionais de controle por *correção de bias*, com modelos envolvendo apenas variáveis de entradas e saídas do processo.

Nestes casos, o MPC prediz as saídas futuras  $\hat{y}(k+1, k+2, \dots, k+m-1, \dots, k+p)$  a partir do conhecimento das variáveis mensuradas  $y$  para o instante de tempo  $k$  (característica *feedback*), e de uma combinação linear dos movimentos de entradas futuras (característica *feedforward*) (Ogunnaike e Ray, 1994). Durante esta etapa preditiva, o modelo é simulado, a cada instante de tempo, para um determinado horizonte de predição de tamanho fixo  $P$  e, que se desloca constantemente no espaço temporal (indo do instante  $k$  até um instante  $k+p$ ) (Orukpe e Jaimoukha, 2005). As informações sobre as variáveis mensuradas  $y(k)$  são utilizadas nesta etapa de simulação, juntamente com os valores passados das variáveis de entrada  $u(\dots, k-3, k-2, k-1)$  e com os valores futuros para estas variáveis manipuladas  $u(k, k+1, k+2, \dots, k+m-1, \dots, k+p-1)$ , obtidos através da etapa de otimização do controlador (Maciejowsky, 2000).

A equação de predição das saídas (Equação 2.4) pode ser deduzida ao se tomar o modelo linearizado e o princípio de superposição das ações de controle (Morari et al., 2002). Essa implementação de controle preditivo pode ser representada pelas predições das saídas controladas à aplicação de sinais na forma de degraus nas entradas manipuladas. A Figura 2.3 demonstra como uma seqüência arbitrária de  $m$  movimentos de controle  $\Delta u(k, k+1, k+2, \dots, k+m-1)$  afetará o sistema desde a mudança de uma condição inercial  $\hat{y}^0(k)$  até o seu novo valor predito  $\hat{y}(k+1)$  e, assim por diante, para todo horizonte de predição até a saída  $\hat{y}(k+p)$  (Ogunnaike e Ray, 1994). (Para maiores informações de obtenção desta equação, veja a dedução completa no Apêndice A)



**Figura 2.3:** Predição em resposta a perturbação degrau.

Para uma compreensão desta técnica de predição, considere o modelo linear relacionado entradas versus saídas e uma matriz de distúrbios não mensurados  $\hat{w}_{k+1}$ :

$$\hat{y}_{k+1} = s_1 \cdot \Delta u_k + \hat{y}_{k+1}^0 + \hat{w}_{k+1} \quad (2.3)$$

Desta forma, através da combinação linear dos movimentos de entrada, pode-se prever as saídas futuras através da seguinte equação:

$$\hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} = su \cdot \Delta u_{\begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}}^0 + \hat{w}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (2.4)$$

Com:

$$su = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3} & \dots & 0 \\ s_m & s_{m-1} & s_{m-2} & \dots & s_1 \\ s_{m+1} & s_m & s_{m-1} & \dots & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-2} & s_{p-3} & s_{p-4} & \dots & s_{p-m-1} \\ s_{p-1} & s_{p-2} & s_{p-3} & \dots & s_{p-m} \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & \dots & s_{p-m+1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Onde  $\hat{y}_{k+1}$  é o vetor das saídas preditas para o instante  $k+1$ ,  $su$  é a chamada Matriz Dinâmica do Sistema e seus elementos representam as mudanças observadas nas saídas do processo até o instante  $p$ ,  $\hat{y}_{k+1}^0$  é o vetor dos valores preditos das saídas assumindo uma ausência de ação de controle (ou equivalente a uma condição inercial a cada instante de tempo), e o argumento  $k$  é utilizado para indicar o tempo referente à origem da seqüência de predições (Camacho e Bordons, 1999).

Observação: A matriz de distúrbio ( $\hat{w}_{k+1}$ ) representa o erro entre o valor mensurável ( $y_{k+1}$ ) e o seu valor de predição para o mesmo instante de tempo ( $\hat{y}_{k+1}$ ). Porém, ainda não se

possuem informações sobre as variáveis medidas nesse instante de tempo e nem em tempos futuros. Logo, uma aproximação é assumida (Equação 2.6), a qual muitas vezes é a principal responsável pelo baixo desempenho na rejeição de distúrbios nestes sistemas de controle (Maciejowsky, 2000).

$$\begin{aligned}\hat{w}_k &= y_k - \hat{y}_k \\ \hat{w}_{k+i} &= \hat{w}_k \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1, \dots, p\end{aligned}\tag{2.6}$$

Uma vez que se assume um modelo de entrada versus saída, não existem informações suficientes para assumir o exato efeito aos quais distúrbios atuam diretamente sobre entradas e saídas. Mas também não há razões para crer que tal distúrbio ( $\hat{w}_{k+i}$ ) permaneça constante ao longo do horizonte de predição. Uma alternativa proposta para essa matriz de *feedback* do modelo é assumir um decaimento exponencial, ao longo do horizonte de predição (Maciejowsky, 2000). Logo:

$$\hat{w}_{k+i} = \alpha^i \cdot \hat{w}_k \quad \text{com } 0 < \alpha < 1\tag{2.7}$$

A principal razão porque esse distúrbio é usualmente assumido constante é que isto conduz a uma ação integral do controlador. Modelos de distúrbio mais complexos podem ser manuseados de forma mais sistemáticas quando se usa um modelo em espaço de estado (Maciejowsky, 2000).

Esta forma de implementação, com modelo envolvendo apenas entradas e saídas, é mais comumente encontrada em aplicações industriais devido à factível disponibilidade de informações mensuráveis que descrevem um processo (Camacho e Bordons, 1999).

Em alguns casos práticos, por motivos de flexibilidade, modelos de entrada e saída são obtidos através da identificação de sistemas e da construção de funções de transferência. No entanto, tais modelos podem tornar-se demasiadamente complexos e perdem a relação direta com o fenômeno físico do processo (Aguirre, 2004). Nestes casos, não existe nenhuma boa razão para trabalhar com modelos de resposta degrau de entrada e saída, se estratégias de controle preditivo podem ser estabelecidas através de modelos em espaço de estados, onde uma combinação linear do vetor de estados prediz as saídas futuras (Maciejowsky, 2000).

Para que este método de *retroalimentação de estados* funcione, é necessário a implementação de um estimador de estados, como forma de observar os estados não mensuráveis. Nestes casos, algoritmos como EKF e CEKF podem ser utilizados para fornecer informações dessas variáveis de estado, no instante de tempo atual ( $k$ ) (Kwon e Han, 2005).

Se os estados do processo sumarizam o “histórico passado”, e houver o conhecimento do estado estimado ( $\hat{x}_k^+$ ), então não são necessários quaisquer conhecimentos antecedentes ao instante  $k$  para determinar o comportamento futuro da planta, presumidas condições ideais de modelagem e ausência de distúrbios. Porém, se os estados não forem observáveis, então é razoável que se tenha que utilizar as informações passadas sobre o que aconteceu com o sistema antes do instante  $k$  (Maciejowsky, 2000).

Para uma compreensão desta técnica de predição em espaço de estados, considere o modelo linear em espaços de estado e uma matriz de distúrbios não mensurados  $\hat{w}_{k+1}$ :

$$\begin{aligned}\Delta x_{k+1} &= A.\Delta x_k + B.\Delta u_k \\ \hat{y}_{k+1} &= C.\Delta x_{k+1} + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+1}\end{aligned}\tag{2.8}$$

Através de múltiplos passos de substituição e fazendo uso de um rearranjo de termos, as saídas futuras podem ser observadas e expressas de forma compactada segundo a Equação 2.9, abaixo. (Para maiores informações de obtenção desta equação, veja a dedução completa no Apêndice A)

$$\hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} = su.\Delta u_{\begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix}} + sx.\Delta x_k + I_{I_{[(pxny) \times (ny)]}} \cdot \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}}\tag{2.9}$$

Onde  $I_{I_{[(pxny) \times (ny)]}}$  é a matriz identidade de tamanho:  $p$  linhas (predições),  $ny$  colunas por  $ny$  de profundidade (número de variáveis de saída do modelo).

Com:

$$\begin{aligned}
 su = & \begin{bmatrix} C.B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{j=1}^2 C.A^{j-1}.B & C.B & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{j=1}^3 C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^2 C.A^{j-1}.B & C.B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-2} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-3} C.A^{j-1}.B & \dots & 0 \\ \sum_{j=1}^m C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-2} C.A^{j-1}.B & \dots & C.B \\ \sum_{j=1}^{m+1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^m C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^2 C.A^{j-1}.B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{p-2} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-3} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-4} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^{p-m-1} C.A^{j-1}.B \\ \sum_{j=1}^{p-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-2} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-3} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^{p-m} C.A^{j-1}.B \\ \sum_{j=1}^p C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-2} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^{p-m+1} C.A^{j-1}.B \end{bmatrix} \\
 sx = & \begin{bmatrix} C.A \\ \sum_{j=1}^2 C.A^j \\ \sum_{j=1}^3 C.A^j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{m-1} C.A^j \\ \sum_{j=1}^m C.A^j \\ \sum_{j=1}^{m+1} C.A^j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{p-2} C.A^j \\ \sum_{j=1}^{p-1} C.A^j \\ \sum_{j=1}^p C.A^j \end{bmatrix} \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

A grande vantagem encontrada pela *retroalimentação dos estados* do processo está em:

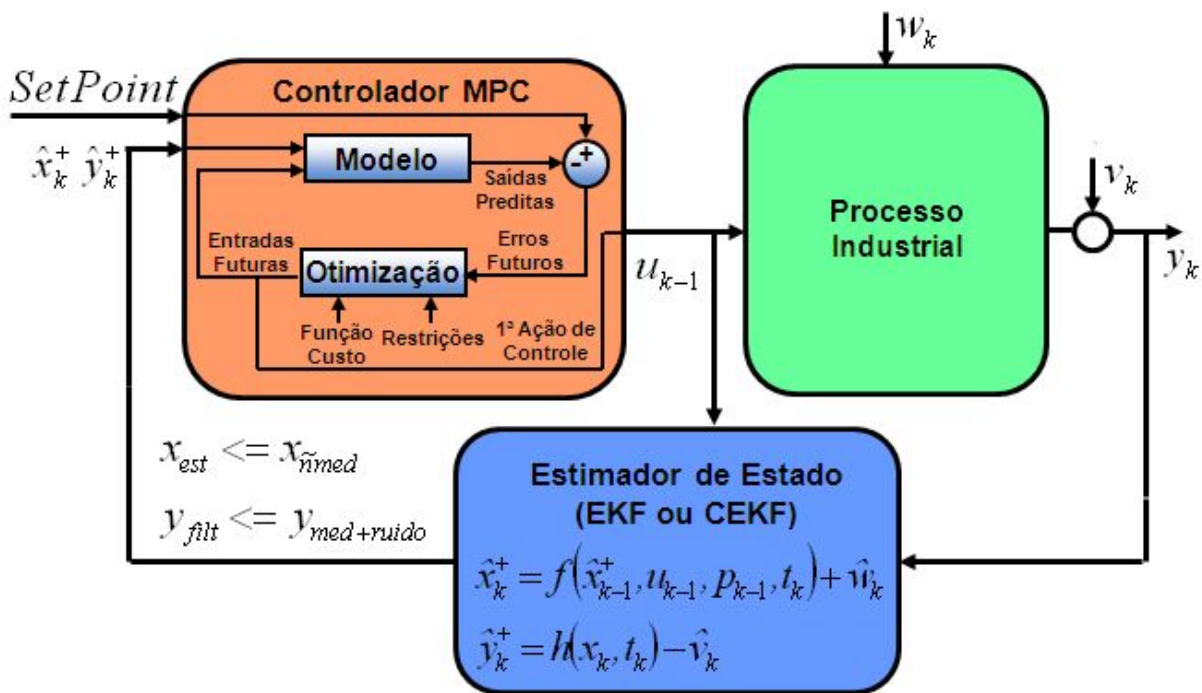
- Fornecer aspectos mais precisos sobre o comportamento dinâmico atual do processo, no instante  $k$ ;

Os termos da equação de predição das saídas:  $\Delta x_k$  (entrada de informações dos estados estimados),  $\hat{y}_k^0$  (simulado pelo modelo em espaço de estados), e  $\hat{w}_k$  (entrada de informações das saídas filtradas) são os responsáveis por estes aspectos.

- Estabelecer uma melhor estimativa do comportamento dinâmico futuro do processo, para os instantes subsequentes  $k+1, k+2, \dots, k+p$ ;

Os termos da equação de predição das saídas:  $su$  e  $sx$  (ambos contendo as matrizes Jacobianas  $A$ ,  $B$  e  $C$  do modelo de espaço de estados) e  $\hat{w}_{k+1}$  (contendo um modelo de distúrbios de saída) são os responsáveis por estes aspectos.

Logo, essa informação mais completa de comportamento dinâmico do sistema (conhecimento do estado atual), que servirá de condição inicial às predições no MPC a cada instante de tempo, resultará em valores preditos mais próximos dos valores reais futuros para as saídas. Esta melhora na predição das variáveis de saída se traduzirá em uma seqüência de ações mais adequadas por parte do controlador e, por conseguinte, reduzirá o tempo necessário para alcançar os objetivos de controle da planta. A Figura 2.4 representa o estimador de estado associado ao sistema de controle MPC.



**Figura 2.4:** Estimador associado ao sistema de controle MPC por *feedback*.

Assim, para que essa possibilidade de melhoria processual em plantas não-lineares aconteça, torna-se necessária uma estimação de estados com alta qualidade. Desta forma, surgem como alternativa as conhecidas e sempre eficientes técnicas de estimação de estados baseadas no Filtro de Kalman Estendido.

No entanto, quando se fala que uma melhoria dos objetivos finais de controle é possível através da *retroalimentação dos estados* não mensurados, é imprescindível que se tenha consciência da pressuposição de condições ideais de implementação, modelagem, ajuste e sintonia dos sistemas de controle e estimação.

A seguir, uma detalhada revisão sobre os princípios de funcionamento dos estimadores de estados, EKF e CEKF, será apresentada.

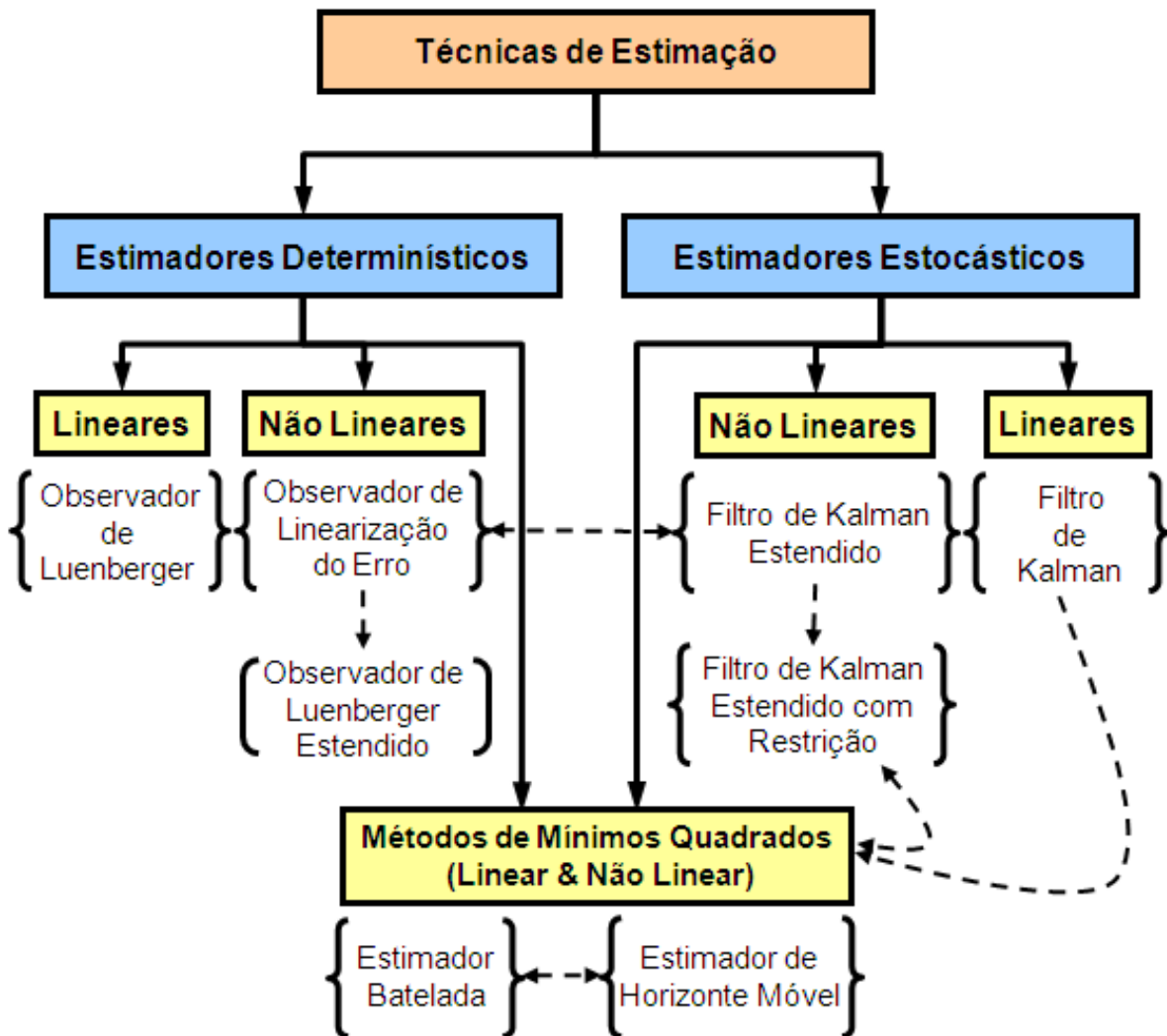
---

## 2.2 Revisão Sobre Estimadores de Estados

Embora a maioria dos processos reais seja não-linear, as ferramentas matemáticas que estão disponíveis para a avaliação e o controle são muito mais acessíveis e bem compreendidas para sistemas lineares. Isso é porque os sistemas não-lineares são frequentemente aproximados por sistemas lineares. Desta maneira, podem-se utilizar as ferramentas que inicialmente foram desenvolvidas para sistemas lineares para derivar algoritmos de estimação ou de controle aplicáveis aos sistemas não-lineares (Simon, 2006).

Na literatura técnica, encontra-se um grande número de estratégias para projeto de estimadores de estado usando abordagens estocásticas e determinísticas. Muitas destas estratégias são empíricas e não levam em consideração de uma forma rigorosa a dinâmica não-linear do processo a estimar, as perturbações e o ruído nos sensores. Podem-se citar inclusive alguns desses métodos de estimação que inicialmente foram elaborados para processos lineares e posteriormente adaptados a sistemas não-lineares, tais como: Observador de Luenberger, Filtro de Kalman, Estimador Batelada e Estimador de Horizonte Móvel (Findeisen, 1997).

A Figura 2.5 demonstra a relação entre as técnicas de estimação de estados.



**Figura 2.5:** Técnicas de estimação de estados

Um dos estimadores de estado mais difundidos é sem dúvida o Filtro de Kalman (KF). Este estimador de estados, o qual leva o nome de seu criador Rudolf Emil Kalman, foi desenvolvido em 1960 inteiramente em espaço de estados para a resolução de problemas tempo discretos lineares (Bishop e Welch, 2006).

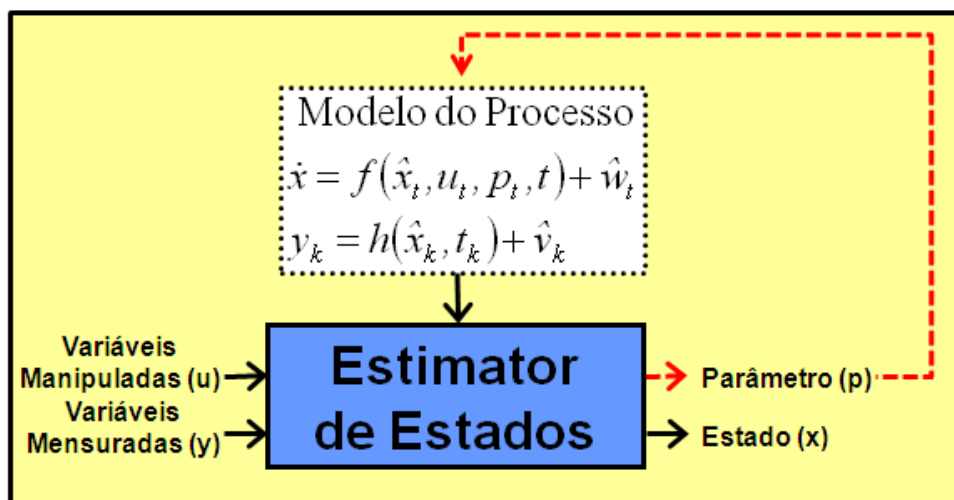
O Filtro de Kalman é definido como um estimador linear, baseado em modelo, estocástico, recursivo e baseado em mínimos quadrados (Schutter *et al.*, 1999).

- É linear e baseado em modelo, porque utiliza como base um modelo de sistema cujas equações de estados e observador são todas lineares.



- É estocástico, porque a confiança das informações é expressa em termos de funções de densidade probabilísticas. A distribuição normal ou Gaussiana é assumida pelo Filtro de Kalman para os ruídos de medição e a estimação do estado.
- É recursivo, pois nos casos em que as informações se tornam disponíveis de maneira incremental, uma formulação recursiva do processo de estimação se faz necessária.
- É baseado em um problema de mínimos quadrados pois, desta forma, pode-se encontrar os estados não mensuráveis pela elaboração de uma função-custo (penalização) não negativa, ao qual minimiza o erro de estimação.

Os estimadores de estados derivados do Filtro de Kalman (KF) são algoritmos que utilizam um conjunto de informações disponíveis de entrada e saída do processo e um modelo matemático para se obter uma estimativa das variáveis que determinaram o comportamento dinâmico do processo (Gelb *et al.*, 1974). A Figura 2.6 mostra as informações necessárias para o processo de estimação.

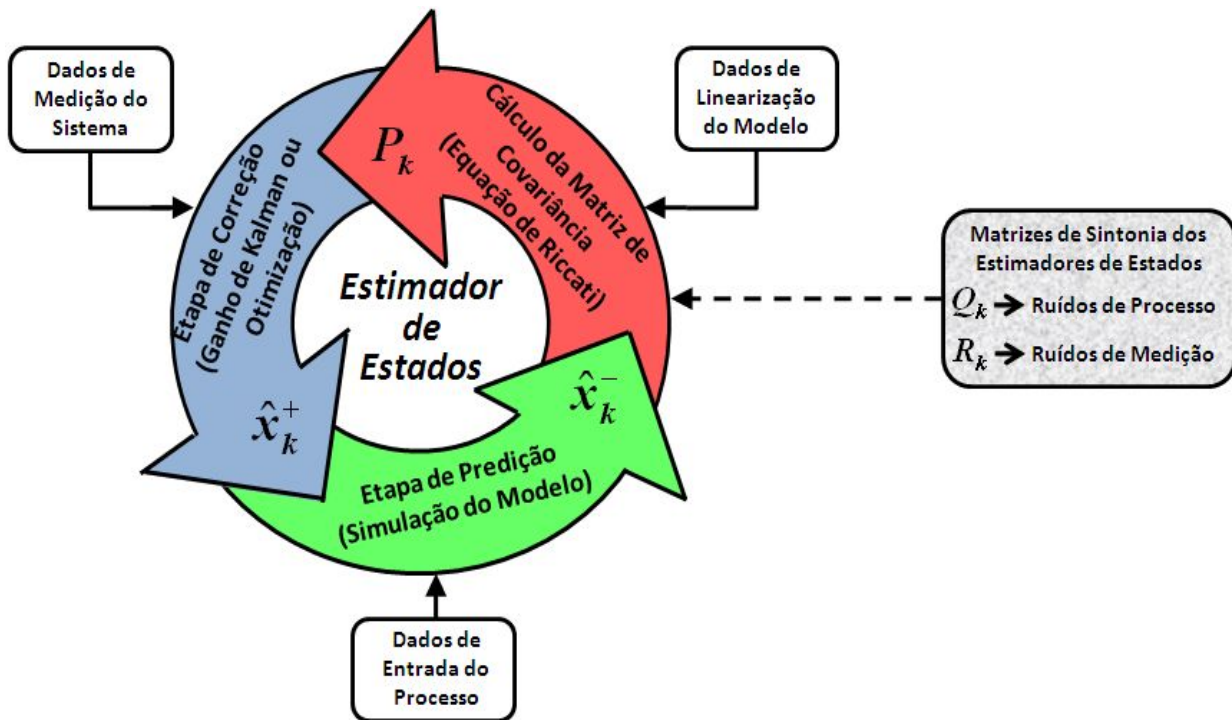


**Figura 2.6:** Informações necessárias ao estimador de estados

Estas variáveis de interesse, estados e/ou eventualmente parâmetros, não mensurados, são inferidos com o intuito de prover as ações otimizadas, destinadas ao controle do sistema.

Fundamentalmente, um algoritmo de estimação de estados é uma técnica recursiva, a qual cada estimativa atualizada dos estados é computada da estimativa precedente e dos dados de entrada novos (Haykin, 2001).

A Figura 2.7 esclarece as etapas do processo de estimação.



**Figura 2.7:** Técnica recursiva do estimador de estados

São três as etapas básicas de um estimador de estados (Grewal e Andrews, 2001):

Etapa de Predição: Nesta etapa acontece um cálculo prévio dos estados não mensurados ( $\hat{x}_k^-$ ), para o atual instante de tempo ( $k$ ). O conhecimento destas variáveis se dá através dos novos dados de entrada ( $u_k$ ) e da simulação do modelo admitido para o processo, além do valor dos estados estimados no instante de tempo anteriormente amostrado ( $\hat{x}_{k-1}^+$ ). Esses estados estimados ou corrigidos ( $\hat{x}_{k-1}^+$ ) são utilizados como condição inicial nesta etapa de predição, o que confere o caráter recursivo ao estimador de estados.

Etapa de Cálculo da Covariância: De posse dos estados preditos e utilizando informações da linearização do modelo, realiza-se o cômputo da matriz de covariância dos erros de predição dos estados ( $P_k^-$ ), para o atual instante de tempo ( $k$ ). Essa é provavelmente a etapa mais crucial da estimação de estados, pois é a partir do valor desta matriz que são distribuídos os resíduos de medição ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ), entre os estados do processo. Nesta etapa, encontram-se os dois parâmetros de sintonia dos estimadores de estados, as matrizes de covariância dos ruídos de processo ( $Q_k$ ) e dos ruídos de medição ( $R_k$ ).

Etapa de Correção: Nesta fase são realizadas as atualizações dos estados preditos, para o atual instante de tempo ( $k$ ), passando então, após a correção, a serem chamados de estados estimados ( $\hat{x}_k^+$ ). Esta etapa pode ser realizada por um processo de otimização ou via Ganho de Kalman. Estas correções são possíveis a partir dos valores das saídas medidas ( $y_k$ ) e do valor da matriz de covariância encontrada na etapa anterior ( $P_k^-$ ). Durante esta etapa de correção ocorre também a filtragem das saídas mensuradas ( $\hat{y}_k^+$ ).

A implementação através de técnicas de estimação de estados baseadas no filtro de Kalman elimina a necessidade de se armazenar o passado inteiro dos dados observados sendo, portanto, computacionalmente mais eficiente do que outras técnicas que utilizam esta informação em cada etapa do processo de filtragem (Maybeck, 1979).

Os dois objetivos básicos da estimação de estados são (Tonel, 2008):

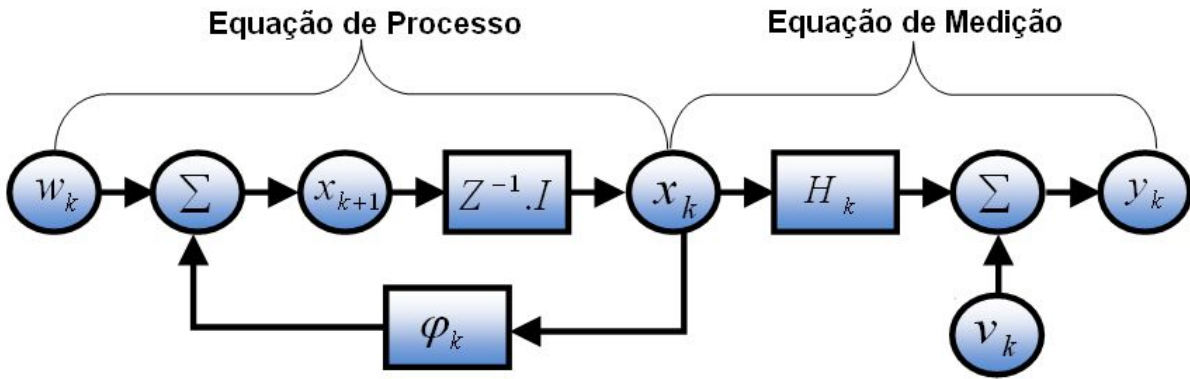
- Fazer estimação dos estados não medidos, a partir do modelo e de medições de processo (Etapa de Estimação);
- Reduzir a influência de ruídos sobre os estados estimados e mensurados (Etapa de Filtragem).

### 2.2.1 Conceito de Estado

O conceito de variáveis de estado é fundamental para o entendimento destes métodos, uma vez que o Filtro de Kalman, já enraizado na formulação de espaço de estados para sistemas dinâmicos lineares, fornece uma solução recursiva ótima de filtração/estimação quando o problema é linear (Haykin, 2001).

O vetor de estado ou simplesmente o “estado”, denotado por  $x_k$ , pode ser entendido como o conjunto de dados mínimos que são suficientes para descrever o comportamento dinâmico do sistema. Em outras palavras, o estado é a menor quantidade de informação sobre o comportamento passado de um sistema que é necessário para prever o comportamento futuro (Haykin, 2001).

Em termos matemáticos, o diagrama de bloco da Figura 2.8 ilustra o seguinte par de equações:



**Figura 2.8:** Representação do comportamento de um sistema em termos de espaço de estado.

### 1. Equação de Processo

$$x_{k+1} = \varphi_k \cdot x_k + w_k \quad (2.11)$$

Onde  $\varphi_k$  é a matriz de transição que toma o estado ( $x_k$ ) do tempo  $k$  até o tempo  $k+1$ . O ruído do processo ( $w_k$ ) é assumido por adição, branco e Gaussiano, com média zero e com a matriz de covariância definida por:

$$E[w_n w_k^T] = \begin{cases} Q_k & \text{for } n = k \\ 0 & \text{for } n \neq k \end{cases} \quad (2.12)$$

Onde a sobrescrita  $T$  denota matriz transposta. A dimensão do espaço de estado é denotada por  $M$ .

### 2. Equação de Medição

$$y_k = H_k \cdot x_k + v_k \quad (2.13)$$

Onde  $y_k$  é a variável de saída ou valor observado no tempo  $k$  e  $H_k$  é uma matriz de medição que toma o estado ( $x_k$ ) do tempo  $k$  até os valores medidos na saída do processo  $y_k$ . O ruído de medição ( $v_k$ ) é assumido por adição, branco e Gaussiano, com média zero e com a matriz de covariância definida por:

$$E[v_n v_k^T] = \begin{cases} R_k & \text{for } n = k \\ 0 & \text{for } n \neq k \end{cases} \quad (2.14)$$

Indo mais além, por conveniência, assume-se que o ruído de medição ( $v_k$ ) não possui relação com o ruído de processo ( $w_k$ ). A dimensão do espaço de medição é denotada por  $N$ .

O compromisso do estimador de estado de Filtro de Kalman consiste em unir e resolver as equações de processo e medição para encontrar os estados desconhecidos de uma maneira a minimizar o erro quadrático entre o valor estimado e o valor real do estado (Haykin, 2001).

## 2.2.2 Premissas da Estimação de Estados

Antes de se estabelecer qualquer equacionamento para os estimadores não-lineares, é fundamental o conhecimento das premissas dos estimadores de estados para processos estocásticos.

### 2.2.2.1 Variável Randômica

Um conceito importante para os estimadores de estados é que os erros de medição e processo são variáveis aleatórias (randômicas), ou seja, são variáveis as quais não se pode prever seu valor numérico exato (valor não determinístico) (Verhaegen e Verdult, 2007).

A imprevisibilidade no valor de uma determinada variável, em um contexto de modelagem, é creditada geralmente as limitações do modelo em prever um valor medido aplicando as “leis de natureza”. Estas limitações podem ser uma consequência dos limites de conhecimento científico ou do desejo de trabalhar com modelos da baixa complexidade. As medidas, em particular, introduzem uma parte imprevisível por causa de sua exatidão finita (Verhaegen e Verdult, 2007).

Matematicamente, uma variável aleatória é definida como uma função mensurável de um espaço probabilidade para um espaço mensurável. Este espaço mensurável é o espaço de possíveis de valores desta variável, e é normalmente tomado por uma função de densidade probabilística (Walrand, 2004).

A grande vantagem de utilizar estimadores baseados no Filtro de Kalman (KF) é que este método de estimação considera que os erros são distribuídos através de uma função de densidade probabilística normal ou Gaussiana, dada pela Equação 2.15. Ou seja, o erro de estimação é somente função da média ( $\mu$ ) e da variância ( $\sigma^2$ ). Um interessante uso da distribuição Gaussiana é discutido através do Teorema do Limite Central, o qual afirma que esta distribuição é adequada quando o número de observações torna-se grande (Walrand, 2004).

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.15)$$

### 2.2.2.2 Processos Estocásticos

Um processo estocástico é um evento que ocorre de forma onde as variáveis que descrevem este processo são variáveis randômicas. Desta forma, não se pode determinar a exata condição futura do processo, apenas será possível, pelo conhecimento das condições iniciais, afirmar que há uma maior probabilidade do processo tender a um determinado caminho com o tempo crescente (Moon e Stirling, 2000).

Maybeck (1979) faz uma explanação sobre a necessidade da utilização de modelos estocásticos no controle de processos e estimação de parâmetros. Segundo o autor existem três razões básicas para sua utilização:

- 1) Nenhum sistema é modelado matematicamente de forma perfeita.
- 2) Os sistemas dinâmicos sofrem influencia não só de entradas conhecidas, mas também age sobre eles uma série de distúrbios não medidos que não podem ser controlados e nem modelados deterministicamente.
- 3) Os sensores não informam de forma completa e perfeita os dados medidos.

A derivação ou extensão de um Filtro de Kalman a estimadores de estados para processos não-lineares pode ser demonstrada através dos princípios de um estimador ótimo. O Filtro de Kalman Estendido (EKF) e o Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF) são algoritmos fundamentados nestes princípios.

### 2.2.3 Estimador Ótimo

Na prática, um estimador de estados só pode ser considerado um estimador ótimo quando os seus preceitos de derivação seguem os exatos comportamentos do processo real, o que de fato é irrealizável. Na teoria, estes aspectos são sempre assumidos como sendo válidos. Um exemplo disso é o Filtro de Kalman que presume para critérios de derivação, que os ruídos de medição e processos são não correlacionados, distribuídos através da função de densidade Gaussiana e possuem média nula. Respeitados estes aspectos, os critérios de otimalidade podem estes estabelecidos no sentido da minimização dos erros de estimação dos estados, como sugerem alguns autores como Gelb (1974), Kay (1993), Maybeck (1979) e Simon (2006), entre outros.

O Filtro de Kalman é um algoritmo recursivo ótimo de processamento de dados. Existem muitas maneiras de definir um estimador ótimo, dependendo de critérios escolhidos para a performance da estimação dos estados e parâmetros de interesse (Maybeck, 1979).

Um estimador ótimo é um algoritmo computacional que processa medidas de processo para deduzir um erro mínimo para os estados estimados do sistema (Gelb *et al.*, 1974).

Um aspecto desta otimalidade é que o Filtro de Kalman incorpora toda a informação que lhe pode ser fornecido. Processa todas as medidas disponíveis, não obstante sua precisão, para estimar o valor atual das variáveis de interesse, com uso do (Maybeck, 1979):

- Conhecimento da dinâmica dos dispositivos da medida e do modelo;
- Da descrição estatística dos ruídos do sistema, erros de medidas, e da incerteza dinâmica dos modelos;
- Das informações disponíveis sobre as condições iniciais das variáveis de interesse.

### 2.2.4 Critérios de Estimação

Para se derivar a estimativa dos estados de para processos não-lineares, inicialmente devem ser estabelecidos os conceitos de erro de estimação (Equação 2.16) e de erro de

predição (Equação 2.17), a partir dos quais se pode então, exprimir uma função de penalização para a estimativa dos erros.

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+ \quad (2.16)$$

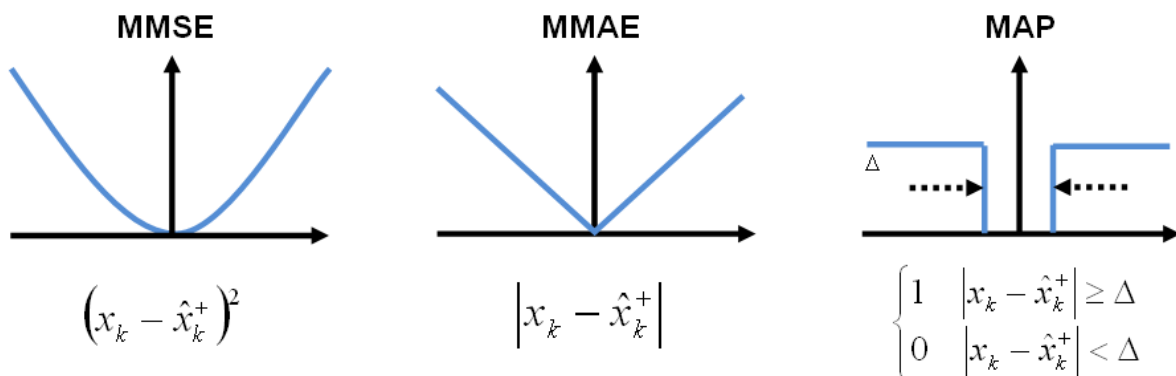
$$erro_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (2.17)$$

Onde  $erro_k^+$  é o erro de estimação entre o valor real do estado ( $x_k$ ) e o valor estimado pelo filtro de Kalman para o estado ( $\hat{x}_k^+$ ), no instante de tempo  $k$ . Já o  $erro_k^-$  é o erro de predição entre o valor real do estado ( $x_k$ ) e o valor predito pelo modelo do processo para o estado ( $\hat{x}_k^-$ ), no instante de tempo  $k$ .

Na prática, a escolha de uma função-custo que minimize os erros de estimação é normalmente realizada considerando (Kay, 1993):

- Um tratamento matemático que não seja demasiadamente complexo;
- O interesse do problema de estimação que define aspectos como velocidade de estimação, convergência e eficiência do estimador.

A Figura 2.9 demonstra três conhecidas funções-custo (Heijden et al., 2004).



**Figura 2.9:** Tipos de função-custo de minimização do erro estimado.

Um dos principais critérios para se determinar a melhor função-custo estabelece (Kay, 1993):

- A função de penalização deve ser não negativa.



Embora a função-custo da média absoluta do erro de estimação (MMAE) e a função-custo uniforme da máxima diferença do erro de estimação (MAP) sejam não-negativas, este requerimento é plenamente satisfeito quando se faz uso de uma função-custo da média do erro de estimação quadrado (MMSE) apresentada na Equação 2.18, ao qual é preferível quando são prováveis grandes erros. Desta forma, a equação possui um mínimo global que represente a mínima covariância dos erros estimados, além de convergir rapidamente próximo aos estados estimados (Heijden et al., 2004).

$$J_k = E\left[(erro_k^+)^2\right] = E\left[(x_k - \hat{x}_k^+)^2\right] \quad (2.18)$$

Onde  $E$  é o valor esperado ou operador-esperança. A dependência da função-custo  $J_k$  sobre o tempo  $k$  enfatiza a natureza não estacionária do processo de estimação.

Para que se derive o valor ótimo dos estados estimados, são evocados dois teoremas tomados da teoria de processos estocásticos (Kay, 1993):

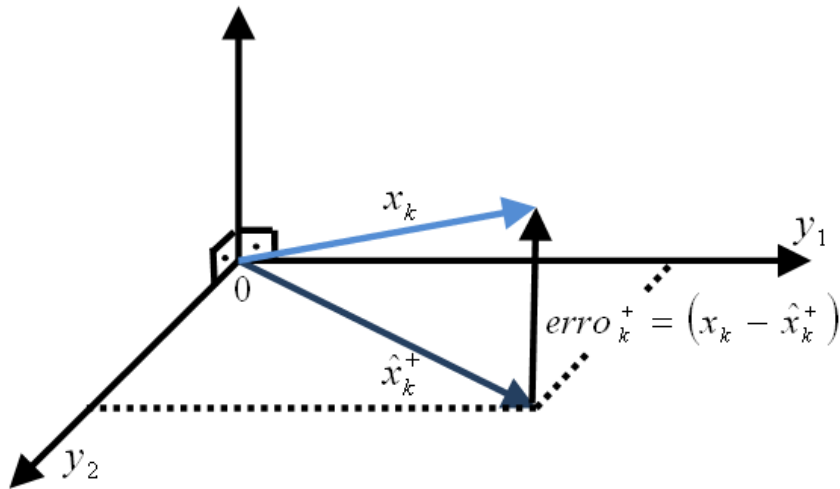
Teorema 1: Estimador de Média Condicional – Se para o processo estocástico,  $x_k$  e  $y_k$  seguem distribuições gaussianas, então o estado ótimo  $\hat{x}_k^+$ , dado informações de  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , é a solução que minimiza a função-custo da média do erro quadrado  $J_k$ , e pode ser representado pela Equação 2.19. (Prova: Grewal e Andrews, 2001)

$$\hat{x}_k^+ = E\left[x_k^+ \mid y_1, y_2, \dots, y_k\right] \quad (2.19)$$

Teorema 2: Princípio de Ortogonalidade – Se  $x_k$  é um vetor randômico que está para ser estimado baseado no vetor de observação  $y_k$ , então o princípio de ortogonalidade indica que o estado estimado  $\hat{x}_k^+$  é a projeção ortogonal sobre o espaço dos valores observados  $y_k$ , se e somente se: (Prova: Kay, 1993)

$$E\left[erro_k^+ \cdot y_i^T\right] = E\left[(x_k - \hat{x}_k^+) \cdot y_i^T\right] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.20)$$

A Figura 2.10 faz uma representação geométrica dos estados estimados (Kay, 1993).



**Figura 2.10:** Representação geométrica dos estados estimados.

### 2.2.5 Ganho de Kalman

A partir destes dois teoremas relatados é possível então apresentar a origem da teoria de estimação ideal para o Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF). (Para visualizar a dedução completa, veja o Apêndice B)

A Equação 2.21 demonstra como o estado pode ser estimado através de uma função linear dependente somente dos estados preditos e dos valores de medição do sistema.

$$\hat{x}_k^+ = \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- + K_k \cdot y_k \quad (2.21)$$

Onde  $\hat{x}_k^+$  é o valor de estado atualizado no instante de tempo  $k$ .  $\hat{x}_k^-$  é o valor predito para o estado do processo, como resultado da simulação do modelo.  $y_k$  é o vetor das variáveis mensuráveis no instante de tempo  $k$ . As matrizes  $\bar{K}_k$  e  $K_k$  são ainda desconhecidas.

Uma das maneiras de se conhecer estas matrizes  $\bar{K}_k$  e  $K_k$  é aplicar o conceito de ortogonalidade (Equação 2.22), o qual correlaciona o erro de estimação dos estados e o valor da saída mensurável.

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+) y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.22)$$

Substituindo a equação do estado estimado (2.21) e a Equação de Medição do espaço de estado (2.13) na equação de ortogonalidade, obtém-se a seguinte expressão:

$$E\left[(x_k - \bar{K}_k \hat{x}_k^- - K_k H_k x_k - K_k v_k) y_i^T\right] = 0 \quad (2.23)$$

Outra consideração é adotada, uma vez que os ruídos de processo ( $w_k$ ) e de medição ( $v_k$ ) são variáveis randômicas e não correlacionadas, logo:

$$E[w_k \cdot y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.24)$$

$$E[v_k \cdot y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.25)$$

Desta forma, simplifica-se a Equação 2.23, e após algum rearranjo de termos, reescreve-se a mesma:

$$E\left[(I - K_k H_k - \bar{K}_k) x_k y_i^T + \bar{K}_k (x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T\right] = 0 \quad (2.26)$$

Onde I é a matriz identidade.

