

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS DA EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

VIVIANE RAQUEL BACKENDORF

**Abstração reflexionante e matemática dinâmica**  
**Compreensão do conceito de Integral dupla**

Porto Alegre

2020

VIVIANE RAQUEL BACKENDORF

**Abstração reflexionante e matemática dinâmica**  
**Compreensão do conceito de Integral dupla**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) como requisito para obtenção do título de Doutora em Informática na Educação.

Orientador: Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Linha de pesquisa: Interfaces Digitais em Educação,  
Arte, Linguagem e Cognição

Porto Alegre

2020

## CIP - Catalogação na Publicação

Backendorf, Viviane Raquel  
Abstração reflexionante e matemática dinâmica:  
Compreensão do conceito de Integral dupla / Viviane  
Raquel Backendorf. -- 2020.  
127 f.  
Orientador: Marcus Vinícius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em  
Novas Tecnologias na Educação, Programa de  
Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto  
Alegre, BR-RS, 2020.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Tecnologias  
Digitais. 3. Abstração Reflexionante. I. Basso, Marcus  
Vinícius de Azevedo, orient. II. Título.

## ATA DE DEFESA DE TESE



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

### ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO VIVIANE RAQUEL BACKENDORF

Às dez horas do dia treze de janeiro de dois mil e vinte, na sala 329 do PPGIE/CINTED, nesta Universidade, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Fernando Becker, Elisabete Zardo Búrigo e Laurete Teresinha Zanol Sauer para a análise da defesa de Tese de Doutorado intitulada “**O Processo de Abstração Reflexionante na Construção de Conceito de Integral Dupla com a Utilização de Matemática Dinâmica**”, da doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação Viviane Raquel Backendorf, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso.


A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

- Considera a Tese aprovada  
 sem alterações;  
 sem alterações, com voto de louvor;  
 e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;


Considera a Tese reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):

*Trata-se de um trabalho relevante para o ensino e a aprendizagem de Matemática, especialmente na área de Cálculo diferencial e integral.*

  
Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso  
Orientador

  
Prof. Dr. Fernando Becker  
PPGIE/UFRGS

  
Prof.ª Dr.ª Laurete Teresinha Zanol Sauer  
UCS

  
Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo  
UFRGS

## **AGRADECIMENTOS**

*A Deus;*

*Ao Professor e meu Orientador Marcus Vinícius de Azevedo Basso;*

*À toda minha Família;*

*Aos Professores do PPGIE;*

*Aos Professores que aceitaram fazer parte da banca avaliadora;*

*Ao PPGIE e à UFRGS;*

*À Univates.*

*A todos os amigos que fizeram parte desta caminhada.*

*“A resposta certa não importa  
nada: o essencial é que as  
perguntas estejam certas.”  
(Mario Quintana)*

## RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral, disciplina integrante do currículo de alguns cursos de graduação, leva em sua ementa temas da matemática avançada, mas apoia-se nos conceitos da matemática elementar. Na experiência como docente desta disciplina na graduação, percebeu-se que os estudantes apresentam muitas dificuldades em relação aos temas desenvolvidos, verificando-se, principalmente, problemas conceituais. Os conceitos de limite, derivada e integral estão relacionados entre si e dificuldades apresentadas em relação a um conceito podem interferir na construção dos que virão na sequência. Muito tem sido discutido e estudado sobre o assunto objetivando melhorar o ensino e a aprendizagem de Cálculo. Nos últimos anos, outro recurso adentrou na sociedade e da mesma forma no ensino: a tecnologia digital. Com ela, vários pesquisadores têm elaborado propostas que auxiliem no ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, em especial da matemática avançada, na qual inclui-se limite, derivada e integral. Dessa forma, com o intuito de promover a construção de conceitos matemáticos com a utilização das tecnologias digitais, essa tese tem como objetivo investigar, baseado na teoria da abstração reflexionante, como ocorre a compreensão do conceito de integral dupla com auxílio de um *applet* do *software Geogebra*. A investigação em torno do assunto se deu a partir de entrevistas realizadas com estudantes do Ensino Superior, que no momento da entrevista, estavam cursando a disciplina de Cálculo I. Para embasar as discussões, além da abstração reflexionante de Piaget, utilizou-se a teoria desenvolvida por David Tall sobre a matemática elementar e a matemática avançada, como suporte para entender as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no Ensino Superior. A análise dos resultados obtidos nessa investigação, classificada como qualitativa, baseou-se nas teorias citadas e constituiu-se como uma resposta à questão de pesquisa, levando a concluir que a tecnologia digital, através do *software Geogebra*, contribui na promoção e compreensão do conceito de integral dupla, analisada como um processo de abstração reflexionante.

**Palavras-chave:** Cálculo Diferencial e Integral; Tecnologias Digitais; Abstração Reflexionante.

## ABSTRACT

The Differential and Integral Calculus, a discipline that is part of the curriculum of some undergraduate courses, takes in its summary advanced mathematics, but it relies on the concepts of elementary mathematics. In the experience as a teacher of this discipline at undergraduate level, it was noticed that students have many difficulties in relation to the themes developed, with mainly conceptual problems. The concepts of limit, derivative and integral are related to each other and difficulties presented in relation to a concept can interfere in the construction of those that will follow. Much has been discussed and studied on the subject in order to improve the teaching and learning of Calculus. In recent years, another resource has entered society and in the same way in education: digital technology. With it, several researchers have developed proposals that assist in the teaching and learning of mathematical content, especially in advanced mathematics, which includes limit, derivative and integral. Thus, in order to promote the construction of mathematical concepts with the use of digital technologies, this thesis aims to investigate, based on the theory of reflective abstraction, how the understanding of the concept of double integral occurs with the aid of a software applet Geogebra. The investigation around the subject was based on interviews with Higher Education students, who at the time of the interview, were taking the discipline of Calculus I. To support the discussions, in addition to Piaget's reflective abstraction, the theory developed by David Tall on elementary mathematics and advanced mathematics was used as a support to understand the possible difficulties faced by students in Higher Education. The analysis of the results obtained in this investigation, classified as qualitative, was based on the aforementioned theories and constituted as an answer to the research question, leading to the conclusion that digital technology, through the Geogebra software, contributes to the promotion and understanding of the concept double integral, analyzed as a reflective abstraction process.

**Keywords:** Differential and Integral Calculus; Digital Technologies; Reflective Abstraction.



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Área de uma região sob a curva.....	24
Figura 2 - Área de uma região sob a curva – área dos retângulos.....	25
Figura 3 - Volume do sólido-integral dupla de $f(x,y)$ na região de base R.....	25
Figura 4 - Interface do Geogebra – configuração padrão.....	27
Figura 5 - Campo de Entrada, Janela de Álgebra e Janela de Visualização.....	28
Figura 6 - Geogebra em duas e três dimensões.....	28
Figura 7 - Ações e objetos na construção de várias estruturas de conhecimento matemático.....	30
Figura 8 - Esquemas e sua construção.....	51
Figura 9 - Página inicial do Applet – informações iniciais.....	62
Figura 10 - Página inicial do Applet – campo de trabalho.....	62
Figura 11 - Applet no formato apresentado aos estudantes.....	63
Figura 12 - Janela de Álgebra – controles deslizantes.....	64
Figura 13 - Um único prisma retangular com $m=1$ e $n=1$ .....	64
Figura 14 - Prismas retangulares com $m=3$ e $n=3$ .....	65
Figura 15 - Prismas retangulares encaixando cada vez mais no parabolóide - $m=9$ e $n=9$ .....	65
Figura 16 - Prismas retangulares – prismas verdes e o parabolóide.....	79
Figura 17 - As sobras dos prismas.....	80
Figura 18 - Cubo em torno do parabolóide.....	82
Figura 19 - Comparação entre o volume dos prismas e do parabolóide.....	83
Figura 20 - O tamanho da base de um prisma.....	87
Figura 21 - A base do parabolóide e um prisma.....	90
Figura 22 - O comportamento dos prismas em relação ao parabolóide.....	92
Figura 23 - Prismas diminuem, aumentam, esticam.....	99
Figura 24 - Encaixe.....	104

## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 - Processo de Abstração Reflexionante.....	44
Quadro 2 - Etapas do Método Clínico de Piaget.....	56
Quadro 3 - Os tipos de respostas segundo Piaget.....	58
Quadro 4 - Identificação dos estudantes entrevistados.....	67

## LISTA DE SIGLAS

APOS	Action Process Object Schema
CAS	Sistema de Álgebra Computacional
PUC	Pontifícia Universidade Católica
ROODA	Rede Cooperativa de Aprendizagem
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
VCN	Virtual Cálculo Numérico

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	Problema de Pesquisa.....	16
1.2	Objetivos.....	17
1.2.1	Objetivo Geral.....	17
1.2.2	Objetivos Específicos.....	18
1.3	Justificativa.....	18
2.	O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....	22
2.1.	Cálculo Diferencial e Integral .....	22
2.2.	Software Geogebra.....	27
3.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	29
3.1.	O pensamento matemático.....	29
3.2.	As tecnologias digitais e a matemática.....	32
3.2.1.	As tecnologias digitais e o Cálculo Diferencial e Integral.....	34
3.2.2.	As tecnologias digitais e o estudo da Integral.....	37
3.3.	A construção do conhecimento.....	39
3.4.	A Abstração Reflexionante.....	41
3.5.	A abstração reflexionante e a aprendizagem matemática.....	45
3.6.	Teoria APOS.....	48
4.	METODOLOGIA.....	53
4.1.	Pesquisa Qualitativa.....	53
4.2.	Método Clínico.....	55
4.3.	Participantes da Pesquisa e o contexto no qual estão inseridos.....	59
4.4.	Etapas e Instrumentos da Pesquisa.....	60
4.5.	A atividade com o applet.....	61
5.	ENTREVISTAS E ANÁLISE DAS RESPOSTAS.....	67
5.1.	Momento 1 - Construção de um sólido a partir de uma função com uso do <i>software Geogebra</i> .....	68
5.1.1	Conclusão - Momento 1.....	70
5.2	Momento 2 – Função de duas variáveis.....	70
5.2.1	Conclusão - Momento 2.....	74
5.3	Momento 3 - Cálculo do volume de um sólido.....	75

5.3.1 Conclusão - Momento 3.....	78
5.4 Momento 4 - O volume do sólido e o applet - Como chegar ao volume do sólido através do applet.....	78
5.4.1 Conclusão - Momento 4.....	93
5.5 Momento 5: Relação entre o volume do sólido e a integral dupla.....	94
5.5.1 Conclusão - Momento 5.....	106
5.6 Conclusões Gerais.....	107
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	109
7. REFERÊNCIAS.....	113
APÊNDICE A - ROTEIRO DE ENTREVISTA.....	120
APÊNDICE B: ARTIGO BACKENDORF e BASSO, 2018.....	121
APÊNDICE C: ARTIGO BACKENDORF ET AL., 2015.....	122
APÊNDICE D: ARTIGO BACKENDORF e BASSO, 2018.....	123
APÊNDICE E: ARTIGO BACKENDORF, 2017.....	124
APÊNDICE F: ARTIGO BACKENDORF, ET AL., 2016.....	125
APÊNDICE G - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	126

## 1. INTRODUÇÃO

Na atualidade, as tecnologias digitais estão inseridas em todas as áreas, inclusive na educação. Com isso, para acompanhar as mudanças no mundo do trabalho, os professores, de forma geral, participam de formações continuadas e atualizações no que tange à utilização das tecnologias digitais em sala de aula. Além disso, os cursos superiores que formam professores de matemática têm introduzido o uso de tecnologias digitais no desenvolvimento de determinados temas. Nesse contexto, está incluída também a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral<sup>1</sup>, cujos conteúdos podem ser abordados com a utilização das tecnologias digitais. No entanto, isto não tem influenciado significativamente na redução das taxas de reprovação e evasão, na disciplina. Identificados esses problemas, pergunta-se: seriam eles de natureza cognitiva ou metodológica, ou ainda, de ambas?

É do conhecimento dos professores de Matemática de todos os níveis educacionais, que este não é um problema verificado numa única Instituição ou região, mas segundo Bersch, Nascimento e Backendorf (2015) é objeto de estudo em todo território nacional, como apontam também Cury e Bisognin (2006, p. 2):

A preocupação com o ensino de Cálculo vem se mostrando constante; em quase todos os eventos relacionados com ensino de Matemática ou Engenharia temos encontrado trabalhos relacionados com as dificuldades demonstradas pelos alunos dessa disciplina, às vezes com sugestões de atividades para tentar modificar a situação.

Essa problemática que se verifica com mais intensidade no Cálculo é percebida em outras disciplinas que contemplam conceitos de matemática, tanto na Educação Básica como na Superior, como apontam Behar e Notare (2009):

Não é de hoje que se discute sobre os problemas da aprendizagem da matemática. Muitos são os motivos apontados para justificar o fato de que um número considerável de alunos não consegue compreender verdadeiramente matemática. Acredita-se que um dos grandes problemas da aprendizagem de matemática pode estar relacionado à forma como ela é apresentada aos alunos (BEHAR; NOTARE, 2009, p. 187).

As pesquisas e discussões acerca desse assunto vêm impulsionando a utilização da tecnologia digital no desenvolvimento de determinados conteúdos matemáticos. Assim, aposta-se que o uso dessa, possa contribuir na construção de conceitos de Cálculo, a partir da interação entre estudante e computador com a mediação do professor, que deve estar

---

<sup>1</sup> Neste texto utilizaremos o termo Cálculo para fazer referência ao Cálculo Diferencial e Integral

preparado para o planejamento de atividades, cuja realização pode ser beneficiada com a utilização das tecnologias.

Uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a “concretização” dos objetos matemáticos na tela do computador, dando a sensação de realismo e de existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades. Com a possibilidade de manipular os objetos matemáticos, surge uma nova forma de pensar e fazer matemática, configurando-se uma extensão do pensamento do indivíduo (NOTARE; BASSO, 2016, p. 2).

Como profissionais da área da educação, em particular, da matemática, sabe-se que para compreender e operar com os conceitos do Cálculo faz-se necessário buscar vários conceitos construídos anteriormente quando do estudo da matemática básica.

Considerando os aspectos elencados, esta pesquisa tem como propósito desenvolver um dos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo: ‘o conceito de Integral Dupla’. A Integral é fundamental na matemática avançada e tem sua origem na época de Arquimedes. No entanto, é consolidada apenas no século XIX. Sua aplicação na engenharia ocorre em diversas situações, em especial, no cálculo de áreas e volumes como integral definida, quando há um intervalo definido. Pretende-se, portanto, alcançar o principal objetivo que é compreender o conceito de Integral Dupla com o uso da tecnologia digital, através do *software Geogebra*.<sup>2</sup>, bem como, valorizar o pensamento do indivíduo. O *applet* do *software Geogebra* será empregado na verificação do volume de um sólido, o qual é interpretado como a integral dupla da função no intervalo dado.

Além dessa interpretação, outro aspecto a ser considerado é a aplicação do conceito de integral dupla na resolução de problemas ou situações do fazer de um engenheiro. Entende-se que o estudante que pretende formar-se engenheiro precisa saber interpretar um problema e conseguir utilizar o cálculo na sua resolução. Os professores, portanto, têm um papel importante na formação destes estudantes, logo, são as ações em sala de aula que vão direcionar os futuros profissionais. Como afirma Sauer (2004):

Propostas metodológicas, baseadas na transmissão de informações descontextualizadas, certamente não serão suficientes para que o aluno seja capaz de utilizá-las adequadamente em outras situações; de analisar novos problemas, integrando conhecimentos multidisciplinares ou de elaborar novos projetos, propondo soluções técnica e economicamente competitivas, ou mesmo pesquisar, extrair resultados, analisar e elaborar conclusões, propondo soluções para problemas de seu interesse (SAUER, 2004, p. 16).

---

<sup>2</sup> O software Geogebra é um software de matemática dinâmica gratuito, criado como tese por Markus Hohenwarter em 2001, na University of Salzburg.

A intenção é propor ambientes de aprendizagem que melhorem o desempenho dos estudantes e que estes possam utilizar em diferentes situações o que é abordado na disciplina de Cálculo.

Buscando maneiras criativas de melhorar o desempenho dos estudantes na compreensão das ideias do mesmo, movimentos de reforma do Cálculo, já desde a década de 80, apontavam para a necessidade de enfatizar, em seus programas, o que é realmente essencial selecionando, dentre as habilidades e competências sugeridas para os egressos dos diferentes cursos, aquelas que propiciem a passagem do conhecimento mecânico de efetuar operações ou manipular algoritmos para sua efetiva utilização em situações do cotidiano (SAUER, 2004, p. 16).

Com essa pesquisa espera-se levar os estudantes à compreensão e ao uso de componentes matemáticos sem necessariamente utilizar-se de um conhecimento mecânico<sup>3</sup>, mas, realizar isso com o uso de um *software* que propicie construções na tela. E, por ocasião da interação aluno-*software* poder verificar diferentes abstrações reflexionantes, que substituam manipulações mecânicas desprovidas de significado.

Acredita-se, pois, que o emprego de uma metodologia que faz uso da tecnologia digital poderá contribuir na construção de uma noção do conceito de integral dupla e auxiliar no seu entendimento. Ademais, poderá auxiliar na formação de cidadãos capazes de fazer conexões utilizando na prática o que aprenderam em disciplinas de Cálculo.

De acordo com o exposto até aqui, planejou-se esta pesquisa, aqui apresentada em diferentes capítulos.

Após essa Introdução, traz-se o Problema de Pesquisa, guia durante toda a pesquisa, visando sempre a compreensão do conceito de Integral Dupla. Com apoio na pergunta, apresenta-se o objetivo geral e os objetivos específicos elencados. Na sequência, é justificado o motivo pelo qual pretende-se desenvolver esse estudo e de que forma ele contribuirá para a construção e compreensão de conceitos na área de Ciências Exatas.

No Capítulo seguinte, é apresentado, de forma breve, o Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvendo, em especial, o conceito de integral, que pode ser interpretado como a área de uma região no trabalho com funções de uma variável, ou como o volume quando trata-se da integral dupla. Além dessas definições básicas, é apresentado o *software Geogebra* e sua inserção nas estratégias de trabalho.

No Capítulo 3, é apresentada a fundamentação teórica desta pesquisa, na qual diferencia-se a matemática elementar da matemática avançada e expõe-se a contribuição do

---

<sup>3</sup> Conhecimento mecânico aqui mencionado denomina-se como a incorporação de conceitos isolados; uma memorização sem compreensão.



uso do computador nas aulas de matemática, segundo David Tall (1986, 1989, 1993, 1995, 1996, 2000, 2001, 2002, 2012, 2016) e Ed Dubinsky (1991, 2014). Neste mesmo capítulo, é apresentada a Abstração Reflexionante de Piaget, que se constitui como base para analisar os dados obtidos nas entrevistas, a qual auxilia na compreensão do processo de construção dos conhecimentos matemáticos envolvidos neste trabalho. Ao mesmo tempo, é apresentado um levantamento sobre o que vem sendo estudado e pesquisado em relação ao Cálculo integral, em especial, à integral dupla. Busca-se também, verificar de que forma a tecnologia digital está inserida, quais suas contribuições e qual o tratamento dado à Abstração Reflexionante na análise das construções que ocorrem durante a construção de uma noção do conceito de integral dupla.

No Capítulo 4 são expostos os procedimentos metodológicos da pesquisa, a qual é de caráter qualitativo conforme Bogdan e Biklen (1994). Neste capítulo é discutida a produção dos dados e as etapas do desenvolvimento da pesquisa. Ações e interações dos estudantes durante as entrevistas são devidamente registradas para a obtenção de dados que posteriormente são analisados. Esses dados, obtidos mediante aplicação do Método Clínico de Piaget, tornam-se fundamentais quando pretende-se compreender como os estudantes constroem o conhecimento matemático.

A apresentação de alguns recortes das entrevistas é feita no Capítulo 5, em que apoiados na teoria exposta, analisa-se as estratégias, conceitos e definições utilizadas pelos estudantes entrevistados para responder aos questionamentos realizados e são apresentadas as conclusões, cujos resultados possibilitaram responder à questão de pesquisa. E, no último Capítulo são apresentadas as considerações finais.

### **1.1. Problema de Pesquisa**

A partir das considerações anteriores, projetou-se, com o intuito de verificar a aprendizagem dos estudantes de Cálculo, essa pesquisa objetivando contribuir para a construção de conhecimento matemático através da utilização de tecnologias digitais, nesse caso, do *software Geogebra*. A partir do pressuposto de que os estudantes da disciplina de Cálculo apresentam dificuldades de compreensão do conceito de integral dupla e enfrentam

dificuldades na resolução de situações-problemas que envolvem esse conceito, formulou-se a seguinte questão de pesquisa:

**Como a tecnologia digital pode contribuir, através do *software Geogebra*, para a compreensão do conceito de integral dupla, promovendo construções cognitivas acompanhadas pelo processo de abstração reflexionante?**

Para responder a essa questão, realizou-se uma pesquisa com estudantes que estavam cursando a disciplina de Cálculo I, na UNIVATES<sup>4</sup>, em Lajeado/RS. Essa disciplina, nos cursos de Engenharia da Instituição, aborda em sua ementa, além da derivada, a integral de funções de uma variável. A proposta inicial foi a intervenção numa disciplina de Cálculo II, cuja ementa trata da integral dupla. No entanto, para evitar que os estudantes entrevistados tivessem estudado ou construído o conceito de integral dupla em algum momento, optou-se por entrevistar estudantes que estivessem cursando a disciplina de Cálculo I, e assim, supostamente teriam estudado apenas a integral definida.

Esses estudantes foram entrevistados enquanto manuseavam um *applet* do *software Geogebra*, que permite inserir a função que representa um sólido qualquer e encontrar seu volume como a soma dos volumes dos prismas retangulares construídos a partir da base do sólido, cujo volume se pretende calcular. A partir da interação com o *applet* os estudantes foram questionados sobre os resultados e mudanças percebidas.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo Geral

Investigar, com base na Abstração Reflexionante, como e em que condições pode ocorrer a compreensão do conceito de integral dupla com a utilização de tecnologia digital, através do *software Geogebra*.

---

<sup>4</sup> Universidade do Vale do Taquari

### 1.2.2. Objetivos Específicos

\* Investigar, de acordo com a Abstração Reflexionante como ocorre o processo de construção de uma noção do conceito de integral dupla.

\* Analisar como a utilização do *software Geogebra* impacta a compreensão do conceito de integral dupla.

