

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA ANÁLISE DINÂMICA NO TEMPO E MÚLTIPLOS
CARREGAMENTOS

por

Thomas Stedile Ribeiro

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Novembro de 2020.

CIP - Catalogação na Publicação

Ribeiro, Thomas Stedile

Otimização Topológica para Análise dinâmica no
Tempo e Múltiplos Carregamentos / Thomas Stedile
Ribeiro. -- 2020.

15 f.

Orientador: Herbert Martins Gomes.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2020.

1. Otimização Topológica. 2. Múltiplos
Carregamentos. 3. Elementos Finitos. 4. Análise
Dinâmica. 5. Mecânica dos Sólidos. I. Gomes, Herbert
Martins, orient. II. Título.

Thomas Stedile Ribeiro

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA ANÁLISE DINÂMICA NO TEMPO E MÚLTIPLOS
CARREGAMENTOS

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Daniel Milbrath de Leon

Profa. Dra. Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Porto Alegre, Novembro de 2020.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, que me deu completo e incondicional apoio durante cada etapa da minha vida, a graduação não sendo exceção.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2020

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA ANÁLISE DINÂMICA NO TEMPO E
MÚLTIPLOS CARREGAMENTOS

Thomas Stedile Ribeiro

thomas.thsr@gmail.com

Resumo. Com o avanço dos recursos computacionais, o uso da ferramenta de otimização topológica vem se tornando uma constante no dia a dia do projeto de estruturas, peças e equipamentos. Entretanto, manter o nível de segurança nestes projetos otimizados passa a ser uma necessidade, visto que a estrutura final está otimamente projetada. Apenas em situações bem específicas, o projeto pode ser baseado e assegurado para apenas um caso de carregamento, sendo comum a existência de carregamentos dinâmicos e de múltiplas possibilidades de solicitação ao longo da vida útil da peça. Neste trabalho, é desenvolvido um código para otimização topológica com a inclusão de múltiplos casos de carregamento, com o objetivo de manter a segurança da peça otimamente projetada. O código é baseado na metodologia BESO. Exemplos numéricos da literatura são utilizados para validar o algoritmo desenvolvido demonstrando a importância da inclusão do efeito destes carregamentos na topologia final da peça.

Palavras-chave: Otimização topológica, múltiplos carregamentos, elementos finitos, análise dinâmica, mecânica dos sólidos.

Abstract. With the advancement of computational resources, the use of the topological optimization tool has become a constant in the day-to-day design of structures, parts, and equipment. However, maintaining the level of reliability in these optimized projects becomes a necessity, since the final structure is optimally designed. Only in very specific situations, can the design be based and guaranteed for only one loading case, being common the existence of dynamic loading and several possibilities of application throughout the part's lifespan. In this work, a topological optimization code is developed with the inclusion of complex loading cases, in order to maintain the safety of the optimally designed part. The code is based on the BESO methodology. Numerical examples from literature are used to validate the developed algorithm demonstrating the importance of including the effect of these loads in the final topology of the part.

Keywords: topological optimization, multiple loads, finite elements, dynamic analysis, solid mechanics.

NOMENCLATURA

Símbolos

C	<i>Compliance</i>	[N m]
C_v	Matriz de amortecimento	[N s/m]
E	Módulo de Young	[Pa]
e	Espessura elementar	[m]
f	Vetor de cargas aplicadas	[N]
K	Matriz de rigidez	[N/m]
L	Comprimento	[m]
N_e	Número de elementos	[-]
M	Matriz de massa	[kg]
M_c	Número de casos de carregamento	[-]
p	Fator de Penalização	[-]
T	Tempo de análise	[s]
u	Vetor de deslocamentos	[m]
\dot{u}	Vetor de velocidades	[m/s]
\ddot{u}	Vetor de acelerações	[m/s ²]
V^*	Volume objetivo	[m ³]
V_i	Volume elementar	[m ³]
ν	Coefficiente de Poisson	[-]
w	Fator peso	[-]

Símbolos gregos

α^e	Número de sensibilidade elementar	[J]
ρ	Massa específica do sólido	[kg m ⁻³]

Abreviaturas e acrônimos

BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

Métodos numéricos de otimização têm sofrido grande avanço nas últimas décadas, especialmente métodos de otimização topológica. Com o objetivo de encontrar estruturas capazes de suportar carregamentos específicos em domínios e condições de contorno definidos com a menor quantidade de material possível, diversas metodologias de otimização topológica têm sido criadas e expandidas para comportar problemas cada vez mais práticos.

Algoritmos como o BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation*) utilizam o MEF (Método dos Elementos Finitos) para avaliar porções do material e simultaneamente retirar e colocar material no domínio, de forma a alcançar a maior eficiência possível na relação entre massa e rigidez da estrutura, ou algum outro parâmetro que se deseje otimizar. Em sua forma clássica, dadas condições de contorno, um domínio e os carregamentos aos quais a estrutura está submetida, o BESO é capaz de chegar numa configuração ótima independente da configuração inicial, e com uma boa independência da malha dos elementos finitos. O resultado, porém, é de aplicação limitada para situações reais pelo fato de estruturas raramente estarem sujeitas a apenas um caso de carregamento durante todo o tempo de sua vida útil.

1.1 Motivação

A crescente evolução de tecnologias de manufatura aditiva adiciona possibilidades de utilização de estruturas otimizadas em aplicações reais e relevantes. Para obter a estrutura mais eficiente possível em uma situação real, porém, deve-se levar em consideração que dificilmente a mesma estará sujeita, em toda sua utilização, a apenas um caso estático e único de carregamento. Para a otimização topológica ser de utilidade para cada vez mais situações, é necessário expandir o método de forma que ele seja capaz de levar em conta diferentes casos, como estruturas sujeitas a carregamentos que mudam ao longo do tempo.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é expandir a metodologia BESO de forma a ser capaz de otimizar estruturas sujeitas a cargas transientes, de forma a obter topologias mais capazes de atender demandas reais de otimização. Como principal objetivo, implementar um algoritmo no software MATLAB 2012b que utilize a consideração de múltiplos casos de carregamentos para encontrar a solução mais eficiente de uma estrutura cujas cargas variam no tempo.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Problemas de otimização topológica com considerações para múltiplos casos de carregamentos já foram estudados por diversos autores, assim como problemas envolvendo carregamentos transientes. Natke (1993) propõe a utilização de modelamento convexo de excitações permissíveis como um meio de simplificar um problema de otimização topológica com cargas dinâmicas, representando-o como um problema não-linear adequado aos procedimentos padrões existentes de programação computacional. A estrutura considerada para a otimização seria um sistema dividido em subsistemas os quais seriam adicionados e removidos de acordo com sua contribuição para a estrutura. A estrutura final, porém, é sensível ao modelo convexo escolhido, além de o método de divisão do domínio em subsistemas limitar o escopo do que pode ser resolvido com este método.

Bendsøe e Sigmund (2002) utilizam o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a implementação da malha que divide o domínio contínuo em um número finito de elementos, e propõem a metodologia *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) para remover elementos cuja contribuição para a rigidez da estrutura é baixa aplicando uma penalização na densidade do

elemento em questão, tornando-o proporcionalmente vazio (pelo uso de penalizações) para as próximas iterações. Os autores também expandem o método para consideração de múltiplos carregamentos considerando como função objetivo a média ponderada da flexibilidade para cada caso separado de carregamento. O método é efetivo e muito usado por alcançar estruturas ótimas com um tempo computacional adequado. Porém, deve-se levar em conta que a estrutura final apresenta áreas de densidades intermediárias, o que nem sempre é desejável, e que o resultado final de flexibilidade costuma ser superestimado, porque o método também superestima a energia de deformação dos elementos com densidades intermediárias.