Novamente, aqui se nota a possibilidade de aplicar o conceito de ortogonalidade, eliminando o seguinte termo:

$$\bar{K}_k \cdot E\left[(x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T\right] = 0 \quad (2.27)$$

A expressão remanescente é função simplificada contendo ambas as matrizes  $\bar{K}_k$  e  $K_k$  onde, após aplicar a regra de multiplicação de constantes do operador-esperança ( $E$ ), tem-se:

$$(I - K_k H_k - \bar{K}_k) E[x_k y_i^T] = 0 \quad (2.28)$$

Como decorre do conceito de ortogonalidade que  $E[x_k y_i^T] \neq 0$ , logo o termo  $(I - K_k H_k - \bar{K}_k)$  tem de ser nulo, e pode-se expressar a matriz  $\bar{K}_k$  em função da matriz  $K_k$ :

$$\bar{K}_k = I - K_k H_k \quad (2.29)$$

De posse desta relação entre as matrizes  $\bar{K}_k$  e  $K_k$ , pode-se retornar a equação linear de estimação de estado (2.21), e assim, substituindo e rearranjando as variáveis, obtém-se a Equação do Estado Estimado (2.30):

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) \quad (2.30)$$

Onde a matriz  $K_k$  é a chamada de Ganho de Kalman. Esta matriz é calculada a cada instante de tempo, no estimador de estado do Filtro de Kalman Estendido. Daí a importância de sua definição, do conhecimento de sua origem e princípio de cálculo.

A matriz do Ganho de Kalman ( $K_k$ ) tem a função de distribuir as disparidades encontradas entre o valor das variáveis de saída medidas no sistema ( $y_k$ ) e o valor das variáveis de saída previstas pelo modelo ( $\hat{y}_k^-$ ), através dos estados não mensurados. Desta forma, faz-se necessário conceituar o erro de predição das variáveis de saída ( $erroy_k^-$ ), demonstrado na Equação 2.31:

$$erroy_k^- = (y_k - \hat{y}_k^-) \quad (2.31)$$

Usando informações do modelo de espaço de estado linear apresentado na Seção 2.2.1, pode-se expressar este erro de predição (também chamado de resíduo de medição) em função do erro de predição dos estados ( $erro_k^-$ ), como observado a seguir:

$$erroy_k^- = H_k \cdot x_k + v_k - H_k \cdot \hat{x}_k^- = erro_k^- \cdot H_k + v_k \quad (2.32)$$

Igualmente ao erro de predição das saídas ( $erroy_k^-$ ), aqui se faz necessário conceituar o erro de estimação das variáveis de estado ( $erro_k^+$ ), demonstrado na Equação 2.33:

$$erro_k^+ = (x_k - \hat{x}_k^+) \quad (2.33)$$

Por conveniência, utilizando o conceito de estados estimados ( $\hat{x}_k^+$ ) apresentado na Equação 2.30, pode-se expressar este erro de estimação em função do erro de predição dos estados ( $erro_k^-$ ), como observado a seguir:

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^- - K_k \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) = (I - K_k \cdot H_k) erro_k^- - K_k \cdot v_k \quad (2.34)$$

Parte-se do princípio de ortogonalidade entre os erros de estimação dos estados ( $erro_k^+$ ) e o valor das variáveis de saída, medidas ( $y_k^T$ ) e previstas ( $\hat{y}_k^{-T}$ ), para deduzir-se o Ganho de Kalman ( $K_k$ ):

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+) \cdot y_k^T] = 0 \quad (2.35)$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+) \cdot \hat{y}_k^{-T}] = 0 \quad (2.36)$$

Aplicando a propriedade de adição de termos do operador-esperança ( $E$ ), podem-se subtrair estas equações de ortogonalidade como demonstrado a seguir:

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+) \cdot y_k^T - (x_k - \hat{x}_k^+) \cdot \hat{y}_k^{-T}] = E[erro_k^+ \cdot erro_k^{-T}] = 0 \quad (2.37)$$

Assim, utilizando as equações do erro de estimação dos estados (2.34) e do erro de predição das saídas (2.32), pode-se substituir na Equação 2.37 e, após algum rearranjo, chega-se a Equação 2.38. Durante esta etapa de dedução, eliminam-se os termos envolvendo a multiplicação vetorial entre o erro de predição dos estados ( $erro_k^-$ ) e os ruídos de medição ( $v_k$ ), por motivos semelhantes aos comentados na Equação 2.25, portanto:

$$(I - K_k \cdot H_k) \cdot E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}] \cdot H_k^T - K_k \cdot E[v_k \cdot v_k^T] = 0 \quad (2.38)$$

É importante notar que esta última equação apresentada contém um termo de valor esperado para o quadrado do erro de predição dos estados para o instante de tempo  $k$ . Este termo é definido como sendo a matriz de covariância do erro de predição dos estados ( $P_k^-$ ). De forma semelhante,  $R_k$  é definida como a matriz de covariância dos ruídos de medição.

$$P_k^- = E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}] \quad (2.39)$$

$$R_k = E[v_k \cdot v_k^T] \quad (2.40)$$

Através destes conceitos de matrizes de covariâncias, pode-se reescrever a Equação 2.38, resultando na equação abaixo:

$$(I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \cdot H_k^T - K_k \cdot R_k = 0 \quad (2.41)$$

Pela resolução da Equação 2.41 para  $K_k$ , obtém-se a equação de cálculo do Ganho do Filtro de Kalman (2.42).

$$K_k = P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \quad (2.42)$$

O conceito do Ganho de Kalman ( $K_k$ ) é fundamental para o cálculo de estimação dos estados. O processo de atualização ou correção dos estados, via Ganho de Kalman, é equivalente a um processo de otimização quadrática sem restrição (minimização da matriz de covariância do erro de estimação  $P_k^+$ ), como é realizada em algumas outras implementações de estimadores de estados.

## 2.2.6 Cálculo da Matriz de Covariância

Uma vez que os métodos de estimação por filtro de Kalman utilizam em seu princípio de funcionamento o cálculo da matriz de covariância, torna-se importante entender o que ela representa em termos físicos para os estados. A seguir, são esclarecidos os conceitos de variância e covariância e, logo em seguida, sua relação com os estimadores de estados EKF e CEKF.

Variância: Na teoria da probabilidade e na estatística, a variância de uma variável aleatória é uma medida da sua dispersão estatística, indicando quão longe em geral os seus valores se encontram do valor esperado. Isto é, o valor esperado do quadrado do desvio padrão da variável  $X$  em relação a sua própria média (Brown, 1983).

$$Var(X) = E[(X - \mu_x)^2] \quad (2.43)$$

Covariância: Na teoria da probabilidade e na estatística, a covariância é uma medida de acoplamento linear entre duas variáveis aleatórias, indicando se estas se movimentam ou não no mesmo sentido (Brown, 1983).

Se quando uma variável aleatória  $X$  aumenta e a variável aleatória  $Y$  também aumenta, e se quando  $X$  diminui e  $Y$  também diminui, estas variáveis aleatórias

movimentam-se no mesmo sentido (covariam linearmente na mesma direção), então a covariância é positiva. Ao contrario, quando  $X$  aumenta,  $Y$  diminui ou quando  $X$  diminui,  $Y$  aumenta, ou seja, as variáveis covariam em sentidos opostos, então a covariância é negativa. As Equações 2.44 e 2.45 representam o cálculo de covariância e sua relação com a matriz de variância, respectivamente.

$$\text{Covar}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (2.44)$$

$$\text{Covar}(X, X) = \text{Var}(X) \quad (2.45)$$

Prosseguindo-se o raciocínio de um estimador ótimo, defini-se a matriz de covariância do erro de estimação dos estados ( $P_k^+$ ), a qual é o objetivo de minimização durante a estimação dos estados do processo. Essa matriz pode ser calculada através da Equação 2.46 (Para visualizar a dedução completa, veja o Apêndice B):

$$P_k^+ = E[\text{erro}_k^+ \cdot \text{erro}_k^{+T}] = E[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T] \quad (2.46)$$

Fazendo uso do conceito de estados estimados ( $\hat{x}_k^+$ ), apresentado na Equação 2.21, pode-se substituir na matriz de covariância dos estados ( $P_k^+$ ) e, após algum rearranjo, chega-se a Equação 2.47. Durante está etapa de dedução eliminam-se os termos envolvendo a multiplicação vetorial entre o erro de predição dos estados ( $\text{erro}_k^-$ ) e os ruídos de medição ( $v_k$ ), por motivos semelhantes aos comentados na Equação 2.25, portanto:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot E[\text{erro}_k^- \cdot \text{erro}_k^{-T}] \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T + K_k \cdot E[v_k \cdot v_k^T] \cdot K_k^T \quad (2.47)$$

Utilizando o conceito da matriz de covariância do erro de predição dos estados ( $P_k^-$ ) e da matriz de covariância dos ruídos de medição ( $R_k$ ), apresentadas nas Equações 2.39 e 2.40 respectivamente, tem-se:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (2.48)$$

Procedendo uma expansão dos termos, verifica-se a possibilidade de simplificação de alguns destes termos, resultando na seguinte equação da matriz de covariância ( $P_k^+$ ):

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \quad (2.49)$$

Aqui, a matriz  $P_k^+$  representa a covariância do erro de estimação dos estados, para o instante tempo atual  $k$ . Indo mais além, e aplicando conceitos do espaço de estados da Equação de Processo (2.11) e rearranjando alguns termos, é possível definir o erro de predição do tempo futuro ( $erro_{k+1}^-$ ) em função do erro de estimação encontrado para o tempo atual ( $erro_k^+$ ), como apresentado na Equação 2.50. Desta forma, pode-se prever o valor da matriz de covariância para o instante de tempo futuro  $k + 1$ , como se deriva na seqüência:

$$erro_{k+1}^- = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- = \varphi_k \cdot erro_k^+ + w_k \quad (2.50)$$

A matriz de covariância do erro de predição dos estados, no tempo futuro  $k + 1$ , é por definição:

$$P_{k+1}^- = E[erro_{k+1}^- \cdot erro_{k+1}^{-T}] \quad (2.51)$$

Assim, através da Equação 2.50, essa matriz de covariância dos estados ( $P_{k+1}^-$ ), pode ser expressa em função do erro estimado no instante de tempo anterior ( $erro_k^+$ ), logo:

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot E[erro_k^+ \cdot erro_k^{+T}] \cdot \varphi_k^T + E[w_k \cdot w_k^T] \quad (2.52)$$

É importante notar que esta última equação apresentada (2.52) contém um termo de valor esperado para o quadrado do erro de estimação dos estados para o instante de tempo  $k$ . Este termo é definido como sendo a matriz de covariância do erro de estimação dos estados ( $P_k^+$ ). De forma semelhante,  $Q_k$  é definida como a matriz de covariância dos ruídos de processo.

$$P_k^+ = E[erro_k^+ \cdot erro_k^{+T}] \quad (2.53)$$

$$Q_k = E[w_k \cdot w_k^T] \quad (2.54)$$

Através destes conceitos de matrizes de covariâncias, pode-se reescrever a Equação 2.52, conforme a Equação 2.55:



$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot P_k^+ \cdot \varphi_k^T + Q_k \quad (2.55)$$

Ainda, através do uso da Equação 2.49, a matriz de covariância dos erros de estimação ( $P_k^+$ ) pode ser expressa em função da matriz de covariância dos erros de predição ( $P_k^-$ ):

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T + Q_k \quad (2.56)$$

Por fim, substituindo o conceito do Ganho de Kalman, dada pela Equação 2.42, e através de uma expansão de termos, pode-se encontrar a forma de cálculo da matriz de covariância dos estados preditos para o instante de tempo futuro ( $P_{k+1}^-$ ), como a seguir:

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T - (\varphi_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T) (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T) + Q_k \quad (2.57)$$

Esta última equação demonstrada é também conhecida como Matriz Dinâmica de Riccati para sistemas tempo-discretos. Esta equação é importante para determinar a correção dos estados preditos pelo modelo do processo. Uma das vantagens de se utilizar esta equação é que ela elimina a necessidade do cálculo da atualização da covariância a cada instante de amostragem, uma vez que isto já está implícito no cálculo de predição.

### 2.2.7 Critérios de Observabilidade

O conceito de observabilidade na teoria de controle moderno é uma forma de determinar se os estados internos do sistema podem ser conhecidos utilizando somente informações externas. Em outras palavras, a observabilidade é um conceito útil para resolver o problema de reconstrução das variáveis de estado não mensuráveis (Ogata, 1982).

Teorema da Observabilidade: Um sistema tempo discreto é dito observável se para qualquer condição de estado inicial  $x_0$  e algum tempo finito  $k$ , o estado inicial  $x_0$  pode ser excepcionalmente determinado pelo conhecimento das variáveis de entrada  $u_i$  e das variáveis de saída do processo  $y_i$  para todo  $i \in [0, k]$  (Simon, 2006);

Se um sistema é observável então o estado inicial pode ser determinado, e se o estado inicial pode ser determinado então todos os estados entre os tempos iniciais e finais podem ser determinados (Simon, 2006).

Considere o sistema tempo discreto definido pelas Equações 2.11 e 2.13, com ruídos de modelo e medição nulos, logo para a determinação de  $M$  estados do sistema são necessários  $M$  valores de medição  $y$  :

$$\begin{aligned} y(0) &= H.x(0) \\ y(k) &= H.\varphi.x(0) \\ &\vdots \\ y((M-1),k) &= H.\varphi^{(M-1)}.x(0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Através destes conhecimentos, Kalman definiu o critério de observabilidade de um sistema apresentando a matriz de observabilidade definida pela Equação 2.59:

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H.\varphi \\ \vdots \\ H.\varphi^{M-1} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

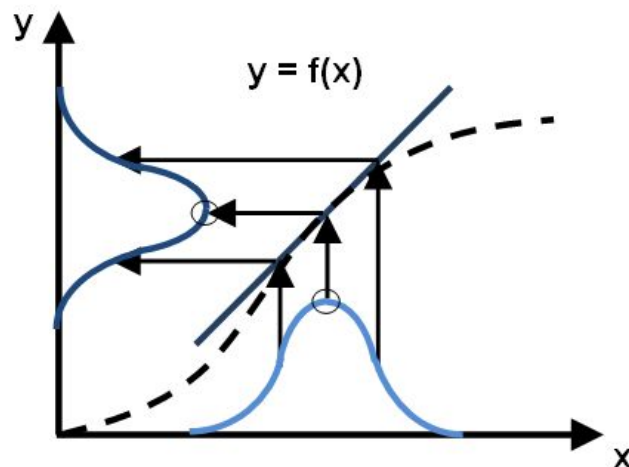
Onde o critério de Kalman estabelece que para o sistema ter solução dita observável dos  $M$  estados, então deve obter  $M$  equações linearmente independentes, ou seja, o sistema deve ter o posto cheio para a matriz  $O$ .

$$p(O) = M \quad (2.60)$$

O sistema, portanto, é completamente observável se toda a transição do estado afeta cada elemento do vetor de saída. Estes critérios de observabilidade podem também ser formulados em termos de funções de transferência ou matrizes de transferência. A condição necessária e suficiente para observabilidade completa é que não haja cancelamento na função ou matriz de transferência. Se houver cancelamento, o modo cancelado não poderá ser observado na saída (Ogata, 1982).

### 2.2.8 Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Um método direto para gerar um filtro não-linear subótimo, é linearizar o modelo não-linear ao longo da trajetória dinâmica e aplicar a estimação de estado linear para produzir as correções, a cada novo estado predito (Heijden et al., 2004). O estimador que usa esta idéia é o Filtro de Kalman Estendido (EKF). Este algoritmo é essencialmente justificado se o sistema linearizado fornece uma boa representação do comportamento do sistema real, para uma determinada vizinhança em torno do atual estado do sistema (Tonel, 2008). A Figura 2.11 ilustra como o Filtro de Kalman Estendido (EKF) lineariza uma função não-linear ao redor do valor médio de uma distribuição Gaussiana, e depois disso propaga a média e covariância através do modelo linearizado (Orderud, 2005).



**Figura 2.11:** Linearização do modelo não-linear.

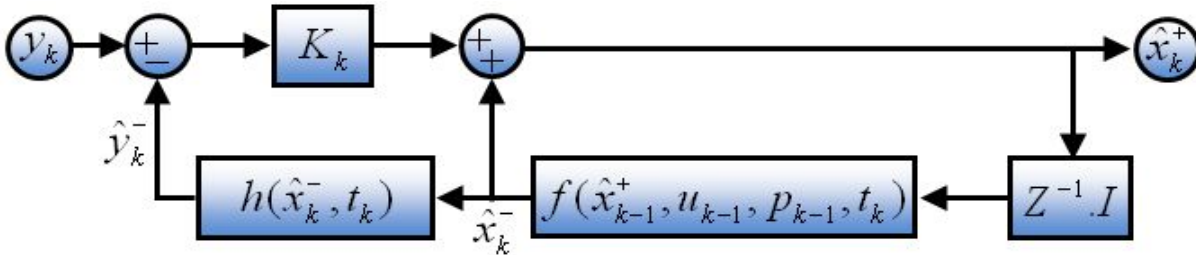
O Filtro de Kalman Estendido (EKF) de fato tem sido um padrão em estimações não-lineares em espaço de estados, primeiramente devido a sua simplicidade, robustez e conformidade em implementações em tempo real (Orderud, 2005).

Embora raramente as circunstâncias necessárias para as condições de otimalidade existam, no entanto o filtro funciona aparentemente bem para muitas aplicações (Bishop e Welch, 2006).

Se o sistema apresenta um modelo fortemente não-linear, a existência da aproximação via série de Taylor de primeira ordem ainda é possível se o ruído de processo ( $w_k$ ) for pequeno, pois se faz uma expansão em torno de cada ponto ( $\hat{x}_k^-$ ), com um determinado

intervalo de validade. O mesmo é válido para quando o ruído de medição ( $v_k$ ) é pequeno, pois a estimação de estados é intensamente dependente dos valores medidos (Tonel, 2008).

A Figura 2.12 traz uma representação em blocos do Filtro de Kalman Estendido (EKF).



**Figura 2.12:** Filtro de Kalman Estendido.

O EKF considerado aqui é descrito matematicamente, considerando o seguinte modelo não-linear do processo definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x_t, u_t, p_t, t) + w_t \\ y_k &= h(\hat{x}_k, t_k) + v_k \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

Onde  $x_k$  são os estados,  $y_k$  representam as saídas,  $w_t$  e  $v_k$  são os ruídos de processo e de medida respectivamente,  $u_t$  são as variáveis de entradas manipuladas,  $p_t$  são parâmetros do modelo,  $k$  representa o tempo em que é realizada cada medição,  $f$  e  $h$  são as funções de matemáticas não-lineares que descrevem o sistema.

O Filtro de Kalman Estendido pode ser formulado para uma versão híbrida (contínuo-discreta), consistindo das subseqüentes três etapas:

A primeira etapa é a predição dos estados, na qual é feito um cálculo dos valores previstos para os estados ( $\hat{x}_k^-$ ). Para isso, utilizam-se informações de simulação do modelo do processo, do instante de tempo  $k-1$  até o instante de tempo  $k$ . As informações precedentes sobre o sistema estão armazenadas no vetor de estados estimados ( $\hat{x}_{k-1}^+$ ), o qual, também é retroalimentado nesta etapa. Durante esse etapa é que se concentra a essência da estimação não-linear, uma vez que o modelo de processo considerado é um modelo não-linear.

Equações da Etapa de Predição:

- Estados Preditos

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}^+ + \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} f(x_t, u_t, p_t, t) dt \quad (2.62)$$

A segunda etapa contempla o cálculo da matriz de covariância dos estados ( $P_k^-$ ). É realizada pela linearização do modelo não-linear, através das matrizes Jacobianas do sistema em relação aos estados que se deseja estimar. Por se tratar de sistemas tempo-discretos, faz-se uso da matriz exponencial das equações Jacobianas. Dessa forma, pode-se resolver a equação algébrica de Riccati, encontrando assim, a mínima covariância dos erros de estimação.

Equações da Etapa de Cálculo da Covariância:

- Covariâncias Preditas

$$P_k^- = \varphi_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot \varphi_{k-1}^T - (\varphi_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot H_{k-1}^T) (H_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot H_{k-1}^T + R_{k-1})^{-1} \cdot (H_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot \varphi_{k-1}^T) + Q_{k-1} \quad (2.63)$$

Com:

$$\varphi_{k-1} = e^{(F_{k-1}(Ts))} \quad (2.64)$$

$$F_{k-1} = \left( \frac{\partial f(x_t, u_t, p_t, t)}{\partial x} \right) \Bigg|_{\hat{x}_{k-1}^-} \quad (2.65)$$

$$H_{k-1} = \left( \frac{\partial h(x_t, u_t, t)}{\partial x} \right) \Bigg|_{\hat{x}_{k-1}^-} \quad (2.66)$$

Onde as matrizes  $F_{k-1}$  e  $H_{k-1}$  são as matrizes Jacobianas do sistema.  $\varphi_{k-1}$  é a matriz de discretização e  $Ts$  é o tempo de amostragem do sistema.

A terceira etapa faz a correção dos estados preditos pelo modelo. Estas correções são possíveis a partir da distribuição dos erros entre os valores medidos ( $y_k$ ) e os valores preditos para as saídas pelo modelo ( $\hat{y}_k^-$ ). Ela é realizada através do cálculo do Ganho de Kalman  $K_k$ , o qual, resulta no melhor valor de estados estimados ( $\hat{x}_k^+$ ), para o instante de tempo  $k$ .

Equações da Etapa de Correção:

- Ganho de Kalman

$$K_k = P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \quad (2.67)$$

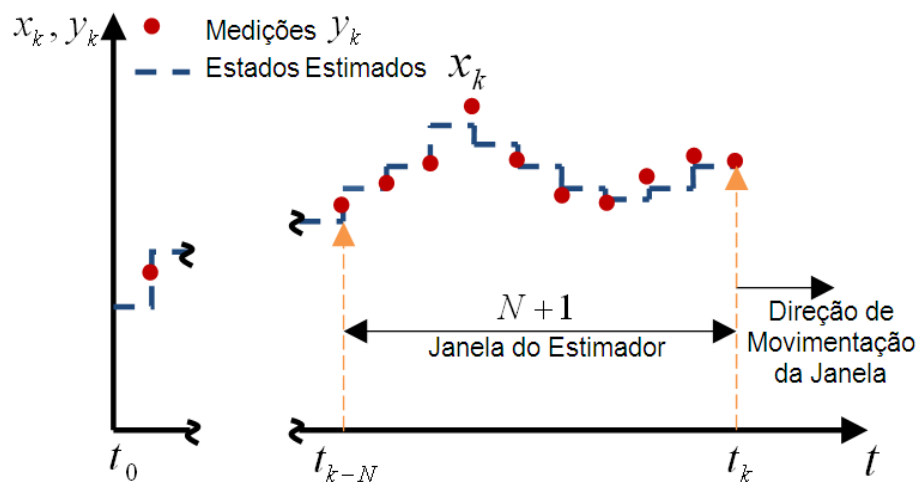
- Estados Corrigidos

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) \quad (2.68)$$

### 2.2.9 Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF)

O CEKF (do inglês *Constrained Extended Kalman Filter*) é um tipo alternativo de estimador baseado em otimização, cuja implementação é originária da formulação do Estimador de Horizonte Móvel (MHE) introduzida por Muske & Rawlings (1995) e Robertson et al. (1996), e na qual seu princípio de funcionamento, igualmente ao Filtro de Kalman Estendido, é baseado nas premissas de um estimador ótimo.

O nome Estimador de Horizonte Móvel (MHE) vem da analogia com uma janela de estimação deslizante ou móvel, na qual o estado é estimado através de  $(N + 1)$  medidas de saída mais recentes. Se o último instante de tempo de amostragem dos dados externos é dado em  $k$ , então são armazenados e corrigidos estados indo do instante de tempo  $k - N$  até o instante  $k$ , como pode ser observado na Figura 2.13.



**Figura 2.13:** Janela do Estimador de Horizonte Móvel.

A janela de dados móvel foi elaborada com o intuito de reduzir o problema do crescimento do número de variáveis de estimação, encontrado no estimador de estados em batelada que processa todos os dados do instante inicial de estimação até o instante  $k$ , para um número fixo no estimador de horizonte móvel. Indo mais além e reduzindo a janela ao máximo (fazendo  $N \rightarrow 0$ ), encontra-se justamente a solução equivalente ao CEKF (Findeisen, 1997).

Este processo de estimação por horizonte móvel baseia-se em uma etapa de otimização na qual se busca encontrar o mínimo erro entre o valor real do estado e o valor estimado, ponderando os erros de processo e erros de medição através de matrizes de variabilidade máxima admitida. De forma semelhante, o CEKF faz uso de uma otimização durante a etapa de correção, onde são minimizados os sinais de ruídos de processo.

A grande vantagem da aplicação de estimadores baseado em processos de otimização é que estes podem incorporar limites físicos às variáveis do sistema. Este procedimento normalmente é usado para evitar que o processo convirja para uma solução inviável.

Assim como no Filtro de Kalman Estendido (EKF), o Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF) consiste das etapas de predição, cálculo da matriz de covariância e correção. Baseado nestes conhecimentos, o seguinte algoritmo de Filtro de Kalman Estendido com Restrição é apresentado a seguir:

Considere o modelo não-linear abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x_t, u_t, p_t, t) + w_t \\ y_k &= h(\hat{x}_k, t_k) + v_k \\ k &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{2.69}$$

As etapas de predição e cálculo da matriz de covariância são efetuadas da mesma forma como no estimador EKF, logo:

Equações da Etapa de Predição:

- Estados Preditos

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}^+ + \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} f(x_t, u_t, p_t, t) dt \quad (2.70)$$

Equações da Etapa de Cálculo da Covariância:

- Covariâncias Preditas

$$P_k^- = \varphi_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot \varphi_{k-1}^T - (\varphi_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot H_{k-1}^T) (H_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot H_{k-1}^T + R_{k-1})^{-1} \cdot (H_{k-1} \cdot P_{k-1}^- \cdot \varphi_{k-1}^T) + Q_{k-1} \quad (2.71)$$

Com:

$$\varphi_{k-1} = e^{(F_{k-1}(ts))} \quad (2.72)$$

$$F_{k-1} = \left( \frac{\partial f(x_t, u_t, p_t, t)}{\partial x} \right) \Bigg|_{\hat{x}_{k-1}^-} \quad (2.73)$$

$$H_{k-1} = \left( \frac{\partial h(x_t, u_t, t)}{\partial x} \right) \Bigg|_{\hat{x}_{k-1}^-} \quad (2.74)$$

A única etapa que difere os estimadores, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e o Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), é justamente a etapa de correção dos estados estimados. Ao invés da atualização ser feita via Ganho de Kalman, o CEKF utiliza o seguinte problema de otimização:

$$\min_{w_k, v_k} \Psi_k = w_k^T \cdot P_k^{-1} \cdot w_k + v_k^T \cdot R_k^{-1} \cdot v_k \quad (2.75)$$

E sujeita as seguintes restrições de igualdade:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + w_k \quad (2.76)$$

$$\hat{y}_k^+ = y_k - v_k \quad (2.77)$$

Onde  $\hat{x}_k^+$  são os estados estimados do sistema.  $\hat{y}_k^+$  são as saídas filtradas do sistema.



Aplicando os limites físicos do processo aos estados estimados ( $\hat{x}_k^+$ ) (Equação 2.78), expressando estes em função dos estados preditos ( $x_k^-$ ) e dos ruídos de processo ( $w_k$ ) (Equação 2.79) e, finalmente, isolando o termo dos ruídos de processo ( $w_k$ ) (Equação 2.80):

$$x_{min} \leq \hat{x}_k^+ \leq x_{max} \quad (2.78)$$

$$x_{min} \leq \hat{x}_k^- + w_k \leq x_{max} \quad (2.79)$$

$$x_{min} - \hat{x}_k^- \leq w_k \leq x_{max} - \hat{x}_k^- \quad (2.80)$$

Chega-se ao primeiro conjunto de restrições de desigualdade:

$$w_k \geq (x_{min} - \hat{x}_k^-) \quad (2.81)$$

$$w_k \leq (x_{max} - \hat{x}_k^-) \quad (2.82)$$

De forma semelhante, aplicando os limites físicos do processo às variáveis filtradas ( $\hat{y}_k^+$ ) (Equação 2.83), expressando estas em função das saídas preditas ( $\hat{y}_k^-$ ) e dos ruídos de medição ( $v_k$ ) (Equação 2.84) e, finalmente, isolando o termo dos ruídos de medição ( $v_k$ ) (Equação 2.85):

$$y_{min} \leq \hat{y}_k^+ \leq y_{max} \quad (2.83)$$

$$y_{min} \leq y_k - v_k \leq y_{max} \quad (2.84)$$

$$y_k - y_{max} \leq v_k \leq y_k - y_{min} \quad (2.85)$$

Chega-se ao segundo conjunto de restrições de desigualdade:

$$v_k \geq (y_k - y_{max}) \quad (2.86)$$

$$v_k \leq (y_k - y_{min}) \quad (2.87)$$

Através da Equação 2.86 e da Equação 2.87, o problema de otimização através do Filtro de Kalman Estendido com Restrição torna-se completo.

A etapa de correção dos estados estimados no CEKF pode ser resolvida através de Programação Quadrática Sequencial (SQP). Porém, se e somente se a equação de medição for linear, então uma aproximação pode ser feita considerando a relação quadrática entre os ruídos de processo e de medição (Salau, 2009). Logo, o problema de otimização apresentado pelas Equações 2.75 a 2.87, pode ser reescrito na forma canônica através de Programação Quadrática (QP), dado pelas Equações 2.88 e 2.94. Desta forma, pode-se garantir a convergência da otimização ao encontro de um mínimo global do sistema, de forma rápida, eficiente e robusta.

O CEKF utiliza o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\Theta_k} \Psi_k = \Theta_k^T \cdot S_k^{-1} \cdot \Theta_k + d_k^T \cdot \Theta_k \quad (2.88)$$

Com:

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$S_k = \begin{bmatrix} P_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$d_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Sujeita a seguinte restrição de igualdade:

$$[H_k \quad I] \cdot \Theta_k = y_k - \hat{y}_k^- \quad (2.92)$$

E, as seguintes restrições de desigualdade:

$$\Theta_k \geq \begin{bmatrix} (x_{min} - \hat{x}_k^-) \\ (y_k - y_{max}) \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$\Theta_k \leq \begin{bmatrix} (x_{max} - \hat{x}_k^-) \\ (y_k - y_{min}) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

### 2.2.10 Parâmetros de Ajuste dos Filtros

A qualidade do processo de estimação dos estados não mensurados passa pelo ajuste e sintonia de três parâmetros, as matrizes  $Q$  e  $R$ , as quais representam as covariâncias dos ruídos do processo e dos ruídos de medição respectivamente, e a matriz  $P_0$ , a qual representa a covariância dos erros iniciais de estimação (Marcon *et al.*, 2004).

Embora não exista ainda nenhuma metodologia consolidada para a obtenção destes parâmetros, muitos estudos como Zhou e Luecke (1994), Leu e Baratti (2000) e Salau (2009) tem procurado encontrar de forma sistemática o melhor ajuste das covariâncias de ruído  $Q$  e  $R$ .

Na prática, as matrizes  $Q$  e  $R$  são consideradas constantes embora, de fato, elas alterem-se a cada intervalo de tempo ou a cada medida, visto que estes ruídos são variáveis aleatórias (Welch e Bishop, 2001). Desta forma, necessita-se de um ajuste rápido e aplicável, que forneça um bom resultado a qualquer instante do processo. O método mais conhecido é também um dos mais eficientes, e consiste em uma técnica de tentativa e erro onde são contrabalançadas as confianças entre o modelo adotado e as variáveis mensuradas (Simon, 2006).

Essas matrizes são os parâmetros básicos de ajuste do estimador de estados. Elas devem ser positivas definidas, segundo o método direto da determinação de estabilidade de Lyapunov, para que o processo de estimação via equação dinâmica de Riccati tenha uma solução estável (Leigh, 2004).

A seguir, é realizada uma breve descrição de cada uma destas matrizes.

Matriz de covariância dos ruídos de processo ( $Q$ ): Está associada com a confiabilidade na modelagem utilizada pelo Filtro de Kalman. A matriz  $Q$  é quadrada, com dimensão correspondente ao número de estados do modelo utilizado no Filtro de Kalman. Quanto maior a confiabilidade no modelo, menor os valores dos componentes da matriz. Sabe-se que para plantas de elevada complexidade e para sistemas multivariáveis, onde há uma forte relação entre os estados, a escolha dessa matriz com elementos não nulos fora da diagonal principal representa uma provável melhora no processo de estimação. Entretanto, a

dificuldade de ajustar valores fora da diagonal principal faz com que geralmente se opera com uma matriz diagonal, obtida através de algum método de tentativa e erro (Welch e Bishop, 2001).

Matriz de covariância dos ruídos de medição ( $R$ ): Está associada com a confiabilidade nas medidas das variáveis de processo. É uma matriz quadrada com dimensão correspondente ao número de saídas do modelo. Quanto maior for a confiabilidade nas medidas, menor os valores dos componentes da matriz. Geralmente opera-se com uma matriz diagonal, uma vez que o erro de medição está associado a um sensor que tem pouca ou nenhuma influência sobre outro medidor, ou seja, não estão correlacionados. Os valores de  $R$  são mais facilmente obtidos do que os de  $Q$ , visto que estão relacionados com o erro do equipamento de medida ou com o erro do procedimento laboratorial que está gerando o valor medido (Simon, 2006).

Matriz de covariância inicial ( $P_0$ ): Esta matriz é utilizada apenas na inicialização do Filtro de Kalman, uma vez que é constantemente atualizada nos ciclos de cálculo do algoritmo. É uma matriz quadrada com dimensão correspondente ao número de estados do modelo utilizado no Filtro de Kalman. Na teoria, a escolha da matriz de covariância inicial deveria ser realizada com base no valor quadrado da discrepância entre o estado real do processo ( $x_0$ ) e da condição inicial do estado estimado para o processo ( $\hat{x}_0^+$ ) (Brown, 1983). No entanto, esta escolha acaba não sendo possível exatamente pelo fato de se desconhecer o valor atual do estado ( $x_0$ ). Logo, o usual é utilizar uma matriz diagonal com valores mais elevados que o provável valor quadrático da discrepância para o instante inicial  $(x_0 - \hat{x}_0^+)^2$ . Este valor normalmente fica na ordem de  $10^2$  a  $10^3$  (Haykin, 2001). Desta forma, garante-se uma convergência mais rápida dos estados ao sistema que está sendo integrado.

Uma apropriada escolha das matrizes de covariância dos erros de medição e processo, de modo que suas componentes modelam uma incerteza superior a incertezas intrínsecas do processo, pode minimizar o risco de divergência da estimação (Jazwinski, 1970).

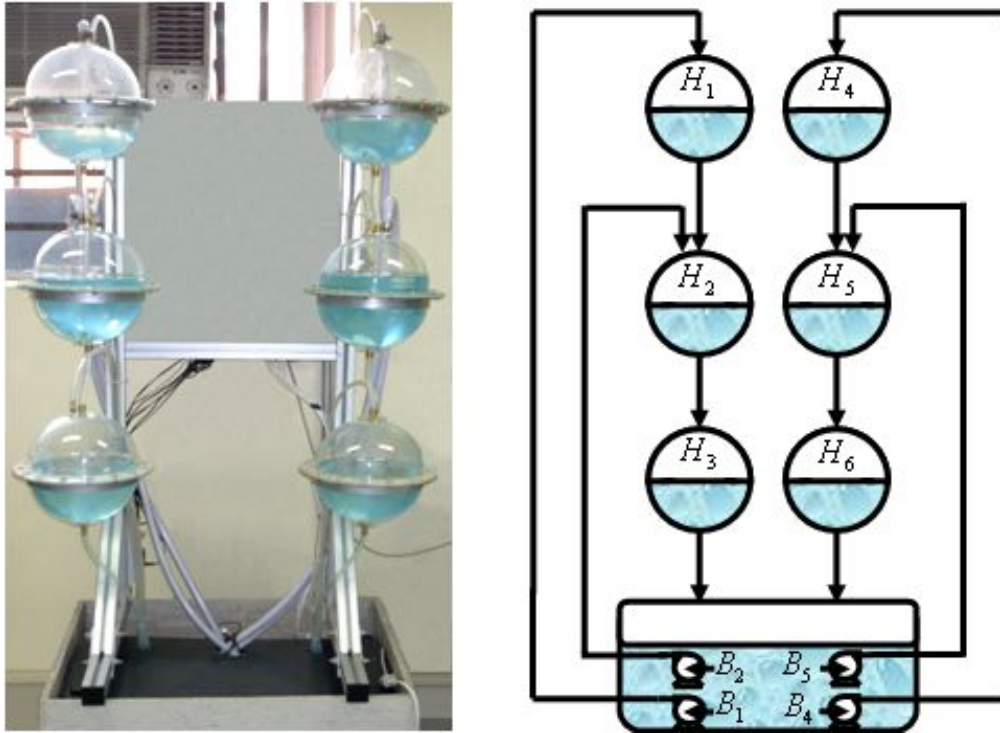
# Capítulo 3

## Planta Laboratorial

O presente capítulo tem como objetivo realizar uma descrição da planta laboratorial e do processo a ser estudado, estabelecendo os principais aspectos que foram utilizados e, que compreendem este sistema.

### 3.1 Descrição da Unidade

A unidade descrita neste trabalho é constituída da *Planta de Seis Tanques Esféricos*, a qual se encontra instalada no Laboratório de Controle e Integração de Processos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (LACIP - UFRGS). A Figura 3.1 retrata a unidade do estudo de caso.



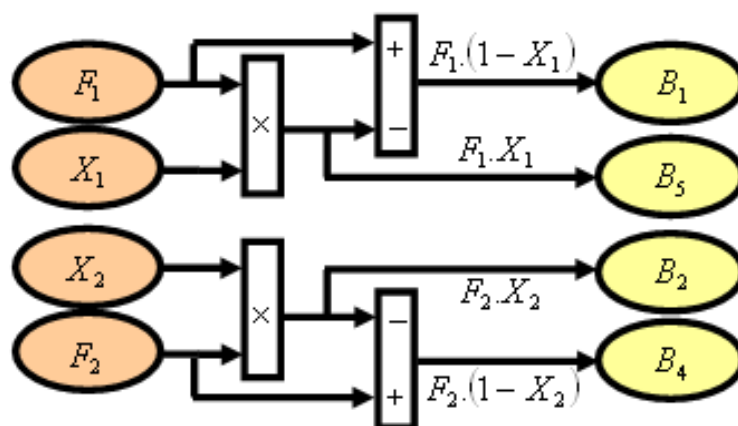
**Figura 3.1:** Planta laboratorial

O sistema é formado por seis tanques de geometria aproximadamente esférica, os quais estão interligados entre si por tubulações e dispostos em dois ramos de três tanques. Abaixo destes tanques, encontra-se um reservatório de água e quatro pequenas bombas submersas. Estas bombas foram numeradas de acordo com o tanque a qual estão associadas, logo, as bombas  $B_1$  e  $B_4$  fornecem a vazão de alimentação aos tanques superiores  $T_1$  e  $T_4$ . Enquanto isso, a vazão de alimentação dos tanques intermediários,  $T_2$  e  $T_5$ , é dada pela soma das vazões de saída dos tanques superiores e das vazões fornecidas por outras duas bombas,  $B_2$  e  $B_5$ . Já os tanques inferiores  $T_3$  e  $T_6$ , por sua vez, recebem a vazão de saída dos tanques intermediários, e logo após, suas saídas retornam ao reservatório de origem, fechando um ciclo. As vazões das quatro bombas são modificadas através da variação da tensão de alimentação das mesmas e os níveis dos seis tanques são medidos através de células de carga, as quais servem também de sustentação para os tanques.

Trata-se, portanto, de um processo envolvendo níveis líquidos. Uma característica interessante desta planta está justamente na escolha pela geometria esférica dos tanques, a qual permite diferentes comportamentos dinâmicos de acordo com a região de operação do processo. Isto é, ocorrem taxas de variação de nível mais bruscas nas regiões próximas ao topo e fundo dos tanques e taxas de variação mais amenas quando se opera na região

intermediária destes tanques. Este fenômeno torna o processo bem mais não-linear do que seria alcançado através da utilização de tanques no formato cilíndrico.

O sistema contempla ainda um bloco virtual criado no software Simulink (Figura 3.2), cujo objetivo é tornar o sistema multivariável com interação entre todos os canais. Desta forma, a alteração de uma variável de entrada afeta todas as variáveis de saídas do processo, motivando a necessidade de um eficiente sistema de controle multivariável. Tal bloco proporciona a distribuição das vazões totais manipuladas,  $F_1$  e  $F_2$ , através das frações de divisão de corrente,  $X_1$  e  $X_2$ , e tem o objetivo de estabelecer a vazão que cada uma das bombas  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_4$  e  $B_5$ , deve alimentar os tanques correspondentes. A implementação deste bloco permite que a planta assuma características similares às apresentadas pela planta laboratorial de quatro tanques proposta por Johansson (2000), a qual se tornou em uma unidade padrão para se ilustrar conceitos relativos a zeros multivariáveis e inversão de sinal de ganho para sistemas multivariáveis.



**Figura 3.2:** Bloco criado para gerar interação entre as malhas

A *Planta de Seis Tanques Esféricos* contém essencialmente os mesmos comportamentos dinâmicos de fase mínima e não mínima, os quais, dependendo dos valores das frações  $X_1$  e  $X_2$ , apresenta um zero de transmissão que se move ao longo do eixo real, assumindo valores negativos ou positivos. O sistema é dito de fase mínima quando nenhum dos seus zeros ou pólos está localizado no semi-plano direito, e de fase não mínima se possui algum deles nesta região. Tais fatores de fase não mínima correspondem a restrições intrínsecas do processo e tendem a limitar a velocidade de atuação do controlador em malha fechada. Estes conceitos de fase mínima e não mínima, e o deslocamento de zeros de

transmissão para as plantas de quatro e seis tanques foram analisados, respectivamente, por Johansson (2000) e Escobar (2006).

A Tabela 3.1 sintetiza o comportamento do sistema para este processo, em razão da soma das frações  $X_1$  e  $X_2$ .

**Tabela 3.1:** Caracterização de fases do sistema

Somatório das frações $X_1$ e $X_2$	Característica do Sistema
$X_1 + X_2 > 1$	Sistema de Fase Mínima (alimentação direta predominante)
$X_1 + X_2 < 1$	Sistema de Fase Não Mínima (alimentação indireta predominante / zeros no SPD)
$X_1 + X_2 = 1$	Ganho Multivariável Nulo (determinante da matriz de ganho do processo = 0)
$X_1 = X_2 = 0$ ou $X_1 = X_2 = 1$	Sistema Desacoplado

É conveniente notar que quanto mais próximo do valor unitário for a soma das frações de  $X_1$  e  $X_2$ , mais difícil será de controlar este processo, devido justamente à alta interação entre os canais. Em outras palavras, as alterações sobre as variáveis manipuladas,  $F_1$  e  $F_2$ , tendem a produzir um efeito compensatório em ambas as saídas,  $H_3$  e  $H_6$ , quando  $X_1$  e  $X_2$  somam aproximadamente um, sendo no caso exato, impossível controlar separadamente as duas saídas do processo, uma vez que a matriz de ganhos se torna singular.

Embora a criação deste bloco possibilite facilmente gerar comportamentos que vão desde os totalmente desacoplados até o modelo de grau de interação máxima, apenas pela modificação de  $X_1$  e  $X_2$ , resolveu-se adotar valores fixos para estas variáveis que tornassem o processo interessante do ponto de vista de controle. Desta forma, são arbitrados valores de  $X_1 = X_2 = 0,4$  e assim, conseqüentemente, apresentando comportamento de fase não mínima com uma aceitável interação entre as malhas de controle.