### 1.3. Justificativa

Com experiência na área de ensino, em especial de matemática, entende-se que os problemas e situações propostas em sala de aula podem ser resolvidos utilizando diferentes estratégias, algoritmos e operações. Nesse sentido, aposta-se no professor como mediador, desafiando os estudantes a utilizar estratégias próprias com o objetivo de promover a aprendizagem. Sua metodologia e a utilização de variados recursos é fator importante a ser considerado. Tecnologias digitais, nas aulas de matemática, podem contribuir para a construção de conhecimento necessário para compreender o conceito de integral dupla e, assim, promover a aprendizagem de Cálculo.

Coll; Mauri e Onrubia (2010) apontam que as TIC (tecnologias da informação e comunicação) podem modificar as práticas educacionais em que estão inseridas. E apresentam, através dos resultados de trabalhos que:

[...] os usos mais frequentes das TIC pelo professorado estão situados no âmbito do trabalho pessoal (busca de informação na internet, utilização do editor de textos, gerenciamento do trabalho pessoal, preparação de aulas). Os usos menos frequentes são os de apoio ao trabalho docente nas salas de aula (apresentações, simulações, utilização de software educacional, etc.) e os relacionados com a comunicação e o trabalho colaborativo entre os alunos (COLL; MAURI; ONRUBIA, 2010, p. 73).

Sabe-se que o professor tem à sua disposição recursos tecnológicos, no entanto, a obtenção de resultados positivos depende de como esses recursos são aproveitados:

[...] é tentar incorporar as TIC na educação escolar com a finalidade de tornar mais *eficientes e produtivos os processos de ensino e aprendizagem*, aproveitando os recursos e possibilidades que tais tecnologias oferecem. (COLL; MAURI; ONRUBIA, 2010, p. 87).

Como é grande o rol de estudantes que enfrentam dificuldades no Cálculo, há de se verificar se os recursos tecnológicos podem contribuir na melhoria dos processos de ensino

e de aprendizagem. É importante que se diferenciem esses processos, pois essa distinção contribuirá na qualidade das aulas. Segundo Masetto (2012, p. 44):

Ao se pensar em *ensinar*, as ideias associativas levam a instruir, comunicar conhecimentos ou habilidades, fazer saber, mostrar, guiar, orientar, dirigir. São ações próprias de um professor, que aparece como agente principal e responsável pelo ensino. As atividades centralizam-se nele, na sua pessoa, nas suas qualidades e habilidades. [...] Quando, porém, se fala em *aprender*, entende-se buscar informações, rever a própria experiência, adquirir habilidades, adaptar-se às mudanças, descobrir significado nos seres, nos fatos, nos fenômenos e nos acontecimentos, modificar atitudes e comportamentos.

Dessa forma, é possível pensar numa metodologia que favoreça a construção do conhecimento, e, como auxiliar nesse processo, conta-se com recursos tecnológicos que vêm contribuindo para melhorar o desempenho dos estudantes. Contudo, de nada adianta ter à disposição a tecnologia e seus recursos se os mesmos não são aproveitados de forma que contribuam nessa construção.

Com base em outras pesquisas como de (VILLARREAL, 1999; NICOLEIT, 2007; SILVA e FERREIRA, 2009; AMARAL e MÜLLER, 2012; BASSO e NOTARE, 2012; OLIVEIRA, 2013; FARIAS, 2015), as quais são comentadas mais adiante, pode-se destacar que os recursos tecnológicos podem influenciar de forma direta o processo de ensino e, por consequência, o processo de aprendizagem. No entanto, é recomendável que os mesmos sejam empregados de forma que os estudantes participem ativamente do respectivo processo de aprendizagem. Sua utilização deve valorizar o pensar sobre as ações e resultados, e, assim, podendo contribuir na interpretação e compreensão de fatos matemáticos além de facilitar a construção gráfica e a resolução algébrica de determinadas situações. Verifica-se essa contribuição tanto no ensino presencial como semipresencial e à distância. Uma das maneiras é através da exploração de Objetos de Aprendizagem. Segundo Vieira e Nicoleit (2007, p. 2): “[...] é um recurso digital que pode ser utilizado como auxílio ao processo de ensino-aprendizagem, e que tem a capacidade de ser reutilizado em vários contextos de maneira a facilitar a apropriação do conhecimento.”

Como o foco deste trabalho é a utilização da tecnologia no ensino e na aprendizagem da matemática, especialmente na disciplina de Cálculo, cita-se formas de obter resultados relevantes com a utilização de *softwares* matemáticos para explorar tanto a interpretação gráfica quanto a algébrica. Acredita-se, pois, que seja possível pensar em construção do conhecimento a partir da utilização da tecnologia. Analisando estes fatos, deve-se dar importância ao computador no que tange à aprendizagem de Matemática.

[...] o computador pode ser tanto um reorganizador quanto um suplemento nas atividades dos estudantes ao aprender Matemática, dependendo da abordagem que

eles desenvolvam nesse ambiente computacional, do tipo de atividades propostas, da relação que for estabelecida com o computador, da frequência no uso e da familiaridade que se tenha com ele (VILLARREAL, 1999, p. 362).

Segundo Basso e Notare (2012, p. 5) os recursos tecnológicos existentes atualmente podem influenciar positivamente no desempenho dos estudantes e ajudar na construção de conhecimentos matemáticos. Com a diversidade dos recursos existentes é possível explorar os diferentes conteúdos de forma que o estudante construa os conceitos matemáticos pertinentes. A utilização de recursos tecnológicos influenciará no desenvolvimento do raciocínio do estudante, que poderá fazer uso de diferentes esquemas para resolver uma determinada situação. Isso é, impactará seu processo de desenvolvimento cognitivo.

Nesse sentido, muito vem se discutindo para desenvolver maneiras de inserir as tecnologias na sala de aula. Conforme Silva e Ferreira (2009, p. 1):

A utilização da tecnologia, especialmente a do computador, pode ser encarada como uma colaboradora na sala de aula, pois permite tratar de problemas diversos que envolvem diferentes níveis de complexidade algébrica e grande quantidade de dados. Ela é facilitadora, já que, ao possibilitar uma ampla visualização de imagens, contribui tanto para a melhor aprendizagem de conceitos e de algoritmos quanto para aplicações da Matemática.

Segundo os pesquisadores citados, a visualização é compreendida como uma imagem, objeto e atividade. A tecnologia, por sua vez, possibilita a visualização gráfica que é um recurso cuja animação e imagens dinâmicas podem auxiliar na produção de conhecimento. Por isso, aposta-se no uso da tecnologia digital nas aulas de matemática. No entanto, faz-se necessário planejar e desenvolver atividades que de fato contribuam no processo de aprendizagem, como aponta Farias (2015), em sua tese:

Olhando em termos gerais para a perspectiva do professor que ensina matemática, cremos que esse, assim como qualquer outro professor que atue em áreas diferenciadas, não devem usar os recursos tecnológicos digitais apenas por uma questão de atualidade, como propõe Flichy (1995). O que significa dizer que o uso das TIC não garante aprendizagem, se o professor não fizer uso de metodologias adequadas, pois sendo assim, o que poderia trazer benefício pode se transformar em um agente de distração, devido à grande facilidade de acesso a diferentes conteúdos. Portanto, a função do professor como orientador é fundamental no processo de organização e relevância da informação. (FARIAS, 2015, p. 267).

Considerando o uso da tecnologia uma das tendências para o ensino da Matemática, especialmente do Cálculo, Oliveira (2013) defende a constituição de ambientes de aprendizagem que permitam a exploração de vários conceitos matemáticos, principalmente aqueles ligados à interpretação de funções via aspectos gráficos. Da mesma forma, Behar e Notare (2009, p. 202) afirmam que:

Sabe-se que a aprendizagem da matemática não se reduz à comunicação algébrica. Ambientes que possibilitem transitar entre as múltiplas representações de um

mesmo objeto matemático, como tabelas, diagramas e gráficos, são necessários, assim como a construção destes objetos de forma dinâmica.

O uso da tecnologia pode servir de apoio ao aluno no seu aprendizado. Nesse sentido, Amaral e Müller (2012, p. 4) defendem que: “Sendo assim, pretende-se contribuir para que esta prática seja difundida cada vez mais e que a tecnologia disponível seja usada em favor da aprendizagem da Matemática também em nível superior.”

Através desta pesquisa, pretende-se investigar se é possível promover a compreensão do conceito de integral dupla, interpretada como o volume de um sólido, com a utilização de tecnologias digitais, através do *software Geogebra*, e interpretar essa compreensão como um processo de abstração reflexionante, em especial de abstração pseudoempírica.

## 2. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### 2.1 Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo é uma disciplina cujos estudantes têm apresentado dificuldades na compreensão dos conceitos, principalmente, no início dos cursos de Ensino Superior, os quais são de grande aplicabilidade.

Inicialmente, foi proposto principalmente para a resolução de problemas envolvendo movimento e taxas de variação, mas também é amplamente utilizado em muitas outras áreas. Sua origem é atribuída a dois matemáticos do século XVIII, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (ZANARDINI, 2017, p. 99).

Os dois matemáticos chegaram à mesma conclusão em diferentes épocas.

Leibniz por volta de 1676 tinha chegado à mesma conclusão a que Newton chegara vários anos antes – que ele possuía um método que era altamente importante por causa de sua generalidade. Quer uma função fosse racional ou irracional, algébrica ou transcendentais (palavra que Leibniz inventou), suas operações de achar somas e diferenças podiam sempre ser aplicadas. Cabia, pois, a ele desenvolver linguagem e notação adequadas para o novo assunto. Leibniz sempre teve uma percepção aguda da importância de boas notações como ajuda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz. Depois de algumas tentativas ele se fixou em  $dx$  e  $dy$  para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em  $x$  e  $y$ , embora inicialmente usasse  $x/d$  e  $y/d$  para indicar o abaixamento de grau. A princípio ele escrevia simplesmente  $omn. y$  (ou “todos os  $y$ ”) para a soma das ordenadas sob uma curva, mas mais tarde ele usou o símbolo  $\int y$  e ainda mais tarde  $\int y dx$ , o sinal de integral sendo uma letra  $s$  (para soma) aumentada (BOYER, 1996, p. 277).

No entanto, a origem atribuída aos dois não dispensa o fato de que vários outros matemáticos deram importantes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo nos últimos séculos.

Acredita-se que sua aprendizagem se efetiva quando cada um dos conceitos necessários é compreendido, o que só ocorre a partir da construção e não de atividades mecanizadas. Além disto, tanto o conceito de derivada como o conceito de integral envolvem o conceito de limite, portanto, é fundamental que este seja construído, inicialmente como um processo seguido pelo respectivo conceito.

Segundo Stewart, 2013, pode-se definir o limite de uma função:

Suponha que  $f(x)$  seja definido quando está próximo ao número  $a$ . (Isso significa que  $f$  é definido em algum intervalo aberto que contenha  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ .) Então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos: “o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$  é igual a  $L$ ”

se pudermos tornar os valores de  $f(x)$  arbitrariamente próximos de  $L$  (tão próximos de  $L$  quanto quisermos), tornando  $x$  suficientemente próximo de  $a$  (por ambos os lados de  $a$ ), mas não igual a  $a$  (STEWART, 2013, p. 81).

Ainda, conforme Stewart, 2013, encontrar a reta tangente a uma curva e a velocidade de um objeto envolvem determinar um limite. Utilizado nas ciências e engenharia, este limite é chamado *derivada* e pode ser interpretado como uma taxa de variação.

Define-se a derivada de uma função  $f(x)$  em relação à variável  $x$  como sendo a função  $f'(x)$ , cujo valor em  $x$  é:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{desde que o limite exista, isto é, } f(x) \text{ seja contínua.}$$

O processo para obter uma função a partir de sua derivada é denominado antiderivação ou integração, pois a integração é a operação inversa da diferenciação. Uma função  $F(x)$  é uma antiderivada de  $f(x)$ . Define-se assim, a integral indefinida como o conjunto de todas as primitivas de  $f$ . A integral indefinida de  $f$  em relação a  $x$  é denotada por  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , sendo  $\int$  o símbolo da integral, um 's' alongado, como era utilizado antigamente, que indica uma soma infinita, e  $C$  uma constante aleatória, denotada a família de todas as antiderivadas de  $f(x)$ .

A integral definida como a operação inversa da derivada, tem sua aplicabilidade na determinação de áreas de regiões com fronteiras lineares e não lineares, volume de sólidos quaisquer, ou comprimento de uma curva. Ela, diferente da derivada, remonta às ideias de Arquimedes (287-212 a.C.) em seus cálculos de áreas e volumes. No entanto, somente no século XVII essas ideias são retomadas. E, somente no século XVIII a disciplina avança e desenvolve-se no sentido prático e aplicado. Mas, a integral atinge maturidade num trabalho de Riemann<sup>5</sup> (1826-1866), conforme Swokowski (1994) e Anton (2000).

Conforme Tall (2012), no Teorema Fundamental do Cálculo, a integral definida é, interpretada como a área de uma região sob um gráfico  $y=f(x)$ , limitada pelos pontos  $a$  e  $b$  no eixo  $x$ , em que faz-se uma partição cada vez menor de forma que a área abaixo do gráfico se estabilize, sendo considerada como a soma das áreas das tiras de altura  $y$  e largura  $dx$  construídas nessa região. Assim, a Soma de Riemann de  $a$  até  $b$  é:

---

<sup>5</sup> Georg Friedrich Bernhard Riemann foi um matemático alemão, que esclareceu a ideia de Integral Definida como área de uma região, através da teoria dos limites de aproximações finitas. A Soma de Riemann, tornou-se a base para a teoria da Integral Definida.

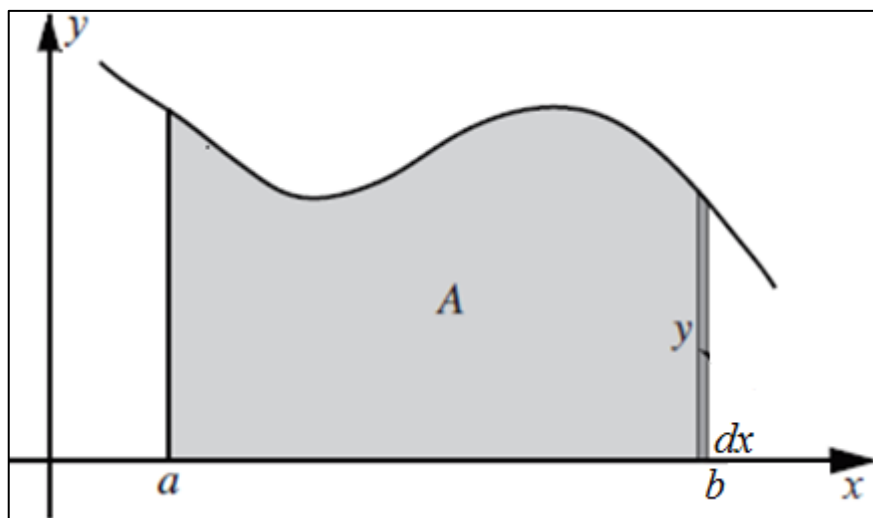


$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)dx_k$$

Onde a área  $A(a,b)$  abaixo do gráfico, conforme a Figura 1, pode ser escrita como:

$$A(a,b) = \int_a^b f(x)dx$$

**Figura 1** - Área de uma região sob a curva



Fonte: Adaptação de Tall (2012, p. 22)

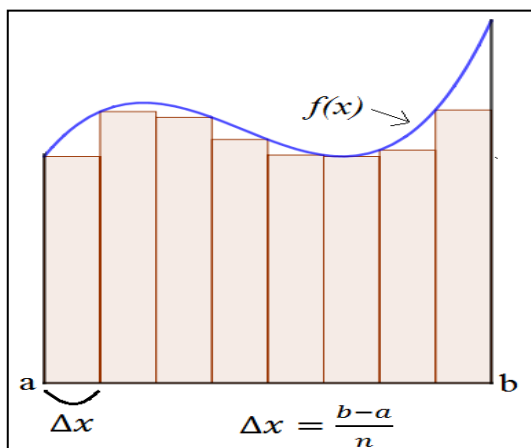
Assim:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \Delta x$$

Esse limite corresponde à Soma de Riemann, que é um limite da soma das áreas dos retângulos de base  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e altura  $f(x_j)$  que compõem a região num intervalo de  $x=a$  até  $x=b$  sob uma curva dada pela função  $f(x)$ , como representado a Figura 2.

**Figura 2** - Área de uma região sob a curva – área dos retângulos.



Fonte: Elaborada pela autora

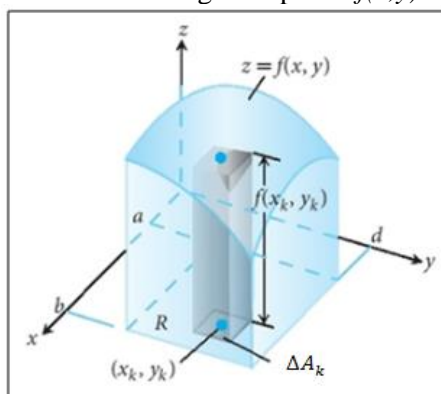
Essa área abaixo do gráfico pode tornar-se difícil, ou então, trabalhosa de calcular, no entanto, com o auxílio de *softwares* dinâmicos e a partir do conhecimento do Teorema Fundamental do Cálculo é possível fazer uma conexão entre a área de uma região e o conceito de Integral:

**Teorema Fundamental do Cálculo** – Seja  $f(x)$  uma função contínua no intervalo fechado  $a \leq x \leq b$  e  $F(x)$  uma antiderivada de  $f(x)$ . Então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Segundo Thomas, Weir e Hass (2012), assim, define-se a integral definida de uma função contínua  $f(x)$  sobre um intervalo  $[a, b]$  como um limite das Somas de Riemann. Pode-se ampliar esse conceito e definir a integral dupla de uma função contínua de duas variáveis  $f(x,y)$  sobre uma região no plano.

**Figura 3** - Volume do sólido-integral dupla de  $f(x,y)$  na região de base R



Fonte: Thomas, Weir e Hass (2012, p. 298)

Conforme a Figura 3, particionando o sólido em prismas retangulares, pode-se chegar ao volume desse sólido sobre o plano  $xy$  limitado inferiormente por  $R$  e superiormente pela superfície  $z = f(x, y)$ . Toma-se o prisma retangular de base  $\Delta A_k$  e altura  $f(x_k, y_k)$ , cujo volume é igual a  $V = \Delta A_k \cdot f(x_k, y_k)$ . Considera-se, então,  $n$  prismas, cuja soma dos volumes se aproxima do volume do sólido, pois à medida que  $n$  aumenta, as aproximações das Somas de Riemann tendem ao volume total do sólido, então  $S_n = \sum \Delta A_k \cdot f(x_k, y_k)$ . Pode-se partir de prismas retangulares inscritos no sólido ou circunscritos, de forma que a soma dos volumes dos  $n$  prismas convirja para um único valor: o volume do sólido limitado pela função  $f(x, y)$ .

Assim, define-se o volume de um sólido:

$$Volume = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(x, y) dA$$

Essa soma  $S_n$  que se aproxima do que se quer chamar de volume total do sólido, verifica-se no Teorema de Fubini, de acordo com Thomas, Weir e Hass (2012):

Se  $f(x, y)$  for contínua na região retangular  $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ , então, pode-se calcular a integral dupla, integrando em qualquer ordem:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

O conceito de integral dupla, como volume de um sólido, remonta à ideia das Somas de Riemann, fundamental na construção dos conceitos de integral como área de uma região.

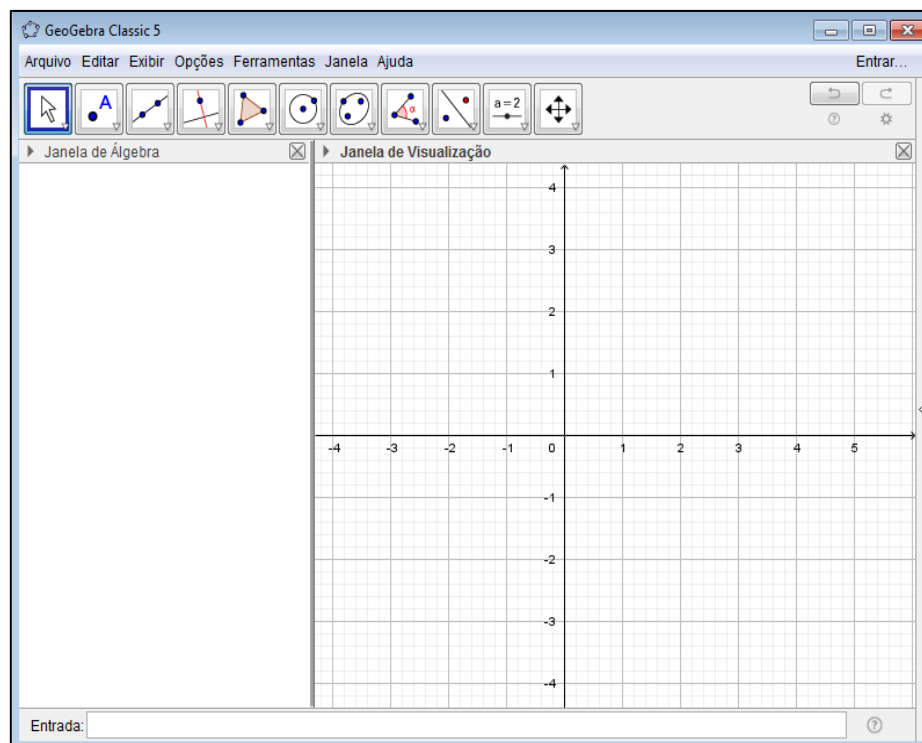
Para auxiliar na compreensão do conceito de integral dupla como volume de um sólido, utiliza-se o *software Geogebra* como um instrumento alternativo para desenvolver esta pesquisa. O *software* poderá contribuir na representação e visualização, conferindo maior precisão e rapidez nas ações, permitindo a compreensão das construções e verificação do volume do sólido e dos prismas retangulares construídos em seu interior.

## 2.2 Software Geogebra

O *software Geogebra* é um *software* de matemática dinâmica gratuito, criado como tese por Markus Hohenwarter em 2001, na University of Salzburg. O *software* combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculos em um único recurso tecnológico. É possível, com este *software*, construir gráficos em duas e três dimensões e manipulá-los. Ele conta com muitos recursos de fácil utilização, que possibilitam uma resolução de problemas, propiciando a construção de conceitos. O *software* está disponível na rede<sup>6</sup> para download e escrito em linguagem Java.

É possível, com o *software*, fazer construções como pontos, segmentos, retas, cônicas, polígonos, entre outras, as quais podem ser alteradas dinamicamente. Admite diferentes expressões e comandos, entre eles a derivada e integral. Uma característica é permitir a visualização da expressão na Janela de Álgebra e sua representação geométrica na Janela de Visualização. Na Figura 4, tem-se uma visão geral do *software*.

