UFRGS EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

Pré-Cálculo

UFRGS EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

1ª edição: 2012

Projeto Gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão e Editoração eletrônica: Claus Ivo Doering

Os autores são professores efetivos do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS, com experiência no ensino das disciplinas de Cálculo oferecidas pelo Departamento. Todos têm se dedicado aos cursos de Pré-Cálculo da UFRGS.

P922 Pré-cálculo / organizado por Claus Ivo Doering, Liana Beatriz Costi Nácul [e] Luisa Rodríguez Doering.– 3. ed. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
140 p. : il. ; 21x25cm

(Série Graduação)

Reimpressão 2018

Inclui respostas selecionadas.

Inclui índice remissivo.

Inclui figuras, gráficos e quadros.

1. Matemática. 2. Cálculo – Pré-cálculo. 3. Álgebra elementar. 4. Funções reais. 5. Geometria analítica. 6. Polinômios. 7. Trigonometria. I. Doering, Claus Ivo. II. Nácul, Liana Beatriz Costi. III. Doering, Luisa Rodríguez Doering.

CDU 517.3

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0182-1

Trigonometria

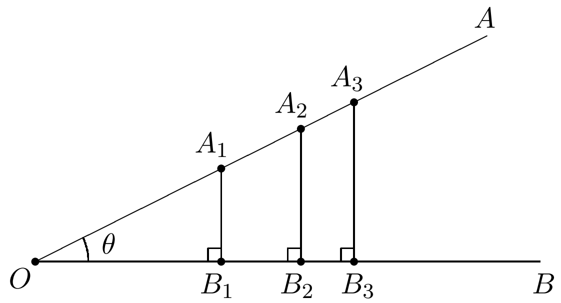
Capítulo 3

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Elisabete Zardo Búrigo

Iniciamos revendo a Trigonometria no triângulo retângulo. Nesse primeiro momento, estaremos tratando então, necessariamente, com ângulos agudos. Mais tarde, trataremos de funções trigonométricas definidas em toda reta real.

3.1 – AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos um ângulo agudo $A\widehat{O}B = \theta$, com $0 < \theta < 90°$ e, a partir dos pontos A_1, A_2, $A_3, \ldots$ na semirreta OA, tracemos perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$ à semirreta OB.



Cada um desses triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, $OA_3B_3, \ldots$ tem um ângulo reto, um ângulo igual a θ e um terceiro ângulo igual a $180° - (90° + \theta)$. Portanto, os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, $OA_3B_3, \ldots$ são todos semelhantes, pois têm os três ângulos iguais, e segue que

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \cdots .$$

*C*onclusão: A razão $\dfrac{AB}{OA}$ depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos que forem considerados. Em outras palavras, essa razão é uma *função* do ângulo θ.

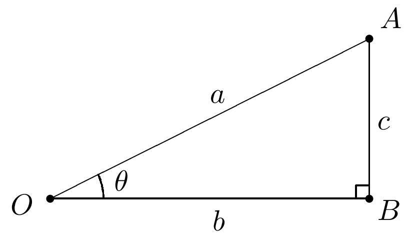
Dados um ângulo agudo $A\widehat{O}B = \theta$, com $0 < \theta < 90°$, e um ponto A_1 na semirreta OA, tracemos a perpendicular A_1B_1 à semirreta OB. O *seno* de θ é definido como sendo a razão

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A_1B_1}{OA_1}.$$

Essa definição faz sentido, pois vimos que a razão não depende do particular ponto A_1 que for escolhido para construir a razão. Da mesma forma, são definidas as funções *cosseno* e *tangente* de um ângulo agudo, por

$$\cos\theta = \frac{OB_1}{OA_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}\,.$$

Segue dessas considerações que, num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, respectivamente adjacente e oposto ao ângulo θ, como o da figura dada, valem as seguintes relações trigonométricas.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{c}{a}\,, \quad \text{ou seja,} \quad c = a\cdot\operatorname{sen}\theta \tag{3.1}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{a}\,, \quad \text{ou seja,} \quad b = a\cdot\cos\theta \tag{3.2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b} \tag{3.3}$$

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \tag{3.4}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \tag{3.5}$$

As propriedades (3.1), (3.2) e (3.3) são a própria definição das funções seno, cosseno e tangente. Para justificar a propriedade (3.4), basta aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OBA, como segue.

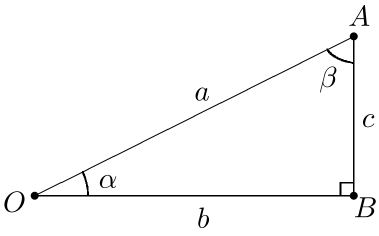
$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\,\theta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1\,.$$

Quanto à afirmação (3.5), podemos prová-la utilizando (3.1), (3.2) e (3.3), como segue.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b} = \frac{a\operatorname{sen}\theta}{a\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,.$$

Proposição 3.1. *Se dois ângulos α e β são* complementares*, isto é, se $\alpha + \beta = 90°$, então*

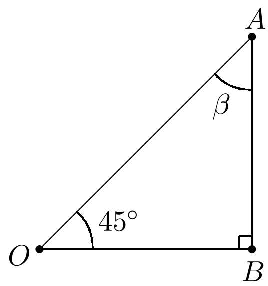
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \quad \text{e}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$



Demonstração. A justificativa para a validade dessa proposição usa o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. No caso de um triângulo retângulo, como um dos ângulos mede 90°, a soma dos outros dois tem que valer 90°, ou seja, os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Sejam α e β dois ângulos agudos complementares e consideremos um triângulo retângulo OBA cujos ângulos agudos sejam precisamente α e β. Então, por exemplo, o seno de α é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Mas é evidente a partir da figura que o cateto que é oposto a α é adjacente a β. Por essa razão $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$. O mesmo tipo de argumento se aplica às outras duas propriedades. □

Por causa desse último resultado, é suficiente que se tenha uma tabela de senos e cossenos para arcos entre 0 e 45 graus. Por exemplo, se quisermos saber o valor de $\cos 72°$, consideramos o arco complementar $90 - 72 = 18$ e $\cos 72° = \operatorname{sen} 18°$.

Vamos, agora, calcular as funções trigonométricas de alguns ângulos bem comuns. Começando por 45°, consideremos um triângulo retângulo OBA com o ângulo $A\widehat{O}B = 45°$. Como o triângulo tem um ângulo reto e a soma dos três ângulos deve ser igual a 180°, concluímos que o ângulo $\beta = B\widehat{A}O = 45°$. Portanto, nosso triângulo OBA é isósceles, ou seja, tem dois lados iguais, $OB = BA$. Aplicando o Teorema de Pitágoras,



$$OA^2 = OB^2 + BA^2 = BA^2 + BA^2 = 2 \cdot BA^2.$$

Segue que $OA = BA \cdot \sqrt{2}$ e, então,

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{BA}{OA} = \frac{BA}{BA \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Também,

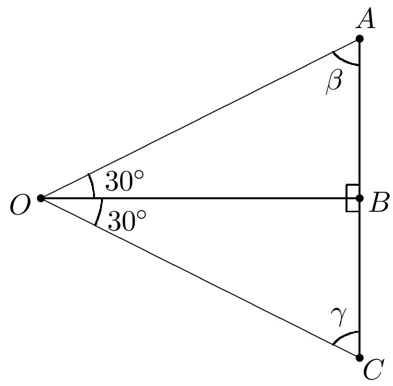
$$\cos 45° = \frac{OB}{OA} = \frac{BA}{OA} = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Decorre dessas duas últimas relações que

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1\,.$$

Nosso próximo passo será calcular as funções trigonométricas do ângulo de 30°.

