UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE ÁLGEBRA SUPERIOR NO ENSINO MÉDIO

Barbara Pogorelsky[1]
Carolina Noele Renz[2]
Cássio Volpato Selbach[3]

Resumo
Neste trabalho, apresentamos o relato de uma experiência de ensino de alguns conteúdos de álgebra que são abordados exclusivamente no ensino superior com uma turma do segundo ano do ensino médio. Os tópicos abordados foram as definições das estruturas de anel e de corpo e estes foram escolhidos por serem estudados diversos exemplos destes conjuntos durante os ensinos fundamental e médio, como os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos e, ainda, os conjuntos dos polinômios e matrizes. Os objetivos da atividade envolvem proporcionar um primeiro contato dos alunos de ensino básico com a matemática formal através de exemplos já conhecidos, conectar a matemática básica com estes novos conceitos e proporcionar reflexões a respeito dos respectivos conteúdos partindo da experiência.

Palavras-chave: Currículo. Álgebra. Abstração.

Abstract
In this work we present the report of a teaching experience of some algebra contents that are exclusively addressed in higher education with a second year high school class. The topics covered were the definitions of ring and field structures, and these were chosen once several examples of these sets are studied in primary and secondary education, such as the sets of integer, rational, real and complex numbers, and the sets of polynomials and matrices.. The objectives of the activity are to provide a first contact of elementary students with formal mathematics through examples already known, to connect basic mathematics with these new concepts and to provide reflections on the respective contents from this experience.

Keywords: Curriculum. Algebra. Abstraction.

INTRODUÇÃO

Em termos de estruturas algébricas, o ensino escolar está desconectado do ensino praticado academicamente. Segundo Almeida, 2017, a álgebra na escola é apresentada, quase sempre como técnicas de manipulações de símbolos sem sentido, dificultando a construção de significado por parte do aluno. No ensino básico, são introduzidos elementos de conceitos abstratos muito precocemente, mas sem uma compreensão mais profunda de suas possíveis conexões e relações, gerando não só a falta de entendimento como um possível preconceito para com a matemática pura. Por exemplo, os conceitos algébricos de anel e de corpo são introduzidos através dos exemplos dos conjuntos de números inteiros, racionais, reais e complexos, mas sem enfatizar suas propriedades e conceitos comuns como existência de unidade e inverso. Conforme os parâmetros curriculares nacionais (BRASIL, 1998, p. 115):

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite

1 Doutora em Álgebra. Professora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: barbarapogo@gmail.com
2 Doutora em Álgebra. Professora da Universidade Federal de Ciências da Saúde de Porto Alegre.
3 Licenciado em Matemática. Professor da Rede Estadual de Ensino do Rio Grande do Sul

> sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.
> Entretanto, a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país.

A proposta deste trabalho é apresentar um relato de experiência, desenvolvendo uma primeira reflexão sobre o ensino e a aprendizagem de conceitos como anéis e corpos e na maneira pela qual estas definições poderiam transformar a apresentação de alguns tópicos de estudo do ensino curricular básico, apresentando a matemática de uma maneira mais formal e questionando as bases da construção metodológica em que temos investido na escola. Segundo os parâmetros curriculares nacionais (BRASIL, 2000, p. 6):

> A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos.”

A construção de conceitos ligados à álgebra no ensino médio, aparentemente, parte do pressuposto de que os alunos não compreendem conceitos como comutatividade de operações ou definições de estruturas mais abstratas, ainda que a proposta seja crescer em complexidade com relação aos temas abordados no ensino fundamental. Como resultado, os alunos aprendem determinados temas que matematicamente têm diversas conexões, mas de forma completamente separada. Por exemplo, temos polinômios e funções, matrizes e conjuntos numéricos, entre muitos outros. No entanto, o aprendizado segmentado destes temas torna-os ainda mais abstratos e afasta a possibilidade de explorar as características que os aproximam ou os separam, impossibilitando relações que oportunizam o desenvolvimento do raciocínio e, consequentemente, o aprendizado.

Conforme Canavarro (2007, p. 91)

> Um outro aspecto a favor da inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática tem a ver com o seu potencial para dar unidade e sentido à Matemática escolar desde o seu início, pela natureza do próprio pensamento algébrico.