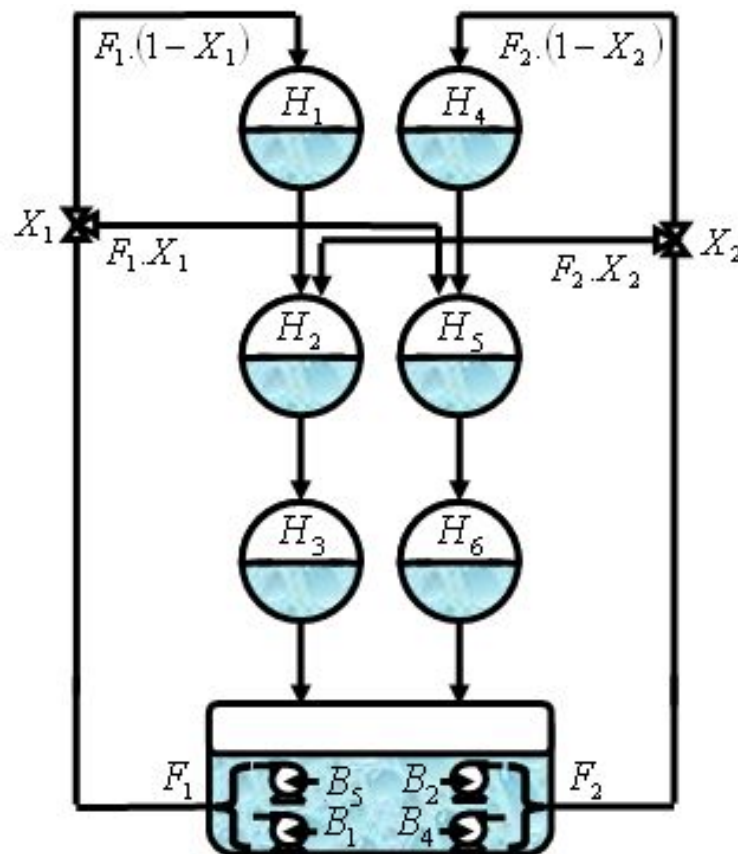
### 3.1.1 Objetivos de Controle

O principal objetivo de estudo desta planta consiste em controlar os níveis dos tanques inferiores  $H_3$  e  $H_6$ , tendo como variáveis manipuladas as vazões  $F_1$  e  $F_2$ . Este sistema compreende, desta forma: pólos que determinam uma dinâmica característica do processo;



zeros de transmissão, inseridos através da interação entre os tanques dos dois ramos; e um tempo morto associado ao próprio escoamento do fluido pelas tubulações e tanques.

A Figura 3.3 faz uma representação do processo com a inclusão do bloco de interação entre os canais. Esta interação pode ser acompanhada fisicamente observando um sistema de controle com emparelhamento direto, onde o nível  $H_3$  é controlado pela vazão  $F_1$  e o nível  $H_6$  é controlado pela vazão  $F_2$ . Neste caso, uma alteração sobre a variável manipulada  $F_1$  produz uma maior variação estática sobre o nível  $H_3$ , pois a maior parte da vazão  $F_1$  tende a dirigir-se para este tanque. Porém, essa corrente deve passar primeiramente pelo tanque superior  $T_1$  e na seqüência pelo tanque intermediário  $T_2$  antes de alcançar o nível desejado para o tanque inferior  $T_3$ , tornando a dinâmica de resposta do processo lenta. Já a menor quantidade da vazão  $F_1$  tende a chegar mais rapidamente ao nível estacionário  $H_6$  no tanque  $T_6$ , pois esta deve passar apenas pelo tanque intermediário  $T_5$ . Isto causa uma grande interação entre as malhas de controle quando são projetados controladores com desempenhos rápidos.



**Figura 3.3:** Representação do processo com interação entre os canais

## 3.2 Modelagem do Processo

A partir da representação gráfica do processo, apresentado na Figura 3.3, é possível desenvolver uma modelagem fenomenológica dessa unidade, de onde, a partir de simples balanços materiais em torno de cada tanque obtém-se o modelo não-linear dado pelas equações a seguir:

$$A_1(h_1) \cdot \frac{dh_1}{dt} = F_1 \cdot (1 - X_1) - CD_1 \cdot \sqrt{h_1} \quad (3.1)$$

$$A_2(h_2) \cdot \frac{dh_2}{dt} = CD_1 \cdot \sqrt{h_1} + F_2 \cdot X_2 - CD_2 \cdot \sqrt{h_2} \quad (3.2)$$

$$A_3(h_3) \cdot \frac{dh_3}{dt} = CD_2 \cdot \sqrt{h_2} - CD_3 \cdot \sqrt{h_3} \quad (3.3)$$

$$A_4(h_4) \cdot \frac{dh_4}{dt} = F_2 \cdot (1 - X_2) - CD_4 \cdot \sqrt{h_4} \quad (3.4)$$

$$A_5(h_5) \cdot \frac{dh_5}{dt} = CD_4 \cdot \sqrt{h_4} + F_1 \cdot X_1 - CD_5 \cdot \sqrt{h_5} \quad (3.5)$$

$$A_6(h_6) \cdot \frac{dh_6}{dt} = CD_5 \cdot \sqrt{h_5} - CD_6 \cdot \sqrt{h_6} \quad (3.6)$$

Onde  $h_i$  representa o nível referente ao tanque  $i$ ,  $F_1$  e  $F_2$  são as vazões manipuladas do modelo,  $X_1$  e  $X_2$  são as constantes de fracionamento das correntes, e  $A_i$  representa a área transversal para o tanque  $i$ , considerando que este mesmo tanque tem o formato de uma esfera perfeita.

A expressão para o cálculo desta área transversal ( $A_i$ ) é dada pela Equação 3.7:

$$A_i(h_i) = \pi \cdot h_i \cdot (D_i - h_i) \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Parâmetros do Modelo

Para o total conhecimento deste modelo de processo resta ainda se determinar alguns parâmetros que devem ser obtidos através de alguma forma de medição, sendo estes, os diâmetros e os coeficientes de descargas dos tanques.

Os diâmetros dos tanques foram facilmente obtidos com o auxílio de uma trena, de onde se retiraram as circunferências internas na região central dos tanques, e apesar de algumas diferenças milimétricas, todos os tanques apresentaram diâmetro aproximado igual a 22,5 cm.

Já os coeficientes de descarga dos tanques ( $CD_i$ ) são importantes parâmetros deste modelo, sendo função tanto do diâmetro das conexões e tubulações que unem os tanques quanto também possuem alguma dependência em relação aos próprios níveis de operação. Embora estes parâmetros sejam reconhecidos como variantes de acordo com a região de operação, os mesmos foram adotados como constantes e obtidos através do procedimento que será relatado a seguir.

Uma maneira de estimar os coeficientes de descarga é através da obtenção de níveis e vazões estacionárias. Desta forma, pôde-se aplicar um balanço de massa sem acúmulo e determinar os coeficientes de descarga pela Equação 3.8.

$$CD_i = \frac{F_{iss}}{\sqrt{H_{iss}}} \quad (3.8)$$

Onde  $F_{iss}$  é a vazão estacionária de entrada do tanque  $i$  e  $H_{iss}$  é o nível estacionário do tanque  $i$ .

Para que se chegasse a um valor constante e confiável, fez-se uso de uma seqüência de pontos estacionários dentro da faixa de operação aproximada de cada tanque. Para manter níveis em seus valores estacionários, utilizaram-se controladores Proporcionais – Integrais (PI's), sintonizados manualmente com  $Kc = 1,5\text{cm} / L / \text{min}$  e  $Ti = 150\text{s}$ , conforme discutido em detalhes na Seção 3.3.2. A partir dos valores calculados para estas faixas de operação, fez-se a média dos coeficientes de descarga encontrados, para resultar em um valor único para cada tanque.

A Tabela 3.2 traz os dados de níveis e vazões estacionários utilizados para calcular os coeficientes de descarga dos tanques superiores, enquanto que a Tabela 3.3 traz os dados para se determinar os coeficientes de descarga dos tanques intermediários.

**Tabela 3.2:** Dados para obtenção dos coeficientes de descarga dos tanques superiores

Coeficientes de Descarga dos Tanques Superiores						
		Tanque 1			Tanque 4	
<i>Set</i>	Vazão	Nível	Coeficientes	Vazão	Nível	Coeficientes
<i>Points de</i>	Estacionária	Estacionário	de Descarga	Estacionária	Estacionário	de Descarga
<i>Nível</i>	[L/min]	[cm]	[L/min.cm <sup>1/2</sup> ]	[L/min]	[cm]	[L/min.cm <sup>1/2</sup> ]
[cm]						
4	1,448	3,93	0,7300	1,692	4,05	0,8407
5	1,717	4,97	0,7704	1,949	4,94	0,8772
6	2,136	5,96	0,8749	2,089	5,98	0,8544
7	2,331	6,89	0,8877	2,149	6,98	0,8135
8	2,282	7,90	0,8119	2,289	8,01	0,8090
9	2,427	8,98	0,8100	2,323	9,01	0,7737
10	2,643	9,90	0,8401	2,409	10,02	0,7608
	Coeficiente de Descarga		0,8179	Coeficiente de Descarga		0,8185
	Médio ( $CD_1$ )			Médio ( $CD_4$ )		

**Tabela 3.3:** Dados para obtenção dos coeficientes de descarga dos tanques intermediários

Coeficientes de Descarga dos Tanques Intermediários						
		Tanque 2			Tanque 5	
<i>Set</i>	Vazão	Nível	Coeficientes	Vazão	Nível	Coeficientes
<i>Points de</i>	Estacionária	Estacionário	de Descarga	Estacionária	Estacionário	de Descarga
<i>Nível</i>	[L/min]	[cm]	[L/min.cm <sup>1/2</sup> ]	[L/min]	[cm]	[L/min.cm <sup>1/2</sup> ]
[cm]						
13	3,477	13,00	0,9644	3,4395	12,9941	0,9542
14	3,628	13,99	0,9699	3,5727	14,0061	0,9546
15	3,722	14,99	0,9614	3,7275	14,9700	0,9634
16	3,763	15,98	0,9414	3,8477	15,9772	0,9626
17	3,928	17,00	0,9527	3,9687	17,0087	0,9623
18	4,054	18,05	0,9542	4,0716	18,0005	0,9597
	Coeficiente de Descarga		0,9573	Coeficiente de Descarga		0,9595
	Médio ( $CD_2$ )			Médio ( $CD_5$ )		

Os coeficientes de descarga dos tanques inferiores foram obtidos pelo uso de resultados do sistema atuando com controlador preditivo baseado em modelo (MPC). O nível estacionário adotado para a obtenção destes parâmetros foi de 11 cm, por se tratar da região intermediária e centralizar a faixa de operação do processo. Os resultados dos coeficientes de descarga encontrados para os tanques  $T_3$  e  $T_6$  encontram-se na Tabela 3.4, a seguir:

**Tabela 3.4:** Dados para obtenção dos coeficientes de descarga dos tanques inferiores

Coeficientes de Descarga dos Tanques Inferiores						
		Tanque 3			Tanque 6	
<i>Set</i>	Vazão	Nível	Coeficientes	Vazão	Nível	Coeficientes
<i>Points</i>	Estacionária	Estacionário	de Descarga	Estacionária	Estacionário	de Descarga
<i>de</i>	[L/min]	[cm]	[L/min.cm <sup>1/2</sup> ]	[L/min]	[cm]	[L/min.cm <sup>1/2</sup> ]
<i>Nível</i>						
[cm]						
11	3,5422	11,00	1,0680	3,7412	11,00	1,1280

Com base nesta modelagem fenomenológica dada pelas Equações de 3.1 a 3.7 e com os parâmetros obtidos de forma empírica, foi possível a construção de um modelo não-linear utilizado como base para as aplicações do Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF).

Esta modelagem também serviu como referência para a obtenção de um modelo linearizado, em espaço de estado, para o ponto de operação estacionário ( $H_3 = 11\text{cm}$  e  $H_6 = 11\text{cm}$ ), para a aplicação do controlador preditivo apresentado no Capítulo 5.

Já, para os testes de ajuste de parâmetros dos estimadores de estados (*off-line*), apresentados no Capítulo 4, foram utilizados dados de processo em que os resultados foram gerados a partir de um controlador MPC com o emprego de um modelo identificado, como descrito a seguir.

### 3.3 Identificação de Modelo Para o Projeto do Controlador

A maioria das técnicas para projeto de sistemas de controle avançados de processos está associada a uma boa compreensão da planta sob estudo, envolvendo o efeito que alterações externas (variáveis manipuladas e distúrbios) e internas (variáveis de estado e parâmetros) causam em sua dinâmica (Assis, 1996).

No entanto, para um número significativo de processos, a planta a ser controlada possui características bastante complexas, podendo diferir muito seu comportamento dos modelos físicos fenomenológicos (Assis, 1996). Neste sentido, torna-se vantajoso o uso de técnicas de identificação de comportamento da planta, mediante uma perturbação estimulada.

A identificação de sistemas consiste na estimativa de um modelo baseado em dados fornecidos de entrada e dados observados de saída do processo (Machado, 2004).

Um modelo identificado para a *Planta de Seis Tanques Esféricos* foi utilizado para determinar o projeto do controlador MPC, o qual foi utilizado para gerar os dados de processo, apresentados no Capítulo 4.

### 3.3.1 Metodologia de Identificação

Existem diversas formas de descrever um sistema, existindo igualmente diversas formas de estimar o melhor modelo, envolvendo algumas etapas fundamentais, sumarizadas a seguir (Aguirre, 2004):

1. Projeto de um experimento contendo a escolha e seqüência de perturbações dos dados de entrada que irão melhor descrever o processo, juntamente com os dados mensurados de saída.
2. Exame crítico, análise e filtragem dos dados disponíveis.
3. Seleção e definição de uma estrutura de modelo que melhor se aproxima das características observadas.
4. Ajuste de parâmetros do modelo selecionado.
5. Exame crítico das propriedades e validação do modelo obtido.
6. Se o modelo consegue ser representativo ao sistema em questão, a identificação termina aqui; se não, retorna-se a etapa 3.

Baseado no algoritmo acima descrito foi possível desenvolver a etapa de identificação para a *Planta de Seis Tanques Esféricos*.

Para gerar o modelo identificado, foram escolhidas perturbações do tipo degrau sobre as vazões de entrada  $F_1$  e  $F_2$ . Este tipo de estímulo é caracterizado pela mudança abrupta no valor da variável manipulada e traz consigo a grande vantagem de ser de fácil execução e identificação. Algumas outras técnicas de planejamento de perturbações e modelos para identificação de sistemas podem ser encontradas em Machado (2004).

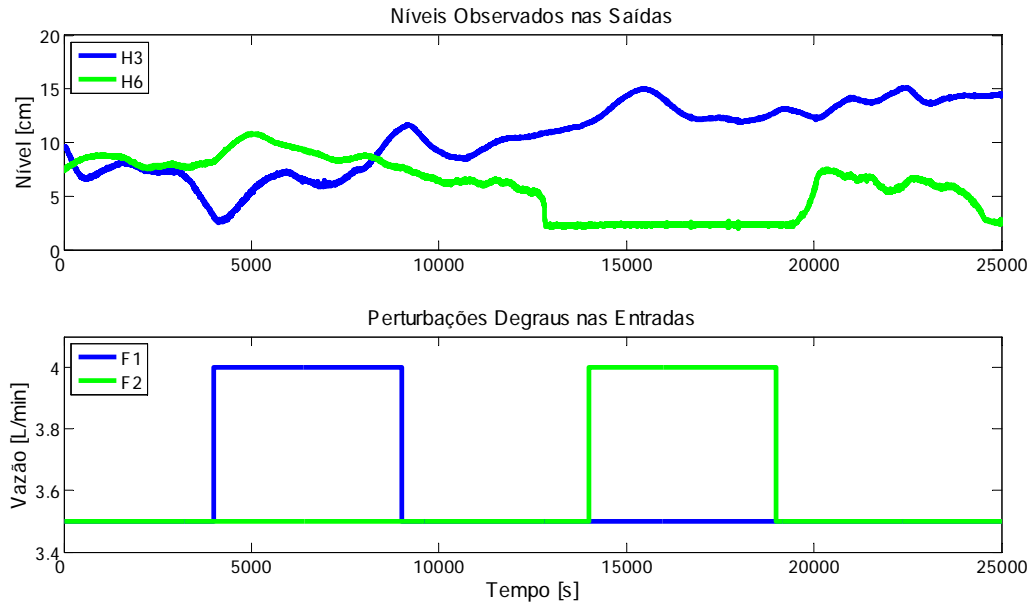
Antes de estabelecer uma seqüência padrão de estímulos sobre a planta, realizou-se apenas um teste perturbação correspondendo a um passo de subida e outro de descida sobre cada variável manipulada, separadamente. A intenção inicial deste curto planejamento experimental era de se obter informações sobre as regiões operacionais da planta e observar o tempo de resposta do sistema.

Logo nas primeiras tentativas, no entanto, pôde-se perceber que o processo apresentava um comportamento completamente caótico. As variáveis de saídas,  $H_3$  e  $H_6$ , não conseguiam alcançar os estados estacionários em nenhum momento, independente do tempo que se mantinham constantes as variáveis manipuladas.

Mesmo admitindo a influência de possíveis distúrbios não mensurados, tal comportamento não era esperado. As variações de amplitude destes níveis compreendiam valores que iam desde o completo enchimento ao total esvaziamento dos tanques, e na maioria das vezes, respondiam de forma inversa à esperada para uma excitação aplicada.

A Figura 3.4 exemplifica o comportamento encontrado para estes diversos experimentos realizados, na qual são visíveis estas falhas ocorridas na *Planta de Seis Tanques Esféricos*. Nesta figura nota-se, por exemplo, que desde o início do experimento até o seu final, houve uma oscilação freqüente sobre o nível do tanque  $T_3$ .

Ainda na Figura 3.4, observa-se também que no período aproximado de 13000 a 18000 segundos, houve um esvaziamento repentino do nível no tanque  $T_6$ , e depois mais adiante, no período aproximado de 18000 a 25000 segundos, o ressurgimento deste nível  $H_6$ . Porém, cabe salientar que nestas faixas de tempo a resposta foi exatamente inversa à perturbação aplicada em  $F_2$ , vazão de que corresponde ao maior ganho estático para este ramo.



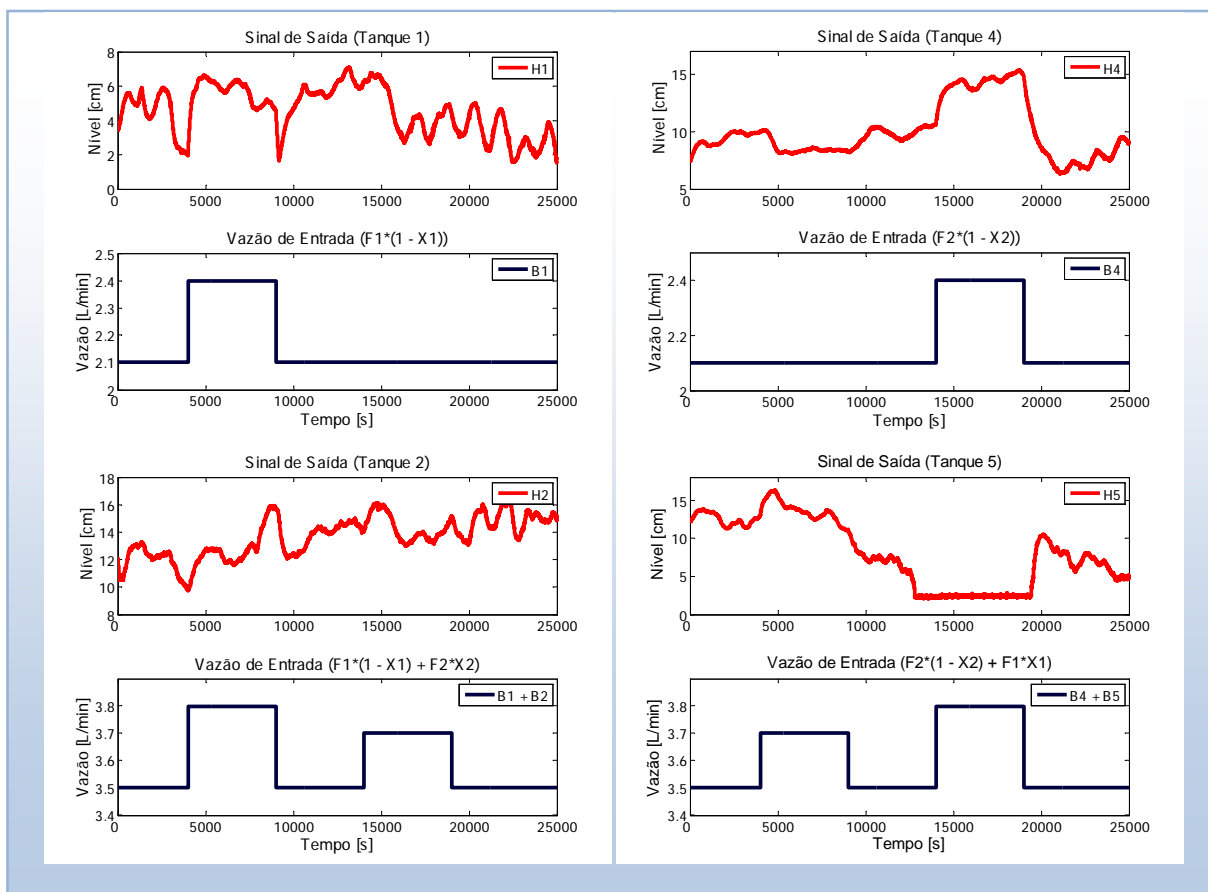
**Figura 3.4:** Perturbação sobre o sistema (saída)

Para que fosse possível realizar uma análise deste comportamento caótico sobre as saídas, e assim entender o motivo de tal problema, é necessário observar os outros níveis (superiores e intermediários).

O que se pode analisar ao observar a Figura 3.5, é que os níveis dos tanques superiores e intermediários variaram consideravelmente durante todo este experimento. Destaca-se aqui, que grande parte da causa dos distúrbios do ramo esquerdo foi por influência de bruscas oscilações da bomba  $B_1$ , e assim, o nível do tanque  $T_2$  oscilou praticamente na mesma frequência. Já no ramo direito, destaca-se que a principal causa do comportamento impróprio foi ocasionada pelo desligamento da bomba de alimentação do tanque  $T_5$ .

Conclui-se então, que o comportamento das saídas,  $H_3$  e  $H_6$ , é apenas um reflexo das causas ocorridas nesses níveis (superiores e intermediários), com um atraso de transporte intrínseco do processo.





**Figura 3.5:** Perturbação sobre o sistema (estados)

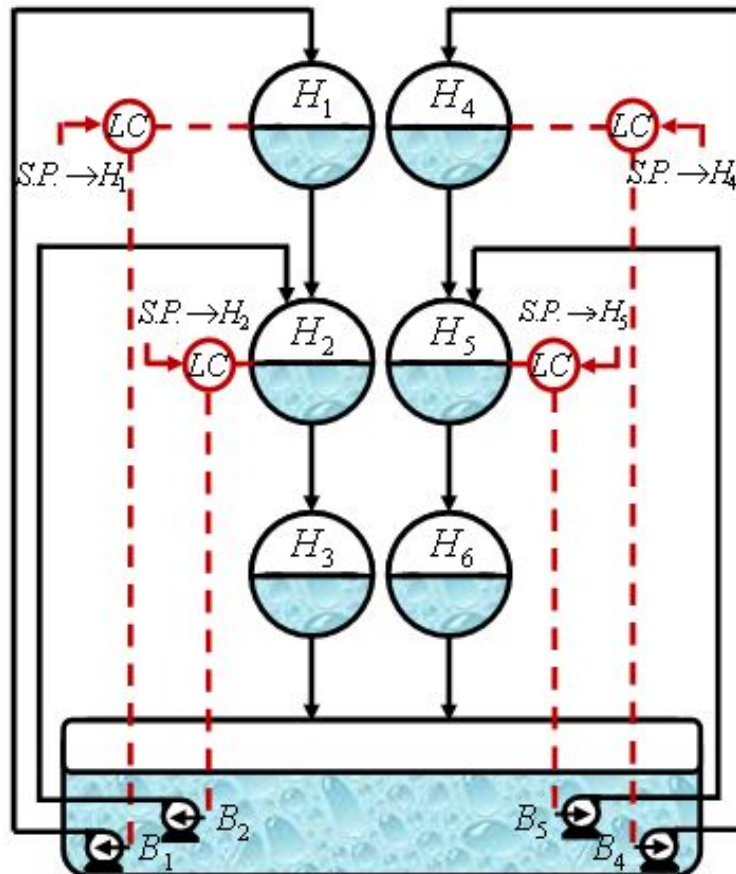
É importante ressaltar, sobretudo, que nenhuma das bombas utilizadas nesse processo teve um comportamento adequado. Nenhuma delas conseguiu manter uma vazão constante por muito tempo. Este efeito indesejável é plenamente justificável pelo fato destas mesmas bombas não terem sido fabricadas com o intuito de operar em diversas faixas de vazão.

Para resolver este problema de forma rápida e viável, a solução encontrada foi implementar um sistema de controladores cascata para os tanques superiores e intermediários. Assim, ao invés do controlador dos níveis inferiores atuar manipulando diretamente as vazões  $F_1$  e  $F_2$ , este atua como um controlador mestre informando os controladores escravos da malha cascata sobre os *set points* de nível. Esta adaptação é possível uma vez que para cada vazão de entrada do processo existe um nível estacionário correspondente, para cada tanque.

A Seção 3.3.2 destina-se a apresentar o sistema através desta adaptação de controladores cascata bem como a obtenção de um modelo identificado para o projeto do controlador mestre.

### 3.3.2 Sistema Adaptado com Malha Cascata

A implementação desta malha cascata foi realizada através do software Simulink do Matlab®, e consiste de quatro controladores Proporcionais – Integrais (PI's). A Figura 3.6 demonstra uma representação da unidade, com o uso destes controladores escravos.



**Figura 3.6:** Representação do processo com adaptação cascata

As bombas apresentam uma grande incerteza em relação à vazão que efetivamente estão alimentando, uma vez que estas são pequenas bombas centrífugas cuja fabricação propunha a operação com tensão constante, enquanto que na *Planta de Seis Tanques Esféricos* a tensão de alimentação é variada visando à modificação de vazão. Embora tais bombas tenham sido calibradas individualmente, esta calibração que converte a tensão em vazão não é válida quando se opera com todas as bombas simultaneamente. Visando reduzir esta enorme incerteza, optou-se por implementar malhas cascatas. Como esta planta não possui medidores de vazão, optou-se por controlar os níveis, os quais estão associados às vazões através das soluções estacionárias. A implementação dessas malhas permitiu que a planta pudesse ser operada satisfatoriamente e, acima de tudo, de forma reproduzível.

Estes controladores PI's utilizados nas malhas cascatas seguem a parametrização padrão (Dwyer, 2006), ou seja:

$$\Delta u(s) = Kc \cdot \left\{ erro(s) + \frac{erro(s)}{Ti \cdot s} \right\} \quad (3.9)$$

Onde  $\Delta U(s)$  é a variação da vazão manipulada de cada uma das bombas,  $erro(s)$  é a diferença entre o valor de *set point* de nível e o valor real da variável controlada,  $Ti$  é o tempo integral ou também chamado *reset time*,  $Kc$  é o ganho do controlador, e  $s$  representa a variável oriunda da transformada de Laplace.

Os dois parâmetros de ajuste destes controladores,  $Kc$  e  $Ti$ , foram inicialmente planejados para serem obtidos através do Método de Síntese Direta. A grande vantagem da utilização deste método é que este se baseia no princípio de conhecimento da resposta em malha fechada que se deseja alcançar (Trierweiler e Posser, 2002). A idéia inicial era obter um modelo identificado de primeira ordem com tempo morto para cada tanque, em malha aberta, e através deste, selecionar a constante de tempo do filtro de primeira ordem ( $\lambda$ ) que tornasse o sistema adaptado com dinâmica aproximada ao do processo sem os controladores cascata. Esta constante de tempo ( $\lambda$ ) representa a velocidade que o sistema deverá ter em malha fechada, consistindo dessa forma em um parâmetro que estabelece o compromisso entre robustez e desempenho (Trierweiler e Posser, 2002). As Equações 3.10 e 3.11 estabelecem os cálculos de  $Kc$  e  $Ti$  para o Método da Síntese Direta, respectivamente.

$$Kc = \frac{\tau}{K \cdot (\lambda + \phi)} \quad (3.10)$$

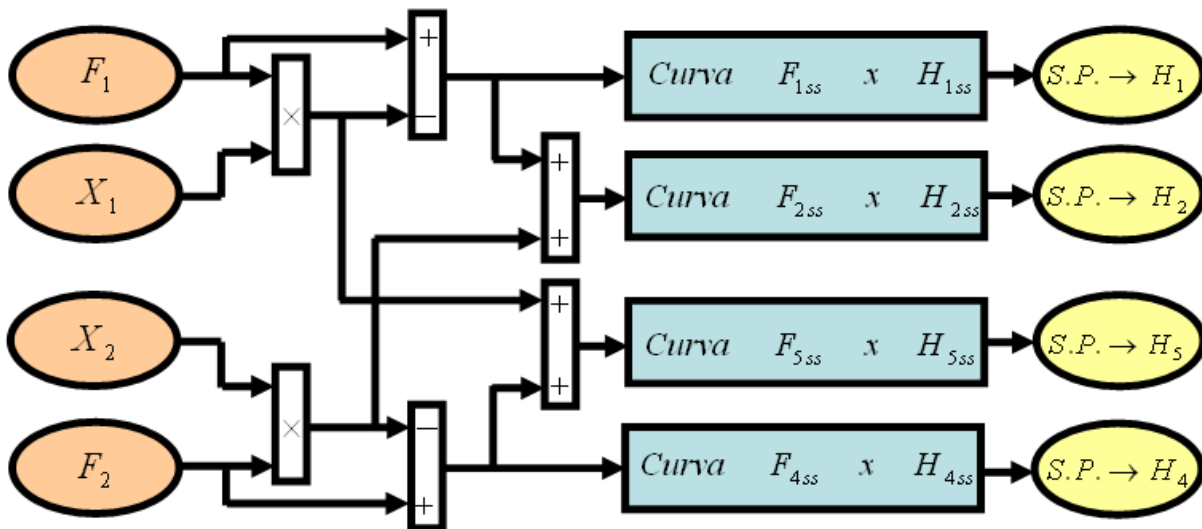
$$Ti = \tau \quad (3.11)$$

O processo é descrito por uma função de 1ª ordem com tempo morto e tem como parâmetros, o ganho estacionário  $K$ , a constante de tempo  $\tau$  e o tempo morto  $\phi$ .

Esta tentativa de ajuste foi planejada e citada nessa dissertação como forma de justificar que a intenção não era alterar a dinâmica natural do processo pela presença deste sistema cascata. Porém, devido as já citadas oscilações bruscas ocasionadas na planta, não foi possível determinar o comportamento através de identificação.

Assim, estes controladores foram sintonizados manualmente, baseados em método de tentativa e erro. O ajuste de ganho foi realizado para que se obtivesse um valor que fosse suficiente para suprir às falhas das bombas rapidamente sem, no entanto, gerar instabilidade. E o ajuste de tempo integral foi feito para que se evitasse o surgimento de *off sets*, porém que não produzisse tanta sobre-elevação (*overshoot*) no sistema. Logo, após algum ajuste manual, determinou-se que todas as malhas seriam sintonizadas com valores de  $Kc = 1,5\text{cm}/L/\text{min}$  e  $Ti = 150\text{s}$ .

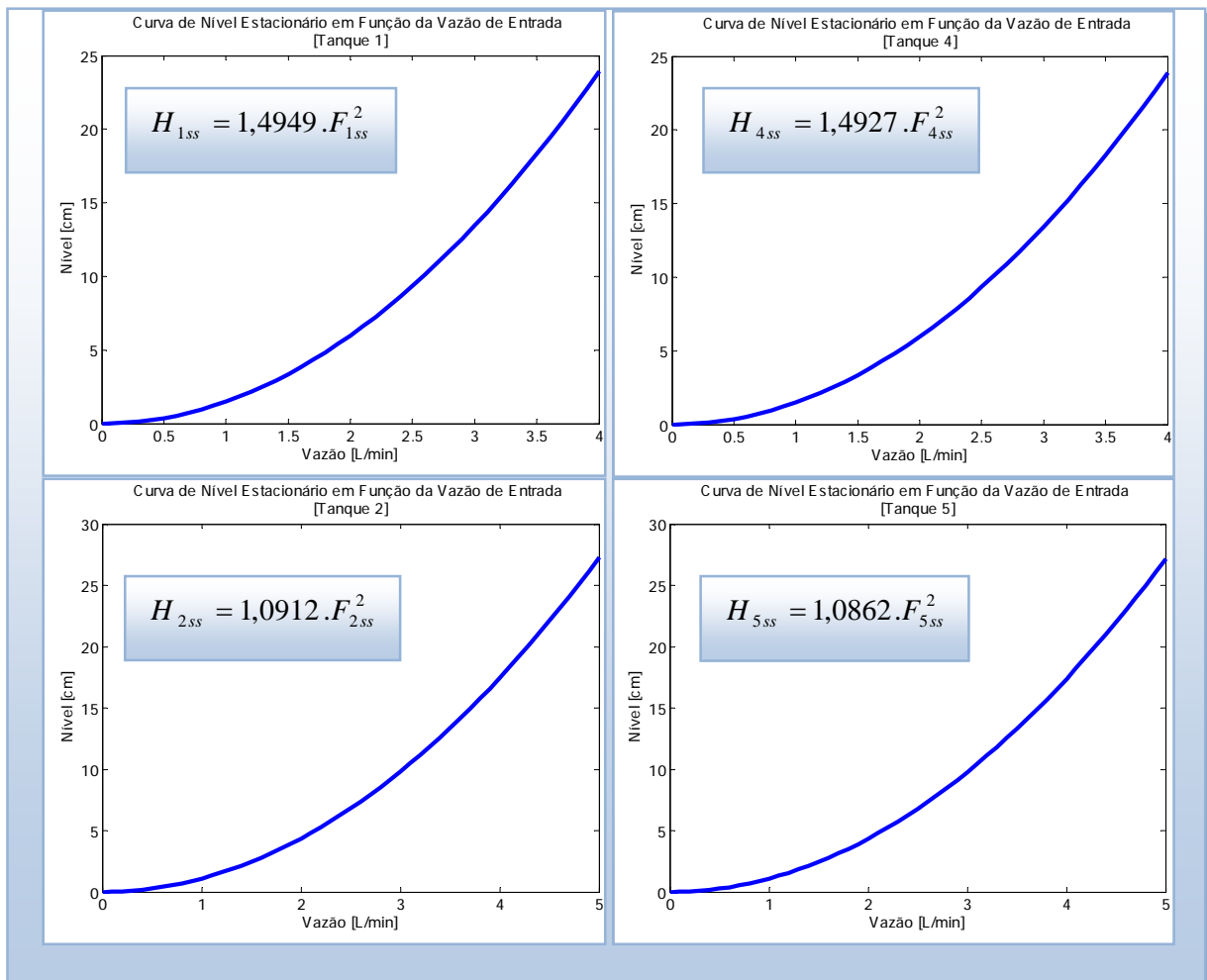
Para que esta adaptação viesse a funcionar na prática e o sistema de controle da malha externa (constituído de um MPC para controle dos níveis inferiores) pudesse informar os controladores PI's da malha interna (controle dos níveis superiores e intermediários) sobre os *set points* de níveis, foi necessária a construção de funções que relacionassem as vazões de entrada de cada tanque ( $F_{iss}$ ) pelo nível estacionário dos mesmos ( $H_{iss}$ ), onde  $i$  representa o número do tanque de interesse. A Figura 3.7 demonstra a implementação adaptada no software Simulink.



**Figura 3.7:** Bloco com as curvas de conversão em *set points* de nível

As curvas de conversão de vazão em nível foram geradas a partir do conhecimento dos coeficientes de descarga de cada tanque, calculados na Seção 3.2.2. Assim, para os pontos estacionários, foram construídas as curvas apresentadas na Figura 3.8 relacionando o nível com a vazão através da Equação 3.12, como pode ser visualizado a seguir.

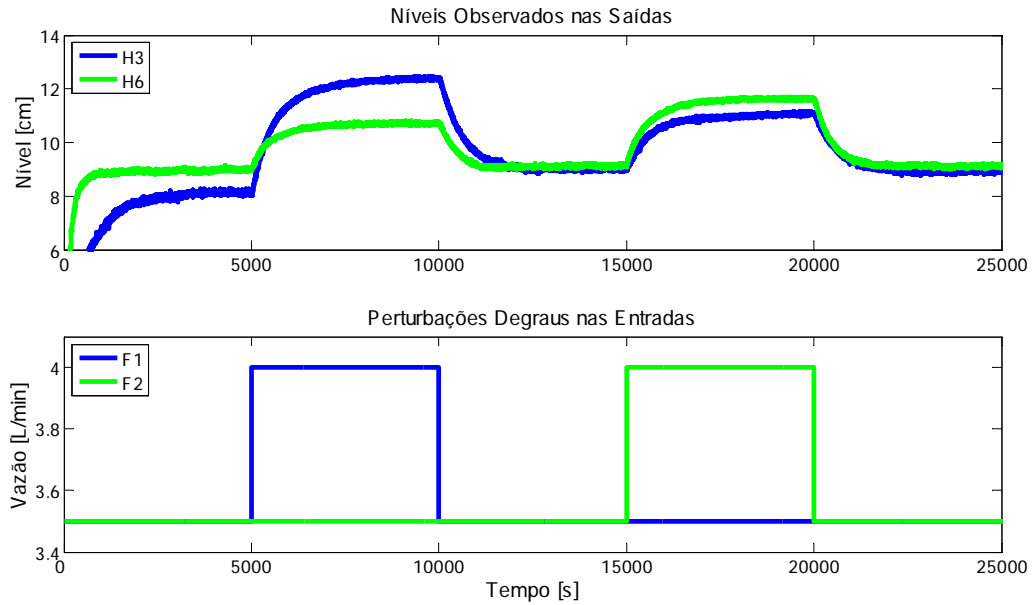
$$H_{iSS} = \left( \frac{1}{CD_1} \right)^2 \cdot F_{iSS}^2 \quad (3.12)$$



**Figura 3.8:** Curvas de conversão de vazão em *set points* de nível

De posse destas curvas de conversão de vazão em nível e, juntamente com a malha interna adaptada, foi possível partir para a etapa de identificação do novo sistema.

Foram realizados a princípio, testes experimentais semelhantes ao citado para o sistema sem a malha cascata como forma de se obter as faixas de vazão das variáveis manipuladas e o tempo de resposta do sistema, para que se operasse na região intermediária dos tanques inferiores. Esta região corresponde ao nível de 11 cm com variações de 2 cm para cima e para baixo. A Figura 3.9 demonstra um destes testes na qual se determinou que a faixa de vazão para os testes de identificação corresponderia a valores entre 3,5 e 4 L/min, e o tempo de assentamento mínimo para um degrau de 0,5 L/min em uma das variáveis manipuladas fosse de 5000 segundos.



**Figura 3.9:** Determinação das regiões operacionais do processo

Comparando os resultados mostrados na Figura 3.9 com os da Figura 3.4, pode-se facilmente concluir que a implementação das malhas cascata permitiu que o sistema apresentasse um comportamento reproduzível.

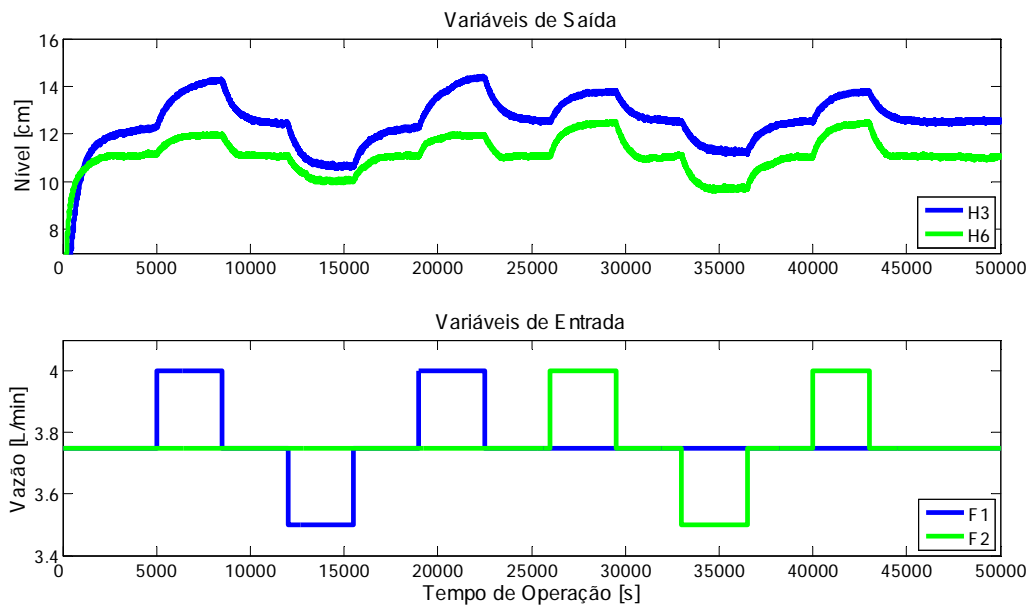
A partir do conhecimento desses limites operacionais da *Planta de Seis Tanques Esféricos* é possível estabelecer um planejamento de perturbações tipo degrau sobre as variáveis manipuladas. Esta escolha baseou-se no fato de que segundo Machado (2004), geralmente na indústria de processos, a perturbação degrau é feita no mínimo duas vezes, em sentidos opostos, para minimizar a variabilidade da variável observada durante o teste de identificação.

A seqüência de estímulos para o sistema pode ser observada através da Tabela 3.5. Evidencia-se que as perturbações ocorreram de forma independente, sendo realizadas primeiramente para a vazão  $F_1$  e posteriormente para a vazão  $F_2$ .

**Tabela 3.5:** Dados para identificação do sistema

Excitação do Sistema		
Tempo [s]	F1 [L/min]	F2 [L/min]
0 – 4999	3,75	3,75
5000 – 8499	4,00	3,75
8500 – 11999	3,75	3,75
12000 – 15499	3,50	3,75
15500 – 18999	3,75	3,75
19000 – 22499	4,00	3,75
22500 – 25999	3,75	3,75
26000 – 29499	3,75	4,00
29500 – 32999	3,75	3,75
33000 – 36499	3,75	3,50
36500 – 39999	3,75	3,75
40000 – 43499	3,75	4,00
43500 – 50000	3,75	3,75

Através da Figura 3.10, demonstra-se o resultado das perturbações sobre ambas as variáveis de saída do processo.

**Figura 3.10:** Resposta do sistema à perturbação degrau

Ao realizar uma rápida análise deste teste comparando cada sinal de entrada aplicado em relação às duas saídas, é possível afirmar que houve uma maior variação do nível  $H_3$  quando se alterou a vazão  $F_1$ , enquanto que uma maior variação do nível  $H_6$  ocorreu quando

se fez variar a vazão  $F_2$ . Esta relação de ganhos já era esperada visto que os valores dos coeficientes de fracionamento  $X_1$  e  $X_2$  são iguais a 0,4. Entretanto, ao observar todo o experimento realizado, nota-se que ao nível  $H_3$  tenha compreendido a maior faixa de variação em amplitude e, ao nível  $H_6$  tenha compreendido uma menor constante de tempo para alcançar o estado estacionário. Ao realizar uma análise mais aguçada, cabe salientar que tanto o ganho estacionário quanto a resposta dinâmica do processo estão intimamente ligados à região operacional onde estes níveis se encontram, devido à geometria esferóides dos tanques. Estas características refletem a necessidade de um bom modelo identificado sobre a região operacional da planta, para que o sistema de controle multivariável funcione adequadamente.