**Figura 4** – Interface do Geogebra – configuração padrão.

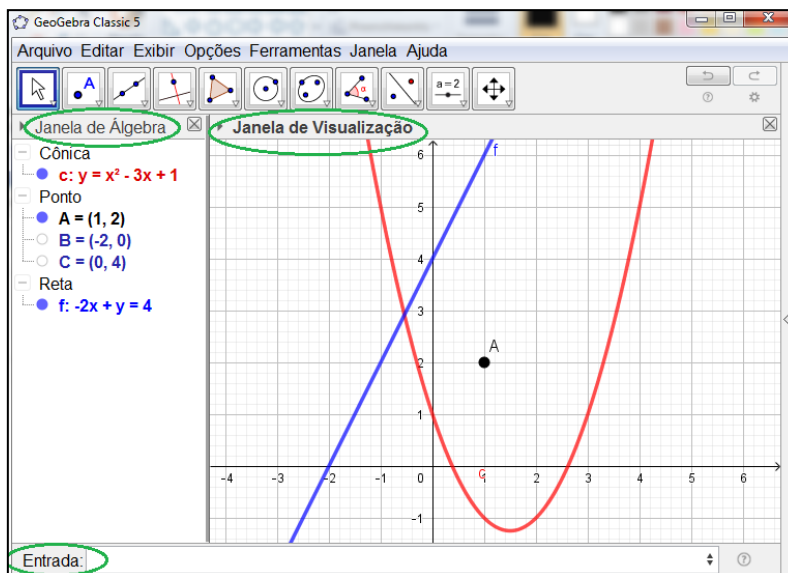


Fonte: Elaborada pela autora

<sup>6</sup> [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Na Figura 5, apresenta-se a Janela de Álgebra, Janela de Visualização, Campo de Entrada e Ferramentas onde aparecem todas as expressões, pontos, funções que construímos.

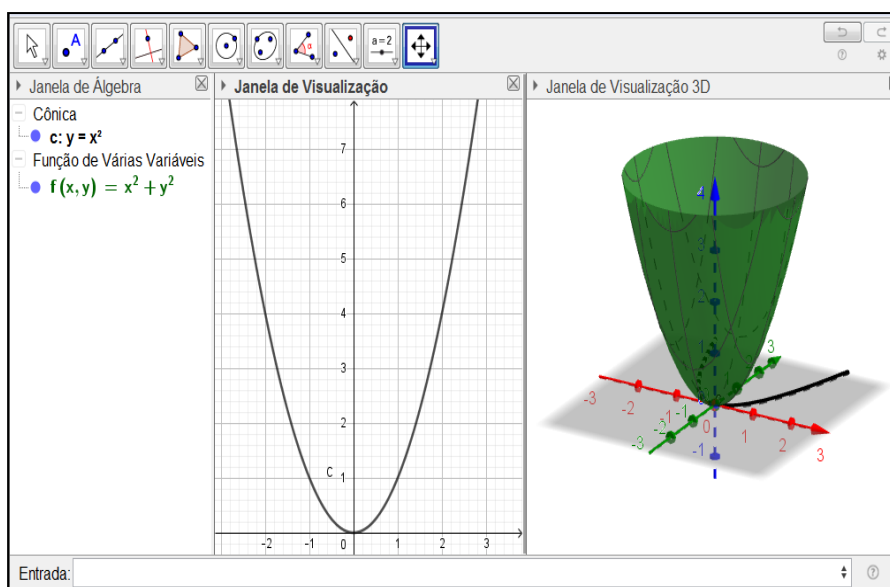
**Figura 5** - Campo de Entrada, Janela de Álgebra e Janela de Visualização



Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 6, mostra-se as Janelas de Visualização em 2D e 3D com algumas construções.

**Figura 6** - Geogebra em duas e três dimensões.



Fonte: Elaborada pela autora

Além das representações mostradas anteriormente, o *software GeoGebra* possibilita a criação de apresentações dinâmicas que podem ser utilizadas como alternativa para o ensino de vários conteúdos matemáticos.

### 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 O pensamento matemático

Muitas são as teorias que abordam o desenvolvimento do pensamento matemático, do nível elementar ao avançado. Nesta pesquisa, utiliza-se as ideias de David Tall, as quais tratam da matemática elementar e da matemática avançada, bem como da relação existente entre ambas.

Segundo Tall (2002), os matemáticos buscam entender o processo de pensamento matemático objetivando, melhorar a qualidade de ensino. Neste texto, define-se o que é a matemática elementar e o que é a matemática avançada, além de apontar o que diferencia uma da outra, conforme Tall (1995).

A matemática elementar é definida por Tall (1995, p. 1), como aquela que inicia com as percepções e ações em objetos no mundo externo. Esses objetos são descritos e analisados conduzindo à classificação, contagem e diversas operações que correspondem a diferentes desenvolvimentos do processo matemático. O autor considera dois desenvolvimentos diferentes em relação à construção de estruturas de conhecimento no que tange ao crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado, partindo da percepção para a ação. Um é o pensamento visual-espacial<sup>7</sup> que vai se tornando verbal-dedutivo, enquanto o outro usa símbolos e processos para contar e operar, e conceitos como o número, por exemplo, para pensar.

A matemática avançada, por sua vez, envolve a utilização de estruturas cognitivas, e segundo Tall (1995):

O pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para construir novas ideias que conduzem ao desenvolvimento e ampliação de um sistema crescente de teoremas estabelecidos (TALL, 1995, p.3).<sup>8</sup>

Considerando essas definições, Tall (1995, p.7) julga essencial distinguir a matemática elementar da avançada. Enquanto na primeira as propriedades são determinadas

---

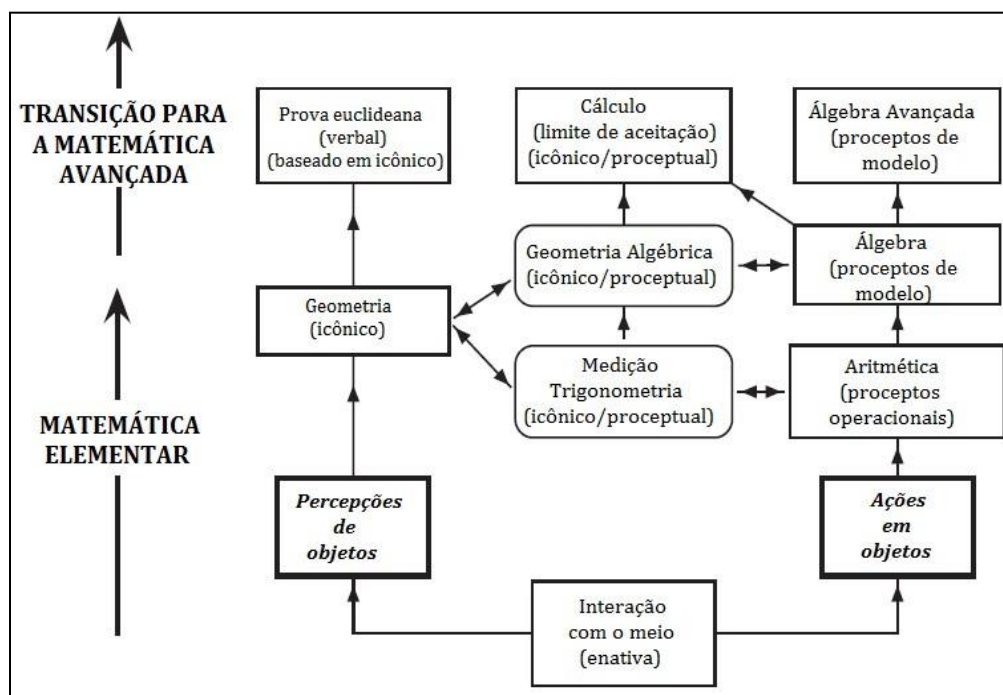
<sup>7</sup>Costa (2002, p. 263) define o pensamento visual-espacial “como o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objectos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas.”

<sup>8</sup> Citações de Tall - tradução nossa

atuando sobre os objetos e descreve-se para definir, na segunda, descreve-se os objetos a partir das definições. Nos dois casos, é utilizada a linguagem para formular as propriedades dos objetos, no entanto, na matemática elementar que corresponde à matemática básica e envolve a aritmética, a geometria e a álgebra, a descrição é construída a partir da experiência do objeto, enquanto na matemática avançada, que diz respeito à matemática desenvolvida em nível superior, que preocupa-se com definições formais e nessa pesquisa diz respeito ao estudo de Cálculo, as propriedades dos objetos são construídas a partir de definições. A transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, requer, portanto, construções e reconstruções cognitivas, conforme Tall (1995).

Na figura 7, é apresentada uma organização de ações e objetos na construção de várias estruturas de conhecimento matemático, da matemática elementar à avançada.

**Figura 7** - Ações e objetos na construção de várias estruturas de conhecimento matemático



Fonte: Tall (1995, p. 9)

Considerando o processo cognitivo de construção e reconstrução de conceitos e dificuldades de compreensão e aplicação de conceitos observadas na disciplina de Cálculo, verificou-se em algumas pesquisas como as de Barufi (1999), Muller (2015) e Silva (2017), que essa problemática não é característica de uma única instituição ou região, mas global. Dessa forma é razoável supor que o estudante que optar por um curso de Engenharia ou qualquer curso superior que contenha em sua grade curricular a disciplina de Cálculo

Diferencial e Integral, terá grandes chances de apresentar dificuldades ao cursar essa disciplina, podendo assim, desmotivar-se e até desistir do curso. Ainda, em relação a essas dificuldades observadas e à frágil construção de conceitos, são apontados diversos fatores que podem influenciar no insucesso tanto na Educação Básica como no Ensino Superior:

Compreender matemática não se resume a manipular técnicas operatórias, de forma mecânica, nem memorizar fórmulas, regras e propriedades. Compreender matemática é compreender o que se lê e escreve, buscando significado para isso. (BEHAR; NOTARE, 2009, p. 189).

Com base nas definições de Tall (1995), sobre a matemática elementar e avançada, aponta-se que a construção de conhecimento matemático avançado diante do elementar causa dificuldades, tornando o aprendizado mais difícil quando acontece a inserção da matemática avançada. São perceptíveis as dificuldades apresentadas pelos estudantes quando um conceito novo deve ser construído. Assim, entende-se o motivo pelo qual aprendizes de Cálculo, tão logo se deparam com diferentes conceitos, apresentam dificuldades de compreensão. A compreensão dos conceitos de derivada e integral, por exemplo, depende de conceitos anteriormente construídos como o conceito de limite. Conforme Tall (2016), o cálculo infinitesimal tem sido o carro-chefe da matemática clássica, que permite calcular a variação (derivação), acumulação (integral) e a relação entre as duas. No entanto, tem sido objeto de contínuas discussões. Para Tall (2001), o limite, definido a partir do cálculo infinitesimal, é frequentemente visto como um valor não fixo, mas como quantidade variável arbitrariamente pequena, grande ou um número qualquer.

Em relação ao conceito de limite Tall (1996) afirma:

Na porta de entrada para o cálculo está o conceito de limite que deve ser tratado de forma explícita ou implícita. Explícitamente, geralmente é tratado em termos de considerar expressões como  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ . (TALL, 1996, p. 305).

Em relação a essa expressão aparecem diferentes situações como: tende ou há um limite; considerar um  $h$  diferente de zero ainda que se obtenha um limite  $h \rightarrow 0$ ; concentrar-se na ideia de uma quantidade minúscula ao invés de se concentrar no valor do limite a ser encontrado. “Os estudantes apresentam dificuldades em relação ao conceito de limite, pois parece que continuam tratando-o como um processo que se aproxima (à medida que  $h$  diminui) e não como um conceito (o próprio limite)” (TALL, 1995, p. 8). Quando esse conceito não é construído, o estudante opta por estratégias ou algoritmos mais simples para resolver uma determinada situação. No entanto, corre o risco de não compreender o que está



fazendo. Enquanto alguns estudantes conseguem fazer conexões, outros enfrentam sérias dificuldades de compreensão, principalmente em se tratando de matemática avançada. Tall (2002, p. 296) destaca esse como um problema da heterogeneidade entre os estudantes; uns conseguem fazer conexões entre conceitos e outros não. Cabe então, ao professor utilizar instrumentos que favoreçam a compreensão e a aprendizagem.

### **3.2 As tecnologias digitais e a matemática**

A educação, assim como toda a sociedade, vem percebendo o impacto da inserção das tecnologias nas tarefas, relacionamentos e na organização do tempo e espaço. Pensando na metodologia e recursos tecnológicos empregados pelo professor de matemática, Tall (1993) assinala que é preciso tomar cuidado ao desenvolver materiais que requerem o uso do computador e que sejam utilizados no ensino.

Um software de computador para a aprendizagem da matemática, que difere do software para fazer matemática, precisa ser projetado de forma que leve em conta o crescimento cognitivo do aluno, que pode diferir significativamente da estrutura lógica do conceito formal. Portanto, é de valor começar por considerar aspectos cognitivos relevantes para o uso da tecnologia do computador antes da principal tarefa de se concentrar em ambientes computacionais e seu papel na aprendizagem da matemática. (TALL, 1993, p.189).

Como destaca o pesquisador em vários momentos, não se pode pensar simplesmente na utilização do computador como um recurso ou uma máquina, que substitui outras formas de registro das atividades, das resoluções e estratégias de resolução. Tall (2001) chama a atenção para a situação em que *softwares* e computador são utilizados apenas como uma simples troca do lápis e papel por um teclado. Isso não acrescenta nada à construção do conhecimento, simplesmente ocorre uma substituição dos recursos. No contexto desta tese, por exemplo, o uso do computador busca favorecer as abstrações reflexionantes que entende-se ser promotor da construção do conhecimento. O estudante, por sua vez, precisa ser estimulado e o computador deve fazer parte do processo de maneira que o estudante foque num determinado item, analise e tire suas conclusões a partir da interação com o ambiente computacional.

Em seu estudo, Thomas, Hong e Oates (2017) discutem as formas como a tecnologia é abordada nas escolas, considerando a transição do ensino secundário para o universitário: se acontece simplesmente uma demonstração por parte do professor; se o estudante atua limitado a tutorais e tarefas no laboratório; ou, se o estudante tem a liberdade de interagir, fazendo suas próprias construções. Apontam também, várias pesquisas recentes que envolvem aspectos inovadores do uso da tecnologia digital no ambiente matemático universitário. Citam o potencial do *software Geogebra* em capacitar os estudantes por meio de sua dinâmica permitindo assim, refletir sobre o processo. Seguindo uma mesma linha de estudo, Fitzsimons (2017) aposta na formação e no apoio técnico aos professores para que a utilização dos recursos tecnológicos tenha como foco o potencial educativo das tarefas, pois há de se reconhecer que as tecnologias digitais utilizadas nas aulas de matemática são parte importante na construção do conhecimento matemático.

Da mesma forma, Tall (2001) destaca o quanto é valiosa a utilização do computador como recurso para o desenvolvimento de atividades de experimentação, sendo que a partir dessas atividades o estudante pode observar certos fenômenos aos quais irá atribuir sentido. A utilização de *softwares* específicos, bem como o computador em si, requer planejamento e, segundo Tall (1989), sua inclusão no ensino exige mudanças nos currículos de matemática, mas é essencial a organização e condução por parte do professor para que aconteça a construção de conceitos.

O computador oferece novas possibilidades. [...] Esta forma de aprendizagem envolve uma negociação do significado dos conceitos matemáticos modelados pelo computador em que a organização do currículo e o papel do professor são essenciais. (TALL, 1989, p. 37).

Entende-se que o objetivo dessa tese está relacionado à utilização do computador como componente de interação e facilitador da produção de conhecimento. Reconhece-se, portanto, que o ambiente computacional ou *softwares* matemáticos podem ser úteis, auxiliando na construção de conceitos. No entanto, as atividades propostas devem ter ampla abrangência, o que possibilita a conexão entre diferentes conceitos favorecendo a construção do novo.

O computador é bastante diferente do cérebro biológico e, portanto, pode ser valioso ao fornecer um ambiente que complementa a atividade humana. Enquanto o cérebro realiza muitas atividades simultaneamente e propenso a erros, o computador realiza algoritmos individuais com precisão e com grande velocidade. Cálculos de computador com números e manipulação de símbolos têm algumas

semelhanças com a noção de proceito<sup>9</sup>. O simbolismo interno do computador é usado tanto para representar dados como à execução de rotinas para manipular esses dados. No entanto, existem diferenças significativas. O computador é simplesmente um dispositivo que manipula informações de uma maneira especificada por um programa. (TALL, 2000, p. 5).

A utilização do computador no desenvolvimento de atividades matemáticas, pode auxiliar na construção de conceitos, além de otimizar o tempo e possibilitar a realização de conexões entre as diversas propriedades envolvidas no contexto em questão. As tecnologias digitais, portanto, podem ser utilizadas na promoção da aprendizagem. Robotti e Frank (2017) apontam em seu estudo que as tecnologias digitais servem como um apoio na aprendizagem de estudantes com diferentes características de aprendizagem. Afirmam que alguns *softwares* promovem o aprendizado matemático de estudantes com dificuldades na aprendizagem.

Diferentes conteúdos matemáticos podem ser abordados com uso das tecnologias digitais. A geometria dinâmica é um exemplo de recurso que pode potencializar a aprendizagem da Geometria. Segundo Gravina (1996):

Nestes ambientes, conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas levam a descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjecturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, “o desenho em movimento”, passam para manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático (GRAVINA, 1996, p.13).

Appelbaum (2017) aponta que a utilização de Objetos de Aprendizagem e *softwares* matemáticos, além de auxiliar no desenvolvimento de diferentes tarefas, contribui nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

### 3.2.1 As tecnologias digitais e o Cálculo Diferencial e Integral

Abordou-se até aqui, a utilização das tecnologias digitais de uma forma mais ampla, no âmbito da matemática. De acordo com o foco dessa pesquisa, abordar-se-á sua utilização no ensino universitário, em especial, no ensino do Cálculo. Com base nas pesquisas de Melo

---

<sup>9</sup> Segundo Tall (2000) a noção de proceito é uma forma de descrever como a nossa mente lida com os símbolos que representam processos e conceitos matemáticos.

(2002); Lira (2008); Paranhos (2009); Godarzi et al. (2009); Guimarães (2010); Escher (2011); Alves (2014); Pires (2016); Fontoura (2016) e Almeida (2017), verificou-se como as tecnologias digitais vêm melhorando a compreensão dos conceitos de Cálculo, entre os quais, pode-se citar os conceitos de taxa de variação e crescimento cumulativo, que são fundamentais ao estudo do Cálculo e estão intrinsecamente relacionados.

Tall (1986) sugere que os conceitos de Cálculo, como a derivada e a integral, poderiam ser abordados com a utilização do computador por meio da construção gráfica, quando é gerada uma imagem que pode ser visualizada na tela e manipulada fisicamente através das teclas do computador e do mouse, facilitando a interpretação e consequente compreensão desses conceitos. A área de uma região sob uma curva é um exemplo de construção gráfica que pode possibilitar a produção de conceitos matemáticos. Para este exemplo, a representação manual requerer muitas operações matemáticas. Com a utilização de um *software* dinâmico, ao invés de supervalorizar as operações, é possível proporcionar uma concentração maior sobre as ideias envolvidas nessa situação, como a decomposição da região em regiões menores, cuja soma das áreas é igual à área de toda a região.

Envolvendo diferentes temas do Cálculo Diferencial e Integral, abordados com a utilização de variados recursos tecnológicos, foi possível identificar diversos trabalhos. Em sua dissertação de mestrado, Pires (2016) aborda o ensino de cálculo e as tecnologias, apresentando a seguinte questão norteadora: “Quais são as possíveis Influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Estratégias de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral?” E, em suas considerações afirma que não propõe acabar com a utilização de lápis e papel, mas que os meios tecnológicos favorecem a otimização do tempo, pois se acaba gastando menos tempo com rituais de ‘algebrização’<sup>10</sup>. Ressalta, que os estudantes devem ter a oportunidade de experimentar atividades investigativas e exploratórias de forma que a ênfase seja a aprendizagem.

Em sua tese de doutorado, Lira (2008) pesquisa a natureza do conceito de limite e faz uma reflexão sobre o que é um conceito. Com base na Epistemologia Genética de Piaget, analisa os mecanismos cognitivos relativos a limite. Assim, aponta como uma de suas hipóteses iniciais: “Objetos digitais podem ser utilizados para evidenciar e investigar os mecanismos cognitivos envolvendo o conceito matemático de limite”. Para efetivar sua pesquisa, realizou experimentos envolvendo Objetos de Aprendizagem com alunos da sétima

---

<sup>10</sup> Termo utilizado por Pires (2016)

série do ensino fundamental ao terceiro ano do ensino médio. A escolha desses sujeitos se deu pela faixa etária na qual os mesmos se encontravam, semelhante àquela em que se situavam os sujeitos da pesquisa de Piaget. Através da pesquisa, o autor identificou os mecanismos cognitivos envolvidos com o conceito de limite em objetos digitais interativos. Sugere, a partir de sua pesquisa, que sejam desenvolvidos trabalhos que busquem a compreensão dos mecanismos cognitivos relacionados aos conceitos de derivada e integral, uma vez que os mesmos dependem do conceito de limite.

Alves (2014) apresenta em sua proposta uma metodologia que utiliza o *software Geogebra* visando auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem<sup>11</sup> em Cálculo Diferencial e Integral. Desenvolveu atividades com gráfico de funções, limite de funções, derivada e integral. Concluiu que com a intervenção do *software*, tido como recurso facilitador para o entendimento dos temas abordados, os processos de ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral são favorecidos.

Com o objetivo de explorar a ideia de convergência percebida no limite de uma sequência, Guimarães (2010) desenvolveu um material didático para auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem desses conteúdos com a utilização dos *softwares Geogebra* e VCN, conforme Guimarães (2010, p. 31): “VCN (Virtual Cálculo Numérico, que está disponível no endereço [www.matematica.pucminas.br](http://www.matematica.pucminas.br)) – Sistema de Cálculo Numérico, produzido no ambiente DELPHI [...] é um *software* que foi desenvolvido por um grupo de professores da PUC Minas, sendo que o início dos trabalhos se deu em 1990.” Em sua pesquisa, pretendia investigar e analisar o quanto o ambiente informatizado pode contribuir para o aprendizado de conceitos essenciais do Cálculo como: limites, taxas de variação, integrais numéricas e equações algébricas e transcendentais. No que tange à integral, definindo-a como área de uma determinada região como as Somas de Riemann, utilizou o *software Geogebra* para construir esse conceito. Os estudantes de ensino superior, participantes dessa pesquisa, contribuíram para que a inserção da tecnologia no desenvolvimento dos conteúdos elencados pudesse ser avaliada positivamente no processo de ensino e de aprendizagem.

