

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Manassés da Silva Batista

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E MODELAGEM
MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre, 2020

Manassés da Silva Batista

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E MODELAGEM
MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana.

Porto Alegre, 2020

Manassés da Silva Batista

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E MODELAGEM
MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana.

Profa. Dra. Andréia Dalcin – PPGEMAT/UFRGS

Profa. Dra. Fernanda Wanderer – PPGEDU/UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia – PPGEMAT/UFRGS

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ser minha força e meu escudo em todos os momentos da minha vida. E por Ele permitir que eu concluísse mais esta etapa.

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo fundamental nessa minha trajetória acadêmica tão singular, mesmos nos momentos que estive ausente.

À minha família e amigos, pelo incentivo e carinho recebido durante o desenvolvimento desta pesquisa. Por compreenderem minha ausência física em períodos importantes.

Ao meu orientador, Prof. D.r. Alvino Alves Sant`Ana, pela dedicação valiosa no auxílio pela busca dos melhores caminhos durante a construção desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia, Profa. Dra. Andréia Dalcin e a Profa. Dra. Elisa Daminelli pelas ricas contribuições e sugestões para o aperfeiçoamento da pesquisa.

Aos professores da graduação, especialização e do mestrado que passaram pela minha vida por compartilhar seus conhecimentos e experiências.

Seu desígnio não é decidido por você, é descoberto por você.

Seu desígnio é geográfico.

Você apenas terá sucesso quando seu desígnio torna-se uma “obsessão”.

O que você mais ama é uma dica sobre seu desígnio.

Tudo o que é importante custa, sempre.

Quando chegar ao seu futuro, você irá chamá-lo de hoje.

Extraído do livro “O Designio”, Mike Murdock, 2010.

RESUMO

Com essa pesquisa, buscamos identificar e compreender evidências de ensino e aprendizagem de Matemática ao trabalharmos em um Ambiente de Aprendizagem de Modelagem Matemática voltado para os Princípios Fundamentais de Contagem. Realizamos uma prática com o uso de Projetos, aplicados a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, localizada na cidade de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. A metodologia utilizada nessa pesquisa está ancorada em Bogdan & Biklen (1994) e Lüdke e André (1986), o que permite descrever, interpretar, explicar e compreender os fatos estudados. Referente à Modelagem Matemática, nos amparamos em Barbosa (2001) para estabelecer o Ambiente de trabalho e a atuação do professor pesquisador de modo cooperativo, e em Burak (2004 e 2010) para estabelecer as etapas das atividades propostas. Os dados foram coletados por meio de gravações de diálogos, escrita dos alunos e anotações em um diário de campo, nos quais acompanhamos dois grupos de alunos, que trabalharam com os temas “passagens aéreas” e “cardápios numa pizzaria”, em busca de uma resposta para a pergunta norteadora: “Quais são os desafios e potencialidades na inserção de projetos com Modelagem Matemática e Análise Combinatória no Ensino Fundamental?”. A partir da análise, observamos que os alunos possuem ideias sobre Análise Combinatória que permitem trabalhar com problemas que vão além do currículo formal, possibilitando construir um cenário para investigação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos alunos. Por se tratar de uma Dissertação vinculada a um Mestrado Profissional, elaboramos um Produto Educacional associado à nossa pesquisa, constituído de uma coletânea de questões de Análise Combinatória extraídas de livros didáticos e de olimpíadas de matemática. Após a seleção, classificamos as questões de acordo com o Referencial Teórico utilizado na pesquisa. Em seguida, associado à coletânea, sugerimos: alguns Objetos de Aprendizagens no Geogebra; e algumas histórias em quadrinhos no software Pixton®. Por fim, apresentamos as resoluções das questões.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Análise Combinatória. Ensino e Aprendizagem. Desafios.

ABSTRACT

Our goal is to identify and understand evidences of Mathematical teaching and learning when working in a Mathematical Modeling Learning Environment focused on the Fundamental Principles of Counting. We carried out a practice with projects, applied to students of the 9th grade of a public school located in the city of Porto Alegre, RS. The methodology applied in this research is based on Bogdan & Biklen (1994) and Lüdke & André (1986), which allows to describe, interpret, explain and understand the facts studied. Regarding Mathematical Modeling, we rely on Barbosa (2001) to establish the working environment and the role of the researcher professor in a cooperative way, and on Burak (2004 and 2010) to establish the stages of the proposed activities. The data were collected through recordings of dialogues, students' writing and notes in a field diary, in which we followed two groups of students, who worked with the themes "airline tickets" and "menus in a pizzeria", in search of an answer to the guiding question: "What are the challenges and potential in the insertion of projects with Mathematical Modeling and Combinatorial Analysis in Elementary School?". From the analysis, we observed that students have some ideas about Combinatorial Analysis that allow them to work with problems that go beyond the formal curriculum, making it possible to build a research scenario from mathematics contextualized in the students' reality. As this is a Dissertation linked to a Professional Master's Degree, we have prepared an Educational Product associated with our research, consisting of a collection of Combinatorial Analysis questions extracted from didactic books and Mathematics Olympics. After selection, we classified the questions according to the theoretical framework used in the research. Then, associated with the collection, we suggest: some Learning Objects in Geogebra; and some comics in the Pixton© software. Finally, we present the resolutions for the issues.

Keywords: Mathematical Modeling. Combinatory Analysis. Teaching and learning. Challenges.

Lista de figuras

Figura 1- Lançamentos de moedas	25
Figura 2 – Terreno da corrida de cavalos	29
Figura 3- O aluno e o professor nos casos de Modelagem Matemática	31
Figura 4- Palavras chaves das etapas de Modelagem Matemática de (Burak,2014).....	34
Figura 5- Comunicações das etapas da pesquisa	40
Figura 6- Registro da distância e preços das passagens- São Paulo a Minas Gerais.....	49
Figura 7- Indo de Azul e Voltando de Azul	53
Figura 8- Indo de Gol e voltando de Gol.....	54
Figura 9- Indo de Azul e voltando de Gol	55
Figura 10- Indo de Gol e voltando de Azul.....	55
Figura 11- Cardápio da pizzeria	63
Figura 12- Árvore de possibilidade	66

Listas de quadros

Quadro 1- PFC no Ensino Fundamental.....	19
Quadro 2- Tipos de problemas	21
Quadro 3- Operações Combinatórias	23

Lista de gráfico

Gráfico 1- Frequência dos Ambientes de Aprendizagem na Análise Combinatória.....	13
----------------------------------------------------------------------------------	----

Sumário

1 INTRODUÇÃO	10
2 REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1 Análise Combinatória Nos Documentos Oficiais	16
2.2 Classificações De Problemas De Análise Combinatória	21
2.3 Árvore De Possibilidades	24
2.4 Ambientes De Aprendizagem	27
2.5 Modelagem Matemática	29
2.6 Perspectiva De Burak.....	33
2.7 Revisões De Literatura.....	35
3 METODOLOGIA	38
3.1 Caracterização da Escola e dos Alunos	40
3.2 Atividades Propostas.....	42
4 ATIVIDADES PRÁTICAS	43
4.1 Descrição da Prática.....	46
4.3 REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	47
4.3.1 Dupla 1 - Passagens aéreas	48
4.3.2 Dupla 1 – Diálogos e Análise da prática	50
4.3.3 Dupla 2 – Cardápio numa pizzeria.....	61
4.3.4 Dupla 2 – Diálogos e Análise da prática	64
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
6 REFERÊNCIAS	77
ANEXO A: AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA	83
ANEXO B: TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO	84
ANEXO C: TERMO DE ASSENTIMENTO	85

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda a Modelagem Matemática como alternativa para o ensino por meio de um conceito que permite ao professor desenvolver a busca pela interação da matemática contextualizada com a realidade dos alunos, para a construção de seus conhecimentos.

Minha formação profissional e acadêmica, foi iniciada em 2013 no Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí - Campus Teresina Central, com minha habilitação em 2017, totalizando quatro anos de trabalhos acadêmicos. Considero que, desde os primeiros contatos como bolsista do PIBID - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, de 2014 a 2017, ou como professor da SEMEC - Secretária Municipal de Educação, de 2015 a 2016, e também como Professor Substituto da SEDUC /PI - Secretaria da Educação do Estado do Piauí, de 2016 a 2017, houve um crescimento na experiência como professor pesquisador. Nesses períodos, trabalhei com alunos de diferentes faixas etárias em diferentes contextos sociais. Ao vivenciar algumas dificuldades enfrentadas por eles para executar ou compreender simples operações envolvendo o raciocínio combinatório, percebi que teria muitos desafios nessa profissão. Observei, nessas experiências vividas, que o principal recurso para enfrentar os desafios junto com o professor em sala de aula era o livro didático, que em geral, nos conteúdos de Análise Combinatória, direciona fortemente o uso direto de fórmulas.

Assim, após participações em eventos voltados para a formação de professores, senti a necessidade de aprimorar-me e direcionar o olhar às efetivas necessidades dos alunos, em especial para as dificuldades de aprendizagens. Diante disso, comecei a investigação das possíveis causas, e com alguns colegas do curso de licenciatura e com professores compromissados, começamos as atividades práticas em sala de aula, voltadas ao dia a dia dos alunos, alinhados com os conteúdos estudados.

A escolha da temática para essa pesquisa é decorrente do trabalho realizado na disciplina de História da Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação Ensino de Matemática da UFRGS, baseados na análise de livros didáticos de matemática do Ensino Médio, sob a luz dos Ambientes de Aprendizagem Skovsmose (2000). Percebi que nos livros didáticos analisados, em relação aos conteúdos de Análise Combinatória, em geral, as questões estão voltadas ao paradigma do exercício com referência à

matemática pura e semi realidade Skovsmose (2000). Além disso, observei que algumas questões presentes nas Olimpíadas de Matemática proporcionam um ambiente com um cenário para investigação, abrangendo conteúdos de Análise Combinatória, como os princípios aditivo e multiplicativo, combinação, permutação e arranjo. Observando os conteúdos programáticos do Ensino Fundamental voltados para matemática, percebi um distanciamento da forma como os conteúdos ligados à Análise Combinatória são trabalhados, por parte dos professores e por parte dos livros didáticos, em especial questões envolvendo os Princípios Fundamentais de Contagem (PFC). Além disso, as dificuldades encontradas nas buscas por pesquisas envolvendo os dois temas simultaneamente, Análise Combinatória e Modelagem Matemática, foram motivadoras para trabalhar com esses temas.

Segundo Fonseca (2003, p.49), o livro didático é utilizado em todo o Brasil e nas últimas décadas tem ocupado o papel principal nas aulas do professor na Educação Básica, por mais que existam investimentos em materiais didáticos alternativos para a sua prática em sala de aula. A utilização dos livros didáticos na Educação Básica, principalmente na área de matemática, tem objetivos claros: o primeiro é o traduzir os conhecimentos acadêmicos para uma linguagem própria do saber escolar, ou seja, ele detém e sistematiza os conteúdos a serem ensinados na sala de aula; o segundo é refletir seu papel pedagógico, pois apresenta uma série de técnicas e métodos de ensino-aprendizagem como sugestão de aplicação para o professor; e o terceiro, é apresentar problemas com as formas possíveis de como o conteúdo que ele oferece deveria ser ensinado Mattos (2012). Assim para que haja a distribuição dos livros didáticos, é necessário “Em primeiro lugar, o livro de classe situa-se na articulação entre as prescrições impostas, abstratas e gerais dos programas oficiais - quando existem” (CHOPPIN, 2002).

“... os autores, ao produzir livros didáticos, interpretam as orientações oficiais, ou seja, as reelaboram segundo suas ideias pedagógicas e, ao mesmo tempo, incorporam expectativas dos professores, buscando atraí-los para o seu consumo” (MONTEIRO, 2009, p.176).

Associado a essa pesquisa, apresentamos um produto didático¹ construído a partir do estudo de quatro livros didáticos de matemática do Ensino Médio de um mesmo autor, os quais serão utilizados pelos alunos participantes dessa pesquisa nos

¹ O Produto Didático pode ser acessado no link <http://www.ufrgs.br/ppgemat/publicacoes/produtos-didaticos/2020>

próximos anos escolares. A verificação nos referidos livros teve como foco questões de Análise Combinatória (PFC, arranjo simples, combinação simples, permutação simples e permutação com elementos repetidos). Cabe ressaltar que o interesse por essa temática emerge entre os os estudantes, pois os conteúdos de Análise Combinatória estão no nosso cotidiano (combinar roupas, criar senhas em redes sociais ou em bancos, maneiras diferentes de formar grupos de coisas ou pessoas, etc.). Os quatro livros didáticos referidos acima são:

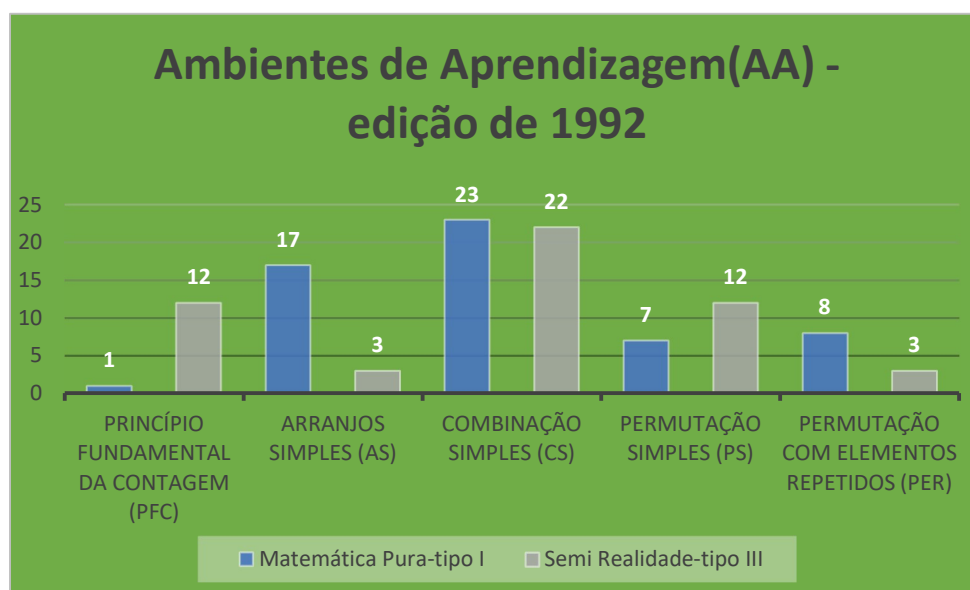
- Matemática 2: progressões, matrizes, progressões e Análise Combinatória, geometria- 2º grau. São Paulo:FTD,1992
- Matemática: Uma nova abordagem, Vol.2: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000
- Matemática Completa- 2. ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2005
- “360º Matemática fundamental: Uma nova abordagem. 1º ed. São Paulo: FTD, 2015”.

Com base nos Ambientes de Aprendizagem Skovsmose (2000) e voltados aos conteúdos de Análise Combinatória, percebemos uma predominância dos ambientes pautados no paradigma do exercício, do tipo I (matemática pura) e III (semi realidade). Observamos que dentre as 388 questões analisadas, 378 estão relacionadas a estes ambientes, representando aproximadamente 97,4%. Algumas questões nesses livros possibilitam favorecer potencialmente o ambiente voltado à realidade, pois permitem o desenvolvimento de competências relativas a contextualização, de acordo com os PCN Brasil (2002-c).

Conforme esse diagnóstico, os livros passaram por transformações influenciadas por documentos oficiais, como por exemplo, os PCN. Notamos que houve uma diminuição, no decorrer das edições, das questões voltadas para o ambiente tipo I (matemática pura), enquanto que as questões do ambiente tipo III (semi realidade), ganharam mais espaços, principalmente nas edições de 2000 e 2005. Vale lembrar que, mesmo com as orientações dos PCN, as questões envolvendo a realidade (ambiente do tipo V) estão em um percentual muito abaixo do esperado, indicando a necessidade de uma complementação com outros materiais didáticos pelo professor. Em geral, dentre os problemas existentes, há somente aqueles com uma resposta e sem a utilização de temas voltados para a problematização da construção de dados reais.

Percebemos uma grande quantidade de questões voltadas à matemática pura, caracterizando um ambiente do tipo I nos livros estudados: a edição de 1992 contém apenas uma questão de Princípio Fundamental da Contagem cujo ambiente é do tipo II - que envolve Matemática Pura por meio de tabelas ou figuras. O livro foi publicado antes da implementação dos PCN, com mais de 52% das questões classificadas no ambiente da matemática pura, sendo que a maioria das questões com problemas para ser resolvido com o uso direto de fórmulas, sem contextualização alguma. Os autores não utilizaram dados reais para nenhuma questão, ficando mais de 47% das questões no campo da semi realidade. Na edição de 1992, de acordo com o gráfico 1, o equilíbrio maior nos Ambientes de Aprendizagem foi nas questões envolvendo Combinação Simples.

Gráfico 1- Frequência dos Ambientes de Aprendizagem na Análise Combinatória



Fonte: Matemática 2, 1992

Os conteúdos envolvendo os Princípios Fundamentais de Contagem e Permutação com elementos repetidos envolveu mais questões ligadas a semi realidade do que na matemática pura. Percebemos um equilíbrio se tomarmos como referência todos os conteúdos de Análise Combinatória.

Nas edições de 2000 e de 2005, os autores envolveram diferentes tipos de Ambientes de Aprendizagem, no qual os problemas estavam relacionado há várias áreas do cotidiano ou realidade ambiente do tipo V- Skovsmose (2000). Assim, os alunos

podem encontrar diferentes significados para as atividades propostas, de acordo com a realidade vivida.

Na edição de 2015, foram identificados dois Ambientes de Aprendizagem voltados ao paradigma do exercício, matemática pura (tipo I) e semi realidade (tipo III). A parte dos conceitos voltados aos conteúdos de Análise Combinatória, levam em consideração vários exemplos da aplicabilidade dos conteúdos no cotidiano, além de muitas ilustrações dos problemas que visam auxiliar os alunos. Portanto tomamos essa edição de 2015 como referência de livro didático para auxiliar nas atividades propostas nessa pesquisa.

Deste modo, planejamos uma pesquisa com o foco na Modelagem Matemática aplicada ao ensino de Análise Combinatória. Propomos, para discussão dessa metodologia, atividades desenvolvidas com alunos voluntários do 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública localizada na cidade de Porto Alegre - RS. Buscamos, a partir das articulações de ideias apresentadas nessa dissertação, encontrar resposta para a seguinte questão de investigação: “Quais são os desafios e potencialidades na inserção da Modelagem Matemática e Análise Combinatória no Ensino Fundamental?”. Para isso, as atividades propostas foram desenvolvidas em um ambiente de Modelagem Matemática, Barbosa (2001). Afim de propiciar um dos Cenários para Investigação Skovsmose (2000), utilizando os conteúdos de Análise Combinatória, em especial, os PFC.

Dividimos essa dissertação em cinco capítulos. No primeiro, abordamos a trajetória do professor pesquisador contextualizado com o ensino de Análise Combinatória. Além disso, pesquisas relacionadas à verificação e diagnósticos de questões em livros didáticos voltados a Análise Combinatória, de acordo com os Ambientes de Aprendizagens Skovsmose (2000).

No segundo capítulo, apresentamos o referencial teórico que fundamentou a pesquisa. Relatamos sobre a Análise Combinatória nos PCN’S e na BNCC, a classificação dos problemas de Análise Combinatória pelo olhar de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994). Abordamos também os Ambientes de Aprendizagem Skovsmose (2000), Modelagem Matemática Barbosa (2001) e as etapas de Modelagem Matemática segundo Burak (2004). Além disso, na revisão de literatura, apresentamos três pesquisas que possuem relação com a nossa.

No terceiro capítulo apresentamos a caracterização da pesquisa, seus objetivos e procedimentos a que recorreremos para desenvolver esse trabalho. Além disso,

descrevemos os sujeitos da pesquisa e a escola na qual realizamos as atividades propostas nessa pesquisa. No quarto capítulo, descrevemos as atividades realizadas, apresentando os dados coletados bem como as análises realizadas a partir desses dados.