Após a etapa onde se realizou a seqüência de estímulos sobre a planta laboratorial, pôde-se partir para o processo de identificação do modelo, o qual foi realizado através do programa Ident do Matlab.

A identificação iniciou-se pela seleção das faixas de dados onde o comportamento do sistema foi mais representativo a perturbação efetuada, para cada canal. Puderam-se também filtrar os dados para eliminar ruídos de elevada frequência e ainda remover a média dos sinais medidos para analisar a variação dos níveis sobre os degraus no sentido de subida e descida.

Para todas as identificações utilizaram-se aproximações por funções de primeira ordem com tempo morto dada a grande simplicidade e relativa qualidade dos modelos gerados. Esta função de transferência caracteriza-se pela presença de um pólo negativo e um atraso de transporte como pode ser visualizada pela Equação 3.13:

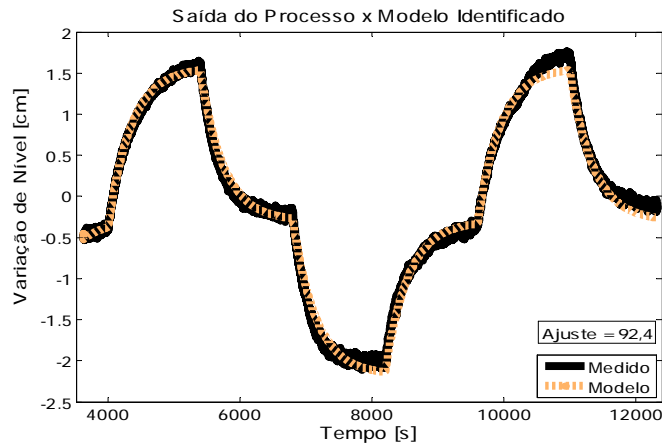
$$G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \cdot \exp(-\theta \cdot s) \quad (3.13)$$

Onde  $K$  é o ganho do processo,  $\tau$  é a constante de tempo e  $\theta$  é o atraso de transporte do processo.

A Figura 3.11 e a Figura 3.14 demonstram os conjuntos de dados selecionados e filtrados, utilizados para identificação do modelo de primeira ordem envolvendo as duas entradas e as duas saídas do processo.



- Identificação  $F_1xH_3$

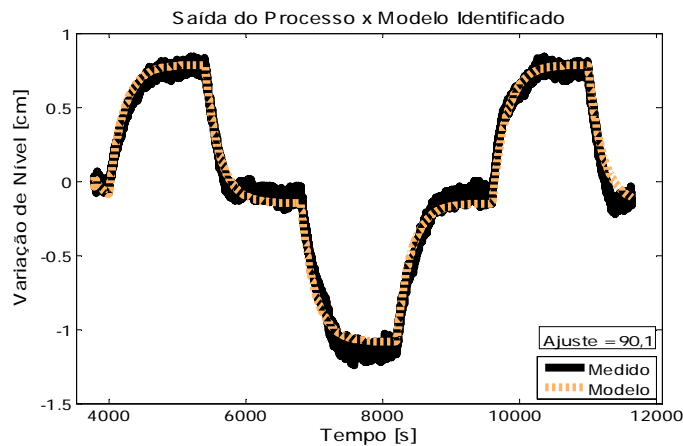


**Figura 3.11:** Identificação do canal  $F_1xH_3$

A função de transferência resultante desta identificação é dada por:

$$G(s) = \frac{7,4962}{881,21.s + 1} \cdot \exp(-9,40.s) \quad (3.14)$$

- Identificação  $F_1xH_6$

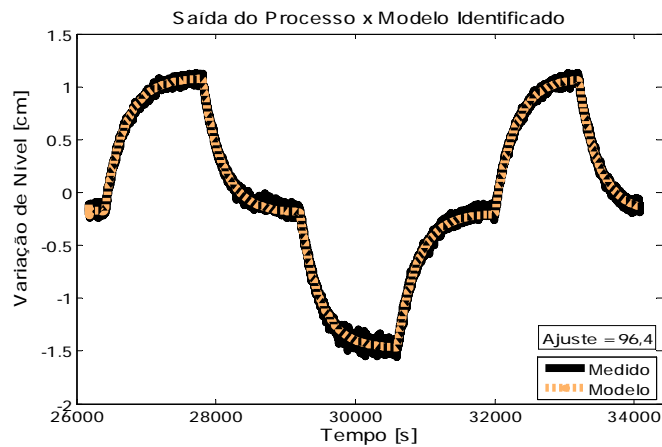


**Figura 3.12:** Identificação do canal  $F_1xH_6$

A função de transferência resultante desta identificação é dada por:

$$G(s) = \frac{3,7474}{518,74.s + 1} \cdot \exp(-5,15.s) \quad (3.15)$$

- Identificação  $F_2 \times H_3$

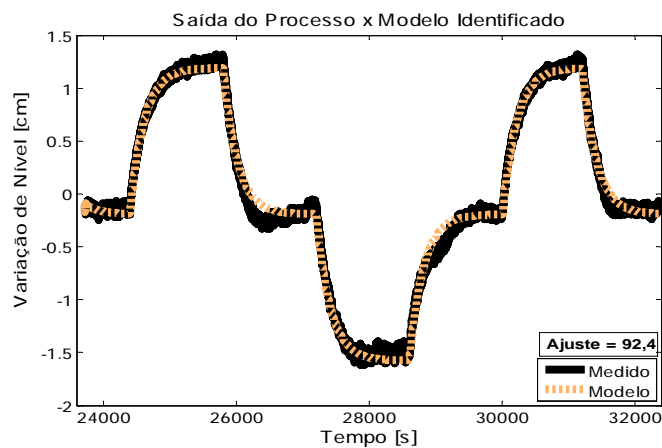


**Figura 3.13:** Identificação do canal  $F_2 \times H_3$

A função de transferência resultante desta identificação é dada por:

$$G(s) = \frac{5,1308}{722,77.s + 1} \cdot \exp(-7,18.s) \quad (3.16)$$

- Identificação  $F_2 \times H_6$



**Figura 3.14:** Identificação do canal  $F_2 \times H_6$

A função de transferência resultante desta identificação é dada por:

$$G(s) = \frac{5,5388}{530,22.s + 1} \cdot \exp(-8,22.s) \quad (3.17)$$

Ao se analisar os modelos identificados, obtidos para cada canal, percebem-se que as funções de transferência entre as vazões de entradas,  $F_1$  e  $F_2$ , e o nível da saída,  $H_3$ , tiveram fatores de ajuste um pouco maiores quando comparados com as funções de transferência em relação ao nível da saída,  $H_6$ . Este ajuste, o qual é o método empregado pelo *software* Ident do Matlab, é dado pela Equação 3.18 e significa a proporção de variação das medições que pode ser representada pelo modelo identificado. O índice de ajuste varia na escala de zero a cem por cento, e indica que o melhor modelo é aquele que apresenta o maior ajuste.

$$Ajuste = \left[ \frac{1 - norma(y - y_{mod})}{norma(y - média(y))} \right] \cdot 100\% \quad (3.18)$$

Onde  $y$  é o vetor contendo os valores medidos do processo;  $y_{mod}$  é o vetor contendo os valores preditos pelo modelo; e a *norma* é Euclidiana.

Nota-se também que as medições do nível  $H_6$  foram mais suscetíveis a distúrbios não mensurados, o que levou a ter um menor índice de ajuste. Embora isso tenha ocorrido, todos os coeficientes de ajustes dos modelos ficaram acima de 90%, significando um ajuste razoavelmente bom. A seguir, são apresentados os objetivos de estimação para este sistema.

### 3.3.3 Variáveis de Estado

Embora a *Planta de Seis Tanques Esféricos* possibilite a medição dos níveis de todos os tanques, inclusive possibilitando a construção do sistema adaptado com o uso de controladores cascata, do ponto de vista de processos, este sistema pode ser encarado como uma caixa preta, onde os níveis superiores e intermediários são considerados estados não mensurados e os níveis inferiores são as saídas mensuradas.

Em termos de estimação, tem-se:

- Tanques inferiores – compreendem os níveis que se deseja controlar, sendo também os estados medidos do processo.
- Tanques superiores e intermediários – compreendem os níveis internos do sistema, e portanto são considerados, para efeito de teste de estimadores de estados, os estados que serão estimados.

No que tange a aplicação dos estimadores de estados nos Capítulos 4 e 5, consideram-se dois modelos particulares:

O primeiro modelo é a descrição fenomenológica não-linear do processo, apresentado na Seção 3.2 e dado pelas Equações 3.1 a 3.7, o qual será referido como “**Modelo A**”. Este será o modelo-base para as aplicações de estimação de estados na *Planta de Seis Tanques Esféricos*. A intenção de uso deste modelo está em demonstrar que na maioria dos casos de aplicação dos estimadores, a dinâmica real dos estados no processo não é bem compreendida e, apenas se possui uma idéia de modelagem fenomenológica simplificada, baseada em balanços de massa, energia e quantidade de movimento.

Já o segundo, considera um modelo fenomenológico onde o comportamento dinâmico do processo é mais bem compreendido. Este é um modelo mais detalhado, que considera a presença dos controladores PI's da malha cascata em seu equacionamento. Neste modelo, os parâmetros de sintonia dos controladores são os mesmos empregados no processo real. Então, espera-se que desta forma a estimação dos estados não mensurados seja mais próxima dos valores reais. Este modelo será referenciado como “**Modelo B**” e sua descrição é dada pelas seguintes equações a seguir:

$$A_1(h_1) \cdot \frac{dh_1}{dt} = F_1 \cdot (1 - X_1) - CD_1 \cdot \sqrt{h_1} \quad (3.19)$$

$$A_2(h_2) \cdot \frac{dh_2}{dt} = CD_1 \cdot \sqrt{h_1} + F_2 \cdot X_2 - CD_2 \cdot \sqrt{h_2} \quad (3.20)$$

$$A_3(h_3) \cdot \frac{dh_3}{dt} = CD_2 \cdot \sqrt{h_2} - CD_3 \cdot \sqrt{h_3} \quad (3.21)$$

$$A_4(h_4) \cdot \frac{dh_4}{dt} = F_2 \cdot (1 - X_2) - CD_4 \cdot \sqrt{h_4} \quad (3.22)$$

$$A_5(h_5) \cdot \frac{dh_5}{dt} = CD_4 \cdot \sqrt{h_4} + F_1 \cdot X_1 - CD_5 \cdot \sqrt{h_5} \quad (3.23)$$

$$A_6(h_6) \cdot \frac{dh_6}{dt} = CD_5 \cdot \sqrt{h_5} - CD_6 \cdot \sqrt{h_6} \quad (3.24)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{Ti_1} \cdot (H_{1SS} - h_1) \quad (3.25)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{Ti_2} \cdot (H_{2SS} - h_2) \quad (3.26)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \frac{1}{Ti_4} \cdot (H_{4SS} - h_4) \quad (3.27)$$

$$\frac{dI_5}{dt} = \frac{1}{Ti_5} \cdot (H_{5SS} - h_5) \quad (3.28)$$

Onde:

$$H_{1SS} = 1,4949 \cdot B_{1SS}^2 \quad \text{com} \quad B_{1SS} = F_1 \cdot (1 - X_1) \quad (3.29)$$

$$H_{2SS} = 1,0912 \cdot (B_{1SS} + B_{2SS})^2 \quad \text{com} \quad B_{1SS} = F_1 \cdot (1 - X_1) \quad \text{e} \quad B_{2SS} = F_2 \cdot X_2 \quad (3.30)$$

$$H_{4SS} = 1,4927 \cdot B_{4SS}^2 \quad \text{com} \quad B_{4SS} = F_2 \cdot (1 - X_2) \quad (3.31)$$

$$H_{5SS} = 1,0864 \cdot (B_{4SS} + B_{5SS})^2 \quad \text{com} \quad B_{4SS} = F_2 \cdot (1 - X_2) \quad \text{e} \quad B_{5SS} = F_1 \cdot X_1 \quad (3.32)$$

$$B_1 = B_{1SS} + ((H_{1SS} - h_1) + I_1) \cdot Kc_1 \quad (3.33)$$

$$B_2 = B_{2SS} + ((H_{2SS} - h_2) + I_2) \cdot Kc_2 \quad (3.34)$$

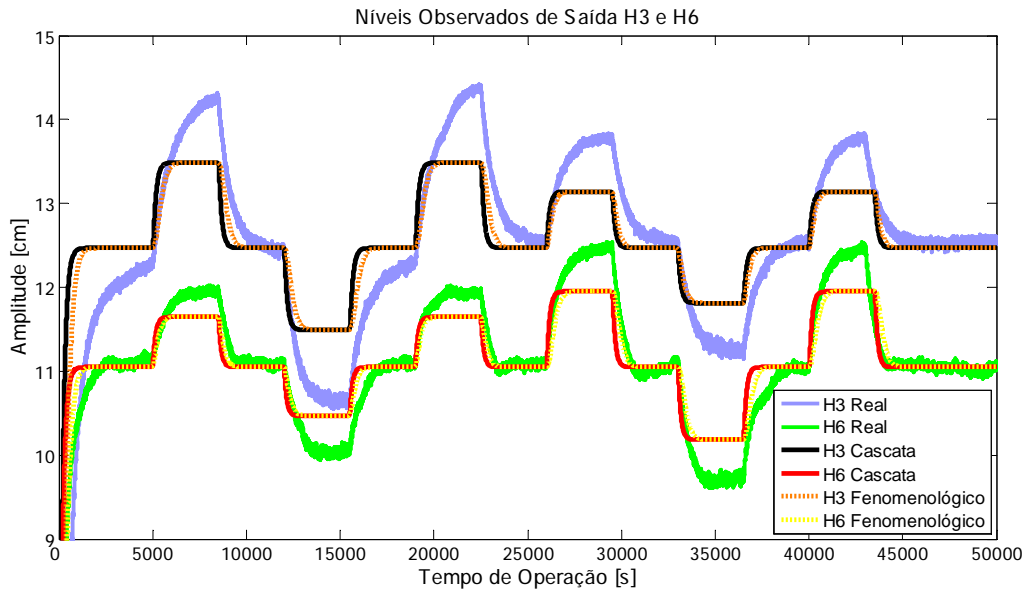
$$B_4 = B_{4SS} + ((H_{4SS} - h_4) + I_4) \cdot Kc_4 \quad (3.35)$$

$$B_5 = B_{5SS} + ((H_{5SS} - h_5) + I_5) \cdot Kc_5 \quad (3.36)$$

### 3.3.4 Validação do Modelo Não-Linear

Embora não se consiga obter um modelo “ideal” para o processo, o modelo não-linear utilizado pelos estimadores deve ser no mínimo representativo ao sistema em sua faixa de operação, na qual os estados possam ser estimados a qualquer instante pelas informações externas disponíveis (variáveis de entradas, saídas e distúrbios).

Uma das formas de determinar se um modelo consegue ser representativo ao processo é realizar uma etapa de validação do modelo. Esta etapa consiste na comparação entre um conjunto de dados obtidos de um experimento prático e a simulação deste modelo, sob as mesmas condições das variáveis de entrada. A Figura 3.15 compara a predição dos modelos não-lineares (“Modelo A” e “Modelo B”), frente aos dados da *Planta de Seis Tanques Esféricos* gerados pela etapa de identificação.

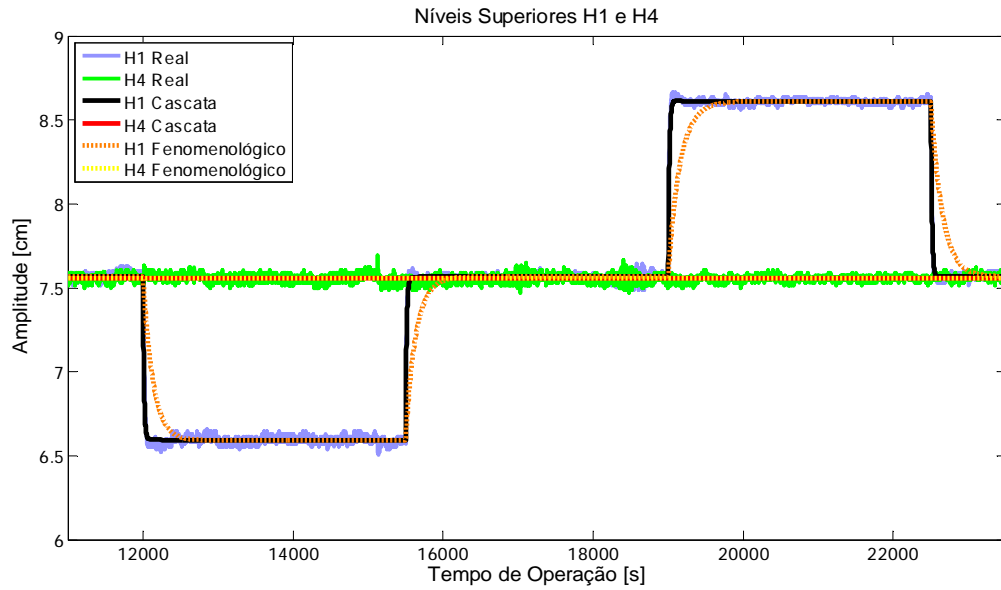


**Figura 3.15:** Validação do modelo para os níveis observados de saída

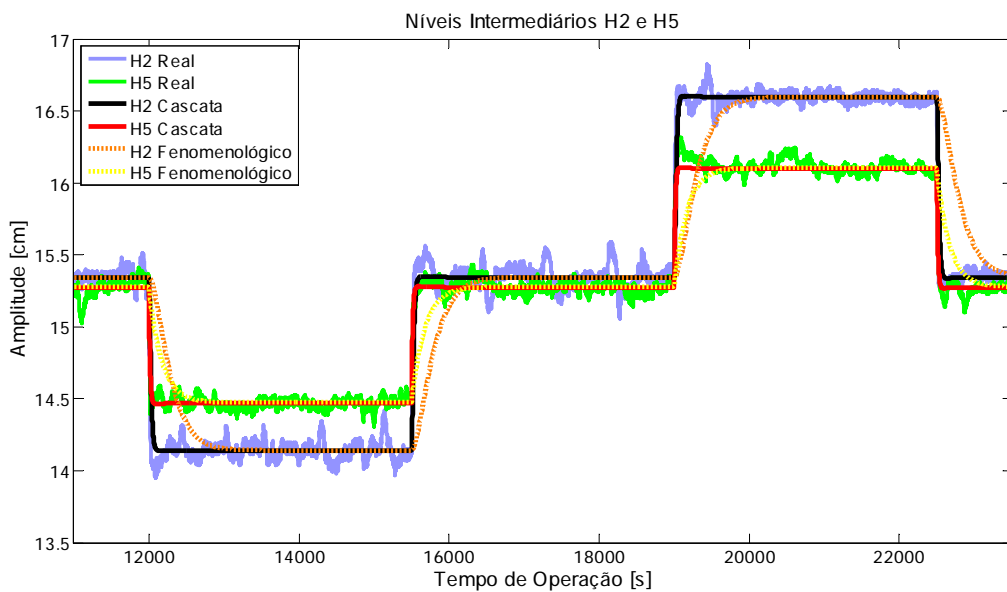
Ao se observar a Figura 3.15, nota-se que ambos os Modelos A e B apresentam uma razoável discrepância em relação à dinâmica real do processo. Esta discrepância torna-se mais acentuada quando a operação da planta toma valores de níveis muito baixos ou elevados. Os tanques  $T_3$  e  $T_6$ , por não possuírem a geometria perfeitamente esférica como consideram os modelos, propiciam erros maiores quanto mais próximos os níveis chegam às extremidades de dimensão desses tanques. Outro importante erro de modelagem está em considerar que os parâmetros de coeficiente de descarga dos tanques são constantes e, na planta, estes são fontes constantes de distúrbios indesejáveis. Além disso, a hipótese da vazão de saída de cada tanque ser proporcional a raiz quadrada do respectivo nível é somente válida para escoamentos turbulentos.

Além destas disparidades encontradas para os níveis inferiores, pode-se observar a validação para os níveis intermediários e superiores, os quais são os objetivos primários de estimação. Uma boa representatividade destes modelos é requerida por parte dos filtros de Kalman, pois estes estimadores possuem em sua primeira etapa a simulação do modelo (etapa de predição). Logo, quanto mais próximo o valor simulado se encontrar do valor real, o algoritmo resultará em uma melhor qualidade dos estados estimados.

A Figura 3.16 demonstra a validação para os tanques superiores e a Figura 3.17 a validação para os tanques intermediários.



**Figura 3.16:** Validação do modelo para os níveis superiores



**Figura 3.17:** Validação do modelo para os níveis intermediários

Ao se observar a Figura 3.16 e a Figura 3.17, nos intervalos que correspondem à operação em regiões de níveis baixos e altos para estes tanques, nota-se claramente que o “Modelo A” apresenta uma dinâmica mais lenta que a dinâmica real do processo, tanto para os níveis superiores quanto para os níveis intermediários. Já o “Modelo B” foi mais representativo para estes estados (níveis superiores e intermediários). Na prática, tal discrepância por parte do “Modelo A” pode conduzir a estados estimados longe do valor real se o estimador for ajustado para ter uma confiança muito elevada no modelo ( $Q \ll R$ ).

### 3.4 Conclusões Parciais do Capítulo 3

Neste capítulo, a *Planta Laboratorial de Seis Tanques Esféricos* foi apresentada.

Também foi demonstrada a implementação do bloco de conversão, que permitiu a distribuição das vazões totais,  $F_1$  e  $F_2$ , através dos dois ramos de tanques, e as quais transformarão a *Planta de Seis Tanques Esféricos* em uma excelente planta para estudos de casos multivariáveis. Foi visto que, desta forma, a planta possui os comportamentos característicos comuns a quaisquer processos reais (como pólos, zeros e atrasos de tempo), possibilitando inclusive a criação de um sistema de fase não mínima, com um forte grau de interação entre as malhas de controle.

Partindo para a prática verificou-se que, embora calibradas individualmente, as bombas instaladas na planta causavam grande incerteza em relação à vazão que efetivamente deveriam fornecer, quando operavam todas juntas. Logo, como solução, optou-se pela criação de uma malha de controladores cascata, para os tanques superiores e intermediários. Essa implementação possibilitou que a planta pudesse ser operada satisfatoriamente e, acima de tudo, de forma reprodutível. A partir deste ponto, determinou-se uma seqüência de estímulos predefinidos e realizou-se a identificação de um modelo para o processo.

No final do capítulo, estabeleceram-se os critérios de escolha das variáveis para estimação. Na *Planta de Seis Tanques Esféricos*, a medição de todos os níveis possibilitou que ambos os modelos fenomenológicos não-lineares, “Modelo A” (simplificado) e “Modelo B” (detalhado), empregados na etapa preditiva do estimador de estados, fossem validados para os seis estados do processo.

Por uma última análise, a *Planta de Seis Tanques Esféricos* mostrou que funciona bem e que pode ser objeto de muitos estudos na área de controle avançado de processos.



## Capítulo 4

# Validação e Ajuste dos Estimadores de Estado

Uma das formas de verificar se os estimadores de estados podem ser eficientes quando aplicados em tempo real no processo, é realizar uma batelada de testes *off-line*, comparando os resultados gerados com dados reais de planta.

Neste capítulo, os algoritmos de estimação, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), são analisados para uma série de dados obtidos da *Planta de Seis Tanques Esféricos*. São efetuados testes relativos à influência de diversos fatores, tais como: testes de estimação em processos que predominam as operações de servocontrole e regulatórias; testes em relação à qualidade do modelo não-linear utilizado por estes filtros; testes de modificação dos parâmetros de ajuste  $P_0$ ,  $Q$  e  $R$ ; e por fim, o estimador de estados será testado frente à alteração do tempo de amostragem.

A eficiência do procedimento de estimação dos estados é realizada comparando estas tecnologias em relação a aspectos como a convergência do método, o tempo computacional requerido e o erro de estimação. Estes testes visam realizar os ajustes mais adequados à implementação dos estimadores no processo em tempo real, a qual será apresentada no Capítulo 5.

É importante salientar que as considerações adotadas para a realização destes testes, a implementação dos algoritmos de controle e estimação, e a análise dos resultados apresentados neste capítulo são de inteira responsabilidade deste autor e limitam-se a aplicação na *Planta Laboratorial de Seis Tanques Esféricos*. Para outros processos, estes critérios devem ser revistos e avaliados caso a caso.

A seguir, na Seção 4.1, são destacadas: a fonte dos dados reais de planta e a sintonia-base dos estimadores de estados.

A obtenção dos dados reais da *Planta de Seis Tanques Esféricos* foi possível somente porque esta planta possui células de carga que permitem a medição dos seis níveis. Estes dados proporcionaram a comparação com os estados estimados que, desta forma, puderam ser validados de forma qualitativa e quantitativa.

Do ponto de vista de estimação, os níveis superiores e intermediários são os estados estimados e os níveis inferiores são os estados filtrados. O modelo não-linear utilizado de base para os testes neste capítulo foi o “**Modelo A**”, apresentado na Seção 3.2 e dado pelas Equações 3.1 a 3.7. Somente na Seção 4.3, onde se verificou a qualidade relativa ao modelo empregado na etapa preditiva do estimador, é que o “**Modelo B**” foi testado. O “Modelo B” foi apresentado na Subseção 3.3.3 e dado pelas Equações 3.19 a 3.36. Ambos os modelos foram testados com a mesma sintonia-base, a qual é apresentada mais adiante na Tabela 4.2.

## 4.1 Fonte de Informações Para os Testes de Estimação

Antes de iniciar os testes envolvendo os algoritmos estimação, torna-se importante destacar a origem dos dados extraídos da planta de estudo de caso, bem como, é relevante apresentar os parâmetros de ajuste dos filtros e as formas de avaliação quantitativa sobre os resultados gerados.

Estes parâmetros de ajuste, apresentados na Seção 4.1, serviram de base para os testes de validação dos estimadores com dados da *Planta de Seis Tanques Esféricos*. Nos casos onde houve o particular interesse em estudar a mudança de algum desses parâmetros, então, o novo valor é relatado e justificado na própria seção designada.

### 4.1.1 Dados da Planta Laboratorial

Para a realização dos testes de estimação neste capítulo, todos os conjuntos de dados reais da planta apresentados, foram gerados pela implementação de um sistema de controle MPC na Plataforma Simulink do *software* Matlab<sup>®</sup>. Nestes experimentos de controle, os níveis dos tanques inferiores,  $H_3$  e  $H_6$ , foram controlados pela manipulação das vazões totais,  $F_1$  e  $F_2$ . O emparelhamento utilizado foi  $H_3 - F_1$  e  $H_6 - F_2$ , e o modelo empregado por este controlador multivariável foi obtido na etapa de identificação do processo, o qual pode ser visualizado no Capítulo 3, através das Equações 3.14 a 3.17.

A estratégia de sintonia desse controlador foi realizada seguindo a metodologia de ajuste de controladores preditivos baseado em modelo através do Número de Performance Robusto (RPN), proposta por Trierweiler e Farina (2003). A Tabela 4.1 demonstra os parâmetros utilizados para este MPC. Para maiores informações deste ajuste, ver detalhes no Capítulo 5.

**Tabela 4.1:** Parâmetros de sintonia do sistema de controle

Ajuste dos Controladores		
Parâmetro	Valor	Unidade
Tempo de amostragem ( $ts$ )	85	[s]
Horizonte de predição ( $P$ )	12	[A dimensional]
Horizonte de controle ( $M$ )	3	[A dimensional]
Peso sobre as variáveis controladas ( $\gamma^U$ )	$\begin{bmatrix} 0,5098 & 0 \\ 0 & 0,4820 \end{bmatrix}$	[A dimensional]
Fator de supressão de movimentos ( $\lambda^U$ )	$\begin{bmatrix} 2,1687 & 0 \\ 0 & 2,3565 \end{bmatrix}$	[A dimensional]

Além da *Planta de Seis Tanques Esféricos*, o sistema supervisor de controle foi formado por um computador com as seguintes capacidades físicas operacionais: Processador Intel Pentium 4 com 1,60 GHz, Memória RAM de 1 GB e Sistema Operacional Windows XP Professional.

Para todos os testes de estimação apresentados a seguir, os dados reais de processo são apresentados no início de cada seção, através de um gráfico entre as variáveis de entrada (variáveis manipuladas) e as variáveis de saída (variáveis controladas) com seus respectivos *set points*.

#### 4.1.2 Parâmetros de Sintonia dos Filtros

Assim como houve uma preocupação em explicitar a origem dos dados de planta utilizados para os testes de validação dos estimadores de estados, EKF e CEKF, igualmente há uma clara necessidade em demonstrar os principais parâmetros de ajuste destes filtros. Compreendem a estes ajustes, as escolhas dos parâmetros  $R$  (matriz de covariância dos ruídos de medição),  $Q$  (matriz de covariância dos ruídos de processo) e  $P_0$  (matriz de covariância dos erros de estimação inicial dos estados).

A matriz  $R$  foi facilmente obtida a partir da variância das saídas medidas, em um intervalo estacionário, com dados do processo real. Desta forma, pôde-se quantificar a influência dos ruídos entre essas variáveis mensuradas assumindo, entretanto, que a variabilidade de uma variável de saída não possui correlação com a outra saída. Ou seja, a matriz de covariância dos ruídos de medição é uma matriz com elementos nulos fora da diagonal principal.

A matriz  $Q$  foi escolhida baseada em um método de tentativa e erro, na qual se procurou estabelecer um bom compromisso entre a confiabilidade no modelo em relação à confiabilidade nas variáveis mensuradas, dada pela matriz  $R$ .

Já a matriz  $P_0$  foi escolhida com base na tese de que um valor mais elevado pudesse garantir a rápida convergência no início da estimação. Em muitos processos reais, os estados não podem ser mensurados, logo o cálculo de  $P_0 = (x_0 - \hat{x}_0^+)^2$  não pode ser realizado, então um valor para essa matriz deve ser arbitrado.

Embora a escolha das matrizes  $Q$  e  $P_0$  com valores não-nulos fora da diagonal principal pudesse levar a um melhor ajuste dos filtros, geralmente esta escolha é difícil. Essa condição de que elementos não-nulos possibilitam um melhor ajuste é devido à forte relação dos ruídos de processo e dos erros de estimação existentes entre os diversos estados do

processo. Porém, a natural seleção dessas matrizes como sendo diagonais faz-se presente pela condição destas resultarem em matrizes positivas definidas, razão para a existência de uma solução estável da matriz de covariância através da Equação de Riccati e, mínima do problema de otimização no CEKF.

Estes três principais parâmetros de ajustes dos filtros, assim como a condição inicial dos estados  $X_0$ , as restrições físicas de estados ( $X_{min}$  e  $X_{max}$ ) e o tempo de amostragem dos filtros ( $T_s$ ), podem ser visualizados na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2:** Parâmetros de sintonia dos filtros

Ajuste dos Filtros		
Parâmetro	Valor	Unidade
$P_0$	$1 \times 10^2 \cdot I_{[6 \times 6]}$	$[cm^2]$
$Q$	$1 \times 10^{-2} \cdot I_{[6 \times 6]}$	$[cm^2]$
$R$	$1,5 \times 10^{-3} \cdot I_{[2 \times 2]}$	$[cm^2]$
$X_0$	[0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,1]	$[cm]$
$X_{min}$	[0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,1]	$[cm]$
$X_{max}$	[22,0 22,0 22,0 22,0 22,0 22,0]	$[cm]$
$T_s$	[1]	$[s]$

As restrições dos estados foram escolhidas com base nas limitações físicas dos modelos e o tempo de amostragem foi determinado pela frequência com que são obtidas as variáveis de medição na *Planta de Seis Tanques Esféricos*.

### 4.1.3 Índices de Desempenho dos Estimadores

Dentre as metodologias para qualificar as técnicas de estimação, estão: a convergência da estimação, o recurso de tempo computacional (RTC) e o somatório dos erros quadráticos (SEQ).

A convergência é baseada na simples percepção qualitativa da estimação tender ao valor real do estado com o tempo de operação crescente. Sua observação é importante, pois uma estimação divergente coloca em risco as ações de controle quando adaptado no processo em tempo real.

O recurso de tempo computacional (RTC) pode ser entendido como sendo o tempo necessário para o algoritmo processar o total de dados em cada experimento. Esse fator é de extrema importância porque, muitas vezes, as melhorias operacionais de uma planta ficam limitadas às condições de processamento das informações, por parte das tecnologias implementadas. Por lógica, o tempo necessário à estimação de um estado do tempo  $k$  para o tempo  $k + 1$  não pode exceder ao tempo de amostragem do próprio filtro.

$$RTC = \frac{\text{Tempo Total de Estimação}}{T_s} \quad (4.1)$$

Embora a convergência e recurso de tempo computacional sejam imprescindíveis na avaliação de um algoritmo estimador de estados, o principal índice de desempenho é sem dúvida o somatório dos erros quadráticos (SEQ), pois representa a melhor forma de quantificar a discrepância entre os erros de estimação obtidos pelos dois filtros tempo-discretos (Rao *et. al.*, 2003). Abaixo, a Equação 4.2 apresenta o cálculo do índice SEQ:

$$SEQ = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^1 (x_k - \hat{x}_k^+)^2 \quad (4.2)$$

Através destes três índices acima apresentados, é possível elaborar uma comparação entre os dois algoritmos de estimação de estados. Além destes indicativos de eficiência, há ainda, para cada seção de teste, comentários a respeito das qualidades e falhas de estimação.

#### 4.1.4 Testes de Observabilidade

Seguindo o critério de observabilidade estabelecido por Kalman, alguns testes foram feitos e, para todos os pontos de simulação realizados, os estados foram ditos observáveis. Nestes casos, o posto da matriz de observabilidade de Kalman foi igual ao número de estados do processo, indicando o número de equações linearmente independentes.

A seguir, apresenta-se um destes testes como forma de exemplificar o critério de observabilidade de Kalman para o caso da *Planta de Seis Tanques Esféricos*. Nesse teste, a matriz de observabilidade foi calculada através da Equação 2.59, com  $F_1 = 4,7$ ;  $F_2 = 3,5$ ;  $H_3 = 12,3440$  e  $H_6 = 11,2870$ . Este ponto foi escolhido porque representa 67,2% em variação de amplitude, para uma mudança de *set point* em  $H_3 = 11$  cm para  $H_3 = 13$  cm.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0,0000 & 0,0051 & 0,9936 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & 0,0051 & 0,9930 \\ 0,0001 & 0,0101 & 0,9873 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0,0101 & 0,9860 \\ 0,0002 & 0,0150 & 0,9810 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 & 0,0151 & 0,9791 \\ 0,0003 & 0,0199 & 0,9748 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0003 & 0,0200 & 0,9722 \\ 0,0004 & 0,0247 & 0,9685 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0005 & 0,0248 & 0,9654 \end{bmatrix}$$

Logo, esta matriz possui posto igual ao número de estados ( $p(O) = 6$ ), ou seja, neste ponto o sistema é dito observável, segundo critério de Kalman.

Por estes testes, assume-se que para qualquer condição das variáveis manipuladas e mensuradas do processo, será possível determinar o valor do estado a qualquer instante entre o tempo inicial e o tempo atual.

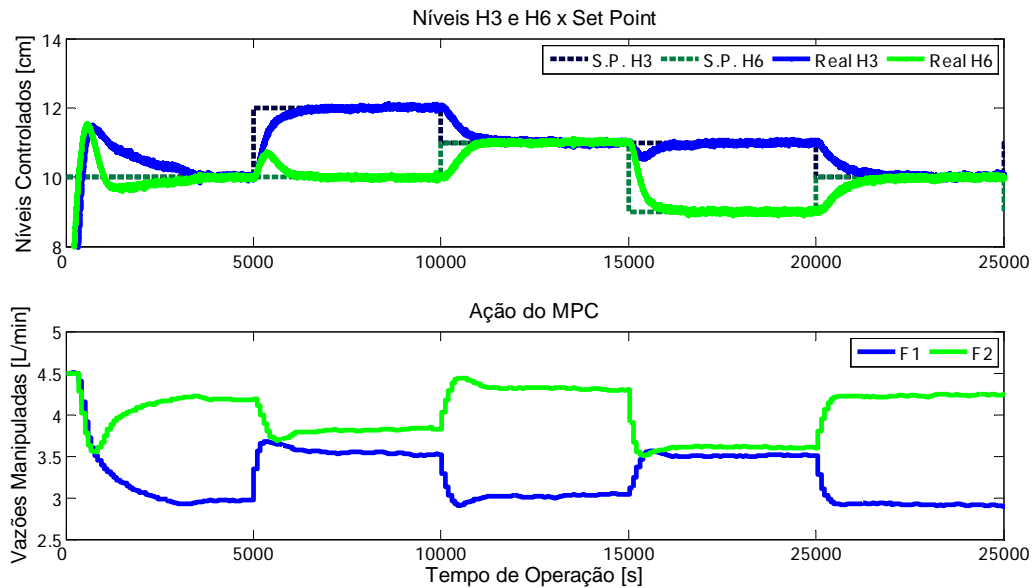
## 4.2 Testes de Comparação dos Estimadores EKF e CEKF

Quando se pensa na utilização de estimadores de estado para aplicações em associação ao sistema de controle de processo, deve-se logo imaginar que as ferramentas possam ser úteis tanto em sistemas com constantes mudanças de *set points* (operações de servocontrole) e também em sistemas que se encontram num determinado ponto de operação, porém onde haja constantes perturbações (operações regulatórias). Uma comparação entre o EKF e CEKF pode ser realizada envolvendo essas duas finalidades.

### 4.2.1 Teste de Servocontrole

Para realizar estes testes comparando os dois estimadores de estados, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), foram utilizados dados reais da planta que correspondiam a uma seqüência de mudanças de *set points* compreendendo a faixa de 9 a 12 cm, e a qual pode ser visualizada na Figura 4.1. Nesta

figura, são graficadas as variáveis de entrada do modelo ( $F_1$  e  $F_2$ ) e as variáveis de saída do processo ( $H_3$  e  $H_6$ ) versus o *set points* estabelecidos para as mesmas.

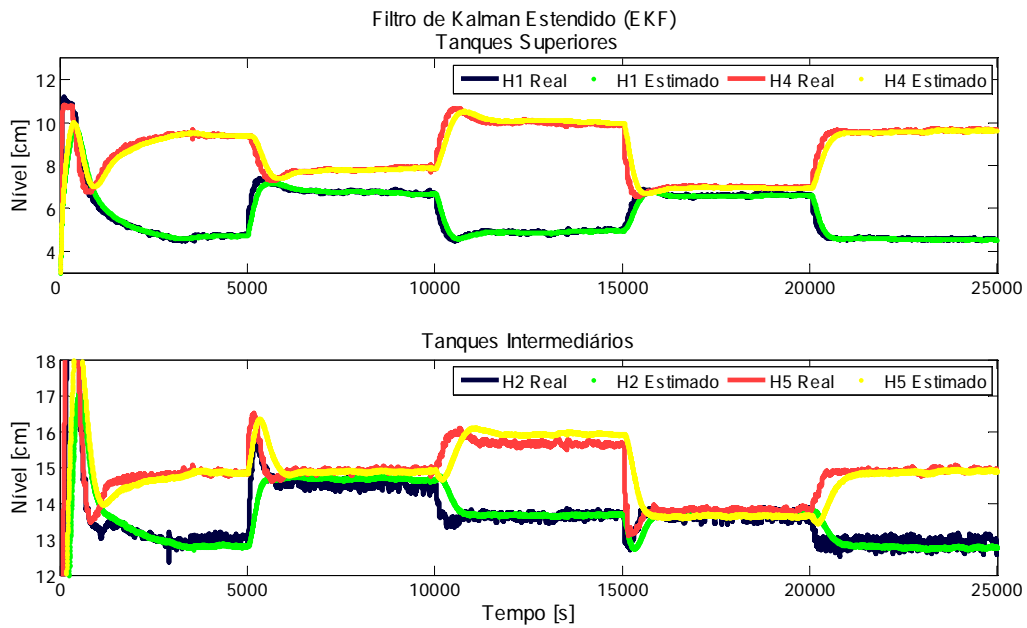


**Figura 4.1:** Dados da planta laboratorial p/ teste de servocontrole

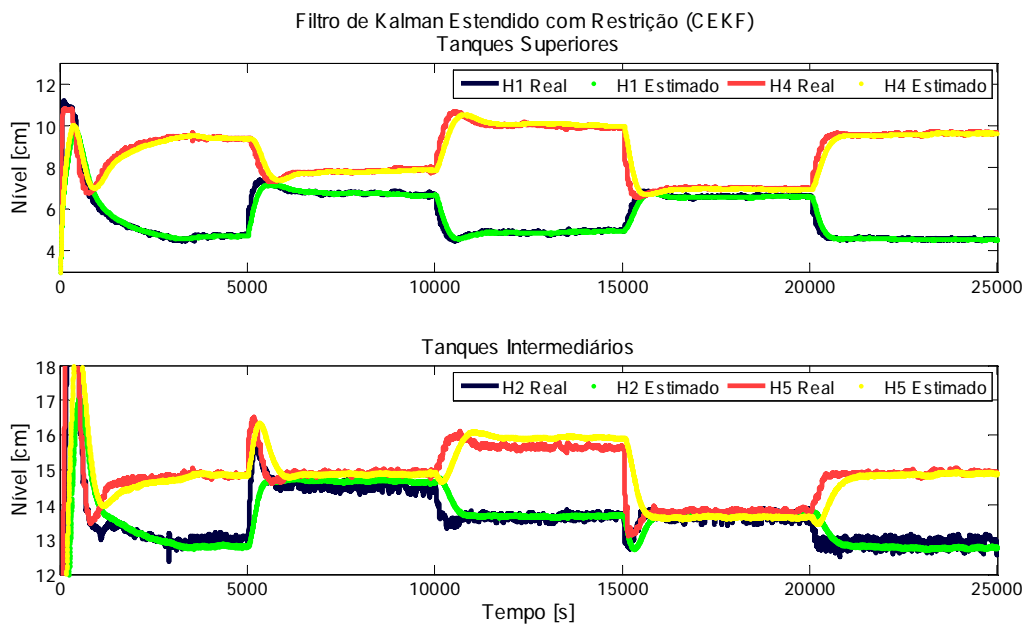
A seguir, são apresentadas as estimações para os níveis superiores e intermediários pelos algoritmos EKF e CEKF, com uso do “Modelo A”.

O resultado de estimação de estados via Filtro de Kalman Estendido (EKF), para o teste de servocontrole, pode ser visualizado na Figura 4.2. Enquanto que o resultado de estimação de estados via Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), para o teste de servocontrole, pode ser visualizado na Figura 4.3.





**Figura 4.2:** Resultado da estimação no teste de servocontrole p/ EKF



**Figura 4.3:** Resultado da estimação no teste de servocontrole p/ CEKF

Através dos resultados da estimação apresentados na Figura 4.2 e na Figura 4.3, pode-se perceber que, para processos com um comportamento aproximadamente linear e sem a presença de muitos distúrbios, se a estimação não tiver recaído sobre as restrições adotadas pelo Filtro de Kalman Estendido com Restrição, então o resultado dos dois algoritmos tende a ser semelhante.

Isto pode ser justificado, uma vez que os resultados da otimização realizada na etapa de atualização do CEKF têm por consequência a distribuição linear dos resíduos de medição ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ), através de todos os estados do processo ( $\hat{x}_k^+$ ). No CEKF, a ponderação de distribuição destes erros é quadrática, e dada pela matriz de covariância ( $P_k$ ). De forma equivalente, o EKF tende a corrigir os estados através do Ganho de Kalman ( $K_k$ ), que nada mais é que um fator linear que distribui os erros de predição das saídas ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ), para todos os estados ( $\hat{x}_k^+$ ), a cada instante de tempo da estimação, e cuja ponderação é igualmente realizada pela matriz de covariância ( $P_k$ ).

A Tabela 4.3 apresenta os índices de desempenho encontrados para o teste com mudanças de *set points*.