Usaremos o truque engenhoso de justapor dois triângulos retângulos congruentes OBA e OCB, de ângulos iguais a $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, como na figura ao lado (note que esse triângulo existe, pois $30 + 60 + 90 = 180$). Então, o triângulo OCA tem os três ângulos iguais a 60°, sendo, portanto, equilátero. Segue daí que



$$AB = \frac{AC}{2} = \frac{OA}{2}\,.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}\cdot OA}{OA} = \frac{1}{2}\,.$$

Para obter o valor de $\cos 30^\circ$, utilizamos a relação fundamental (3.4), ou seja, $\cos^2 30^\circ + \operatorname{sen}^2 30^\circ = 1$, portanto,

$$\cos^2 30^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ou, ainda,} \quad \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}\,,$$

de modo que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Levando em conta que 30° e 60° são complementares, pois $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, e utilizando a Proposição 3.1, temos

$$\cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3.2 – SENO E COSSENO DO ARCO DUPLO E ARCO METADE

A fim de construirmos uma tabela um pouco mais completa de senos e cossenos, necessitamos conhecer mais algumas propriedades das funções trigonométricas.

Suponha que conheçamos $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ e vejamos como se pode a partir daí obter $\cos(2\,\theta)$ e $\operatorname{sen}(2\,\theta)$. Um erro muito comum é o aluno ingenuamente pensar que $\operatorname{sen}(2\,\theta) =$

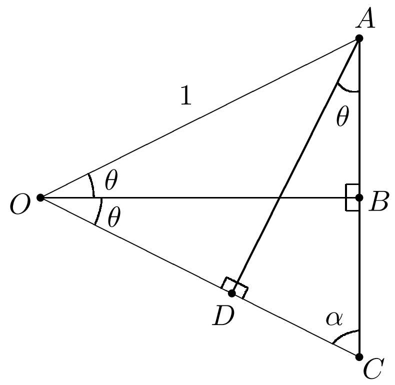
$2 \cdot \operatorname{sen}\theta$. Mas se isso fosse verdade, o seno de 60°, por exemplo, seria o dobro do seno de $\theta = 30^\circ$. Isso não ocorre, pois $\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, enquanto que $2 \cdot \operatorname{sen}\theta = 2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. Logo, em geral, $\operatorname{sen}(2\theta) \neq 2 \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Os resultados que seguem apresentam algumas fórmulas, inicialmente com a restrição que $0^\circ < \theta < 45^\circ$, mas que, como veremos mais adiante, valem para qualquer ângulo θ.

Proposição 3.2. *Se* $0^\circ < \theta < 45^\circ$, *então*

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta\,. \tag{3.6}$$

Demonstração. Considere a figura ao lado. Os triângulos retângulos OBA e OCB são congruentes e têm um ângulo igual a θ, sendo o lado $OA = 1$.



Traçamos a perpendicular AD ao lado OC. Então, $\operatorname{sen}(2\theta) = AD$. Note que o dobro da área do triângulo OAC é igual a $OC \cdot AD$, mas essa área também é igual a $OB \cdot AC$. Logo,

$$OC \cdot AD = OB \cdot AC\,.$$

Levando em conta que

$$OC = 1, \qquad AD = \operatorname{sen}(2\theta),$$

$$OB = \cos\theta \quad \text{e} \quad AC = 2 \cdot AB = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

obtemos

$$1 \cdot \operatorname{sen}(2\theta) = \cos\theta \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\theta\,,$$

o que demonstra a proposição. $\square$

Proposição 3.3. *Se* $0^\circ < \theta < 45^\circ$, *então*

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\,. \tag{3.7}$$

Demonstração. Na figura acima, vemos que α e θ são complementares, logo $\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha$. Também $AC = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta$ e, portanto,

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{2 \cdot \operatorname{sen}\theta}\,,$$

resultando

$$2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\alpha = CD.$$

Assim,

$$\cos(2\,\theta) = OD = 1 - CD = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\,\theta = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta\,,$$

ou seja,

$$\cos(2\,\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\,,$$

demonstrando a proposição. □

Proposição 3.4. *Se* $0° < \theta < 90°$, *então*

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\,. \tag{3.9}$$

Demonstração. Somando (3.4) com (3.7), obtemos

$$\begin{array}{r} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\,\theta) \\ \hline 2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\,\theta)\,. \end{array}$$

Segue que

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\,\theta)}{2}}\,.$$

Substituindo θ por $\frac{\theta}{2}$ nessa última equação, resulta (3.8).

Subtraindo (3.7) de (3.4), obtemos

$$\begin{array}{r} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ -\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = -\cos(2\,\theta) \\ \hline 2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos(2\,\theta)\,. \end{array}$$

Segue que

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\,\theta)}{2}}\,.$$

Substituindo θ por $\frac{\theta}{2}$ nessa última equação, resulta (3.9). □

Observe que (3.6) e (3.7) poderiam ter sido deduzidas das equações (3.10) e (3.11) a seguir, fazendo $\beta = \alpha$.

Proposição 3.5. *Sejam* $\alpha, \beta \geq 0$ *tais que* $0° < \alpha + \beta < 90°$. *Então,*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{3.10}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta\,. \tag{3.11}$$

Na próxima seção estudaremos senos e cossenos de ângulos não necessariamente positivos, quando veremos que

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

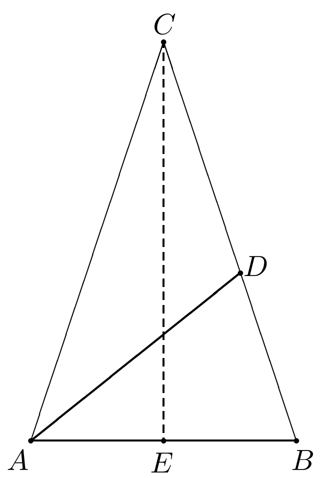
Então, substituindo β por $-\beta$ em (3.10) e (3.11), teremos também

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{3.12}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta\,. \tag{3.13}$$

Como exemplo, vamos agora mostrar como se pode construir uma tabela de valores de funções trigonométricas, a partir dos resultados que obtivemos até aqui. Historicamente, foi assim que foram construídas as *tabelas trigonométricas*. Hoje em dia, é claro, quando necessitamos de tabelas mais completas, é mais cômodo utilizar uma calculadora científica.

Exemplo 3.1. Determinemos as funções trigonométricas dos ângulos de 18° e 36°.



Considere um triângulo ABC, como na figura ao lado, cujos ângulos internos medem 36°–72°–72°. É importante notar que isso é possível, pois $36+72+72 = 180$. Esse triângulo tem dois ângulos iguais, portanto tem dois lados iguais, ou seja, é isósceles, $AC = BC$. Note que o ângulo $C\widehat{A}B$ mede 72° e que a metade de 72 é 36. Considere o segmento AD que divide o ângulo $C\widehat{A}B$ ao meio, portanto, em duas partes de 36°. Como o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 72°, o triângulo ABD tem um ângulo de 36° e outro de 72°. Portanto o terceiro ângulo de triângulo ABD mede $180-(36+72) = 72$ graus. Logo, os triângulos ABC e ABD são semelhantes, pois têm os ângulos iguais.

Podemos supor que $AC = BC = 1$. Chamemos AB de x. Como ABD é isósceles, então $AD = x$. Mas o triângulo ADC também é isósceles, pois tem dois ângulos iguais a $36°$, os ângulos $B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}B$. Logo $CD = AD = AB = x$. Da semelhança dos triângulos ABC e ABD decorre que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}\,.$$

Assim, $1 - x = x^2$, ou seja, $x^2 + x - 1 = 0$. Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos as raízes

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Somente a raiz positiva serve, pois $x = AB > 0$. Portanto, $AB = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Traçando a perpendicular CE ao lado AB, temos que ela divide o ângulo $B\widehat{C}A$ em duas partes iguais de $18°$. Considerando o triângulo AEC, temos

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{AE}{AC} = AE = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}\,.$$

Assim,

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\,. \tag{3.14}$$

Utilizando a relação fundamental (3.4), segue que

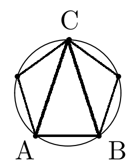
$$\begin{aligned} \cos^2 18° &= 1 - \operatorname{sen}^2 18° = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

e, extraindo a raiz quadrada, resulta

$$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\,. \tag{3.15}$$

Pergunta: De onde saiu essa ideia de considerar um triângulo de ângulos $36°$–$72°$–$72°$?