No quinto capítulo, apresentamos as considerações finais do trabalho, respondendo às questões que deram origem ao problema de pesquisa. Além disso, apresentamos as reflexões e contribuições da experiência pedagógica.

Finalizamos esse texto com as referências bibliográficas e com três anexos, nos quais apresentamos cópias da autorização da escola e dos Termos de Aceite e Assentimento, necessários para a realização dessa pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentamos o referencial teórico que nos deu suporte para as análises dos dados produzidos nessa pesquisa. Para tal, discutimos em especial, as partes voltadas para o ensino dos Princípios Fundamentais da Contagem (PFC) de dois documentos oficiais, a saber, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN²) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC³). Tais documentos são referências para as escolas de todo o Brasil.

Destacamos a classificação dos problemas de Análise Combinatória, segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) com a qual os autores trazem aspectos importantes para as soluções de problemas combinatórios. Baseados no livro didático de Giovanni e Bonjorno (2015), trazemos a abordagem dos PFC e da Combinação simples por meio da árvore de possibilidades.

Também abordamos os Ambientes de Aprendizagem, classificados por Skovsmose (2000), a Modelagem Matemática na visão de Barbosa (2001), bem como as etapas da Modelagem Matemática de acordo com a perspectiva de Burak (2004).

Finalizamos esse capítulo com uma revisão de literatura, relatando três trabalhos relacionados com nossa pesquisa.

2.1 Análise Combinatória Nos Documentos Oficiais

Os PCN foram um marco a nível nacional, pois sugerem, por meio da exploração de propostas, pensar diferentes situações de aprendizagem, enquanto a BNCC regulamenta e sistematiza a educação atual do Brasil. Consideramos que tais documentos têm suas peculiaridades e que podem trazer diferentes contribuições na área de Análise Combinatória.

De acordo com os PCN Brasil (1997), observamos que o estudo dos Princípios Fundamentais de Contagem é recomendado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental envolvendo situações simples de contagem. A ideia é utilizar a resolução de problemas por meio da criatividade do aluno, que pode ser apoiada em desenho de objetos com a utilização da soma ou multiplicação para problemas de contagem, que

² Foi a primeira proposta curricular que fez referência a Estatística, Combinatória e Probabilidade no ensino de matemática a nível nacional.

³ Sistematiza o ensino nas escolas de todo Brasil, abrangendo todas as etapas da Educação Básica.

caracteriza uma importante ferramenta para o desenvolvimento lógico dedutivo. De acordo com a pesquisa de Pessoa e Borba (2009), realizada com 99 estudantes do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental, os educandos desenvolvem compreensão e entendimento de problemas envolvendo raciocínio combinatório.

A Análise Combinatória começou a fazer parte dos PCN em 1997, inserida no tema “tratamento da informação”. Desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental⁴, os PCN em 1997 apresentam orientações didáticas a respeito de como ensinar Análise Combinatória por meio de associações com objetos “— Tendo duas saias — uma preta (P) e uma branca (B) — e três blusas — uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) —, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?” (BRASIL, 1997, p.73). A ideia é a resolução do problema por meio da criatividade do aluno, que pode ser apoiada em desenho de objetos com a utilização da soma ou multiplicação - problemas de contagem.

Levando-se em conta tais considerações, pode-se concluir que os problemas cumprem um importante papel no sentido de propiciar as oportunidades para as crianças, do primeiro e segundo ciclos, interagirem com os diferentes significados das operações, levando-as a reconhecer que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas. (BRASIL, 1997, p.73)

Ao longo do segundo ciclo do Ensino Fundamental,⁵ é esperado que os alunos tenham condições de apropriarem-se dos conceitos dos Princípio Multiplicativo, identificando as possíveis maneiras de combinar elementos de um determinado conjunto, pois os auxiliarão na criação de tabelas e gráficos.

Além disso, o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1997, p.137)

⁴O 1º Ciclo do Ensino Fundamental é o período escolar compreendido entre o 1º e o 5º anos.

⁵ O 2º Ciclo do Ensino Fundamental é o período escolar compreendido pelos 6º e 7º anos.

A Análise Combinatória no terceiro ciclo⁶ é tratada nos PCN de 1998, com orientações didáticas voltadas para problemas de contagem, princípios multiplicativo e aditivo, podendo possibilitar o avanço dos conteúdos de probabilidade.

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998-b, p.52)

Os PCN de 1999 e os PCN+ de 2002, responsáveis pelas orientações didáticas do quarto ciclo⁷, abordam maneiras de trabalhar a Análise Combinatória, voltado para o raciocínio combinatório por meio de resolução de situações problemas, propondo que as fórmulas devem ser consequência da construção do modelo simplificado e explicativo da situação.

Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística. Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares. Este tema estruturador permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sociocultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática. (BRASIL, 2002, p.126,127.)

A aprendizagem contextualizada, preconizada pelos PCN, visa que o educando aprenda as competências para solucionar problemas com contextos apropriados. Diante disso, a proposta de trabalhos interdisciplinares, visa fortalecer e valorizar os conhecimentos e experiências vividas pelos educandos dentro e fora do contexto escolar.

Os PCN envolvem os quatro ciclos que compreende o Ensino Infantil, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio, quando se trata da Análise Combinatória. Os exemplos de problemas que apresentados nos PCN, tratam de semi

⁶ O 3º Ciclo do Ensino Fundamental é o período escolar compreendido pelos 8º e 9º anos.

⁷ O 4º Ciclo é o período escolar compreendido do 1º aos 3º anos do Ensino Médio.

realidade ou realidade Skovsmose (2000), pois tratam os conteúdos da Análise Combinatória por meio de problemas com uma situação “inventada” ou do cotidiano. Conteúdos como os PFC, arranjos, combinação simples, permutação simples e permutação com elementos repetidos, podem ser aplicados baseados em dados reais, ou tentativas de reprodução da realidade (semi realidade), e que por meio da resolução de problemas, podem ser resolvidos com criatividade, por parte do aluno, associando os problemas propostos ao cotidiano.

Encontramos na BNCC, de modo geral, objetivos e habilidades que os alunos deveriam desenvolver. Observamos que “A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens que todos os alunos devem desenvolver” (BRASIL, 2016, p.7). Com relação aos objetivos do eixo, de acordo com a BNCC.

Os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL 2016, p. 274).

Na BNCC, o eixo de números, do 5º ano do Ensino Fundamental, entre os objetos de conhecimento estão problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B , quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”.

A seguir, construímos um quadro relacionado com os conteúdos ligados a Análise Combinatória (Princípios Fundamentais da Contagem, Arranjo, Combinação e Permutação) destacando algumas habilidades de acordo com a BNCC.

Quadro 1- PFC nos Ensinos Fundamental e Médio

Ano	Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
4º ano	Números	Problemas de Contagem	Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. (pg.291)

	Probabilidade e Estatística		Análise de chances de eventos aleatórios	Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações. (pg.293)
5º ano	Números		Problemas de Contagem	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (pg.295)
	Probabilidade e Estatística	e	Cálculo de Probabilidade	Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. (pg.297)
6º ano	Probabilidade e Estatística	e	Cálculo de Probabilidade	Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. (pg. 305)
7º ano	Probabilidade e Estatística	e	Experimentos aleatórios	Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências. (pg.311)
8º ano	Números		Princípio Multiplicativo da Contagem	Resolver e elaborar de problemas de contagem cujo objetivo envolva a aplicação do princípio multiplicativo. (pg.313)
	Probabilidade e Estatística	e	Princípio Multiplicativo da Contagem, soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	Desenvolver e calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo. (pg.315)
9º ano	Probabilidade e Estatística	e	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. (pg.319)
Ensino Médio	Probabilidade e Estatística	e	Problemas de Contagem	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Fonte: BNCC, 2017.

Desde o início do Ensino Fundamental a BNCC considera que as habilidades desenvolvidas em torno da Análise Combinatória, especialmente os Princípios Multiplicativo e Aditivo, são auxiliares para o aprendizado de probabilidade e estatística. Com isso, uma das habilidades que destacamos no Ensino Médio, diz

respeito ao manejo do diagrama de árvore para auxílio nos problemas de Análise Combinatória.

Desta forma, optamos por trabalhar os PFC no 8º ano do Ensino Fundamental, pois observamos que poderíamos trabalhar a árvore de possibilidades e explorar diferentes tipos de problemas de contagem utilizando a realidade do cotidiano dos alunos, para prepará-los para o Ensino Médio.

Os diversos problemas de Análise Combinatória que estão citados nos PCN têm características peculiares que podem conduzir os alunos a diferentes interpretações e resoluções. Percebemos que a BNCC dá ênfase a este conteúdo, tornando-o importante para o currículo escolar, pois está presente a partir do 4º ano do Ensino Fundamental.

2.2 Classificações De Problemas De Análise Combinatória

Para classificar os problemas que envolvem a Análise de Combinatória, os autores Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) organizaram esses problemas em categorias, de acordo com cinco indexadores: tipos de problemas e de solução; operações combinatórias; tipos de objetos que combinam; modelo combinatório implícito no enunciado; e tamanho e variabilidade dos parâmetros. Para cada indexador, os autores apresentam diferentes categorias de problemas, conforme os conceitos ou estratégias envolvidas na busca de solução para os problemas de combinatória. Observamos que essas categorias não são excludentes, ou seja, existem problemas que pertencem a mais de uma categoria. Com o intuito de estabelecer uma relação com o tema sobre os Princípios Fundamentais de Contagem, apresentamos a classificação proposta pelos autores associadas aos três primeiros indexadores.

Quadro 2- Tipos de problemas

Tipos de problemas e de solução	
Existência	São problemas que, ao resolvê-los, procuramos provar a existência ou não de um determinado tipo de estrutura discreta. De certo modo, com esse tipo de problema buscamos verificar as possibilidades de agrupamentos a partir de determinados conjuntos de elementos, podendo ser ordenados ou não, e possuir ou não repetição.
Enumeração	São problemas cujo objetivo é enumerar ou fazer uma lista de elementos que possuem determinada propriedade.
Contagem	São problemas aplicados para se determinar o número de elementos de um conjunto finito que possui uma propriedade ou uma coleção.
Classificação	São problemas de classificação que se traduzem na busca de um número contido em determinados subconjuntos que definem a classificação.

Otimização	Os problemas de otimização se apresentam em ocasiões em que procuramos um valor total para o conjunto de soluções, bem como determinar uma ordem para os elementos. De acordo com o resultado dessas ações, é possível estabelecer um grupo de valores de máximo ou de mínimo, ou mesmo confirmar a não existência desses valores extremos.
------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1994

Para exemplificar os *problemas de existência*, a seguir, apresentamos os enunciados de dois problemas de existência:

I - O problema dos matrimônios

- Adela conhece Andrés, Benito e Carlos.
- Beatriz conhece Benito e Carlos.
- Carmen conhece Carlos, Estevan e German.
- Daniela conhece Andrés e Benito.
- Elisa conhece Andrés, Benito e Carlos.
- Felisa conhece David, Estevan e Francisco.

- Represente essa situação por meio de um diagrama.
- É possível buscar um marido para cada garota entre os garotos que conhecem? (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 135 apud SANTOS, 2015, p. 58).

II - Com os algarismos 1,2,3,4,6,7 e 8, quantos números de 5 dígitos podem ser formados? Desses, quantos terminam com o algarismo 7?

Os *problemas de enumeração* podem apresentar a quantidade total de possibilidades, outras não. Por exemplo:

I- Escreva todos os doze anagramas da palavra BOLO.

II- Quantos são os anagramas da palavra “PIANO” que começam e terminam por vogal?

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), os *problemas de contagem* têm por objetivo determinar o número de elementos de um conjunto finito que possui determinadas propriedades. Os exemplos dados acima, com exceção do primeiro, são exemplos de problema de contagem. Apresentamos mais um:

I - “O que é mais fácil de ocorrer ao lançar dois dados: obter dois números iguais ou dois números diferentes? (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 137; tradução do autor⁸)

Segundo os autores, os *problemas de classificação* podem ser resolvidos utilizando o Princípio Multiplicativo, e que geralmente esses problemas são abordados nos livros didáticos. Por exemplo:

I - Na garagem da casa de Alicia e Benito, há cinco vagas. Eles têm dois carros (o de Alicia e o de Benito) que podem colocar toda noite, cada carro no lugar que preferirem, se não estiver ocupado.

Apresente uma tabela ou um diagrama para representar todas as ocupações diferentes que Alicia e Benito podem estacionar seus carros? (Os dois estacionam seu carro na garagem todas as noites) (adaptado de BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 143 apud SANTOS, 2015, p. 59).

Com um problema de otimização, procuramos atribuir valor total ao conjunto de soluções e determinar um conjunto de ordem de todos os elementos. De acordo com o resultado dessas ações, tentamos estabelecer um grupo de valores de máximo ou mínimo. Segundo Santos (2015), “o problema da garagem de Alicia e Benito é um exemplo deste tipo de problema.” (SANTOS, 2015, p.60).

O segundo indexador, operações combinatórias, Santos (2015) aponta que as operações também conduzem os problemas de combinatória, que são classificados em simples e compostos. Os problemas simples, são resolvidos geralmente utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Os problemas que envolvem uma maior complexidade de situações combinatórias são classificados como compostos.

Quadro 3- Operações Combinatórias

Simple	São problemas envolvidos diretamente com um método de contagem com quatro caracterizações diferentes entre si: <ul style="list-style-type: none"> •<i>Seleção</i> de uma amostra a partir de um conjunto de objetos; •<i>Colocação</i>- na qual objetos são inseridos em caixinhas (caixa, células, urnas); •<i>Partição</i>- situação em que são criados subconjuntos a partir de um conjunto de objetos; •<i>Decomposição</i>- contexto em que um número natural é decomposto visando a uma soma.
Composto	São problemas com uma complexidade de situações combinatórias, classificados como compostos. As técnicas para sua resolução são diversificadas e podem envolver funções geradoras, procedimentos lógicos, grafos, diagrama de árvore, matrizes, probabilidades e etc.

Fonte: Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1994.

⁸ ¿Qué es más fácil al lanzar dos dados, obtener dos números iguales o dos números distintos?

De acordo com Santos (2015) os problemas classificados como simples, envolvendo a seleção, colocação, partição e decomposição são desenvolvidos no cotidiano escolar; podendo está ordenado ou não, se são disjuntos ou não, e a utilização de soma, produto e quociente para a resolução do problema. Contudo, os problemas compostos são complexos, pois as técnicas para sua resolução são diversificadas e, muitas vezes, o aluno tem contato com essas técnicas a partir do Ensino Médio, ou mesmo a partir do Ensino Superior.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) acrescentam que os problemas de combinatória também podem ser classificados pelo tipo de objetos que combinam – pessoas, números, letras, objetos, etc – e pelo tamanho dos parâmetros e das características – pequenos e grandes, variáveis e não variáveis. De acordo com Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) os problemas de combinatória podem ser usados

[...] para treinar os alunos na contagem, fazendo conjecturas, generalização e pensamento sistemático, que pode contribuir para o desenvolvimento de muitos conceitos, tais como as relações de equivalência e ordem, função, amostra, etc. [...]. No entanto, a combinatória é um campo que a maioria dos alunos encontra muita dificuldade. Dois passos fundamentais para tornar o aprendizado deste assunto mais fácil é compreender a natureza dos erros dos alunos na resolução de problemas combinatórios e identificar as variáveis que podem influenciar esta dificuldade. (Batanero, Navarro-Pelayo e Godino, 1997)

Diante das diversas características de problemas de combinatória, consideramos importante o entendimento dos processos adotados pelos alunos nas atividades que foram desenvolvidas no âmbito dessa dissertação.

2.3 **Árvore De Possibilidades**

Durante as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas com as temáticas “passagens aéreas” e “cardápio de uma pizzaria”, uma das ferramentas utilizadas para resolução dos problemas propostos pelos alunos foi a árvore de possibilidades. Os conteúdos explorados nas duas atividades foram os Princípios

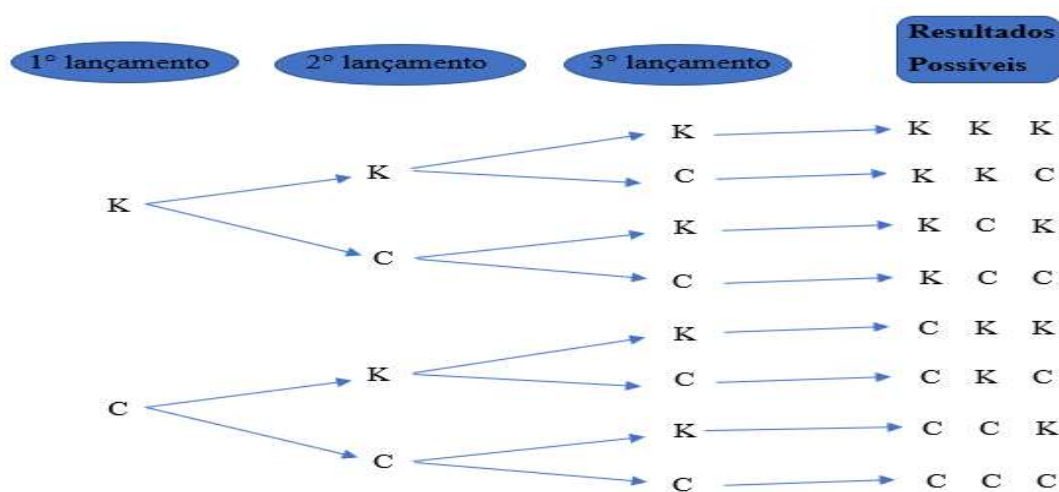
Fundamentais de Contagens, sendo que na atividade “cardápio de uma pizzaria” os conceitos de Combinação também foram explorados.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2016, p.295), dentre os objetivos dos PFC, estão a “[...] determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.”. Nesse sentido, Giovanni e Bonjorno afirmam que a árvore de possibilidades “[...] facilita o estudo e a sistematização da contagem dos possíveis agrupamentos” (GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J.R., 2015). Além disso, no mesmo livro, os autores apresentam um capítulo específico sobre Análise Combinatória no qual constam as seguintes técnicas de contagem, com o uso frequente da árvore de possibilidades: Princípio Multiplicativo; Permutações Simples e com Repetição; Arranjos Simples; e Combinações Simples.

O Princípio Fundamental de Contagem é apresentado no início do capítulo, em que os autores utilizam alguns problemas resolvidos por meio da enumeração direta pela árvore das possibilidades. São eles: montagem de um cardápio utilizando salada, feijão, arroz, carne vermelha e carne de frango, no qual apresenta dois pratos com o único tipo de carne; também apresentam 12 tipos de arroz, no qual buscam saber sobre a quantidade de pratos possíveis escolhendo um dos 12 tipos de arroz; e outro problema sobre quais são os resultados possíveis ao lançarmos uma moeda, três vezes seguidas.

Abaixo, reproduzimos a árvore de possibilidades para o problema do lançamento da moeda. Para isso, a opção cara é identificada por (K) e coroa por (C):

Figura 1- Lançamentos de moedas



Fonte: Giovanni; Bonjorno (2015.p.548).

De acordo com Giovanni e Bonjorno (2005), a utilização da árvore de possibilidades poderá levar o aluno a perceber se fará a correta contagem das possibilidades de acordo com o problema. No resultado do problema, KKK significa cara no 1º, no 2º e no 3º lançamentos; CKC significa coroa no 1º lançamento, cara no 2º e coroa no 3º. Ao calcular as diferentes possibilidades nos três lançamentos, observando a sequência fornecida pela árvore de possibilidades, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades, que é a soma apresentada na árvore de possibilidades (última coluna).