Aprender sobre relações algébricas que, satisfeitas ou não, caracterizam um anel ou um corpo, por exemplo, conectaria conteúdos que os alunos compreendem e estão familiarizados com os demais conteúdos a serem abordados, tais como matrizes. Tal prática gera mais compreensão sobre o objeto de estudo já assimilado e sua integração com o novo tópico. Alguns autores como Arcavi (2005), Blanton e Kaput (2005) e Radford (2009) propõem que álgebra é muito mais do que uma linguagem, apresentando-a como uma forma de pensar.

Trata-se de uma profundidade inovadora para o ambiente da escola, que é possível mediante abordagem adequada. Possibilita-se assim um novo olhar sobre a matemática em uma visão integralista.

De acordo com Garcia (2012, p. 14)

> Ao ensinar um certo conteúdo de matemática, em geral, perguntamos: o quê? Como? O que devo ensinar? Como ensiná-lo? Mas a pergunta, hoje, deveria ser: por quê? Quais as razões de ensiná-lo? Por que está presente no currículo escolar? Por que ele foi escolhido e não outro? Considerando as mudanças sociais aceleradas e o novo contexto em que vivemos – um mundo globalizado, na era da informação e da tecnologia – e considerando objetivos para melhoria da qualidade da educação e do compromisso social para com o aluno, poderíamos questionar e mesmo afastar alguns conteúdos do currículo e incluir outros.

Por mais ambicioso que possa parecer repensar o currículo, é através de propostas simples e práticas pouco comuns como esta, que abrimos as portas a reflexões que permitem uma construção futura que talvez envolva conteúdos de álgebra abstrata. Esta mudança poderia nos possibilitar um melhor aproveitamento em aprendizagem de matemática, construindo conceitos e relações e desenvolvendo o raciocínio e não somente acumulando conhecimentos.

Assim, a proposta da inserção da matemática pura no ensino básico vem com o objetivo de aproximá-la dos alunos, dando a conhecer a verdadeira estrutura por trás das contas que todos aprendem. Conforme nos diz Silva (2015, p.1), ao falar sobre o papel da abstração na educação através de Piaget:

> A imersão em um ambiente onde os conhecimentos científicos existentes tomam forma e conteúdo próprio, decorrentes da atividade do sujeito, torna a teoria da abstração fonte para explicar o processo de construção do conhecimento.

Além disso, de acordo com Meier e Silva (2015, p. 141) temos:

> Acredita-se que conteúdos e habilidades devam ser selecionados para construir um currículo, porém deve-se considerar principalmente o modo como eles são selecionados e, em especial, a maneira como são organizados, pois, isto determina o tipo de formação escolar pretendida. Logo, ao propor uma metodologia envolvendo a compreensão da matemática e seus métodos, possibilita-se ao estudante uma formação que lhe permitirá uma atuação crítica dentro da sociedade, uma vez que a matemática estudada e aprendida se tornará instrumento para entender e transformar o mundo.

Partindo das premissas expostas, o presente trabalho busca fazer da experiência prática um material de reflexão para repensar o ensino de álgebra no ensino básico, inserindo gradativamente uma visão mais sistêmica e completa dos elementos estudados.

MATERIAL E MÉTODOS

A experiência relatada foi realizada em uma escola estadual com uma turma de 2º ano do

Ensino Médio, conduzida pelo professor titular da disciplina de matemática e ocorreu em horário regular de aula. Previamente, foram analisadas quais definições formais seriam mais apropriadas e quais relações eles poderiam desenvolver entre exemplos de estruturas algébricas que satisfazem ou não estas propriedades.

Na data da realização da atividade, como introdução, o professor realizou uma explanação sobre o tema e convidou a turma à resolução de questões diretamente relacionadas ao assunto. Neste momento, os alunos receberam uma lista de questões que era constituída de exercícios com definições já conhecidas, mas também incluía novas definições, para que houvesse identificação do nível de abstração abarcado na explicação. A resposta ao questionário era facultativa. Desta forma, além dos resultados em termos de compreensão do tema, obtemos indícios do interesse, ou ausência dele, dos alunos para com a inovação na temática.

Para as conclusões obtidas foram consideradas, além das respostas dos questionários entregues pelos alunos e do relato da experiência feito pelo professor, as anotações do diário de classe docente ao longo do ano.