Considere um pentágono regular inscrito em um círculo, como na figura ao lado. Então, o triângulo ABC mostrado na figura tem ângulos de $36°$–$72°$–$72°$. Você consegue provar essa afirmação? Os polígonos regulares com um número pequeno de lados, sempre foram muito estudados, desde a antiguidade.



Portanto, o triângulo com ângulos de $36°$–$72°$–$72°$ era bem conhecido.

Exemplo 3.2. Determinemos as funções trigonométricas dos ângulos de 15° e 3°.

Utilizando as relações (3.8) e (3.9) e os valores já encontrados do seno e cosseno de 30°, temos $\cos 15^\circ = \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$, ou seja,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}. \tag{3.16}$$

Analogamente, $\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$, ou seja,

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}. \tag{3.17}$$

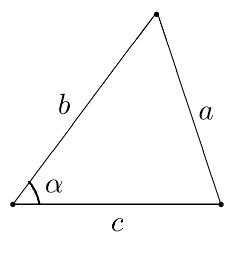
Agora, tendo obtido (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), podemos obter os valores do seno e cosseno de 3°. Escrevendo $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ e aplicando (3.12) e (3.13), temos

$$\begin{aligned}
\cos 3^\circ &= \cos(18^\circ - 15^\circ) = \cos 18^\circ \cdot \cos 15^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ \cdot \operatorname{sen} 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \\
\operatorname{sen} 3^\circ &= \operatorname{sen}(18^\circ - 15^\circ) = \operatorname{sen} 18^\circ \cdot \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \cdot \operatorname{sen} 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.
\end{aligned}$$

A partir daí, utilizando as Proposições 3.2, 3.3 e 3.5, podemos calcular, sucessivamente, o seno e o cosseno de 6°, 9°, 12°, etc.

Construímos, assim, uma tabela contendo todos os senos e cossenos dos arcos de 3 em 3 graus. Utilizando as mesmas idéias, podemos construir tabelas mais completas.

3.3 – LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS



Teorema 3.6 (Lei dos Cossenos). *Num triângulo de lados a, b e c qualquer, temos*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha, \tag{3.18}$$

onde α denota o ângulo no vértice oposto ao lado a.

Esse teorema vale mesmo se o ângulo α for obtuso (entre $90°$ e $180°$). Nesse caso, o seu cosseno será negativo, conforme Seção 3.4. A Lei dos Cossenos é muito empregada em Trigonometria. Ela é usada, por exemplo, quando conhecemos os lados de um triângulo e queremos determinar os ângulos (mais precisamente, os *cossenos* dos ângulos).

A Lei dos Cossenos também é usada se forem conhecidos dois lados de um triângulo e o ângulo por eles formado.

Exemplo 3.3. Calculemos o comprimento de AB sabendo que, no triângulo ABC, valem $BC = 8$, $AC = 7$ e $\beta = A\widehat{B}C = 60°$.

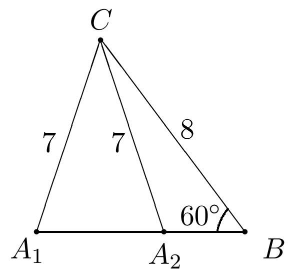
Utilizando a Lei dos Cossenos na forma

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta\,,$$

resulta $7^2 = AB^2 + 8^2 - 2 \cdot AB \cdot 8 \cdot \cos 60°$. Obtemos, assim, a equação do segundo grau

$$AB^2 - 8AB + 15 = 0,$$

que tem duas raízes, $AB = 3$ e $AB = 5$.



Cabe a pergunta: por que encontramos duas respostas? Como em muitos problemas, se uma das raízes fosse negativa, ela seria descartada, pois o comprimento AB deve ser positivo. Mas na presente situação encontramos duas raízes positivas. O problema considerado nesse exemplo realmente tem duas soluções diferentes, representadas na figura acima. Temos duas possibilidades para esse triângulo, que tanto pode ser A_1BC, com $A_1B = 5$, ou então A_2BC, com $A_2B = 3$.

Teorema 3.7 (Lei dos Senos). *Num triângulo qualquer, temos*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\,, \tag{3.19}$$

onde α, β e γ denotam os ângulos dos vértices opostos aos lados de comprimentos a, b e c, respectivamente.

Esse teorema afirma que, num triângulo qualquer, cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto.

Exemplo 3.4. Calculemos as medidas dos lados e dos ângulos do mesmo triângulo ABC do Exemplo 3.3, em que $BC = 8$, $AC = 7$ e $\beta = A\widehat{B}C = 60°$.

Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ABC do Exemplo 3.3 e $\alpha = C\widehat{A}B$, obtemos

$$\frac{7}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{8}{\operatorname{sen}\alpha}\,.$$

Assim,
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} \cong 0{,}9897.$$
Usando uma calculadora científica, encontramos que $\alpha = 81{,}8°$, aproximadamente. Estendendo a definição do seno para ângulos obtusos (ver Seção 3.4), vemos que existe um arco no segundo quadrante que tem o mesmo seno, a saber, aproximadamente $\operatorname{sen}(180° - 81{,}8°) = \operatorname{sen} 98{,}2°$. Assim, temos as duas soluções, $C\widehat{A_1}B \cong 81{,}8°$ e $C\widehat{A_2}B \cong 98{,}2°$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, onde $\gamma = B\widehat{C}A$, encontramos para C também duas soluções, $B\widehat{C}A_1 \cong 38{,}2°$ e $B\widehat{C}A_2 \cong 21{,}8°$. Utilizando novamente a Lei dos Senos, temos
$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{7}{\operatorname{sen} 60°}, \quad \text{logo,} \quad AB = \frac{14 \cdot \operatorname{sen}\gamma}{\sqrt{3}}.$$
Utilizando uma calculadora científica obtemos
$$\operatorname{sen} 38{,}2° \cong 0{,}6184 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} 21{,}8° \cong 0{,}3713.$$
A partir daí, resultam
$$A_1B \cong 4{,}9984 \qquad \text{e} \qquad A_2B \cong 3{,}0011,$$
que são os mesmos valores encontrados anteriormente, com uma boa aproximação. Note que ao resolver o problema dessa segunda forma, é preciso ter cuidado para não esquecer de considerar a possibilidade de que o ângulo em questão seja obtuso.

Observe que, num triângulo em que conhecemos dois ângulos, mas somente um lado, não podemos aplicar a Lei dos Cossenos e necessariamente devemos usar a Lei dos Senos.

Para finalizar, é bom assinalar que as únicas fórmulas que o aluno necessita memorizar são as sete que seguem abaixo, pois todas as outras podem ser facilmente deduzidas dessas.

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Um bom exercício é deduzir todas as outras fórmulas apresentadas neste capítulo, pois é bom ter firmeza quanto a isso.

Quando medimos um ângulo em graus, tomamos como referência a divisão de um círculo em 360 partes iguais. Esse número de partes, 360, é uma convenção.