As tecnologias digitais podem interferir positivamente na construção dos conceitos de Cálculo, como se verifica em Almeida (2017), que em sua tese apresenta como objetivo:

---

<sup>11</sup> O ensino e a aprendizagem são processos distintos. Enquanto a aprendizagem acontece à medida que o sujeito se desenvolve, o ensino é uma forma de transmissão de conhecimento.

“elaborar material para o ensino de conceitos do Cálculo como um dos meios de promover integração entre teoria e prática.” Para alcançar este objetivo, utiliza o *software Geogebra* e incorpora os construtos teóricos de Tall, citando: - o organizador genérico, que pode ser definido como um ambiente em que o estudante pode manipular e verificar exemplos, correspondendo em nossa pesquisa, ao *applet* do *software Geogebra*; - a raiz cognitiva, cuja função é compor um organizador genérico, identificado em nossa pesquisa como a noção de volume de um sólido, que vai fazer a relação entre volume de um sólido e integral dupla; - os Três Mundos da Matemática que correspondem aos três modos de operações mentais, os quais, segundo Tall (2016) são:

Um mundo de incorporação (conceitual) baseado nas percepções e ações humanas que desenvolvem imagens mentais verbalizadas de maneiras cada vez mais sofisticadas para se tornar entidades mentais perfeitas em nossa imaginação.

Um mundo de simbolismo (operacional) que se desenvolve a partir das ações humanas incorporadas nos procedimentos de cálculo e manipulação simbólicos que podem ser comprimidos em proceitos para permitir um pensamento operacional flexível.

Um mundo de formalismo (axiomático) que constrói conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados por definições de conjunto, cujas propriedades são deduzidas por meio da prova matemática.

Em cada mundo da matemática, o reconhecimento, a repetição e a linguagem desempenham seu papel. (TALL, 2016, p. 135).

Estes construtos se fazem presentes no desenvolvimento de materiais de ensino para conceitos do Cálculo no trabalho de Almeida (2017). Em suas conclusões, entende que a utilização do *Geogebra* no desenvolvimento das atividades está em conformidade com Tall, pois este *software* contribui para a aprendizagem matemática, segundo Tall, confirmando a importância do uso das tecnologias digitais, ou neste caso, do *Geogebra* nas aulas de Cálculo.

### **3.2.2. As tecnologias digitais e o estudo da integral**

Entre os diversos trabalhos encontrados e analisados sobre a utilização das tecnologias digitais no desenvolvimento de conteúdos que abordam a matemática avançada, selecionou-se aqueles que tratam da integral, pois o foco desta pesquisa é a integral dupla. Assim, destaca-se alguns trabalhos.

Em sua pesquisa, Melo (2002) teve como objetivo verificar a capacidade dos estudantes em construir o conceito de integral usando um *software* matemático, confirmando

essa construção a partir das atividades realizadas, pois os estudantes utilizaram procedimentos e raciocínios próprios.

Também envolvendo a integral, a pesquisa de Paranhos (2009) aborda a construção dos conceitos de derivada e integral com o uso de *softwares* matemáticos, cujo objetivo foi, a partir da prática, fazer uma comparação entre o cálculo da integral por meio do algoritmo e o valor da integral como área ou volume através dos *softwares*. Afirma que muitos aspectos conceituais podem ser melhor explorados, tornando-se mais evidentes com a utilização de *softwares* e seus recursos.

Em sua pesquisa, Godarzi et. al. (2009) tratam a integral dupla como um dos principais e mais importantes conceitos do Cálculo envolvendo funções de duas ou mais variáveis. Investigaram a eficácia do *software* MAPLE 12 no desenvolvimento do conhecimento processual e conceitual na integral dupla. Na investigação, verificaram que estudantes simpatizaram com o *software*, pois puderam visualizar cada passo do cálculo da integral simples e dupla, ou seja, os procedimentos necessários para obter o resultado de uma integral. Acreditam que o desenvolvimento do CAS (sistema de álgebra computacional) levou a avanços na aprendizagem de matemática, pois na interação com o *software* compreenderam as conexões entre a representação gráfica e o conceito de integral dupla.

Fontoura (2016), questiona em sua dissertação de Mestrado: “que contribuições a utilização da metodologia da Engenharia Didática, com o apoio computacional do *software Maple*, pode oferecer para o ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades da integral dupla?”. Em seus objetivos, cita a utilização do *software Maple* para o ensino e aprendizagem do conteúdo de integrais duplas e se a construção do conceito de integral dupla é facilitada. Com base no trabalho realizado, conclui que os objetivos propostos foram alcançados e sugere a utilização do aplicativo desenvolvido no *software Maple* como recurso computacional para o ensino de integrais duplas.

Em Cálculo, verifica-se muitas possibilidades de utilização de diferentes ferramentas tecnológicas, sendo os *softwares* matemáticos (Maple, Geogebra, Winplot, VCN - Virtual Cálculo Numérico) os mais utilizados em função de seus variados recursos que contribuem na construção dos conceitos.

### 3.3. A construção do conhecimento

Como se conhece? O conhecimento está na pessoa quando nasce? É possível conhecer sem interagir? Quando há interação? Há interação se eu mudo minha ação quando atuo sobre um objeto.

A partir desses questionamentos, buscando definir e entender o que é o ‘conhecimento’ procurou-se definições desde o dicionário até a definição dada por Piaget. Segundo Houaiss (2015), a definição de conhecimento:

é o ato ou capacidade de conhecer, por meio da razão e da experiência; cognição; fato, estado ou condição de compreender; entendimento; informação sobre um fato, uma notícia; ciência; domínio (de um tema arte, etc.); competência; experiência.

Conceituando a partir da teoria de Piaget, se diria que o conhecimento é construído a partir de um processo que se chama abstração. É um processo que se dá por ações e operações.

Conforme Becker (2014, p.110):

[...] o conhecimento como capacidade não surge do nada; surge, sempre, da reorganização do que já havia sido construído previamente (o verdadeiro *a priori*) no plano da ação. Piaget diz que o desenvolvimento do conhecimento como capacidade dá-se por continuidade funcional (assimilações e acomodações) e rupturas estruturais [...]. Infere-se, então, que sem continuidade funcional não se chega a rupturas estruturais.

Dessa forma, sobre o conhecimento Becker (1994, p.88) afirma:

[...] Isto é, o **sujeito** humano é um projeto a ser construído; o **objeto** é, também, um projeto a ser construído. Sujeito e objeto não têm existência prévia, a priori: eles se constituem mutuamente, na interação. Eles se **constroem**. Como? O sujeito age sobre o objeto, assimilando-o: essa ação assimiladora transforma o objeto. O objeto, ao ser assimilado, resiste aos instrumentos de assimilação de que o sujeito dispõe no momento. Por isso, o sujeito reage refazendo esses instrumentos ou construindo novos instrumentos, mais poderosos, com os quais se torna capaz de assimilar, isto é, de transformar objetos cada vez mais complexos. Essas transformações dos instrumentos de assimilação constituem a ação acomodadora. [...] O sujeito constrói seu conhecimento na interação com o meio tanto físico como social.

Segundo Piaget (1982), a organização e a adaptação são inseparáveis. “É adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas.” A adaptação, vista como equilíbrio entre a assimilação e acomodação, ocorre quando o organismo se transforma em função do meio.

Dessa forma, conceituou-se segundo Piaget (1982) a assimilação como a estruturação por incorporação da realidade exterior às formas devidas à atividade do sujeito, implicando



em transformação do objeto. O funcionamento do organismo não destrói, mas conserva o ciclo de organização e coordena os dados do meio, de modo a incorporá-los no ciclo. “A inteligência é assimilação na medida em que incorpora nos seus quadros todo e qualquer dado da experiência.” (PIAGET, 1982, p. 17).

O homem produz inteligência para conseguir se adaptar ao meio em que vive, essa é a função da inteligência, a sobrevivência. A produção da inteligência, ou da capacidade cognitiva, faz parte do processo de adaptação do organismo. Para Piaget (1967), a inteligência é a forma mais especializada de adaptação que se conhece.

A acomodação, por sua vez, é definida por Piaget como o resultado das pressões exercidas pelo meio, que implica transformação do sujeito, realizada pelo próprio sujeito. Assim, a assimilação e a acomodação são ações transformadoras do próprio sujeito. E, de acordo com Piaget (1982) “a adaptação intelectual, como qualquer outra, consiste numa equilibração progressiva entre um mecanismo assimilador e uma acomodação complementar. O espírito só se pode considerar adaptado a uma realidade quando há uma acomodação perfeita, isto é, quando nada nesta realidade vem modificar os esquemas do sujeito”.

Diante disso, definiu-se esquema segundo Flavell (1996, p. 52):

Esquema é uma estrutura cognitiva que se refere a uma classe de seqüências de ação semelhantes, seqüências que constituem totalidades potentes e bem delimitadas nas quais os elementos comportamentais que as constituem estão estreitamente inter-relacionados.

Portanto, o sujeito para assimilar um novo conceito, busca as operações que já sabe realizar, as quais são os conceitos que ele já tem assimilado, que de forma organizada correspondem às suas estruturas mentais. Seu organismo, por sua vez, manifesta um processo, sempre tentando relacionar essas estruturas mentais com os elementos novos que quer assimilar. No caso de um conhecimento novo, algo nunca visto, o sujeito entra num processo de equilibração, é realizada uma reorganização das estruturas para que ele consiga então assimilar esse conhecimento novo, assim, entrando em um estado de equilíbrio novamente, acomodando-se em um novo patamar cognitivo, construindo, assim, o conhecimento. Esse ciclo completo configura o que Piaget compreende como construção de conhecimento ou capacidade cognitiva.

Para explicar a construção e o desenvolvimento do conhecimento, utilizou-se o modelo construído por Piaget que demonstra a passagem de um patamar cognitivo mais simples para

outro patamar mais elevado, mais complexo. Denominou esse modelo, ou melhor, esse processo de Abstração Reflexionante.

### 3.4. A Abstração Reflexionante

Em se tratando de construção de conceitos matemáticos, buscou-se uma teoria que permitisse entender e compreender o processo de construção conceitual. Buscou-se para isso, fundamentar-se na abstração reflexionante de Piaget, a qual mostra que é através das ações que o sujeito conhece o mundo, pois Piaget trata do conhecimento como uma construção que ocorre a partir na interação entre sujeito e objeto. O sujeito torna-se cada vez mais capaz de compreender determinadas situações através do processo de construção e reconstrução das estruturas cognitivas.

Então, como se conhece? Abstraindo? Mas o que significa abstrair? Significa arrastar, retirar, extrair, aspirar, separar, apartar. Separar mentalmente uma parte de um todo e a considerar de forma separada das outras partes. Conhecimento, então, é o ato ou o efeito de abstrair características dos objetos ou das ações. Piaget acrescenta uma nova instância: abstrair características das coordenações das ações.

Para compreender o processo de construção do conhecimento ou capacidade cognitiva buscou-se em Piaget (1995), explicitado por Becker (2014), a definição da abstração reflexionante. Piaget distingue *abstração reflexionante* de *abstração empírica*.

Segundo Becker (2014, p. 105) a abstração empírica “consiste em retirar qualidades dos objetos ou das ações em suas características materiais, isto é, daquilo que pode ser observado.” Exemplificando: ao ver uma flor, consideramos a flor um objeto, e ao plantar uma flor, a ação é plantar. Essa possibilidade de retirar características dos objetos ou ações é que caracteriza as abstrações empíricas. Eis a definição de Piaget (1995, p. 5):

[...] ”abstração empírica” (*empirique*) a que se apoia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, mesmo sob suas formas mais elementares, esse tipo de abstração não poderia consistir em puras “leituras”, pois para abstrair a partir de um objeto qualquer propriedade, como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar de saída instrumentos de assimilação [...] oriundos de “esquemas” (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito.

Mas a teoria de Piaget versa sobre abstração reflexionante que consiste em retirar ou extrair características das coordenações das ações<sup>12</sup>. Como tais coordenações são endógenas, não são passíveis de observação. Piaget (1995), apoia-se sobre as formas e as atividades cognitivas do sujeito; a abstração reflexionante retira delas certas características que serão utilizadas para outros fins.

Piaget considera a abstração reflexionante cada vez mais autônoma enquanto a abstração empírica consegue avançar porque se apoia nela. Dessa forma, diz-se que o conhecimento deriva da experiência, mas não só da experiência empírica. O sujeito não só retira características do mundo objetivo sobre o qual age fisicamente, ele retira também, e principalmente, características das coordenações de suas ações; são as construções com o que retira dessas coordenações que, aos poucos, passam a comandar as abstrações empíricas. E, segundo Piaget (1995), as coordenações das ações do sujeito podem permanecer inconscientes, bem como dar lugar a tomadas de consciência e variadas conceituações.

A passagem de uma coordenação, ou de muitas coordenações sintetizadas numa operação, a uma coordenação ou operação mais complexa faz-se por abstração reflexionante – que implica equilibração, por assimilações e acomodações, retirando qualidades dessas coordenações ou operações, constituindo, assim, novidades. Uma nova operação, composta de muitas coordenações de ações, mais capaz que a anterior e de maior abrangência. (BECKER, 2014, p. 107).

Neste contexto, cita-se a abstração pseudoempírica como um caso particular de abstração reflexionante: aquilo que o sujeito tira dos objetos são propriedades que foi capaz de introduzir neles, de acordo com o nível de suas coordenações de ações (PIAGET 1995, p. 147). Assim, a abstração pseudoempírica é aquela que, como abstração reflexionante, se apoia nas coordenações do sujeito; mas, ele as retira de objetos observáveis. Entretanto, as propriedades que retira dos objetos não pertencem aos objetos; foi o sujeito que as introduziu previamente nos objetos. Ainda, em relação à abstração pseudoempírica, Becker (2014) a situa como a meio caminho entre as abstrações empíricas e reflexionantes.

Essa pesquisa visa verificar a presença de abstrações pseudoempíricas no estudante ao utilizar o *applet*, do *software Geogebra* para calcular o volume de um sólido. Ou seja, perceber que o estudante está realizando construções e apoiando-se de forma dedutiva nesses resultados. Espera-se que com a utilização do *applet*, as atividades proporcionem a compreensão das propriedades inseridas no objeto pelo sujeito como se estivesse tratando de

---

<sup>12</sup> Atividades cognitivas do sujeito; processo que transforma as ações em operações.

objetos materiais. Dessa forma, qualquer constatação do estudante sobre as propriedades daquele sólido e seu volume pode ser consequência de uma abstração pseudoempírica.

Objetivando fazer conexões entre a base teórica e a pesquisa realizada, traz-se o exemplo do sólido, cujo volume pretende-se conhecer. Se esse sólido é manipulado, modificado pelo estudante e algumas propriedades conhecidas são aproveitadas para encontrar o volume, pode-se verificar a abstração pseudoempírica, pois:

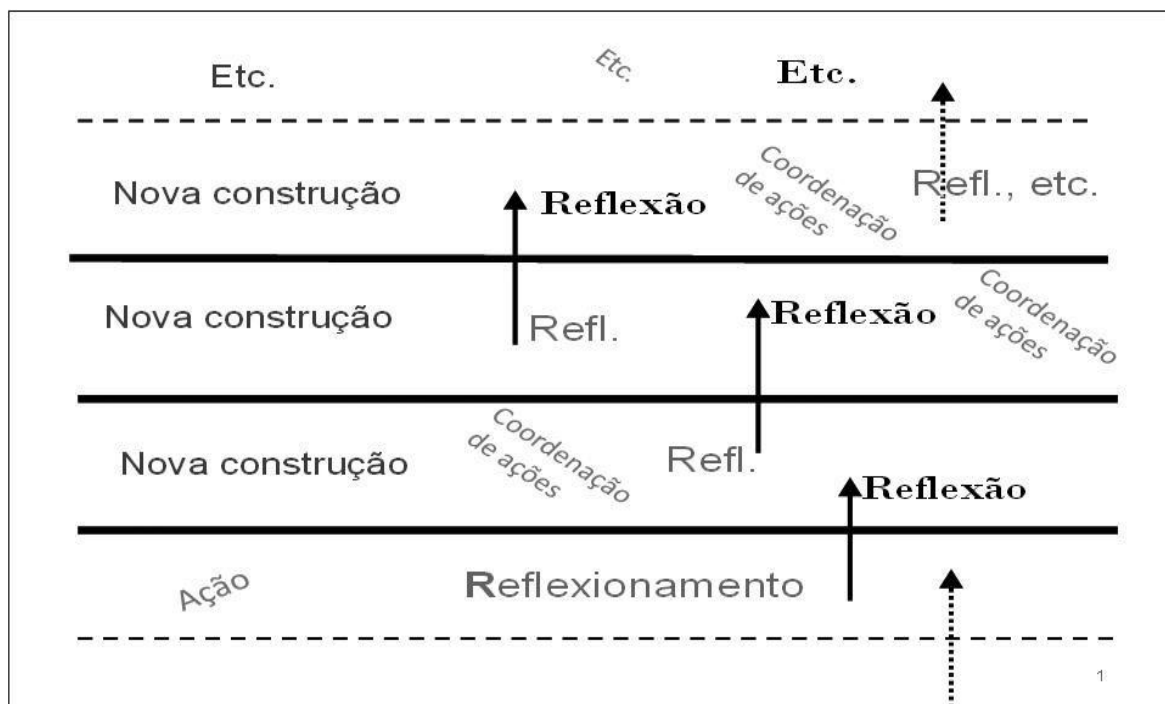
Quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (p. ex., ao ordenar elementos de um conjunto), a abstração apoiada sobre tais propriedades é chamada “pseudoempírica” (*pseudo-empirique*), porque, ao agir sobre o objeto e sobre seus observáveis atuais, como na abstração empírica, as constatações atingem, de fato, os produtos da coordenação das ações do sujeito: trata-se, pois, de um caso particular de abstração reflexionante e, de nenhum modo, de uma decorrência da abstração empírica. (PIAGET, 1995, p. 274)

Quando o sujeito toma consciência da abstração reflexionante, ele a transforma em abstração refletida, que implica na apropriação dos mecanismos gerais da ação. Chega-se então, ao processo de abstração reflexionante que se realiza em dois momentos: por reflexionamentos que, segundo Becker (2014), é a retirada de qualidades das coordenações das ações que, de um patamar qualquer, são transferidas a um patamar superior; e, por reflexões que são as reorganizações daquilo que foi transferido a outro patamar juntamente com o que já existia no presente patamar. De acordo com Piaget (1995, p. 277), nos diferentes patamares de reflexionamento, nos quais há uma possibilidade de novas reflexões, estão as abstrações refletidas, cuja evolução difere da evolução das abstrações pseudoempíricas. Estas, são de fundamental importância durante o estágio das operações concretas em função da necessidade que o sujeito tem de realizar uma composição operatória e julgar os resultados necessitando a inserção em objetos. Nesse sentido, com o progresso das abstrações reflexionantes, o sujeito chega a distanciar seu pensamento dos apoios concretos fazendo com que a abstração refletida desempenhe um papel cada vez mais importante, chegando ao nível das operações formais. As abstrações pseudoempíricas e refletidas, coexistentes, caracterizam-se pela sua evolução inversamente proporcional, enquanto a pseudoempírica perde seu valor relativo (mas não desaparece) a refletida vai aumentando o seu, estando presente em todos os níveis (PIAGET, 1995, p. 277).

Trata-se esse processo, de reflexionamentos e reflexões, apresentado no Quadro 1, como um processo contínuo constituindo-se de novas construções, que são observadas em todos os estádios, pois conforme Piaget (1995), novos patamares de reflexionamento surgem a partir dos quais realizam-se novas reflexões fazendo surgir novas construções. E, Piaget

(1995, p. 18) trata “[...] de uma forma superior de abstração: uma abstração refletida, ou seja, um processo de abstração reflexionante, procedendo por reflexão sobre as reflexões particulares.”

**Quadro 1** - Processo de Abstração Reflexionante.



Fonte: Becker (2017, p. 377)

O processo de abstração reflexionante realiza-se como todo processo de construção de conhecimento, por interação. Interação entre sujeito e objeto, disparada pela ação do sujeito.

O princípio teórico subjacente à abstração reflexionante é o da (inter)ação. Interação significa que os dois polos da relação epistemológica, ao mesmo tempo opostos e complementares, são ativos. Como tudo começa com a assimilação, a ação assimiladora do sujeito inicia um ciclo de ações sobre o objeto (uma coisa, uma pessoa, uma noção ou conceito, um fato científico, uma teoria, etc.), seguido de ações de retorno, do objeto sobre o sujeito – o objeto responde a essa ação, com uma ação de retorno. O sujeito, frente a essa ação de resistência do objeto a ser assimilado, modifica seus esquemas assimiladores (acomodação) para dar conta da nova ação que percebeu ser insuficiente. Um novo ciclo de ações pode ser inaugurado se o sujeito resolver continuar e voltar a agir sobre o objeto, agora com capacidade de assimilação melhorada devido à acomodação, completando um ciclo de equilíbrio majorante ou de abstração reflexionante. (BECKER, 2017, p. 377)

É na ação assimiladora e acomodadora, ou por reflexionamento e reflexão, do estudante sobre conceitos já conhecidos, que ele constrói outros. Como ele constrói outros conceitos? De acordo com a teoria, sabe-se que essa construção ocorre por abstração

reflexionante, pseudoempírica e refletida. Essa construção pode ser possibilitada através de atividades realizadas com o uso de recursos tecnológicos. O ser humano nasce capacitado para agir e com condições para construir. A inteligência humana evolui, portanto, por um ativo desenvolvimento (construção) e não por uma herança (apriorismo) ou pela pressão do meio (empirismo). Logo, todas as ações que o indivíduo realiza são fundamentais para o desenvolvimento de sua capacidade, especialmente aquelas que realiza sobre o conteúdo em pauta.

Notadamente, é possível partir de uma incompreensão para se chegar a uma completa compreensão. Isso, após processos de reflexionamento e de reflexão, pelos quais tanto o sujeito quanto o objeto se transformam e se constituem como novo ponto de partida para novas construções. O ponto de chegada de um processo de abstração reflexionante, segundo Piaget, é uma generalização:

[...] o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização [...] o resultado de uma abstração empírica conduz a precisar o grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto. [...] toda generalização supõe uma abstração prévia, ou, pelo menos, a delimitação das propriedades generalizadas. (PIAGET, 1995 p.59).