Na figura 1 acima, vemos uma árvore de possibilidade relacionada com 3 lançamentos de uma moeda. Podemos explorar a Análise Combinatória, tanto o PFC, como Combinações, por exemplo. No início do capítulo do livro didático, voltada para a Análise Combinatória, os autores enunciam o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem da seguinte forma:

Se um acontecimento ocorrer k etapas sucessivas e independentes, de modo que P_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa, e para cada possibilidade da 1ª etapa, P_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa, e para cada possibilidade da 2ª etapa ... P_k é o número de possibilidades da k -ésima etapa. Então o produto de $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$ fornece o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer. (GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J.R., 2015, p.548)

No decorrer do capítulo, as questões estão voltadas a problemas ligados às situações do cotidiano, sendo que encontramos problemas para os quais os autores fazem uso de simples fórmulas de combinação, Arranjo e Permutação.

Os autores enunciam a combinação simples como “seja E um conjunto com n elementos: chama-se combinação simples dos n elementos de E , tomados p a p , todo subconjunto de E com p elementos. Indicamos o número dessas combinações simples por C_n, p . Sendo $C_n, p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.” (GIOVANNI e BONJORNO, 2015, p.557). Nessa pesquisa, priorizamos a utilização do raciocínio combinatório, ou seja, por meio do levantamento de hipóteses e de conjecturas para a interpretação do problema, com o auxílio da árvore de possibilidades, evitando o uso direto de fórmulas.

Concordamos com Alves e Segadas (2012, p.406) ao afirmarem que os alunos apresentam dificuldades para resolver problemas de Análise Combinatória. São elas: leitura e interpretação do problema; perceber se é uma situação em que se deve somar

ou multiplicar; se os elementos a serem contados são distinguíveis ou não; e se a ordem é ou não importante para efeito de contagem.

Observamos que, ao trabalhar com pesquisas exploratórias, “passagens aéreas” e “cardápio de pizzaria da cidade”, surgiram outros conteúdos, como matemática financeira, mas mantemos o foco nos Princípios Fundamentais de Contagem.

2.4 Ambientes De Aprendizagem

Segundo Skovsmose (2000) um Ambiente de Aprendizagem é formado por todas as condições e recursos aos quais os alunos estão expostos durante o desenvolvimento de suas atividades. Ao propor um novo Ambiente de Aprendizagem o professor pode favorecer a articulação entre pensamentos e a realização de ações que podem ser desenvolvidas, contribuindo para um melhor aproveitamento das aulas por partes dos alunos.

Skovsmose (2000) propõe uma classificação dos Ambientes de Aprendizagem para caracterizar as situações nas quais os alunos são submetidos para desenvolverem suas atividades. Segundo o autor, os Ambientes de Aprendizagem podem ser caracterizados em três eixos: matemática pura, semi realidade e realidade. Cada eixo com duas perspectivas, a saber, o paradigma do exercício e cenário para investigação. A Modelagem Matemática é um Ambiente de Aprendizagem para investigação, pautado na realidade, uma vez que o mesmo proporciona aos alunos condições para investigarem problemas por meio de situações reais. Diante disso, o Ambiente de Aprendizagem proporcionado pela Modelagem Matemática é um cenário para investigação que favorece ao aluno produzir diferentes significados por meio dos conceitos estudados. Conforme afirma o autor:

As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente daquelas baseadas em exercícios. A distinção entre elas tem a ver com as “referências” que visam levar os estudantes a produzir significados para atividades e conceitos matemáticos. (SKOVSMOSE, 2008, p.21)

Segundo Skovsmose (2000), distinguimos três referências que uma atividade pode ter: atividade matemática que tem por começo, meio e fim a matemática

(matemática pura); atividade baseada numa realidade construída (semi realidade); atividade baseada em situações da vida real (realidade). Baseado nessas três referências (matemática pura, semi realidade e realidade) o autor identifica seis tipos diferentes de Ambientes de Aprendizagem. Os Ambientes de Aprendizagem I, III e V são pautados no paradigma do exercício que parte da premissa central de que para um exercício existe uma, e somente uma, resposta correta. Os Ambientes de Aprendizagem II, IV e VI, permitem um cenário de investigação que é aquele que convida o aluno a formular questões e procurarem explicações.

Referência à matemática pura (tipo I): baseado apenas em exercícios da própria matemática, suas regras e conversões.

Referência à matemática pura (tipo II): caracterizado como um ambiente que envolve figuras geométricas. As Investigações numéricas ou geométricas com papel e lápis ou computador.

Referência à semi realidade (tipo III): exercícios que buscam referências em situações cotidianas, para tentar construir uma realidade para a atividade matemática. Assim, é construída para o exercício não é a que de fato observamos na vida real.

Referência a semi realidade (tipo IV): atividade contém referências a uma semi realidade, mas agora ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações.

Skovsmose (2000) citou o seguinte exemplo: “A pista de corrida é desenhada na lousa e onze cavalos – 2, 3, 4, ...,12 – estão prontos para iniciar. Dois dados são jogados; os alunos são convidados em qual cavalo pretende apostar a partir da soma dos números tirados, marca-se uma cruz no diagrama. Como mostra a Figura 4, a soma 6 apareceu três vezes, mais vezes que as outras somas. O cavalo 6, portanto, tornou-se o grande vencedor, seguido pelos cavalos 7 e 10.” A seguir a figura 2 relacionado com essa atividade.

Figura 2 – Terreno da corrida de cavalos

			X							
			X	X			X			
X	X		X	X	X	X	X		X	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2

Fonte: SKOVSMOSE, 2000.

Referência à realidade (tipo V): exercícios baseados na vida real.

Referência à realidade (tipo VI): as referências são reais baseados na vida cotidiana dos alunos, tornando possíveis produzirem diferentes significados para as atividades. Conforme afirma o autor:

Realizar um movimento, das referências à matemática pura para as referências da vida real pode ajudar a oferecer recurso para reflexões sobre a matemática [...]. Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode operar em nossa sociedade. (SKOVSMOSE 2008, p. 38).

Para Skovsmose (2000), a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes envolvendo paradigmas do exercício e cenários de investigação. Portanto, os Ambientes de Aprendizagem sejam abordados pelos professores e alunos de acordo com o desenvolvimento da turma perante os conteúdos abordados.

2.5 Modelagem Matemática

Segundo Barbosa (2003), Modelagem Matemática é um Ambiente de Aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar ou investigar, por meio da matemática, situações ou problemas oriundos de outras áreas da realidade. Para Bassanezi (2006), Modelagem Matemática é

[...] é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la [...] consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los

interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2006, p.16-17).

As duas perspectivas de Modelagem Matemática, apresentados por Barbosa (2001 e 2003) e por Bassanezi (2006), fazem referência ao um ambiente de problematização e investigação. Barbosa (2003) acredita que a problematização se refere ao ato de perguntar, questionar e a investigar o que acontece quando os alunos procuram meios para responder às perguntas/questionamentos.

Em Barbosa (1999), o autor afirma que há diversas maneiras de conceber e materializar a Modelagem Matemática na sala de aula. Por exemplo, pode ser por meio de projetos de curta ou longa duração, bem como por meio de atividades propostas aos alunos durante a aula. Devido à natureza aberta da Modelagem Matemática, não existe garantia de que os alunos se envolvam em tarefas nesse ambiente. O ambiente de aprendizagem de Modelagem segundo o autor:

Refere-se às condições sob as quais os alunos são incentivados a desenvolver determinadas atividades. [...] por razões diversas, os alunos podem ter outras prioridades; pode ser que os interesses dos alunos e os do professor não se encontrem, criando dificuldades, mas isso não dissipa o ambiente de aprendizagem de Modelagem (BARBOSA, 2001, p. 22-25).

De acordo com Barbosa (2001), em atividades desenvolvidas em um ambiente de Modelagem Matemática, o objetivo pode ser estudar problemas que não necessariamente sejam pertencentes à disciplina de matemática, que envolvam formular hipóteses, simplificações que se relacionem aos modelos matemáticos, que sirvam para analisar o problema em questão.

Ainda, Barbosa (2001) especifica que para a materialização, ou seja, para a utilização da Modelagem em sala de aula, devem ser considerados: a apresentação do problema; a atuação do professor e alunos na busca pela resolução; e a interação do professor com alunos nas atividades. O autor propõe a seguinte classificação em casos, de acordo com o envolvimento dos alunos e professor durante a prática de Modelagem Matemática:

Caso 1 - O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.

Caso 2 - O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua

resolução.

Caso 3 - A partir de temas não matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

A tabela a seguir, feita por Barbosa (2001, p.9) esclarece a relação de professor-aluno nos casos de Modelagem:

Figura 3- O aluno e o professor nos casos de Modelagem Matemática

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa, 2001, p.9.

Corroborando com as ideias de Skovsmose (2000), Chaves e Lorenzoni destacam:

O trabalho com modelagem matemática também permite que se rompa com os dispositivos táticos e estratégicos do Ensino Tradicional de Matemática (o paradigma do exercício), abrindo então espaço para novos cenários pautados na investigação e no trabalho colaborativo e participativo envolvendo alunos e professores. No viés da modelagem matemática, enquanto estratégia de ensino, o aluno se envolve, pesquisa, participa, inquire, toma as rédeas da situação, tonando-se assim um indivíduo ativo, participativo, responsável e ciente de seus atos (CHAVES; LORENZONI, 2010, p. 10).

Os problemas criados pelos estudantes poderão proporcionar maior desenvoltura no desenvolvimento do trabalho. Diante disso, o trabalho com os Princípios Fundamentais de Contagem e Modelagem Matemática poderá proporcionar maior interação, bem como maior segurança para enfrentar e superar os desafios da pesquisa. De acordo com o Burak (2004):

A Modelagem enseja, ainda de forma natural e indissociável, o ensino e a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos, de livre escolha do grupo ou dos grupos, favorece a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece. Assim, ao trabalhar um tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos envolvidos que compõem essa realidade. (BURAK, 2004, p. 5).

A associação da matemática com o mundo real para Barbosa (2001) é uma fonte rica para o ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula.

[...] oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. (BARBOSA, 2001, p. 05).

Ainda, a partir das propostas feitas por Barbosa, segundo (BRUMANO 2014, p.51), “em trabalhos com a Modelagem o aluno deve ser convidado a se integrar e pesquisar, inserindo-se ao ambiente de aprendizagem que a Modelagem Matemática proporciona”.

De acordo com Araújo e Barbosa (2005) para levantamentos de uma situação, os alunos utilizam conhecimentos cotidianos e matemáticos. Na obra os autores observaram também que o projeto de Modelagem realizado pelos alunos é “[...] altamente influenciado pelo contexto com que estão inseridos” (ARAÚJO e BARBOSA, 2005, p.93). Portanto, por meio do convite para a participação em nosso Projeto de Modelagem Matemática envolvendo os PFC, queremos propiciar um Ambiente de Aprendizagem, afim de que os alunos elaborem situações advindas de sua vivência no dia a dia. Desse modo, procuramos oportunizar investigações aos alunos, por meio do problema proposto, nas quais eles utilizem os conhecimentos adquiridos ao longo de suas vidas.

Portanto, o que pretendemos é apresentar a Modelagem Matemática como uma possibilidade para o ensino e aprendizagem da matemática escolar, que possa propiciar aos alunos chances de identificar e estudar fatos provenientes da realidade. Dessa forma, pretendemos despertar maior interesse pelas atividades propostas.

2.6 Perspectiva De Burak

Para Burak (2004), a Modelagem Matemática é uma alternativa metodológica para o ensino de matemática, que depende fundamentalmente do interesse do grupo-aluno. Podendo resultar numa maior motivação e conseqüentemente, na melhoria do processo de ensino e de aprendizagem, tornando os alunos corresponsáveis por suas aprendizagens e oportunizando o estabelecimento de relações afetivas professor-aluno, que passa a ser um mediador entre o conhecimento matemático e o conhecimento do aluno.

Burak (2004, p.3) estabelece cinco etapas para se trabalhar a Modelagem Matemática:

- 1 - Escolha do tema;
- 2 - Pesquisa exploratória;
- 3 - Levantamento dos problemas;
- 4 - Resolução dos problemas; e
- 5 - Análise crítica das soluções.

Cada uma das etapas tem a participação do professor e aluno. A primeira etapa o professor tem que criar condições e incentivar para que os alunos possam escolher o tema sobre o qual farão a pesquisa. O tema deverá ser de interesse do aluno e fazer parte do seu cotidiano. De acordo com (KLÜBER e BURAK, 2008, p. 21), “uma vez que não necessitam ter nenhuma ligação imediata com a Matemática ou com conteúdo matemáticos e sim com o que os alunos queiram pesquisar”.

Na segunda etapa que é a pesquisa exploratória, os alunos vão a campo a procurar materiais e dados teóricos suficientes para embasar a pesquisa, os registros nessa etapa é importante, pois por meio deles os problemas surgirão. No entanto, na pesquisa é essencial colher o maior número de informações possíveis e noções prévias que se quer desenvolver, pois melhor será a análise dos dados posteriormente. “A pesquisa de campo é fundamental, pois o contato com o ambiente é um ponto importante do trabalho com a Modelagem e ajuda o aluno a desenvolver aspectos formativos, investigativos” (KLÜBER e BURAK, 2007, p.3).

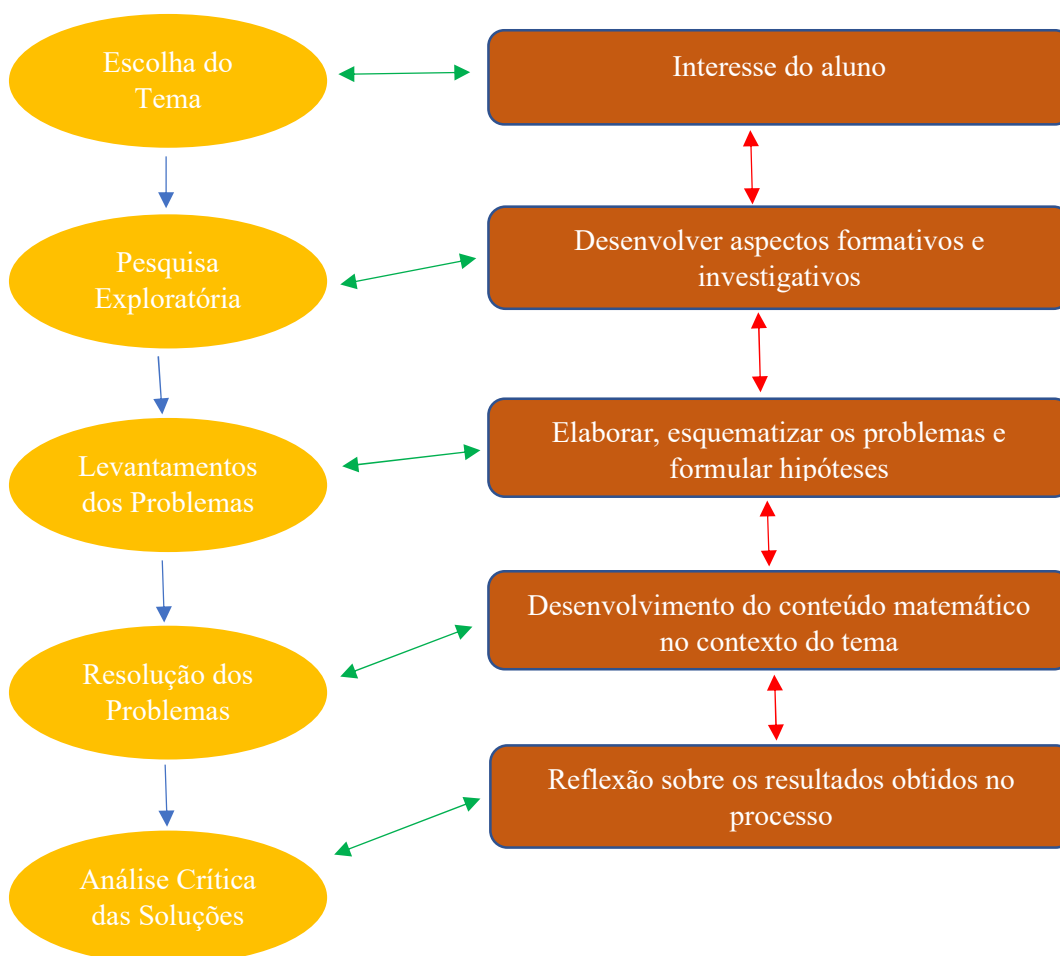
Na terceira etapa, de levantamento dos problemas, os alunos apresentam todos os materiais e dados reais colhidos na etapa anterior. A partir disso, “os alunos elaboram e esquematizam os problemas surgidos sobre o tema” (SOISTAK e BURAK, 2005b). Importante etapa para questionar e investigar de acordo com os dados coletados, como afirma (KLÜBER e BURAK, 2007, p. 3) “essa fase da Modelagem é muito rica, pois

desenvolve no aluno a capacidade de tomar decisões, de formular hipóteses, de questionar as várias possibilidades de resolução de um mesmo problema”.

Na quarta etapa é a resolução dos problemas que consiste em desenvolver o conteúdo matemático de acordo com o tema, dando condições necessárias para resolver os problemas levantados na etapa anterior. De acordo com Burak (1992), essa etapa tem como objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano das pessoas, ajudando-as a fazer previsões e tomar decisões.

Na quinta etapa da análise crítica da solução é uma etapa importante, pois é “nesse momento que se analisa e se verifica a relação e a validação da resolução encontrada para o problema” (SOISTAK e BURAK, 2005b, p. 3). A reflexão sobre os resultados obtidos na pesquisa e no processo podem melhorar as decisões e ações. Ela, também, “contribui para a formação de cidadãos participativos” (KLÜBER e BURAK, 2007, p.4). A seguir apresentamos as principais palavras chaves das 5 etapas de Burak (2004):

Figura 4- Palavras chaves das etapas de Modelagem Matemática de Burak (2014)



Fonte: própria.

2.7 Revisões De Literatura

Nessa seção apresentamos uma revisão de literatura, para a qual escolhemos alguns trabalhos que nos auxiliaram no desenvolvimento dessa pesquisa. Inicialmente, buscamos no banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, trabalhos relacionados como tema escolhido, “Modelagem Matemática e Análise Combinatória”. Após a primeira busca com a palavra chave “Modelagem Matemática”, encontramos 48.779 (quarenta e oito mil setecentos e setenta e nove) resultados para dissertações, e 18.884 (dezoito mil oitocentos e oitenta e quatro) resultados para teses de doutorado. Por outro lado, após digitarmos a palavra chave “Análise Combinatória”, de forma independente da primeira busca, encontramos 344.301 (trezentos e quarenta e quatro mil trezentos e um) resultados para dissertações e 116.105 (cento e dezesseis mil cento e cinco) resultados para teses de doutorado. Contudo, as dissertações e teses não pertencem somente a área de matemática, mas a diversas áreas do conhecimento, com muitas aplicações, o que era esperado, devido à grande relevância e interdisciplinaridade do tema. Após selecionarmos um grupo de pesquisas acadêmicas, alinhadas com o ensino de Modelagem Matemática e Análise Combinatória, decidimos escolher duas dissertações e uma tese, para apresentar nessa seção, pois julgamos estarem mais próximas da nossa pesquisa, influenciando nas escolhas das nossas atividades. A seguir, faremos um breve resumo com as principais questões e resultados desses trabalhos, tais como, identificação, objetivo, metodologia, suporte teórico e considerações finais.

O primeiro trabalho que apresentamos é a dissertação intitulada “*A modelagem matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória*”, de Cleuza Eunice Pereira Brumano, apresentada em 2014 junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Nessa dissertação o ambiente de trabalho foi em um restaurante *self service*, que possibilitou o estudo da Análise Combinatória por meio de montagens de cardápios. O objetivo foi analisar a aplicação desta estratégia como uma proposta eficaz para favorecer o ensino de Análise Combinatória. A abordagem de pesquisa adotada se caracteriza qualitativa e os dados foram coletados por meio de dispositivos de áudio/vídeo e anotações. A pesquisa se baseou em Barbosa (2001) e seguiu as etapas de Modelagem de Burak (2004). De acordo com a autora os alunos despertaram o interesse e a curiosidade oportunizando

vivenciar as diversas opções de escolha de alimentos de acordo com os sabores e os valores nutricionais.