Zhou e Li (2005) consideram múltiplos carregamentos em um modelo de material compósito reforçado por fibras calculando a orientação ótima das fibras em cada caso de carregamento. Depois, na otimização da estrutura em si, restringem a matriz elástica da mesma de modo a melhor se aproximar das matrizes elásticas definidas pela estrutura ótima de cada caso de carregamento individual.

Huang e Xie (2010) apresentam em seu livro o método *Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO). O diferencial do método é que a cada iteração, além de remover elementos sólidos que contribuem pouco para a rigidez da estrutura, ele também preenche elementos vazios cuja sensibilidade calculada indica alta contribuição do elemento. Isso torna o método robusto e computacionalmente eficiente, além de ser simples de implementar. No mesmo livro, os autores também dedicam um subcapítulo à otimização da estrutura sujeita a múltiplos casos de carregamentos, utilizando como função objetivo a média ponderada da flexibilidade para cada carregamento único e a média ponderada da sensibilidade elementar para cada carregamento como a sensibilidade elementar utilizada nas iterações.

Nedushan et al. (2011), propõe a otimização de estruturas sujeitas a cargas transientes (variáveis no tempo) utilizando o conceito de carregamentos estáticos equivalentes, para simplificar a análise. Os autores também elegem como função objetivo a máxima energia de deformação durante o intervalo de carregamento, visto que a mesma varia com o tempo, tornando o uso da flexibilidade como função objetivo bastante mais complicada. Eles também afirmam que minimizar a energia máxima de deformação garante que em todos os outros passos de tempo a estrutura terá uma energia de deformação menor. Os resultados, segundo o autor, mostram que este método é bastante dependente do intervalo de carregamento considerado.

Behrou e Guest (2017) resolvem um problema de otimização topológica com múltiplos carregamentos dinâmicos, utilizando a metodologia de Newmark para calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações elementares em cada passo de tempo e o método SIMP para minimizar o somatório das energias de deformação de cada passo.

Vários autores, entre eles Iwamura e Faria (2013), Li et al (2014), Jaouadi e Lahmer (2015), Nutu (2015) e Lógó et al (2017) apresentam outras metodologias para a otimização topológica de estruturas sujeitas a múltiplos casos de carregamento, todas diferentes e cada uma tão válida quanto a apresentada neste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO

2.1 Otimização Topológica

Segundo James et al (2009), otimização topológica pode ser definida como o processo de determinar o número e configuração ótimos de membros estruturais dentro de um domínio de projeto físico para atingir um objetivo de projeto específico. O processo de otimização varia de acordo com a metodologia aplicada, mas é comum que para estruturas contínuas cada membro estrutural definido do material seja avaliado de acordo com as restrições e objetivos e que, a partir desta avaliação, se verifique a configuração e existência (ou não existência) de tal membro.

2.2 Método dos elementos finitos

Como uma solução numérica para a avaliação estrutural de sólidos contínuos em todo o seu volume, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é utilizado. No MEF, segundo Kwon (1997), o domínio contínuo é dividido em diversos subdomínios, os quais são chamados elementos finitos. O domínio inicial é, portanto, dividido em uma malha de elementos finitos de modo que se possa numericamente solucionar o problema em cada elemento e conseqüentemente em toda a estrutura. Dependendo do problema analisado, diversos são os tipos de elementos que podem ser utilizados. Neste trabalho o elemento finito plano isoparamétrico de estado plano de tensões de 4 nós é empregado devido à boa relação acurácia e custo computacional além do fato dos exemplos aqui trabalhados poderem ser modelados com este elemento. São assumidos 2 graus de liberdade de translação perpendiculares em cada nó do elemento. No MEF são assumidas funções de forma que representam fundamentalmente o campo de deslocamentos de forma a possibilitar a interpolação valores de deslocamentos nos nós do elemento finito para o seu interior e permitir por integração numérica, por exemplo, a avaliação das matrizes de rigidez e massa.

2.3 Método BESO

Conforme Huang e Xie (2010), o método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) se baseia na proposta de avaliar através do MEF as propriedades relevantes da estrutura em cada elemento finito e sua contribuição para a estrutura como um todo. Com base nesta avaliação, uma porcentagem definida de elementos cheios com contribuição mais baixa da estrutura é transformada em elementos vazios, e da mesma forma elementos vazios cuja contribuição para a estrutura é avaliada como alta são transformados em elementos cheios novamente. Este processo se repete até que as condições de convergência sejam alcançadas.

Para este trabalho, as condições de convergência se configuram em uma restrição de volume que deve ser alcançada e na condição de que a mudança no valor da função objetivo entre iterações consecutivas seja menor do que um valor definido.

2.3.1 Função objetivo

A metodologia BESO é muito utilizada para encontrar a estrutura de maior rigidez (menor *Compliance*, C) dado que apenas uma fração de volume do domínio deve ser composta de elementos cheios. A declaração do problema pode ser representada na forma das Equações 1, 2 e 3.

$$\text{Minimizar } C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } V^* - \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i = 0 \quad (2)$$

$$x_i = 1 \text{ ou } x_{min}, \quad (3)$$

sendo C a flexibilidade (*Compliance*) da estrutura, \mathbf{f} o vetor de cargas aplicadas, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos, V^* o volume alvo para estrutura final, N_e o número de elementos da malha do MEF, V_i o volume de um elemento individual, x_i uma variável binária que indica se o elemento se encontra cheio quando for 1 ou vazio quando for x_{min} , um valor muito próximo de 0, utilizado para evitar erros numéricos.

Sabendo que a flexibilidade da estrutura nada mais é que o somatório da energia de deformação de cada elemento, através da Equação 4 é calculada a função objetivo em cada iteração.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} x_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i, \quad (4)$$

sendo \mathbf{u}_i o vetor de deslocamentos nodal do i -ésimo elemento, \mathbf{K}_i a matriz de rigidez elementar e p o fator de penalização, que é um parâmetro utilizado para modificar o valor de x_i exponencialmente, de forma que x_{min} possa ser tão pequeno quanto for conveniente e de forma a facilitar a derivada da função objetivo em relação a x_i e definição do número de sensibilidade.

2.3.2 Número de sensibilidade

No algoritmo do método BESO, a avaliação da contribuição de cada elemento finito para a rigidez da estrutura é feita através da diferença da energia de deformação total da estrutura causada pela remoção do elemento. Essa diferença é chamada de número de sensibilidade e é igual à energia de deformação do próprio elemento. O número de sensibilidade em sua forma básica pode ser obtido através da Equação 5.

$$\alpha_i^e = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{1}{2} x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i, \quad (5)$$

onde α_i^e é a sensibilidade elementar. Com a obtenção dos números de sensibilidade de cada elemento, seleciona-se os elementos sólidos com menor sensibilidade e que estejam abaixo de um limiar estabelecido para serem retirados a cada iteração, assim como os elementos vazios com maior sensibilidade são selecionados para serem preenchidos.