O objetivo que se busca atingir através do desenvolvimento dos conteúdos, numa disciplina de Cálculo, é a construção de conhecimento novo, o que se dá através do processo de abstração reflexionante. Não se pretende aqui falar em ‘passar’ conteúdo, ou fazer com que o estudante memorize técnicas. É fundamental que se possibilite a interação sujeito-objeto. Com propostas de utilização das tecnologias há como provocar essa interação, ou, melhor, desafiar os educandos e, assim, promover o seu desenvolvimento cognitivo. O *software* utilizado no desenvolvimento das aulas oferece recursos que desafiam os alunos a utilizar os conhecimentos existentes e, em seguida, transferir as coordenações utilizadas a um patamar superior; a reflexão ou reconstrução, nesse patamar superior, pode fazer surgir um conceito novo alcançando, então, um grau de generalização superior.

### **3.5. A abstração reflexionante e a aprendizagem matemática**

Em relação à abstração reflexionante, verificou-se que vários pesquisadores a utilizam em sua análise, no entanto, muito mais para entender o processo de aprendizagem da matemática elementar do que da matemática avançada.

Bona (2012) que em sua tese trata do processo de aprendizagem cooperativa e da Abstração Reflexionante, destaca que o processo de abstrações reflexionantes desencadeadas nas trocas cooperativas é que favoreceram o aprender a aprender dos estudantes. Entende que a relação entre cooperação e abstração reflexionante resulta na construção de conceitos por parte dos estudantes, cujo estudo poderá ser ampliado em pesquisas futuras.

Em sua tese, Notare (2009) apresenta o seguinte problema de pesquisa: “Como uma ferramenta, incorporada em um ambiente virtual de aprendizagem pode auxiliar na comunicação científica *on-line* e no processo de construção de conhecimento de conceitos matemáticos?” Para responder a essa pergunta, a pesquisadora utiliza como base a teoria cognitiva de Piaget para entender o processo de aprendizagem da matemática dando ênfase aos processos de abstração reflexionante e tomada de consciência – esta transforma uma abstração reflexionante em abstração refletida, responsável pela construção de conceitos.

Buscou respostas através de experimento em que desenvolveu atividades relacionadas a temas do Cálculo como: limites, taxas de variação, derivada e suas aplicações. Com esse experimento mostrou as possibilidades de uso dos recursos tecnológicos em matemática. Focou na utilização do ROODA Exata, plataforma de Educação à Distância utilizada na UFRGS, em suas funcionalidades, dificuldades de utilização e de expressão matemática. Ao mesmo tempo analisou a aprendizagem dos conceitos matemáticos, a tomada de consciência e os níveis de abstração. A partir da participação dos estudantes da disciplina de Cálculo em um fórum de discussão do ambiente ROODA, analisou resoluções apresentadas posicionando-as quanto ao nível de abstração, bem como compreensão de um determinado tema. Esse experimento possibilitou também uma análise dos diferentes percursos que cada estudante pode percorrer até chegar à solução de um problema.

Em sua pesquisa, Notare (2009) verificou a relação entre conceitos e compreensão das próprias ações. Segundo a pesquisadora, o espaço de construção coletiva favorece a busca por explicações e justificativas, levando à solução de um problema. Com isso, completou que a utilização do ambiente virtual de aprendizagem possibilitou aos estudantes assumirem uma postura mais ativa. Aqueles que assumiram uma postura mais ativa, comprometendo-se com o trabalho, puderam avançar no conhecimento matemático. Concluiu que esses estudantes construíram novas estruturas cognitivas que permitiram a tomada de consciência, mesmo que parcial dos conceitos estudados.

Outros pesquisadores averiguaram como ocorre a construção de conceitos matemáticos, em especial, de Cálculo. Pode-se citar Silva (2017) que teve como um dos

objetivos específicos de sua tese, investigar processos de abstração reflexionante pelos estudantes ao tentar conceituar ‘limites de funções’, concluindo que:

A abstração pseudoempírica mostrou-se como um importante recurso para a educação. Por ela é possível valorizar o processo empírico realizado pelos alunos em sua vida escolar. Permite conhecer a qualidade das interações entre sujeito e objeto que levam à construção da novidade por processos da abstração refletida (SILVA, 2017, p. 206).

Todas essas pesquisas contribuem para o delineamento dessa pesquisa cujo foco é a integral dupla. No entanto, outros temas como limites de funções, são de total interesse, pois conforme Tall (2002), o limite é a porta de entrada do Cálculo.

Na sequência, apresenta-se algumas pesquisas mais direcionadas ao estudo da integral e posteriormente da integral dupla. Dessa forma, cita-se Silva et. al. (2014) que desenvolveram uma pesquisa, publicada na revista *Espacios*, na qual pretendiam verificar a contribuição do *software Geogebra* no ensino do cálculo de área sob uma curva por integrais. Discutiram as possibilidades e limites de uso do computador. Destacam que ficou evidente nos registros dos estudantes a compreensão de que a integral definida de uma função  $f(x)$ , num dado intervalo de  $x=a$  a  $x=b$ , corresponde à soma das áreas dos  $n$  retângulos inscritos ou circunscritos na região delimitada por  $f(x)$  e o eixo  $x$ , no intervalo  $[a,b]$ , quando a quantidade  $n$  de retângulos tende ao infinito. Os autores citaram a abstração reflexionante; no entanto, não a utilizaram para fazer a análise. Afirmam que a intervenção favoreceu o processo de construção de conhecimento.

Outra pesquisa, que não envolve a integral dupla, mas a integral definida, foi desenvolvida por Sealey (2006), que buscou verificar a compreensão das Somas de Riemann e a integral definida. Não utilizou a tecnologia, mas analisou os dados obtidos de acordo com a abstração reflexionante, quando discute como o estudante compreende a integral definida. Supõe que eles não entendem integrais definidas simplesmente olhando muitas delas, mas precisam atuar sobre as integrais para perceber a estrutura que está por trás da integral definida como as Somas de Riemann.

Um trabalho que não aborda o tema tecnologia, mas outros do interesse como a teoria de Piaget e a matemática avançada é o artigo de Paschos e Farmaki (2006), que apresentam a abstração reflexionante e o conceito de integral definida. Na pesquisa, os autores desenvolvem atividades que possibilitam ao estudante construir o conceito de integral definida de forma que sua principal aplicabilidade esteja concentrada no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, cuja análise é feita à luz da abstração reflexionante



como forma de interpretação das operações mentais. Observaram, no estudo de caso apresentado, que um esquema específico pode levar a um esquema geral. As ações sobre os objetos levam à generalização e conseqüente construção do conceito.

Para o desenvolvimento desta tese, buscou-se de forma minuciosa pesquisar trabalhos envolvendo os três temas presentes na pesquisa: tecnologias digitais, construção do conceito de integral dupla e abstração reflexionante. Localizou-se grande número de trabalhos, cujos pesquisadores procuram respostas para as diferentes perguntas sobre os temas. No entanto, juntando os três temas numa única pesquisa, diminuiu consideravelmente a quantidade de trabalhos que versavam sobre os temas ao mesmo tempo. Assim, focou-se no que mais se aproximava do problema em questão. Esta busca auxiliou no delineamento da pesquisa, pois verificou-se que vários pesquisadores buscaram compreender como ocorre a construção de conceitos de matemática avançada e ao mesmo tempo, procuraram saber como as tecnologias digitais contribuem para essa construção.

### **3.6. Teoria APOS**

A teoria APOS, desenvolvida por um grupo de pesquisadores em educação matemática, em especial, Ed Dubinsky, que iniciou as pesquisas nesse sentido, baseia-se na reconstrução das ideias de Piaget sobre a abstração reflexionante em relação aos conceitos matemáticos em crianças, sendo adaptada para a análise da aprendizagem dos conceitos da matemática avançada. Dessa forma, tem sido aproveitada para investigar como os estudantes aprendem diferentes tópicos da matemática avançada, em especial, do Cálculo.

Segundo Dubinsky et. al. (2014) a teoria APOS significa (Action, Process, Object e Schema), logo, compreende uma coleção de ações, processos, objetos e esquemas que compõem o quadro mental de quem está aprendendo conceitos matemáticos. Assim, com a criação de modelos através de pesquisas é possibilitado seu aproveitamento para avaliar o sucesso ou insucesso de estudantes ao se deparar com uma situação-problema e tentar resolvê-la.

Conforme Dubinsky (1991, p. 98), mesmo tendo Piaget estudado o desenvolvimento cognitivo de crianças, cujo foco é a matemática elementar, é possível explicar vários conceitos matemáticos e construções que resultam do processo psicológico e que

correspondem ao pensamento matemático avançado. O desenvolvimento cognitivo constitui-se como um processo contínuo de construções; dessa forma, a elaboração dos conceitos da matemática elementar é essencial na construção do pensamento matemático avançado. Assim, Dubinsky (1991, p. 99), supõe que se encontra no pensamento das crianças processos de construção específicos, os quais são utilizados para construir estruturas matemáticas sofisticadas. Pode-se destacar assim como Piaget, que a abstração reflexionante é tão importante para o pensamento lógico das crianças, quanto para a matemática avançada.

Em termos de matemática avançada, a abstração reflexionante é definida por Dubinsky (1991) como a construção de objetos mentais e de ações mentais sobre esses objetos. O mesmo autor utiliza-se da noção de esquema para fazer a relação entre os conceitos específicos da matemática e a abstração reflexionante como atuante na matemática avançada.

A abstração reflexionante não se restringe a uma única forma de construção do pensamento matemático, seja ele elementar ou avançado. Dubinsky (1991) elenca cinco tipos diferentes de construção que poderão ser importantes no desenvolvimento do pensamento matemático: interiorização, coordenação, encapsulamento, generalização e reversão.

A interiorização consiste na construção de processos internos para fazer sentido na compreensão de fenômenos; ela permite tomar consciência das coordenações das ações ou de abstrações reflexionantes, possibilitando abstrações refletidas – responsáveis pela construção de novos conceitos. Dubinsky (1991) exemplifica citando a compreensão de uma função e de como o sujeito responde, pois pode estar construindo um processo mental relacionado à função. Ocorre que muitos estudantes constroem um processo mental com facilidade quando existe uma representação física e um intermédio entre a ação externa e sua interiorização, o que é comum na matemática elementar. Na matemática avançada enfrenta-se a dificuldade de representar fisicamente as operações e os conteúdos, como citam Basso e Notare (2015):

Alguns problemas, por exemplo, exigem dos alunos a realização de experiências com objetos matemáticos, para possibilitar a observação de seus comportamentos diante da manipulação de seus elementos. Nas séries iniciais, objetos físicos manipulativos podem fornecer este suporte visual e experimental para as crianças. Eles servem como modelos físicos temporários para desencadear ideias matemáticas [...]. Em níveis mais elevados, muitas ideias matemáticas não têm suporte nesses modelos físicos. Nestes casos, os computadores podem fornecer a possibilidade de manipulação virtual, em situações nas quais dispositivos físicos não existem ou não são acessíveis (BASSO, NOTARE, 2015, p.4).

Entende-se, pois, que as tecnologias digitais podem ser importantes aliadas nos processos de ensino e de aprendizagem por favorecerem a construção e a representação de objetos na tela do computador levando ao desenvolvimento do pensamento matemático.

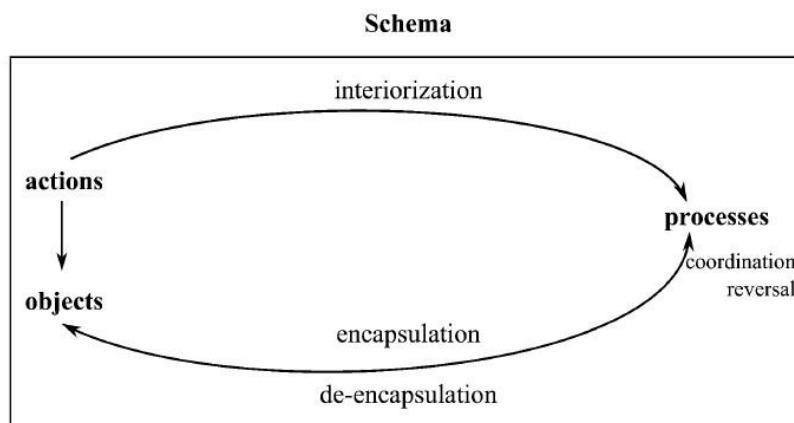
A coordenação, conforme Dubinsky (1991), corresponde a dois processos que podem ser coordenados para formar um novo processo, exemplificando com a composição de duas funções.

O encapsulamento corresponde ao ato de converter um processo num objeto. Entre diversos exemplos de matemática avançada, podemos citar a integral, tema de nossa pesquisa:

Um estudante de cálculo pode ter interiorizado a ação de tomar a derivada de uma função e pode ser capaz de fazer isso com sucesso com uma grande quantidade de exemplos, usando várias técnicas que muitas vezes são ensinadas e ocasionalmente aprendidas em cursos de cálculo. Se o processo for interiorizado, o aluno poderá reverter para resolver problemas em que uma função é dada e é desejável encontrar uma função cuja derivada é a função original. Isso é antidiferenciação ou integração, e também é uma ação e, em seguida, deve ser interiorizado para se tornar um processo. Encapsular os processos de diferenciação e integração - pelo menos até o ponto de os ter como objetos de reflexão - parece ser um pré-requisito essencial para a compreensão do teorema fundamental do cálculo. (DUBINSKY, 1991, p. 106).

Segundo Dubinsky (1991), a forma mais simples e familiar da abstração reflexionante é a generalização. Quando por exemplo, um sujeito consegue aplicar um esquema a uma coleção de fenômenos, podemos considerar que o esquema foi generalizado. Por fim, há uma inversão de um processo. Uma vez que ele existe internamente, o sujeito pode pensar de forma contrária para elaborar e construir um novo processo. Nesse caso, uma série de atividades envolve a reversão de um processo, como por exemplo, a resolução de uma equação.

Com base nas cinco formas de construção em abstração reflexionante, diz-se que a construção de vários conceitos da matemática avançada pode ser descrita nestes termos. Este sistema faz parte de um esquema, cuja construção pode ser verificada na Figura 8.

**Figura 8 - Esquemas e sua construção**

Fonte: Dubinsky et. al. (2014, p. 10)

Dentro deste contexto, em relação às funções de duas ou mais variáveis, analisou-se o trabalho de Búrigo et. al. (2013), que apresenta em seu estudo as compreensões de curvas de nível referenciadas na teoria APOS. Em sua pesquisa apresentam reflexões sobre a difícil passagem do estudo das funções de uma para duas ou mais variáveis, bem como suas inferências na transição da concepção ação para a concepção processo.

Uma *ação*, segundo a teoria Apos, é uma transformação de objetos percebida pelo sujeito como essencialmente externa e como algo que é efetuado mediante a aplicação de uma sequência de instruções. Quando uma ação é repetida e o sujeito reflete sobre ela, pode-se então, produzir uma construção chamada *processo*, que não necessita mais de estímulos externos, e que pode ser mentalmente revertida ou combinada com outros processos. (BÚRIGO et.al. 2013, p. 119).

Observam que a representação gráfica, sua leitura e produção de funções de uma variável por parte dos estudantes não é tão trivial quanto parece e como os próprios docentes a consideram. Nas funções de duas variáveis segundo os autores, aparecem outras dificuldades na compreensão e construção desses gráficos. A incompreensão, segundo eles, deriva de vários aspectos como o domínio, imagem, superfície, plano xy e o eixo z.

Os autores citados concordam, a partir do trabalho desenvolvido, que uma condição para a aprendizagem das funções de duas ou mais variáveis é a superação da concepção ação em favor de uma concepção processo de função. Dessa forma, retorna-se à teoria da abstração reflexionante quando verifica-se que quando a abstração não é mais empírica, mas reflexionante, com tomada de consciência, tornando-se refletida, ocorre a construção do conceito. O conceito é uma totalidade operatória que integra estruturas; essas estruturas que são esquemas interiorizados aparecem como possibilidades novas de aprendizagem – aprendizagem não é outra coisa que a assimilação possibilitada por tais novidades estruturais. Assim como os esquemas sensorio-motores, assim que construídos, abriam

possibilidades a novas assimilações, isto é, a novas aprendizagens, assim também novos conceitos, assim que construídos por abstrações refletidas, abrem possibilidades para assimilações teóricas novas – para novas aprendizagens teóricas – aprendizagens matemáticas avançadas.

## 4. METODOLOGIA

A pesquisa em questão, baseia-se numa investigação qualitativa, cujo levantamento de dados se deu a partir de entrevistas, as quais proporcionaram o acompanhamento, observações e a utilização de diferentes estratégias durante a realização de uma atividade com uso de um *applet* do *software* matemático *Geogebra*, cujo objetivo foi levar à compreensão do conceito de integral dupla.

### 4.1 Pesquisa Qualitativa

O termo ‘pesquisa qualitativa’, conforme Flick (2009), não foi utilizado sempre da mesma forma. Por muito tempo foi empregado de forma diferenciada para descrever uma alternativa à pesquisa ‘quantitativa’. No entanto, com o passar do tempo, o significado foi ficando mais claro e a pesquisa qualitativa foi dispendo de características próprias.

Sendo assim, a pesquisa qualitativa usa o texto como material empírico (em vez de números), parte da noção da construção social das realidades em estudo, está interessada nas perspectivas dos participantes, em suas práticas do dia a dia e em seu conhecimento do cotidiano relativo à questão em estudo. (FLICK, 2009, p.16).

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a pesquisa qualitativa configura-se de acordo com as seguintes características:

1. Quanto ao ambiente, valoriza-se o ambiente natural que é a fonte direta de dados e o pesquisador configura-se como o principal instrumento. Neste tipo de pesquisa, o contato direto e prolongado com o ambiente e situação é fundamental, pois existe a influência do espaço sobre o comportamento humano.

Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem. Quando os dados em causa são produzidos por sujeitos, como no caso de registros oficiais, os investigadores querem saber como e em que circunstâncias é que eles foram elaborados (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.48).

2. As descrições são característica fundamental da pesquisa qualitativa. Todo material obtido a partir da pesquisa é em forma de documentos escritos, fotografias, vídeos, registros das observações, entrevistas, entre outros.

Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.48).

Nessa abordagem a palavra escrita tem fundamental importância do início ao fim, desde o registro dos dados até sua análise. E qualquer situação pode servir de informação ou pista a ser registrada, questionada, analisada e estudada.

3. O resultado interessa menos do que o processo. A manifestação de determinado problema nas atividades diárias é o que interessa ao investigador. Buscar a resposta de certas perguntas: Como? Por que? Qual? é analisar de que forma certos fatores influenciam no problema em questão.

Nesse sentido, esta pesquisa visa analisar cada resposta buscando perceber qual o conhecimento empregado e como cada um dos estudantes de forma individualizada constrói ou compreende um determinado conceito e organiza seu raciocínio para chegar à solução de um problema.

4. Os dados tendem a ser analisados de forma indutiva. Os dados coletados não são colhidos para que se comprove ou anule uma determinada hipótese, mas para poder analisar as construções que ocorreram.

Os dados, segundo Bogdan e Biklen (1994), são as informações apresentadas de diversas maneiras para compor o material da pesquisa. São os materiais brutos recolhidos pelo pesquisador para compor a base de sua análise. Ao mesmo tempo, formam os elementos necessários para refletir sobre os aspectos a serem explorados. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 149):

O termo dados refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base da análise. Os dados incluem materiais que os investigadores registram ativamente, tais como transcrições de entrevistas e notas de campo referentes a observações participantes. Os dados também incluem aquilo que outros criaram e que o investigador encontra tal como diários, fotografias, documentos oficiais e artigos de jornais. Os dados são simultaneamente as provas e as pistas. Coligidos cuidadosamente, servem como factos inegáveis que protegem a escrita que possa ser feita de uma especulação não fundamentada. Os dados ligam-nos ao mundo empírico e, quando sistemática e rigorosamente recolhidos, ligam a investigação qualitativa a outras formas de ciência.

5. Na abordagem qualitativa, o “significado” dado às coisas é de fundamental importância. Nesse tipo de estudo, torna-se importante levar em consideração como os participantes encaram o que está sendo focalizado.

(...) os dados não são apenas aquilo que se recolhe no decurso de um estudo, mas a maneira como as coisas aparecem quando abordadas com um espírito de “investigação”. (...) A investigação qualitativa envolve pegar nos objetos e acontecimentos e levá-los ao instrumento sensível da sua mente de modo a discernir o seu valor como dados. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 200)

Na pesquisa qualitativa, conforme Bogdan e Biklen (1994), são obtidos dados descritivos no contato direto entre investigador, participante e situação a ser estudada, cujo processo está acima do produto, levando-se em consideração a perspectiva dos participantes. Dessa forma, essa pesquisa configura-se como qualitativa, cujo objetivo é valorizar cada detalhe observado nas ações dos participantes.

#### **4.2 Método Clínico**

O método clínico, segundo Delval (2002), foi utilizado na Psicologia como um método de prevenção e tratamento de anomalias mentais e deficiências, incluindo crianças que apresentavam dificuldades escolares.

Piaget, por sua vez, foi quem introduziu o método clínico na psicologia normal e quem estudou o pensamento das crianças. O significado dado por ele a essa prática foi muito diferente do original. Desde o início, seu interesse não foram os dados estatísticos, tanto que, não se sentiu muito confortável em quantificar sujeitos que respondiam corretamente ou não aos problemas que lhes eram propostos. Seu maior interesse foi tentar entender as respostas desses sujeitos, bem como, o que os levava aos erros.

Nesta pesquisa, o objetivo é entender como os estudantes de graduação constroem um conhecimento matemático e como organizam suas ideias para elaborar um conceito ou até mesmo resolver um problema proposto. Em função disso, verificou-se que a metodologia proposta, baseada no método clínico, poderia trazer respostas mais eficazes.

A essência do método consiste na intervenção constante do experimentador em resposta à ação do sujeito, com a finalidade de descobrir os caminhos que segue seu pensamento, dos quais o sujeito não tem consciência e que, portanto, não pode tornar explícitos de maneira voluntária (DELVAL, 2002, p.53).

Com base no método clínico investigou-se como os estudantes pensam, percebem e atuam sobre as situações às quais são expostos (DELVAL, 2002). Procurou-se descobrir o que está nas entrelinhas das conversas e ações dos participantes da pesquisa. Interferiu-se



sistematicamente diante da atuação dos estudantes, os quais foram observados e suas ações analisadas individualmente, quando diante de uma situação-problema deviam encontrar uma solução ou explicação. A partir das palavras, ações e gestos de cada estudante procurou-se analisar e justificar cada ação.