O segundo trabalho escolhido é a dissertação de autoria de Claudinei Aparecido da Costa, com o título *“As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental”*, apresentada em 2003 junto ao Programa de Estudos de Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. O objetivo do trabalho, desenvolvido com os professores do Ensino Fundamental e Médio da rede pública, foi estudar e analisar os instrumentos disponíveis para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Fundamental, por meio da Modelagem Matemática. A metodologia seguiu a perspectiva qualitativa baseados em aplicações de questionários com professores. O trabalho seguiu a Modelagem no ensino de probabilidades de Michel Henry e Brigitt Dantal (1997), que propõem as cinco etapas (observação da realidade, descrição simplificada da realidade, construção de um modelo, trabalho matemático com o modelo e interpretação dos resultados com a realidade) - aplicadas por Coutinho (2001). De acordo com autor na análise foi identificadas dificuldades de estabelecer um procedimento coerente, justificar respostas e utilizar adequadamente as representações, dificuldades na formação de grupos, se a ordem dos mesmos era relevante ou não. Além disso, constatou-se que os professores têm dificuldades de explicar suas próprias práticas, talvez pela ausência de leitura e falta de hábito de escrever.

Encerramos essa seção apresentando a tese de doutorado de Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos, intitulada como *“A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do ensino fundamental a partir de uma prática problematizadora”*, defendida em 2015 junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade São Francisco. O objetivo da pesquisa foi compreender o que se revela em um trabalho pedagógico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, feito a partir da perspectiva da problematização, que busca desenvolver o pensamento probabilístico e o raciocínio combinatório por meio de uma articulação entre eles. A tese foi desenvolvida no Ensino Fundamental numa escola da rede pública. O trabalho seguiu as orientações de Christiansen e Walther (1986), que propõem três fases – apresentação, atividade independente e reflexão conclusiva, apoiando-se nos Ambientes de Aprendizagens. Na análise, a autora identificou que os

alunos possuem conceitos sobre combinatória e probabilidade e – ao se verem diante de uma proposta de ensino problematizadora. A autora utilizou para sua investigação 18 tarefas com foco na linguagem relacionada à combinatória e à probabilidade, bem como no raciocínio combinatório e no probabilístico. Assim, como um dos resultados apontados na tese, a autora destacou que “[...] tarefas e os ambiente de aprendizagem, levam à imbricação do raciocínio combinatório [...] permitindo a aprendizagem com compreensão”.

A análise dos trabalhos mencionados auxiliou-nos para a realização desse trabalho de pesquisa, pois trouxe aspectos positivos, como o estudo de referenciais teóricos da Modelagem Matemática, na metodologia trabalhada e reforçou a problematização, baseado na utilização da Análise Combinatória no Ensino Fundamental.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos a descrição dos métodos e procedimentos que utilizamos para desenvolver a pesquisa, e responder à questão de investigação: **“Quais são os desafios e potencialidades na inserção da Modelagem Matemática e Análise Combinatória no Ensino Fundamental?”**. Também caracterizamos a escola e os participantes da pesquisa. Para responder a essa pergunta de pesquisa procuramos atingir os seguintes objetivos:

- Identificar as ideias sobre Análise Combinatória que surgem dos processos de comunicação oral e escrita, evidenciados pelos diálogos e produção escrita.
- Detectar as potencialidades e desafios das atividades envolvendo Análise Combinatória realizadas no ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática.
- Identificar as estratégias utilizadas no desenvolvimento e resolução das questões propostas pelos estudantes durante as atividades realizadas no ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática.
- Procurar indícios de contribuição da Modelagem Matemática no desenvolvimento da aprendizagem, articulados com o pensamento combinatório nas atividades propostas.

Para alcançarmos os objetivos propostos nessa pesquisa, foi necessário buscarmos uma contextualização dos Ambientes de Aprendizagem Skovsmose (2000) e Modelagem Matemática presentes em trabalhos científicos. Além disso, estudamos livros didáticos do Ensino Médio referentes aos conteúdos de Análise Combinatória, adotados pela escola na qual realizamos as práticas. A partir desse estudo, elaboramos um Produto Didático associado a essa pesquisa, constituído pela coletânea de problemas de combinatória de questões de livros e de Olimpíadas de Matemática voltadas para a Análise Combinatória direcionados a estudantes da Escola Básica.

Realizamos uma pesquisa qualitativa, pois na análise consideramos elementos dinâmicos e subjetivos, a partir das concepções dos alunos nas atividades com

Modelagem Matemática e a Análise Combinatória. Baseado em Bogdan & Biklen (1994, p.16) e Lüdke e André (1986), a nossa fonte de coleta de dados envolveu registros em cadernos, imagens, conversas, notas de campo, fotografias e citações. Para Lüdke e André (1986) “A pesquisa qualitativa ou naturalista envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”. Também caracterizamos a pesquisa como exploratória, pois foi baseada e sustentada pelas cinco etapas mencionadas por Burak (2010): escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos mesmos e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e análise crítica das soluções. Dessa forma, de acordo com Burak (2010), a pesquisa exploratória deve acontecer de forma natural, orientada pelo simples desejo dos educandos em conhecer melhor o assunto.

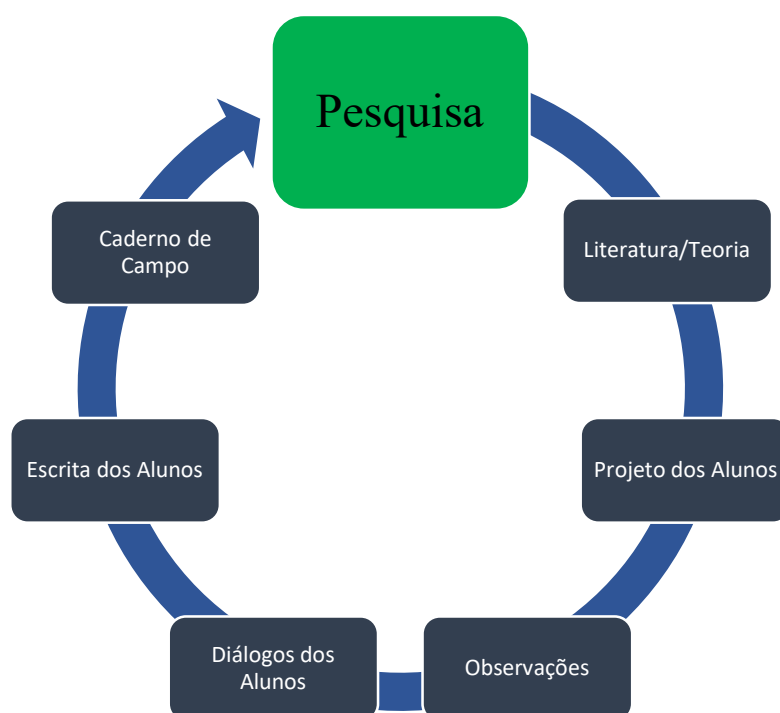
As atividades desenvolvidas na escola fazem parte da coleta de dados, tendo como objetos de pesquisa a inserção da Modelagem Matemática no contexto educacional das escolas, valendo-se de falas e escritas dos alunos. Além disso, o diário de campo e as observações feitas em sala de aula também fazem parte do material da coleta dos dados. Essas atividades foram realizadas dentro de um projeto desenvolvido junto a uma turma do 9º ano do ensino Fundamental de uma escola pública localizada em Porto Alegre / RS, cujo professor de matemática da turma é o autor dessa dissertação. Desenvolvemos um Ambiente de Aprendizagem de Modelagem matemática no qual, o conteúdo foi direcionado ao estudo dos PFC.

Por meio dos Termos de Consentimento (cópias no anexo B), convidamos os alunos para participarem das atividades: dos dez alunos dessa turma, quatro aceitaram o convite, mediante a entrega dos Termos com as devidas autorizações pelos responsáveis. Os demais alunos participaram das atividades, mas não consideramos seus trabalhos para as análises contidas nessa dissertação. Esse projeto foi desenvolvido durante as aulas, com duração de 10h, distribuídas em cinco encontros. Foram formadas duas duplas e cada dupla escolheu um tema para trabalhar. Dentre as duas duplas que entregaram os Termos de Consentimento, uma escolheu o tema “trechos de viagens de avião” e a outra “cardápios em uma pizzeria”. Todas as etapas foram orientadas pelo professor pesquisador.

De acordo com MIRANDA (2015, p. 64), o professor pesquisador traz benefícios tanto para a academia como para a sala de aula, “oferecendo nessa interação suporte para o professor na sala de aula e geração de conhecimento para a academia”,

pois problematiza no dia a dia o ensino. Portanto, a sala de aula é um ambiente de trocas, no qual o “professor aprende juntamente com os alunos e faz uma constante reflexão do seu papel”. Com base em Miranda (2015), apresentamos no esquema abaixo uma síntese sobre a pesquisa. Todas as etapas indicadas se comunicam, formando uma rede de informações que foram trocadas frequentemente e repensadas para o crescimento dessa pesquisa. Na figura abaixo, destacamos essas etapas da pesquisa.

Figura 5- Comunicações das etapas da pesquisa



Fonte: Própria.

3.1 Caracterização da Escola e dos Alunos

Para a realização das atividades práticas associadas a essa pesquisa, que permitiram a nossa coleta de dados, utilizamos um Termo de Compromisso pelo qual a direção da escola autorizou a realização das atividades. Este termo foi assinado pela direção, autor da pesquisa e orientador (cópia no anexo A).

A pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual Fernando Gomes localizada na cidade de Porto Alegre/RS. A escola foi fundada para atender as necessidades dos

moradores do bairro. Oferece Educação Infantil e Ensino Fundamental, Ensino Médio Politécnico e Educação de Jovens e Adultos (EJA). As propostas da escola são: oferecer à comunidade um ensino de qualidade que contribua para o desenvolvimento da autonomia responsável, do senso crítico e da criatividade para o exercício da cidadania; oportunizar e dar condições, nas diferentes etapas da Educação Básica, para que todos os sujeitos desenvolvam suas capacidades para a formação plena; educar para a transformação da realidade social, valorizando a vida e à dignidade humana, orientada pelo conhecimento e pela ética; orientar o sujeito para gestar e construir seu projeto de vida de forma responsável durante o seu percurso formativo; ensinar com vistas à aprendizagem e aos conhecimentos historicamente produzidos e socialmente válidos; e proporcionar aos estudantes instrumentos para a aprendizagem de valores e conhecimentos por meio de estimulação frequente.

O público alvo era formado por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental regular. Em relação à estrutura da escola, ela apresenta problemas, como salas pequenas, sem laboratórios e sem sala de informática. Outro ponto importante é que a maior parte dos alunos era repetente, e conseqüentemente com a maioria deles fora da idade padrão para o 9º ano do Ensino Fundamental regular. Os alunos que frequentavam a escola residem nos bairros Jardim do Salso, Vila Mato Sampaio, Vila Pinto, Vila Fátima, mas, principalmente, Bairro Bom Jesus. A comunidade, em geral, apresenta baixa escolaridade, atuando no comércio, indústria, prestação de serviços, serviços domésticos e coleta de materiais recicláveis.

3.2 Atividades Propostas

O ensino da Análise Combinatória em sala de aula, de acordo com Lima (2016) é, por vezes, com uso excessivo de fórmulas que, na maioria dos casos, podem ser substituídas pelo uso consciente das definições e dos Princípios Fundamentais. Assim, para Lima (2016), muitas vezes as fórmulas são apresentadas sem a existência de uma relação com o cotidiano dos estudantes. No entanto, de acordo com Skovsmose (2000), os professores devem evitar o uso demasiado de questões voltadas somente para matemática pura ou questões sem nenhuma contextualização com a realidade dos alunos. Desse modo, entendemos que a contextualização ligada à realidade, em especial dos alunos, se faz necessária no ensino, particularmente da Análise Combinatória.

Ao verificarmos as questões de quatro livros didáticos de épocas diferentes, mas dos mesmos autores, percebemos que a maioria das questões de Análise Combinatória estavam voltadas para a matemática pura. Diante disso, julgamos necessário buscar uma alternativa diferente ao encontrado nesses livros didáticos. Entendemos que a Modelagem Matemática favorece esse trabalho, pois parte de situações reais, por meio da pesquisa, tornando possível que os alunos participem ativamente de todo o processo, objetivando a construção do conhecimento matemático. Assim, concordamos com Burak (2005, p.12) que afirma “[...] a Modelagem continua a angariar adeptos pelas suas possibilidades metodológicas, pela visão da totalidade que proporciona em relação a um assunto, por envolver de forma natural e indissociável o ensino e a pesquisa.”.

Nosso objetivo ao trazer sugestões foi oportunizar aos alunos momentos para pensar sobre temas ligados à sua realidade, despertando o interesse de acordo com suas afinidades. Diante disso, a preocupação foi com a efetiva participação dos alunos no desenvolvimento das atividades. Seguindo as orientações que identificam o caso 3 de Modelagem Matemática Barbosa (2001), no qual o professor e os alunos se envolvem em todas as etapas das atividades propostas, as sugestões de temáticas foram colocadas à disposição dos alunos, e foram aprimoradas e alteradas de acordo com as discussões em realizadas em grupo. Os alunos perceberam que as atividades envolveriam temas do cotidiano, relacionados ao conteúdo de combinatória.

Portanto, mediante as sugestões, os alunos tiveram a liberdade para escolher temas de seus interesses para a pesquisa de campo e assim, juntamente com o professor, elaborarem perguntas para a investigação, o que está de acordo com (BARBOSA, 2001)

“Indagação e investigação são tidas como indissociáveis, pois uma só ocorre na mesma medida da outra”.

4 ATIVIDADES PRÁTICAS

As atividades tiveram duração de 10 horas, realizadas em três momentos distintos: o primeiro e o terceiro com duração de 3 horas, e o segundo com duração de 4 horas. No primeiro contato com os alunos, apresentamos os Termos de Consentimento e Assentimento, e suas finalidades. Em seguida, explicamos detalhadamente o projeto com cronograma, objetivos, conteúdo a ser trabalhado e sugestão de alguns temas de trabalho voltados à realidade. A intenção era que os alunos tomassem conhecimento da proposta e assim pensassem sobre outros problemas envolvendo os conteúdos no âmbito da realidade de acordo com seus interesses.

No primeiro momento, apresentamos as atividades e algumas sugestões de temas a serem trabalhados, por meio de pesquisas exploratórias e pesquisas de campo, a serem realizadas pelos alunos. Também incentivamos os participantes na busca de outros temas de seus interesses. Nessa etapa os alunos ficaram responsáveis pela elaboração de um roteiro de perguntas que estivessem alinhadas com o uso dos Princípios Fundamentais de Contagem, de acordo com o tema escolhido.

Assim, nos primeiros encontros, buscamos, por meio de conversa informal e debate, orientar os alunos para a coleta de dados. O objetivo da conversa informal foi a elaboração de questões sobre o tema escolhido. Nessa etapa, os alunos escolheram temas de acordo com seus interesses e afinidades, e o professor pesquisador orientou sugerindo temas que pudessem desencadear futuramente conteúdos ligados a Análise Combinatória. De acordo com Burak (2010) o interesse do grupo pela escolha do tema e a busca pela coleta de dados no local escolhido é uma das premissas da Modelagem Matemática e importante para a formação do estudante mais crítico. No primeiro momento o professor pesquisador explicou sobre o trabalho e sua importância no cotidiano e logo após sugeriu alguns temas e questionamentos. Essa fala inicial foi importante para o grupo entender o projeto e a importância dos Termos de Assentimento e Consentimento, bem como pensar em problemas ligados ao projeto, considerando, ou não, as sugestões dadas.

Com essas sugestões, esperávamos que os alunos percebessem a diversidade de temas que poderiam ser investigados, que buscassem outros temas ou o aperfeiçoamento das ideias sugeridas. Abaixo, listamos as sugestões de questionamentos propostos:

1) Pesquisa de cardápios em restaurantes:

- Preços de cada item (alimento)?
- Calorias de cada alimento?
- Valor total de calorias recomendado por nutricionistas?
- Quantas maneiras de elaborar um cardápio de acordo com as recomendações dos nutricionistas?
- De acordo com o seu dinheiro e suas preferências, quantas maneiras para escolher um cardápio?
- Elabore uma situação baseado nos dados obtidos.
- Quais as conclusões e fontes (sites, revistas, livros) utilizadas.

2) Pesquisa de transportes e trajetos em uma viagem

- Elabore trechos de viagem em época de férias – exemplo: Porto Alegre - Rio de Janeiro.
- Preços de passagem de ônibus e avião baseados em escalas/conexões?
- Qual a opção mais favorável em custo benefício?
- Total de maneiras para se chegar ao destino de acordo com os dados colhidos?
- Quais as conclusões e fontes (sites, revistas e livros) utilizadas?

3) Pesquisa sobre escolhas de livros na biblioteca da escola

- Quantos livros cada aluno pode pegar emprestado na biblioteca?
- Faça uma pesquisa com 10 alunos sobre a preferência(s) acerca da(s) disciplina(s) escolar(es).
- Escolha três alunos aleatoriamente que responderam à pesquisa.
- De acordo com a(s) preferência(s) de cada um, responda a seguinte questão: Quantas maneiras cada um pode escolher de acordo com os livros disponibilizados pela escola, observando o limite de empréstimos.
- Dê suas conclusões acerca da pesquisa. Quais foram as dificuldades?

4) Pesquisa sobre senhas de desbloqueio de celulares

- Quais os modelos de senhas utilizadas?
- Há pesquisas sobre o modelo mais utilizado? Apresente os dados.
- Você(s) confia(m) na senha que utiliza(m) no celular? Explique.
- Existe modelo mais confiável em relação a ter maior segurança? Apresente explicações.
- Se possível, quantas senhas existem em cada modelo? Dê exemplos.
- Há outras questões a mencionar sobre a pesquisa?
- Quais as conclusões e fontes (sites, revistas e livros) utilizadas?

O objetivo com os questionamentos foi provocar os alunos para a busca de seus interesses e afinidades e assim externarem suas ideias. Alguns alunos começaram a manifestar suas sugestões e o pesquisador assumiu o papel de mediador das discussões. No início o nervosismo e a timidez de alguns alunos se revelaram por meio das frases curtas, porém o pesquisador e os demais alunos auxiliaram a todo instante com perguntas e possíveis temas sugeridos. Assim, com essa estratégia os alunos trouxeram alguns temas novos e aperfeiçoaram os temas sugeridos pelo professor pesquisador. Os temas que as duas duplas participantes das pesquisas escolheram foram **“Trechos de viagens de avião”** e **“Cardápios numa pizzeria”**.

As pesquisas exploratórias foram realizadas no ambiente e local que os alunos se sentiram mais atraídos. O professor pesquisador orientou que as fontes das pesquisas fossem registradas, por meio de fotos e links de sites, por exemplo, pois a realidade deveria fazer parte da pesquisa. Diante disso, a elaboração de perguntas iniciais foi necessária para guiar as duplas de alunos. De acordo Burak (2010), essa etapa possibilitou a formação de um estudante mais atento, mais sensível às questões do seu objeto de estudo.

No segundo momento, o objetivo foi explicar o porquê do tema escolhido para os colegas da turma. Por meio de discussão e construção coletiva dos temas propostos, cada dupla escolheu o tema e foi analisado conjuntamente com a turma. As duplas pesquisaram segundo o roteiro da atividade estabelecido na etapa anterior, com o objetivo de responderem as perguntas elaboradas. De acordo com o tema escolhido, as duplas utilizaram diversos recursos para a aquisição dos dados. A dupla que pesquisou sobre preços e trechos de viagens de avião coletou dados em sites de companhias aéreas.

A dupla que pesquisou sobre os cardápios, coletou os dados em uma pizzaria. Durante a pesquisa, eles interagiram com as outras duplas e com o professor pesquisador.

No terceiro momento, cada dupla apresentou sua pesquisa com as questões e reflexões para a turma. De acordo com Burak (1998) a socialização e a interação da turma oportunizam maiores aprendizados acerca do conteúdo trabalhado, no nosso caso, os Princípios Fundamentais de Contagem, resultando numa análise crítica a respeito dos dados e questões apresentadas.