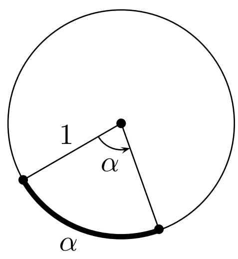
Uma outra unidade de medida de ângulos, o *radiano*, pode ser adotada quando tomamos o ângulo como ângulo central de um círculo. Sabemos que a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro é constante. Essa razão, que denominamos π, é conhecida através de aproximações: por exemplo, sabemos que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

A razão entre o comprimento s do arco e o comprimento C da circunferência é igual à razão entre a medida θ do ângulo em graus e 360, isto é, $\dfrac{s}{C} = \dfrac{\theta}{360}$. Como $C = 2\pi r$, podemos escrever também $\dfrac{s}{r} = \dfrac{2\pi}{360}\,\theta$. A razão $\dfrac{s}{r}$, que expressa "quantos raios cabem no arco", é a *medida do ângulo em radianos.* Essa razão será $\pi/2$ quando o ângulo for reto, $\pi/3$ quando o ângulo medir 60°, e assim por diante.

Mais ainda: se tomarmos um círculo de raio unitário, a razão $\dfrac{s}{r}$ será igual a s e, portanto, a medida de um ângulo em radianos também pode ser definida como *o comprimento do arco* determinado por esse ângulo, quando esse for o *ângulo central* de um círculo de *raio unitário.*

Podemos, portanto, medir um ângulo em graus ou em radianos, conforme a situação em que estivermos trabalhando. Se α é a medida de um ângulo em radianos e θ é a medida do ângulo em graus, então

$$\alpha = \frac{2\pi}{360}\theta = \frac{\pi}{180}\theta.$$



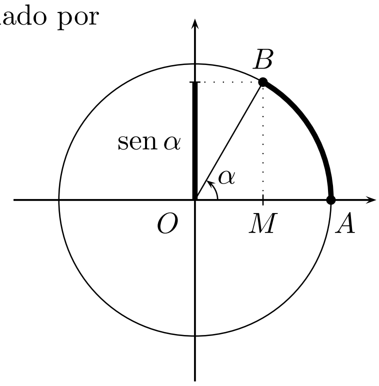
Partindo do fato de que a medida de um ângulo em radianos é igual ao comprimento do arco determinado por esse ângulo num círculo unitário, podemos estender a definição das funções trigonométricas, tomando como referência arcos de círculo.

Daqui em diante, por conveniência, estaremos sempre nos referindo ao círculo unitário.

Observe que, se um arco tem comprimento menor que $\pi/2$, as funções trigonométricas do ângulo central correspondente já foram definidas na Seção 3.1, pois trata-se de um ângulo agudo.

Se inserirmos um sistema de eixos perpendiculares cuja origem O coincida com o centro do círculo e de modo que uma extremidade A desse arco esteja sobre o eixo horizontal, então teremos que o seno do ângulo α é dado por

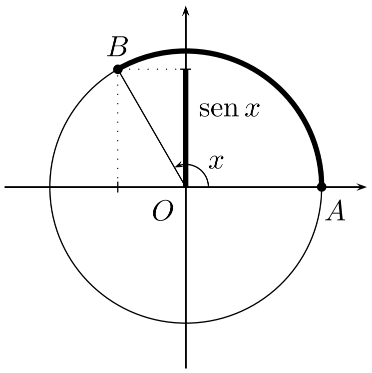
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BM}{OB} = \frac{BM}{1} = BM\,,$$

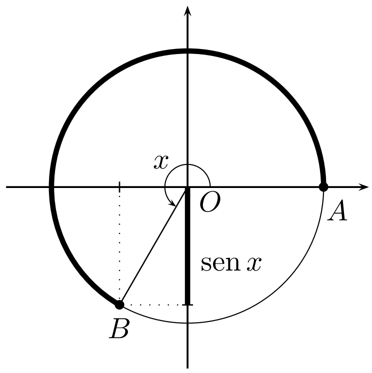


onde B é a outra extremidade do arco e M é a projeção de B sobre o eixo horizontal. A medida do segmento BM é o módulo da ordenada de B. Para que o valor do seno de α coincida com a ordenada de B, definimos uma orientação no círculo: o arco será considerado *positivo* quando for percorrido no sentido anti-horário.

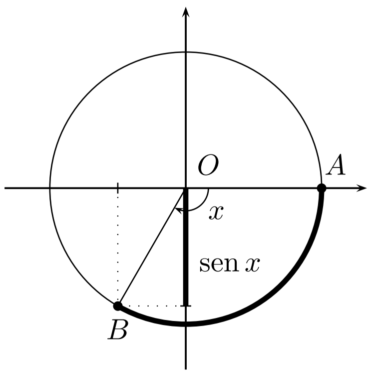
Se x é um número real positivo menor que $\pi/2$, podemos agora definir o *seno de* x como sendo a *ordenada* de B, para um arco AB de comprimento x percorrido no sentido *anti-horário* (num círculo unitário, onde a origem dos eixos coincide com o centro do círculo, com a extremidade A do arco sobre o eixo horizontal).

Essa definição pode ser facilmente estendida para valores de x maiores que $\pi/2$.





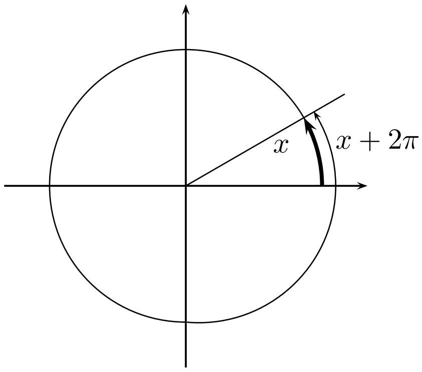
Para qualquer valor de x no intervalo $[0, 2\pi]$ podemos definir *seno de* x como a ordenada de B, para um arco AB de comprimento x percorrido no sentido *anti-horário*.



A definição pode ser, novamente, estendida para valores de x maiores do que 2π. Tomamos B como o ponto de chegada de um percurso de comprimento x realizado a partir de A no sentido anti-horário.

Podemos também estender a definição de seno de x *para valores negativos de* x. Basta tomar agora a extremidade B como ponto de chegada de um percurso de comprimento $|\,x\,|$ percorrido a partir de A no sentido *horário*.

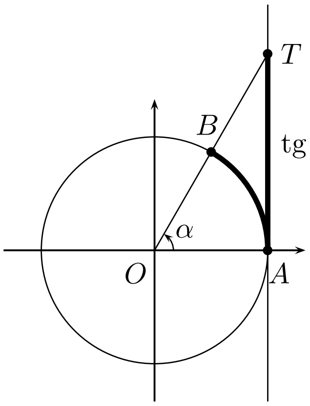
A cada número real x associamos um ponto do círculo. É como se a reta que corresponde aos números reais estivesse "enrolada" no círculo, com a origem sobre o ponto A e o sentido positivo sendo o anti-horário. Entretanto, não há mais uma correspondência biunívoca entre pontos e números reais, como havia na reta: quando somamos 2π a um número real x, completamos uma volta no círculo e recaímos no mesmo ponto de onde havíamos partido. O mesmo ocorre quando diminuímos 2π, e a volta é percorrida no sentido horário.



Como podemos percorrer infinitas voltas tanto num como noutro sentido, a cada ponto do círculo correspondem infinitos números reais.

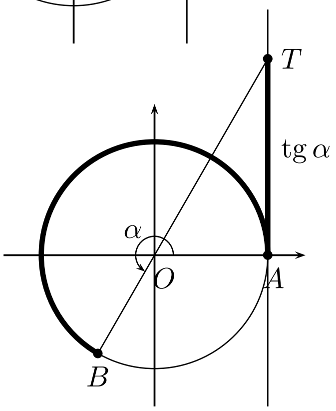
Se um ponto do círculo corresponde ao número real x, corresponde a todos os números reais dados por $x + k2\pi$, para valores inteiros de k.