Verificou-se, pois, que Piaget não aplicava sempre os mesmos problemas, já que aperfeiçoava e adaptava os mesmos ao tema abordado. Além disso, o método clínico de Piaget pode ser caracterizado de acordo com as etapas pelas quais passou desde sua introdução como apresenta Delval (2002) no Quadro 2, abaixo:

**Quadro 2 - Etapas do Método Clínico de Piaget**

<b>Etapa</b>	<b>Obras principais</b>	<b>Características</b>
Os primeiros esboços Até 1926	A linguagem e o pensamento na criança (1923) O juízo e o raciocínio na criança (1924)	Trabalhos baseados na observação e em pequenas experiências. O método é esboçado, mas ainda não aparece com clareza. Método puramente verbal.
A constituição do método 1926-1932	A representação do mundo na criança (1926a) A causalidade física na criança (1927) O juízo moral na criança (1932)	Formulação explícita do método, suas características e suas dificuldades. Método verbal para estudar os conteúdos do pensamento.
O método não-verbal 1932-1940	O nascimento da inteligência na criança (1936) A construção do real na criança (1937) A formação do símbolo na criança (1945)	Aplicação do método a sujeitos que ainda não falam.
Manipulação e formalização 1940-1955	A gênese das quantidades físicas (1941) A gênese do número (1941) Da lógica da criança à lógica do adolescente (1955) Inúmeros estudos sobre a lógica e as operações físicas e matemáticas	O sujeito tem de resolver tarefas mediante sua ação e pedem-se a eles explicações do que faz. A explicação é um complemento da ação.
Desenvolvimentos posteriores A partir de 1955	A gênese das estruturas lógicas elementares (1959) A imagem mental na criança (1966b) Memória e inteligência (1968) Monografias do Centre International d'Épistémologie Génétique	Algumas tentativas de voltar a usar dados estatísticos. Poucas variações de fundo.

Fonte: Delval (2002, p. 67)

O método clínico, segundo Delval (2002), é visto como um procedimento que dá condições de averiguar de que forma o sujeito pensa, age, sente e percebe. Através dele o pesquisador tenta descobrir o que não é óbvio nas ações e falas dos sujeitos observados ou

questionados. Assim, sua principal característica é a atividade proposta pelo pesquisador, bem como sua interação com o sujeito.

[...] a característica do método clínico é a intervenção sistemática do experimentador diante da conduta do sujeito, isso pode ocorrer, seja qual for essa conduta. A conduta pode ser verbal, de manipulação de um objeto com explicação ou por si mesma. Em que se diferencia, então, de outros métodos?

Creio que a essência do método, e aquilo que tem de mais específico, que o diferencia de outros métodos, consiste precisamente nessa intervenção sistemática do experimentador diante da atuação do sujeito e como resposta às suas ações ou explicações. O experimentador está na presença de um sujeito a quem se estuda individualmente e com quem se estabelece uma interação. Coloca-se esse sujeito em uma situação problemática que ele tem de resolver ou explicar, e observa-se o que acontece. Enquanto se produz a conduta do sujeito [...] o experimentador procura analisar o que está acontecendo e esclarecer seu significado. (DELVAL, 2002, p. 68)

De acordo com a essência do método, o pesquisador, enquanto entrevistador tem papel significativo, pois suas intervenções devem contribuir positivamente na qualidade das respostas para auxiliar na comprovação das hipóteses formuladas. Além disso, é dada maior importância ao processo do que ao produto do problema.

A utilização do método clínico baseia-se no pressuposto de que os sujeitos têm uma estrutura de pensamento coerente, constroem representações da realidade à sua volta e revelam isso ao longo das entrevistas ou de suas ações. (DELVAL, 2002, p. 70)

Delval (2002) aponta os principais passos que devemos seguir para realizar uma pesquisa baseada no método clínico, mas aponta este método como bastante flexível, de forma que se possa fazer ajustes, intervir, bem como reformular o ponto de partida.

Segundo Delval (2002, p. 80), os principais passos são:

- 1º - A escolha do problema e a definição do mesmo com precisão. O exame dos antecedentes do trabalho que se quer realizar e o planejamento de como fazer a coleta de dados. Antes de iniciar a pesquisa é preciso saber o que se quer pesquisar e o que já foi pesquisado sobre o tema;
- 2º - Coleta de dados através da entrevista clínica;
- 3º - Análise de dados para extrair o máximo de informações deles;
- 4º - Apresentação de resultados num informe sobre o trabalho.

Inicialmente, é preciso pensar numa hipótese de pesquisa, nas expectativas da mesma e das respostas obtidas. Assim, para desenvolver uma das etapas mais importantes da pesquisa, elaborou-se a hipótese de que a utilização do *applet* do *software Geogebra* pode contribuir na compreensão de conceitos matemáticos relacionados à integral dupla, através da interação, que possibilita a visualização e manipulação do sólido na tela do computador.

As entrevistas que caracterizam esta pesquisa são do tipo semi-estruturada, que segundo Delval (2002, p. 147) apresenta as seguintes características:

Perguntas básicas comuns para todos os sujeitos, que vão sendo ampliadas e complementadas de acordo com as respostas dos sujeitos para poder interpretar o melhor possível o que vão dizendo. As respostas orientam o curso do interrogatório, mas se retorna aos temas essenciais estabelecidos inicialmente. É o tipo de entrevista mais empregado na pesquisa.

A partir da realização de algumas entrevistas do tipo aberta, cujo objetivo foi delinear as entrevistas posteriores, que de fato deveriam ser analisadas, partiu-se para a elaboração de algumas perguntas essenciais em diferentes blocos a ser analisados.

As entrevistas foram realizadas com sete (07) estudantes que responderam às questões elaboradas pela pesquisadora antes da aplicação das entrevistas e aquelas que foram surgindo à medida que o estudante respondia às questões e interagia com o *applet*.

Conforme Delval (2002), Piaget classificou as respostas dos seus entrevistados e julgou importante fazer essa distinção para suas pesquisas. Apresentamos no Quadro 3, essa classificação e situamos as respostas obtidas nessa pesquisa de acordo com Piaget a fim de contemplar as respostas aproveitáveis na análise.

**Quadro 3 - Os tipos de respostas segundo Piaget**

<b>Tipo</b>	<b>Características</b>	<b>Valor</b>
Espontâneas	As que a criança dá espontaneamente sem intervenção do entrevistador ou dos adultos.	As que mais interessa conhecer.
Desencadeadas	Surgidas na entrevista diante das perguntas do experimentador, mas elaboradas pelo sujeito e relacionadas com o conjunto de seu pensamento.	Igualmente interessantes, ainda que o problema seja colocado ao sujeito pela primeira vez.
Sugeridas	Produto da entrevista e influenciadas pela intervenção do experimentador.	Pouco interessantes; deve-se procurar evitar.
Fabuladas	Histórias criadas pela criança ao longo da entrevista pouco relacionadas com o tema e de caráter pessoal.	De valor desigual e não muito grande para o estudo do problema.
Não-importistas	Qualquer coisa que a criança diz para livrar-se do experimentador.	Carentes de interesse.

Fonte: Delval (2002, p. 137)

De acordo com os tipos de respostas tabuladas por Piaget, classificou-se as respostas dos estudantes entrevistados, em sua maioria, como desencadeadas, pois, questionados pela

pesquisadora, eles elaboraram suas respostas a partir das interações com o *applet*, e utilizavam conhecimentos prévios sobre o que estava sendo perguntado.

### 4.3 Participantes da Pesquisa e o contexto no qual estão inseridos

Os participantes dessa pesquisa eram estudantes de graduação dos diferentes cursos de Engenharia da UNIVATES de Lajeado, Rio Grande do Sul. A Instituição recebe estudantes de toda a região do Vale do Taquari e de outras regiões do Estado. Possui um espírito comunitário, exercendo grande influência nas ações e rumos da região. Os cursos de graduação, em sua maioria noturnos, recebem estudantes que trabalham durante o dia e assim conseguem cursar uma graduação à noite.

Os estudantes, no momento da entrevista, estavam matriculados nos seguintes cursos de graduação: Engenharia Civil, Engenharia de Controle e Automação, Engenharia Química, Engenharia Mecânica e Engenharia de Software. A escolha desses estudantes se deu, porque somente nesses cursos a grade curricular compreende as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e contém em sua ementa o que se pretendia pesquisar.

Os estudantes, participantes da pesquisa, estavam cursando a disciplina de Cálculo I, durante o segundo semestre de 2018, quando foram realizadas as atividades individualizadas e as entrevistas, e todos eles cursavam a disciplina pela primeira vez. Quando entrevistados, eles já haviam estudado a Derivada e a Integral de funções de uma variável e não conheciam as funções de duas ou mais variáveis. Consequentemente, não tinham estudado ou tratado do conceito, definição ou cálculo de integral dupla.

Essa etapa da pesquisa foi realizada em dias e horários marcados com antecedência, não sendo considerada como atividade programada da disciplina de Cálculo I. Foram convidados todos os estudantes da disciplina, no entanto, sete estudantes mostraram interesse e se dispuseram a realizar uma atividade, cujo objetivo era encontrar o volume de um sólido e relacionar esse volume à integral dupla da função, através de um *applet* do *software Geogebra*. Enquanto realizavam a atividade, os estudantes foram entrevistados com base no Método Clínico de Piaget. O acompanhamento individualizado durante a resolução da atividade e do processo de construção dos conceitos, aconteceu com esse número reduzido de estudantes, pois uma análise do processo de abstração reflexionante na compreensão do

conceito de integral dupla requer apontamentos valorizando os detalhes. Decidiu-se por essa forma de trabalho, pois, num momento anterior às entrevistas havia sido realizada uma intervenção durante as aulas de Cálculo II<sup>13</sup> e não se alcançou os resultados pretendidos, no que tange, principalmente, à confiabilidade e originalidade dos dados, em função da grande quantidade de estudantes.

#### 4.4 Etapas e Instrumentos da Pesquisa

Para alcançar o objetivo proposto nesta tese, através da realização das entrevistas, elaborou-se um roteiro com algumas perguntas-chave que foram feitas aos participantes durante a realização da atividade, com a utilização de um *applet* do *software Geogebra*. A hipótese, da qual partiu-se, era que de forma dinâmica, os estudantes chegariam ao volume do sólido, desafiados, através de interrogações, a verificar que este volume poderia ser interpretado como a integral dupla da função, cujo cálculo forneceria o volume exato desse sólido. Os estudantes por sua vez, fizeram uso dos recursos oferecidos pelo *software* apoiando-se nos mesmos.

O empenho pela compreensão do conceito de integral dupla com utilização dos recursos disponíveis, foi acompanhado e analisado através de observações e questionamentos feitos durante as entrevistas, de forma que se pudesse responder o problema de pesquisa proposto.

Para poder analisar de forma mais pontual cada resposta ou estratégia utilizada pelos estudantes, dividiu-se a entrevista em cinco momentos, de acordo com a execução da atividade por parte do estudante. Esses momentos e a ação de cada estudante, serviram de base para a condução da entrevista e principalmente para valorizar cada um dos temas envolvidos e considerados importantes, no processo como um todo, pois a intenção não era apenas o produto final e sim, qualquer fala, gesto e resposta ao longo da atividade.

Na sequência, são apresentados os momentos considerados mais importantes e que planejou-se analisar de forma particular nas entrevistas.

---

<sup>13</sup> Disciplina que contempla o estudo da Integral Dupla na Instituição em que aplicamos as atividades.

**Momento 1:** Construção de um sólido a partir de uma função com uso do *software Geogebra*.

**Momento 2:** Função de duas variáveis

**Momento 3:** Cálculo do volume de um sólido.

**Momento 4:** O volume do sólido e o *applet*

**Momento 5:** Relação entre o volume do sólido e a integral dupla.

Cada uma das entrevistas foi filmada e posteriormente transcrita para que fossem registrados todos os acontecimentos como gestos, interações com o *applet*, falas, ideias, sugestões e estratégias utilizadas. De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.150): “Isto são as notas de campo: o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) faz-se necessário gravar as entrevistas, pois pode-se não captar de forma completa o que fora dito pelos sujeitos da pesquisa, os estudantes. Além disso, apontam para o fato de se estabelecer regras que encurtem a entrevista sem afetar sua qualidade pela imposição de um limite.

A entrevista, realizada enquanto o estudante interagiu com o *applet*, se deu através de uma conversa inicial sobre a utilização do *software Geogebra* e em especial do *applet do Geogebra*<sup>14</sup>.

Todos os estudantes, participantes dessa etapa da pesquisa, já tiveram contato e utilizaram o *software Geogebra* em algum momento da graduação, nas aulas de Cálculo. No entanto, nenhum deles conhecia o *applet – Integral Dupla*, utilizado para a realização da atividade e entrevista clínica.

#### 4.5. A atividade com o *applet*

O *applet – Integral Dupla*, segundo seu criador, tem como objetivo a “Interpretação geométrica da Integral Dupla, como volume de um sólido limitado acima pelo gráfico de uma função de 2 variáveis.”

---

<sup>14</sup> Applet criado por Waldecir Bianchini em setembro de 2014, como Atividade envolvendo Integral Dupla e Volume – Disponível em: [www.geogebra.org/u/waldecir#materials/created-integral\\_dupla](http://www.geogebra.org/u/waldecir#materials/created-integral_dupla) - <https://www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS>

Segundo Bianchini (2014):

A JGI mostra a interpretação geométrica da integral dupla, vista como o volume do sólido de base retangular e limitado acima pelo gráfico de  $z=f(x,y)$ . Observe que à medida que aumentamos os valores de  $m$  e  $n$ , os prismas tendem ao sólido desejado e portando a soma dos volumes dos prismas tendem ao volume do sólido. O volume de cada prisma é obtido pela área da base  $((b-a)/m*(d-c)/n)$  vezes a sua altura que é dada pelo valor da função  $f$  em algum ponto de cada sub-retângulo. Ao marcar a caixa "Pontos", você verá os pontos centrados em cada sub-retângulo. Ao marcar a caixa "Pontos aleatórios", você verá os pontos distribuídos aleatoriamente em cada sub-retângulo. Entre com outra função no campo Entrada:  $f(x,y)=4-x^2-y^2$ , por exemplo.

Abaixo segue a página inicial do *applet*, na versão do estudante. Na parte superior, como mostra a Figura 9, são dadas informações iniciais sobre o *applet*.

**Figura 9** – Página Inicial do Applet – informações iniciais

## Integral Dupla

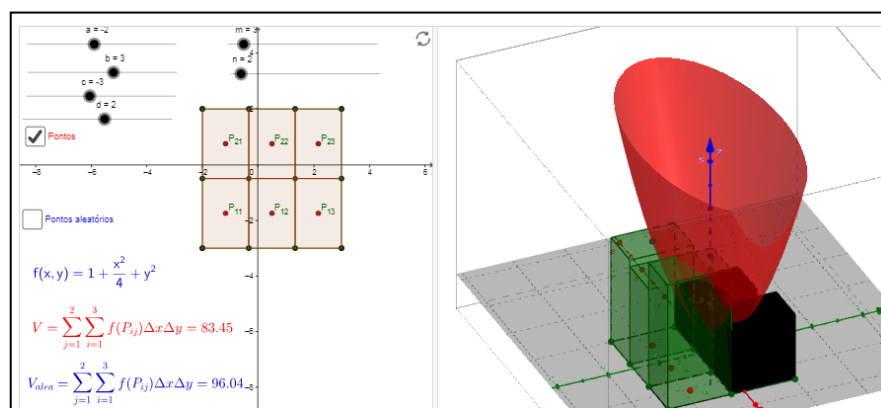
**Autor:** [Waldecir Bianchini](#)  
**Tópico:** [Volume](#)

A JGI mostra a interpretação geométrica da integral dupla, vista como o volume do sólido de base retangular e limitado acima pelo gráfico de  $z=f(x,y)$ .  
 Observe que à medida que aumentamos os valores de  $m$  e  $n$ , os prismas tendem ao sólido desejado e portando a soma dos volumes dos prismas tendem ao volume do sólido.  
 O volume de cada prisma é obtido pela área da base  $((b-a)/m*(d-c)/n)$  vezes a sua altura que é dada pelo valor da função  $f$  em algum ponto de cada sub-retângulo.  
 Ao marcar a caixa "Pontos", você verá os pontos centrados em cada sub-retângulo.  
 Ao marcar a caixa "Pontos aleatórios", você verá os pontos distribuídos aleatoriamente em cada sub-retângulo.  
 Entre com outra função no campo Entrada:  $f(x,y)=4-x^2-y^2$ , por exemplo.

Fonte: [www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS](http://www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS)

Na parte inferior, como mostra a Figura 10, é apresentado o campo de trabalho em que o estudante interage, modifica os pontos e a função, visualizando o que acontece.

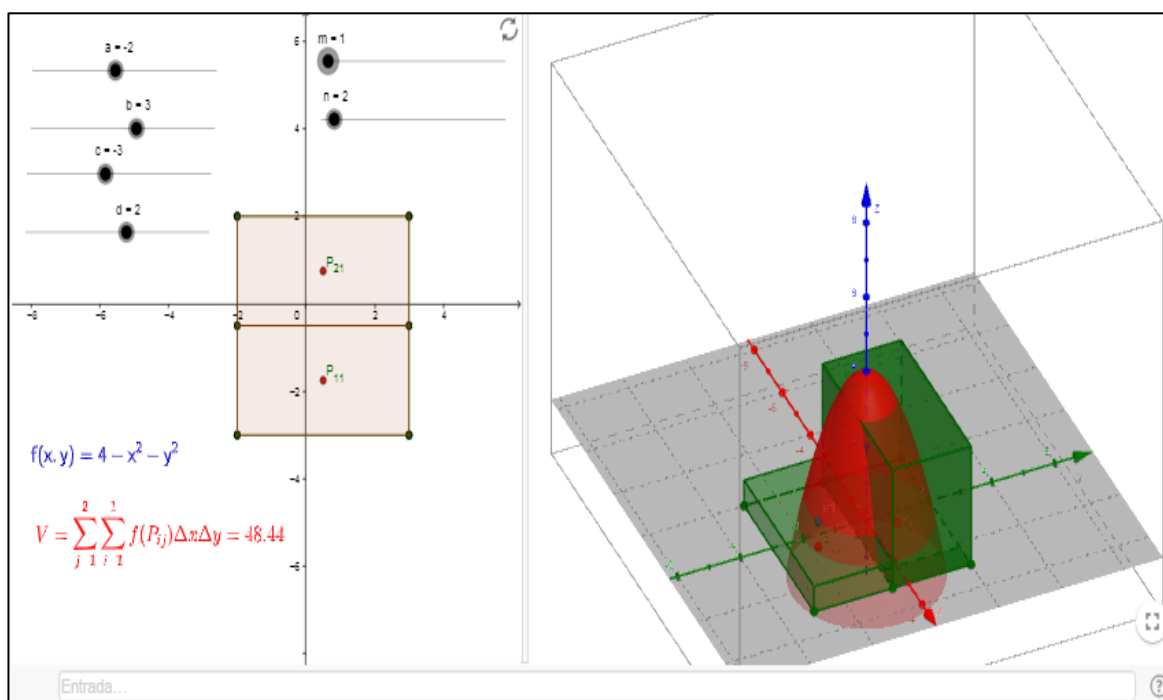
**Figura 10** – Página Inicial do Applet – campo de trabalho



Fonte: [www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS](http://www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS)

Inicialmente apresentava-se o *applet* ao estudante que estava sendo entrevistado sem citar a Integral, pois a intenção era aproveitar ao máximo seus recursos sem que o estudante fosse induzido (através de uma sugestão de resposta) a pensar na integral por essa ser citada na página inicial. Por esse motivo, antes de apresentar o *applet*, inseriu-se a função  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ , e se exibiu o *applet* como mostra a Figura 11. Falou-se de alguns sólidos geométricos como cubo, prismas, cilindros, cones e do sólido construído no *applet*, o parabolóide.

**Figura 11** – Applet no formato apresentado aos estudantes



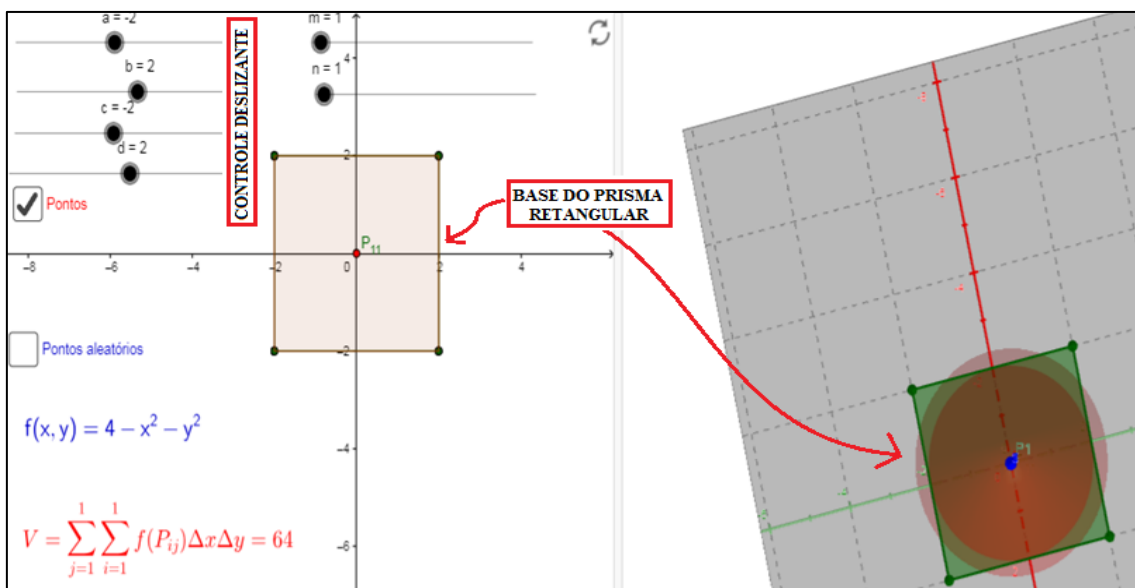
Fonte: Elaborada pela autora

A partir desse momento, o estudante pôde manusear o *applet*. Cada um dos entrevistados apresentava suas próprias estratégias e formas de pensar, dúvidas e conclusões a partir da interação com o *applet*, bem como, as respostas aos questionamentos feitos pela pesquisadora.

No lado esquerdo do *applet*, como é apresentado na Figura 12, aparece a Janela de Álgebra, onde são exibidos os controles deslizantes, que permitem através de botões rolantes ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ ) modificar (aumentar ou diminuir) a base do(s) prisma(s) retangular(es) construído(s) a partir da base do parabolóide. Já os botões rolantes ( $m$ ,  $n$ ) são responsáveis pela partição do prisma em prismas com base retangular.