4.1 Descrição da Prática

Nessa seção, vamos descrever as práticas realizadas pelas duas duplas de alunos participantes da pesquisa. Assim, serão descritos os problemas, os locais das pesquisas exploratórias, os recursos utilizados pelos alunos para a coleta de dados e os objetivos de pesquisa de cada dupla.

Conforme apontado por meio da observação, a frequência de questões em quatro livros do Ensino Médio⁹, sobre os conteúdos de Análise Combinatória, concluímos que mais de 90% das questões de Análise Combinatória estavam voltadas para o campo da matemática pura e da semi realidade Skovsmose (2000). Assim emerge a necessidade de trabalharmos com a Análise Combinatória e Modelagem Matemática. De acordo com Barbosa (2001), as situações problemas levantadas pelos alunos ou pelo professor, devem estar ligadas à realidade, para que eles possam investigar e buscar soluções para seus questionamentos. Diante disso, direcionamos nossa pesquisa primeiramente para temas não-matemáticos voltados para a realidade, e depois os alunos formularam e resolveram problemas envolvendo os Princípios Fundamentais de Contagem. Eles também foram responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações problema. A utilização de perguntas antes e durante a coleta foi necessária, sendo que os alunos e o professor participaram ativamente em todas as etapas, de acordo com Barbosa (2001).

Para o desenvolvimento das atividades, seguimos as etapas propostas por Burak (2004): escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução

⁹“Matemática, 2: progressões, matrizes, progressões e Análise Combinatória, geometria- 2º grau. São Paulo:FTD,1992; Matemática: Uma nova abordagem, Vol.2: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000; Matemática Completa- 2. ed. renov. São Paulo: FTD, 2005; e 360º Matemática fundamental: Uma nova abordagem. 1º ed. São Paulo: FTD, 2015.

dos problemas; e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e crítica das soluções. As duplas de alunos seguiram com a pesquisa exploratória de acordo com o tema escolhido.

A primeira dupla, que pesquisou sobre *passagens aéreas*, escolheu os sites de empresas aéreas como fontes de dados. Os alunos foram incentivados a buscar os percursos de seus interesses, de maneira que fossem observadas as quantidades totais de maneiras para ir e voltar, por ocasião de uma determinada viagem. A segunda dupla decidiu trabalhar com cardápio de uma pizzaria da cidade.

Na resolução dos problemas e no desenvolvimento da matemática relacionada ao tema, esperávamos que os alunos interpretassem os problemas e aplicassem intuitivamente a matemática por meio dos Princípios Fundamentais de Contagem.

Na análise crítica, foram levantadas questões relativas à contagem de maneiras para realizar uma viagem por via aérea, observando os preços das passagens conforme a temporada das viagens, além de outros itens que eles julgassem pertinentes. Também foram elaboradas questões relativas à contagem de maneiras para escolher a quantidade de pizza e bebida, de acordo com o gosto e condições financeiras dos alunos.

4.3 REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

No trabalho de campo, os quatro alunos participaram do levantamento de informações. Assim, uma dupla ficou responsável pela pesquisa sobre passagens aéreas e a outra dupla sobre cardápio de uma pizzaria da cidade, com a finalidade de colherem informações importantes ao desenvolvimento das atividades. Os encontros aconteceram na escola, mediante a presença do pesquisador, que incentivava e mediava os debates.

Para a realização das atividades, seguimos as etapas propostas por Burak (2004): escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema; e crítica das soluções. As pesquisas exploratórias aconteceram por meio de sites de companhias aéreas e em uma pizzaria da cidade. Os alunos buscaram algumas respostas para os questionamentos levantados nos encontros anteriores.

No levantamento dos problemas, os alunos foram incentivados a pesquisar sobre as diferentes maneiras ou possibilidades de se fazer uma viagem de avião e de se alimentar em uma pizzaria.

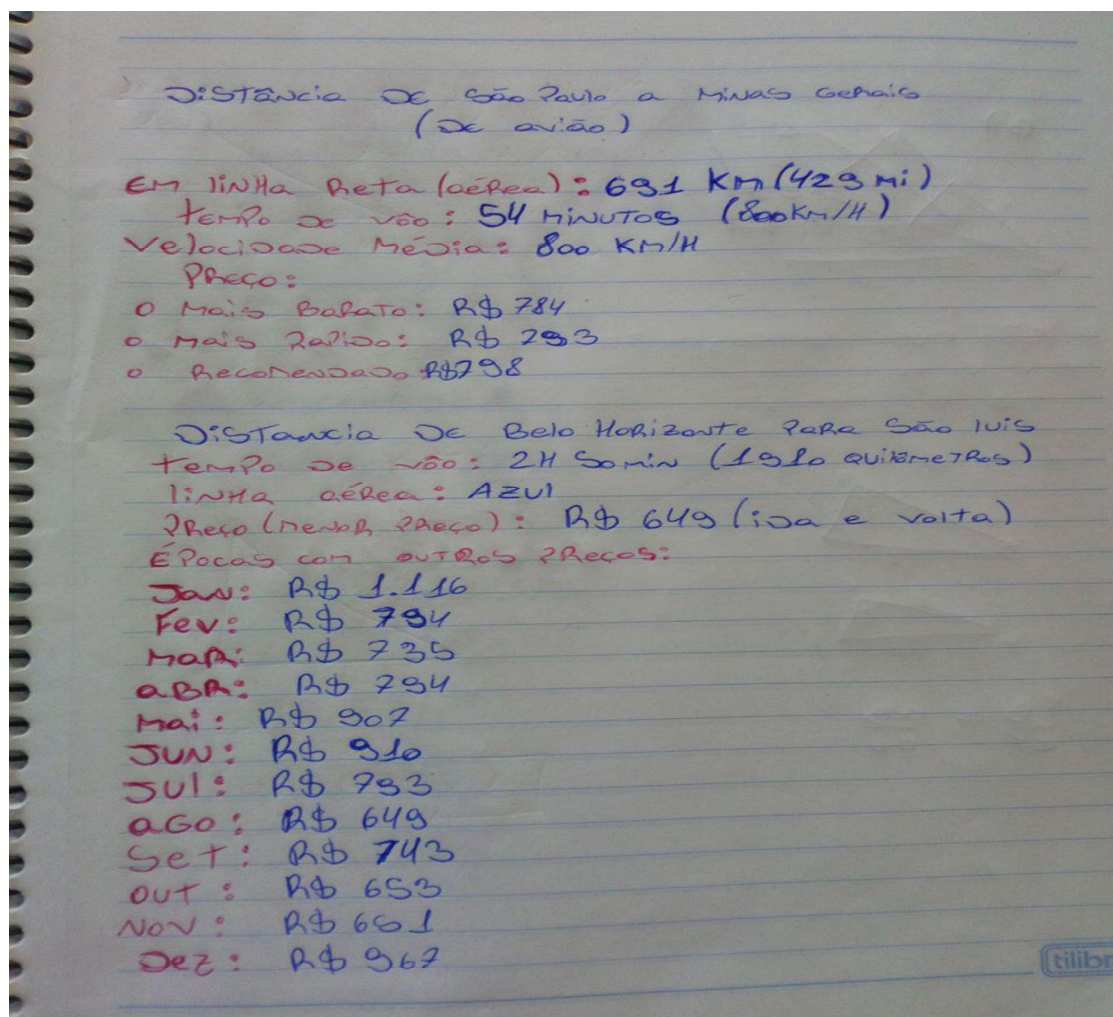
Na resolução dos problemas e no desenvolvimento da matemática relacionada ao tema, esperávamos que os alunos interpretassem a situação para chegarem ao uso da matemática como uma linguagem. Para a solução dos problemas propostos pelas duplas, utilizamos a árvore de possibilidades, descrita na seção 2.3 do referencial teórico. Nesse momento, eles puderam, por meio das discussões em sala de aula, aplicar os princípios aditivo e multiplicativo.

Na análise crítica, os alunos teceram comentários para responder às questões iniciais, como variedades, variação de preços conforme o dia da semana para passagens aéreas. A reflexão também foi realizada em relação à pesquisa acerca dos cardápios na pizzeria como os gostos e preferências, dentre outras indagações e questionamentos.

4.3.1 Dupla 1 - Passagens aéreas

Diante das sugestões propostas pelo professor pesquisador, os alunos sugeriram o tema sobre passagens aéreas, pois, tiveram como motivação uma viagem à casa de parentes, cujo trajeto foi feito de avião. Primeiramente, fizeram levantamentos sobre a distância e “temporadas de preços” durante o ano. O trecho escolhido foi de São Paulo a Minas Gerais, e o período de viagem foi o mês de junho de 2019. De acordo com a pesquisa, a distância de São Paulo a Minas Gerais é de 691 km, e o tempo de voo é, em média, de 54 minutos. Esses dados elaborados pela dupla de alunos podem ser observados na figura 6.

Figura 6- Registro da distância e preços das passagens- São Paulo a Minas Gerais



Fonte: própria.

Os dados coletados na pesquisa exploratória sustentam o levantamento dos problemas relativos ao tema. O pesquisador assumiu o papel de mediador, como podemos conferir nos diálogos reproduzido a seguir, posição evidenciada pelas questões direcionadas aos alunos, com o propósito de orientar. Assim, os alunos registraram os preços das passagens dos voos da companhia Azul, durante cada mês do ano de 2019, colocando em evidência o voo mais barato e o voo mais rápido. No passo seguinte, eles realizaram outros levantamentos de trechos de companhias aéreas e calcularam a quantidade de maneiras totais para a realização da viagem, fazendo uma melhor economia e utilizando os voos mais rápidos. Assim, eles escolheram as companhias Azul e Gol para coletarem os dados para a pesquisa, com os voos em determinadas datas de junho de 2019. Eles verificaram que, de São Paulo a Belo Horizonte, havia 4

voos da Azul e 5 voos da Gol, e para o retorno, de Belo Horizonte a São Paulo, 4 voos da Azul e 6 voos da Gol.

Após a coleta de dados, foram realizadas discussões com o objetivo de tratar os dados baseados nos conteúdos de Análise Combinatória. Nessa fase, o pesquisador, exercendo seu papel de mediador, auxiliou com sugestões visando à tomada de decisões e implementação de ações matemáticas relacionadas com a solução do problema. Sabemos que a partir das informações coletadas durante a pesquisa exploratória, vários conteúdos podem ser trabalhados, cabendo um direcionamento, em especial, por parte do professor (nesse caso analisado, ênfase aos Princípios Aditivo e Multiplicativo).

Ao trabalharmos com os Princípios Fundamentais de Contagem, podemos levantar muitas questões a partir dos dados coletados sobre passagens aéreas de São Paulo a Belo Horizonte. Dentre as diversas situações a serem exploradas, surgiu como exemplo a seguinte questão: *Quantas são as maneiras, no total, para ir e voltar de São Paulo a Belo Horizonte?* Para resolver o problema a dupla fez a contagem de todas as possibilidades de ida e de volta, utilizando o Princípio Aditivo e Multiplicativo. Para incentivar os alunos a pensarem nas diferentes opções de se deslocarem, o pesquisador, assumiu a mediação, sugerindo aos alunos a construção de uma “árvore de possibilidades”, com as opções dos voos de ida e de volta.

A resolução do problema e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema, foram realizadas por meio de discussões em sala de aula sobre quantas são as maneiras que temos para ir e voltar de São Paulo a Belo Horizonte, respeitadas as condições impostas (voos das companhias Azul e Gol). Basicamente, o conteúdo matemático usado foram os Princípios Fundamentais de Contagem.

4.3.2 Dupla 1 – Diálogos e Análise da prática

A seguir, apresentamos alguns trechos dos diálogos entre os alunos e o pesquisador. Para isso, com o propósito de resguardar as identidades dos alunos envolvidos na pesquisa, vamos nos referir aos alunos da dupla que fez a pesquisa por “Aluno A” e por “Aluno B”, e aos outros dois alunos que também participaram das discussões, por “Aluno C” e por “Aluno D”. Em todos os diálogos, identificamos o professor pesquisador por “Pesq.”. Para expor o tema aos demais colegas, a dupla apresentou o trabalho na lousa.

- (1) *Pesq.:* O que vocês fizeram?
- (2) *Aluno A:* Comecei a pesquisar o trajeto de São Paulo a Belo Horizonte.
- (3) *Pesq.:* Quantas pessoas?
- (4) *Aluno A:* 4 Passageiros. Na classe econômica.
- (5) *Pesq.:* Qual o dia pesquisado?
- (6) *Aluno B:* Indo na terça-feira, 18 de junho e voltando dia 25 de junho.
- (7) *Aluno A:* Pesquisamos primeiro na Azul (Companhia Aérea).
- (8) *Pesq.:* Quantos voos de ida na Azul?
- (9) *Aluno A:* Quatro voos.
- (10) *Pesq.:* Anota essa informação.

Nesse momento, a dupla começou a anotar na lousa as informações que foram coletadas na pesquisa.

- (11) *Aluno A:* Também seis voos de ida na promoção na Gol (Companhia Aérea).
- (12) *Pesq.:* E para voltar, quantos voos de cada Companhia?
- (13) *Aluno B:* Da Azul tinha quatro voos, e da Gol tinha cinco voos.
- (14) *Pesq.:* Agora a pergunta: Quantas maneiras eu tenho pra ir e voltar no total? Quantas opções eu tenho pra ir?
- (15) *Aluno C:* Pra ir tem quatro.
- (16) *Pesq.:* Só quatro? Na Azul tenho quantas opções? e na Gol?
- (17) *Aluno D:* Quatro na Azul e seis na Gol.
- (18) *Aluno C:* Então na volta de Belo Horizonte a São Paulo são quatro na Azul e cinco na Gol.
- (19) *Pesq.:* Quantas maneiras têm para fazer a Viagem de Belo Horizonte a São Paulo (ida e volta)?
- (20) *Aluno D:* É só somar.
- (21) *Pesq.:* Então é só somar os voos? O que vocês acham?
- (22) *Aluno C:* São 19, pois $4+5+5+4+6$ é 19.
- (23) *Aluno A:* Eu somaria.
- (24) *Pesq.:* Vamos tomar como exemplo os próprios voos. A Azul tem quantos voos de ida e volta de São Paulo a Belo Horizonte?
- (25) *Aluno B:* Quatro voos de ida e quatro voos de volta.

(26) *Pesq.: Identifiquem cada voo, utilizando uma árvore de possibilidades, tanto de ida como de volta. Nomeiem também cada voo.*

(27) *Aluno A: Vou chamar os voos de ida de A_1, A_2, A_3 e A_4 . Os voos de volta de V_1, V_2, V_3 e V_4*

Na fala (22) notamos que o Aluno C fez uma simples operação de soma, sem empregar, antes, o Princípio Multiplicativo. Baseado em Araújo e Barbosa (2005), o aluno considera os parâmetros da prática escolar, mas não deixa de considerar suas demais experiências. Pois o Princípio Aditivo é muito utilizado em situações do dia a dia envolvendo dinheiro. Nesse momento todos os alunos concordaram. Assim a dupla foi orientada a utilizar a árvore de possibilidades.

(28) *Pesq.: Escolham um voo de ida.*

(29) *Aluno C: Tem que ser na ordem?*

(30) *Pesq.: Qualquer um. Quantas maneiras se tem para ir de Azul e voltar de Azul?*

(31) *Aluno B: 8 maneiras.*

(32) *Pesq.: Se ele for de A_1 , quantas opções terá para voltar?*

(33) *Aluno A: Quatro. De V_1, V_2, V_3 e V_4 .*

(34) *Pesq.: Vamos ver se esse vai continuar nesse raciocínio. Se ele escolher ir no segundo voo A_2 , ele pode voltar em quantas opções?*

(35) *Aluno B: Quatro voos. De V_1, V_2, V_3 e V_4 .*

(36) *Pesq.: Até agora, são quantas opções?*

(37) *Aluno D: 8 opções.*

(38) *Pesq.: Ok. Lembrando que o colega disse 8 maneiras no total. Muitos têm essa linha de raciocínio, que é somar simplesmente, sem nenhum critério. O que temos até agora é se ele for A_1 temos 4 opções para voltar e se irmos de A_2 temos mais quatro opções. E agora temos quantas maneiras totais para ir de Azul e voltar de Azul?*

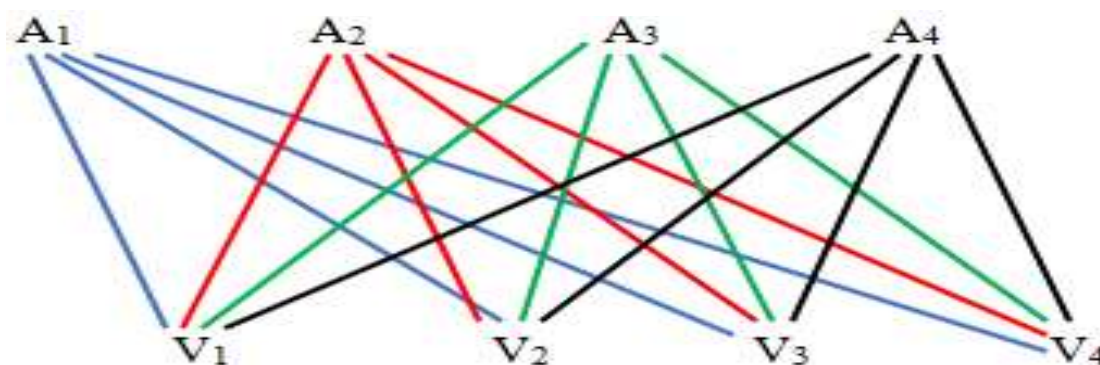
(39) *Aluno C: 16 maneiras. Pois vai ficar quatro vezes quatro, pois é quatro voos de ida e quatro voos de volta.*

(40) *Aluno A: E assim também para o A_3 e A_4 . Indo de Azul e Voltando de Azul ele terá $4+4+4+4= 16$ maneiras*

(41) *Pesq.: Exatamente. Pois a escolha dos voos de ida, não interfere na escolha dos voos de volta. Isso é chamado de eventos independentes.*

Na fala (26), foi sugerido para que os alunos fizessem a árvore de possibilidades, bem como a identificação de cada voo. De acordo com o Aluno A na fala (28), eles decidiram chamar os quatro voos de ida da azul de A_1, A_2, A_3 e A_4 e os quatro voos de volta da azul de V_1, V_2, V_3 e V_4 . Com o uso da árvore de possibilidades, que foi desenhada na lousa, no momento da resolução da questão, chegamos à solução, como podemos observar nas falas (39) e (40). Abaixo, apresentamos uma cópia ilustrativa da árvore que os alunos construíram na lousa.

Figura 7- Indo de Azul e Voltando de Azul



Fonte: própria.

Assim foi feito pelo aluno C, com ligações de acordo com as escolhas de ida e volta.

Dando continuidade ao raciocínio.

(42) *Pesq.:* Agora se a pessoa for só de Gol e voltar de Gol, quantas maneiras no total?

(43) *Aluno D:* Dá onze.

(44) *Pesq.:* Tem quantos voos para ir e quantos para voltar?

(44) *Aluno A:* Seis para ir, e cinco para voltar.

(45) *Aluno C:* Onze!? É somar?

(46) *Aluno A:* É 30. Pois tem seis vezes cinco.

(47) *Aluno C:* Não era somar?

(48) *Aluno B:* Não. É o mesmo raciocínio da questão anterior (referindo-se a ir e voltar pela Azul).