Em sua forma básica, o número de sensibilidade pode trazer problemas na estrutura final como o chamado *checkerboard pattern* (padrão de tabuleiro), que pode ser identificado na estrutura final como um quadriculado formado por elementos cheios e vazios intercalados, de forma impossível de ser construído na prática. Isso é resolvido com a aplicação de um filtro na fórmula que leva em conta a sensibilidade dos elementos próximos do elemento sendo avaliado na hora de decidir a retirada ou não do elemento. Isso é feito definindo a sensibilidade elementar como uma média ponderada das sensibilidades de elementos próximos, sendo os pesos de cada sensibilidade dados pela distância do elemento sendo analisado até cada elemento cujo centro se encontra dentro de um raio pré-definido. Quanto menor a distância, maior o peso na ponderação.

2.4 Consideração dos múltiplos casos de carregamentos

A otimização topológica tende a encontrar a melhor solução possível para um único caso. A topologia da estrutura é modificada de forma a melhor resistir a ação de um conjunto de cargas simultaneamente aplicadas, sendo talvez não tão eficiente, ou até instável, para qualquer outra configuração de cargas a qual a estrutura poderia estar sujeita, o que muitas vezes não é prático ou inteligente do ponto de vista de projeto. Tanto estruturas em que carregamentos pontuais diferentes são aplicados em tempos distintos quanto estruturas com cargas móveis não podem ser resolvidas sem que estes múltiplos casos de carregamento sejam considerados.

Para isso, durante o processo da otimização, a contribuição de cada elemento deve ser considerada para todos os diferentes casos de carregamento. Na prática, pequenas modificações precisam ser feitas na função objetivo e no número de sensibilidade, como mostrado por Huang e Xie (2010). Um peso deve ser atribuído a cada caso de carga e aplicado em ambas as equações para que se obtenha uma média ponderada. As Equações 6 e 7 são a função objetivo e o número de sensibilidade modificados para considerar múltiplos carregamentos:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{M_c} w_k C_k \quad (6)$$

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2} x_i^{p-1} \sum_{k=1}^{M_c} w_k (\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i)_k, \quad (7)$$

onde M_c é o número de casos de carregamento considerados e w_k é o peso atribuído para cada caso de carregamento. A soma dos pesos deve ser igual a 1, e os pesos atribuídos para cada caso devem ser escolhidos de acordo com os objetivos da otimização a ser realizada, levando em conta a importância de um carregamento em relação aos outros. Neste trabalho assumiu-se igual importância para cada caso de carregamento para melhor demonstração da metodologia.

2.5 Consideração de resposta transiente

O método BESO tradicional é capaz de otimizar a topologia de estruturas para cargas estáticas conhecidas. Frente a um carregamento dinâmico em que o valor da força aplicada muda com o tempo, uma solução deve ser aplicada para que a topologia final seja adequada para qualquer carga aplicada em determinado período.

Para isso, pode-se discretizar o período e dividi-lo em um número finito de instantes de tempo. Em cada instante, uma carga estática equivalente, que segundo Park e Kang (2003) é uma carga estática que gera o mesmo campo de deslocamentos gerado pela carga dinâmica em um certo tempo, estará sendo aplicada, e cada uma destas cargas será um caso de carregamento no método BESO para múltiplos carregamentos.

Deve-se levar em consideração também o fato de que essas cargas aplicadas sucessivamente geram uma resposta transiente, diferente do que se obteria aplicando cada carregamento separadamente. Para cada instante de tempo, faz-se necessário encontrar o deslocamento, a velocidade e a aceleração de cada elemento da estrutura e utilizar esta informação no cálculo da flexibilidade elementar.

A resposta da excitação da estrutura por uma força externa pode ser modelada utilizando a equação de movimento, como segue na Equação (8).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) - \mathbf{f}(t) = 0, \quad (8)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C}_v e \mathbf{K} são, respectivamente, as matriz de massa, de amortecimento e de rigidez. Além disso, $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u} são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, nessa ordem, e \mathbf{f} é o vetor de forças externas. A equação do movimento é uma equação diferencial de segunda ordem que deve ser resolvida para cada nó em passos arbitrários do domínio do tempo para a obtenção dos deslocamentos nodais em cada instante de tempo. O modelamento do amortecimento é usualmente feito pela hipótese de Rayleigh (para amortecimento viscoso) a qual indica que $\mathbf{C}_v = \gamma\mathbf{M} + \delta\mathbf{K}$. Os coeficientes γ e δ são obtidos, no caso de duas razões de amortecimento (ξ_1, ξ_2) disponíveis para duas frequências de vibração (ω_1, ω_2), a partir da solução do sistema de equações $\xi_i = 0.5(\gamma\omega_i + \delta/\omega_i)$, $i=1,2$.

2.6 Algoritmo de Newmark

O método de integração numérica implícita de Newmark pode ser usado para obter a solução da equação do movimento no domínio do tempo. Três equações de recorrência são utilizadas para obter o deslocamento, a velocidade e a aceleração em cada passo, e estão representadas nas Equações (9), (10) e (11), respectivamente.

$$\mathbf{u}_n = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{f}_n + \mathbf{M} \left(\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{n-1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{u}_{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} \right) \right\} \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + [(1 - \beta)\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \beta\ddot{\mathbf{u}}_n]\Delta t \quad (10)$$

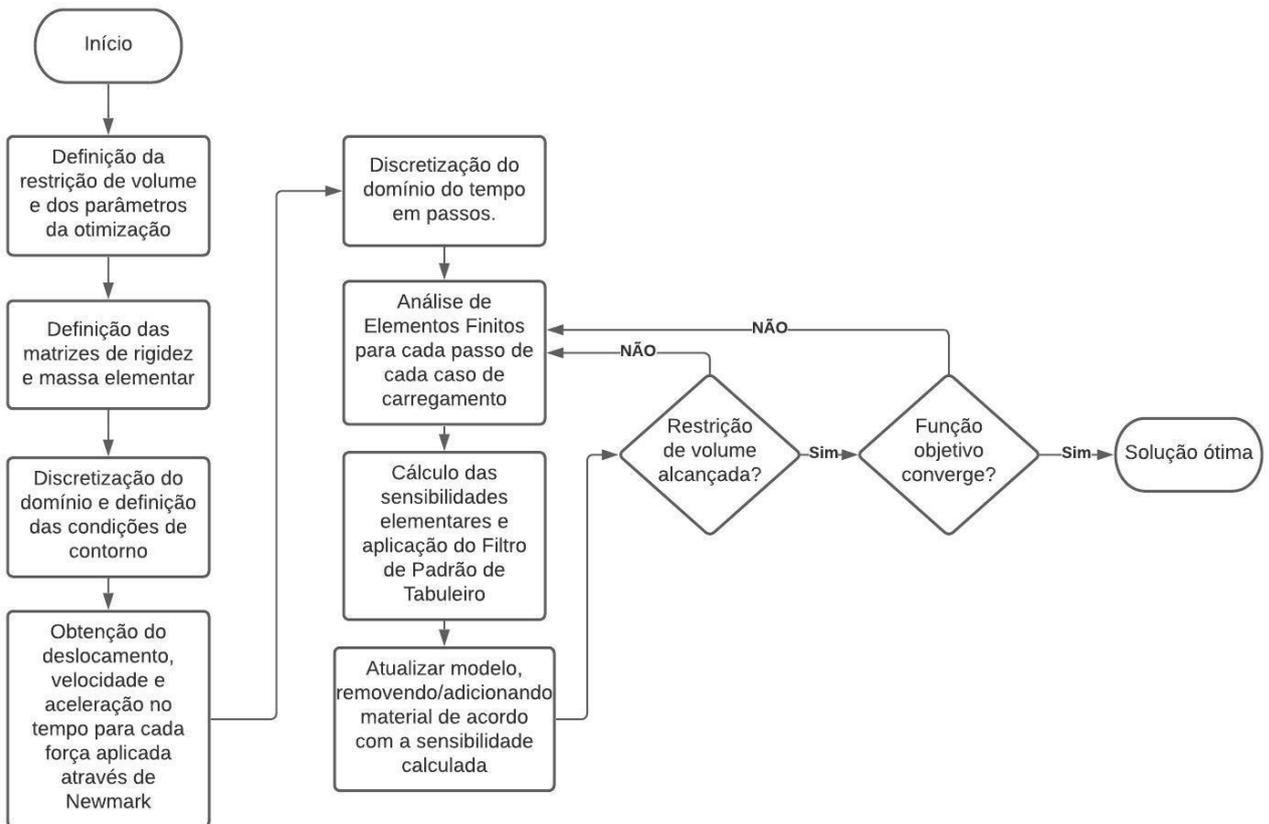
$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \right] (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) - \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)} \right] \dot{\mathbf{u}}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} , \quad (11)$$