**Tabela 4.3:** Índices de desempenho para o teste de servocontrole

Algoritmo	Convergência	RTC	Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros					
			H1	H2	SEQ [cm <sup>2</sup> ]		H5	H6
EKF	Sim	366,95	0,1365	0,7693	H3	H4	0,6767	0,0011
CEKF	Sim	492,07	0,1382	0,7751	0,0023	0,1544	0,6746	0,0011

Embora os dois métodos tenham conseguido estimar com relativo sucesso os estados estacionários do processo, apresentando um pequeno índice de erro quadrático para as diferentes mudanças de *set points*, que pode ser observado na Tabela 4.3. Uma importante constatação deve ser ressaltada sobre o resultado deste teste de servocontrole, pois durante todo o experimento, as discrepâncias de estimação foram mais fortemente pronunciadas dinamicamente.

A razão para este fato ter ocorrido pode ser explicada pela qualidade relativa do modelo. Quando o modelo distancia-se um pouco as características dinâmicas ou estacionárias do processo, isso é verificado também na estimação dos estados. No caso da *Planta de Seis Tanques Esféricos*, a desconsideração da influência dinâmica dos controladores da malha cascata conduz a falhas dinâmicas no “Modelo A” e, por conseguinte, na estimação. Porém, estas falhas são de fundamental importância justamente para processo com muitas

mudanças de *set points*, pois a ação de controle do MPC retroalimentado por estados estimados será baseada justamente no conhecimento desses estados.

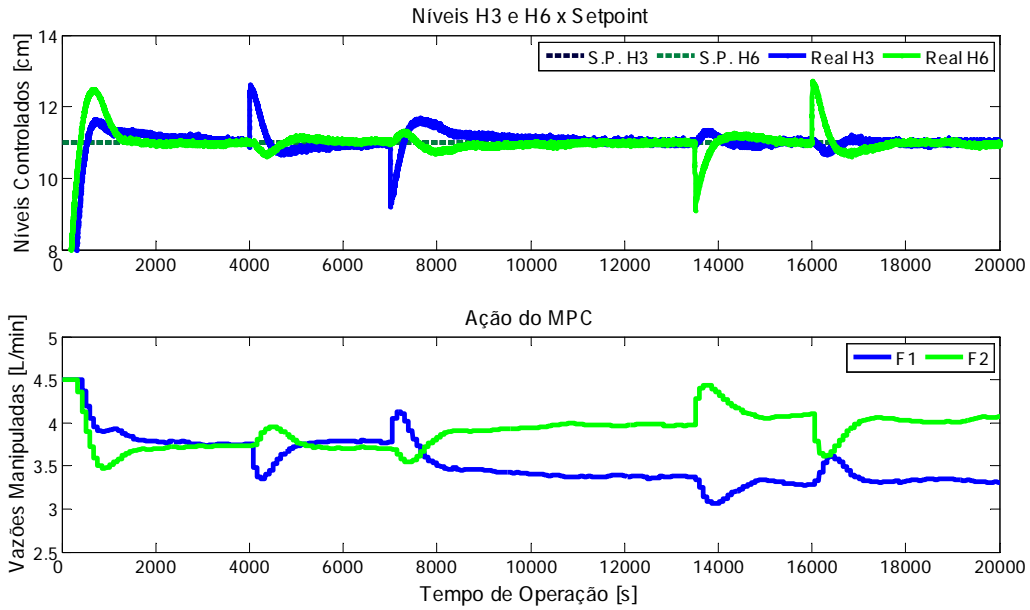
Se durante essa etapa de transição de um valor de *set point* a outro, o estado estimado se afastar demais do valor do estado real, uma ação não ideal será estabelecida pelo mecanismo de controle do processo e, desta forma, o sistema poderá levar muito mais tempo para alcançar os *set points* estabelecidos do que o mesmo sistema sem a retroalimentação desses estados estimados. Este inconveniente também pode ser notado se durante a etapa de estimação houver grandes erros estacionários. Por esta razão, é imprescindível realizar os mais variados testes e ajustes antes de qualquer implementação de algoritmos estimadores de estado sobre o processo em tempo real.

#### 4.2.2 Teste Regulatório

Muitos processos são freqüentemente operados em torno de um determinado ponto de operação, devido às restrições específicas de qualidade de produto ou de taxas de produção. Porém, em processos químicos, estes pontos de operação são constantemente retirados do valor de referência por efeito de distúrbios. Influenciados pelas rápidas ações necessárias por parte dos controladores, os estimadores de estados devem, sobretudo, fornecer uma boa informação dinâmica do sistema, para que os estados possam ser reprodutíveis e assim realizar uma retroalimentação adequada desses estados estimados no sistema de controle do processo.

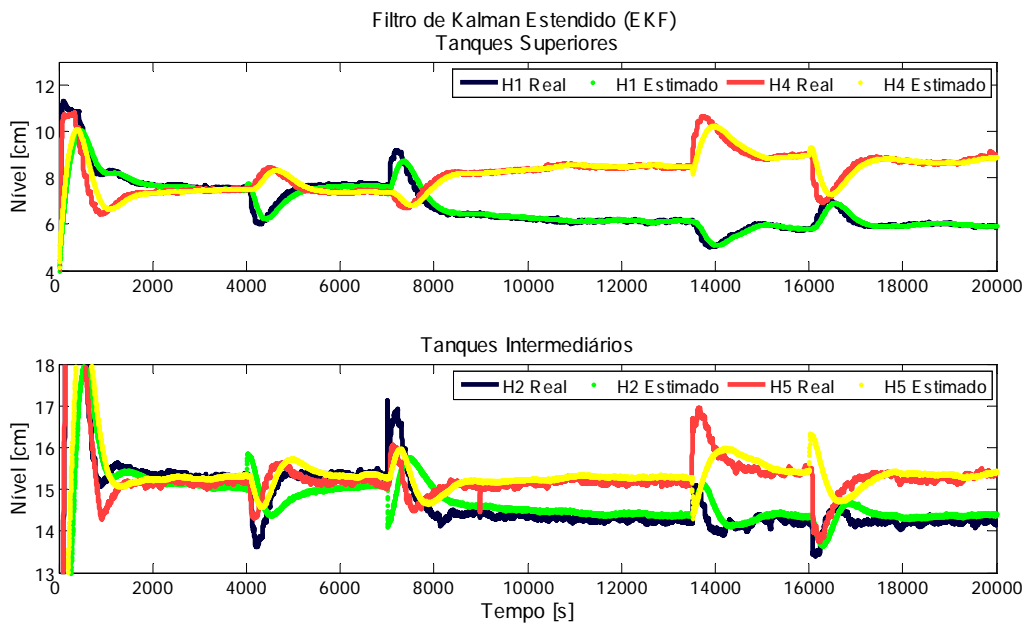
Para gerar os distúrbios não modelados na *Planta de Seis Tanques Esféricos*, o método utilizado foi a interrupção dos fluxos líquidos entres os tanques. Para os distúrbios de níveis acima do valor de operação de 11 cm, foram interrompidos os fluxos entre os tanques inferiores e o reservatório, por um período de 10 segundos. Já para os distúrbios abaixo do *set point* de 11 cm, foram interrompidos os fluxos entre os tanques intermediários e os tanques inferiores, por um período de 10 segundos.

A Figura 4.4 demonstra os dados reais de processo utilizados para o teste regulatório, a qual demonstra as variáveis de entrada e saída para o processo. Nesta figura, são graficadas as variáveis de entrada do modelo ( $F_1$  e  $F_2$ ) e as variáveis de saída do processo ( $H_3$  e  $H_6$ ) versus o *set points* estabelecidos para as mesmas.



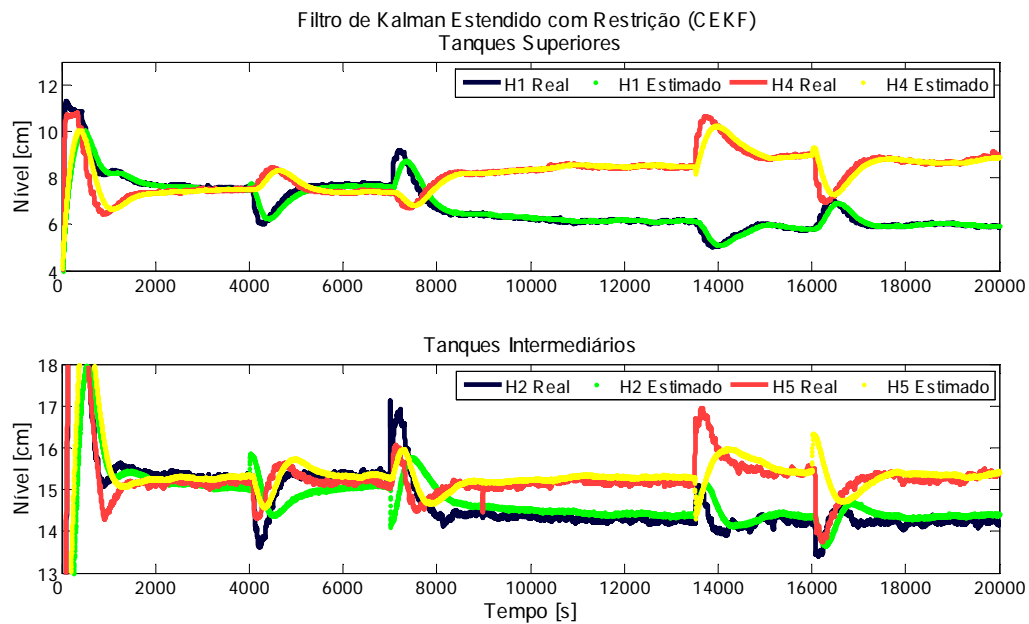
**Figura 4.4:** Dados da planta laboratorial p/ teste regulatório

A seguir, são apresentadas as estimações para os níveis superiores e intermediários pelos algoritmos EKF e CEKF, com uso do “Modelo A”. O resultado de estimação de estados via Filtro de Kalman Estendido (EKF), para processos regulatórios, pode ser visualizado na Figura 4.5.



**Figura 4.5:** Resultado da estimação no teste regulatório p/ EKF

O resultado de estimação de estados via Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), para processos regulatórios, pode ser visualizado na Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Resultado da estimação no teste regulatório p/ CEKF

Assim como ocorreu no teste com mudanças de *set points*, para o teste de caráter regulatório também se pode notar que os resultados das duas técnicas de estimação foram bastante semelhantes.

Entretanto, o que se constata ao observar a Figura 4.5 e a Figura 4.6, é que a qualidade de estimação através dos Filtros de Kalman é dependente da direcionalidade dos distúrbios. Isso é evidenciado em ambos os resultados de EKF e CEKF, quando se vê uma estimação em sentido oposto ao nível real do processo, no exato momento dos distúrbios.

Esta ocorrência é sem dúvida justificável pelo fato do filtro conhecer apenas informações de entradas e saídas do processo. Dessa forma, a exemplo, quando se interrompe o fluxo entre os tanques intermediários e inferiores, o nível real do tanque inferior tende a diminuir enquanto que o nível real do tanque intermediário tende a aumentar. Neste caso, as primeiras estimações, a partir do momento da perturbação, sofrem apenas correções lineares e diretamente proporcionais às variações das saídas mensuráveis por ter uma amostragem igual à de observação dessas variáveis. Portanto, o valor de estado estimado para os tanques intermediários tende a diminuir, indo no sentido oposto ao nível real do processo. Isto ocorre até o determinado momento onde o controlador MPC tem as primeiras ações corretivas. A partir deste ponto, os níveis estimados passam a ser determinados também pelas simulações do modelo e portanto, aproximam-se novamente dos valores reais dos estados.

Uma característica importante em processos regulatórios é que os estados estimados retornem rapidamente para próximo do valor real dos estados, visto que o sistema de controle tenha condições de gerar a melhor seqüência de ações, compensando o distúrbio no menor tempo possível.

Ao se observar o resultado em respeito ao índice SEQ, pode-se identificar um fato interessante que ocorrera igualmente para os testes de mudanças de *set points*, o EKF apresenta menores erros de estimação para os estados de um dos ramos da planta, enquanto que o CEKF apresenta melhores resultados para o outro ramo. A explicação para isso pode ter sido porque em algum momento a estimação atingiu as barreiras físicas aplicadas implicitamente na etapa de otimização do CEKF ou por problemas de resolução numérica das técnicas de estimação. A Tabela 4.4 traz os índices de desempenho para o teste regulatório.

**Tabela 4.4:** Índices de desempenho para o teste regulatório

Algoritmo	Convergência	RTC	Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros					
			SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	293,22	0,1866	1,2676	0,0019	0,1484	0,8246	0,0011
CEKF	Sim	393,06	0,2072	1,2837	0,0019	0,1399	0,8166	0,0011

### 4.3 Teste em Relação à Qualidade do Modelo

Para que se pudesse realizar o teste de comparação relativo à qualidade dos modelos não-lineares, utilizados na etapa preditiva dos estimadores EKF e CEKF, foram adotados dois modelos distintos (Para maiores informações, veja os detalhes na Subseção 3.3.4):

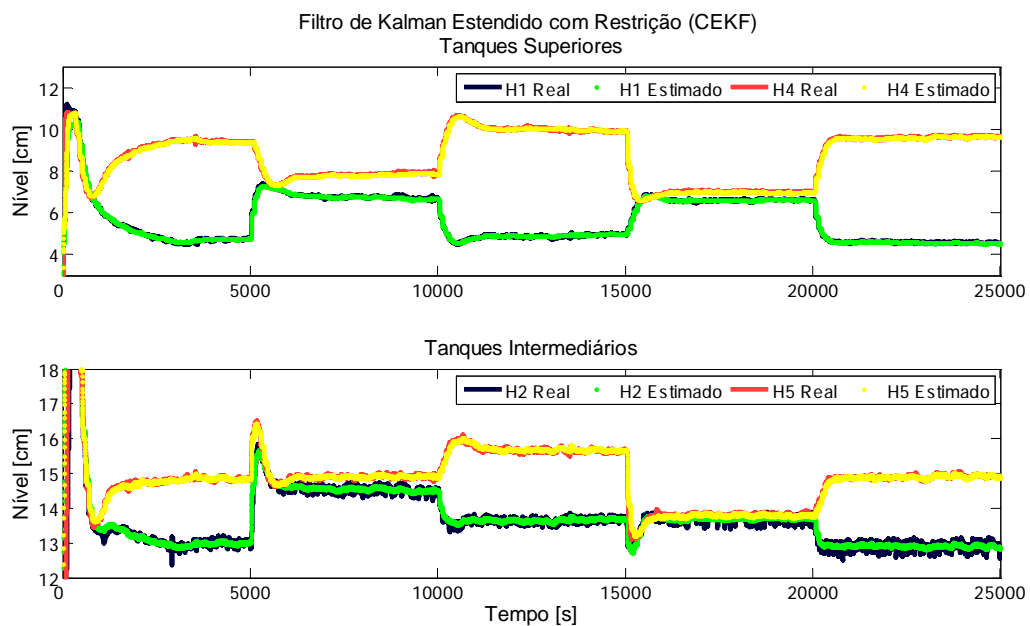
“**Modelo A**” – que considera simplesmente a base fenomenológica, dada pelos balanços materiais em torno de cada tanque, e a qual foi apresentada no Capítulo 3 nas Equações 3.1 a 3.7.

“**Modelo B**” – que considera a base fenomenológica, dada pelos balanços materiais em torno de cada tanque, porém inclui a presença dos controladores Proporcionais – Integrais para os tanques superiores e intermediários, e o qual foi apresentado no Capítulo 3 nas Equações 3.19 a 3.36.

Esta análise de estimação relativa à acuracidade dos modelos pode ser realizada para ambos os problemas de servocontrole e regulatório. Desta forma, conseguem-se verificar as diferenças entre os resultados das estimações com uso do “Modelo A”, apresentado nas Subseções 4.2.1 e 4.2.2 e dado pela Figura 4.3 e pela Figura 4.6, e do “Modelo B”, apresentados nesta subseção e dado pela Figura 4.7 e pela Figura 4.8.

Pelo fato dos dois estimadores, EKF e CEKF, ter gerado resultados visualmente semelhantes, optou-se por apresentar apenas os testes com o Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF).

A seguir, são apresentadas as estimações para os níveis superiores e intermediários pelo algoritmo CEKF, com uso do “Modelo B”. A Figura 4.7 demonstra o resultado de estimação de estados via Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), para o teste de servocontrole.



**Figura 4.7:** Resultado da estimação no teste de servocontrole p/ CEKF (“Modelo B”)

Ao se observar o resultado da estimação com “Modelo B” (Figura 4.7), nota-se principalmente que os erros dinâmicos durante as mudanças de *set points*, existentes para o “Modelo A”, são reduzidos. Essa redução dos erros de estimação é facilmente justificável pelo fato da qualidade do “Modelo B” ser mais fiel à dinâmica real dos estados no processo. Esta afirmação possui os argumentos que foram discutidos na etapa de validação dos modelos, apresentada no Capítulo 3 e dada na Subseção 3.3.4.

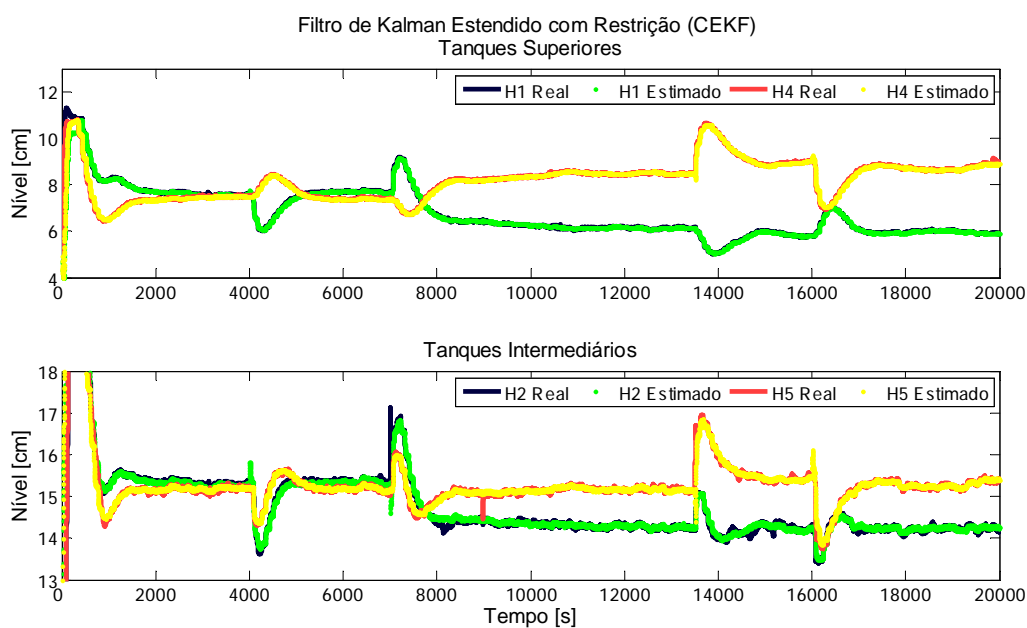
A qualidade de estimação dos estados estacionários também teve um melhor resultado. Embora a presença dos controladores no modelo não altere em nada a predição estacionária dos estados, a melhor qualidade de estimação durante etapa de transição de um *set point* para outro faz com que os estados corrigidos aproximem-se mais dos estados reais nas regiões estacionárias. Isto é devido ao fato dos estimadores serem técnicas recursivas, logo um estado estimado mais preciso no instante de tempo  $t - 1$  leva a uma melhor estimação no instante de tempo  $t$  e, conseqüentemente, produzindo um menor erro de estimação.

A Tabela 4.5 traz os índices de desempenho com “Modelo B” para o teste de servocontrole.

**Tabela 4.5:** Índices de desempenho para o teste de servocontrole com “Modelo B”

Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros								
Algoritmo	Convergência	RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	402,81	0,0315	0,5261	0,0023	0,0285	0,3741	0,0011
CEKF	Sim	509,21	0,0400	0,4928	0,0023	0,0319	0,3609	0,0011

A Figura 4.8 demonstra o resultado de estimação de estados via Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), para o teste de caráter regulatório.



**Figura 4.8:** Resultado da estimação no teste regulatório p/ CEKF (“Modelo B”)



Para o teste de características regulatórias, nota-se também que as falhas existentes na estimação pelo “Modelo A”, foram suprimidas pela presença dos controladores no “Modelo B”. Isso pode ser explicado porque a presença dos controladores no Modelo B impede que os níveis dos tanques superiores e intermediários sejam afastados demais dos níveis reais enquanto não haja uma alteração nas variáveis de entrada do modelo.

A Tabela 4.6 traz os índices de desempenho com “Modelo B”, para o teste de caráter regulatório.

**Tabela 4.6:** Índices de desempenho para o teste regulatório com “Modelo B”

Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros								
Algoritmo	Convergência	RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	325,92	0,0754	0,3222	0,0019	0,0373	0,4147	0,0011
CEKF	Sim	427,17	0,0843	0,3020	0,0019	0,0424	0,3968	0,0011

Embora se tenha feito referência ao “Modelo B” como sendo um modelo de melhor qualidade, não se pode afirmar sobre hipótese nenhuma que este seja o modelo ideal do processo. Todos os modelos são suscetíveis a falhas e este não foge a regra, podendo-se inclusive destacar algumas descon siderações como a de parâmetros variantes com o tipo de escoamento, atrasos de tempo entre os tanques e restrições físicas de equipamentos, entre outros.

## 4.4 Testes em Relação aos Parâmetros de Ajuste $P_0$ , $Q$ e $R$

Quando se busca aplicar estimadores de estado em uma planta em tempo real, devem-se especificar os principais parâmetros de sintonia ( $P_0$ ,  $Q$  e  $R$ ), de forma a se conciliar o ajuste mais adequado e, o qual resulte no menor índice de erro de estimação possível.

Um dos problemas desta escolha é que muitas vezes não são conhecidas grandes informações a respeito dos estados que se deseja estimar. Assim, a escolha acaba sendo baseada em regras heurísticas que quase sempre estabelecem uma maior confiança para as variáveis de medição em comparação a confiança no modelo adotado ( $R \ll Q$ ). Porém, quando é possível obter algumas informações a respeito destes estados, *então testes off-line*

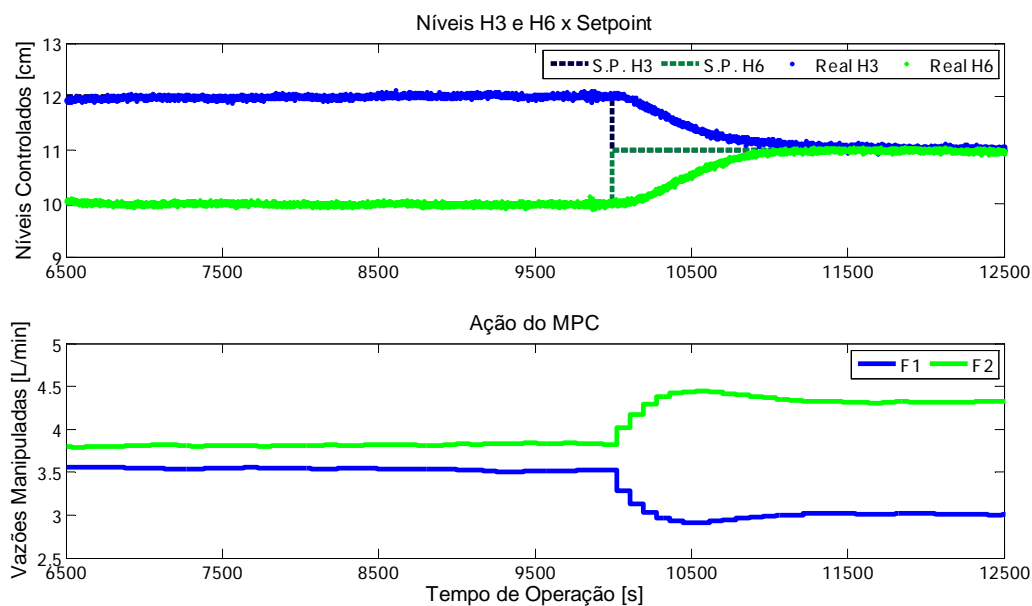
podem ser efetuados para verificar o melhor ajuste dos algoritmos de estimação.

A seguir, são realizados testes onde se procura analisar as conseqüências que as modificações destes parâmetros provocariam sobre os estados estimados.

#### 4.4.1 Teste da Matriz de Covariância Inicial ( $P_0$ )

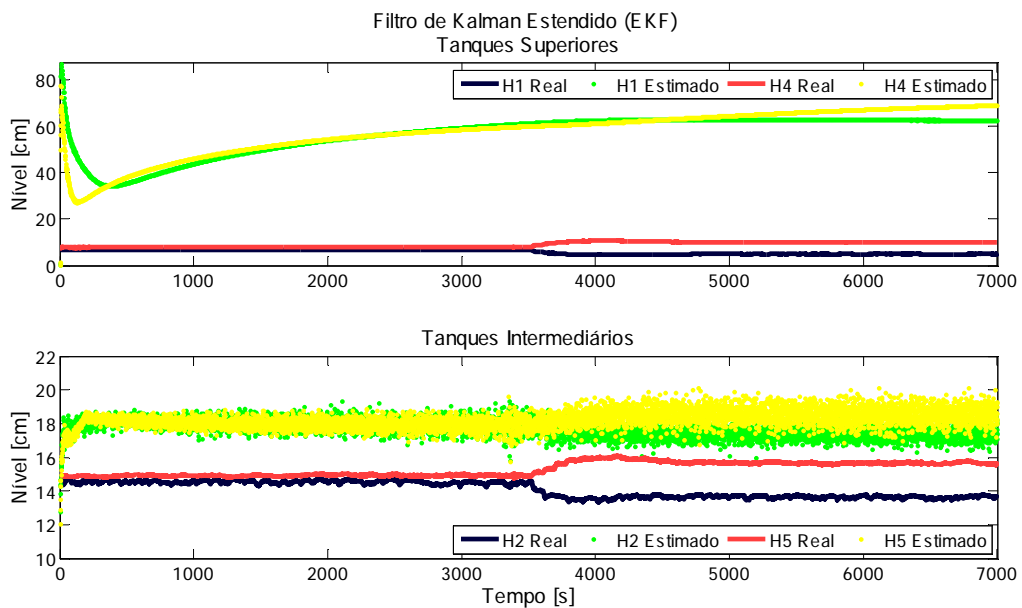
A matriz de covariância dos erros de estimação inicial ( $P_0$ ) é um parâmetro influente apenas para o início da operação, pois a partir dos primeiros estados estimados o algoritmo de estimação recalcula automaticamente o valor dessa matriz, através da Equação de Riccati. Entretanto, a escolha desse parâmetro é de suma importância porque afeta tanto a velocidade de tendência ao valor real como também interfere na convergência dos estados.

Para realizar este teste, utilizou-se um intervalo de dados do teste de servocontrole, apresentado na Subseção 4.2.1. Os níveis reais partem de valores estacionários ( $H_3 = 12$  cm e  $H_6 = 10$  cm), enquanto que para os filtros são informadas condições iniciais longe do valor correto ( $X_0 = [0,1 \ 0,1 \ 12 \ 0,1 \ 0,1 \ 10]$  cm). O objetivo é verificar qual a influência que valores mais altos ou mais baixos na matriz de covariância inicial ( $P_0$ ) possuem sobre a estimação dos estados. A Figura 4.9 demonstra os dados de planta utilizados para esse teste.

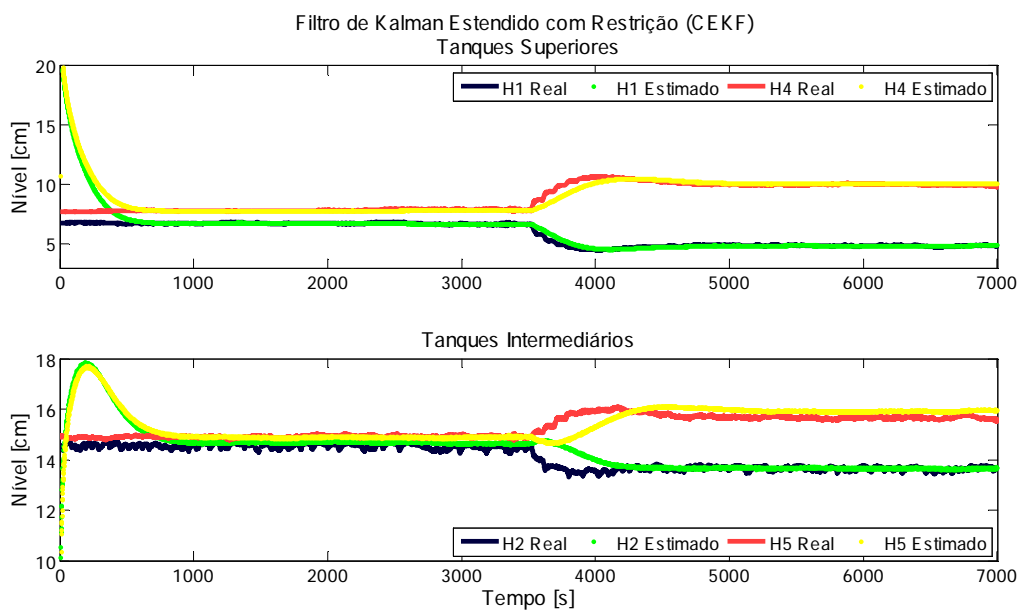


**Figura 4.9:** Dados da planta laboratorial p/ teste da matriz  $P_0$

Para que a influência deste parâmetro fosse realmente avaliada, arbitraram-se valores bem distintos para representar os valores elevados ( $P_0 = 1 \times 10^6 \cdot I_{[6 \times 6]}$ ) e os valores reduzidos ( $P_0 = 1 \times 10^0 \cdot I_{[6 \times 6]}$ ) da matriz de covariância inicial. A seguir, a Figura 4.10 apresenta o resultado de estimação com EKF, para o teste com valor de  $P_0$  elevado. Enquanto que, a Figura 4.11 apresenta o resultado de estimação com CEKF, para o mesmo teste.



**Figura 4.10:** Resultado do teste da matriz  $P_0$  com valores elevados p/ EKF



**Figura 4.11:** Resultado do teste da matriz  $P_0$  com valores elevados p/ CEKF

Ao realizar este experimento, esperava-se que um alto valor da matriz de covariância inicial ( $P_0$ ) conduzisse a uma rápida convergência dos estados estimados, em ambos os algoritmos de estimação. Entretanto, o que nota-se é que as atualizações dos estados preditos acabam sendo mais suscetíveis a bruscas variações durante a etapa de correção dos estados, levando os estados estimados para longe do valor real. Este efeito é provocado justamente pelo alto valor da matriz de covariância que, desta forma, possibilita esta ocorrência no início da estimação.

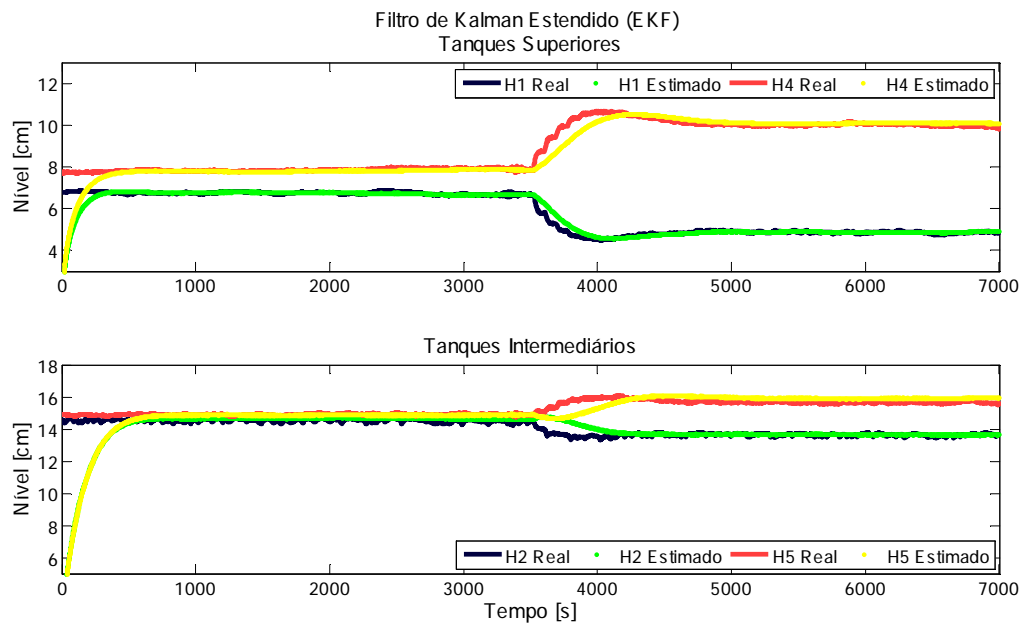
Por conseqüência de um Ganho de Kalman ( $K_k$ ) maior no início da estimação, vê-se nitidamente, através da Figura 4.10, que o EKF diverge para a estimação de todos os estados. Esta divergência ocorreu porque nenhuma estratégia de corte foi aplicada para esse estimador. Quando estratégias de corte são aplicadas no EKF, restrições explícitas impedem que os estados sejam estimados com valores que provoquem a divergência na etapa de simulação do modelo. Porém, estas estratégias de corte não são ótimas porque o EKF não realiza a redistribuição dos resíduos de medição, quando o estado bate nestas restrições. Já o estimador CEKF, por apresentar restrições físicas implícitas no problema de otimização, impede que a divergência seja verificada. Além disso, o CEKF propicia a redistribuição dos resíduos de medição sempre que o estado for limitado por essas restrições. E, embora tenha se afastado do valor real dos estados no início da estimação, como se observa na Figura 4.11, ao longo do tempo o CEKF converge.

A Tabela 4.7 demonstra os índices de desempenho para o teste relativo a elevados valores da matriz de covariância inicial ( $P_0$ ).

**Tabela 4.7:** Índices de desempenho para o teste de  $P_0$  elevado

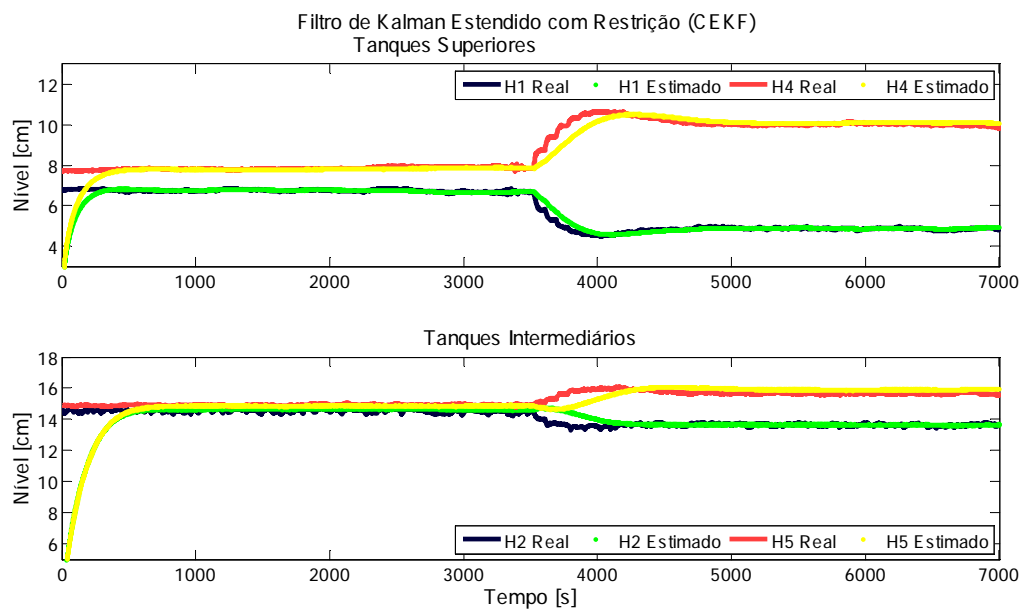
Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros								
Algoritmo	Convergência	RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Não	102,99	2678,7	13,333	0,0010	2441,0	8,9541	0,0008
CEKF	Sim	139,42	2,2449	0,5730	0,0010	2,0617	0,5016	0,0008

A seguir, são apresentados os testes com uma matriz de covariância inicial com valores reduzidos ( $P_0 = 1 \times 10^0 \cdot I_{[6 \times 6]}$ ). A Figura 4.12 apresenta o resultado de estimação com EKF, para o teste com valor de  $P_0$  reduzido.



**Figura 4.12:** Resultado do teste da matriz  $P_0$  com valores reduzidos p/ EKF

Enquanto que, a Figura 4.13 apresenta o resultado de estimação com CEKF, para o mesmo teste.



**Figura 4.13:** Resultado do teste da matriz  $P_0$  com valores reduzidos p/ CEKF

Quando se utiliza uma matriz de covariância inicial ( $P_0$ ) com valores mais baixos, percebe-se que as correções sobre os estados preditos são mais atenuadas, o que torna a convergência mais lenta no início da estimação. Porém, neste caso, ao se observar a Figura 4.12 (EKF) e a Figura 4.13 (CEKF), verifica-se que ambos os algoritmos apresentaram resultados semelhantes e convergentes.

Outro fator destacável sobre a matriz de covariância inicial ( $P_0$ ), é que depois de alcançada a convergência para o estado real, o valor deste parâmetro é irrelevante para uma próxima mudança de *set point* ou distúrbio. Isso pode ser observado através dos resultados com o estimador CEKF, apresentados nas Figura 4.11 ( $P_0$  com valores elevados) e Figura 4.13 ( $P_0$  com valores reduzidos).

A Tabela 4.8 demonstra os índices de desempenho para o teste relativo a reduzidos valores da matriz de covariância inicial ( $P_0$ ).

**Tabela 4.8:** Índices de desempenho para o teste de  $P_0$  reduzido

Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros								
Algoritmo	Convergência	RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	106,24	0,1514	1,6724	0,0010	0,2544	1,8807	0,0008
CEKF	Sim	136,52	0,1514	1,6699	0,0010	0,2546	1,8860	0,0008

#### 4.4.2 Teste com Maior Confiança no Modelo ( $Q < R$ )

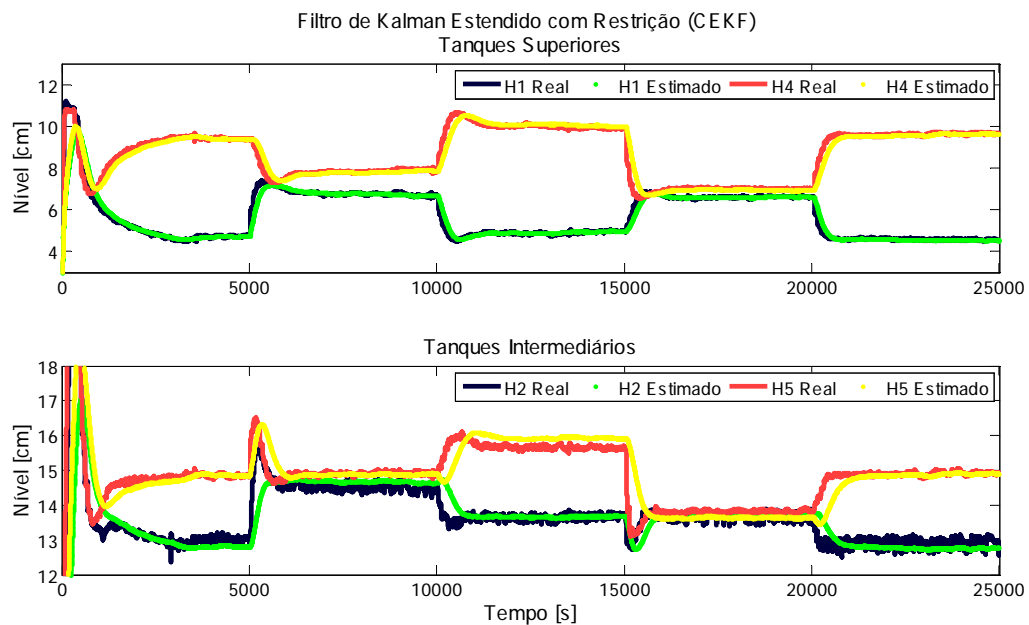
A matriz de covariância dos ruídos de processo ( $Q$ ) é talvez o mais difícil parâmetro de ajuste dos filtros. Embora na prática saiba-se que esses ruídos de processo nem sempre possuam uma variabilidade uniforme, geralmente este parâmetro  $Q$  é selecionado como sendo constante, e seu valor é quase sempre escolhido maior que o parâmetro de confiança das variáveis de medição ( $R$ ).

Para a realização deste teste, utilizou-se toda a seqüência de mudanças de *set points* dos dados de planta, apresentados na Subseção 4.2.1. Assume-se, para todos os fins, que a maior confiança no modelo seja representada por uma matriz  $Q$  dez vezes menor que a

matriz  $R$ , apresentada na Subseção 4.1.2. Ou seja, os parâmetros de ajuste foram:  $Q = 1,5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$  e  $R = 1,5 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$ .

Nesta subseção, também será apresentado apenas o gráfico contendo o resultado de estimação dos estados superiores e intermediários, pelo algoritmo CEKF. A razão para essa escolha é a semelhança visual entre os resultados encontrados pelo EKF em comparação ao CEKF. Porém, na Tabela 4.9 encontram-se os índices de desempenho para ambos os filtros.

A seguir, na Figura 4.14, são apresentados os resultados de estimação com maior confiança no modelo, para o CEKF.



**Figura 4.14:** Resultado do teste de maior confiança no modelo p/ CEKF

Ao se analisar a Figura 4.14 é possível afirmar que, visualmente, os resultados desta estimação não apresentaram grandes variações pela mudança no parâmetro  $Q$ , quando comparados aos resultados obtidos na Subseção 4.2.1.

Entretanto, quando se observa mais atentamente o índice de desempenho do somatório do erro quadrático (SEQ), apresentado na Tabela 4.9, verifica-se que esta maior confiança no modelo ( $Q < R$ ) resultou numa inferior qualidade de estimação dos estados superiores e intermediários, para ambos os filtros. Esse aumento do erro pode novamente ser justificado

pela utilização de um modelo com falhas dinâmicas, e desta forma, uma maior confiança no modelo acaba sendo condizente com o pior resultado de estimação encontrado.

A Tabela 4.9 demonstra os índices de desempenho para o teste relativo ao aumento de confiança no modelo ( $Q < R$ ).

**Tabela 4.9:** Índices de desempenho para o teste de confiança no modelo ( $Q < R$ )

Algoritmo	Convergência	Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros						
		RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	372,98	0,1379	0,7750	0,0020	0,1556	0,6780	0,0008
CEKF	Sim	491,61	0,1408	0,7768	0,0020	0,1558	0,6763	0,0008

#### 4.4.3 Teste em Relação à Filtragem ( $R > Q$ )

Uma das qualidades inerentes dos estimadores de estados, EKF e CEKF, está na filtragem dos ruídos de medição sobre as variáveis de saída do processo. Para que isto ocorra, é imprescindível que se possua um modelo de boa qualidade, bem como é importante que se tenha pleno conhecimento da variabilidade destas variáveis mensuráveis.

A princípio, deve-se destacar a importância de se querer este sinal filtrado. Ao se assumir que os valores medidos sejam corrompidos por ruídos e que esses tenham uma distribuição normal e com média zero, logo se presume que os sinais reais encontrar-se-iam em uma posição central em relação ao sinal medido. Como os sistemas de controle por MPC com correção de bias dependem fundamentalmente do valor das saídas controladas para gerar as predições e, por conseguinte, proporcionar as ações de controle adequadas, é por conveniência que esses valores medidos sejam os mais precisos quanto possíveis. Daí a necessidade de processo de filtragem dessas variáveis mensuradas.