Descrição da Atividade

Nosso objetivo neste trabalho é descrever uma experiência do ensino de álgebra abstrata e formal com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Novo Hamburgo, Rio Grande do Sul. Estes alunos, assim como os alunos do ensino médio em geral, já estão familiarizados com diversos exemplos de anéis e de corpos, como os números inteiros, racionais, reais e polinômios. A turma escolhida apresentava um bom desempenho na disciplina de matemática. No entanto, os alunos nunca haviam sido apresentados à definição de anel, que é fundamental à álgebra, e não imaginavam que existem conexões entre os números inteiros e os polinômios, por exemplo.

O encontro com os alunos para realização da atividade ocorreu em um dia normal de aula. Foi explicado aos alunos que eles teriam uma aula com conteúdo diferenciado e que ao final eles realizariam uma tarefa opcional.

Inicialmente foi apresentada uma aula expositiva sobre a definição de anel e corpo, dando a conhecer as diversas propriedades que um conjunto deve possuir para ser um anel ou um corpo, como associatividade, existência de zero e de unidade, distributividade, comutatividade, existência de oposto aditivo e inverso multiplicativo e lei do cancelamento. Cada definição foi acompanhada de um exemplo prático do conjunto dos racionais ou inteiros, possibilitando a atribuição de sentido ao conhecimento apresentado.

Dentre todas as propriedades, a existência do zero e do oposto e também a existência da unidade e do inverso aditivo foram enfatizadas. Após o final da explicação das propriedades, foi apresentado o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2, juntamente com sua definição de soma e produto, e explicado o porquê deste conjunto formar um anel, mas não formar um corpo. Finalmente foram apresentados e trabalhados os conjuntos $Z[\sqrt{2}]$ e $Q[\sqrt{2}]$, justificando a razão destes conjuntos formarem, respectivamente, um anel e um corpo. Neste momento, os alunos demonstraram o estranhamento esperado com tais exemplos. Após um momento para esclarecimento de dúvidas, foi dado a cada aluno uma folha na qual eles deveriam escrever as respostas dos exercícios propostos conforme a figura 1 abaixo.

Figura 1 - Questões propostas aos alunos

1. Classifique os conjuntos abaixo em anéis, corpos ou nenhum dos anteriores (nda). Justifique suas respostas.
   (a) $\mathbb{N}$
   (b) $\mathbb{Z}$
   (c) $\mathbb{Q}$
   (d) Conjunto dos irracionais ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
   (e) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}\}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$
   (f) $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}\}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$
   (g) Conjunto dos polinômios
2. Comente a experiência de ter uma aula de álgebra avançada.

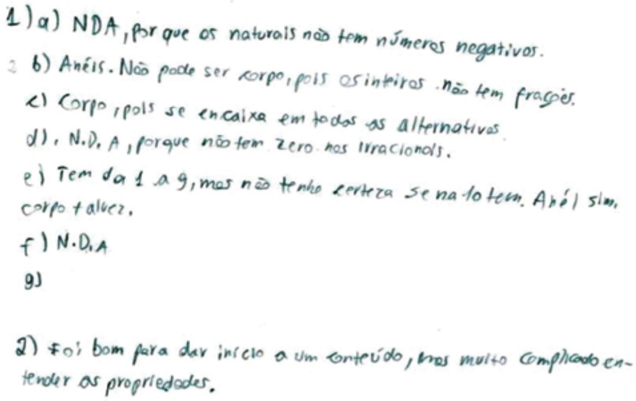
Fonte: Arquivo pessoal

RESULTADOS

Como a tarefa não seria usada na avaliação dos alunos e foi apresentada a eles como facultativa, alguns optaram por não realizá-la. Dos vinte e nove alunos presentes, vinte aceitaram a folha para responder as questões. Destes vinte alunos, onze entregaram a folha com as suas respostas, sendo que cinco responderam a maioria das questões. Os outros seis estudantes responderam um item da atividade 1 e/ou a atividade 2. Um único aluno respondeu todas as questões.