onde o subscrito n indica o passo atual no tempo, α e β são parâmetros relacionados à estabilidade do método e Δt o tamanho do passo no tempo. Neste trabalho, $\alpha = 0.25$ e $\beta = 0.5$ para assegurar a estabilidade e o Δt é escolhido específico para o problema, para manter a precisão.

3 METODOLOGIA

O algoritmo implementado segue o fluxograma mostrado na Figura 1. Os parâmetros utilizados na otimização, assim como as condições de contorno, serão escolhidos de acordo com o problema a ser resolvido.

Figura 1: Fluxograma do método BESO adaptado para a inclusão de múltiplos casos de carregamento.



Como uma expansão do uso do método BESO para múltiplos carregamentos, o algoritmo aqui utilizado tenta resolver problemas de otimização de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos. Isso é feito discretizando o intervalo de tempo de aplicação das forças em um número finito de passos,

e considerando a estrutura de cada um desses passos como estando sob uma condição de carregamento estática equivalente separada.

Para obter as forças estáticas equivalentes, é resolvida a equação do movimento (Equação 8) para cada grau de liberdade da estrutura inicial no período de tempo que está sendo considerado. Utilizando o método de integração numérica implícita de Newmark, são obtidos as acelerações, as velocidades e os deslocamentos, para cada instante de tempo, em cada grau de liberdade.

A partir disso, pode-se utilizar o campo de deslocamentos obtido para obter a força estática equivalente em cada grau de liberdade, para cada instante de tempo, utilizando a Equação 12 a seguir.

$$F_e^{i,n} = K u^{i,n}, \quad (12)$$

onde os superescritos i e n representam o i -ésimo grau de liberdade no n -ésimo instante de tempo, respectivamente e F_e é a força estática equivalente para este grau de liberdade e instante de tempo em questão.

A partir daí, utiliza-se cada passo de tempo, previamente discretizado e sujeito a um carregamento cuja resposta é descrita pelas forças equivalentes calculadas, como um caso de carregamento separado e aplica-se a metodologia BESO para múltiplos casos de carregamentos. Isto é, utiliza-se como função objetivo da otimização a média ponderada da *Compliance* de cada caso de carregamento, calcula-se a sensibilidade elementar a partir da média ponderada das sensibilidades para cada caso e faz-se a decisão de retirar ou adicionar elementos baseado na sensibilidade calculada.

Este trabalho utiliza um número discreto de passos de tempo que dividam o intervalo em espaços iguais, e usa fatores de peso iguais para cada caso de carregamento.

3.1 Problemas propostos

Com base na metodologia descrita, utilizou-se o algoritmo descrito na resolução de três problemas propostos pela literatura, sendo o primeiro um problema estático de otimização de múltiplos carregamentos apresentado em Huang e Xie (2010), o segundo também estático de múltiplos carregamentos proposto por Behrou e Guest (2017) e por último uma situação de múltiplos carregamentos dinâmicos, também proposto por Behrou e Guest (2017). Estes exemplos serão referidos, respectivamente, como Problema 1, Problema 2 e Problema 3.

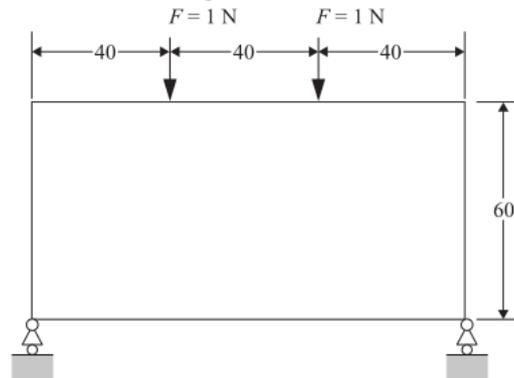
O Problema 1 tem por objetivo verificar a implementação do algoritmo proposto comparando o resultado obtido com o resultado de outra metodologia baseada no método BESO. O Problema 2 se propõe a comparar os resultados obtidos com a aplicação de uma metodologia também distinta, que segue uma base diferente para a otimização. Por fim, o Problema 3 procura aplicar o método aqui proposto para uma situação dinâmica e comparar o resultado com o de outro método encontrado na literatura.

Na medida do possível, a resolução dos problemas propostos através da metodologia desenvolvida neste trabalho utilizou os mesmos parâmetros utilizados na literatura, garantindo uma melhor comparação de resultados.

3.1.1 Problema 1 - estático

O Problema 1 foi proposto por Huang e Xie (2010) na seção 6.8.2.1 do livro. Se trata de um domínio retangular dividido em 120×60 elementos isoparamétricos planos de quatro nós, a partir do qual se deve otimizar uma viga bi-apoiada sujeita a dois carregamentos não simultâneos, conforme a Figura 2, a seguir.

Figura 2: Domínio, condições de contorno e carregamentos do Problema 1. (Adaptado de Huang e Xie, 2010).



A otimização considera dois casos distintos de carregamento, cada um com uma única força aplicada. O fator peso atribuído para cada caso de carregamento é o mesmo, de 0,5. Os parâmetros utilizados na otimização se encontram na Tabela 1. A função objetivo (*Compliance*) é obtida em Nm.

Tabela 1: Parâmetros utilizados na otimização do Problema 1.

Descrição	Parâmetro	Valores	Unidades
Módulo de Young	E	1	[Pa]
Coefficiente de Poisson	ν	0,3	[-]
Fração volumétrica alvo	V_{max}	0,3	[-]
Taxa de evolução volumétrica	ER	0,02	[-]
Raio mínimo permitido	r_{min}	3	Elementos finitos
Comprimento	L	1,2	[m]
Penalização	p	3	[-]
Densidade do material	ρ	1	[kg/m ³]
Densidade mínima admissível	ρ_{min}	0,001	[kg/m ³]
Espessura do elemento finito	e	0,01	[m]
Força máxima aplicada	f_{max}	1	[N]
Tempo de análise	T	-	[s]
Número de pontos no tempo	N	-	[-]

3.1.2 Problema 2 - Estático

O Problema 2 foi retirado da seção 4.1 de Behrou e Guest (2017). A proposta é a otimização de uma viga engastada a partir de um domínio retangular bi-dimensional de 270×90 elementos isoparamétricos planos de 4 nós, sujeito a dois casos diferentes de carregamentos, conforme a Figura 3. Os parâmetros escolhidos para a otimização se encontram na Tabela 2.

Figura 3: Domínio, condições de contorno e carregamentos dos Problemas 2 e 3. (Adaptado de Behrou e Guest, 2017).