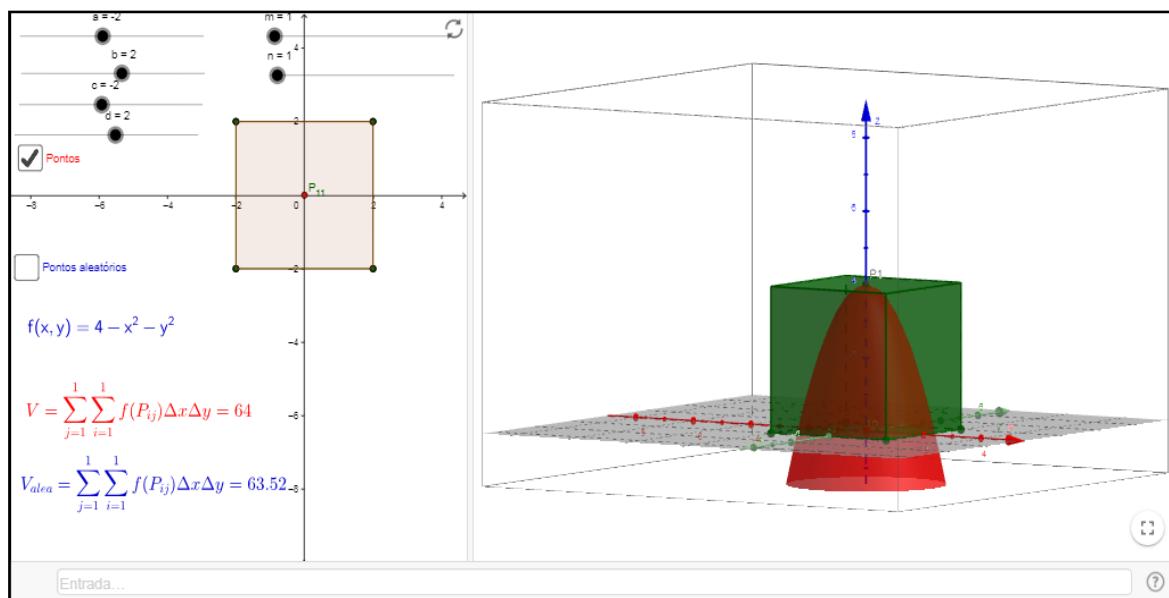
**Figura 12** – Janela de Álgebra – controles deslizantes



Fonte: Elaborada pela autora

À medida que se aumenta os valores de  $m$  e  $n$ , aumenta o número de prismas retangulares (verdes), pois o prisma inicial é dividido em prismas de base cada vez menor. Na Figura 13, o prisma corresponde a um cubo com  $m=1$  e  $n=1$ .

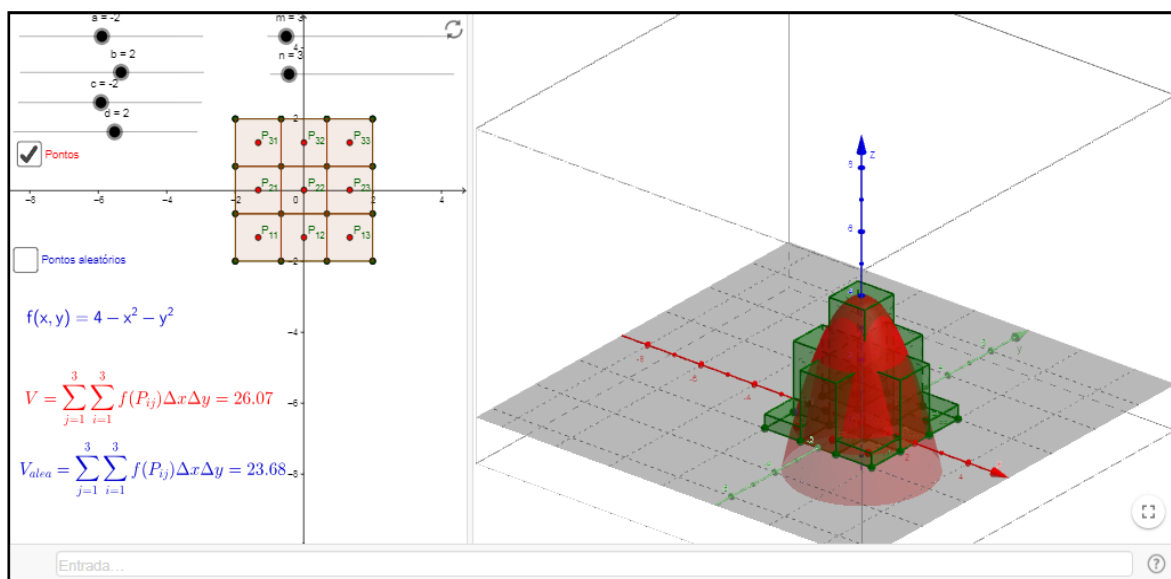
**Figura 13** – Um único prisma retangular com  $m=1$  e  $n=1$



Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 14 o cubo inicial foi dividido em 9 prismas retangulares com base de mesma área em que  $m=3$  e  $n=3$ .

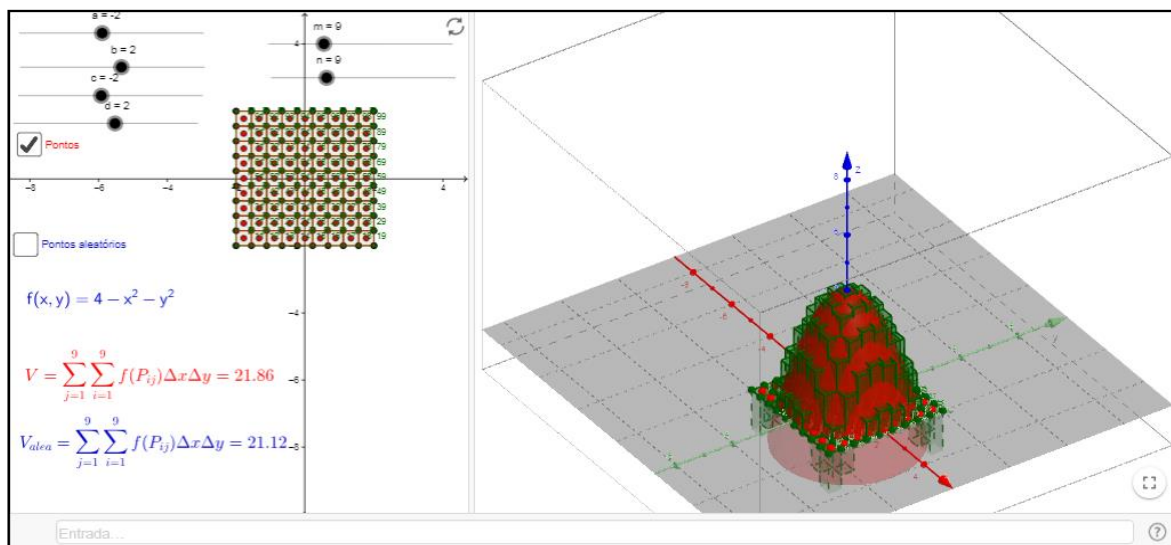
**Figura 14** – Prismas retangulares com  $m=3$  e  $n=3$



Fonte: Elaborada pela autora

Aumentando os valores de  $m$  e  $n$  e consequentemente as partições da base do prisma inicial, o volume de cada um dos prismas diminui, logo, a soma dos volumes desses prismas também diminui. Ainda, como é possível verificar na Figura 15, os prismas retangulares vão se encaixando no parabolóide e a soma dos volumes desses prismas vai se aproximando do volume do parabolóide.

**Figura 15** – Prismas retangulares encaixando cada vez mais no parabolóide -  $m=9$  e  $n=9$



Fonte: Elaborada pela autora

A partir da interação com o *applet*, chega-se ao volume do parabolóide partindo de um prisma retangular com volume superior ao volume do parabolóide. Com a partição do prisma inicial, obtém-se prismas retangulares com volumes cada vez menores, pois a base de cada um deles vai diminuindo. A soma desses volumes, conseqüentemente, também vai diminuindo em relação ao volume inicial. Os prismas, à medida que vão aumentando em quantidade e diminuindo a área de sua base vão se encaixando no parabolóide, ficando abaixo da curva. Assim, quanto mais prismas retangulares e quanto menor a área da base de cada um, mais a soma de seus volumes se aproximará do volume do parabolóide. Entretanto, poder-se-ia, mas não é o caso desse *applet*, ter um sólido inicial dentro do parabolóide com volume menor que o volume do parabolóide, mas com as partições, o número de prismas iria aumentando e as diferentes alturas dos prismas permitiriam que esses se encaixassem no parabolóide para chegar ao volume do mesmo.

## 5. ENTREVISTAS E ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Nessa seção, são apresentados os resultados das entrevistas realizadas com os sete (07) estudantes, os quais identificou-se como mostra o Quadro 4. Para identificar cada um dos estudantes, utilizou-se as três primeiras letras do nome de cada um, seguido do número que corresponde à ordem das entrevistas.

**Quadro 4** - Identificação dos estudantes entrevistados

Ordem das Entrevistas	Identificador	Sexo	Curso
1	Hen_1	Masculino	Engenharia Civil
2	Lar_2	Feminino	Engenharia Civil
3	Ren_3	Masculino	Engenharia de Controle e Automação
4	Bru_4	Feminino	Engenharia Química
5	Rap_5	Masculino	Engenharia Mecânica
6	Djo_6	Masculino	Engenharia Civil
7	Luc_7	Masculino	Engenharia de Software

Fonte: Elaborado pela autora

A partir do contato com o *applet*, solicitou-se que o estudante manuseasse livremente o mesmo para reconhecer suas funções e recursos, bem como, observar o plano e o sólido construído na Janela 3D. Depois desse reconhecimento inicial, passou-se a fazer perguntas enquanto o entrevistado interagia com o *applet*.

De acordo com as respostas e a direção na qual seguia a entrevista, elencou-se seus diferentes momentos. Na sequência, seguem trechos das entrevistas e a análise que se fez a partir da hipótese geral.

### 5.1. Momento 1 - Construção de um sólido a partir de uma função com uso do *software Geogebra*.

*Pergunta: Como podemos inserir um sólido como o parabolóide?*

As respostas dos estudantes foram as seguintes:<sup>15</sup>

**Hen\_1:** *“Preciso inserir através de funções”.*

O estudante Hen\_1 através de sua resposta demonstrou conhecer como ocorre a construção no *Geogebra*. O fato de ter utilizado o *Geogebra* em outros momentos pode ter influenciado na sua afirmação de que a construção do sólido ocorreria a partir da inserção de funções.

**Lar\_2:** *“[...] Imagino que seja através de uma curva num gráfico (abre e fecha a mão). A curva viria de uma função.”*

Na sua fala, Lar\_2 demonstrou não ter subsídios suficientes para dizer como seria a função que representa esse sólido, mas sabia que havia uma curva envolvida. Mesmo que fosse uma ideia vaga, tinha noção de que o gráfico, por exemplo, resulta de uma função. Com isso acredita-se que conceitos anteriormente construídos foram aproveitados para pensar sobre o parabolóide.

**Bru\_4:** *“Com os pontos [...] No espaço que a gente tem? O espaço que a gente vai ter pra inserir aquele (mostra um sólido com as mãos) o parabolóide (faz o gesto da parábola com o dedo). Mas eu não preciso colocar ponto por ponto, insiro...<sup>16</sup> A... função... E os diferentes pontos que uso vão dar o... o parabolóide...”*

O fato de trazer na sua fala os pontos, faz com que se reconheça que Bru\_4 possivelmente construiu o conceito de função a partir da ideia de unir diferentes pontos. Nota-se que no seu entendimento a união dos pontos pode levar a uma função. A partir dessa

<sup>15</sup> Em muitas falas retirou-se palavras ou frases que se tornavam repetitivas.

<sup>16</sup> O uso das reticências nas falas corresponde a uma pausa; estudante pensando.

resposta, percebeu-se sua convicção de que não há necessidade de inserir ponto por ponto para construir o parabolóide. Logo, acredita-se que houve abstração reflexionante em relação à função e sua representação gráfica, pois segundo Piaget (1995) “o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização”.

**Rap\_5:** *“Ah, se tu já tens dados os pontos que tu queres ter, tu podes fazer aquela função do próprio Geogebra que é bijetora e ele te traça como seria... o gráfico. Ou tu podes ir fazendo gráficos genéricos, podes fazer várias parábolas genéricas. E daí tentar fazer ela assim... (mostra o parabolóide) [...] Para inserir, tu vais ter aqui a entrada (campo de entrada do applet como no Geogebra), daí por exemplo tu botarias y igual, aí tu pões a parábola em questão, tu botas x ao quadrado mais, ou aqui no caso (mostra o parabolóide) seria menos x ao quadrado... [...] Aí tu inseres a parábola em questão que seria a função”.*

Em sua resposta, Rap\_5 estava convicto de que é possível construir um gráfico, e que este poderia ser descrito por uma função, utilizando pontos. Percebe-se, assim, a presença de abstração refletida. Além disso, Rap\_5 propôs uma função já conhecida, mesmo que essa fosse no plano  $xy$  e não em três dimensões. Utilizou, portanto, conhecimentos prévios relacionados às funções fazendo uma relação entre a parábola e o parabolóide. Dessa forma, a hipótese é de que essas conexões podem contribuir na construção da função de duas variáveis e do conceito de volume.

**Luc\_7:** *“No programa na verdade seria escrever a função. E dizer quais são os valores das variáveis... no caso x e y”.*

Em poucas palavras, Luc\_7 deixou transparecer que há duas variáveis envolvidas, mesmo não tendo trabalhado com funções de duas variáveis. Entende-se que, o uso do *applet* poderá auxiliar na construção de conceitos básicos como o comportamento e a representação geométrica desse tipo de função.

### 5.1.1 Conclusão - Momento 1:

As ocorrências identificadas nas falas dos estudantes caracterizam a abstração reflexionante e são indicativos da presença de conceitos relacionados às funções e suas representações gráficas, pois citaram a marcação de pontos para traçar a curva e o sólido, mas optaram pela função, pois a construção seria imediata.

Quanto à construção do parabolóide no *applet*, cinco estudantes citaram a função como necessária para construir o sólido. As falas desses estudantes retratam um conhecimento suficiente para construir um sólido no *applet*. Todos têm elaborado o conceito de que um gráfico, uma curva, um sólido, pode ser construído através da inserção de uma função num *software* ou *applet* matemático. Percebe-se assim, uma apropriação dos mecanismos da ação, que de acordo com Piaget (1995) é a abstração refletida, pois todos mostram-se conscientes de que é possível marcar pontos e a partir deles traçar uma curva ou até mesmo um sólido, no entanto, inserir uma função facilita e sintetiza a ação.

Verificou-se, também, através das observações e respostas obtidas, que o uso do *software*, através da interação que é possibilitada, auxilia na construção do conhecimento matemático, como defende Tall (2001).

## 5.2 Momento 2 – Função de duas variáveis

### *Pergunta: Como é a função que representa o parabolóide?*

Na primeira pergunta já pretendia-se obter uma resposta mais direcionada ao parabolóide, mas os estudantes limitaram-se a falar da função de forma geral. Com essa pergunta, objetivou-se verificar o que eles tinham presente sobre a função que representa um sólido, sabendo que até o momento da entrevista haviam trabalhado apenas com funções de uma variável. As respostas dos estudantes foram as seguintes:

**Hen\_1:** “Então, uma função para  $x$  e uma função para  $y$ . Onde eu teria uma altura, uma largura e nesse caso eu preciso ter uma profundidade também, no eixo  $z$ , no caso”.

Mesmo que na realidade não sejam duas funções, na sua fala verifica-se que há a necessidade de tratar  $x$  e  $y$  de forma separada. Além disso, deixou transparecer com a resposta, que a função com uma única variável não vai gerar um sólido. O fato de citar  $z$  mostra saber que há uma terceira variável envolvida. Esse conhecimento presente em sua fala, possivelmente tem sua contribuição na elaboração da função e construção do conceito de função de duas variáveis. Ao citar a utilização das duas variáveis  $x$  e  $y$ , demonstrou buscar operações que já sabia realizar, conceitos que já tinha construído, ocorrendo, assim, um processo em que relacionou o antigo com o novo e construiu conhecimento.

**Lar\_2:** *“Bom, pra mim tá parecendo que isso é uma curva de gráfico em 3D. [...] Tá em três dimensões, ele está, no caso, no Geogebra. Pelo que eu vi até agora, a gente viria só essa parte aqui da frente (mostra com o dedo o sólido) e teria que calcular a área daqui (faz um movimento circular com o dedo no parabolóide) e isso daqui pra mim tá parecendo uma curva gráfica em três dimensões”.*

Mostrou clareza em relação às três dimensões, no entanto, não sugeriu a utilização de duas variáveis. Diferente de Hen\_1, Lar\_2 não associou o tipo de função ao número de variáveis, somente citou as três dimensões. Em sua resposta percebe-se que o conhecimento que possui, resulta de processos de abstração empírica, pois traduziu o que visualizou no *applet*.

**Ren\_3:** *“Eu não sei como, parece uma parábola e girou, parece... (mostra no parabolóide fazendo o contorno do mesmo com o indicador e ao final gira os dedos). [...] Como assim? [...] Parece assim uma função de segundo grau. Com expoente, quer dizer “a”, “x ao quadrado” mais “b”, sabe,... com menos “a”. Não sei como é que se faz para girar... (mostra o parabolóide). É, eu digo, é uma parábola que foi rodada, não sei como explicar...  
[...] Mas é uma parábola. É o que parece. [...] Três pontos, talvez? Quer dizer, eixos... z para cima... [...] Parábola,... não... função. Porque se tu tirares o eixo vermelho ou o verde, vai dar uma parábola. Se não tivesse um, uma dimensão, se só tivesse duas, mas o z tem que ficar, não pode ser só o xy. (Mostra os eixos). Senão vai dar um círculo”.*



Em sua fala, Ren\_3 deixou transparecer que possuía conhecimentos sobre o assunto, os quais utilizou para formular sua resposta. Buscou responder ao questionamento com informações que tinha sobre funções de segundo grau. Comparou o parabolóide a uma parábola que gira, visualizou cortes transversais no sólido, e, ao mesmo tempo, trouxe os sólidos de revolução. Essas informações trazidas são provenientes de um processo de abstração pseudoempírica, pois Ren\_3 extraiu qualidades do sólido no *applet*, que ele próprio colocou lá, tratando o parabolóide como uma parábola e sua rotação. Destacou a importância do eixo  $z$  para a construção do sólido, mas não comentou sobre uma função de duas variáveis. O *applet* através de suas funcionalidades traz várias contribuições na construção da definição de um parabolóide, através da rotação da parábola em torno do eixo  $z$ . Mesmo que não tenha citado a função, traduziu na sua fala que um  $x$  ao quadrado envolvido traz na construção uma parábola e que se o coeficiente deste  $x$  ao quadrado for negativo, terá sua concavidade voltada para baixo. Através de abstrações pseudoempíricas, várias propriedades foram retiradas tanto do parabolóide construído no *applet* como de suas ações sobre este *applet*, contribuindo na construção do sólido a partir de uma função.

**Rap\_5:** *“Ah, mas é que em 3D ela vai ter um volume [...] Daí não posso pensar só no plano, tu vais ter a terceira componente, não vai ser só  $x$  e  $y$ . Por isso entra o  $z$  no caso. Daí tu precisas das três dimensões para dar essa profundidade aqui (mostra a altura do parabolóide na tela). É, pois é, ... É... que na verdade (se ajeita melhor na cadeira) tipo o trajeto que faz aqui (mostra com o dedo o contorno do parabolóide) é uma função de segundo grau... então tu não podes pensar que é de 3º grau só porque é 3D. Porque continua fazendo só a parábola de 2º grau. E a coisa é que ela contorna também, faz o giro 360 graus (faz o movimento com as mãos) com essa parábola, então não sei. Como eu faria pra fazer isso? (Mostra dúvida). [...] É... que como tem o  $z$ , eu... pode ser que tenha mais variáveis... nunca parei pra olhar, mas provavelmente sim...”*

Em sua fala Rap\_5 reconheceu que há três dimensões envolvidas e que, sendo assim, somente as variáveis  $x$  e  $y$  não são suficientes para construir a função que representa um parabolóide. Demonstrou ter algum conhecimento sobre o sólido utilizando diferentes propriedades para justificar a construção do parabolóide. Assim, constata-se a presença de

abstração pseudoempírica, pois retirou propriedades do sólido, que ele colocou no sólido, e visualizou tentando chegar à função que representa o parabolóide. Acredita-se, pois, que esse conhecimento prévio sobre funções seja fundamental na construção de novos conceitos, como o de função de duas variáveis, por exemplo.

**Djo\_6:** *“Bah, isso pode ser uma curva (mostra o contorno do parabolóide) de uma função de 2º grau. Agora, daí aqui ele representa que ele é cônico, na verdade, se olha aqui assim (mostra o parabolóide). Aí eu já não sei como foi feito. [...] Acredito que não seja uma função de 2º grau, eu vejo só o comportamento dela. (mostra com o dedo o comportamento da curva). [...] Pois é, que aqui além da curva ela tem profundidade. Ela, ele parece um cone (mostra com as mãos um cone) na verdade se tu olhares aqui assim ele faz uma demarcação. Ele tem uma circunferência aqui e vem reduzindo essa circunferência de acordo com a variação da função. (mostra com a mão, a partir da base um sólido que vai diminuindo sua circunferência à medida que vai aumentando a altura). Se for uma função, esse arco (mostra um arco com os dedos)”.*

Nessa fala percebe-se que o estudante conhecia algumas funções e suas representações geométricas, no entanto, não tinha convicção disso e vacilou negando uma afirmação anterior sobre função de segundo grau. O fato de ser um sólido deixou Djo\_6 em dúvida, pois demonstrou saber que há algo a mais envolvido. Trouxe vários elementos e conhecimentos sobre figuras planas e sólidos, mas não o suficiente para levar à função que representa um parabolóide. Nossa hipótese era que por abstração pseudoempírica utilizaria a representação gráfica, através da visualização do sólido e as propriedades da função de segundo grau para sugerir uma função para o gráfico do parabolóide. No entanto, desistiu e afirmou que a função de segundo grau não teria relação nenhuma com a função representativa do parabolóide.