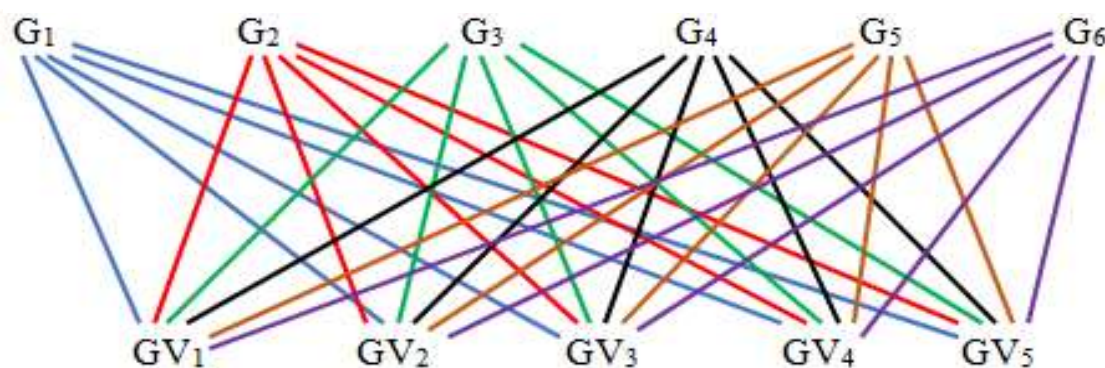
(49) *Pesq.:* Na árvore de possibilidades foi chamado os voos da Gol de ida de G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6 ; os voos da Gol de volta de GV_1, GV_2, GV_3, GV_4 e GV_5 .

(50) *Aluno D:* Ah, então pode ser também $5+5+5+5+5+5 = 30$ maneiras!?

(51) *Pesq.:* Sim. Como anteriormente fizemos de Azul para Azul que tinha quatro voos de ida e quatro voos de voltar, resultando em 16 maneiras. E agora de Gol para Gol, 6 voos de ida e 5 de volta, resultando em 30 maneiras.

Assim foi calculado o número de possibilidades de passagens aéreas de São Paulo a Belo Horizonte, indo e voltando pela Gol. Por meio das discussões, os alunos conseguiram fazer a construção da árvore de possibilidades (conforme podemos ver na figura 8). Nomeando os seis voos de ida de G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6 os cinco voos de volta de GV_1, GV_2, GV_3, GV_4 e GV_5 , de acordo com a fala (49) e utilizando os princípios multiplicativo (fala 46) e aditivo (fala 50), foi construída a árvore de possibilidades, representada na figura 8.

Figura 8- Indo de Gol e voltando de Gol



Fonte: própria.

Dando continuidade ao diálogo:

(52) *Pesq.:* Qual o próximo passo?

(53) *Aluno A:* Calcular também outras maneiras.

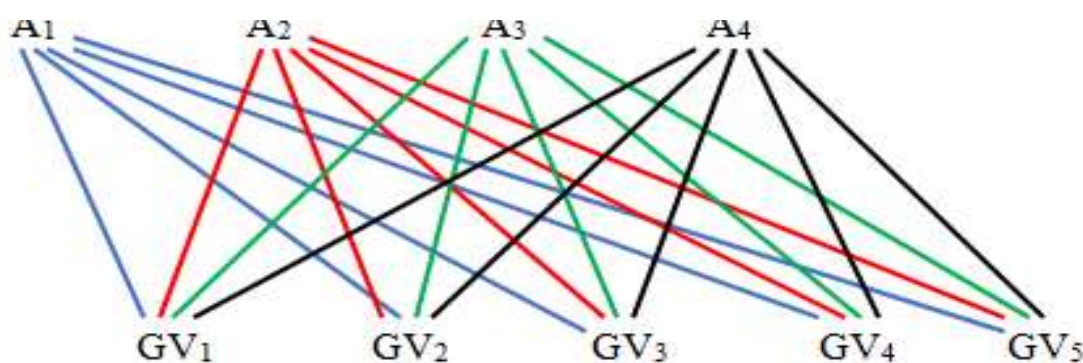
(54) *Aluno C:* Agora indo de azul e voltando de Gol.

(55) *Pesq.:* Então vamos lá, quantas maneiras a pessoa terá indo de Azul e voltando de Gol?

(56) Aluno A: Para ir de azul é 4 opções, e 5 para voltar de Gol, então 4 vezes 5 é igual a vinte.

Os alunos deram continuidade ao raciocínio, de maneira que o aluno A respondeu de acordo com a fala (56) que teria 20 maneiras de ir pela Azul e voltar pela Gol. Foi feita posteriormente a árvore de possibilidades (Figura 9). Como antes, os voos de ida pela companhia Azul foram representados por A_1, A_2, A_3 e A_4 e os voos de volta da Gol, por GV_1, GV_2, GV_3, GV_4 e GV_5 , como podemos observar na da árvore de possibilidades representada na figura abaixo.

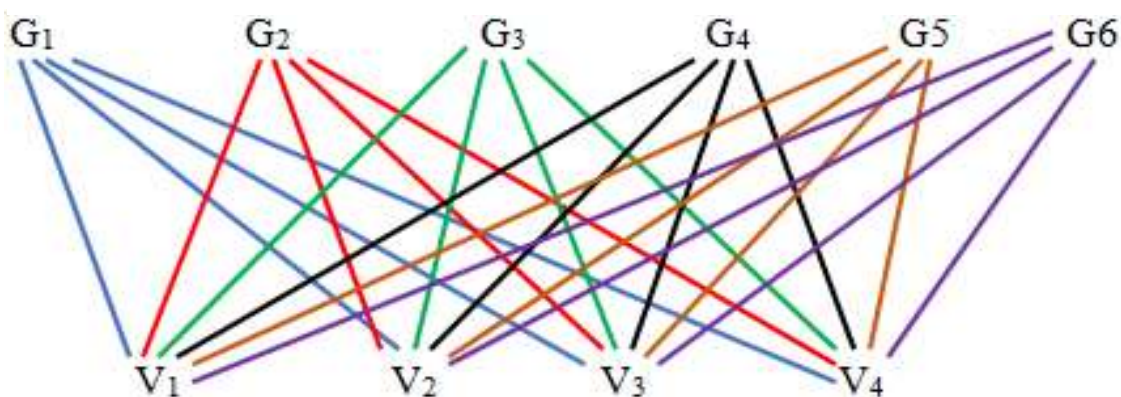
Figura 9- Indo de Azul e voltando de Gol



Fonte: própria.

Utilizando a mesma ideia, os alunos concluíram que para ir pela Gol e voltar pela Azul são 24 maneiras diferentes, pois temos 6 voos da Gol (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6) de ida e 4 voos de volta da Azul (A_1, A_2, A_3 e A_4), conforme a árvore de possibilidades representada na figura 10.

Figura 10- Indo de Gol e voltando de Azul



Fonte: própria.

Nos diálogos, a seguinte pergunta foi respondida: “Quantas são as maneiras que eu tenho pra ir e voltar no total?”. Posteriormente os alunos foram indagados sobre se teríamos outras opções para fazer o cálculo, sem o uso da árvore de possibilidades.

(57) *Pesq.: Quantas maneiras no total?*

(58) *Aluno B: Agora são só somar $16+30+20+24 = 90$ maneiras.*

(59) *Pesq.: Teria outra maneira para fazer esse cálculo? Vamos pensar!*

(60) *Aluno D: Não vejo outra forma.*

(61) *Aluno B: Somando professor!*

(62) *Aluno A: Já sei.*

(63) *Pesq.: Como?*

(64) *Aluno A: $4.4=16$, $5.4=20$...*

(65) *Pesq.: Mas isso já foi feito.*

(66) *Aluno A: Assim chego no resultado.*

(67) *Pesq.: Mas depois? tem que somar?*

(68) *Aluno A: Sim. Tem que somar.*

(69) *Pesq.: Vamos encontrar o quebra-cabeça desse problema. Primeiramente fizemos as maneiras de: Azul para Azul que é $4.4=16$; Gol para Gol que é $6.5= 30$; Azul para Gol que é $4.5= 20$, e de Gol para Azul que é $4.6=24$. Como podemos fazer de maneira mais rápida? Vamos pensar em outra maneira para fazermos o cálculo.*

(70) *Aluno D: Multiplicando!*

(71) *Aluno A: Sim. 10 opções para ir, e 9 para voltar. Só multiplicar $9 \times 10 = 90$ maneiras.*

(72) *Pesq.: Se os colegas tivessem pesquisado em mais companhias Aéreas, o que aconteceria?*

(73) *Aluno B: Aumentaria a quantidade de voos, e as maneiras de fazer a viagem.*

(74) *Pesq.: Então isso quer dizer que a escolha de ida não interfere na escolha de volta, pois são eventos independentes.*

Logo após, a dupla apresentou os preços das passagens aéreas, e registramos aqui alguns diálogos:

(75) *Pesq.: O que podemos concluir?*

(76) *Aluno D: Tudo é caro (referência aos preços das passagens apresentadas).*

(77) *Aluno A: Que as passagens mais baratas para fazer a viagem era na Gol. Além de aprender agora o número maneiras totais. Também aprendi que temos que pesquisar, pois geralmente as agências de viagens vendem passagem acima do preço.*

Inicialmente, de acordo com os primeiros diálogos, os alunos falaram que teríamos 19 maneiras para ir e voltar de São Paulo a Belo Horizonte, utilizando voos das companhias Azul e Gol. Porém foram indagados e incentivados a escrever passo a passo, relacionando primeiramente as possibilidades usando apenas voos da Azul, para ida e volta. Continuando nesse processo descobriram que a quantidade de maneira iria além do que eles imaginavam. Por meio da árvore de possibilidades relacionaram os voos de cada companhia de ida com os de volta e ao final somaram as quantidades fala (58). Após, perguntei se teria outras maneiras para fazer o cálculo, e os alunos foram tentando relacionar os voos de ida com os voos de volta. Por meio de tentativas e erros relacionado ao pensamento combinatório, descobriram que teria 9 voos para ir e 10 voos para voltar e concluíram que no total teriam $9 \times 10 = 90$ maneiras no total, de São Paulo a Belo Horizonte, fala (71).

A atividade foi desenvolvida seguindo as etapas propostas por Burak (2010), que auxiliaram os alunos na tomada de decisão. Por meio do interesse dos alunos, houve a escolha do tema, que não foi sugerido pelo professor pesquisador. A pesquisa exploratória se deu em um ambiente ligado à realidade do aluno, com o tema de pesquisa relacionado ao cotidiano que é vivido por um aluno da dupla, que todo ano, no período de férias, realiza viagens aéreas de São Paulo a Minas Gerais.

Por meio das etapas propostas por Burak (2010), houve o momento na pesquisa que os alunos investigaram, desde os preços das passagens, as companhias aéreas e a quantidade de maneiras para a realização do trecho escolhido. Assim, a atividade culminou na resolução do problema proposto e a análise crítica trouxe resposta que os alunos não imaginavam existir. Comparando a resposta do diálogo inicial, quando todos os alunos concordaram com a afirmação do Aluno B: “São 19, pois $4+5+5+4+6$ é 19”. Ele afirmou que para determinar a quantidade total de maneira, era só somar a quantidade de voos de ida e volta. Depois de todo o processo de construção, com o uso

dos PFC, chegaram à conclusão correta, como podemos conferir na fala do Aluno A: “*Sim. 10 opções para ir, e 9 para voltar. Só multiplicar $9 \times 10 = 90$ maneiras*”.

De acordo com Barbosa (2001), há três casos para atividades de Modelagem Matemática, de acordo com o envolvimento dos alunos e do professor (Figura 1). No início, pretendíamos trabalhar com o caso 2, no qual somente o professor elabora a situação problema. Porém, o trabalho seguiu de acordo com o tema escolhido pelos alunos, com o auxílio do professor, caracterizando com uma atividade do caso 3 de Modelagem Matemática Barbosa (2001). No início os alunos começaram fazendo levantamentos sobre os tópicos, porém ainda não tinham uma ideia clara de como proceder. Isso foi evidenciado no início da pesquisa, quando eles fizeram o levantamento da distância e a quantidade de horas que de um voo de São Paulo a Minas Gerais, não focando nas possibilidades de voos das companhias aéreas. A associação da matemática com o mundo real para Barbosa (2001) é uma fonte rica para o ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula.

[...] oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. (BARBOSA, 2001, p. 05).

Observamos que a simplificação do problema proposto, a elaboração e pesquisa do tema, foram realizadas pelos alunos, sob a orientação do professor, caracterizando o caso 3 Barbosa (2001). A resolução como evidenciada nos diálogos acima mostrou que os alunos estavam com uma visão equivocada em relação à quantidade total, pois afirmaram que seriam 19 maneiras e, após o desenvolvimento da atividade, concluíram que são 90.

As atividades desenvolvidas oportunizaram o aprendizado por meio das discussões em um Ambiente de Aprendizagem Skovsmose (2000) ligado à realidade dos alunos, por meio de um tema não matemático. De acordo com as pesquisas iniciais dos alunos, percebemos que o interesse da dupla avançava, pois apresentavam várias dúvidas, como a escolha de possíveis temas. Após a escolha do tema, trouxeram dados de passagens aéreas, como escalas e comparações de preços de companhias aéreas pesquisadas, conforme na figura 6. De acordo com os encaminhamentos que foram sugeridos, a dupla apresentava questionamentos a respeito do tema escolhido, na medida em que estavam fazendo a coleta de dados.

As atividades desenvolvidas com os alunos seguindo as etapas propostas por Burak (2010) propiciaram um Ambiente de Aprendizagem voltado para um Cenário de Investigação Skovsmose (2000), pois o tema trabalhado pela dupla estava inserido no contexto da vida de um dos alunos da dupla, despertando o interesse sobre a temática (passagens aéreas). A interação do professor pesquisador e dos alunos se deu por meio do caso 3 de Modelagem Matemática Barbosa (2001), pois em todas as etapas, ambos se envolveram no trabalho desenvolvido, por meio de sugestões: dos temas; da melhoria nas coletas de dados - focar em um problema envolvendo viagens aéreas entre dois Estados brasileiros; e fazer o registro das escalas das companhias aéreas. Assim, os alunos fizeram toda a parte da pesquisa exploratória sob a orientação do professor pesquisador.

As discussões entre os alunos e o professor pesquisador permitiram a criação de um Ambiente de Aprendizagem de Modelagem Matemática caracterizando um Cenário para Investigação, baseado em problemas reais e, a partir deles, refletimos sobre as possíveis soluções. A aprendizagem por meio da interação do aluno-aluno e aluno-professor contribuiu para as discussões na etapa final do projeto, como o cálculo de maneiras para se realizar as viagens de acordo com os dados coletados. Assim, os alunos foram protagonistas da sua aprendizagem, desde o momento da pesquisa exploratória até as discussões dos dados levantados pelos alunos sob a orientação do professor. As contribuições do professor pesquisador em sala de aula, dando total apoio e incentivo para a realização das atividades, foram úteis para um maior desempenho nas pesquisas realizadas, para a experiência vivenciada e para os relatos colhidos.

Os resultados apontam que o ambiente de Modelagem Matemática - caso 3 Barbosa (2001), construído para trabalharmos com os Princípios Fundamentais de Contagem, seguindo as etapas propostas por Burak (2010) em uma atividade de Modelagem Matemática, possibilitou aulas mais participativas, de forma que os alunos puderam esclarecer dúvidas acerca do projeto, melhorar a coleta de dados, e contribuir para a autonomia do aluno no processo da aprendizagem e na construção do conhecimento.

A análise crítica da solução, de acordo com Burak (2004), ocorre durante o processo de resolução dos problemas. Nas falas (20) a (22) os alunos apresentam a solução como uma simples soma, para combinar os voos de ida e volta de São Paulo a Belo Horizonte. No entanto durante o processo de resolução envolvendo a criação de árvores de possibilidades, questionamentos e dúvidas, os alunos perceberam que a

utilização dos princípios multiplicativo e aditivo era necessária. Todas essas ferramentas inseridas no contexto da Modelagem Matemática contribuíram para a mudança de percepção e de caminhos que inicialmente os alunos estavam trilhando, contribuindo para análise crítica dos resultados Burak (2004), como vemos nas falas (42) a (46); (70) a (73) e (75) a (77). Essas falas revelam uma argumentação lógica, adquiridas durante a atividade e a interação dos alunos com o pesquisador. Concordamos com Burak e Klüber (2013, p. 48), que afirmam que “Na perspectiva em foco, as discussões promovem momentos de interação, relativos à Matemática, método, linguagem, conteúdos, exequibilidade, não apenas matemática, mas no contexto da realidade estudada”. Assim, respeitamos as etapas proposta por Burak (2004 e 2010), e o trabalho foi desenvolvido em um ambiente de Modelagem Matemática segundo Barbosa (2001), com a escolha do tema de acordo com o interesse dos alunos. Destacamos os seguintes resultados obtidos: a promoção de discussões referentes a problemas envolvendo os PFC para sua resolução; a contribuição para que os estudantes “encontrassem o caminho”, sem que o pesquisador revelasse o mesmo e conseqüentemente os alunos “apenas” copiarão a resposta; a possibilidade de resolução de problemas de contagem sem a utilização de fórmulas; a reflexão acerca dos custos das passagens aéreas; e o desenvolvimento de competências necessárias para o trabalho em grupo.

As respostas apresentadas pelos alunos, antes do professor pesquisador indicar o uso da árvore de possibilidades, estavam divergentes umas das outras. Após a utilização da árvore de possibilidades, os estudantes conseguiram uma associação entre os voos de ida e volta, ou seja, eles resolveram o problema proposto, trabalhando com os conceitos envolvidos nos Princípios Fundamentais de Contagem, sem a utilização de fórmulas prontas.

Dentre as potencialidades esperadas para essa atividade, destacamos o desenvolvimento de estratégias, em especial o uso da árvore de possibilidades, que permitiu o avanço, por parte dos alunos, em relação ao entendimento dos diversos tipos de problemas. De acordo com a discussão teórica trazida na parte inicial dessa dissertação, acreditamos que os estudantes desenvolvem melhor compreensão acerca dos problemas propostos, quando os mesmos estão ligados às atividades vividas no cotidiano, em especial, problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Destacamos que o maior desafio para o grupo ao trabalhar com o tema escolhido, foi a exigência de conhecimentos acerca dos Princípios Fundamentais da Contagem, sendo que constatamos uma razoável familiaridade com uso do princípio multiplicativo, mas o uso

maior do princípio aditivo na atividade foi desafiador. Assim, acreditamos que a atividade proposta contribuiu para que trabalhássemos em um ambiente de aprendizagem para investigação Skovsmose (2000).

4.3.3 Dupla 2 – Cardápio numa pizzaria

Diante das sugestões propostas pelo professor pesquisador, os alunos da segunda dupla sugeriram o tema relacionado com o cardápio de uma pizzaria da cidade. Eles justificaram a escolha do tema como sendo um local que eles frequentavam. Após a escolha do tema, a dupla coletou o cardápio da pizzaria frequentada e o compartilhou com os colegas e o professor, como podemos ver na figura 11.

Para realizar essa pesquisa, a dupla fez um estudo de um cardápio de uma pizzaria da cidade, que é frequentada pelos alunos envolvidos no processo. Segundo Burak (2010), a pesquisa exploratória ocorre de maneira natural pelo simples querer dos alunos em entender melhor o assunto. Assim como na atividade do Grupo 1, descrita acima, inicialmente o professor pesquisador deixou a dupla de alunos livres para explorarem sobre o cardápio de uma pizzaria. O pesquisador assumiu o papel de mediador na verificação e discussões com os alunos nos encontros em sala de aula, mencionou algumas questões para orientar os alunos, uma vez que o objetivo estava em trabalhar os Princípios Fundamentais de Contagem.

Os dados coletados na pesquisa exploratória sustentaram o levantamento dos problemas relativos ao tema. O pesquisador contribuiu para as discussões, entre e com os alunos, ajudando-os a desenvolver sua autonomia, bem como a formação do espírito crítico, conforme afirma Burak (2010).

Após a coleta de dados na pizzaria, um novo debate foi promovido com o objetivo de discutirmos o que poderia ser feito com as informações coletadas. Nessa etapa, o pesquisador exercendo seu papel de mediador, mais uma vez pode auxiliar com sugestões visando a tomada de decisões, bem como a implementação de ações matemáticas. Sabemos que a partir da coleta de dados a pesquisa exploratória poderia envolver diversos assuntos matemáticos, porém o pesquisador enfatizou o conteúdo de Análise Combinatória, dando ênfase aos princípios Aditivo e Multiplicativo, levantando algumas questões acerca dos cardápios oferecidos pela pizzaria. Dentre as opções que

surgiram, destacaremos como exemplo a seguinte situação: “De acordo com o cardápio da pizzaria, quantas são as maneiras para escolher uma pizza? E se tiver que escolher uma pizza e uma bebida?”.