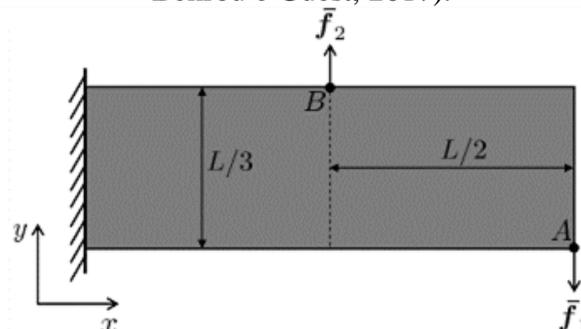


Tabela 2: Parâmetros utilizados na otimização do Problema 2.

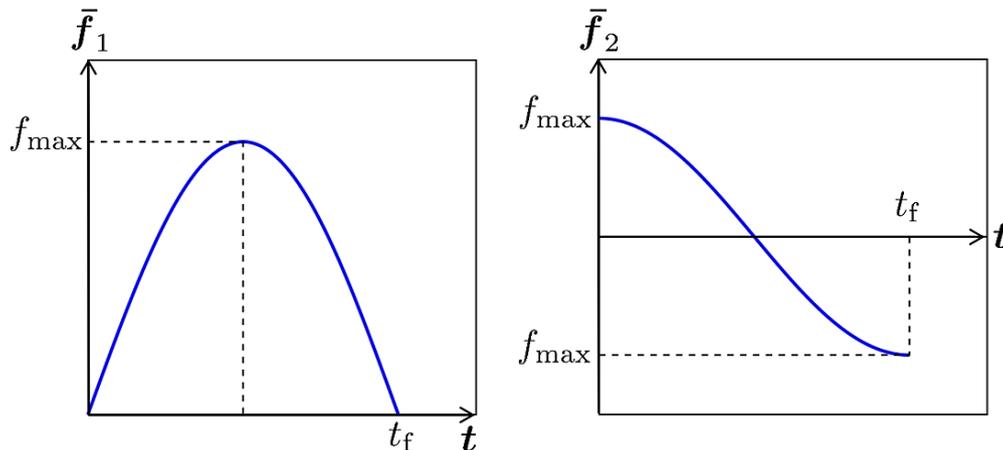
Descrição	Parâmetro	Valores	Unidades
Módulo de Young	E	200	[GPa]
Coefficiente de Poisson	ν	0,33	[-]
Fração volumétrica alvo	V_{max}	0,35	[-]
Taxa de evolução volumétrica	ER	0,02	[-]
Raio mínimo permitido	r_{min}	4	Elementos finitos
Comprimento	L	0,9	[m]
Penalização	p	3	[-]
Densidade do material	ρ	7700	[kg/m ³]
Densidade mínima admissível	ρ_{min}	0,0001	[kg/m ³]
Espessura do elemento finito	e	0,01	[m]
Força máxima aplicada	f_{max}	10000	[N]
Tempo de análise	T	-	[s]
Número de pontos no tempo	N	-	[-]

Neste caso, \bar{f}_1 e \bar{f}_2 são ambos iguais a f_{max} e são aplicados, respectivamente, no ponto A e no ponto B, como indicado na Figura 3.

3.1.3 Problema 3 - Dinâmico

O Problema 3 também foi proposto por Behrou e Guest (2017), na seção 4.2. Para que o resultado possa ser comparado com o da referência, não há amortecimento neste exemplo. Os mesmos domínio e condições de contorno do Problema 2 são utilizados, como mostrados na Figura 3. As duas forças \bar{f}_1 e \bar{f}_2 , porém, assumem valores dependentes do tempo, como mostrado na Figura 4 abaixo.

Figura 4: Perfil das forças dependentes do tempo aplicadas (Adaptado de Behrou e Guest, 2017).



Os valores assumidos pelas forças seguem as Equações 12 e 13, a seguir.

$$\bar{f}_1 = f_{max} \sin(t) \quad (12)$$

$$\bar{f}_2 = f_{max} \cos(t), \quad (13)$$

Sendo que cada força é aplicada separadamente da outra, configurando dois casos diferentes de carregamento. Os parâmetros utilizados na otimização se encontram na Tabela 3.

Tabela 3: Parâmetros utilizados na otimização do Problema 2.

Descrição	Parâmetro	Valores	Unidades
Módulo de Young	E	200	[GPa]
Coefficiente de Poisson	ν	0,33	[-]
Fração volumétrica alvo	V_{max}	0,35	[-]
Taxa de evolução volumétrica	ER	0,02	[-]
Raio mínimo permitido	r_{min}	4	Elementos finitos
Comprimento	L	0,9	[m]
Penalização	p	3	[-]
Densidade do material	ρ	7700	[kg/m ³]
Densidade mínima admissível	ρ_{min}	0,0001	[kg/m ³]
Espessura do elemento finito	e	0,01	[m]
Força máxima aplicada	f_{max}	10000	[N]
Tempo de análise	T	π	[s]
Número de pontos no tempo	N	20	[-]

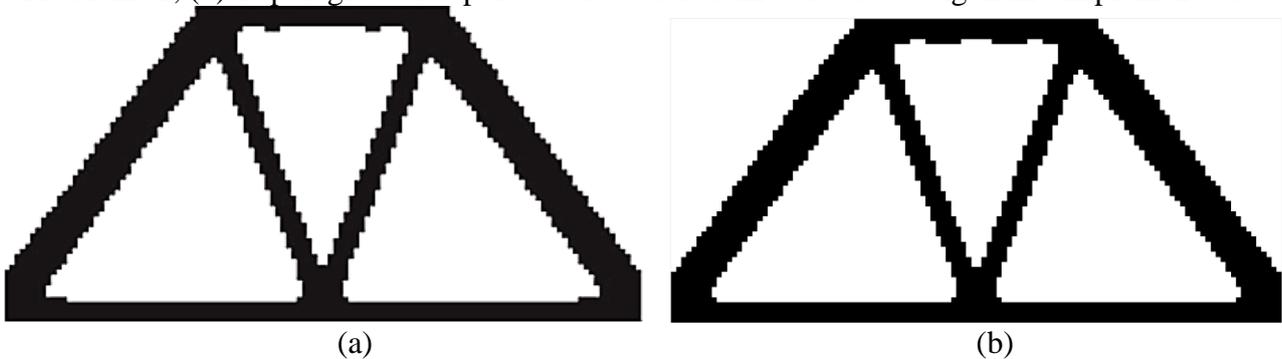
4 RESULTADOS

Nesta seção, o resultado obtido por cada problema apresentado na seção de Metodologia será comparado com os resultados apresentados na literatura. Isso inclui a topologia, a função objetivo e a convergência.

4.1 Problema 1

Nas Figuras 4(a) e 5(a), encontram-se respectivamente a topologia final e gráfico de convergência obtidos por Huang e Xie (2010). Na Figura 5(a) os círculos em preto são a fração volumétrica ao longo das iterações, enquanto os quadrados brancos são a evolução da função objetivo. Nas Figuras 4(b) e 5(b) estão a topologia final e gráfico de convergência obtidos neste trabalho, através do algoritmo implementado. Na Figura 5(b) os círculos vermelhos representam a fração volumétrica, e os quadrados em azul, a função objetivo.