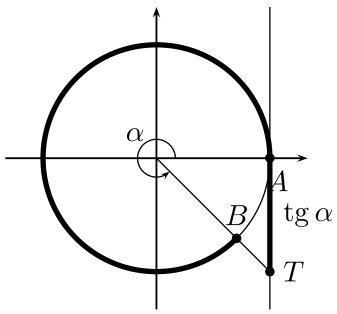
As demais funções trigonométricas podem ser estendidas do mesmo modo. Vejamos o caso da *função tangente.*



Tomamos, novamente, o círculo unitário, com centro na origem e um arco AB de comprimento menor do que $\frac{\pi}{2}$ e a extremidade A do arco sobre o eixo horizontal. Tomamos a reta tangente ao círculo passando por A. Seja T a interseção dessa reta com o prolongamento do raio OB. Então, se α é o ângulo central correspondente ao arco AB, temos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT.$$





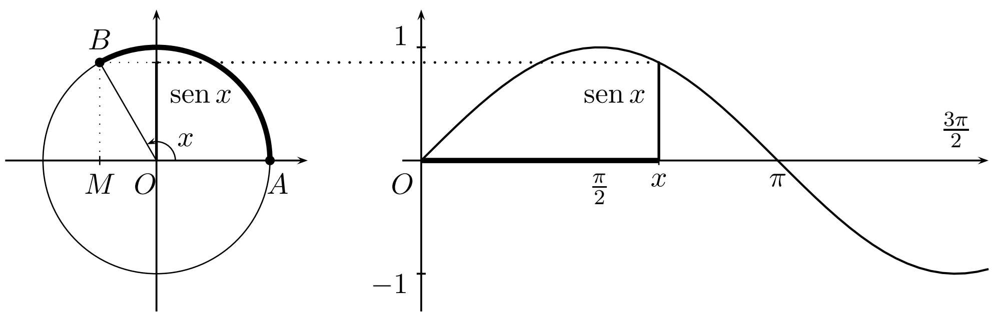
Observe que não podemos definir a tangente para arcos de comprimento $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ e, em geral, para arcos de comprimento $\dfrac{k\pi}{2}$, com k inteiro ímpar.

Para um arco AB de comprimento menor do que $\dfrac{\pi}{2}$, a tangente de α é, então, a ordenada de T. Para qualquer x real, que não seja igual a $\dfrac{k\pi}{2}$ para algum k inteiro, podemos definir tangente de x como a *ordenada de* T, para um arco AB de comprimento $|\,x\,|$ percorrido no sentido anti-horário, para x positivo, e no sentido horário, para x negativo.

3.5 – GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

O esboço do gráfico da função seno é importante para nos ajudar a compreender seu comportamento. Para esse esboço, vamos considerar alguns de seus elementos.

Definimos a função seno de modo que seu *domínio* é o conjunto dos números reais. É fácil observar que a *imagem* dessa função está contida no intervalo $[-1, 1]$, uma vez que o seno é a ordenada de um ponto do círculo unitário centrado na origem. A *imagem* da função seno é, de fato, o intervalo $[-1, 1]$: qualquer altura no intervalo $[-1, 1]$ é a ordenada de pelo menos um ponto do círculo unitário e, portanto, é a imagem de infinitos números reais.



Os valores de $\operatorname{sen} x$ repetem-se a cada volta percorrida no círculo. Para qualquer número real x, temos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \cdots$$

e, também,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen}(x - 4\pi) = \cdots$$

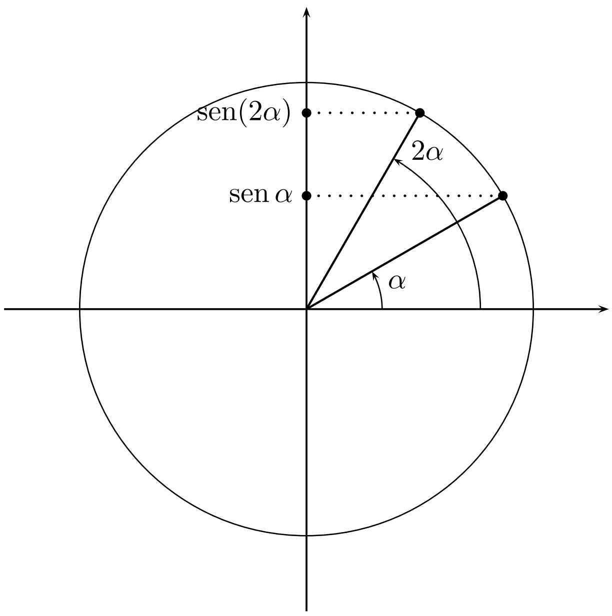
Podemos escrever, então, que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, para qualquer k inteiro e dizer que a função seno é uma função *periódica*, de *período* 2π.

Além disso, podemos esboçar o gráfico para o intervalo $[0, 2\pi)$ do domínio e depois "colar pedaços" do gráfico idênticos a esse, à esquerda e à direita.

O comprimento do intervalo considerado é 2π. O traçado desse intervalo equivale a uma operação de "desenrolar o círculo", como podemos observar na figura da página precedente.

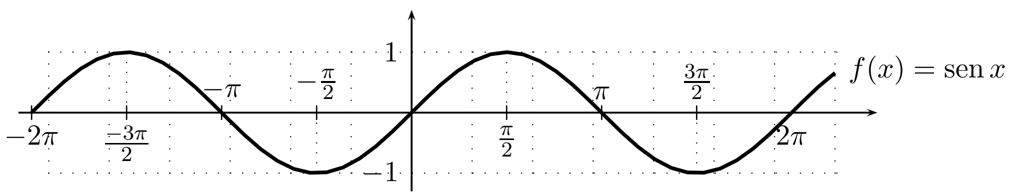
Sabemos que nesse intervalo o valor máximo da função, que é 1, é atingido quando $x = \pi/2$ e o valor mínimo, -1, é atingido quando $x = 3\pi/2$. Os zeros da função nesse intervalo são 0 e π. Mas, como a função varia em cada um dos quatro intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$?

Começamos observando que a função seno é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Pode-se intuir que, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x$ cresce cada vez mais lentamente conforme se aproxima de $\pi/2$. Já no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{sen} x$ decresce cada vez mais rapidamente conforme se aproxima de π.



Isso significa que esse crescimento do seno em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *não é* linear ou, então, que a taxa de variação *não é* constante. Observe que, quando percorremos arcos de mesmo comprimento, a variação do seno não é a mesma, como já vimos na Proposição 3.2 e como também pode ser observado na figura acima.

Enfim, pode-se intuir que o seno de x varia continuamente em função de x. Na figura abaixo temos um esboço do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

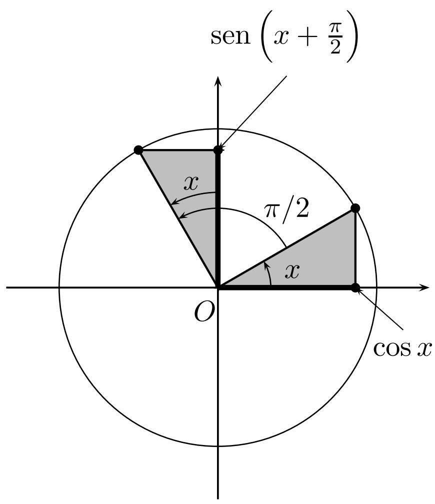


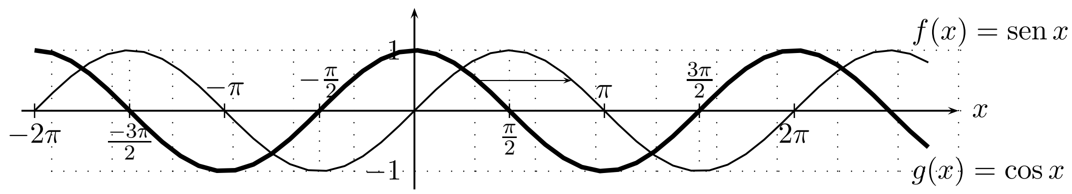
3.6 – TRANSLAÇÕES, ALONGAMENTOS E COMPRESSÕES