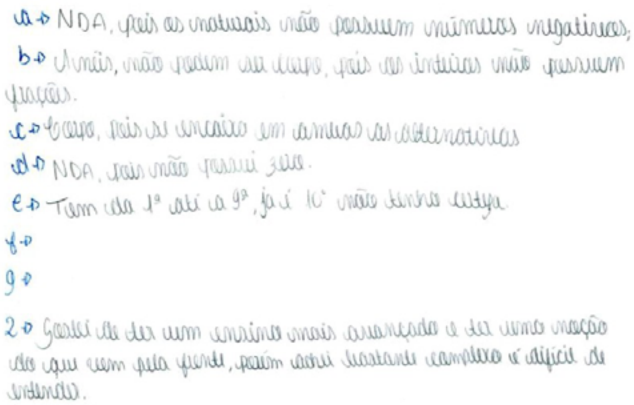
Nas figuras 2 e 3 abaixo estão as respostas de dois alunos que responderam substancialmente as perguntas, que chamaremos aluno A e aluno B. Nota-se que estes alunos compreenderam com razoável clareza os novos conceitos propostos. Com isto concluímos que alguns alunos já estão aptos a conhecer a matemática com um grau maior de formalismo.

Figura 2 - Respostas do aluno A


1) a) NDA, por que os naturais não tem números negativos.
b) Anéis. Não pode ser corpo, pois os inteiros não tem frações.
c) Corpo, pois se encaixa em todas as alternativas
d). N.D.A, porque não tem zero nos irracionais.
e) Tem da 1 a 9, mas não tenho certeza se na 10 tem. Após sim, corpo talvez.
f) N.D.A
g)
2) Foi bom para dar início a um conteúdo, mas muito complicado entender as propriedades.

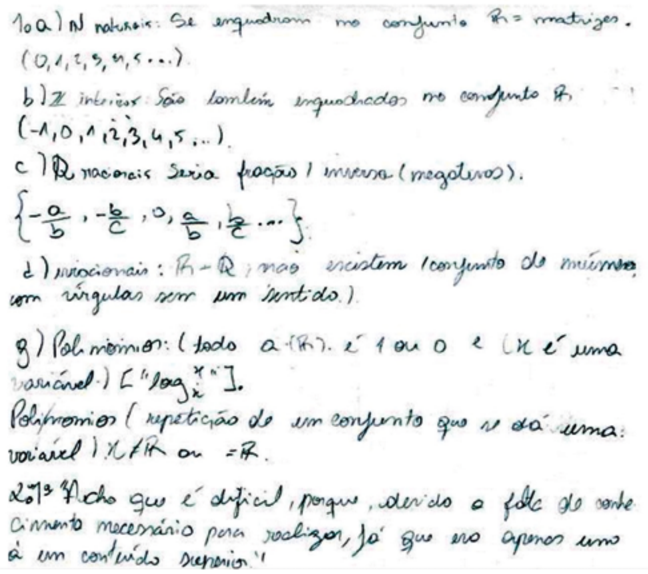
Fonte: Dados fornecidos pelo aluno A

Figura 3 - Respostas do aluno B


a→ NDA, pois os naturais não possuem números negativos;
b→ Anéis, não podem ser corpo, pois os inteiros não possuem frações.
c→ Corpo, pois se encaixa em ambas as alternativas
d→ NDA, pois não possui zero.
e→ Tem da 1ª até a 9ª, já a 10ª não tenho certeza.
f→
g→
2→ Gostei de ter um ensino mais avançado e ter uma noção do que vem pela frente, porém achei bastante complexo e difícil de entender.

Fonte: Dados fornecidos pelo aluno B

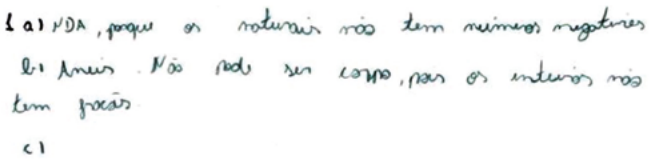
Figura 4 - Resposta do aluno C


1a) N naturais: Se enquadram no conjunto R = matrizes. (0, 1, 2, 3, 4, 5 ...)
b) Z inteiros: São também enquadrados no conjunto R. (-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...)
c) Q racionais: Seria frações / inversa (negativos). $\{-\frac{a}{b}, -\frac{b}{c}, 0, \frac{a}{b}, \frac{b}{c} \dots\}$.
d) irracionais: R - Q; não existem (conjunto de números com vírgulas sem um sentido.)
g) Polinômios: (todo a (R). é 1 ou 0 e (x é uma variável.) ["$\log_x x$"].
Polinômios (repetição de um conjunto que se dá uma variável) $x \neq R$ ou $= R$.
2) "Acho que é difícil, porque, devido a falta de conhecimento necessário para realizar, já que era apenas uma à um conteúdo superior."