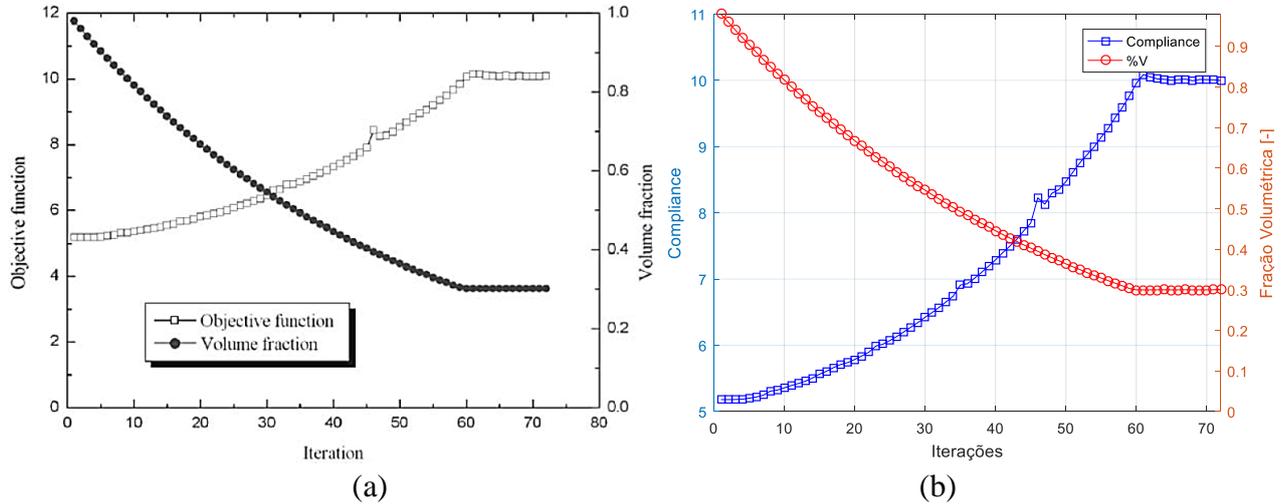
Figura 4: (a) Topologia retirada de Huang e Xie (2010) como resultado da otimização do Problema 1; (b) Topologia obtida pelo autor deste trabalho através do algoritmo implementado.



Comparando ambos os resultados, a semelhança é clara. Pequenas divergências podem ser encontradas na topologia, mas não aparentam ser significativas, enquanto a função objetivo final e o número de iterações para chegar lá são virtualmente os mesmos, indicando que o algoritmo

implementado é tão eficaz quanto o proposto por Huang e Xie (2010) para a otimização de vigas submetidas a múltiplos casos de carregamentos estáticos.

Figura 5: (a) Função objetivo (média ponderada da *Compliance* [Nm] para cada caso de carregamento) e Fração volumétrica x Iteração retirados de Huang e Xie (2010) para a otimização do Problema 1.; (b) Função objetivo (média ponderada da *Compliance* [Nm] para cada caso de carregamento) e Fração volumétrica x Iteração obtidos neste trabalho.



4.2 Problema 2

Na Figura 6(a) está a topologia encontrada por Behrou e Guest (2017) para o Problema 2. Os autores não divulgam em seu artigo o histórico de convergência ou valores finais da função objetivo. Na Figura 6(a) a cor azul representa os vazios. Nas Figuras 6(b) e 7 estão representados, respectivamente, a topologia encontrada pelo programa aqui implementado e o seu histórico de convergência para o mesmo problema. Na Figura 7 os círculos em vermelho representam a fração volumétrica e os quadrados em azul, a função objetivo.

Figura 6: (a) Topologia retirada de Behrou e Guest (2017) como resultado da otimização do Problema 2; (b) Topologia encontrada neste trabalho.

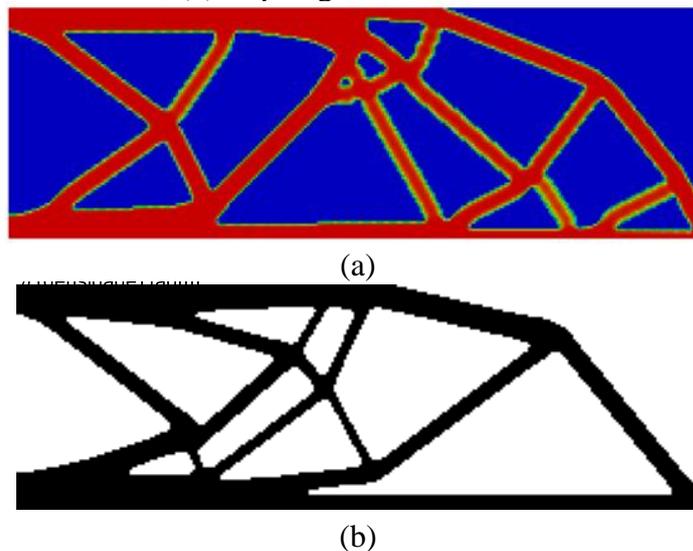
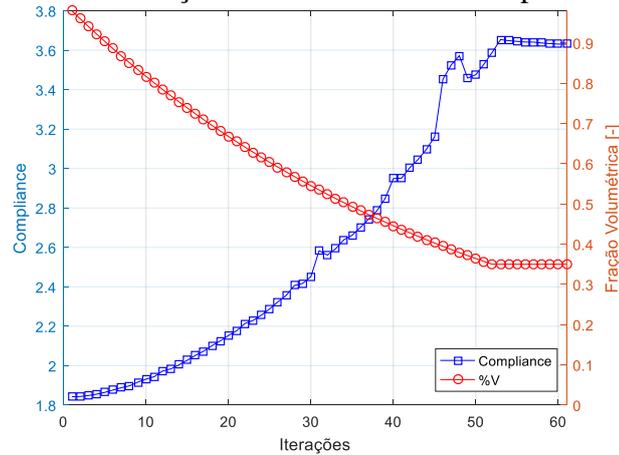


Figura 7: Função objetivo (média ponderada da *Compliance* [Nm] para cada caso de carregamento) e Fração volumétrica x Iteração obtidos neste trabalho para o Problema 2.

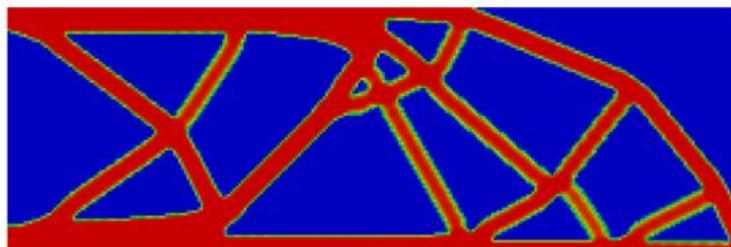


Analisando as Figuras 6(a) e 6(b), as duas topologias apresentam diferenças bastante claras, e pode-se supor que sejam trazidas por diferenças entre as metodologias utilizadas bem como na função objetivo escolhida para ser minimizada. Enquanto neste trabalho foi utilizada a metodologia BESO para minimizar uma função objetivo composta pela média ponderada da *Compliance* dos dois casos de carregamentos, Behrou e Guest (2017) utilizam a metodologia SIMP para minimizar a soma da energia de deformação correspondente às respostas de estruturas submetidas a cada um dos dois casos de carregamento. Enquanto existem diferenças entre as duas funções objetivos, ambas são equivalentes a maximizar a rigidez da estrutura para resistir aos carregamentos propostos e, portanto, comparáveis.