A partir do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, podemos obter o gráfico de uma infinidade de funções. Por exemplo, podemos obter o gráfico de $g(x) = \cos x$ usando o fato de que, para qualquer valor real de x,

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

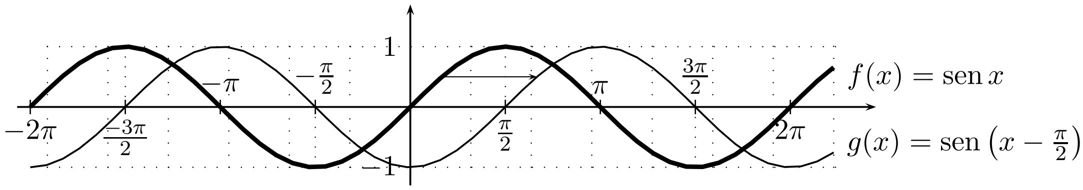
como ilustra a figura ao lado. Como a função cosseno está "adiantada" $\pi/2$ em relação à função seno, o traçado do gráfico de $g(x) = \cos x$ pode ser imaginado como um deslocamento do eixo vertical para a direita, de $\pi/2$ unidades, sobre o gráfico da função seno.



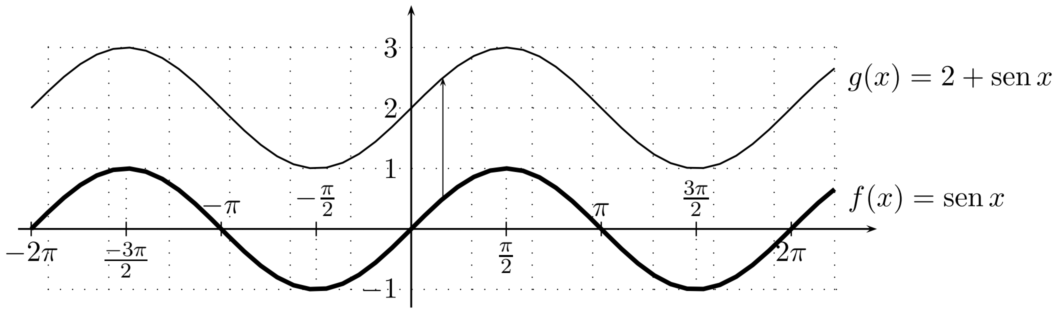


Também podemos ver o gráfico do cosseno como um deslocamento do gráfico da função seno de $\pi/2$ unidades para a esquerda. Na figura acima, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \cos x$ junto com o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Em geral, dado um valor real d qualquer, o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(x - d)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com um deslocamento desse gráfico d unidades *para a direita*. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

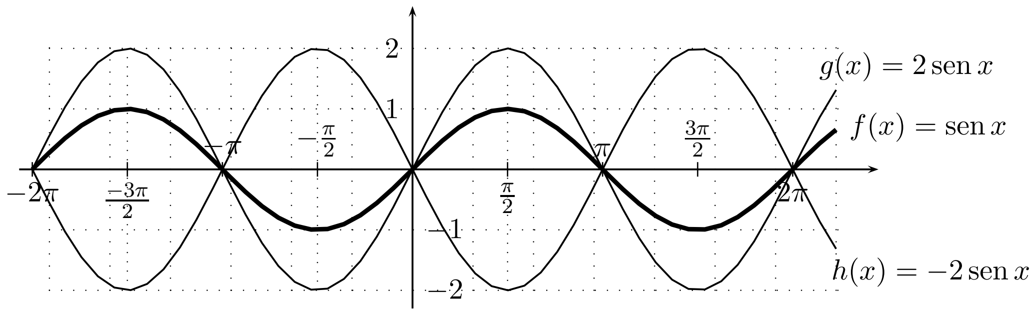


Para um número real qualquer a, o gráfico da função $g(x) = a + \operatorname{sen} x$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com um deslocamento *vertical* desse gráfico de a unidades. A imagem dessa função g será o intervalo $[-1 + a, 1 + a]$. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.



Para um número real positivo qualquer b, o gráfico da função $g(x) = b \operatorname{sen} x$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com um alongamento ou compressão *vertical* desse gráfico. A imagem dessa função g será o intervalo $[-b, b]$.

Quando b for um número real negativo, teremos além do alongamento vertical uma *reflexão* do gráfico da função em relação ao eixo horizontal. Na figura abaixo, temos um esboço dos gráficos das funções $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$ e $h(x) = -2 \operatorname{sen} x$.

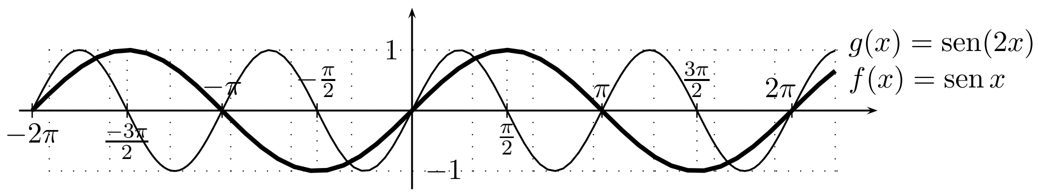


Para valores reais não nulos de c, o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. A imagem dessa função g ainda é o intervalo $[-1, 1]$, mas a frequência da função, isto é, a "quantidade de períodos" percorridos num mesmo intervalo, fica multiplicada por $|\,c\,|$. O comprimento do período é inversamente proporcional à frequência.

Se o módulo de c for maior do que 1, a frequência da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ será maior do que a da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e o período da função g será menor do que o da função f. Por exemplo, com $c = 2$, temos

$$g(x) = \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(2x + 2\pi) = \operatorname{sen}[2(x + \pi)] = g(x + \pi),$$

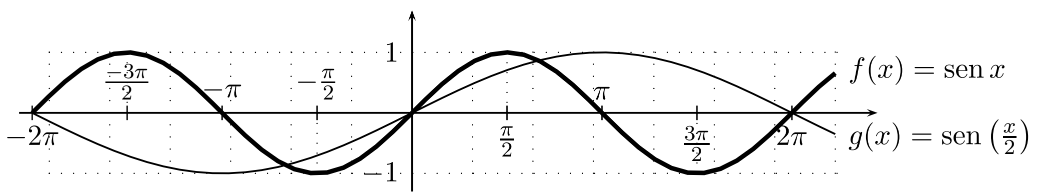
para qualquer x real e, portanto, o período de $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ é π. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$.



Se o módulo de c for menor do que 1, a frequência da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ será menor do que a da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e o período da função g será maior do que o da função f. Por exemplo, com $c = \frac{1}{2}$, temos

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}x + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(x + 4\pi)\right] = g(x + 4\,\pi),$$

para qualquer x real e, portanto, o período de $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ é $4\,\pi$. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Generalizando o que foi mostrado nos dois últimos exemplos, podemos concluir que o período da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$, para valores de c diferentes de 0 é, sempre, $\frac{2\pi}{|\,c\,|}$.

Resumindo, se c for diferente de 0, 1 e -1, o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ é um alongamento ou compressão *horizontal* do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Além disso, se c for um número negativo, ocorre também uma *reflexão* do gráfico da função em relação ao eixo horizontal, uma vez que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, para qualquer valor real de x.

3.7 – EXERCÍCIOS

Exercício 3.1. O topo de uma torre vertical é visto de um ponto P do solo segundo um ângulo de $30°$. A distância do ponto P à base da torre é $150\,\mathrm{m}$. Calcule a altura da torre.