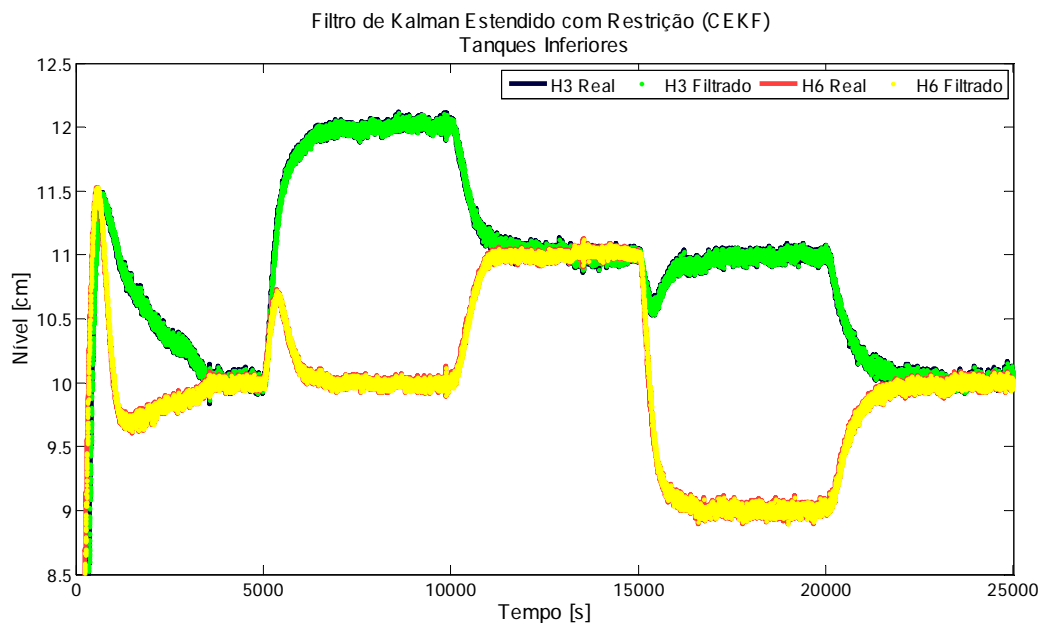
Ainda, durante a escolha mais adequada das matrizes de ajuste dos estimadores ( $Q$  e  $R$ ), pode-se dizer que as mudanças destes parâmetros não somente alteram a qualidade dos estados estimados, como também modificam a qualidade do sinal filtrado das saídas. Logo, a partir da alteração da matriz de covariância dos ruídos de medição ( $R$ ), é possível realizar uma avaliação em respeito à capacidade de filtragem, por parte dos estimadores EKF e CEKF.



Para a realização deste teste, foram utilizados os resultados de filtragem dos níveis  $H_3$  e  $H_6$ , encontrados para os dados da *Planta de Seis Tanques Esféricos*, apresentados na Subseção 4.2.1. Ou seja, os parâmetros de ajuste foram:  $Q = 1 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$  e  $R = 1,5 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$ .

Por motivo idêntico ao apresentado na seção anterior, optou-se por apresentar apenas os resultados gráficos utilizando o CEKF. Porém, vêem-se na Tabela 4.10, os resultados para ambos os algoritmos de estimação.

A Figura 4.15 demonstra o resultado do teste de filtragem para o CEKF, com a matriz de covariância de ruídos de medição ( $R$ ) obtida pelo cálculo da variância, como explicado na Subseção 4.1.2.



**Figura 4.15:** Resultado do teste de filtragem das saídas p/ CEKF – ( $R \ll Q$ )

Percebe-se ao observar a Figura 4.15, que estes valores escolhidos para os parâmetros  $Q$  e  $R$  não produziram o efeito desejado quanto ao que se julga a filtragem das variáveis medidas, embora tenham alcançado com sucesso os objetivos de estimar os estados não mensuráveis com um pequeno índice de erro, como observado na Subseção 4.2.1.

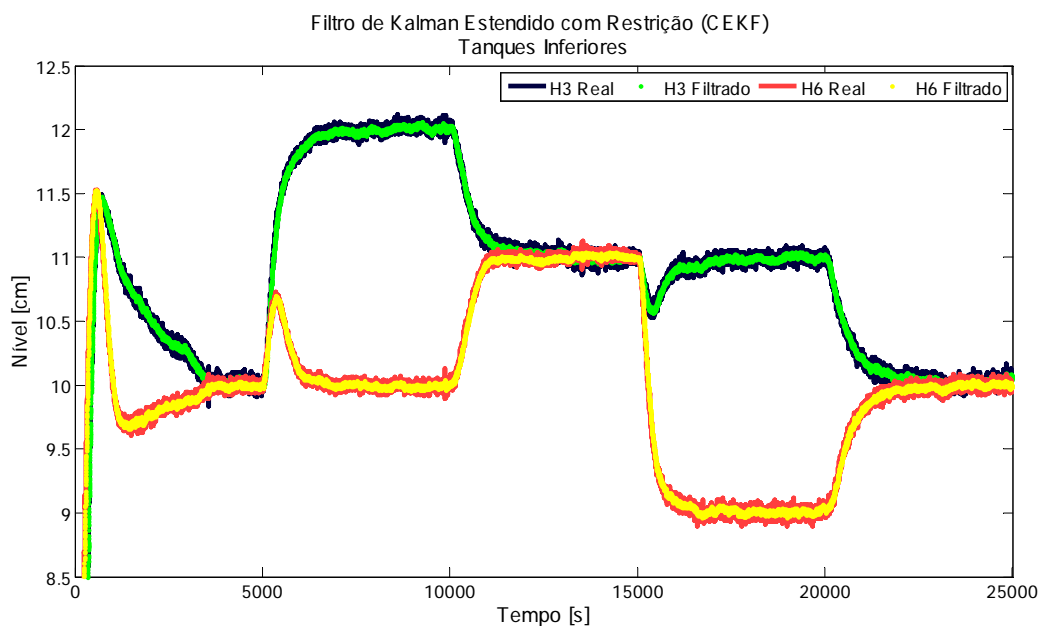
No caso da Figura 4.15, vê-se que as saídas mensuradas praticamente não foram filtradas. Isto pode ter ocorrido pelo simples fato de se ter creditado uma confiança

demasiadamente grande sobre os valores que se mediam ( $R \ll Q$ ). No entanto, é possível alterar a relação entre estas matrizes  $R$  e  $Q$ , para conseguir a filtragem dos sinais medidos.

Para gerar o resultado do teste de filtragem, utilizou-se uma matriz  $R$  cerca de cem vezes maior que o valor utilizado na Subsecção 4.2.1. Ou seja, os parâmetros de ajuste foram:  $Q = 1 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$  e  $R = 1,5 \times 10^{-1} \text{ cm}^2$ .

A escolha por um valor maior para esse matriz de covariância dos ruídos de medição ( $R$ ) é equivalente a diminuir a confiança sobre as variáveis medidas e, conseqüentemente, aumentar a confiança no modelo. Nesta subsecção, fez a alteração da matriz  $R$  para um valor maior, uma vez que é natural que se obtém um resultado semelhante pela diminuição do valor da matriz  $Q$ . Para a maioria dos casos, o importante é a relação entre estes dois parâmetros.

A Figura 4.16 demonstra o resultado do teste de filtragem para o CEKF, com a matriz de covariância de ruídos de medição ( $R$ ) cem vezes maior que o valor apresentado na Subsecção 4.1.2.



**Figura 4.16:** Resultado do teste de filtragem das saídas p/ CEKF – ( $R > Q$ )

Através do resultado obtido na Figura 4.16, pode-se concluir que ao alterar-se o valor da matriz  $R$ , tornando-a cem vezes maior, obtém-se um sinal filtrado de melhor qualidade para as variáveis mensuráveis. Porém, não é possível afirmar que isto seja verídico para todos

os casos. Sabe-se apenas que tudo depende da qualidade relativa do modelo em relação ao processo real.

Na verdade, o ajuste entre esses parâmetros,  $Q$  e  $R$ , é literalmente uma balança onde se procura encontrar um valor de equilíbrio, que gere o menor índice de erro entre todos os estados do processo (medidos ou não). Essa escolha de valores é uma prática difícil e exige muitas tentativas *off-line*. Em alguns casos, é possível pela mínima alteração desses parâmetros, levar o estimador de estado a divergência.

A Tabela 4.10 demonstra os índices de desempenho para o teste relativo à filtragem das variáveis mensuradas.

**Tabela 4.10:** Índices de desempenho para o teste de filtragem ( $R > Q$ )

Algoritmo	Convergência	Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros						
		RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	370,07	0,1376	0,7734	0,0020	0,1567	0,6777	0,0008
CEKF	Sim	494,17	0,1406	0,7754	0,0020	0,1561	0,6759	0,0008

Ao se analisar os índices de somatório dos erros quadráticos, apresentados na Tabela 4.3 (maior confiança nas saídas) e Tabela 4.10 (menor confiança nas saídas), pode-se observar que, embora a menor confiança nas saídas ( $R > Q$ ) tenha resultado em um sinal filtrado de melhor qualidade, os estados estimados apresentaram uma ligeira piora na qualidade de estimação. Essa constatação é possivelmente explicada pela utilização de um modelo com muitas falhas dinâmicas em comparação ao processo real.

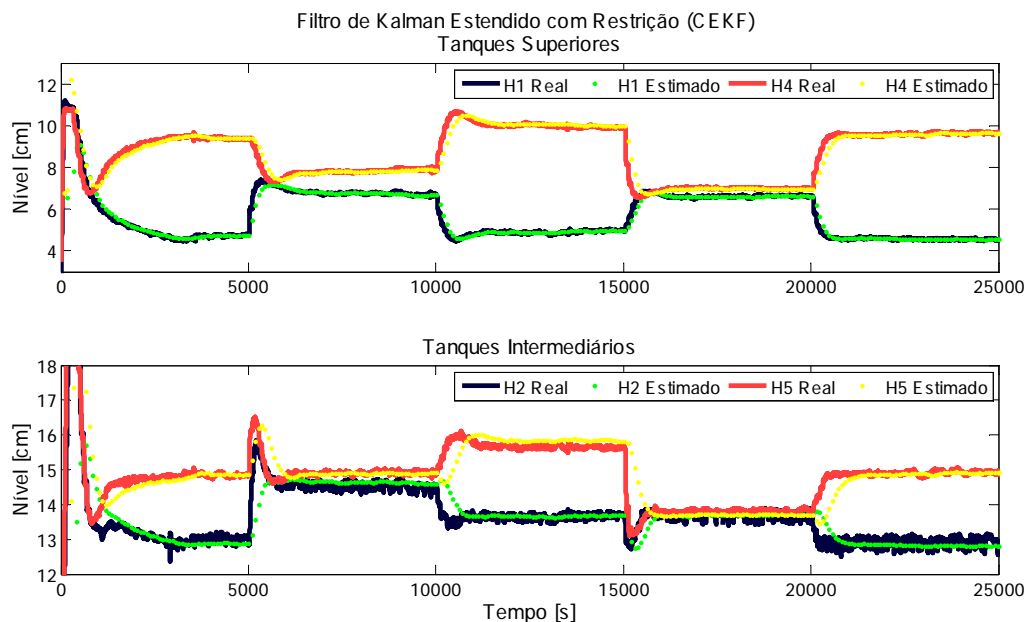
Quando se aumenta o valor da matriz  $R$  ou diminui-se o valor da matriz  $Q$ , as correções dos estados preditos são atenuadas. Logo, os valores estimados tornam-se mais dependentes da etapa de simulação do modelo. Porém, para a *Planta de Seis Tanques Esféricos* esta diferença é ínfima quando comparado a certos processos, onde uma pequena alteração dos parâmetros  $Q$  e  $R$  pode levar a uma estimação divergente de alguns estados.

## 4.5 Teste em Relação ao Tempo de Amostragem ( $T_s$ )

Um parâmetro importante que muitas vezes não é avaliado ou questionado em testes *off-line* é o tempo de amostragem do estimador de estados. Embora não haja a necessidade de construir filtros com uma frequência de estimação muito maior que o tempo necessário para as ações de controle do processo, pode-se perceber que quando se atua com estimadores na versão discretizada, o tempo de amostragem do estimador torna-se influente na reprodutibilidade dos estados.

Se o modelo possui grandes falhas ou um melhor resultado para os filtros é obtido quando a confiança nos valores medidos é muito maior que a confiança no modelo ( $R \ll Q$ ), então nesse caso, quanto menor for o tempo de amostragem dos filtros, melhor será a qualidade de estimação dos estados.

A Figura 4.17 demonstra a estimação de estados com um tempo de amostragem igual a 85 segundos. Este tempo é igual ao tempo de amostragem do controlador MPC para o processo. Este resultado pôde ser comparado com o obtido para um tempo de amostragem de 1 segundo, conforme apresentado na Subseção 4.2.1.



**Figura 4.17:** Resultado do teste de tempo de amostragem p/ CEKF

Ao se observar a Figura 4.17, nota-se que o filtro CEKF conseguiu capturar a essência dinâmica do processo, para os diferentes *set points* estabelecidos, mesmo com uma amostragem idêntica ao sistema de controle.

A escolha mais prudente para o tempo de amostragem dos filtros de Kalman deve levar em conta, além da qualidade do modelo utilizado, as características de operação do processo. Assim como para o sistema de controle, a escolha deve ser adaptada para processos com características de servocontrole e regulatórias.

Por lógica, este parâmetro de ajuste deve ser no mínimo igual ou menor que o tempo de amostragem do próprio sistema de controle. Porém, a escolha mais indicada é utilizar a frequência de estimação igual à amostragem das variáveis mensuráveis do processo, pois desta forma tende-se ao menor erro por influência da discretização do sinal.

A Tabela 4.11 apresenta os índices de desempenho para o teste relativo ao tempo de amostragem dos filtros.

**Tabela 4.11:** Índices de desempenho para o teste de amostragem ( $T_s = 85s$ )

Índices Qualitativos de Desempenho dos Filtros								
Algoritmo	Convergência	RTC	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
			H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	5,588	0,6906	2,2280	0,0976	0,4256	1,9219	0,1050
CEKF	Sim	7,787	0,4631	2,0760	0,0983	0,1838	1,1443	0,1013

Ao observar a Tabela 4.11, pode-se identificar que embora tenham conseguido reproduzir perfeitamente a dinâmica do processo, mesmo com um tempo de amostragem igual ao tempo de amostragem do sistema de controle, ambos os estimadores de estados apresentaram um índice de desempenho relativamente maior.

A grande vantagem de utilizar um tempo de amostragem maior está no recurso computacional, que diminui consideravelmente quando comparado ao resultado do estimador com uma frequência amostral maior.

## 4.6 Conclusões Parciais do Capítulo 4

No Capítulo 4, as capacidades de estimação e filtragem dos algoritmos Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF) foram estudadas. Estes estudos foram realizados através de testes *off-line*, com dados reais da *Planta de Seis Tanques Esféricos*.

A princípio, constatou-se que os algoritmos EKF e CEKF apresentam bons resultados. E, quando os estados estimados não batem nas restrições estabelecidas para o problema de otimização do CEKF, esses resultados são bem semelhantes.

Outro fator destacável é que os estimadores de estados, se bem sintonizados, funcionam bem para processos com mudanças de *set point*. Porém, para processos regulatórios, os resultados são dependentes da direcionalidade dos distúrbios.

Neste capítulo, observou-se também que a qualidade de estimação é muito dependente do modelo não-linear utilizado na etapa de predição. Quando o modelo possui discrepâncias em comparação ao processo real, isso produz uma estimação igualmente deficitária, seja para condições dinâmicas ou estacionárias. No entanto, quando esse modelo é mais fiel às características reais do processo, então uma estimação de melhor qualidade é obtida.

Outras constatações observadas indicam as influências que os parâmetros de sintonia dos filtros possuem em relação à qualidade de estimação e filtragem:

A alteração da matriz de covariância inicial modifica a velocidade e a convergência de estimação, nos instantes iniciais da operação.

As alterações das matrizes de covariância dos ruídos de processo ( $Q$ ) e dos ruídos de medição ( $R$ ) modificam tanto a qualidade de estimação dos estados como também a qualidade de filtragem das variáveis mensuradas. Normalmente, quando a alteração de uma dessas matrizes produz uma melhora na qualidade de estimação é provável que piore na qualidade de filtragem e, vice-versa. Estas matrizes estão intimamente ligadas e devem ser escolhidas com base na confiança creditada entre modelo adotado para o processo e as medições das saídas do processo.

---

Por fim, o último teste revelou que o tempo de amostragem do estimador pode ser alterado sem que a estimação perca a essência dinâmica do processo. Essa alteração só não poderá exceder o tempo de amostragem do sistema de controle. Porém, para os casos onde um melhor ajuste do estimador seja dado por uma maior confiança nas variáveis mensuradas, então o aumento no tempo de amostragem conduzirá a uma piora na qualidade de estimação. A grande vantagem de alteração deste tempo de amostragem está no recurso de tempo computacional, que diminuirá consideravelmente.

Após estes testes *off-line*, determinou-se que os ambos os algoritmos de estimação, EKF e CEKF, deveriam ser testados em aplicações de tempo real. Determinou-se também, que os parâmetros de sintonia destes filtros fossem mantidos os mesmos apresentados na Subseção 4.1.2 e, os quais podem ser visualizados através da Tabela 4.2.





# Capítulo 5

## Aplicação dos Estimadores de Estados em Tempo Real

Neste capítulo, busca-se apresentar as influências dos algoritmos de estimação, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), sobre a controlabilidade do processo na *Planta de Seis Tanques Esféricos*, quando aplicados em tempo real.

### 5.1 Estratégia de Controle

O sistema de controle adotado para esta planta laboratorial do estudo de caso foi realizado através da implementação de um controlador MPC na plataforma Simulink do *software* Matlab<sup>®</sup>.

A seguir, a Figura 5.1 demonstra esta implementação realizada, onde é possível visualizar também a adaptação de um Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF). Logo em seguida, são apresentados na Subseção 5.1.1, o modelo em espaço de estados utilizado e, na Subseção 5.1.2, o método de sintonia utilizado por este sistema de controle.

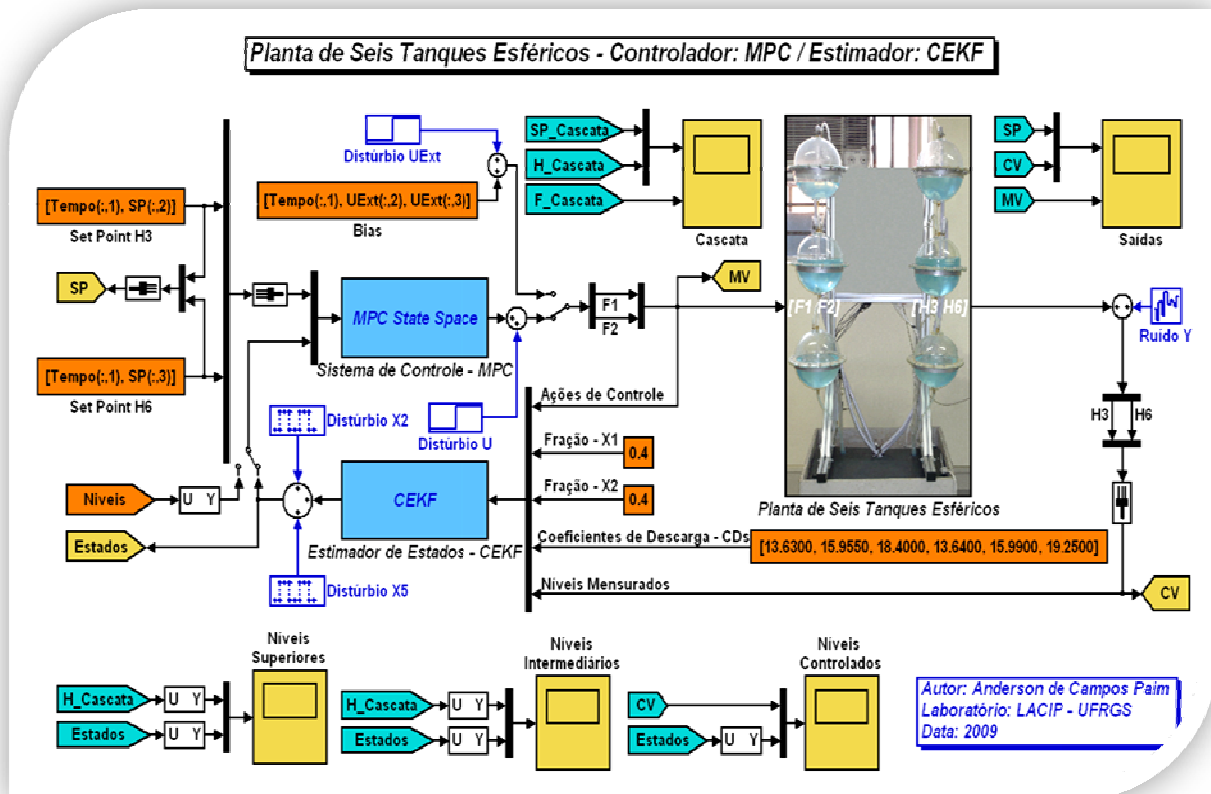


Figura 5.1: Flowsheet da Planta de Seis Tanques Esféricos com estimador de estados

### 5.1.1 Modelo em Espaço de Estado

Para gerar o modelo LTI em espaço de estado, aplicado ao MPC, utilizou-se como referência o “Modelo A”, apresentado no Capítulo 3 e Seção 3.2, linearizado em torno dos valores operacionais nos níveis controlados ( $H_3 = 11$  cm  $H_6 = 11$  cm). Abaixo, da Tabela 5.1 a Tabela 5.4, são apresentadas as matrizes Jacobianas deste modelo.

Tabela 5.1: Matriz Jacobiana das equações de estado em relação aos estados

$A =$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$
$H_1$	-0,01029	0	0	0	0	0
$H_2$	0,007797	-0,00569	0	0	0	0
$H_3$	0	0,005425	-0,006752	0	0	0
$H_4$	0	0	0	-0,005845	0	0
$H_5$	0	0	0	0,00645	-0,005884	0
$H_6$	0	0	0	0	0,005159	-0,007132

**Tabela 5.2:** Matriz Jacobiana das equações de estado em relação às entradas

$B =$	$F_1$	$F_2$
$H_1$	0,03482	0
$H_2$	0	0,0176
$H_3$	0	0
$H_4$	0	0,02601
$H_5$	0,01913	0
$H_6$	0	0

**Tabela 5.3:** Matriz Jacobiana das equações de saída em relação aos estados

$C =$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$
$H_3$	0	0	1	0	0	0
$H_6$	0	0	0	0	0	1

**Tabela 5.4:** Matriz Jacobiana das equações de saída em relação às entradas

$D =$	$F_1$	$F_2$
$H_3$	0	0
$H_6$	0	0

Onde  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  e  $H_6$  são os níveis dos tanques (estados);  $F_1$  e  $F_2$  são as variáveis manipuladas (entradas);  $H_3$  e  $H_6$  são os níveis controlados (saídas);

Desta forma, ao empregar o modelo linearizado ao invés de um modelo identificado, consegue-se fazer com que os estados do modelo utilizado pelo controlador preditivo sejam exatamente os mesmos do estimador, ou seja, os próprios níveis dos tanques e, portanto, tendo um significado físico. Esse foi o modelo linear invariante no tempo, utilizado pelo controlador MPC para todos os testes realizados neste capítulo.

### 5.1.2 Sintonia do Controlador

O MPC possui basicamente dois grupos de parâmetros de ajuste: a) Comprimento de Horizontes: horizonte de predição ( $P$ ), horizonte de controle ( $M$ ) e tempo de amostragem ( $ts$ ); e b) Parâmetros de Sintonia: matriz de peso sobre as variáveis controladas ( $\gamma$ ) e o fator de supressão de movimentos ( $\lambda$ ).

Além destes parâmetros, é possível ainda estabelecer as restrições físicas máximas e mínimas sobre as variáveis manipuladas e controladas, e também adotar limites máximos para a taxa de variação da ação de controle. Essas restrições são empregadas de forma implícita na etapa de otimização deste sistema de controle.

A sintonia do controlador MPC aplicado à *Planta de Seis Tanques Esféricos* foi realizada utilizando o *software* RPN Toolbox versão 3.0, desenvolvido na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, na qual está baseada a metodologia descrita por Trierweiler e Farina e publicada no artigo *RPN tuning strategy for model predictive control*. Este método permite o cálculo destes parâmetros acima citados, sendo válido para os mais comuns algoritmos de controle preditivo, incluindo entre eles: a Matriz Dinâmica de Controle (DMC) e a Controlador Preditivo Generalizado (GPC). Trata-se de um método de ajuste fundamentado no Número de Desempenho Robusto (RPN), índice que mensura as características de controlabilidade de um sistema.

A principal idéia dessa estratégia de sintonia dos parâmetros do MPC, proporcionada pela metodologia RPN, consiste no escalonamento do sistema e na correta escolha das matrizes de peso  $\gamma$  e  $\lambda$ , dado um determinado desempenho desejado alcançável do sistema em malha fechada. O método também permite a determinação dos parâmetros de ajuste do horizonte de predição ( $P$ ), horizonte de controle ( $M$ ) e tempo de amostragem ( $ts$ ).

A seguir, a Tabela 5.5 demonstra os passos da rotina exercida pelo *software* RPNtoolbox, para o cálculo dos parâmetros de ajuste e sintonia do MPC. Esses cálculos são baseados no conhecimentos das matrizes de escalonamento,  $L_s$  e  $R_s$ , e no índice RPN. Para maiores informações a respeito desta metodologia, veja Trierweiler (1997).

**Tabela 5.5:** Procedimento de sintonia de MPC's para sistemas MIMO baseado no RPN

Procedimento de sintonia RPNtoolbox®		
1º Passo: Carregar-se o modelo do processo ( $G(s)$ )		
2º Passo: Especifica-se o desempenho desejado em malha fechada ( $Td(s)$ )		
3º Passo: Através da fatoração de Blaschke para o modelo nominal do processo e do desempenho desejável em malha fechada, obtém-se o desempenho alcançável ( $T(s)$ )		
4º Passo: Para o desempenho alcançável, verifica-se o índice RPN e obtém-se a frequência de maior importância para termos de controle ( $\omega_{sup}$ )		
5º Passo: Nesta frequência obtida no passo anterior, realiza-se o procedimento de escalonamento do sistema, onde se determinam as matrizes de escalonamento do sistema ( $L_s$ e $R_s$ )		
6º Passo: Calculam-se os parâmetros de ajuste		
Tempo de amostragem	Horizonte de predição	Horizonte de controle
$ts \cong 0.25 \cdot \tau_r$	$P_0 = 0$ $P \cong \frac{t_{80\%}}{ts}$	$M \cong \frac{P}{4}$
7º Passo: Calculam-se os parâmetros de sintonia		
Peso sobre as variáveis controladas	Fator de supressão de movimentos	
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + y_{z,s}}}$	$\lambda = \sqrt{(1 + u_{z,s}) \log_{10}(RPN + 1) \text{média}(g_s^{i,j}(\omega_{sup}))}$	
8º Passo: Retorna-se às unidades originais das matrizes de peso calculadas		
Peso sobre as variáveis controladas	Fator de supressão de movimentos	
$\gamma_i^U = \gamma_i \cdot L_{s,i}$	$\lambda_i^U = \frac{\lambda_i}{R_{s,i}}$	

A seguir, na Tabela 5.6, podem ser visualizados os resultados de sintonia do MPC aplicado à *Planta de Seis Tanques Esféricos*.

**Tabela 5.6:** Parâmetros de ajuste e sintonia do MPC obtidos pela metodologia RPN

Parâmetros do MPC		
Parâmetro	Valor	Unidade
Tempo de amostragem ( $ts$ )	125	[s]
Horizonte de predição ( $P$ )	8	[Adimensional]
Horizonte de controle ( $M$ )	2	[Adimensional]
Peso sobre as variáveis controladas ( $\gamma^U$ )	$\begin{bmatrix} 0,3500 & 0 \\ 0 & 0,3720 \end{bmatrix}$	[Adimensional]
Fator de supressão de movimentos ( $\lambda^U$ )	$\begin{bmatrix} 1,4330 & 0 \\ 0 & 1,3690 \end{bmatrix}$	[Adimensional]

Assim como os parâmetros do MPC calculados pelo RPNtoolbox, acima informados, foram adotadas restrições para as variáveis de controle e manipuladas de acordo com as limitações físicas da planta (relacionados ao dimensionamento dos tanques e potência das bombas utilizadas). Estas restrições entram de forma implícita na etapa de otimização do controlador MPC aplicado ao processo. A Tabela 5.7 demonstra estes valores adotados para a *Planta de Seis Tanques Esféricos*.

**Tabela 5.7:** Restrições adotadas no sistema de controle do processo

Limitações físicas impostas na etapa de otimização do MPC		
Parâmetro	Valor	Unidade
Range sobre as variáveis de estados ( $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ )	$[0 \leq x \leq 22,00]$	[cm]
Range sobre as variáveis controladas ( $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ )	$[0 \leq y \leq 22,00]$	[cm]
Range sobre as variáveis manipuladas ( $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ )	$[2,80 \leq u \leq 4,50]$	[L/min]
Variações máximas da ação de controle ( $-\Delta u_{\max}$ e $\Delta u_{\max}$ )	[Sem Restrição]	[L/min]

## 5.2 Estratégia de Estimação

Antes de partir para a apresentação e discussão dos resultados da aplicação de estimadores em tempo real, torna-se importante destacar a sintonia adotada para os filtros, bem como se torna conveniente esclarecer os critérios adotados para avaliar e quantificar os resultados desta implementação, entre outras considerações especiais existentes.

### 5.2.1 Sintonia dos Estimadores de Estados (EKF e CEKF)

Os estimadores de estados, aplicados em tempo real na *Planta de Seis Tanques Esféricos*, Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF), tiveram seus parâmetros de ajuste ( $P_0$ ,  $Q$ ,  $R$ ) escolhidos com base nas análises efetuadas e justificativas no Capítulo 4 desta dissertação. Estes três principais parâmetros de ajustes dos filtros, assim como a condição inicial dos estados  $X_0$ , as restrições físicas de estados ( $X_{\min}$  e  $X_{\max}$ ) e o tempo de amostragem dos filtros  $T_s$ , podem ser visualizados na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8:** Parâmetros de sintonia dos estimadores

Ajuste dos Filtros		
Parâmetro	Valor	Unidade
$P_0$	$1 \times 10^2 \cdot I_{[6 \times 6]}$	$[cm^2]$
$Q$	$1 \times 10^{-2} \cdot I_{[6 \times 6]}$	$[cm^2]$
$R$	$1,5 \times 10^{-3} \cdot I_{[2 \times 2]}$	$[cm^2]$
$X_0$	[0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,1]	$[cm]$
$X_{\min}$	[0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,1]	$[cm]$
$X_{\max}$	[22,0 22,0 22,0 22,0 22,0 22,0]	$[cm]$
$T_s$	[1]	$[s]$

Assim como se enfatizara no Capítulo 4, aqui se comenta a respeito dos modelos utilizados na etapa de predição pelos estimadores, para os testes a seguir. Nos casos onde não houver comentários em respeito do modelo adotado para o filtro, entenda-se que o modelo utilizado foi o chamado “**Modelo A**”. Caso contrário, haverá na seção específica algum comentário relativo à mudança para o “**Modelo B**”.

## 5.2.2 Critérios de Avaliação dos Resultados

O principal critério de avaliação sobre os resultados do uso de estimadores de estados associado ao sistema de controle é realizado através de uma análise qualitativa, baseada na comparação visual com o mesmo sistema sendo controlado apenas pelo conhecimento de variáveis de entrada e saída. Por outro lado, os índices de desempenho quantitativos para esta aplicação em tempo real permanecem equivalentes aos já mencionados no Capítulo 4, excluindo o recurso de tempo computacional, que não possui mais razão de ser avaliado.

Além disso, o índice de desempenho do Somatório do Erro Quadrático (SEQ) pode agora ser realizado em termos de controle e estimação. Para controle, são avaliados os erros entre as variáveis controladas filtradas e seus *set points*. Já para a estimação, os erros são avaliados entre as variáveis de estado estimadas e os níveis reais do processo. Abaixo, as Equações 5.1 e 5.2 apresentam os cálculos relativos a estes índices.

$$SEQ_{Controle} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{k=1}^n (\hat{y}_k^+ - y_{set_k})^2 \quad (5.1)$$

$$SEQ_{Estimação} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{k=1}^n (\hat{x}_k^+ - x_k)^2 \quad (5.2)$$

## 5.2.3 Considerações Especiais Existentes

A seguir, na Subseção 5.2.3.1, são apresentadas algumas informações a respeito da implementação dos algoritmos de estimação e controle. Já na Subseção 5.2.3.2, são apresentadas algumas consideração para a realização dos experimentos práticos envolvendo a utilização dos estimadores de estado em tempo real.

### 5.2.3.1 Implementação dos Algoritmos

A implementação do controlador MPC em espaço de estados, bem como a implementação dos algoritmos de estimação, EKF e CEKF, foram realizadas através de S-Functions (funções no formato *.m* do *software* Matlab para rodar na interface da plataforma Simulink).



### 5.2.3.2 Data de Realização dos Testes *On-Line*

Para que se pudesse realizar uma comparação justa entre a utilização do MPC com retroalimentação de estados estimados e o MPC com correção por bias, todos os testes envolvendo as duas estratégias foram realizados no mesmo período, evitando dessa forma, que problemas como a calibração de equipamentos e sensores interferissem sobre os critérios de avaliação dos resultados. O período de realização dos testes apresentados neste capítulo data entre a segunda e a terceira semana do mês de setembro de 2009.

## 5.3 Resultados dos Estimadores Aplicados no Processo

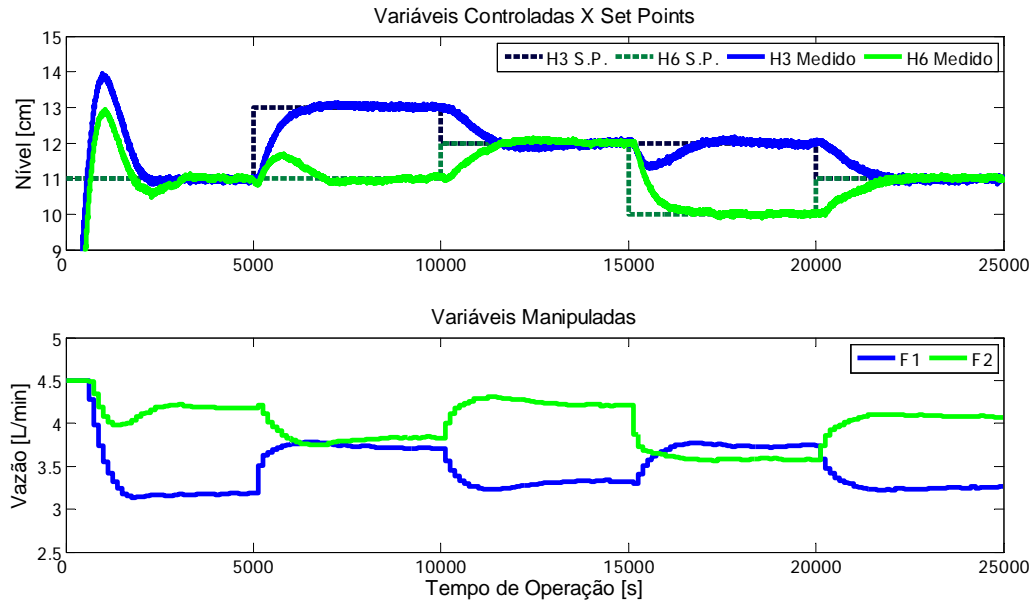
A seguir, apresenta-se a seqüência de resultados dos experimentos em tempo real, dada a seguinte ordem: 1) Teste sem estimador; 2) Teste com estimador EKF; 3) Teste com estimador CEKF;

Neste capítulo, também será apresentado um estudo relativo à modificação da variável de distúrbio de medição ( $\hat{w}_{k+1}, \hat{w}_{k+2}, \dots, \hat{w}_{k+p}$ ) sobre a equação de predição do MPC em espaço de estados, para melhoria na qualidade de rejeição a distúrbios.

Cabe ressaltar ainda, que para a análise do sistema de controle sem estimador, apenas será verificado o desempenho frente a características de mudanças de *set points*. Já para os testes com estimadores, também será abordado o efeito que um possível erro de estimação, por parte dos próprios filtros, pode provocar no sistema de controle (veja maiores explicações no início da Seção 5.3.2).

### 5.3.1 Teste Sem Estimador de Estados

O primeiro teste realizado foi a utilização do sistema de controle preditivo com MPC em espaço de estados e correção por bias. A Figura 5.2, apresenta o resultado para esse teste sem estimador de estados. O teste foi constituído de uma seqüência de *set points* em torno do valor operacional ( $H_3 = 11$  cm e  $H_6 = 11$  cm), onde são graficadas as respostas do sistema a este estímulo (níveis controlados) e as ações de controle correspondentes (vazões manipuladas).



**Figura 5.2:** Resultado de controle para o teste sem estimador de estados

O que se percebe, ao analisar o resultado da Figura 5.2, é que este sistema de controle MPC com observação apenas das saídas mensuradas para o cálculo das ações de controle, proporciona uma boa resposta (bom desempenho), mantendo as variáveis controladas em seus *set points* respectivos. Isto parece ocorrer porque a dinâmica de saída do processo é bem representada pelo modelo de previsão do controlador (MPC em espaço de estados).

Porém, há de se constatar que este tipo de implementação (MPC com correção por bias) pode apresentar elevados *overshoots*, como evidenciado no início desta operação. Isto ocorre porque o controlador começa a atuar sobre variáveis manipuladas ( $F_1$  e  $F_2$ ) apenas ao perceber que as variáveis controladas ( $H_3$  e  $H_6$ ) aproximam-se de seus valores desejáveis. Essas ações de controle são independentes das variações dos estados e, portanto, tendo o processo real algum tempo morto e/ou freqüentes distúrbios, haverá redução no desempenho.

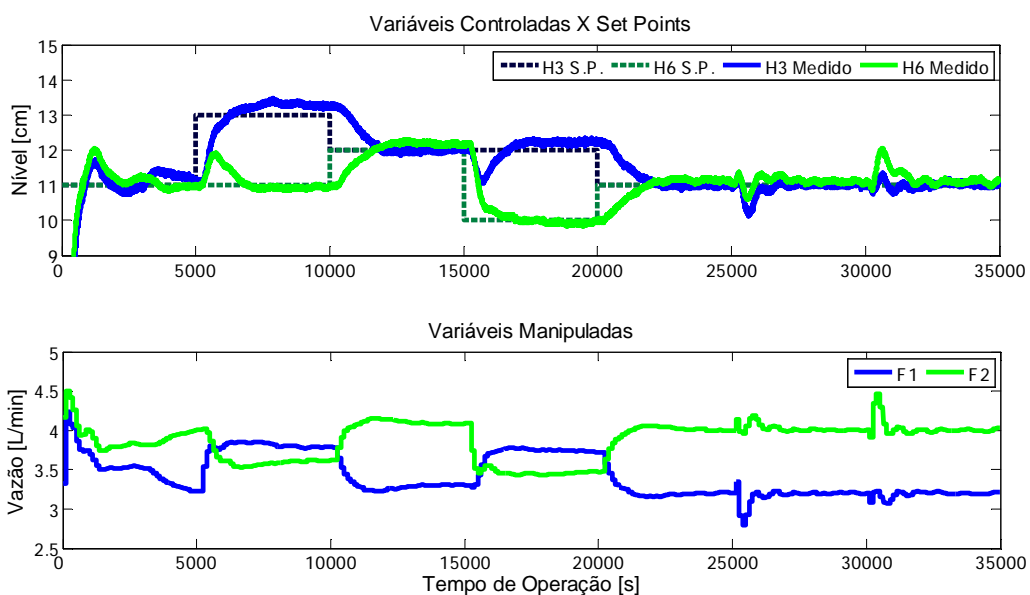
Abaixo, a Tabela 5.9 demonstra os índices quantitativos do somatório do erro quadrático ( $SEQ_{\text{Controle}}$ ), para o teste de controle preditivo sem estimador de estados.

**Tabela 5.9:** Índices de desempenho de controle para o teste sem estimador de estados

Índices Qualitativos de Desempenho do Sistema de Controle			
Controlador	Convergência	$SEQ_{\text{Controle}}$ [cm]	
		H3	H6
MPC	Sim	1,1110	1,2455

### 5.3.2 Teste com Estimador EKF

A seguir, a Figura 5.3 apresenta o resultado do MPC com modelo em espaço de estados e retroalimentado por estados estimados com EKF, para a mesma seqüência de *set points* utilizada para o teste sem estimador. Neste teste com EKF, é possível visualizar ainda, o efeito que uma estimação incorreta de algum dos estados teria sobre as futuras ações de controle. Para que fosse possível, intencionalmente, reproduzir estes erros de estimação, no tempo de 25000 segundos subtraiu-se 10 cm ao valor estimado pelo EKF para o nível  $H_2$  e no tempo no tempo 30000 segundos adicionou-se 10 cm ao valor estimado pelo EKF para o nível  $H_5$  (ver a localização dos distúrbios através da Figura 5.1). Esses erros foram provocados no exato momento de amostragem do controlador e, após estes instantes, o valor estimado pelo EKF foi novamente retroalimentado no sistema de controle.



**Figura 5.3:** Resultado de controle para o teste com estimador EKF

O que se percebe, ao observar o resultado da Figura 5.3, é que este sistema de controle MPC com observação de todos os estados do processo para o cálculo das ações de controle, proporciona uma resposta adequada (desempenho razoável), mantendo as variáveis controladas próximo aos seus *set points* respectivos. Porém, retroalimentado os demais estados do processo, este sistema de controle acaba sendo sensivelmente mais suscetível a distúrbios, quando comparado ao resultado do MPC com correção por bias.

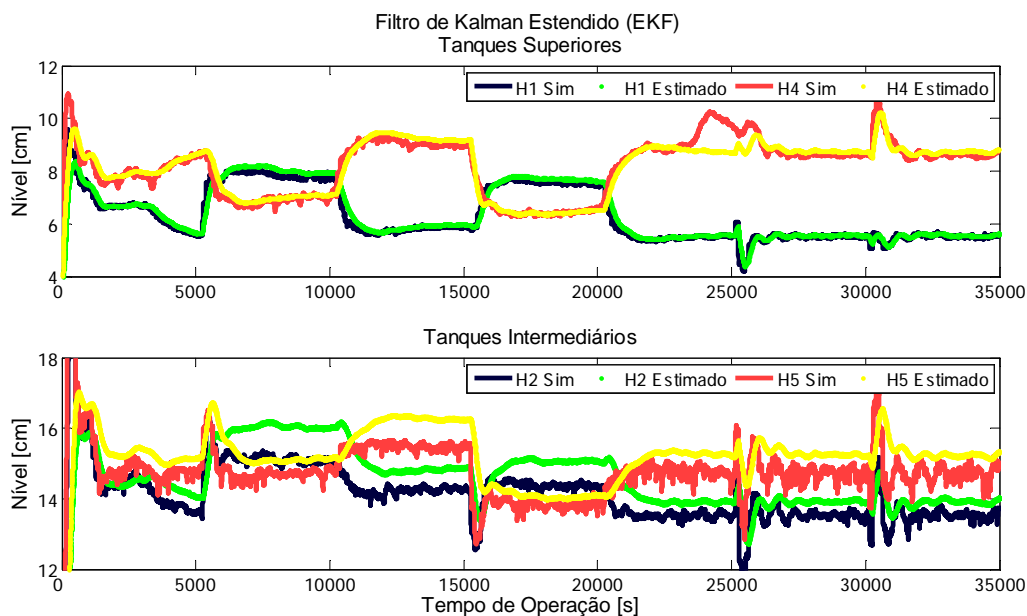
Embora esta adaptação tenha evitado tanta sobre-elevação no início da operação, pela melhor interpretação dinâmica do processo como um todo, o sistema teve uma baixa eficiência para os *set points* mais elevados. Esta falha pode ser melhor justificada quando se observam os estados estimados, os quais têm parte da responsabilidade no cálculo das ações do MPC.

A seguir, a Tabela 5.10 demonstra os índices quantitativos do somatório do erro quadrático ( $SEQ_{\text{Control}})$ , para o teste de controle preditivo com estimador EKF.

**Tabela 5.10:** Índices de desempenho de controle para o teste com estimador EKF

Índice Qualitativo de Desempenho do Sistema de Controle			
Controlador	Convergência	$SEQ_{\text{Control}} [\text{cm}]$	
		H3	H6
MPC	Sim	0,7606	0,7297

A seguir, a Figura 5.4 demonstra os resultados de estimação dos níveis superiores e intermediários, para o teste de controle preditivo com estimador EKF.