4.3 Problema 3

A topologia encontrada por Behrou (2017) para o Problema 3 se encontra na Figura 8(a), e seu gráfico de energia de deformação x tempo na Figura 9(a). Nas Figuras 8(b) e 9(b), os mesmos resultados encontrados com a utilização do método proposto pelo autor.

Figura 8: (a) Topologia retirada de Behrou (2017) como resultado da otimização do Problema 3; (b) Topologia obtida pelo autor através do algoritmo aqui implementado.

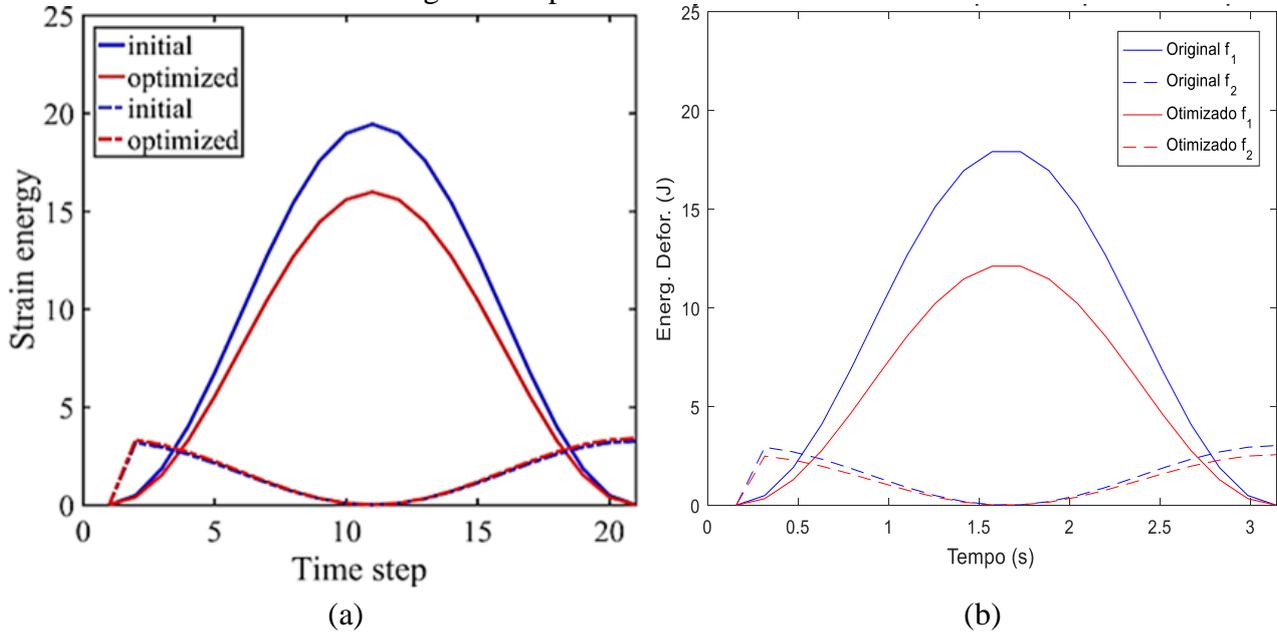


(a)



(b)

Figura 9: (a) Energia de Deformação [J] x Passo de tempo, retirado de Behrou e Guest (2017) para a otimização do Problema 3; (b) Energia de Deformação [J] x Tempo [s], obtido através do algoritmo apresentado neste trabalho.



Nas Figura 9(a) e (b) está representada em azul a energia de deformação da estrutura inicial, e em vermelho, a energia de deformação após a otimização. As linhas cheias estão ligadas ao carregamento aplicado \bar{f}_1 , enquanto as linhas tracejadas estão relacionadas ao carregamento \bar{f}_2 .

Na resolução deste problema, foram considerados ao todo 40 casos de carregamentos, advindos de duas forças dinâmicas aplicadas e discretizadas em 20 instantes de tempo cada.

A topologia encontrada pelo algoritmo implementado difere claramente da apresentada por Behrou e Guest (2017). A metodologia utilizada leva a topologias ótimas diferentes. Comparando a energia de deformação da estrutura ao longo do tempo em ambos os métodos, a metodologia proposta por este trabalho parece ser capaz de uma maior redução. Assume-se que as diferenças de resultado ocorrem pelos seguintes motivos:

- Por Behrou e Guest (2017) superestimarem os valores de energia de deformação final, por causa da presença de elementos de densidades intermediárias, inerente da metodologia SIMP;
- Porque o algoritmo implementado otimiza a estrutura levando em consideração cada instante de tempo como um carregamento separado, em oposição à escolha de Behrou e Guest (2017) de minimizar o somatório das energias de deformação durante toda a resposta transiente;
- Por este trabalho utilizar como função objetivo a média do *Compliance* para cada caso de carregamento, enquanto Behrou e Guest (2017) utilizam a energia de deformação da estrutura em si.

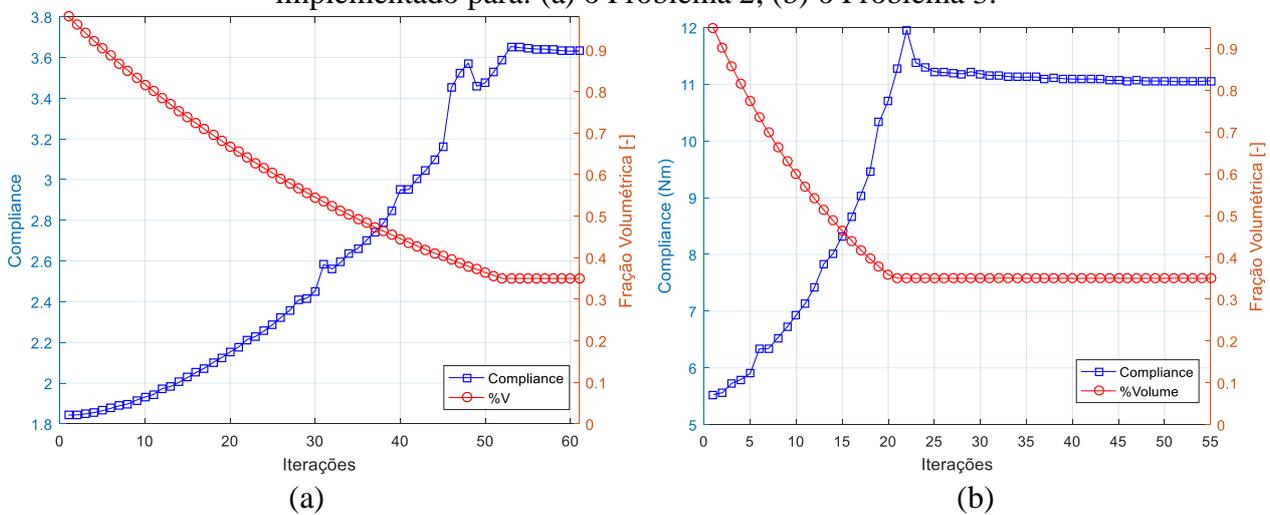
4.4 Comparação entre resultados de problemas estáticos e dinâmicos

Tendo o Problema 2 e o Problema 3 os mesmos parâmetros de otimização e condições de contorno com a exceção das forças aplicadas, é conveniente a comparação dos resultados obtidos para os dois problemas. Nas Figuras 10(a) e 10(b) estão dispostos, para melhor visualização, novamente a topologia aqui obtida na otimização do Problema 2 e do Problema 3, respectivamente. Nas Figuras 11(a) e 11(b), o histórico de convergência para os mesmos problemas, na mesma ordem. Na Figura 11, círculos em vermelho representam a fração volumétrica e quadrados em azul, a função objetivo.