Exercício 3.2. Sabe-se que θ é um ângulo entre $0°$ e $90°$ e que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$. Calcule $\cos\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$.

Exercício 3.3. Sabe-se que $0° < \theta < 90°$ e que $\operatorname{tg}\theta = 5$. Calcule $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

Exercício 3.4. Verifique que

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}\,.$$

Exercício 3.5. Verifique que

$$\cos 22,5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \operatorname{sen} 22,5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} 22,5° = \sqrt{2}-1\,.$$

Exercício 3.6. Verifique que

$$8\ \operatorname{sen} 3° = \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{9-3\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{15+3\sqrt{5}}.$$

Obtenha uma expressão análoga para o valor de $\cos 3°$.

Exercício 3.7. Usando as Fórmulas (3.10) e (3.11), deduza a igualdade

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}\,.$$

Exercício 3.8. Utilize o exercício anterior para deduzir uma fórmula para $\operatorname{tg}(2\,\theta)$.

Exercício 3.9. Se dois ângulos agudos α e β são tais que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$, mostre que $\alpha+\beta = 45°$.

Exercício 3.10. Utilizando as Fórmulas (3.6), (3.7), (3.10) e (3.11) deduza expressões para $\cos(3\,\theta)$ e $\operatorname{sen}(3\,\theta)$ em termos de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

Exercício 3.11. Utilizando o resultado obtido no exercício precedente, escreva $\operatorname{sen}(3\,\theta)$ em função de $\operatorname{sen}\theta$. A partir daí, obtenha um polinômio de grau 3 com coeficientes inteiros que tenha $x = \operatorname{sen} 10^\circ$ como raiz. Procurando as possíveis raízes racionais do polinômio encontrado, prove que $\operatorname{sen} 10^\circ$ é um número irracional.

Exercício 3.12. Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) $\operatorname{sen} 2 > 0$
b) $\cos 4 < 0$
c) $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$
d) $\cos 3 > \cos 2$
e) $\operatorname{tg} 5 > \operatorname{tg} 6$
f) $\cos \sqrt{3} < 0$
g) $\cos \frac{\pi}{4} > \cos 1$
h) $2 \operatorname{sen} 1 = \operatorname{sen} 2$

Exercício 3.13. Encontre todos os valores de x que satisfazem a igualdade dada.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\operatorname{sen}(3x) = \dfrac{1}{2}$
c) $\operatorname{tg}^2 x = 3$

Exercício 3.14. Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa para qualquer número real x, justificando sua resposta.

a) $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen} x$
b) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$
c) $\operatorname{sen}(\pi + x) = \operatorname{sen} x$
d) $\cos(-x) = \cos x$
e) $\cos(\pi - x) = \cos x$
f) $\cos(\pi + x) = \cos x$

Exercício 3.15. Encontre todos os valores de x que satisfazem a desigualdade dada.

a) $\operatorname{sen} x \geq 0$
b) $\operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2}$
c) $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

Exercício 3.16. Resolva a desigualdade $2 \operatorname{sen}^2 x + 7 \operatorname{sen} x + 3 \leq 0$.

Exercício 3.17. Resolva a equação $\operatorname{sen}(2x) = \cos x$.

Exercício 3.18. Encontre todos os valores de x para os quais $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x$.

Exercício 3.19. Determine o número de soluções de cada uma das equações dadas.

a) $\operatorname{sen}(3x) = \cos(2x)$, em $[0, 2\pi]$.

b) $\operatorname{sen} x = x$

c) $\operatorname{sen} x = (x - 5)^2$

Exercício 3.20. Para cada uma das funções dadas, determine o domínio, a imagem e o período (se houver) e esboce o gráfico.

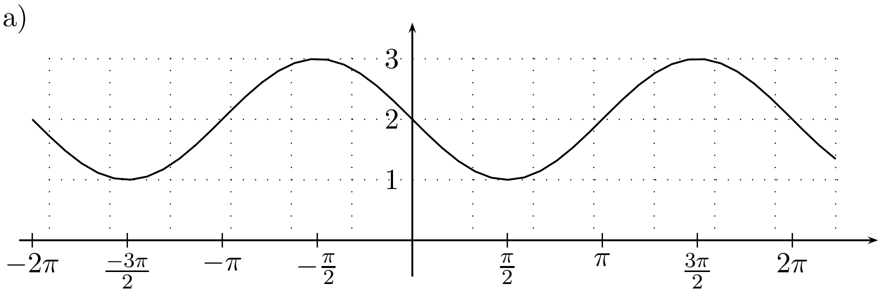
a) $f(x) = \text{sen}(x + \pi/4)$ b) $f(x) = 1 + \cos x$ c) $f(x) = 1 - \text{sen}\, x$
d) $f(x) = -2\ \text{sen}(x/2)$ e) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$ f) $f(x) = -\text{sen}\, x$
g) $f(x) = 1 - \cos x$ h) $f(x) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x$ i) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Exercício 3.21. Para cada uma das funções dadas, determine o domínio e a imagem e verifique se é periódica.

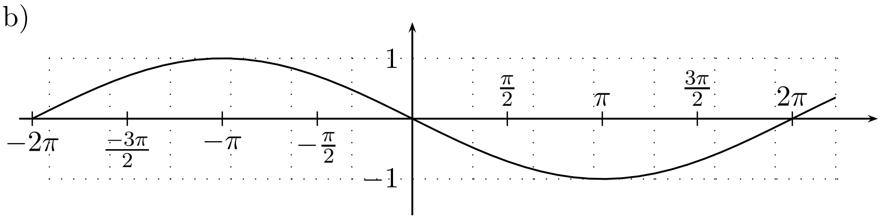
a) $f(x) = \text{sen}^2 x$ b) $f(x) = \text{sen}(x^2)$
c) $f(x) = \sqrt{|\,\text{sen}\, x\,|}$ d) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercício 3.22. Para cada um dos gráficos abaixo, obtenha uma função correspondente na forma $f(x) = a + b\ \text{sen}(cx - d)$, para certos a, b, c e d reais especificados.

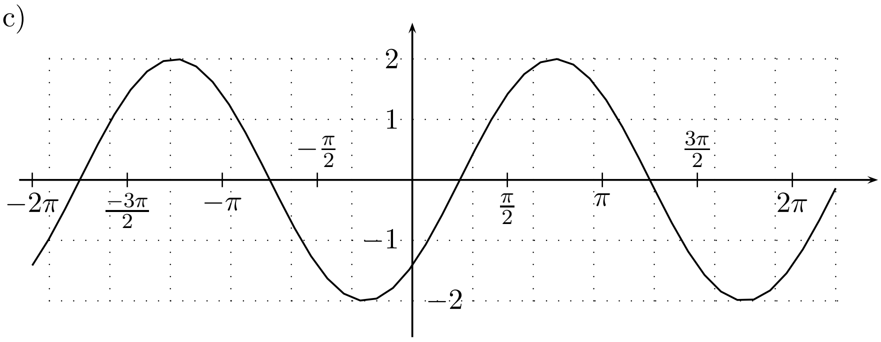
a)



b)



c)



Exercício 3.23. Uma população de animais varia de forma senoidal entre um valor máximo de 900, em 1º de janeiro, e um valor mínimo de 700, em 1º de julho.

a) Esboce um gráfico da população em função do tempo.
b) Encontre uma fórmula para essa função, sendo o tempo dado em meses, a partir do começo do ano.

Exercício 3.24. A profundidade da água numa baía varia de forma senoidal, em ciclos de quatro meses, entre um valor máximo de 36 metros e um valor mínimo de 20 metros.

a) Esboce um gráfico da profundidade em função do tempo.
b) Encontre uma fórmula para essa função, sendo o tempo dado em meses, e tomando como instante zero o momento em que a profundidade atingiu o valor máximo.