Para incentivar os alunos a pensarem nas diferentes opções de escolha, o pesquisador sempre assumiu o papel de mediador, sugerindo aos alunos a construção de uma “árvore de possibilidades”, com a qual mostrou algumas opções para compor as escolhas. No cardápio havia informações sobre preços, tipos de pizzas e bebidas, bem como os ingredientes de cada tipo de pizza. Na Figura a seguir vemos o cardápio com 22 tipos de pizzas e 11 tipos de bebidas, sendo que cada pizza custava R\$ 11,99 e as bebidas com preços variados, com uma taxa de R\$ 3,00 para a tele entrega.

Figura 11- Cardápio da pizzaria



**PIZZA GRANDE – 8 FATIAS
(BORDAS RECHEDAS)**
Qualquer sabor por R\$ 11,99

1. MISTA – (Molho, mussarela, presunto)
2. MUSSARELA- (Molho, mussarela)
3. 2 QUEIJOS - (Molho, mussarela, catupiry)
4. CALABRESA - (Molho, mussarela, calabresa, cebola)
5. BACON - (Molho, mussarela, bacon)
6. FRANGO – (Molho, mussarela, frango, milho)
7. MARGUERITA - (Molho, mussarela, tomate, manjericão)
8. CHEDDAR - (Molho, mussarela , cheddar)
9. CALABRESA PREMIUN - (Molho, mussarela, calabresa, bacon)
10. FRANGO CATUPIRY - (Molho, frango, catupiry, milho)
11. FRANGO COM CHEDDAR – (Molho, frango, cheddar, milho)
12. FRANGO COM BACON - (Molho, mussarela, frango, bacon)
13. CARNE DO SOL - (Molho, mussarela, carne do sol, cebola)
14. CARNE DO SOL CATUPIRY - (Molho, carne do sol, catupiry, cebola)
15. NORDESTINA - (Molho, mussarela, carne do sol, ovo, milho)
16. PORTUGUESA- (Molho, mussarela, presunto, ovo, pimentão, tomate)
17. BAIANA - (Molho, mussarela, calabresa, pimenta, ovo, cebola)
18. PAULISTA - (Molho, mussarela, bacon, catupiry, milho)

19. MODA CENTER PIZZA - (Molho, mussarela, presunto, carne, calabresa, cebola, milho, azeitona)
20. BANANA – (Leite condensado, banana, canela)
21. BRIGADEIRO – (Leite condensado, chocolate, granulado)
22. M e M – (Leite condensado, chocolate, m e m)

BEBIDAS

<input type="checkbox"/> Água mineral	2,00
<input type="checkbox"/> Reiri Indaiá 1 L	5,00
<input type="checkbox"/> Guaraná Antártica 1L	6,00
<input type="checkbox"/> Pepsi 1 L.....	6,00
<input type="checkbox"/> Coca Retornável 1 L	6,00
<input type="checkbox"/> São Geraldo 1 L	8,00
<input type="checkbox"/> Reiri indaiá 2 L	7,00
<input type="checkbox"/> Coca Retornável 2 L	10,00
<input type="checkbox"/> Suco Acerola	5,00
<input type="checkbox"/> Suco Maracujá	5,00
<input type="checkbox"/> Suco Cajá	5,00

TAXA DE ENTREGA – R\$ 3,00

AGRADECEMOS A PREFERÊNCIA, DEUS OS ABENÇOE!

Fonte: divulgação Center Pizza, 2019.

No início das discussões da dupla, antes que eles definessem a sua questão de pesquisa, professor pesquisador instigou os alunos por meio de perguntas, como “Quais são os sabores preferidos?”, “Quantos tipos de pizzas há neste cardápio?” e “quantos são os tipos de bebidas?”. As sugestões iniciais serviram, em especial, para que os

outros alunos, que não coletaram os dados, se situassem e interagissem, observando o cardápio. Diante das indagações os alunos foram respondendo e assim a discussão acerca do tema foi realizada, com a definição da pergunta de pesquisa da dupla 2: “Quantas são as maneiras para escolher uma pizza e uma bebida?”.

4.3.4 Dupla 2 – Diálogos e Análise da prática

Nessa seção apresentamos alguns trechos dos diálogos acerca da pesquisa da segunda dupla, e faremos uma análise dessa atividade.

Novamente, com o propósito de resguardar as identidades dos alunos envolvidos na pesquisa, vamos nos referir aos alunos que fizeram a pesquisa por Aluno C e Aluno D e aos outros dois alunos, da Dupla 1, que também participaram das discussões, por Aluno A e de Aluno B. Em todos os diálogos, identificamos o professor pesquisador por “Pesq.”. Para expor o tema aos demais colegas, a dupla apresentou o trabalho na lousa.

(1) Pesq.: Temos quantos modelos de pizzas?

(2) Aluno C: Vinte e duas.

(3) Pesq.: Quantas bebidas?

(4) Aluno C: Onze.

(5) Pesq.: Quais são as pizzas preferidas por vocês?

(6) Aluno D: Calabresa e portuguesa, são boas.

(7) Aluno C: De queijo.

(8) Aluno B: Calabresa, bacon e frango.

(9) Aluno C: A paulista tem muçarela, bacon e catupiry.

(10) Aluno D: frango com catupiry é bom.

Nesse primeiro momento, os alunos externaram seus gostos por determinados sabores de pizzas. Com intuito que lessem cada composição dos ingredientes e preços das pizzas e bebidas, e assim contassem quantos sabores de pizzas e quantas bebidas havia no cardápio, além de oportunizar momentos de descontração a respeito dos nomes e ingredientes nas respectivas pizzas. Pois, de acordo com Burak (2004), os alunos

devem se familiarizar com o tema, sendo o pesquisador responsável pela criação de um diálogo para que possam mostrar suas percepções a respeito do “cardápio da pizzaria”.

(11) *Pesq.: A dupla que realizou a pesquisa sobre passagens aéreas do trecho de São Paulo a Belo Horizonte, com conexões e conseguimos calcular o total de combinações para realizar esta viagem. Tomando como base o cardápio dessa pizzaria, se você fosse escolher uma pizza e uma bebida, de quantas maneiras você faria isso?*

(12) *Aluno D: Trinta e três. Porque tem 22 pizzas e 11 refrigerantes.*

(13) *Aluno A: Juntas trinta e três.*

(14) *Pesq.: Quantas maneiras para escolher uma pizza? E uma bebida?*

(15) *Aluno A: Vinte e duas para a pizza e onze para a bebida.*

(16) *Pesq.: Ok. O que usaremos para resolver o problema? Lembrando que a escolha da pizza não interfere na escolha da bebida.*

(17) *Aluno D: Mas ele pode escolher duas pizzas e uma bebida.*

(18) *Pesq.: Pode ser também, veremos mais na frente. Por enquanto o problema é a escolha de uma pizza e uma bebida.*

Vemos características do caso 3 de Modelagem Matemática Barbosa (2001), evidenciado pela construção do professor e dos alunos na elaboração da situação problema falas (11) e (17). A atividade proposta condiz com a afirmação de (BARBOSA 2008, p.48) sobre modelagem, “[...] seja um problema para os alunos, ou seja, eles não devem ter estratégias prontas “às mãos”, e ela tenha referência na realidade (extraída do dia-a-dia) [...]”. Na fala (17), se evidencia que os ambientes que envolvem dados do dia-a-dia oferecem uma condição diferenciada de comunicação entre o professor e os alunos, fazendo sentido questionar e suplementar as informações dadas pelo docente para o desenvolvimento da tarefa Skovsmose (2000).

(19) *Pesq.: São 22 pizzas. Lá na pesquisa de passagens aéreas, fizemos uma arvorezinha de possibilidades. Vocês se lembram?*

(20) *Aluno D: Não.*

(21) *Aluno C: é melhor um exemplo, pra mim lembrar.*

(22) *Pesq.: Tem 22 sabores de pizzas. E tem 11 bebidas. Vamos supor que se escolha a mista (pizza). Quantas opções de bebidas para escolher?*

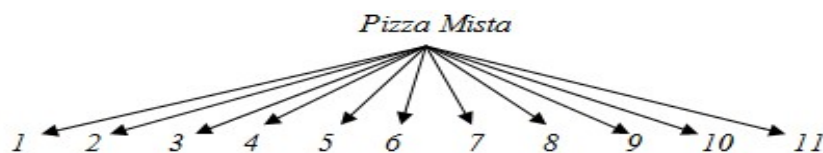
(23) *Aluno C: onze.*

(24) *Pesq.: Vamos colocar pizza mista e ligaremos a opção escolhida para cada bebida. Vamos representar cada bebida por um número: 1,2,3,...,11. Então pode-se escolher uma pizza mista e a primeira opção de bebida que é a água. Lembrando que estamos fazendo isso só com a mista.*

Nesse momento, durante a fala (24), foi dado o início da construção da árvore de

Figura 12- Árvore de possibilidade

possibilidades, como vemos na figura 12.



Fonte: Própria.

(25) *Pesq.: Com a pizza mista, formaremos quantas maneiras?*

(26) *Aluno A: 11 maneiras!*

(27) *Aluno C: Com uma pizza formaram-se 11 maneiras.*

(28) *Pesq.: Ok. E agora o que faremos?*

(29) *Aluno A: Faz a multiplicação.*

(30) *Aluno D: Multiplicação. Cada pizza será ligada com 11 bebidas.*

(31) *Pesq.: Quantas maneiras no total?*

(32) *Aluno B: vinte e dois vezes onze. Duzentos e quarenta e duas maneiras.*

No momento da fala (24), o professor pesquisador optou para a tentativa da árvore de possibilidades, pois “ela facilita o estudo e a sistematização da contagem dos possíveis agrupamentos” (GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J.R. 2005, p.142). Notamos que os alunos tinham certa dificuldade no início para assimilar o problema. Durante os diálogos, identificamos que poderíamos explorar mais essa atividade.

A etapa seguinte conta com a exploração de outras perspectivas do problema, sugerida na fala (17). Então propomos a questão “Quantas são as maneiras para uma pessoa escolher duas pizzas e uma bebida?”. Para uma abordagem voltada para o Ensino Fundamental, adaptamos a pergunta excluindo a possibilidade de escolher duas pizzas do mesmo sabor.

(33) *Pesq.: Vamos tentar resolver a pergunta do início do aluno B, “Quantas são as maneiras para uma pessoa escolher duas pizzas de sabores diferentes e uma bebida?”.*

Vamos por parte: primeiro temos que saber quantas pizzas temos a disposição?

(34) *Aluno B: Vinte e duas*

(35) *Pesq.: Lembrando que são 2 pizzas com sabores diferentes. Quantas maneiras para fazer a primeira opção de escolha?*

(36) *Aluno A: Acho que é vinte e dois sabores.*

(37) *Pesq.: E para a segunda opção de pizza?*

(38) *Aluno D: Se tem que ser diferente, e já foi escolhida a primeira, então há vinte e uma opções.*

(39) *Pesq.: Então a quantas possibilidades? É só multiplicar?*

(40) *Aluno A: Sim. $22 \times 21 = 462$.*

(41) *Aluno B: Mas sempre será assim? Só multiplicar?*

Por meio da sugestão do aluno D, fala (17), sobre a quantidade de maneiras para escolhermos duas pizzas e uma bebida, percebemos que poderíamos dar outros caminhos para a atividade. Com outras explorações da Análise Combinatória, como por exemplo a combinação de objetos. De acordo com (SKOVSMOSE 2000, p.78), uma atividade realizada no Ambiente de Aprendizagem tipo (6), é “possível os alunos produzirem diferentes significados para as atividades”. Desta maneira, o pesquisador orientou as novas discussões que surgiram baseadas na investigação sobre o tema “Cardápio de uma pizzaria da cidade”.

A estratégia adotada, fala (34), foi utilizar o conhecimento adquirido na questão inicial para progredir no raciocínio combinatório. A questão observada, de acordo com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), trata-se de um problema de classificação simples de seleção, pois o método de contagem é uma amostra a partir de um conjunto de objetos, como é o caso pizzas e bebidas. Desta forma, na fala (40), o “aluno A”

começa a resolver o problema utilizando o princípio multiplicativo, e não prossegue, dando a entender que a resposta seria 462.

No entanto outro aluno faz um questionamento na fala (41), “*Mas sempre será assim? Só multiplicar?*”. Na fala (41), por meio de uma simples pergunta, o aluno faz análises críticas da solução apresentada pelo colega. Desta forma, os alunos são instigados a investigarem se é sempre assim que as questões apresentadas se resolvem. Lembrando que é “nesse momento que se analisa e se verifica a relação e a validação da resolução encontrada para o problema” (SOISTAK e BURAK, 2005b, p. 3). O que fica claro que o questionamento na fala (17), contribuiu para o aprofundamento das discussões acerca dos Princípios Fundamentais de Contagem, pois no contexto do problema, a ordem do pedido dos sabores das pizzas não importa.

(42) *Pesq.: O que acontece se a pessoa escolhe “mista e bacon” ou “bacon e mista”. O que está acontecendo?*

(43) *Aluno D: Mesmo pedido de pizzas.*

(44) *Aluno C: É a mesma coisa, tá falando da mesma coisa duas vezes.*

(45) *Pesq.: Então a resposta é 462?*

(46) *Aluno C: Acho que não. Mas não sei como encontrar.*

(47) *Aluno D: Tem que dividir por dois pois está repetindo duas vezes.*

(48) *Aluno B: Então a resposta é 231.*

(49) *Pesq.: Entenderam o porquê de 231? Resumindo temos que na primeira opção há 22 maneiras, na segunda opção 21 maneiras. Como falamos, a ordem não importa. Então, pelo que o “aluno C” disse, está se repetindo duas vezes, logo dividimos por dois. Descobrimos que é 231 para escolhermos 2 pizzas de diferentes sabores. Agora qual é o número de maneiras para escolher uma bebida?*

(50) *Aluno C: Onze bebidas. Se for semelhante ao exemplo passado temos que multiplicar 231 por 11.*

(51) *Aluno D: Um número muito grande.*

(52) *Aluno A: Vai dar 2.541 maneiras.*

Na fala (42), o professor pesquisador apresentou um exemplo de uma possível escolha, com uma indagação. O exemplo foi importante para o desdobramento do problema, pois estávamos resolvendo um problema de Combinação, que é um conteúdo

complexo para o público trabalhado, que muitas vezes confunde a necessidade de considerar, ou não, a ordem de escolha. De acordo com a fala (43), ficou claro que, nesse caso a ordem de escolha não importava.

Os discursos encontrados nas falas (43) a (48) indicam que os alunos levantaram a possibilidade de repetição ao mencionar dois sabores de pizzas em diferentes ordens. Além disso, o aluno D, na fala (47), destacou que é necessário fazer a divisão, por haver uma repetição. No momento que o professor pesquisador perguntou se a resposta era 462, fala (45), os alunos demonstraram interesse em analisar a questão levantada, bem como fazer inferência a respeito. Uma curiosidade observada, foi o fato de que alguns alunos estavam fazendo os cálculos em calculadora e outros a lápis.

(53) Pesq.: [...] e o resultado para três pizzas diferentes? Como resolveremos se uma pessoa escolher três pizzas de sabores diferentes?

(54) Aluno B: Nessa também pode escolher qualquer pizza?

(55) Aluno A: Sim. Só que tem que escolher 3 sabores diferentes.

(56) Pesq.: Para a primeira opção de escolha, quantas maneiras?

(57) Aluno A: 22 maneiras. Para a segunda opção 21 e para a terceira opção 20 maneiras. Agora é só multiplicar tudo, $22 \times 21 \times 20$ aí tem que dividir o 3. 9240 maneiras dividido por 3 que é 3080. Certo?

(58) Pesq.: Vamos conferir. Vamos escolher três pizzas: mista; portuguesa e calabresa. Vamos colocar em ordem, quais os pedidos possíveis?

Nesse momento o professor pesquisador escreveu no quadro a inicial de cada sabor: mista (M), portuguesa (P) e calabresa (C) e os alunos, deram uma ordem para os sabores: I- MPC; II- CMP; III- COM; IV- PMC; V- PCM; e VI- MCP.

Foi lançado um novo problema, fala (53), de maneira que os alunos avançassem no pensamento combinatório. O discurso (57) indica que o aluno C entendeu partes do problema, pois ele se baseou em problemas anteriores, na sua fala “[...] agora é só multiplicar tudo, $22 \times 21 \times 20$ aí tem que dividir o 3. 9240 maneiras dividido por 3 que é 3080[...]”. O aluno multiplica as opções de escolhas que o resultado é 9.240, porém ao se retirar as opções de cardápios repetidos (é uma combinação e a ordem dos pedidos não importa). Dessa forma o aluno considera que, como são 3 pizzas diferentes dentre as 22 pizzas, então há três ordens para cada três pizzas pedidas, por isso ele dividiu por 3. Notamos que a lógica no pensamento do aluno, sinaliza para o problema anterior, a

escolha de duas pizzas diferentes dentre as vinte e duas, no qual cada pedido se repete duas vezes, falas (42) e (43). Possivelmente o aluno empregou uma simples contagem de aritmética em relação às ordens. A intenção do uso desse problema mais complexo foi levá-los a se colocarem no papel da pessoa (personagem) que deve fazer a ação e tomar decisões solicitadas no problema Lima (2016).

No discurso (58) foi dado um exemplo de um pedido de três pizzas (*mista; portuguesa e calabresa*), e um questionamento acerca das ordens formadas pelas três pizzas. A ordem inserida foi sugestão dos alunos. Concordamos com Burak e Klüber (2013) que afirmam que na Modelagem Matemática a etapa de resolução de problema é muito importante: “[...] esse momento é fundamentalmente rico, visto que favorece o trabalho com os conteúdos matemáticos que, assim, ganham importância e significado” (BURAK e KLÜBER, 2013, p.42).

(59) Aluno C: *Mas pelo que entendi, isso trata de um só pedido.*

(60) Pesq.: *Está contando quantas vezes?*

(61) Aluno D: *Seis. Então tem que dividir por seis.*

(62) Aluno A: *Quase eu acerto. Faltou só dividir por seis. Então é $22 \times 21 \times 20 = 9240$, dividido por 6, que é 1540 maneiras.*

(63) Pesq.: *Exatamente. Agora se uma pessoa escolher 2 bebidas diferentes, quantas maneiras poderá fazê-la?*

(64) Aluno A: *É parecida com a da escolha das pizzas. Agora a primeira opção será 11, e a segunda 10.*

(65) Aluno D: *Então vai dá $11 \times 10 = 110$ maneiras, e dividir por dois?*

(66) Pesq.: *Por que dividir por dois?*

(67) Aluno B: *Com 110 está entrando pedidos repetidos. Por exemplo uma água e uma coca, uma coca e uma água.*

(68) Aluno D: *Ah, então seria 55 maneiras.*

Ao mencionarem todas as ordens possíveis com o pedido das três pizzas selecionadas, com o uso da multiplicação (fala 57), os alunos escolheram 3 sabores específicos e assim aplicaram todas as ordens dos pedidos (falas 58 a 62). O professor pesquisador instigou-os a produzir discursos que legitimavam o uso do Princípio Multiplicativo, assim como a utilização da divisão para descontar as repetições como ficou claro no problema proposto (fala 63) e nas discussões (falas 64 a 68). A utilização

do pensamento combinatório sem a utilização de fórmulas é fundamental para a compreensão dos problemas de Análise Combinatória. Assim, de acordo com a pesquisa de Alves e Segadas (2012), vemos que a maioria dos alunos procura resolver problemas de Análise Combinatória com o uso de fórmulas de contagem, comumente apresentadas no Ensino Médio.

A atividade “Cardápios de uma pizzaria” foi realizada, seguindo as etapas propostas por Burak (2004 e 2010), proporcionando a construção de um Cenário para Investigação Skovsmose (2000), mais especificamente, a construção de um ambiente de Modelagem Matemática Barbosa (2001) por meio de uma pesquisa sobre as possibilidades de pedidos, de pizzas e bebidas, segundo o cardápio de uma pizzaria que os alunos frequentavam.