**Figura 5.4:** Resultado de estimação em tempo real (EKF)

O que se observa, ao analisar a Figura 5.4, diz respeito justamente aos objetivos de controle, pois, como já fora mencionado e argumentado nos Capítulos 3 e 4, o “Modelo A” utilizado pelo estimador na etapa de predição, possuiria alguma discrepância dinâmica quando comparado ao sistema real. Isto conduz a uma estimação de baixa qualidade, tanto para

pontos dinâmicos quanto também para os pontos estacionários. Logo, esta estimação com falha nas regiões operacionais de níveis mais elevados produz ações erradas por parte do controlador também (ações não ótimas).

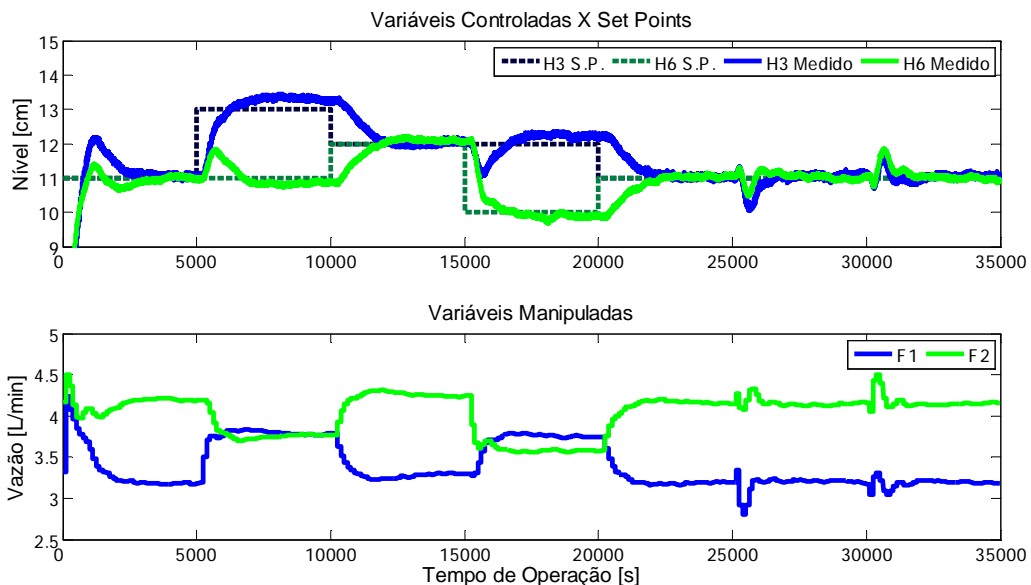
A seguir, a Tabela 5.11 demonstra os valores do somatório do erro quadrático ( $SEQ_{Estimação}$ ), para o teste de controle preditivo com estimador EKF.

**Tabela 5.11:** Índices de desempenho de estimação para o teste com estimador EKF

Algoritmo	Convergência	Índice Qualitativo de Desempenho do Filtro					
		SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
		H1	H2	H3	H4	H5	H6
EKF	Sim	0,0785	0,8168	0,0017	0,1611	0,8219	0,0007

### 5.3.3 Teste com Estimador CEKF

A seguir, a Figura 5.5 apresenta o resultado do MPC com modelo em espaço de estados e retroalimentado por estados estimados com CEKF. Os critérios adotados para o teste com estimador CEKF foram essencialmente os mesmo estabelecidos para o teste com estimador EKF.



**Figura 5.5:** Resultado de controle para o teste com estimador CEKF

O que se observa, através da Figura 5.5, é que o resultado teve uma qualidade equivalente ao resultado apresentado na subseção anterior (do teste com estimador EKF).

No Capítulo 4, observou-se que o Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF) apresentavam um desempenho bastante semelhante, se as variáveis de estados não recaíssem sobre os limites operacionais incorporados na etapa de otimização do CEKF. Logo, era de se esperar que ambos os algoritmos, EKF e CEKF, também tivessem um resultado muito semelhante em termos de controle, para as aplicações de tempo real.

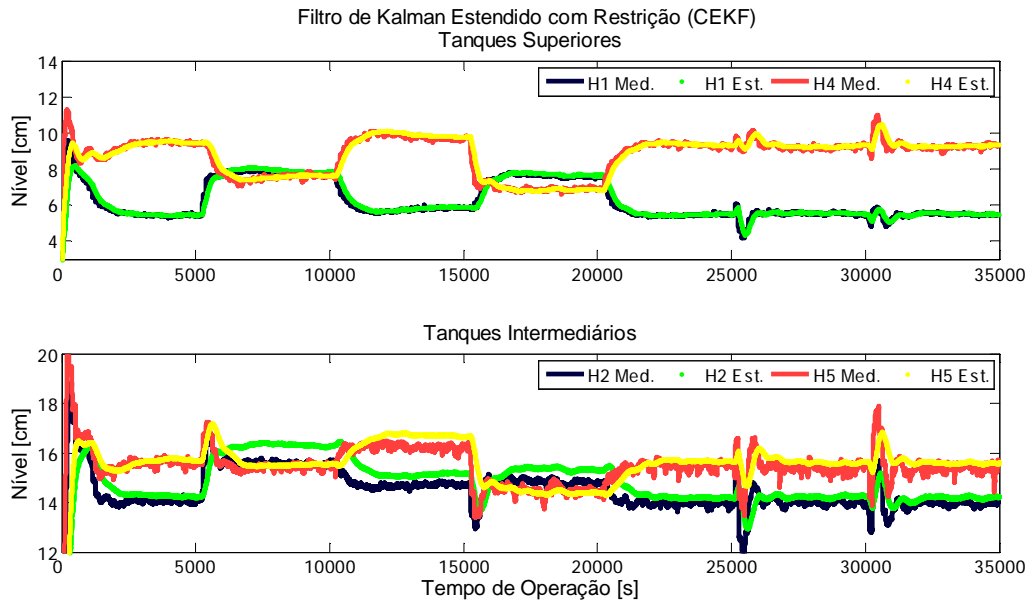
Uma constatação interessante que se pode fazer a respeito dos erros de estimação (produzidos intencionalmente sobre os estados dos níveis  $H_2$  e  $H_5$ ), é que o controlador, influenciado por estas estimações equivocadas, tende a prever erradamente as saídas para todo o horizonte de predição. E, se a matriz de distúrbios de medição for admitida constante ( $\hat{w}_{k+1} = \hat{w}_{k+2} = \dots = \hat{w}_{k+P}$ ), esta atitude do controlador tende a produzir um baixo desempenho de rejeição a este distúrbio (ver teste da Subseção 5.3.5).

A seguir, a Tabela 5.12 demonstra os valores do somatório do erro quadrático ( $SEQ_{\text{Controle}}$ ), para o teste de controle preditivo com estimador CEKF.

**Tabela 5.12:** Índices de desempenho de controle para o teste com estimador CEKF

Índice Qualitativo de Desempenho do Sistema de Controle			
Controlador	Convergência	SEQ [cm]	
		H3	H6
MPC	Sim	0,7876	0,6602

A seguir, a Figura 5.6 demonstra os resultados de estimação dos níveis superiores e intermediários, para o teste de controle preditivo com estimador CEKF.



**Figura 5.6:** Resultado de estimação em tempo real (CEKF)

Ao se observar a Figura 5.6, nota-se essencialmente, que os erros de estimação verificados no teste com estimador CEKF foram semelhantes aos encontrados para o teste com estimador EKF. Logo abaixo, a Tabela 5.13 quantifica o somatório do erro quadrático ( $SEQ_{Estimação}$ ), para este teste com estimador CEKF.

**Tabela 5.13:** Índices de desempenho de estimação para o teste com estimador CEKF

Algoritmo	Convergência	Índice Qualitativo de Desempenho do Filtro					
		SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
		H1	H2	H3	H4	H5	H6
CEKF	Sim	0,0760	0,7058	0,0020	0,1153	0,7013	0,0007

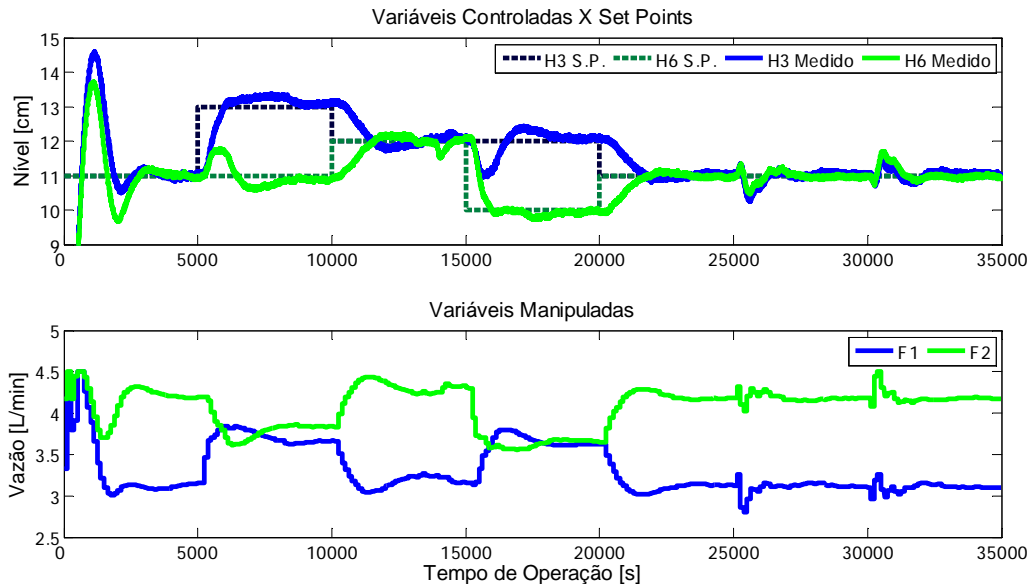
### 5.3.4 Teste com Estimador CEKF (“Modelo B”)

O teste denominado de estimador CEKF (“Modelo B”) é baseado na implementação apresentada para o teste na Subseção 5.3.3, cuja única diferença é o modelo não-linear utilizado na etapa preditiva do estimador de estados. Este modelo é o “Modelo B”, apresentado no Capítulo 3, Subseção 3.3.3 e dado pelas Equações 3.19 a 3.36.

O “Modelo B” é um modelo mais representativo ao processo real, portanto com maior potencial de produzir uma estimação de melhor qualidade e, por conseguinte, capaz de aprimorar o desempenho do sistema de controle. Um teste de estimação com CEKF e “Modelo B” foi realizado para a aplicação em tempo real com a finalidade de comprovar estas

expectativas. Os critérios adotados para o teste com estimador CEKF (“Modelo B”) foram essencialmente os mesmo estabelecidos para o teste com estimador EKF.

A seguir, a Figura 5.7 apresenta o resultado do MPC com modelo em espaço de estados e retroalimentado por estados estimados com CEKF (“Modelo B”).



**Figura 5.7:** Resultado de controle para o teste com estimador CEKF (“Modelo B”)

O que se observa, através da Figura 5.7, é que as expectativas de melhorias nos objetivos de controle são ratificadas. Embora esta implementação tenha apresentado uma maior suscetibilidade a distúrbios e uma sobre-elevação inicial, a estimação de melhor qualidade através deste “Modelo B” (Figura 5.8), acabou por eliminar o surgimento de *offset*, que o sistema apresentara nas outras duas implementações testadas anteriormente (ver Subseções 5.3.2 e 5.3.3).

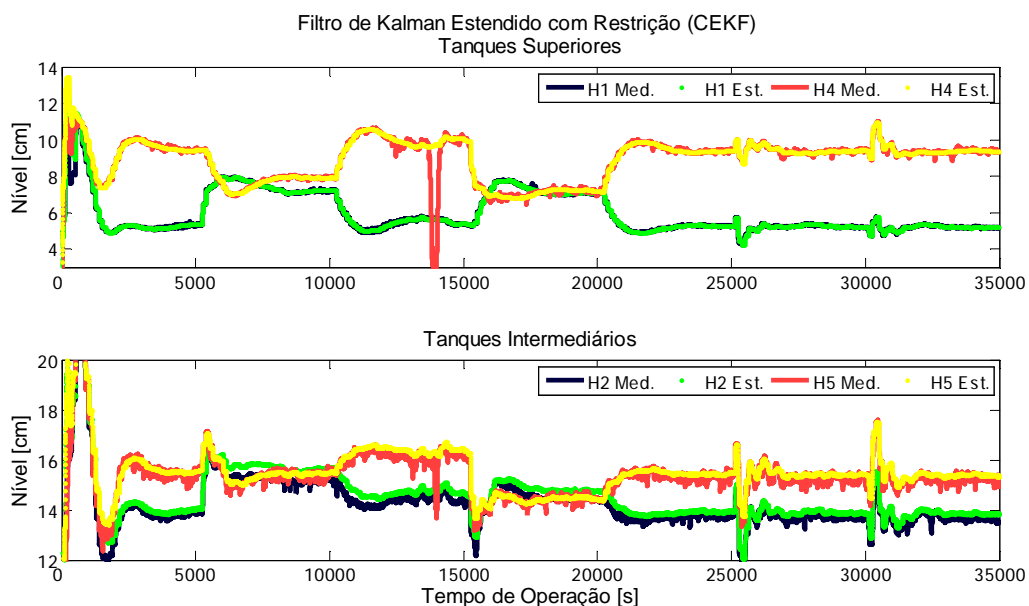
A Tabela 5.14, demonstra os índices de somatório do erro quadrático ( $SEQ_{\text{Controle}}$ ), para o teste de controle preditivo com estimador CEKF (“Modelo B”).

**Tabela 5.14:** Índices de desempenho de controle para o teste com CEKF (“Modelo B”)

		Índice Qualitativo de Desempenho do Sistema de Controle	
Controlador	Convergência	SEQ [cm]	
		H3	H6
MPC	Sim	0,9637	0,9742



A seguir, a Figura 5.8 demonstra os resultados de estimação dos níveis superiores e intermediários, para o teste de controle preditivo com estimador CEKF (“Modelo B”).



**Figura 5.8:** Resultado de estimação em tempo real CEKF (“Modelo B”)

Ao observar a Figura 5.8, nota-se que, entre os tempos de 10000 e 15000 segundos, ocorreu um distúrbio não intencional no nível do tanque  $T_4$ . Esse distúrbio se tornou levemente pronunciável no nível controlado  $H_6$  (Figura 5.7), após algum atraso de tempo. Porém, tal distúrbio não foi tão efetivo na estimação dos estados a ponto de provocar maiores erros no cálculo das ações de controle.

Logo abaixo, a Tabela 5.15 quantifica o somatório do erro quadrático ( $SEQ_{Estimação}$ ), para o teste de controle preditivo com estimador CEKF (“Modelo B”).

**Tabela 5.15:** Índices de desempenho de estimação para o teste com CEKF (“Modelo B”)

		Índice Qualitativo de Desempenho do Filtro					
Algoritmo	Convergência	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
		H1	H2	H3	H4	H5	H6
CEKF	Sim	0,0564	0,2636	0,0015	0,3394	0,3028	0,0007

### 5.3.5 Teste de Predição Com a Matriz de Distúrbio por Decaimento

#### Exponencial

Uma das grandes deficiências de controladores preditivos é certamente o seu desempenho quanto à rejeição de distúrbios. Parte desse mau desempenho pode ser explicada pela própria forma de cálculo das predições futuras no MPC (Equação 5.3), pois o único termo da equação de predição que possui características de *feedback* do processo é a matriz de distúrbio ( $\hat{w}_{k+i}$ ).

$$\hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} = su \cdot \Delta u_{\begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix}} + sx \cdot \Delta x_k + I_{I(p \times ny) \times (ny)I} \cdot \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (5.3)$$

Essa matriz representa a discrepância entre o valor mensurado da variável controlada e a sua predição ( $\hat{w}_{k+1} = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}$ ). Porém, não se possuem informação sobre as variáveis controladas no instante de tempo  $k+1$  e nem em tempos futuros. Então, normalmente a hipótese utilizada para essa matriz é:

$$\hat{w}_{k+p} = \dots = \hat{w}_{k+2} = \hat{w}_{k+1} = \hat{w}_k \quad (5.4)$$

$$\text{com } \hat{w}_k = y_k - \hat{y}_k \quad (5.5)$$

Essa hipótese é justamente a causadora desse mau desempenho, porque considera que para todo horizonte de predição haverá uma discrepância constante entre a variável controlada e sua predição. Mas na prática, o que se imagina, é que a ação do MPC diminua esse erro com o tempo crescente.

Como a utilização do MPC com modelo em espaço de estados e retroalimentado por estados estimados, prevê um conhecimento tal da dinâmica do processo que se possa afirmar que as ações futuras serão capazes de diminuir a discrepância entre o valor predito e o valor real da variável controlada, com o tempo crescente. Então, em tese, pode-se trabalhar com alguma forma de decaimento para essa variável de distúrbio ao longo do horizonte de predição ( $\hat{w}_{k+1} > \hat{w}_{k+2} > \dots > \hat{w}_{k+p}$ ).

Além disso, se a utilização de estimadores de estados pode ser uma fonte extra de distúrbios no sistema de controle (através dos erros de estimação dos estados), torna-se importante realizar testes modificando esta variável e verificando as conseqüências em termos de controle.

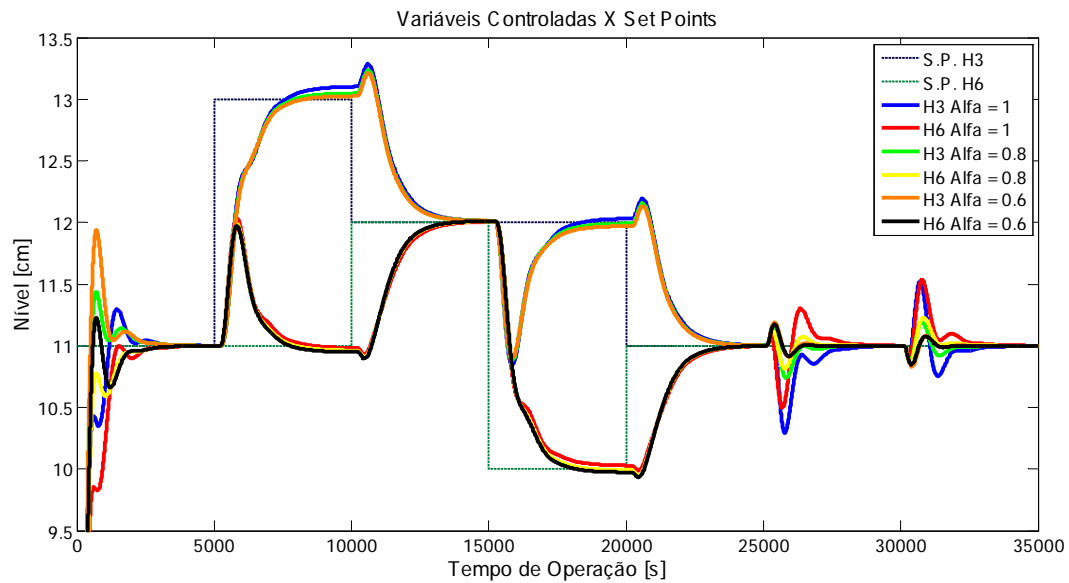
Segundo Maciejowsky (2000), uma das formas mais usuais encontradas na literatura é trabalhar com um decaimento exponencial para este distúrbio de medição, como visualizado através da Equação 5.6, abaixo:

$$\hat{w}_{k+i} = \alpha^i \cdot \hat{w}_k \quad \text{com } 0 < \alpha < 1 \quad (5.6)$$

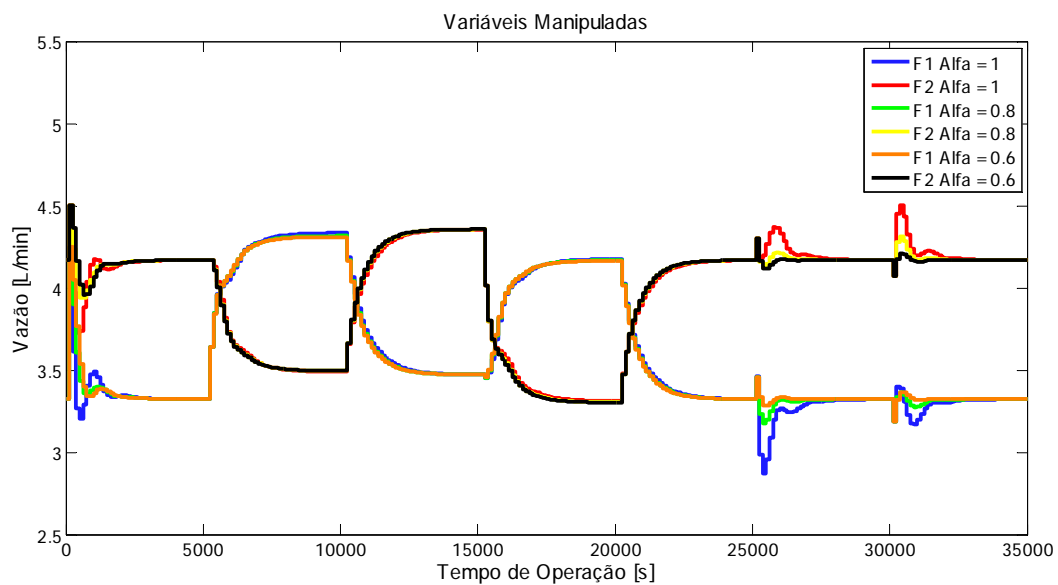
$$\text{onde } \hat{w}_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1} \quad (5.7)$$

Todos os testes realizados nesta seção, mudanças de *set points* e a inserção de distúrbios, foram aplicados de forma semelhante às aquelas apresentadas na Seção 5.3.2.

Através de simulação, é possível demonstrar como a matriz de distúrbio por decaimento exponencial proporciona uma melhora na rejeição de distúrbios do tipo pulso. A Figura 5.9 demonstra os resultados dos testes de simulação, para as saídas controladas, com  $\alpha = 1$  (distúrbio constante),  $\alpha = 0,8$  e  $\alpha = 0,6$  (distúrbio exponencial). A seguir, a Figura 5.10 demonstra as ações de controle para este teste.

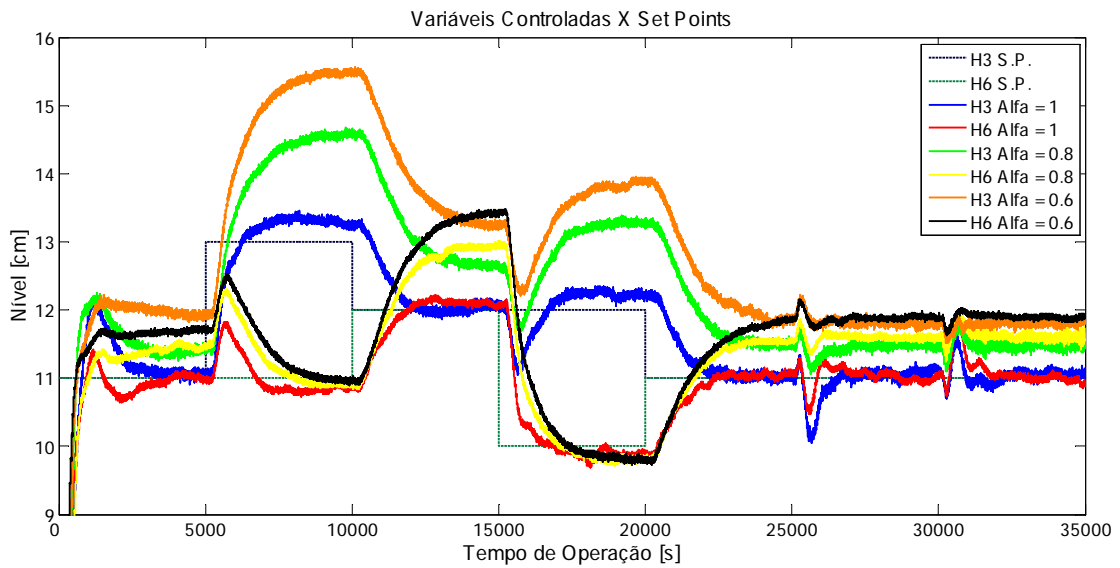


**Figura 5.9:** Resultado de controle para a simulação com matriz de distúrbio por decaimento exponencial

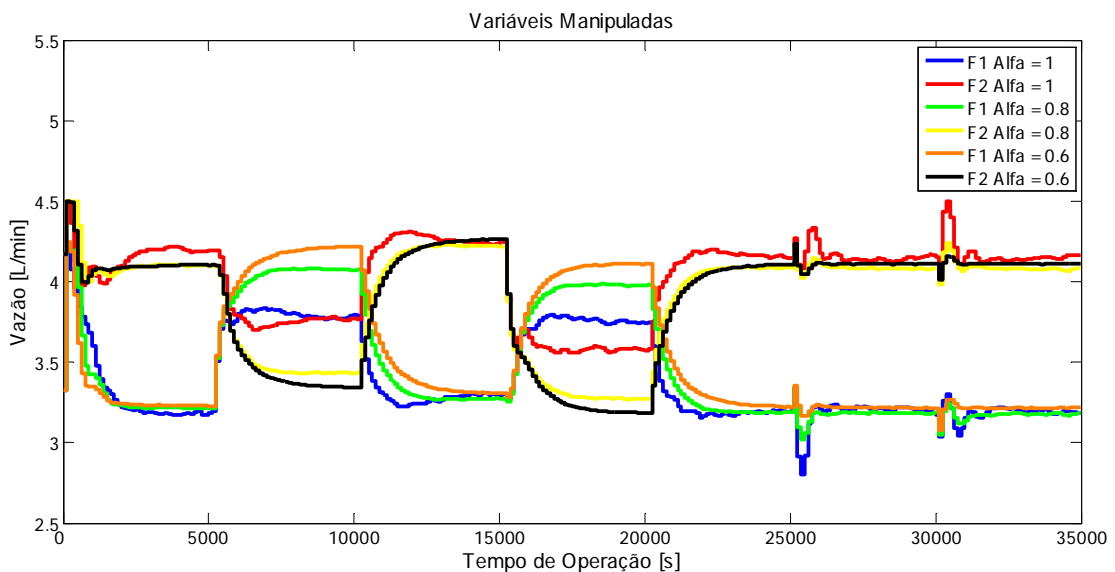


**Figura 5.10:** Ações de controle para a simulação com matriz de distúrbio por decaimento exponencial

Entretanto, quando se aplica o mesmo conceito ao processo da *Planta de Seis Tanques Esféricos* (Figura 5.11), um resultado de baixa qualidade é verificado. Neste caso, observa-se que embora esta adaptação tenha efetivamente rejeitado melhor os distúrbios conforme se diminui o valor de  $\alpha$ , a resposta tende a apresentar um *offset* mais elevado. A Figura 5.12 demonstra as ações de controle para esse teste.



**Figura 5.11:** Resultado de controle para a operação em tempo real com matriz de distúrbio por decaimento exponencial



**Figura 5.12:** Ações de controle para a operação em tempo real com matriz de distúrbio por decaimento exponencial

Tal comportamento, verificado no teste acima, reflete o problema decorrente de processos altamente não-lineares que apresentam um seguimento de livre *offset*.

Esse comportamento de livre *offset* foi estudado por Maciejowsky (2000) e é referido em inglês por *offset-free tracking*. A explicação para esse comportamento é que a saída tenderá a

um valor incorreto, se o modelo preditivo não refletir o comportamento real da planta, no caso particular, se o ganho estacionário do modelo não estiver correto.

No caso da *Planta de Seis Tanques Esféricos*, este comportamento pode estar relacionado aos coeficientes de descarga dos tanques não serem de fato constantes. Por esta mesma razão, a alternativa mais indicada por Maciejowsky (2000) é continuar utilizando a variável de distúrbio ( $\hat{w}_{k+i}$ ), constante para todo o horizonte de predição. Pois, dessa forma, o controlador tende a atuar como um integrador, eliminando a ocorrência deste *offset*.

A Tabela 5.16, demonstra o índice de somatório do erro quadrático ( $SEQ_{\text{Controle}}$ ), para o teste de predição com a matriz de distúrbio por decaimento exponencial com  $\alpha = 0,8$ . Logo após, a Tabela 5.17 demonstra o mesmo índice para o teste com  $\alpha = 0,6$ .

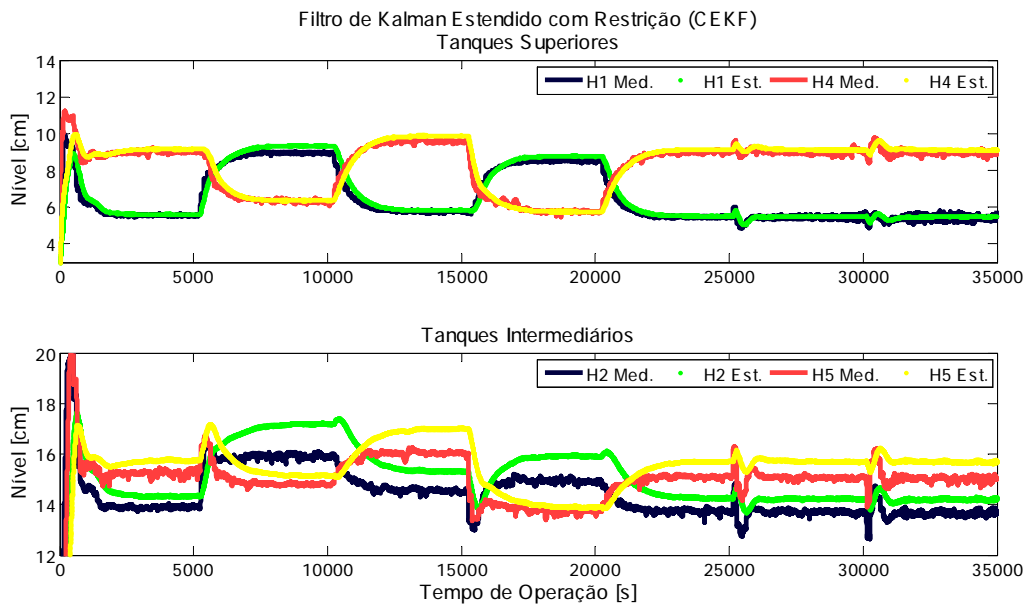
**Tabela 5.16:** Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,8$

Índice Qualitativo de Desempenho do Sistema de Controle			
Controlador	Convergência	SEQ [cm]	
		H3	H6
MPC	Sim	1,5524	1,2302

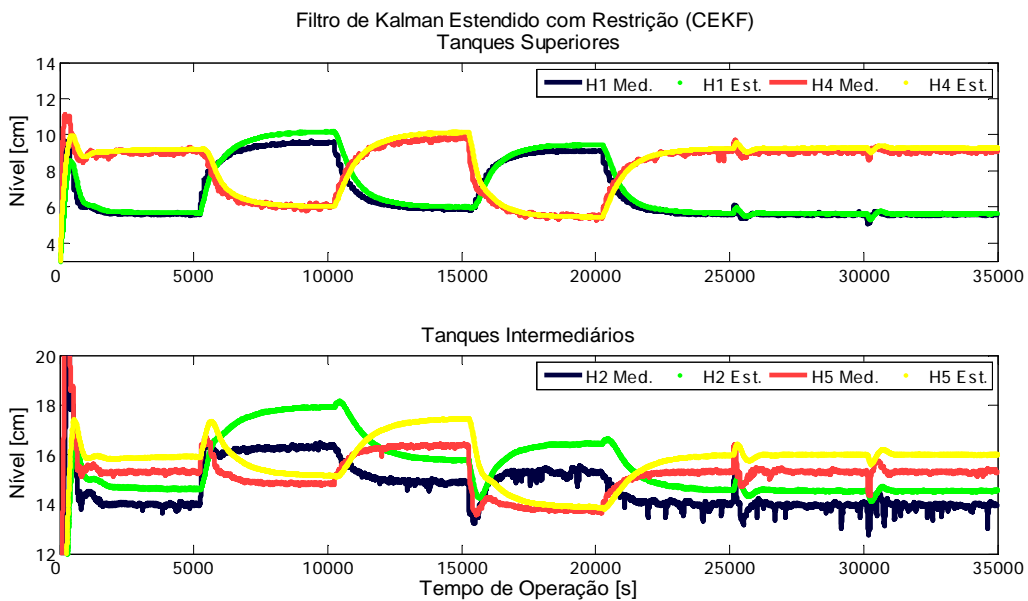
**Tabela 5.17:** Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,6$

Índice Qualitativo de Desempenho do Sistema de Controle			
Controlador	Convergência	SEQ [cm]	
		H3	H6
MPC	Sim	2,7221	1,2143

A seguir, a Figura 5.13, demonstra os resultados de estimação dos níveis superiores e intermediários, para o teste de predição com a matriz de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,8$ . Já a Figura 5.14, demonstra os resultados de estimação para o teste de predição com a matriz de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,6$ .



**Figura 5.13:** Resultado de estimação em tempo real para a da matriz de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,8$



**Figura 5.14:** Resultado de estimação em tempo real para a da matriz de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,6$

Observando a Figura 5.13 e a Figura 5.14, verifica-se que a estimação também foi de baixa qualidade para os níveis intermediários ( $H_2$  e  $H_5$ ), quando o processo atingiu pontos de operação mais elevados para estes níveis (valores acima de 15 cm). Vale ressaltar que o estimador utilizado para estes testes foi o Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF).

A seguir, as Tabela 5.18 e Tabela 5.19 resumem em número os resultados desta estimação de baixa qualidade, para  $\alpha = 0,8$  e  $\alpha = 0,6$ , respectivamente.

**Tabela 5.18:** Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,8$

		Índice Qualitativo de Desempenho do Filtro					
Algoritmo	Convergência	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
		H1	H2	H3	H4	H5	H6
CEKF	Sim	0,1537	1,1634	0,0018	0,1829	0,8331	0,0009

**Tabela 5.19:** Índices de desempenho de controle para o teste de distúrbio por decaimento exponencial, com  $\alpha = 0,6$

		Índice Qualitativo de Desempenho do Filtro					
Algoritmo	Convergência	SEQ [cm <sup>2</sup> ]					
		H1	H2	H3	H4	H5	H6
CEKF	Sim	0,1480	1,4317	0,0014	0,1297	1,0855	0,0006



## 5.4 Conclusões Parciais do Capítulo 5

No Capítulo 5, realizou-se a implementação de sistemas de controle MPC com modelo em espaço de estado e retroalimentado por estados estimados, por ambos os algoritmos de estimação (EKF e CEKF). Esta aplicação em tempo real foi realizada para a *Planta de Seis Tanques Esféricos*.

A princípio, realizou-se um teste de controle com MPC em espaço de estado e correção de bias. Essa implementação gerou bons resultados, mantendo as variáveis controladas em seus respectivos *set points*.

Na seqüência, realizou-se o teste de controle com MPC em espaço de estado e retroalimentação de estados através do Filtro de Kalman Estendido (EKF). Esta implementação gerou resultados razoáveis, mantendo as variáveis controladas próximas de seus respectivos *set points*, porém apresentando *off-set* para as operações em níveis mais elevados. A razão para isso ter ocorrido pode ser explicada pelas falhas de estimação nos níveis intermediários. Estas falhas de estimação produziram ações não ótimas por parte do sistema de controle.

O próximo teste foi realizado a partir do controle com MPC em espaço de estado e retroalimentação de estados através do Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF). O que se pôde concluir a respeito dos resultados desse teste é que foram bastante semelhantes aos encontrados no teste com EKF. As falhas deste teste ocorreram por motivos idênticos aos constatados no teste com EKF.

Na tentativa de verificar o efeito que uma melhor estimação produziria no sistema de controle, testou-se o MPC retroalimentado por estados estimados e uso do “Modelo B” na etapa preditiva do CEKF. Como já era esperado, os resultados desta melhora na estimação de estados produziram uma melhora nas ações de controle e, desta forma, o MPC evitou o surgimento do *off-set*, constatado nos testes anteriores.

Por fim, um teste foi realizado pela alteração da chamada de matriz de distúrbios, na equação de predição do controlador. Essa matriz foi assumida com um decaimento exponencial, ao longo do horizonte predição. O intuito deste teste era prover uma melhor rejeição a distúrbios. O resultado da simulação provou que esta adaptação gera bons

resultados para distúrbios tipo pulso. Porém na aplicação em tempo real, estes mesmos resultados não foram evidenciados. No processo real, esta mudança provocou o surgimento de um elevado *off-set*. Chegou-se a conclusão que para processos altamente não lineares, essa matriz deve ser constante para todo o horizonte de predição, pois assim o MPC funciona como um controlador com integrador.

# Capítulo 6

## Conclusão

A seguir, são resumidas as principais conclusões constatadas nos capítulos de 2 a 5 desta dissertação.

No Capítulo 2, o estudo sobre a metodologia de controle preditivo apresentou as principais vantagens de utilizar o Controlador Preditivo baseado em Modelo (MPC) para processos multivariáveis, estabeleceu os princípios de funcionamento e justificou os motivos pelos quais a representação no espaço de estados consiste na formulação mais adequada para capturar o comportamento dinâmico de um processo. Aqui, a idéia principal desta dissertação já se tornara bem clara e incisiva, pois se é possível ter um melhor entendimento da dinâmica do processo com modelos em espaço de estados, então será possível calcular as ações de controle com maior precisão e, por conseguinte, resultará em uma melhora de desempenho para o sistema em malha fechada. No entanto, viu-se que para que tal estrutura de controle pudesse vir a funcionar na prática, haveria a necessidade de utilizar estimadores de estados associado a esse sistema de controle, fornecendo os valores estimados para essas variáveis de estado no atual instante de tempo.

Ainda, neste capítulo, deu-se seqüência com o estudo sobre as metodologias de estimação de estados existentes, onde foi dito que os algoritmos de Filtro de Kalman Estendido (EKF) e Filtro de Kalman Estendido com Restrição (CEKF) são métodos eficientes

e geram soluções subótimas, para a estimação em processos não-lineares. Esses algoritmos são eficientes porque se baseiam nos princípios de um estimador ótimo, o qual processa todas as medidas disponíveis no processo para encontrar um erro mínimo para os estados estimados. E, fazem isso através de uma função-custo quadrática, para que o problema de otimização tenha um mínimo global e para garantir uma rápida convergência, próximo ao valor estimado. A grande vantagem destes métodos de estimação, baseados no Filtro de Kalman, está em considerar os ruídos de processo e ruídos de medição como variáveis randômicas que obedecem funções de densidade probabilística.

Assim como acontece com o controlador preditivo, os estimadores de estados também dependem da determinação de um modelo de boa qualidade, o qual possa ser representativo ao sistema real, para qualquer instante de tempo. Boa parte dos resultados expressivos parte desta condição primária.

No Capítulo 3, apresentou-se a *Planta de Seis Tanques Esféricos*, a qual se revela como uma excelente planta laboratorial para estudos de casos práticos, inclusive possibilitando o aprendizado dos mais diversos interesses na área de controle avançado de processos, como é o caso da identificação de modelos, do controle preditivo multivariável e da estimação de estados, entre outros. Para este trabalho, algumas dificuldades inerentes de processos reais puderam ser inseridas nesta planta laboratorial, levando o sistema a apresentar aspectos característicos de fase não mínima (zeros de transmissão e atrasos de tempo). Entretanto, viu-se que por problemas em alguns dos equipamentos instalados na planta, surgiu a necessidade de se adaptar controladores cascata, fechando assim a malha mestre de controle em termos de níveis (*set points* para os controladores escravos). Desta forma, garantiu-se que as incertezas oriundas do mau funcionamento desses equipamentos não interferissem tanto sobre o problema original de controle. Ao final deste capítulo, pode-se realizar uma análise a respeito das divergências entre os modelos fenomenológicos utilizados pelos estimadores e a resposta do processo real.

No Capítulo 4, estudaram-se fundamentalmente as influências dos parâmetros de ajuste dos estimadores de estados. Através de alguns dados reais da *Planta de Seis Tanques Esféricos*, os algoritmos de estimação, EKF e CEKF, puderam ser validados de forma *off-line*. Nestes testes, verificou-se que ambos os algoritmos apresentam resultados de estimação bastante semelhantes. Além disso, se bem ajustados, estes métodos funcionam muito bem

para processo com constantes mudanças de *set points*, porém podem apresentar uma estimação errada em processos de frequentes distúrbios, dependendo da direção em que ocorre tal perturbação. Outro fator importante a ser destacado é que pode haver uma melhora significativa na qualidade de estimação, tanto em regiões dinâmicas quanto estacionárias, se um modelo mais fiel a dinâmica do processo real for utilizado. Verificou-se ainda que a razão entre os dois principais parâmetros de ajuste dos filtros de Kalman, as matrizes de covariância dos ruídos de processo e medição ( $Q$  e  $R$ ), deve ser escolhida com base na confiança creditada entre modelo não-linear adotado e as medições de saída do processo. Por fim, os resultados dos testes apresentados neste capítulo, serviram de base para as aplicações em tempo real, apresentados no Capítulo 5.

No Capítulo 5, realizou-se a implementação dos estimadores, EKF e CEKF, associados ao sistema de controle em tempo real. Ao se avaliarem os resultados deste sistema de controle com modelo em espaço de estados, tanto para EKF quanto CEKF (cujas respostas apresentadas foram visualmente semelhantes), pôde-se perceber que o controle foi mais suscetível a distúrbios e também apresentou algum *offset*, quando se operou em níveis mais elevados para os tanques intermediários. A justificativa para esta falha ter ocorrido, pode ser explicada pelo fato dos filtros terem estimado os valores dos estados de forma muito distantes dos valores reais destas variáveis. Esta afirmação foi validada quando um teste com um modelo de melhor compreensão da dinâmica do processo real foi utilizado pelo estimador. Neste caso, a estimação foi mais coerente, e esta implementação acabou por eliminar o surgimento deste *offset*.

Ainda no Capítulo 5, um teste foi realizado alterando o único termo da equação de predição do MPC que fornece informações retroalimentadas das saídas controladas. Esse termo, chamado de matriz de distúrbios, por representar a discrepância entre as saídas medidas e suas respectivas predições, foi assumido com um decaimento exponencial ao longo do horizonte predição. O intuito deste teste era de prover um sistema de controle que rejeitasse mais eficientemente os distúrbios não mensurados. A simulação provou que esta adaptação gera bons resultados para distúrbios tipo pulso. Porém, quando se realizou o mesmo teste em tempo real, para a *Planta de Seis Tanques Esféricos*, verificou-se que essa adaptação provocou o surgimento de um enorme *offset*. Chegou-se a conclusão que a única alternativa viável para processos altamente não-lineares, que apresentam o chamado seguimento de livre *offset*, é utilizar o valor de distúrbio filtrado no instante atual, constante para todo o horizonte

de predição, pois dessa forma o controlador atua como um integrador, e tende a eliminar o surgimento deste efeito indesejável.

Por fim, é válido lembrar que esta tentativa de sistematizar uma análise sobre a qualidade dos algoritmos de estimação, em respeito de sua utilização para retroalimentação de estados em sistemas de controle de processos, é apenas uma forma simples de dar visibilidade a aspectos importantes na escolha das estratégias de controle, sintonia e ajuste de parâmetros de controladores e estimadores. Cabe salientar que cada processo tem suas peculiaridades e desta forma, estas técnicas devem melhor ser estudadas caso a caso.

## 6.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Embora os resultados de controle preditivo com modelo em espaço de estados tenham sido mais suscetíveis a distúrbios, cabe ressaltar que filtros de Kalman estendidos podem ter seus parâmetros de ajuste ( $Q$  e  $R$ ) alterados para que os estados sejam calculados com maior ou menor influência dos ruídos de medição. Estas modificações podem resultar em uma melhora do sinal de controle dependendo do processo a ser controlado.

Como sugestão para estudos futuros, recomenda-se novos testes com diferentes ajustes dos estimadores, pois desta forma poderiam ser conhecidas as melhorias de controle do processo em razão de uma confiança maior no modelo versus uma maior confiança nos valores medidos das saídas controladas.

Outro importante estudo envolvendo estimadores seria adaptar estes algoritmos para serem aplicados como estimadores de parâmetros do modelo a fim de prover novo modelo para sistema de controlador preditivo utilizado no processo.

Adicionalmente, estes estimadores de estados EKF e CEKF poderiam ser aplicados em associação com um sistema de controle preditivo não-linear, podendo desta maneira, apresentar resultados ainda mais significativos para processos não-lineares.