Exercício 3.25. A voltagem de uma saída de eletricidade em uma residência é dada em função do tempo t (em segundos) por $V(t) = V_0 \cos(120\,\pi\,t)$.

a) Qual é o período da oscilação?
b) O que representa V_0?
c) Esboce o gráfico de $V(t)$.

Exercício 3.26. Você sabe que duas funções trigonométricas têm, cada uma, período π e que seus gráficos se intersectam em $x = 3{,}64$, mas você não tem nenhuma outra informação sobre as funções.

a) Você sabe dizer se os gráficos se intersectam em algum valor positivo menor do que 3,64?
b) Obtenha um valor maior do que 3,64 onde os gráficos se intersectam.
c) Encontre um valor negativo de x no qual os gráficos se intersectam.

Exercício 3.27. Quando se estudam fenômenos periódicos, por exemplo, o movimento harmônico simples, é comum precisarmos usar funções do tipo

$$f(x) = A\ \mathrm{sen}(cx) + B\ \cos(cx)$$

para modelar esses fenômenos. O objetivo do presente exercício é desenvolver um método para ter uma ideia do gráfico e do comportamento desse tipo de função.

a) Considere a função $g(x) = \mathrm{sen}\, x + \cos x$. Mostre que

$$g(x) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right).$$

Utilize esse fato para mostrar que $g(x) = \sqrt{2}\ \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Utilizando essa última expressão, faça um esboço do gráfico da função $g(x)$.

b) Seja $f(x) = A\,\text{sen}(cx) + B\,\cos(cx)$. Confira que

$$f(x) = C\left[a\,\text{sen}(cx) + b\,\cos(cx)\right],$$

com $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $a = A/C$ e $b = B/C$.

Em seguida, considere um ponto P de coordenadas (a, b) no plano cartesiano. Mostre que $a^2 + b^2 = 1$, portanto P está no círculo unitário. Seja φ o ângulo do semieixo positivo dos x com a semirreta OP, onde O é a origem. Mostre que $a = \cos\varphi$ e $b = \text{sen}\,\varphi$. Mostre que a expressão de $f(x)$ pode ser reescrita na forma

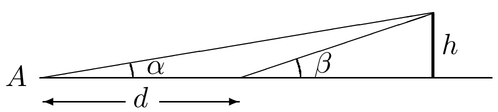
$$f(x) = C\,\text{sen}(cx + \varphi) = C\,\text{sen}\left(c\left[x + \tfrac{\varphi}{c}\right]\right).$$

A partir daí, descreva o gráfico de f em termos de compressões, dilatações e translações verticais e horizontais.

Exercício 3.28. Sejam a e b os comprimentos de dois lados de um triângulo e seja θ o ângulo agudo formado por eles. Prove que a área desse triângulo vale $S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$.

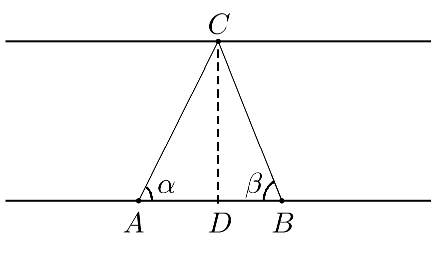
Exercício 3.29. Um observador, situado no ponto A, vê o cume de uma montanha distante segundo um ângulo de $\alpha = 10°$, medido com um teodolito. Desejando conhecer a altura da montanha, e tendo à sua frente um terreno plano, o observador desloca-se uma distância $d = 800\,\text{m}$ em direção à montanha e faz nova medição. Constata que agora vê o topo da montanha segundo um ângulo de $\beta = 15°$. Determine a altura da montanha, usando que

$$\text{sen}\,5° \cong 0{,}0871 \quad \text{e} \quad \cos 5° \cong 0{,}9961.$$



Generalize esse exercício, encontrando a expressão de h em função de α, β e d para α, β e d quaisquer.

Exercício 3.30. Desejando estimar a largura de um grande rio, um observador, situado em uma das margens, seleciona um marco bem visível na margem oposta. A partir de um ponto A, como na figura ao lado, o observador mede, então, o ângulo α indicado na figura. Em seguida, deslocando-se até o ponto B, também na margem do rio e distando 500 m do ponto A, faz uma medição do ângulo β.

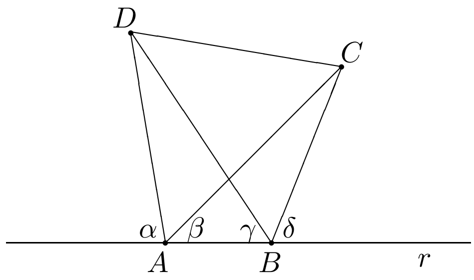


Sabendo que $\alpha = 68°$ e $\beta = 74°$, determine a largura CD do rio.

Sugestão: Use uma calculadora científica para obter os valores das funções trigonométricas dos arcos que precisar.

Exercício 3.31. A reta r na figura dada representa um trecho retilíneo da costa. Um observador deseja obter uma estimativa para a distância entre duas ilhas, representadas pelos pontos C e D.

A partir de pontos A e B situados na costa e distantes 1800 m um do outro, o observador mede os ângulos que AD, AC, BD e BC fazem com a linha da costa, encontrando os valores $\alpha = 80°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$ e $\delta = 75°$. Determine a distância CD entre as duas ilhas.



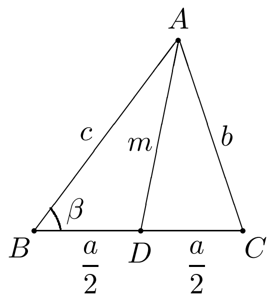
Exercício 3.32. Calcule os comprimentos das diagonais de um paralelogramo que tem lados de comprimento 3 e 4 e um ângulo de 60°.

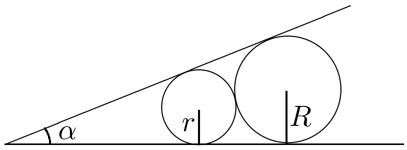
Exercício 3.33. Sabendo que os lados de um paralelogramo $ABCD$ medem $AB = CD = 2$ e $BC = AD = 1$ e que o ângulo $D\widehat{A}B = 60°$, determine o cosseno do ângulo agudo formado pelas diagonais de $ABCD$.

Exercício 3.34. Calcule o cosseno do ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo.

Exercício 3.35. De um ponto que dista 5 cm de um círculo de 3 cm de raio são traçadas duas retas tangentes ao círculo. Calcule o seno do ângulo agudo formado por essas duas retas.

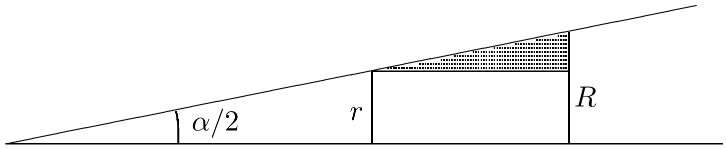
Exercício 3.36. Uma *mediana* de um triângulo é um segmento de reta unindo um vértice ao ponto médio do lado oposto. Considere o triângulo ABC na figura ao lado. Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ABC e ABD, obtenha a expressão da mediana $m = \overline{AD}$ em função dos lados a, b e c.





Exercício 3.37. Considere dois círculos tangentes entre si exteriormente e tangentes a duas retas, como mostra a figura. Expresse o raio R do círculo maior em função do raio r do círculo menor e do cosseno do ângulo α entre as duas retas.

Sugestão: Trace a reta que passa pelos centros dos círculos, formando a figura abaixo. Considere o triângulo retângulo hachurado. Quanto vale a hipotenusa desse triângulo?



Exercício 3.38. Os lados de um triângulo ABC medem $AB = 6, AC = 5$ e $BC = 4$. Mostre que $B\widehat{C}A = 2\,C\widehat{A}B$.