Figura 10: Topologia encontrada neste trabalho como resultado para: (a) o Problema 2; (b) o Problema 3.



Figura 11: Função objetivo (média ponderada da *Compliance* [Nm] para cada caso de carregamento) e Fração volumétrica x Iteração obtidos pelo autor através do algoritmo implementado para: (a) o Problema 2; (b) o Problema 3.



Para esta comparação, é interessante ressaltar que em ambos os casos todas as forças são aplicadas nos mesmos pontos, sendo que no Problema 2 há um caso de carregamento para cada força, e no Problema 3 há 20 casos de carregamento para cada força conforme as mesmas mudam de intensidade e sentido. Também deve-se lembrar que o *Compliance* obtido em cada problema é a média ponderada do *Compliance* calculado para cada caso de carregamento. Isso significa que alguns casos de carregamento podem gerar uma energia de deformação maior quando aplicados à estrutura do que outros. Isso fica bastante claro na Figura 9(b), que mostra como a energia de deformação da estrutura varia com o tempo. Na mesma Figura também é possível observar que a energia de deformação gerada pela aplicação da força \bar{f}_1 na intensidade máxima é muito maior que a energia de deformação gerada pela aplicação da força \bar{f}_2 em sua intensidade máxima.

As diferenças entre as Figuras 10(a) e 10(b) são sutis, mas visíveis. Isso sugere que, mesmo para forças aplicadas nos mesmos pontos, otimizar a topologia de uma estrutura para a maior carga aplicada traz um resultado diferente de otimizar a mesma estrutura sujeita a forças cujas intensidades mudam com o tempo.

Quanto às Figuras 11(a) e 11(b), o histórico de convergência mostra que o número de iterações para ambos os casos é bastante semelhante. Porém, o tempo computacional mais que dobra para o Problema 3, em relação ao Problema 2. Isso acontece pela necessidade de calcular as acelerações, velocidades e deslocamentos utilizando Newmark, antes das iterações, e também pelo maior número de casos de carregamentos considerados no Problema 3. Alguns testes indicaram que, utilizando o dobro de casos de carregamento para o Problema 3, o programa leva aproximadamente o dobro do tempo para chegar à mesma solução.

Por fim, a diferença encontrada nos resultados finais das funções objetivo indica que uma estrutura otimizada para um único caso de carregamento estará melhor preparada para ele do que uma estrutura otimizada para vários casos. De forma geral, quanto menos casos forem considerados, melhor o resultado para exatamente estes casos. Por outro lado, qualquer outra situação de carregamento que possa ser aplicada à estrutura durante sua vida útil corre o risco de a levar ao colapso com facilidade, pois a estrutura não estará preparada para isto. Deste modo, otimizar para mais casos de carregamento oferece uma segurança maior para um projeto real.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo a expansão da metodologia BESO de otimização topológica para ser capaz de otimizar estruturas sujeitas a carregamentos de natureza transiente a partir da consideração de múltiplos carregamentos no tempo. Com a implementação de um código no software MATLAB baseado no código disponibilizado por Huang e Xie (2010), foi criado um algoritmo capaz de otimizar vigas bidimensionais sujeitas a carregamentos dinâmicos. Utilizando exemplos da literatura como comparação, a metodologia aqui apresentada mostrou-se capaz de realizar a otimização de forma a alcançar resultados eficazes com um código relativamente simples.

Os resultados obtidos mostram que, comparando a energia de deformação ao longo do tempo resultante da otimização realizada neste trabalho com a otimização feita por Behrou e Guest (2017), o algoritmo aqui proposto obteve uma menor energia de deformação durante a maior parte do período, o que equivale a dizer que a estrutura otimizada é capaz de resistir melhor aos carregamentos transientes aplicados. Isso indica uma boa eficiência da nova metodologia.

A comparação entre os resultados dos Problemas 2 e 3 reforçam que a otimização feita para a maior solicitação de uma estrutura não é equivalente à otimização feita para resistir várias solicitações que podem vir a ser aplicadas em uma estrutura ao longo de sua vida útil.

Para melhor comprovar a eficácia da metodologia apresentada e para expandi-la a mais usos, alguns novos estudos seriam interessantes: a aplicação desta metodologia em uma estrutura tridimensional; a modificação da mesma para utilizar restrições de tensão ao invés de restrições de volume; a simulação do comportamento da viga otimizada em softwares especializados; o uso da metodologia para a otimização de peças reais; a escolha de fatores peso para cada caso de carregamento baseados na energia de deformação gerada pelo mesmo; a escolha dos momentos com picos de energia de deformação como caso de carregamento, em oposição a utilizar passos de tempo com intervalos iguais. Estes temas para trabalhos futuros podem enriquecer os resultados aqui encontrados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NATKE, H.G., SOONG, T.T. “**Topological structural optimization under dynamic loads**”, Transactions on the Built Environment. V.2, p.67-78, 1993.

KWON, Y. W.; BANG, H. “**The Finite Element Method Using MATLAB**”. Boca Raton, Fl: CRC Press. 544 p., 1997.

ZHOU, K., Li, X. “**Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model**”. Comput. Mech. V.38, p.163-170. doi: 10.1007/s00466-005-0735-9.

BENDSØE, M. P., SIGMUND, O. “**Topology Optimization**”. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg GmbH, 2nd. Edition, 370p. 2002.

JAMES, K.A., HANSEN, J.S. AND MARTINS, J. R. R. A. “**Structural topology optimization for multiple load cases using a dynamic aggregation technique**”, Engineering Optimization, V.41, No.12, p.1103-1118, 2009. doi: 10.1080/03052150902926827.

HUANG, X., XIE, Y.M. “**Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and Applications**”. Wiley, 223 p., 2010.

ALAVI, S.A., AHMADI-NEDUSHAM, B., BOUNDARABADI, H.R. “**Topology optimization of structures under transient loads**”. International Journal of Optimization in Civil Engineering, V.1, p.155-166, 2011.

IWAMURA, R. S., FARIA, A. R. “**Topology optimization of multiple load case structures**”. In: Proc. of MECSOL 2013. Porto Alegre, RS. 2013.

LI, H., GAO, L., LI, P. “**Topology optimization of structures under multiple loading cases with a new compliance–volume product**”. Engineering Optimization, V.46, No.6, p.725-744, 2014. doi: 10.1080/0305215X.2013.800054

JAOUADI, Z., LAHMER, T. “**Topology optimization of structures subjected to multiple load cases by introducing the Epsilon constraint method**”. Internal Report. T. Lahmer, K. Gürlebeck Editors. Institut für Strukturmechanik, 2015.

NUTU, E., “**Multiple load case topology optimization based on bone mechanical adaptation theory**”. U.P.B. Sci. Bull., Series D, V.77, No. 4, 2015.

BEHROU, R., GUEST, J. K. “**Topology optimization for transient response of structures subjected to dynamic loads**”. 18th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference AIAA 2017-3657. 2017. doi: 10.2514/6.2017-3657.

LÓGÓ, J., BALOGH, B., PPINTÉR, E. “**Topology optimization considering multiple loading**”. Computers & Structures. V.207, p.233-244, 2018. doi: 10.1016/j.compstruc.2017.03.018.

Park, G., Kang, B. “**Validation of a Structural Optimization Algorithm Transforming Dynamic Loads into Equivalent Static Loads**”. Journal of Optimization Theory and Applications 118, 191–200 (2003).