Fonte: Dados fornecidos pelo aluno C

Acreditamos que grande parte da turma encontra-se numa terceira categoria, de alunos que não estão tão interessados, mas possuem capacidade para captar alguns conceitos mais abstratos. Estes alunos são os que responderam poucas questões, mas o fizeram corretamente. Abaixo, na figura 5, estão as respostas do aluno que chamaremos de aluno D, que integra este grupo.

Figura 5 - Resposta do aluno D


1 a) NDA, porque os naturais não tem números negativos
b) Aneis. Não pode ser corpo, pois os inteiros não tem frações
c)

Fonte: Dados fornecidos pelo aluno D

Outra conclusão que podemos extrair das respostas da atividade 2, é que muitos dos alunos que entregaram a folha gostaram de ter uma aula diferente, mesmo sendo uma aula mais formal e possivelmente mais difícil. Em geral, as reações dos alunos à atividade durante o seu desenvolvimento foram positivas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização do experimento, uma análise rápida nas respostas produzidas pela turma demonstrou que muitos estudantes não puderam captar completamente o conteúdo proposto, uma vez que muitos deles conseguiram responder apenas parcialmente as questões propostas. Ainda assim, nota-se que começaram a compreender os conhecimentos apresentados, e mais ainda, a ideia de que a matemática vai muito além das contas a que estão familiarizados.

Podemos dizer que nossa experiência acabou oportunizando a estes alunos a possibilidade de ampliarem seu conhecimento em matemática para além do que eles estão acostumados a fazer. Nesta análise e exemplo, os alunos tomaram conhecimento da existência das noções de anel e corpo, e através de exemplos perceberam como estas noções estão presentes até mesmo no ensino fundamental.

Para esta experiência utilizou-se somente uma aula para não onerar o calendário escolar previamente estabelecido, mas compreendemos que um olhar sobre a álgebra abstrata na escola básica é possível, e outras experiências como esta poderiam ser úteis para repensarmos a ordem curricular estabelecida de forma a atender a complexidade algébrica de temas já conhecidos e novos.

Não queremos dizer com este trabalho que esta é a maneira, ou ainda, que é a única forma de se apresentar e trabalhar estes conceitos, mas sim propor a reflexão sobre esta possibilidade. Também salientamos, que não necessariamente os conceitos abordados aqui sejam indispensáveis no currículo do ensino básico, mas sim chamamos a atenção para a necessidade de repensarmos a presença da matemática formal na construção do conhecimento.

Desta forma, temos reflexões futuras, sobre quais temas da matemática superior, e com que objetivos e conexões, poderiam integrar ou não o currículo escolar, para que ensinemos matemática com mais profundidade e aproveitamento.

REFERÊNCIAS

Arcavi, A. **El desarrollo y el uso del sentido de los** símbolos. In: CONFERÊNCIA plenária no encontro de investigação em educação matemática. Anais. Caminha, Portugal, 2005.

Almeida, J.R. **Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária**. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana v. 8 n. 1, 2017

Blanton, M.L.; Kaput, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.** Journal for Research in Mathematics Education. EUA, v. 36, n. 5. 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática. Brasília, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª séries)**. Matemática. Brasília, 1998.

Búrigo, E. Z.; Gravina, M. A.; Basso, M. V. de A.; Garcia, V. C. V. **A matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens.** Editora UFRGS. Rio Grande do Sul, 2012.

Canavarro, A.P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.** Quadrante, Portugal, v. VXI, n. 2, 2007.

Meier, M.; Silva, R.S. **O uso da geometria dinâmica em modelagens geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental.** Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, Paraná, v.4, n.6, p.136-156, 2015.

Radford, L. **Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective.** Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon, França, 2009.

Silva, R.S. **O papel da abstração reflexionante no processo de tomada de consciência: um aspecto importante na construção dos conceitos matemáticos**. Revista Eletrônica da Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Caxias do Sul, v. 1, n. 1, 2015.