Uma última alternativa para trabalhos futuros seria implementar um estimador de estados MHE para testar a estimação dos estados e as melhorias em termos de controles de processo.

# Referências Bibliográficas

Afonso, P. A. F. N. A., Ferreira, J. M. L., Castro, J. A. A. M., “Sensor fault detection and identification in a pilot plant under process control”, Trans IChemE, v.76, part.A - (1998)

Agachi, P. S., Nagy, Z. K., Cristea, M. V., Lucaci, I. A., “Model based control – case studies in process engineering”, Wiley VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim - (2006).

Aguirre, L. A., “Introdução à identificação de sistemas – técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais”, Editora UFMG, ed. 2, Belo Horizonte - (2004)

Assis, A. J., “Projeto de controladores adaptativos auto-ajustáveis”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo - (1996)

Freitas, A. A., Borges, G. A., Bauchspiess, A., “Avaliação do filtro de Kalman estendido para estimação de parâmetros de processo de nível de líquidos”, LAVSI - UNB, Brasília - (2004)

Bishop, G., Welch, G., “An introduction to the Kalman filter”, Chapel Hill, North Carolina - (2006)

Brown, R. G., “Introduction to random signal analysis and Kalman filtering”, Wiley & Sons Inc, New York - (1983)

Camacho, E. F., Bordons C., “Model predictive control”, Springer Verlag, London - (1999).

Dwyer, A. O., “Handbook of PI and PID controller tuning rules”, Imperial College Press, Ireland, ed. 2 - (2006)

Gelb, A., Kasper, J. F. Jr., Nash R. A. Jr., Price, C. F., Sutherland, A. A. Jr., “Applied optimal estimation”, The M.I.T. Press, Massachusetts - (1974)

Grewal, M. S., Andrews, A. P., “Kalman filtering theory and practice using Matlab”, ed.2, John Wiley & Sons Inc, Toronto - (2001)

Escobar, M., “Abordagem flexível, robusta e estruturada para o projeto de controladores PID multivariáveis.”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - (2006).

Ferreira, L. S., Marcon, S. M., Trierweiler, J. O., Secchi, A. R., “Desenvolvimento de um software de analisador virtual para bioprocessos”, Oktober Fórum, Porto Alegre - (2002)

Findeisen, P. K., “Moving horizon state estimation of discrete time systems”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade de Wisconsin, Madison - (1997)

- Froisy J. B., “Model Predictive Control – Building a Bridge between Theory and Practice”, *Computers and Chemical Engineering*, v.30, p.1426-1435 - (2006)
- Jazwinski, A. H., “Stochastic processes and filtering theory”, Academic Press Inc., New York - (1970)
- Johansson, K. H., “The quadruple tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.8, n.3, p.456-465 - (2000)
- Haykin, S., “Kalman filtering neural networks”, John Wiley & Sons Inc, Ontario - (2001)
- Kalman, R. E., “A new approach to linear filtering and prediction problems”, *Trans. ASME - Basic Engineering*, v.82, série D, p.35-45 - (1960)
- Heijden, F., Duin, R. P. W., Ridder, D., Tax, D. M. J., “Classification parameter estimation and state estimation - an engineering approach using MATLAB”, John Wiley and Sons Inc., Chichester - (2004)
- Kay, S. M., “Fundamentals of statistical signal processing - estimation theory”, Prentice Hall, New Jersey - (1993)
- Kwon, W. H., Han, S., “Receding horizon control - model predictive for state models”, Springer-Verlag, ed. 1, London (2005)
- Lee J. H., Morari M. and Garcia C. E., “State Space Interpretation of Model Predictive Control”, California Institute of Technology, Pasadena - (1992)
- Leigh, J. R., “Control Theory”, The Institution of Electrical Engineers, ed. 2, London – (2004)
- Leu, G., Baratti, R., “An extend Kalman filtering approach with a criterion to set its tuning Parameters: application to a catalytic reactor”, *Computers Chemical Engineering*, v.23, p.1839-1849 - (2000)
- Machado, V. C., “Planejamento de Perturbações para a Identificação de Modelos Dinâmicos”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - (2004)
- Maciejowsky, J. M., “Predictive control with constraints”, Prentice Hall, London - (2000)
- Marcon, S. M., Secchi, A. R., Trierweiler, J. O., Teixeira, H. C., Neto, E. A., “Estimação de propriedades em colunas de destilação utilizando filtro de Kalman estendido e estendido com Restrições”, Oktober Fórum, Porto Alegre - (2004)
- Maybeck, P. S., “Stochastic models, estimation, and control”, Academic Press, v.1, cap.1, Ohio - (1979)



Moon, T. K., Stirling, W. C., “Mathematical methods and algorithms for signal processing”, Prentice Hall, New Jersey - (2000)

Morari, M., Lee, J. H., Garcia, C. E., “Model predictive control”, California Institute of Technology, Pasadena - (2002)

Muske, K. R., Rawlings, J. B., “Linear model predictive control of chemical process”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade do Texas, Austin - (1995)

Ogata, K., “Engenharia de controle moderno”, Tradução: Kohn A.F., Moraes J.C.T.B., Prentice/Hall do Brasil Ltda., Rio de Janeiro - (1982).

Ogunnaike, B.A. e Ray, W.H., “Process dynamics, modeling, and control”, Oxford University Press Inc., New York - (1994)

Orderud, F., “Comparison of extend filter Kalman approaches for state space models with nonlinear measurements”, Trondheim - (2005)

Orukpe, P. E., Jaimuokha, I., “Basics of model predictive control”, Imperial College, London - (2005)

Propoi, A. I., “Use of LP methods for synthesizing sampled-data automatic”, Automatic Remote Control, v. 24, p.837-844 - (1963)

Qin, S. J., Badgwell, T. A., “A survey of industrial model predictive control technology”, Control Engineering Practice, v.11, p.733-764 - (2003)

Rao, C. V., Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., “Constrained estate estimation for nonlinear discrete-time systems: stability and moving horizon approximations”, Automatic Control, IEEE Transactions on, v. 48, n. 2, p. 246-258 – (2003)

Robertson, D. G., Lee, J. H., “A least squares formulation for estate estimation”, Journal of Process Control, v.5, n.4, p.291-299 - (1995)

Robertson, D. G., Rawlings, J. B., Lee, J. H., “A moving horizon based approach for least squares estimation” AIChE Journal, v. 42, n.8, p.2209-2224 - (1996)

Salau, N. G., “State estimators evaluation: extended Kalman filters, constrained extended Kalman filter and moving horizon estimator”, Aachen - (2007)

Salau, N. G., “Abordagem sistemática para a construção e sintonia de estimadores de estados não-lineares”, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - (2009)

- Schei, T. S., "On-Line Estimation for Process Control and Optimization Applications", *Journal of Process Control*, v.18, p.821-828 - (2008)
- Schutter, J. D., Geeter, J. D., Lefebvre, T., Bruyninckx, H., "Kalman filters: a tutorial", *Division of Production Engineering, Machine Design and Automation, Katholieke Universiteit Leuven, Heverlee* - (1999)
- Simon, D., "Optimal state estimation - Kalman,  $H_{\infty}$ , and nonlinear approaches", *Wiley & Sons Inc, New Jersey* - (2006)
- Skogestad, S., Postlethwaite, I., "Multivariable feedback control – analysis and design", *John Wiley and Sons Inc., New York* - (1996)
- Teixeira, B. S., "Estimação de estados com restrições para sistemas dinâmicos lineares e não-lineares", *Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte* - (2008)
- Tonel, G., "Avaliação dos estimadores EKF, CEKF e MHE para aplicações em linha em processos", *Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre* - (2008)
- Trierweiler, J. O., "A systematic approach to control structure design", *Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade de Dortmund, Dortmund* - (1997)
- Trierweiler, J. O., Posser, M. S., "PID toolbox manual - uma ferramenta para o ensino e ajuste de controladores PID's", *Departamento de Engenharia Química, UFRGS* - (2002)
- Trierweiler, J. O., Farina, L. A., "RPN Tuning strategy for model predictive control", *Journal of Process Control*, v.13, p.591-598 - (2003)
- Valappil J., Georgakis C., "Systematic estimation of state noise statistics for extended Kalman filters", *AIChE Journal*, v.46, n.2, p.292-308 - (2000)
- Verhaegen, M., Verdult, V., "Filtering and system identification - a least squares approaches", *Cambridge University Press, New York* - (2007)
- Walrand, J., "Lecture notes on probability theory and random processes", *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley* - (2004)
- Zadeh, Z. A., Whalen, B. H., "On optimal control and linear programming", *IRE Transactions on Automatic Control*, p.44-45 - (1962)
- Zhou, J., Luecke, R. H., "Estimation of the covariances of the process and measurement noise for a linear discrete dynamic system", *Computers Chemical Engineering*, v.19, n.2, p.187-195 - (1995)

# Apêndice A

## Equações do MPC (Matriz Dinâmica de Controle)

### Modelo Entrada x Saída

Para uma melhor compreensão da predição das variáveis de saída no MPC, considere o modelo linear relacionado entradas x saídas, e dado pela Equação 1:

$$\Delta \hat{y}_{k+1} = s_1 \cdot \Delta u_k \quad (1)$$

$$\text{onde: } \Delta \hat{y}_{k+1} = \hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^0 \quad (2)$$

Introduzindo o conceito de uma matriz de distúrbios não mensurados  $\hat{w}_{k+1}$ , e isolando  $\hat{y}_{k+1}$ , temos:

$$\hat{y}_{k+1} = s_1 \cdot \Delta u_k + \hat{y}_{k+1}^0 + \hat{w}_{k+1} \quad (3)$$

$$\text{onde: } \hat{w}_{k+1} = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} \quad (4)$$

Assim, desta forma, podem-se relacionar as saídas futuras ou preditas através do princípio de superposição das ações de controle futuras, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} &= s_1 \Delta u_k + \hat{y}_{k+1}^0 + \hat{w}_{k+1} \\ \hat{y}_{k+2} &= s_2 \Delta u_k + s_1 \Delta u_{k+1} + \hat{y}_{k+2}^0 + \hat{w}_{k+2} \\ \hat{y}_{k+3} &= s_3 \Delta u_k + s_2 \Delta u_{k+1} + s_1 \Delta u_{k+2} + \hat{y}_{k+3}^0 + \hat{w}_{k+3} \\ &\dots \\ \hat{y}_{k+m-1} &= s_{m-1} \Delta u_k + s_{m-2} \Delta u_{k+1} + \dots + s_1 \Delta u_{k+m-2} + \hat{y}_{k+m-1}^0 + \hat{w}_{k+m-1} \\ \hat{y}_{k+m} &= s_m \Delta u_k + s_{m-1} \Delta u_{k+1} + \dots + s_1 \Delta u_{k+m-1} + \hat{y}_{k+m}^0 + \hat{w}_{k+m} \\ \hat{y}_{k+m+1} &= s_{m+1} \Delta u_k + s_m \Delta u_{k+1} + \dots + s_2 \Delta u_{k+m-1} + \hat{y}_{k+m+1}^0 + \hat{w}_{k+m+1} \\ &\dots \\ \hat{y}_{k+p-2} &= s_{p-2} \Delta u_k + s_{p-3} \Delta u_{k+1} + \dots + s_{p-m-1} \Delta u_{k+m-1} + \hat{y}_{k+p-2}^0 + \hat{w}_{k+p-2} \\ \hat{y}_{k+p-1} &= s_{p-1} \Delta u_k + s_{p-2} \Delta u_{k+1} + \dots + s_{p-m} \Delta u_{k+m-1} + \hat{y}_{k+p-1}^0 + \hat{w}_{k+p-1} \\ \hat{y}_{k+p} &= s_p \Delta u_k + s_{p-1} \Delta u_{k+1} + \dots + s_{p-m+1} \Delta u_{k+m-1} + \hat{y}_{k+p}^0 + \hat{w}_{k+p} \end{aligned} \quad (5)$$

Ao qual pode ser também ser reescrita como:

$$\hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} = su \cdot \Delta u_{\begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}}^0 + \hat{w}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (6)$$

Com:

$$su = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3} & \dots & 0 \\ s_m & s_{m-1} & s_{m-2} & \dots & s_1 \\ s_{m+1} & s_m & s_{m-1} & \dots & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-2} & s_{p-3} & s_{p-4} & \dots & s_{p-m-1} \\ s_{p-1} & s_{p-2} & s_{p-3} & \dots & s_{p-m} \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & \dots & s_{p-m+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Onde  $\hat{y}_{k+1}$  é o vetor das saídas previstas para o instante  $k+1$ ,  $su$  é a chamada Matriz Dinâmica do Sistema e seus elementos representam as mudanças observadas nas saídas do processo até o instante  $p$ ,  $\hat{y}_{k+1}^0$  é o vetor dos valores previstos das saídas assumindo uma ausência de ação de controle (ou equivalente a uma condição inercial a cada instante de tempo), e o argumento  $k$  é utilizado para indicar o tempo referente à origem da seqüência de previsões.

Observação: A matriz  $\hat{w}_{k+1}$  representa o erro entre o valor mensurável  $y_{k+1}$  e o seu valor de previsão  $\hat{y}_{k+1}$  para o mesmo instante de tempo  $k+1$ . Porém ainda não se possuem informações sobre as variáveis medidas a esse instante de tempo e nem há tempos futuros. Logo, em algoritmos comerciais DMC, uma aproximação é feita e pode ser visualizada na Equação 8, a qual muitas vezes é responsável pelo baixo desempenho destes sistemas de controle para processos regulatórios.

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &= y_k - \hat{y}_k \\ \hat{w}_{k+i} &= \hat{w}_k \quad \text{para } i=1,2,\dots,p+m-1,\dots,p \end{aligned} \quad (8)$$

### Modelo em Espaço de Estado

Para uma melhor compreensão da predição das variáveis de saída no MPC (Matriz Dinâmica de Controle), considere o modelo linear em espaço de estados, e dado pela Equação 9:

$$\Delta x_{k+1} = A.\Delta x_k + B.\Delta u_k \quad (9)$$

$$\Delta \hat{y}_{k+1} = C.\Delta x_{k+1}$$

$$\text{onde : } \Delta \hat{y}_{k+1} = \hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k^0 \quad (10)$$

Introduzindo o conceito de uma matriz de distúrbios não mensurados  $\hat{w}_{k+1}$ , e isolando  $\hat{y}_{k+1}$ , temos:

$$\Delta x_{k+1} = A.\Delta x_k + B.\Delta u_k \quad (11)$$

$$\hat{y}_{k+1} = C.\Delta x_{k+1} + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+1}$$

$$\text{onde : } \hat{w}_{k+1} = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} \quad (12)$$

Expressando o vetor das saídas preditas  $\hat{y}_{k+1}$  em função do vetor de estados no instante anterior  $k$ , por substituição de  $\Delta x_{k+1}$ , temos:

$$\hat{y}_{k+1} = C.\Delta x_{k+1} + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+1} = C.(A.\Delta x_k + B.\Delta u_k) + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+1} \quad (13)$$

Logo, por substituições simples e sucessivas, pode ser obter a predição das saídas para o instante  $k + 2$ , apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+2} &= A.\Delta x_{k+1} + B.\Delta u_{k+1} = A.(A.\Delta x_k + B.\Delta u_k) + B.\Delta u_{k+1} \\ \hat{y}_{k+2} &= C.\Delta x_{k+2} + \hat{y}_{k+1} = C.(A.(A.\Delta x_k + B.\Delta u_k) + B.\Delta u_{k+1}) + C.(A.\Delta x_k + B.\Delta u_k) + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+2} \end{aligned} \quad (14)$$

Fazendo uso de um rearranjo de termos, podemos expressar a saída  $\hat{y}_{k+2}$  da seguinte forma:

$$\hat{y}_{k+2} = (C.A.B + C.B).\Delta u_k + (C.B).\Delta u_{k+1} + \sum_{j=1}^2 C.A^j.\Delta x_k + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+2} \quad (15)$$

Para as saídas futuras, pode-se observar um comportamento dado pela expressão geral:

- Para  $i < m$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+i} = & \sum_{j=1}^i C.A^{j-1}.B.\Delta u_k + \sum_{j=1}^{i-1} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+1} + \sum_{j=1}^{i-2} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+2} + \dots + \\ & + C.B.\Delta u_{k+i-1} + \sum_{j=1}^i C.A^j.\Delta x_k + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+i} \end{aligned} \quad (16)$$

- Para  $i = m$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+m} = & \sum_{j=1}^m C.A^{j-1}.B.\Delta u_k + \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+1} + \sum_{j=1}^{m-2} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+2} + \dots + \\ & + C.B.\Delta u_{k+m-1} + \sum_{j=1}^m C.A^j.\Delta x_k + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+m} \end{aligned} \quad (17)$$

- Para  $i > m$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+i} = & \sum_{j=1}^i C.A^{j-1}.B.\Delta u_k + \sum_{j=1}^{i-1} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+1} + \sum_{j=1}^{i-2} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+2} + \dots + \\ & + \sum_{j=1}^{i-m+1} C.A^{j-1}.B.\Delta u_{k+m-1} + \sum_{j=1}^i C.A^j.\Delta x_k + \hat{y}_k^0 + \hat{w}_{k+i} \end{aligned} \quad (18)$$

Ao qual pode ser também ser reescrita como:

$$\hat{y}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} = su.\Delta u_{\begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix}} + sx.\Delta x_k + I_{[(pxny)x(ny)]}.\hat{y}_k^0 + \hat{w}_{\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (19)$$

Onde  $I_{[(pxny)x(ny)]}$  é a matriz identidade de tamanho  $p$  linhas (predições) por  $ny$  colunas (variáveis de saída do modelo), e com profundidade  $ny$  (número de variáveis de saída do modelo).

Com:

$$su = \begin{bmatrix}
 C.B & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \sum_{j=1}^2 C.A^{j-1}.B & C.B & 0 & \dots & 0 \\
 \sum_{j=1}^3 C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^2 C.A^{j-1}.B & C.B & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-2} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-3} C.A^{j-1}.B & \dots & 0 \\
 \sum_{j=1}^m C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-2} C.A^{j-1}.B & \dots & C.B \\
 \sum_{j=1}^{m+1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^m C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{m-1} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^2 C.A^{j-1}.B \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_{j=1}^{p-2} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-3} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-4} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^{p-m-1} C.A^{j-1}.B \\
 \sum_{j=1}^{p-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-2} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-3} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^{p-m} C.A^{j-1}.B \\
 \sum_{j=1}^p C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-1} C.A^{j-1}.B & \sum_{j=1}^{p-2} C.A^{j-1}.B & \dots & \sum_{j=1}^{p-m+1} C.A^{j-1}.B
 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$sx = \begin{bmatrix}
 C.A \\
 \sum_{j=1}^2 C.A^j \\
 \sum_{j=1}^3 C.A^j \\
 \dots \\
 \sum_{j=1}^{m-1} C.A^j \\
 \sum_{j=1}^m C.A^j \\
 \sum_{j=1}^{m+1} C.A^j \\
 \dots \\
 \sum_{j=1}^{p-2} C.A^j \\
 \sum_{j=1}^{p-1} C.A^j \\
 \sum_{j=1}^p C.A^j
 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Onde  $\hat{y}_{k+1}$  é o vetor das saídas previstas para o instante  $k+1$ ,  $su$  é a chamada Matriz Dinâmica do Sistema e seus elementos representam as mudanças observadas nas saídas do processo até o instante  $p$ ,  $sx$  é a Matriz Dinâmica dos Estados do Processo,  $\hat{y}_{k+1}^0$  é o vetor dos valores previstos das saídas assumindo uma ausência de ação de controle (ou equivalente a uma condição inicial a cada instante de tempo), e o argumento  $k$  é utilizado para indicar o tempo referente à origem da seqüência de previsões.



# Apêndice B

## Dedução de Equações do Filtro de Kalman Estendido

### Estimação de Estados

O estado ( $\hat{x}_k^+$ ) pode ser estimado através de uma função linear dependente somente do estado predito ( $\hat{x}_k^-$ ) e dos valores de medição do sistema ( $y_k$ ).

$$\hat{x}_k^+ = \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- + K_k \cdot y_k \quad (22)$$

Aplicando o princípio de ortogonalidade entre o erro de estimação dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) e a saída mensurável ( $y_k$ ):

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+) y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (23)$$

Substituindo a equação do estado estimado ( $\hat{x}_k^+$ ), temos:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot y_k) y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (24)$$

Definindo a equação de medição ( $y_k$ ), no espaço de estado:

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (25)$$

Substituindo a equação de medição ( $y_k$ ), temos:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot (H_k \cdot x_k + v_k)) y_i^T] = 0 \quad (26)$$

Expandindo a expressão:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot x_k - K_k \cdot v_k) y_i^T] = 0 \quad (27)$$

Rearranjo os termos:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot x_k) y_i^T - (K_k \cdot v_k) y_i^T] = 0 \quad (28)$$

Considerando os ruídos de processo ( $w_k$ ) e de medição ( $v_k$ ) como variáveis randômicas e não correlacionadas:

$$E[w_k \cdot y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (29)$$

$$E[v_k \cdot y_i^T] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (30)$$

Cancelando os termos nulos dos ruídos de processo ( $w_k$ ) e de medição ( $v_k$ ), não correlacionados, temos:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot x_k) y_i^T - (K_k \cdot x_k) y_i^T] = 0 \quad (31)$$

Continuando:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot x_k) y_i^T] = 0 \quad (32)$$

Somando e subtraindo o termo ( $\bar{K}_k \cdot x_k$ ), temos:

$$E[(x_k - \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot x_k + \bar{K}_k \cdot x_k - \bar{K}_k \cdot x_k) y_i^T] = 0 \quad (33)$$

Colocando ( $\bar{K}_k$ ) e ( $x_k$ ) em evidência nos termos:

$$E[(I - K_k \cdot H_k - \bar{K}_k) x_k y_i^T + \bar{K}_k \cdot (x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T] = 0 \quad (34)$$

Onde I é a matriz identidade.

Aplicando a propriedade de adição de termos do operador-esperança ( $E[ \ ]$ ):

$$E[(I - K_k \cdot H_k - \bar{K}_k) x_k y_i^T] + E[\bar{K}_k \cdot (x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T] = 0 \quad (35)$$

Aplicando a propriedade de multiplicação de termos constantes do operador-esperança ( $E[ \ ]$ ):

$$(I - K_k \cdot H_k - \bar{K}_k) E[x_k y_i^T] + \bar{K}_k \cdot E[(x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T] = 0 \quad (36)$$

Aplicando o conceito de ortogonalidade entre o erro de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ) e a saída mensurável ( $y_k$ ), onde:

$$E[(x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T] = 0 \quad (37)$$

Eliminando o termo de projeção ( $(x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T$ ), temos:

$$(I - K_k \cdot H_k - \bar{K}_k) E[x_k y_i^T] + \bar{K}_k \cdot E[(x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T] = 0 \quad (38)$$

Retornando a expressão remanescente contendo ambas as matrizes ( $\bar{K}_k$ ) e ( $K_k$ ):

$$(I - K_k \cdot H_k - \bar{K}_k) E[x_k y_k^T] = 0 \quad (39)$$

Através do conhecimento de projeção entre os estados ( $x_k$ ) e saídas ( $y_k^T$ ), não ser ortogonal:

$$E[x_k y_k^T] \neq 0 \quad (40)$$

Logo, resulta em uma equação capaz de correlacionar as duas constantes ( $\bar{K}_k$ ) e ( $K_k$ ):

$$(I - K_k \cdot H_k - \bar{K}_k) = 0 \quad (41)$$

Onde após o rearranjo de termos, determina-se:

$$\bar{K}_k = I - K_k \cdot H_k \quad (42)$$

De posse desta relação entre as matrizes ( $\bar{K}_k$ ) e ( $K_k$ ), pode-se retornar a expressão linear de estimação de estado ( $\hat{x}_k^+$ ):

$$\hat{x}_k^+ = \bar{K}_k \cdot \hat{x}_k^- + K_k \cdot y_k \quad (43)$$

Substituindo a matriz ( $\bar{K}_k$ ):

$$\hat{x}_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot \hat{x}_k^- + K_k \cdot y_k \quad (44)$$

Expandindo a expressão:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot \hat{x}_k^- + K_k \cdot y_k \quad (45)$$

E finalmente, ao se re-alocar os termos, obtém-se a equação de correção dos estados do processo ( $\hat{x}_k^+$ ):

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) \quad (46)$$

Onde a matriz  $K_k$  é a chamada de Ganho de Kalman. Esta matriz é calculada a cada instante de tempo  $k$  no estimador de estado de Filtro de Kalman Estendido, daí a importância de sua definição e do conhecimento de sua origem e princípio de cálculo.

A matriz de Ganho de Kalman tem a função de distribuir as disparidades encontradas entre o valor da variável de saída medida no sistema e a variável de saída estimada pelo

modelo através dos estados preditos. Desta forma faz-se necessário conceituar o cálculo do erro de predição da variável de saída ( $erro_{y_k}^-$ ), demonstrado a seguir:

$$erro_{y_k}^- = y_k - \hat{y}_k^- \quad (47)$$

Usando as equações de medição ( $y_k$ ) e a de predição das saídas ( $\hat{y}_k^-$ ), no espaço de estado, definidas por:

$$y_k = H_k \cdot x_k + v_k \quad (48)$$

$$\hat{y}_k^- = H_k \cdot \hat{x}_k^- \quad (49)$$

Substituindo ( $y_k$ ) e ( $\hat{y}_k^-$ ) na equação do erro de predição das saídas ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ):

$$erro_{y_k}^- = H_k \cdot x_k + v_k - H_k \cdot \hat{x}_k^- \quad (50)$$

Colocando a matriz ( $H_k$ ) em evidência, temos:

$$erro_{y_k}^- = (x_k - \hat{x}_k^-) H_k + v_k \quad (51)$$

Definindo o erro de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ), referente da discrepância entre o valor real ( $x_k$ ) e o valor simulado do modelo ( $\hat{x}_k^-$ ), por:

$$erro_{x_k}^- = (x_k - \hat{x}_k^-) \quad (52)$$

Pode-se expressar o erro de predição das saídas ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ) como:

$$erro_{y_k}^- = erro_{x_k}^- \cdot H_k + v_k \quad (53)$$

Assumindo o princípio de ortogonalidade entre os erros de estimação dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) e as variáveis de saída, medidas ( $y_k^T$ ) e preditas pelo modelo ( $\hat{y}_k^{-T}$ ), demonstradas pelas equações abaixo:

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+), y_k^T] = 0 \quad (54)$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+), \hat{y}_k^{-T}] = 0 \quad (55)$$

Subtraindo estas duas equações:

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+), y_k^T] - E[(x_k - \hat{x}_k^+), \hat{y}_k^{-T}] = 0 \quad (56)$$

Utilizando a propriedade de subtração, recurso do operador-esperança ( $E[ \ ]$ ), pode-se obter a projeção ortogonal entre os erros de estimação dos estados do processo ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) e predição das saídas ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ), como segue abaixo:

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+)y_k^T - (x_k - \hat{x}_k^+)\hat{y}_k^{-T}] = 0 \quad (57)$$

A qual, após uma simples re-alocação de termos, tem-se:

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+)(y_k^T - \hat{y}_k^{-T})] = 0 \quad (58)$$

Onde por definição:

$$erro_k^+ = (x_k - \hat{x}_k^+) \quad (59)$$

$$erroy_k^{-T} = (y_k^T - \hat{y}_k^{-T}) \quad (60)$$

Logo, temos a projeção:

$$E[erro_k^+ \cdot erroy_k^{-T}] = 0 \quad (61)$$

Antes de prosseguir a dedutiva para o cálculo do Ganho de Kalman ( $K_k$ ) é conveniente expressar o erro de estimação dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) em função do erro de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ), logo:

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+ \quad (62)$$

Utilizando a equação do estado ( $\hat{x}_k^+$ ):

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) \quad (63)$$

E substituindo-a na equação do erro de estimação ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ), temos:

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^- - K_k \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) \quad (64)$$

Indo mais além e substituindo também a equação de medição ( $y_k$ ):

$$y_k = H_k \cdot x_k + v_k \quad (65)$$

Na equação do erro de estimação dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ), temos:

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^- - K_k \cdot (H_k \cdot x_k + v_k - H_k \cdot \hat{x}_k^-) \quad (66)$$

Expandindo a expressão:

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^- - K_k \cdot H_k \cdot x_k - K_k \cdot v_k + K_k \cdot H_k \cdot \hat{x}_k^- \quad (67)$$

E procurando rearranjar os termos, colocando o erro de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ) em evidência, temos:

$$erro_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) erro_k^- - K_k \cdot v_k \quad (68)$$

De posse então das duas expressões de erros de estimação dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) e de predição das saídas ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ) em função do erro de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ):

$$erro_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) erro_k^- - K_k \cdot v_k \quad (69)$$

$$erroy_k^{-T} = erro_k^{-T} \cdot H_k^T + v_k^T \quad (70)$$

Retomando o conceito de ortogonalidade entre estes dois erros:

$$E[erro_k^+ \cdot erroy_k^{-T}] = 0 \quad (71)$$

Fazendo as substituições das equações dos erros de estimação ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) e erros de predição das saídas ( $y_k - \hat{y}_k^-$ ):

$$E\left[\left((I - K_k \cdot H_k) erro_k^- - K_k \cdot v_k\right) \left(erro_k^- \cdot H_k + v_k\right)^T\right] = 0 \quad (72)$$

Expandindo a expressão:

$$E\left[\begin{aligned} &(I - K_k \cdot H_k) erro_k^- \cdot erro_k^{-T} \cdot H_k^T - K_k \cdot v_k \cdot erro_k^{-T} \cdot H_k^T + \\ &+ (I - K_k \cdot H_k) erro_k^- \cdot v_k^T - K_k \cdot v_k \cdot v_k^T \end{aligned}\right] = 0 \quad (73)$$

Pelo fato dos ruídos de medição ( $v_k$ ) não estarem correlacionados com os erros de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ):

$$(x_k - \hat{x}_k^-) v_k^T = 0 \quad (74)$$

$$v_k \cdot (x_k - \hat{x}_k^-)^T = 0 \quad (75)$$

Podem-se cancelar estes termos da equação:

$$E\left[\begin{aligned} &(I - K_k \cdot H_k) erro_k^- \cdot erro_k^{-T} \cdot H_k^T - K_k \cdot v_k \cdot erro_k^{-T} \cdot H_k^T + \\ &+ (I - K_k \cdot H_k) erro_k^- \cdot v_k^T - K_k \cdot v_k \cdot v_k^T \end{aligned}\right] = 0 \quad (76)$$

A equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E[(I - K_k \cdot H_k) \cdot erro_k^- \cdot erro_k^{-T} \cdot H_k^T - K_k \cdot v_k \cdot v_k^T] = 0 \quad (77)$$

Aplicando a propriedade de adição de termos do operador-esperança ( $E[\ ]$ ):

$$E[(I - K_k \cdot H_k) \cdot erro_k^- \cdot erro_k^{-T} \cdot H_k^T] - E[K_k \cdot v_k \cdot v_k^T] = 0 \quad (78)$$

Aplicando a propriedade de multiplicação de termos constantes do operador-esperança ( $E[\ ]$ ):

$$(I - K_k \cdot H_k) \cdot E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}] \cdot H_k^T - K_k \cdot E[v_k \cdot v_k^T] = 0 \quad (79)$$

É importante notar que esta última equação apresentada contém um termo de valor esperado para o quadrado do erro de predição dos estados ( $E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}]$ ) para o instante de tempo  $k$ . Este termo é definido como sendo a matriz de covariância dos estados  $P_k^-$ . De forma semelhante  $R_k$  é definida como a matriz de covariância dos ruídos de medição ( $E[v_k \cdot v_k^T]$ ).

$$P_k^- = E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}] \quad (80)$$

$$R_k = E[v_k \cdot v_k^T] \quad (81)$$

Através destes conceitos de covariância ( $P_k^-$ ), pode-se reescrever a equação, resultando na expressão abaixo:

$$(I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \cdot H_k^T - K_k \cdot R_k = 0 \quad (82)$$

Isolando o termo de  $K_k$ , pela resolução da equação abaixo, obtém-se a expressão do Ganho do Filtro de Kalman ( $K_k$ ).

$$K_k = P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \quad (83)$$

O conceito de Ganho de Kalman é de fundamental para o cálculo da estimação dos estados. O processo de atualização via Ganho de Kalman é equivalente a um processo de otimização quadrática sem restrição, como é realizada em algumas outras implementações de estimadores de estado.

### Cálculo da Matriz de Covariância

A matriz de covariância dos erros de medição ( $P_k^+$ ) pode ser calculada através da seguinte equação:

$$P_k^+ = E[\text{erro}_k^+ \cdot \text{erro}_k^{+T}] = E\left[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T\right] \quad (84)$$

Onde se pode substituir a equação do erro de estimação dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ) em função do erro de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ):

$$\text{erro}_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot \text{erro}_k^- - K_k \cdot v_k \quad (85)$$

Retornando a matriz de covariância ( $P_k^+$ ):

$$P_k^+ = E\left[\left((I - K_k \cdot H_k) \cdot \text{erro}_k^- - K_k \cdot v_k\right) \left((I - K_k \cdot H_k) \cdot \text{erro}_k^- - K_k \cdot v_k\right)^T\right] \quad (86)$$

Expandindo a expressão:

$$P_k^+ = E\left[\begin{aligned} &(I - K_k \cdot H_k) \cdot \text{erro}_k^- \cdot \text{erro}_k^{-T} \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T - K_k \cdot v_k \cdot \text{erro}_k^{-T} \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T + \\ &-(I - K_k \cdot H_k) \cdot \text{erro}_k^- \cdot v_k^T \cdot K_k^T + K_k \cdot v_k \cdot v_k^T \cdot K_k^T \end{aligned}\right] \quad (87)$$

Pelo fato dos ruídos de medição ( $v_k$ ) não estarem correlacionados com os erros de predição dos estados ( $x_k - \hat{x}_k^-$ ):

$$(x_k - \hat{x}_k^-) v_k^T = 0 \quad (88)$$

$$v_k \cdot (x_k - \hat{x}_k^-)^T = 0 \quad (89)$$

Podem-se cancelar estes termos da equação:

$$P_k^+ = E\left[\begin{aligned} &(I - K_k \cdot H_k) \cdot \text{erro}_k^- \cdot \text{erro}_k^{-T} \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T - \cancel{K_k \cdot v_k \cdot \text{erro}_k^{-T} \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T} + \\ &-(I - K_k \cdot H_k) \cdot \cancel{\text{erro}_k^- \cdot v_k^T \cdot K_k^T} + K_k \cdot v_k \cdot v_k^T \cdot K_k^T \end{aligned}\right] \quad (90)$$

A equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_k^+ = E\left[\left(I - K_k \cdot H_k\right) \cdot \text{erro}_k^- \cdot \text{erro}_k^{-T} \cdot \left(I - K_k \cdot H_k\right)^T + K_k \cdot v_k \cdot v_k^T \cdot K_k^T\right] \quad (91)$$

Aplicando a propriedade de adição de termos do operador-esperança ( $E[\ ]$ ):

$$P_k^+ = E\left[\left(I - K_k \cdot H_k\right) \cdot \text{erro}_k^- \cdot \text{erro}_k^{-T} \cdot \left(I - K_k \cdot H_k\right)^T\right] + E\left[K_k \cdot v_k \cdot v_k^T \cdot K_k^T\right] \quad (92)$$



Aplicando a propriedade de multiplicação de termos constantes do operador-esperança ( $E[ \ ]$ ):

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}] (I - K_k \cdot H_k)^T + K_k \cdot E[v_k \cdot v_k^T] K_k^T \quad (93)$$

Onde, definem-se as matrizes de covariância:

$$P_k^- = E[erro_k^- \cdot erro_k^{-T}] \quad (94)$$

$$R_k = E[v_k \cdot v_k^T] \quad (95)$$

Substituindo estas matrizes, e expressando a equação da covariância dos erros de estimação dos estados ( $P_k^+$ ) em função da matriz de covariância dos erros de predição dos estados ( $P_k^-$ ), para o mesmo instante de tempo ( $k$ ):

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \cdot (I - K_k \cdot H_k)^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (96)$$

Fazendo uma expansão de termos:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot (P_k^- - P_k^- \cdot K_k^T \cdot H_k^T) + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (97)$$

Prosseguindo a expansão de termos:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \cdot H_k^T \cdot K_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (98)$$

Prosseguindo a expansão de termos:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - (P_k^- \cdot H_k^T - K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T) K_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (99)$$

Utilizando o conceito da equação e Ganho de Kalman ( $K_k$ ):

$$K_k = P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \quad (100)$$

Rearranjando a equação do Ganho de Kalman ( $K_k$ ):

$$P_k^- \cdot H_k^T = K_k \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k) \quad (101)$$

Substituindo esta expressão acima de ( $P_k^- \cdot H_k^T$ ) na equação da matriz de covariância dos erros de estimação dos estados ( $P_k^+$ ):

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - (K_k \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k) - K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T) K_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (102)$$

Expandindo os termos:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - (K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + K_k \cdot R_k - K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T) \cdot K_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (103)$$

Cancelando os termos idênticos de  $(K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T)$ :

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - (\cancel{K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T} + K_k \cdot R_k - \cancel{K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T}) \cdot K_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (104)$$

Desta forma pode-se reescrever a equação, em que:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - K_k \cdot R_k \cdot K_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T \quad (105)$$

A qual, pode-se igualmente cancelar o seguinte  $(K_k \cdot R_k \cdot K_k^T)$ :

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- - \cancel{K_k \cdot R_k \cdot K_k^T} + \cancel{K_k \cdot R_k \cdot K_k^T} \quad (106)$$

Resultando na equação da covariância do erro dos estados estimados ( $P_k^+$ ) em função da covariância do erro dos estados preditos ( $P_k^-$ ), ao instante de tempo  $k$ .

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \quad (107)$$

Indo mais além, pode-se presumir a matriz de covariância para o instante de tempo futuro ( $k+1$ ) a partir de seu atual ( $k$ ). Para isso, é necessário definir o erro de predição dos estados para o mesmo instante de tempo futuro ( $x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-$ ):

$$erro_{k+1}^- = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \quad (108)$$

Utilizando informações do modelo linearizado, as características dos estados reais ( $x_{k+1}$ ) e estados preditos ( $\hat{x}_{k+1}^-$ ), são obtidos do instante de tempo anterior ( $k$ ).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi_k \cdot x_k + w_k \\ \hat{x}_{k+1}^- &= \varphi_k \cdot \hat{x}_k^+ \end{aligned} \quad (109)$$

Assim, pode-se substituir na equação do erro de predição futuro ( $x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-$ ), onde:

$$erro_{k+1}^- = \varphi_k \cdot x_k + w_k - \varphi_k \cdot \hat{x}_k^+ \quad (110)$$

Pela definição de erro de estimação de estados no tempo atual ( $x_k - \hat{x}_k^+$ ):

$$erro_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+ \quad (111)$$

Colocando  $(\varphi_k)$  em evidência, pode-se substituir esse conceito do erro de estimação dos estados no tempo atual  $(x_k - \hat{x}_k^+)$ :

$$erro_{k+1}^- = \varphi_k \cdot erro_k^+ + w_k \quad (112)$$

Utilizando o conceito de matriz de covariância dos erros de predição para o instante de tempo futuro  $P_{k+1}^-$ , onde:

$$P_{k+1}^- = E[erro_{k+1}^- \cdot erro_{k+1}^{-T}] \quad (113)$$

Substituindo a expressão do erro de predição dos estados no tempo futuro  $(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)$ , temos:

$$P_{k+1}^- = E[(\varphi_k \cdot erro_k^+ + w_k)(\varphi_k \cdot erro_k^+ + w_k)^T] \quad (114)$$

Expandindo os termos:

$$P_{k+1}^- = E \left[ \begin{array}{l} \varphi_k \cdot erro_k^+ \cdot erro_k^{+T} \cdot \varphi_k^T + \varphi_k \cdot erro_k^+ \cdot w_k^T + \\ + w_k \cdot erro_k^{+T} \cdot \varphi_k^T + w_k \cdot w_k^T \end{array} \right] \quad (115)$$

Pelo fato dos ruídos de processo  $(w_k)$  não estarem correlacionados com os erros encontrados após a estimação dos estados  $(x_k - \hat{x}_k^+)$ :

$$(x_k - \hat{x}_k^+) \cdot w_k^T = 0 \quad (116)$$

$$w_k \cdot (x_k - \hat{x}_k^+)^T = 0 \quad (117)$$

Podem-se cancelar estes termos da equação:

$$P_{k+1}^- = E \left[ \begin{array}{l} \varphi_k \cdot erro_k^+ \cdot erro_k^{+T} \cdot \varphi_k^T + \cancel{\varphi_k \cdot erro_k^+ \cdot w_k^T} + \\ + \cancel{w_k \cdot erro_k^{+T} \cdot \varphi_k^T} + w_k \cdot w_k^T \end{array} \right] \quad (118)$$

Reescrevendo a expressão resultante:

$$P_{k+1}^- = E[\varphi_k \cdot erro_k^+ \cdot erro_k^{+T} \cdot \varphi_k^T + w_k \cdot w_k^T] \quad (119)$$

Aplicando a propriedade de adição de termos do operador-esperança  $(E[\ ])$ :

$$P_{k+1}^- = E[\varphi_k \cdot erro_k^+ \cdot erro_k^{+T} \cdot \varphi_k^T + w_k \cdot w_k^T] \quad (120)$$

Aplicando a propriedade de multiplicação de termos constantes do operador-esperança ( $E[\ ]$ ):

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot E[\text{erro}_k^+ \cdot \text{erro}_k^{+T}] \varphi_k^T + E[w_k \cdot w_k^T] \quad (121)$$

Onde o valor esperado para o quadrado do erro de estimação dos estados ( $E[\text{erro}_k^+ \cdot \text{erro}_k^{+T}]$ ) para o instante de tempo  $k$ . Este termo é definido como sendo a matriz de covariância dos estados  $P_k^+$ . De forma semelhante  $Q_k$  é definida como a matriz de covariância dos ruídos de processo ( $E[w_k \cdot w_k^T]$ ).

$$P_k^+ = E[\text{erro}_k^+ \cdot \text{erro}_k^{+T}] \quad (122)$$

$$Q_k = E[w_k \cdot w_k^T] \quad (123)$$

Retornando ao conceito de matriz de covariância dos erros de predição dos estados no instante de tempo futuro ( $P_{k+1}^-$ ):

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot P_k^+ \cdot \varphi_k^T + Q_k \quad (124)$$

Substituindo a covariância dos erros de estimação dos estados:

$$P_k^+ = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^- \quad (125)$$

Logo, temos:

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot ((I - K_k \cdot H_k) \cdot P_k^-) \varphi_k^T + Q_k \quad (126)$$

Expandindo os termos da equação:

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot (P_k^- - K_k \cdot H_k \cdot P_k^-) \varphi_k^T + Q_k \quad (127)$$

Continuando a expansão:

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T - \varphi_k \cdot K_k \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T + Q_k \quad (128)$$

Utilizando o conceito da matriz de Ganho de Kalman ( $K_k$ ):

$$K_k = P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \quad (129)$$

Substituindo ( $K_k$ ) na equação de covariância dos erros de predição dos estados no instante futuro ( $P_{k+1}^-$ ), temos:

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T - \varphi_k \cdot (P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1}) \cdot H_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T + Q_k \quad (130)$$

Rearranjando os termos desta equação, chega-se finalmente a equação de cálculo da matriz de covariância dos erros de predição dos estados no instante de tempo futuro ( $P_{k+1}^-$ ):

$$P_{k+1}^- = \varphi_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T - (\varphi_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T) (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1} \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot \varphi_k^T) + Q_k \quad (131)$$

Esta última equação demonstrada é também conhecida como Matriz Dinâmica de Riccati para sistemas tempo discretos. Esta equação é importante para determinar a correção dos estados preditos pelo modelo do processo. Uma das vantagens de se utilizar esta equação é que ela elimina a necessidade do cálculo da atualização da covariância a cada instante de amostragem uma vez que isto já está implícito no cálculo de predição.