Observando os diálogos, identificamos as etapas de Burak (2004), que foram evidenciadas desde a escolha do tema até o desenvolvimento de aspectos investigativos, quando os alunos coletaram o cardápio da pizzaria e formularam possíveis soluções junto com o pesquisador. Vemos a situação problema envolvendo diferentes tipos de pizzas - fala (17), contribuindo assim para o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema escolhido. Na análise crítica da solução, podemos perceber em alguns momentos, na medida em que as discussões avançavam os alunos corrigiam suas falas em relação às respostas anteriores - falas (57) e (62), nas quais o “aluno A” utiliza o princípio multiplicativo para resolver quantas são as maneiras para escolher 3 pizzas de sabores diferentes dentre 22 sabores. Na fala (57) o aluno faz uma simples multiplicação $22 \times 21 \times 20$, e por meio das sugestões dos colegas, ele retifica o resultado $(22 \times 21 \times 20) \div 6 = 1.540$ - na fala (62), pois se trata de uma combinação.

Entendemos que os seguintes resultados foram obtidos: proporcionou discussões referentes a problemas dos PFC; inquietou os alunos a buscarem explicações sobre quantidade de combinações ao se escolher mais de uma pizza no cardápio; viabilizou a possibilidade para se tratar de problemas referentes a Combinação Simples; proporcionou aos alunos que “encontrassem o caminho” por meio de tentativas de erros e acertos, instigados pelo professor pesquisador; possibilitou a resolução de problemas de contagem sem a utilização de fórmulas; e ampliou as interações necessárias no desenvolvimento da atividade.

A atividade realizada contribuiu para que os estudantes pudessem trabalhar com os conceitos de Combinação, em especial o estudo e aplicação dos Princípios

Fundamentais de Contagem, nos anos finais do Ensino Fundamental. Com os problemas e questionamentos levantados e desenvolvidos, os alunos perceberam diferentes formações de conjuntos de elementos trabalhados: em especial, os conjuntos se diferenciavam pela natureza ou pela ordem dos elementos. Assim, eles conseguiram aplicar os Princípios Multiplicativo e Aditivo, bem como a Combinação Simples.

As potencialidades dessa atividade foram evidenciadas pela interação permanente dos alunos, possibilitando sugestões para as questões, novos olhares para os problemas e maior segurança nas respostas apresentadas. De fato, o ambiente de aprendizagem criado com as atividades de modelagem matemática contribuiu para que os alunos fossem protagonistas do processo de aprendizagem. Percebemos que os maiores desafios enfrentados pelos alunos nessa atividade estão relacionados com a construção de argumentos para as respostas das questões envolvendo a Combinação, pois os alunos apresentaram dificuldades em interpretar os contextos dos problemas. Por outro lado, esses desafios fazem parte do cenário para investigação, proporcionado pela atividade e acreditamos que contribuiu para que os estudantes participem com mais responsabilidades de sua aprendizagem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início dessa pesquisa, fizemos uma análise das orientações curriculares e da Base Nacional Comum Curricular, percebemos que a Análise Combinatória está inserida nos conteúdos que devem ser trabalhados na Educação Básica. De modo que, o conhecimento combinatório é importante para a formação do cidadão e está presente no cotidiano do mesmo. Logo após, iniciamos uma busca e revisão detalhada por trabalhos acadêmicos, com a finalidade de selecionarmos os que tinham relação com a Modelagem Matemática e a Análise Combinatória. Ao analisarmos esses trabalhos, percebermos que grande parte tinha o aluno como foco.

De acordo com pesquisas realizadas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994 e 1997), Alves e Segadas (2012) e Lima e Borba (2015), mostram que os alunos tem dificuldade em relação a Análise Combinatória. Dentre os problemas estão em interpretar informações nos problemas, confusões em perceber se a ordem dos elementos, equívocos ao aplicar formulas e a falta de organização de enumerar os elementos sistematicamente.

Diante disso, propomos a realização de atividades voltadas para os Ambientes de Aprendizagens caracterizados por Cenários para Investigação Skovsmose (2000). Optamos por trabalhar com os Princípios Fundamentais de Contagem e um ambiente de Modelagem Matemática na visão de Barbosa (2001), seguindo as etapas de Burak (2004 e 2010), para minimizar essas dificuldades. Tendo como foco trabalhar com a Análise Combinatória, por meio de situações reais vivenciadas pelos alunos, adotando uma estratégia adaptada para o estudo do conteúdo no Ensino Fundamental.

Na procura por respostas à pergunta de pesquisa **“Quais são os desafios e potencialidades na inserção da Modelagem Matemática e Análise Combinatória no Ensino Fundamental?”**, num primeiro momento, buscamos na literatura produções acadêmicas que trouxessem atividades voltadas para a Análise Combinatória em um ambiente de Modelagem Matemática.

Ao optarmos por trabalhar em um ambiente de Modelagem Matemática, os conteúdos emergiam de acordo com o desenvolvimento das atividades, e isso foi um desafio para a ação do professor pesquisador. Nesse ambiente não se pode prever o que vai acontecer a partir dos temas escolhidos e da realidade dos alunos. Como resultado,

essa escolha provocou o professor pesquisador a buscar o aperfeiçoamento para as atividades desenvolvidas. Observamos que essa pesquisa pode propiciar satisfação para os envolvidos, pois conseguimos confirmar a presença da matemática, possibilitando conectá-la à realidade dos alunos explorando problemas de Análise Combinatória.

Observamos também que a pesquisa de campo, feita pelos alunos do Ensino Fundamental, demonstrou que a Modelagem Matemática pode contribuir mostrando formas de atuação capazes de despertar reflexões sobre o contexto da escola, bem como sobre a ação do professor pesquisador. Os problemas e a realidade dos alunos, trouxeram dificuldades e limitações no decorrer das atividades, levando o pesquisador a assimilar a complexidade do planejamento da prática diária docente. Destacamos ainda que é essencial a mudança de atitude proporcionada pelas resistências e obstáculos, que ocorrem quando trabalhamos com a Modelagem Matemática.

A pesquisa de campo realizada com os alunos demonstrou que a Modelagem Matemática pode contribuir consideravelmente para o trabalho do professor pesquisador, em atividades envolvendo a Análise Combinatória. Essa pesquisa de campo despertou nos alunos o interesse por temas vivenciados no cotidiano, possibilitando os cenários para investigação nos trabalhos interdisciplinares.

Por outro lado, a pesquisa foi apoiada nas cinco etapas proposta por Burak (2004 e 2010), que guiaram esse: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e análise crítica das soluções. Também, as obras de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994 e 1997) acerca da classificação de problemas de Análise Combinatória e das possíveis dificuldades que os alunos enfrentariam nas resoluções de problemas, foram pertinentes para complementar as análises, facilitando a identificação dos possíveis resultados que os alunos alcançariam.

Na primeira atividade relatada (sobre passagens aéreas), foi possível propiciar aos alunos o “espírito investigativo”, pois eles buscaram respostas por meio de visitas a sites, de companhias aéreas ou de agências de viagens, sobre preços de passagens e escalas de voos. Por exemplo, perceberam que uma busca de preços em sites, as passagens podem ser mais baratas que em agências de viagens, contribuindo para a educação financeira dos alunos envolvidos nessa pesquisa.

Na segunda atividade (sobre cardápio de pizza), as discussões desenvolvidas possibilitaram o avanço no uso dos Princípios Fundamentais da Contagem e na introdução de Combinação, associados com os diferentes sabores das pizzas. Consideramos que as estratégias adotadas e o tema voltado para a vivência no cotidiano

dos alunos, contribuíram para minimizar as dificuldades enfrentadas, de um modo geral, quando tratamos com problemas relacionados ao pensamento combinatório.

Os projetos desenvolvidos em um ambiente de Modelagem Matemática proporcionaram a participação dos alunos, em especial nos levantamentos dos problemas, nas coletas dos dados, bem como na socialização dos resultados. O fato das atividades serem abertas, identificamos a existência de desafios, tanto para o professor pesquisador, como também para os alunos. Para o professor pesquisador, a oportunidade de refazer e repensar sua prática. Para os alunos, essas atividades contribuíram para a sua formação, em aspectos emocionais e sociais, como a valorização dos trabalhos dos colegas na interação social e o aperfeiçoamento de se expressar em público.

Por fim, verificamos que os objetivos desse trabalho, foram alcançados, pois percebemos que a Análise Combinatória e a Modelagem Matemática, podem caminhar juntos no Ensino Fundamental. No que se refere ao objetivo “detectar as potencialidades e desafios das atividades envolvendo Análise Combinatória realizadas no ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática”, percebemos que as atividades propostas proporcionaram maior abertura da relação dos alunos com o projeto, desde a escolha do projeto até as discussões realizadas na etapa de socialização. Os desafios encontrados pelos alunos na escola em termos de estrutura, não o impediram de buscar e encontrar respostas para o que propuseram fazer, confirmando o interesse em fazer algo diferente do tradicional.

Por outro lado, também foi desafiador para o professor pesquisador trabalhar com a Modelagem Matemática, com um proposta aberta, pois enfrentamos dificuldades com a falta de internet, de laboratório de informática, que tornaram as atividades mais demoradas, pois dependíamos exclusivamente das pesquisas realizadas pelos alunos em outros locais, o que contribuiu para um atraso no cronograma das atividades. Além disso, nos sentimos desafiados ao trabalharmos com essa turma de ensino regular com características de Educação de Jovens e Adultos, uma vez que eles tinham idade compatível com ano escolar superior, o que pode ser explicado por entrarem tardiamente na escola ou por acumularem repetências. Assim, observamos que no desenvolvimento das atividades, os alunos apresentaram dificuldades em ler, entender e interpretar, o que pode ser explicado pelo contexto da Modelagem Matemática, que tirou a turma de sua zona de conforto, uma vez que, no ensino tradicional, o aluno tem uma postura passiva durante as aulas, e nesse novo ambiente de aprendizagem ele é

protagonista de sua aprendizagem.

Destacamos que nos PCN e na BNCC, encontramos a relevância de produzir atividades que envolvam os Princípios Fundamentais de Contagem, desde dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, o trabalho com Modelagem Matemática envolvendo os PFC, pode proporcionar discussões e a aplicações de conceitos para preparar o aluno para temas que podem ser relevantes para as relações sociais.

Refletindo sobre essa pesquisa, percebemos que esse trabalho contribuiu de forma significativa na mudança de prática docente do professor, que compreende o planejamento, encaminhamento das atividades, adaptação da proposta conforme o público alvo, e a reflexão sobre os erros e acertos nas atividades desenvolvidas. Sobre a nossa investigação, mais do que no início das atividades, estamos abertos e com alguns questionamentos que ainda não podem ser respondidos. A partir da vivência como pesquisador, lendo, coletando, interpretando fatos, indo e voltando na pergunta e nos objetivos traçados nessa dissertação, mais elementos foram se configurando para enfrentarmos os desafios. Dessa forma, abrem-se o leque de possibilidades para que novas pesquisas sejam feitas.

6 REFERÊNCIAS

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da Análise Combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420. Canoas, 2012.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática**: as discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, J. L.; BARBOSA, J. C. Face a Face com a Modelagem Matemática: como os alunos interpretam essa atividade? **Bolema**, Rio Claro (SP), v.18, n.23, p.79-95. maio.2005.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro.

_____. **Modelagem na Educação Matemática**: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2001, Caxambu.

_____. Modelagem Matemática na Sala de Aula. *Perspectiva*, Erechim (RS), v.27, nº98, p. 65-74, junho/2003.

_____. **Modelagem Matemática em sala de aula: uma perspectiva sóciocrítica e discursiva**-In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 38, n. 3, p.293-301, 2006.

_____. As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática. **Acta Scientiae**, v. 10, n.1, p. 47-58, jan/jun. Canoas, 2008.

BARBOSA, J.C; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J.L. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. **Biblioteca do Educador Matemático** – Coleção SBEM, v.3. Recife: SBEM, 2007. 256 p. p. 33-47; 99-114.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3.ed., São Paulo: Editora contexto, 2006.

BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan D.; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Síntesis, 1994.

_____. **Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils.** In: Educational Studies in Mathematics, v.32, n.2 p181-199, Fev, 1997, disponível em: encurtador.com.br/jGIKW, acesso em: 29Dez. 2019.

_____. **Razonamiento combinatorio em alunos de secundaria.** 1996.

BITTENCOURT, C. M. F. Em Foco: **História, produção e memória do livro didático. Educação e Pesquisa**, São Paulo, set./dez. 2004, v.30, n.3, p. 471-473. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a07v30n3.pdf> Acesso em 31 maio de 2019.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução a teoria e aos métodos.** Porto, Portugal: Editora Porto, 1994.

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem.** 1992.460p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UEC, 1992. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

_____. **Modelagem matemática e a sala de aula.** In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina, Anais... Londrina: [S.I], 2004.

_____. **Modelagem Matemática: experiências vividas.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática, IV, Feira de Santana, 2005. Anais. Feira de Santana: UEFS, p. 1-12, 2005.

_____. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem Na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p.10-27, 2010.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica: uma trajetória.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, Belo Horizonte, 2007. Anais... Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1-19, 2007a.

_____. Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. **Margens (UFPA)**, v. 6, p. 33-50, 2013.

_____. Educação Matemática: contribuições para a compreensão de sua natureza. *Acta Scientiae*, v. 10, n.2, p. 93-106, jul/dez. Canoas, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) 5ª a 8ª séries: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998-a.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 3º e 4º ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1998-b.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 1999.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2002-a.

_____. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino médio-orientações educacionais complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002-b.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002-c.

_____. Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, MEC, 2006-a.

_____. Secretaria da educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: < <http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base> >. Acesso em: 20 out. 2019.

BRUMANO, Cleuza. **A modelagem matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória.** Juiz de Fora: UFJF, 2014. 153 p. Dissertação de Mestrado Profissional- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2014.

COSTA, Claudinei Aparecido. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental**. São Paulo. PUC, 2003. 163 p. Dissertação de Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

CHAVES, Rodolfo; LORENZONI, Luciano Lessa. Modelagem matemática: concepções e tutores do multicurso matemática. Salvador: Anais do **X ENEM, 2010**.

CHOPPIN, Alain. O Historiador e o livro escolar. **História da educação**, Rio grande do Sul, v. 6, n. 11, p. 5-24. 2002.

FONSECA, Selva Guimarães. Didática e prática de ensino de História. 11 ed. Campinas/ SP: Papyrus editora, 2003.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J.R. **Matemática 2**: progressões, matrizes, progressões e Análise Combinatória, geometria- 2º grau. São Paulo: FTD, 1992.

_____. **Matemática**: Uma nova abordagem, vol.2: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.

_____. **Matemática Completa**- 2.ed. renov. São Paulo: FTD,2005.

_____. et al. **360º Matemática fundamental**: Uma nova abordagem. 1º ed. São Paulo: FTD,2015.

LIMA, A.; BORBA, R. Reconhecendo o princípio fundamental da contagem como estratégia na resolução de problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.4, p. 694-714, jan.2015.

LIMA, Elon. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAAB, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds). **Teaching mathematics and applications**: the 10th ICME. Copenhagen, 2005. p. 61-74.

MATTOS, Júlia Silveira. Os livros didáticos como produtos para o ensino de História: uma análise do Plano Nacional do Livro Didático – PNLD, 2012. Disponível em <<https://goo.gl/gNopvX>> Acesso em 15 de abril de 2019.

MIRANDA, Fabiola de Oliveira. **A inserção da Educação Matemática Crítica na escola pública: aberturas, tensões e potencialidades**. 2015. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, 2015. Universidade Estadual Paulista, 2015.

MONTEIRO, Ana Maria. Professores e livros didáticos: narrativas e leituras no ensino de história. In: ROCHA, Helenice Aparecida Bastos, REZNIK, Luís & MAGALHÃES, Marcelo de Souza. A história na escola: autores, livros e leituras. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2009, pp. 151-172.

NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de Modelagem Matemática para a Educação (em) Matemática**. 2008. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação-UFPR. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**, Cempem- FE – Unicamp, v. 17, n. 31, jan/jun. 2009.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANTANA, T.S; BARBOSA, J.C. A Intervenção do Professor em um Ambiente de Modelagem Matemática e a Regulação da Produção Discursiva dos Alunos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.26, n.43, p.991-1020. ago.2012.

SANTOS, J. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do ensino fundamental a partir de uma prática problematizadora**. Itatiba: USF, 2015. 192p. Tese (Doutorado)- Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade São Francisco, Itatiba,2015.

SANTOS, Marluce Alves. **A produção de discussões reflexivas em um ambiente de modelagem matemática**. Feira de Santana: UEFS, 2007. 122p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, 2007.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 1021-1047, ago. 2012.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, São Paulo, v.13, n.14, p. 66-91. 2000.

_____. **O. Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica**. São Paulo: Ed. Papirus, 2008. p. 41-50.

SOISTAK, A. V. F.; BURAK, D. O conhecimento matemático elaborado via metodologia alternativa da Modelagem Matemática. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, III, Canoas, 2005. Anais... Canoas: ULBRA, p.1-6, 2005a.

SOUSA, E.G; BARBOSA, J.C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. *Zetetiké*, São Paulo, v.22, n.41, p. 31-58, Jan/jun 2014

ANEXO A: AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA**Autorização**

A Escola Estadual Fernando Gomes, localizada no município de Porto Alegre / RS, neste ato, representado pela direção, por intermédio do presente instrumento, autoriza Manassés da Silva Batista, brasileiro, solteiro, professor, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, residente em Porto Alegre / RS, portador do RG XXXXXXXXXXXXX. Desenvolverá o Projeto “Princípio Fundamental da Contagem e Modelagem Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental”, sob a orientação do Prof. Dr. Alvino Alves Sant’Ana, com o objetivo de produção de dados a serem utilizados em sua Dissertação de Mestrado. Autorizado, por sua vez, obriga-se a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participarem do projeto.

Porto Alegre, de Maio de 2019.

Direção: Escola Estadual Fernando Gomes

Mestrando: Manassés da Silva Batista

Orientador: Alvino Alves Sant’Ana

ANEXO B: TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
 INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO**

Eu _____, Responsável pelo(a) aluno(a) _____ declaro, por meio deste termo, que concordo em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa de mestrado intitulada

“ _____”, desenvolvida pelo pesquisador Manassés da Silva Batista, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pelo Prof. Dr. **Alvino** Alves Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail alvino@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, será observado(a) e sua produção por meio de atividades, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado, poderei contatar a pesquisador responsável no telefone xxxxxxxxxx ou e-mail manassess923@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____ de _____ de

_____.

Assinatura do Responsável: _____

Assinatura do(a) pesquisador(a): _____

Assinatura do Orientador da pesquisa: _____

ANEXO C: TERMO DE ASSENTIMENTO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
 INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**TERMO DE ASSENTIMENTO**

Você está sendo convidado para participar da pesquisa “_____”.

Seus pais permitiram que você participe. Queremos saber se Princípio Fundamental da Contagem e modelagem matemática contribuí para sua aprendizagem. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita no 9º ano do ensino fundamental na sala de aula da Escola Estadual Fernando Gomes. Para isso, as aulas serão 2 horas por semana no dia de atividades escolares. Diante disso, você não se preocupará em vir no contra turno somente para participar da pesquisa. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelo telefone xxxxxxxx, pesquisador Manassés da Silva Batista. Coisas boas acontecerão como a aprendizagem para resolver problemas ligados aos conteúdos para Análise Combinatória sem a utilização de fórmulas. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar os participantes da pesquisa. Se você tiver alguma dúvida, você pode entrar em contato através do telefone na parte de cima desse texto.

Eu _____
 aceito participar da pesquisa, que tem como objetivo aplicar os conteúdos de Princípio Fundamental da Contagem em atividades de modelagem matemática. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir. O pesquisador tirou minhas dúvidas e meus responsáveis assinaram o termo de consentimento. Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do menor

Assinatura do Pesquisador

Assinatura do Orientador