**Luc\_7:** *“As variáveis “x” e “y”... O x.... (pensa, mexe...). Tem uma função de segundo grau com duas variáveis.... no caso[...] E dizer quais são os valores das variáveis... no caso x e y”.*

Luc\_7 falou de função de duas variáveis com  $x$  e  $y$ , no entanto, não tinha certeza sobre o tipo de função, mas apostou em função de segundo grau. A hipótese é de que isso seja consequência da forma do parabolóide, cuja característica extrai por abstração pseudoempírica. O tipo de gráfico que resulta da função de segundo grau, foi determinante para que fizesse essa relação tentando chegar à função que representa o parabolóide. Por abstração pseudoempírica, utilizou propriedades de um sólido para citar a função de duas variáveis. Contudo, não se conseguiu identificar, na entrevista, a utilização de outros conhecimentos por ter respondido de maneira sucinta à pergunta.

### 5.2.1 Conclusão - Momento 2:

As respostas à pergunta realizada sobre a função que representa um parabolóide e suas características não foram tão homogêneas quanto as respostas à pergunta anterior que tratava de como inserir o sólido para poder interagir com ele no *software*. Dos estudantes que responderam à pergunta, quatro citaram a parábola ou a função de 2º grau para se referirem à função que representa um parabolóide. Essa correspondência sugere uma abstração pseudoempírica, pois propriedades da função de segundo grau com uma variável foram aproveitadas para tentar descrever a função representativa do parabolóide, assim como, diferentes propriedades e qualidades implícitas foram extraídas do parabolóide e utilizadas para justificar seu comportamento, chegar à função e construir o sólido.

Em todas as falas verificou-se uma variedade de informações e conhecimentos prévios, como por exemplo, uma função para  $x$ , para  $y$  e função de segundo grau, utilizados para tentar compor a função que representa o parabolóide. Nenhum dos entrevistados chegou à função, no entanto, pode-se afirmar que todos estavam construindo este conceito.

### 5.3 Momento 3 - Cálculo do volume de um sólido.

*Pergunta: Como você calcularia o volume do parabolóide?*

Depois de falar sobre os sólidos em geral e seu volume, falou-se do parabolóide, então foi perguntado como calculariam esse volume. Enquanto pensavam, querendo dar uma resposta, giravam o sólido.

**Hen\_1:** *“Definiria a função que representa a curvatura do parabolóide e utilizaria a integral com base nos pontos laterais, ou seja, as raízes da função”.*

A utilização da integral para calcular o volume, acredita-se, que seja consequência de atividades realizadas com o *Geogebra* para calcular a área de uma região abaixo da curva, conforme relatou Hen\_1 durante a entrevista. Mesmo que nunca tenha trabalhado com funções de duas variáveis, apresentou uma ideia clara sobre a integral e sua contribuição na resolução de problemas. Com essa afirmação verifica-se uma abstração refletida, pois o estudante tem consciência daquilo que fala ao relacionar a área de uma região com a integral. Então, esse conhecimento será um auxiliar na construção do conceito de integral dupla, o qual poderá ser utilizado para calcular o volume de um sólido.

**Bru\_4:** *“Colocando no Geogebra? [...] Pegaria a função e calcularia em cima daquilo ali. (Sorri, pensa, fica na dúvida.) [...] Sim... Vai ter a função e o espaço que tu tá usando... e com isso dá pra calcular o volume... com uma fórmula. [...] Uma fórmula para o volume. É simples. [...] Tem a fórmula geral [...] do volume é..... ah, agora me esqueci... (pensa).... Como é a fórmula do volume?..... Mas tem uma fórmula, né?”*

Diferente de Hen\_1, que está se dirigindo na direção do conceito, cuja construção busca-se verificar, Bru\_4 falou de uma fórmula geral. Além disso, não apresentou nenhuma ideia de como poderia ser essa fórmula. Pode-se supor que existe uma memorização de fórmulas por parte de Bru\_4 e não há evidência de abstração reflexionante. Apresentou uma

ideia muito vaga sobre fórmulas para calcular volumes, porém, sem sucesso, neste caso, mesmo manuseando o *applet* e podendo visualizar as diferentes vistas do parabolóide.

**Rap\_5:** *“Ah, por exemplo se é um cubo tu vais pegar as três arestas e fazer vezes, tipo aresta ao quadrado, na terceira....”*

**Pesquisadora:** *E de um parabolóide?*

**Rap\_5:** *Pois é... Acho que não, eu teria só algumas ideias assim, mas sozinho elas não fazem,... por exemplo quando a gente estava, a gente estudava sempre com cones daí tu tinhas que ter a base,... com o raio... só que por exemplo aqui (mostra o parabolóide) não faz exatamente como um cone ... vai sair arredondado... Então acho que dependeria da função mesmo.*

**Pesquisadora:** *Poderias usar a ideia de cone?*

**Rap\_5:** *É seria... acho que só a parte da base seria parecida com o que faz no cone.*

**Pesquisadora:** *E essa função auxiliaria de alguma forma no cálculo do volume?*

**Rap\_5:** *Bom, não sei, a gente viu no Cálculo I por exemplo, que tem um gráfico 2D, se tu fazes a integral da função tu ganha a área dela, não sei se aqui se aplica a mesma coisa pra volume. Se tu fazes a integral de uma [...] Ah, deve ter algum jeito de fazer com a função, daí o que eu imagino talvez seja esse... porque normalmente não.... se faz de um jeito... unindo com a função, porque por exemplo, no Ensino Médio, a gente via só como sendo um sólido, não como estando num plano cartesiano... e tal...”.*

Rap\_5 demonstrou em sua fala um amplo conhecimento sobre diferentes situações envolvendo área e volume. Trouxe a integral para calcular volume, pelo fato de a mesma ter sido utilizada para calcular a área de uma região. Com base nessa convicção e consciência sobre o tema área e integral, identificou-se a presença de uma abstração reflexionante do tipo abstração refletida. A hipótese é de que a utilização de conceitos construídos anteriormente, como o cálculo da área interpretado como a integral da função, pode auxiliar na construção de um novo conceito como o cálculo do volume de um sólido interpretado como a integral dupla, por meio de reflexionamentos e reflexões.

**Djo\_6:** “Ah, o volume se fosse de um cilindro, aqui na verdade ele é cônico. Deixa eu ver... deixa eu pensar... é... daria pra fazer (leva a mão ao queixo...). É que aqui tu tens duas variáveis. A gente vê em Cálculo como calcular a área de uma curva, só que aí ela não seria tipo... 3D. É só uma curva, por exemplo. Essa volta aqui (mostra o contorno da parábola). A gente pegaria a função dela e .... como se chama... já faz uns dias (sorri). É, se não me engano deriva a função e... não, pera aí (olha para cima, pensa...mexe). Tá, deixa eu pensar um pouquinho. Tá, eu pegaria, se fosse com uma variável só, eu pegaria a função, aplicaria báskara pra ver os dois pontos da raiz, as duas intercessões dela em relação a  $x$  no caso. E aí acho que com a função derivada dela eu jogo esses valores dos pontos, eu consigo calcular a área dela. Só que daí não tem como calcular esse volume (mostra com as duas mãos um sólido). É pra calcular só a área. (Leva a mão ao queixo) Aí o volume... é uma boa pergunta... (sorri)”.

**Pesquisadora:** E a ideia do cilindro, aproveitarias?

**Djo\_6:** Inicialmente eu pensei que sim, mas como ela vai reduzindo a altura aqui (mostra o contorno do parabolóide). Aí eu já não sei... Já não daria certo... a do cilindro seria a área da base vezes a altura... mas como aqui, a área da base é uma e a superior é outra, daí não daria certo esse cálculo... a área da base vezes a altura porque ele vai reduzindo... vai reduzindo a circunferência até aqui em cima (mostra com as mãos a redução da circunferência). Aí não sei como eu calcularia....

Djo\_6 apresentou um emaranhado de informações, em grande quantidade, mas não percebeu-se uma reflexão sobre as mesmas, não construindo assim, novo conhecimento.

### 5.3.1 Conclusão Momento 3:

Em relação à essa questão ‘como calcular o volume do parabolóide’, surgiram muitas ideias e uma variedade de conhecimentos que podem levar ao volume de um sólido e sua relação com a integral dupla, cujo conceito pode ser compreendido com a interação estudante – *applet*. No entanto, verifica-se um desconhecimento em relação ao cálculo do volume, e, supõe-se que o uso da integral para calcular o volume do sólido foi citada porque a mesma foi utilizada para calcular a área de uma região abaixo de uma curva qualquer. Percebe-se uma conexão entre área e volume, identificando-se processos de abstração pseudoempírica, como cita Piaget (1995), que essa abstração está apoiada sobre as propriedades que o estudante, no caso, retira de suas coordenações de ações. Os estudantes, por sua vez, recorreram às características e propriedades envolvidas na área de uma região com o objetivo de utilizá-las no cálculo do volume.

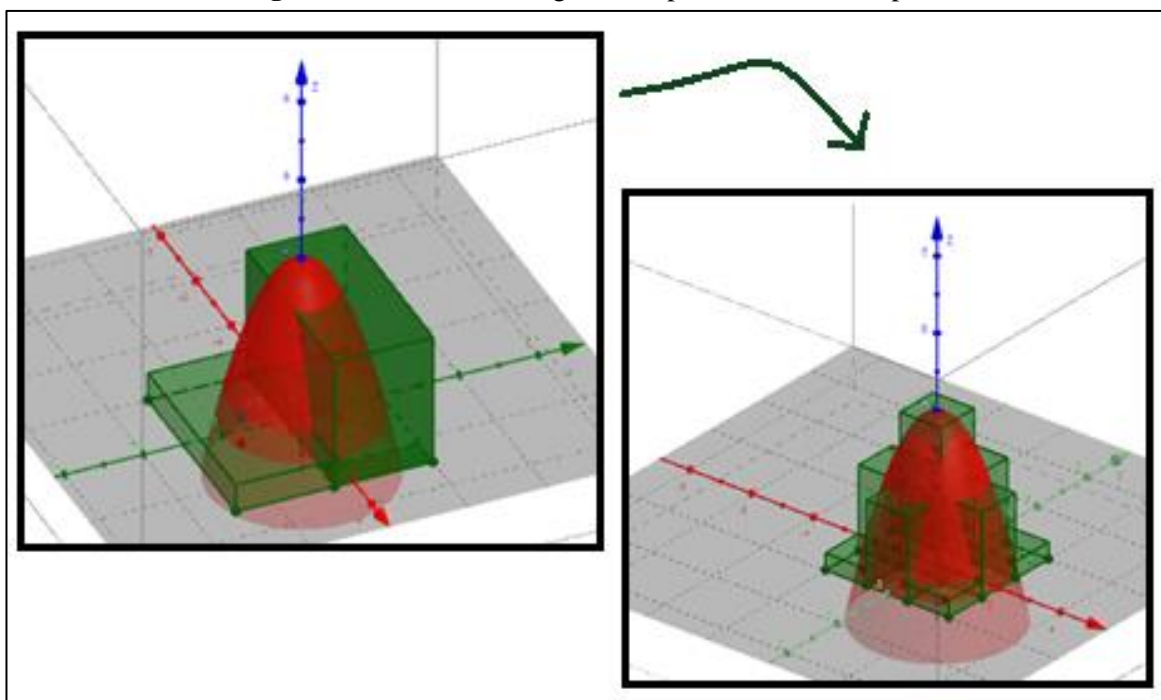
Segundo Tall (2001), a utilização da tecnologia digital, nessa situação-problema, possibilitou o desenvolvimento de atividades de experimentação, a partir das quais foram observados certos fenômenos dando sentido à atividade e contribuindo na construção de conhecimento.

### 5.4 Momento 4 - O volume do sólido e o applet - Como chegar ao volume do sólido através do applet

*Pergunta: O que acontece com a quantidade de prismas verdes?*

Nas perguntas anteriores os estudantes tiveram que utilizar conhecimentos construídos em outros momentos. A interação com o *applet* proporcionou a visualização do sólido de diferentes maneiras, bem como, pontos e curvas que sugerem a formação do sólido. No momento 4, a interação com o *applet* foi fundamental para responder à pergunta.

**Figura 16** – Prismas retangulares – prismas verdes e o parabolóide



Fonte: Elaborada pela autora

**Hen\_1:** *A quantidade vai aumentando...*

**Pesquisadora:** *E o volume total?*

**Hen\_1:** *Vai diminuindo, diminuindo...*

**Pesquisadora:** *Diminuindo? Então existe uma relação inversa?*

**Hen\_1:** *Sim...entre a quantidade de retângulos.... e eu diria assim... a precisão do volume que estou calculando. Ele vai diminuindo porque os retângulos vão ficando cada vez mais dentro da função, do parabolóide no caso. E essas áreas em verde que estão sobrando aqui... (mostra para os espaços dos prismas que estão fora do parabolóide – Figura 17). Elas vão começando a caber dentro do parabolóide e sendo consideradas no cálculo da área. Então quanto tu mais aumentar a quantidade de retângulos, ou de cubos, mais correta vai ser a área que se pretende calcular com base nessa função (fala em área, mas está se referindo ao volume).*

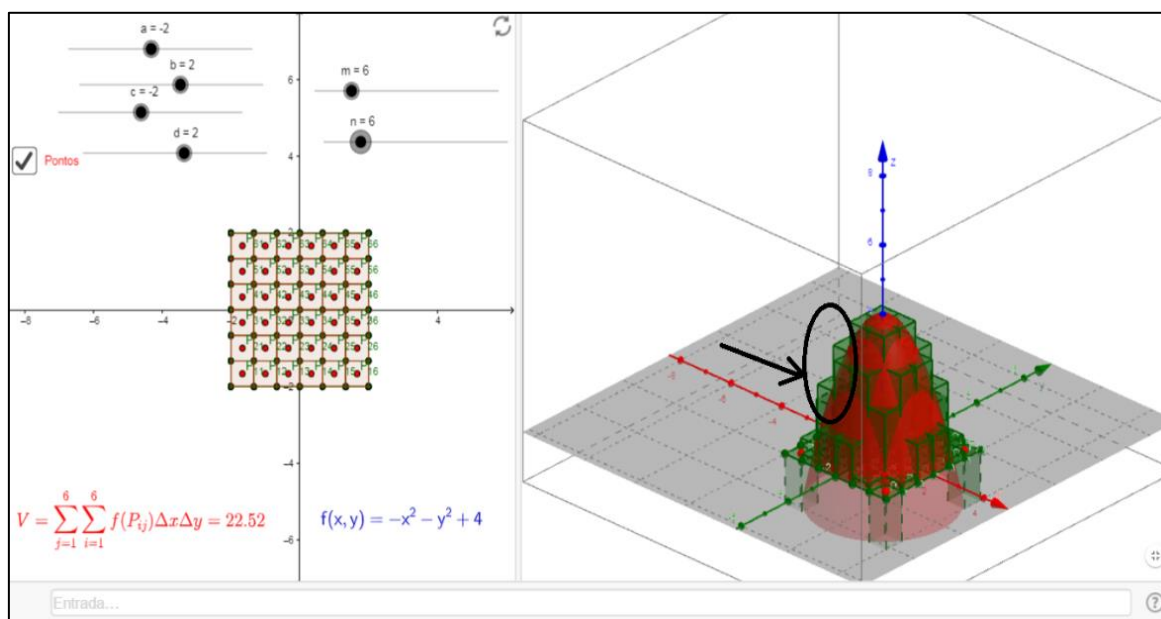
**Pesquisadora:** *Quem define essas alturas, dos prismas?*

**Hen\_1:** *Aham,.... as alturas dos prismas.... (Olha, pensa, gira o parabolóide....) Tem que ter uma relação com a função, porque ele tá tentando encaixar os prismas dentro do parabolóide e no cálculo,... a*



*gente entende que a gente vai calcular o volume, então eles vão ter que estar na parte de dentro, entre aspás, do parabolóide. Então como é a função que define qual é a lateral dessa curva, qual é a curvatura, os prismas vão ter relação com a função.”*

**Figura 17** – As sobras dos prismas



Fonte: Elaborada pela autora

A percepção de que a quantidade de prismas vai aumentando enquanto o volume total vai diminuindo é facilitada pelo *applet*, que possibilita visualizar esse comportamento dos prismas, a variação das alturas, seu volume e do parabolóide. Numa construção manual não seria tão simples chegar a essa conclusão. De acordo com a resposta, que evidencia o quanto se torna simples verificar o volume de um sólido não tão usual, concorda-se com Tall (2001) que afirma que o computador não pode ser apenas um instrumento que substitui lápis e papel, mas um instrumento que contribui na construção do conhecimento e na aprendizagem, fazendo parte do processo.

A afirmação de que os prismas vão cabendo cada vez mais dentro do parabolóide, mostra que Hen\_1 está estabelecendo uma relação entre a função que representa o sólido e seu volume. Embora, em vários momentos trate o volume como área, percebe-se que a intenção é falar de volume. O fato de fazer uma conexão entre o volume do parabolóide e a função que representa o parabolóide, considerando as alturas dos prismas que estão sendo incluídos, é uma constatação de que houve a utilização de instrumentos de assimilação

(transformação do objeto - volume dos prismas), construídos por Hen\_1 mesmo antes da realização dessa atividade.

Além de se observar através da interação estudante-*applet* um caminho para a construção de um conceito, identifica-se nas afirmações de Hen\_1, a presença de abstração pseudoempírica, pois falou da função que define essa curva, mas que não é visível, portanto, algo colocado lá, introduzindo no objeto, uma qualidade que não está nele, mas que ficou registrada como um conhecimento. Por experiências anteriores sabia que inserindo a função obtém-se o sólido, portanto, aproveitou essas informações na resolução do problema proposto. Com isso, Hen\_1 fez uma conexão entre a função que representa o parabolóide e o volume do mesmo.

Questionada sobre o comportamento e o volume dos prismas, e sobre a relação entre os prismas e o parabolóide, Lar\_2 foi modificando os botões com os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  e observando o que ia acontecendo.

**Pesquisadora:** *Se tu fores modificando  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  o que acontece?*

**Lar\_2:** *Tá... Acho que a ideia é tentar encaixar ali dentro (mostra o parabolóide).*

**Pesquisadora:** *Ah,... Os prismas verdes, encaixar no parabolóide, no sólido vermelho?*

**Lar\_2:** *É, a gente fez uma atividade assim, a respeito das integrais para encontrar a área. De um, de uma curva assim. (mostra com o dedo o contorno do parabolóide, uma parábola). E foi mais ou menos essa ideia. Ah, então é isso aí mesmo. Se der pra colocar todos eles perfeitamente ali, eu vou ter o volume. (Vai mexendo e observando atentamente o que ocorre na tela, no parabolóide e com os prismas).*

**Pesquisadora:** *Esse perfeitamente pra ti seria o que?*

**Lar\_2:** *Ah, o mais dentro possível sem que sobrasse muito do lado de fora (pensa). Talvez não fique exatamente dentro, mas sobrando o mínimo possível...*

Em sua fala, Lar\_2 demonstrou conhecer as Somas de Riemann, que foram abordadas em aula, anterior a essa entrevista. Através da utilização dessa ideia para tentar resolver o problema proposto (volume do parabolóide) identificou-se a presença de abstração

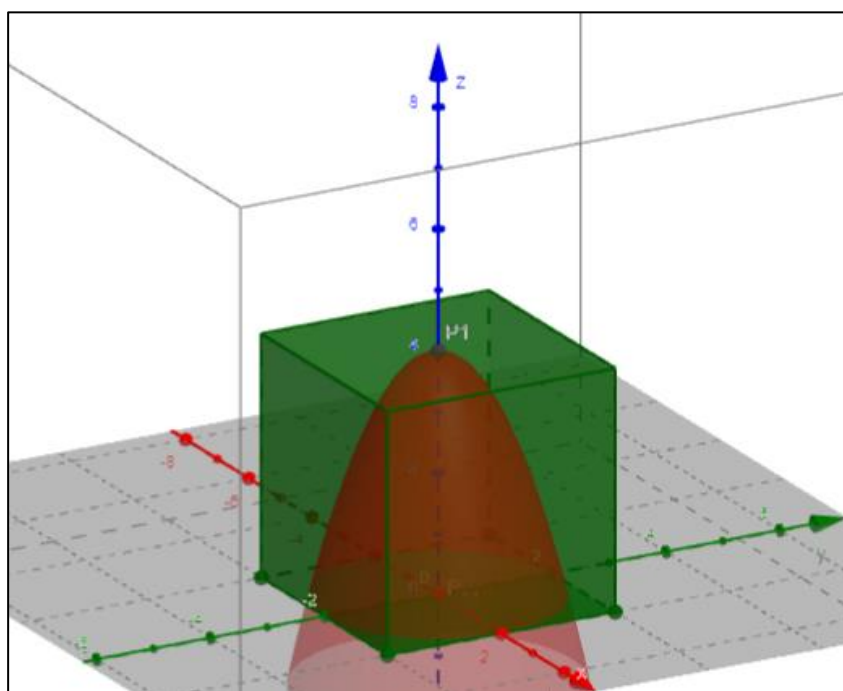
reflexionante, pois um conceito já construído (área e sua relação com a integral definida) contribuiu na construção de outro conceito: volume e sua relação com a integral dupla. Ainda, essa abstração decorre de uma abstração refletida, pois Lar\_2 tinha consciência de que a área de uma região pode ser calculada por integral. Ao mesmo tempo, parecia tratar do limite quando falava em colocar os prismas todos dentro do parabolóide. Verifica-se, assim, a importância desses conceitos, e as conexões que podem ser feitas entre limite e integral.

Durante a entrevista, interagindo com o *applet*, Ren\_3 construiu um cubo, o qual foi dividido em prismas retangulares de base cada vez menor.

**Pesquisadora:** *Tu tens um cubo, esse prisma verde. Qual é o seu volume?*

**Ren\_3:** *Quatro, não...  $4 \times 2 \times 2$ , dezesseis... Ah, aqui do lado... Não, não, é  $4 \times 4 \times 4$ . (se aproxima da tela) É que é de -2 até 2. Ah..... quatro ao cubo, que eu não sei quanto dá...*

**Figura 1 8**– Cubo em torno do parabolóide



Fonte: Elaborada pela autora

**Pesquisadora:** *Sessenta e quatro. E se tu fores dividindo esse prisma, tu achas que o volume vai aumentar ou diminuir?*

**Ren\_3:** *Diminuir...* (altera m e n aumentando a quantidade de prismas) ... *Que vai pegar mais pontos, dá pra ver claramente tá sobrando um montão de espaço daí vai ficando, vai pegando mais pontos da própria função...* *Aqui só pegou o topo e quando dividir vai pegando os lados até... quase tudo. E cada espacinho que sobrar aqui dos lados vai ficar menor (mostra ao redor do parabolóide).*

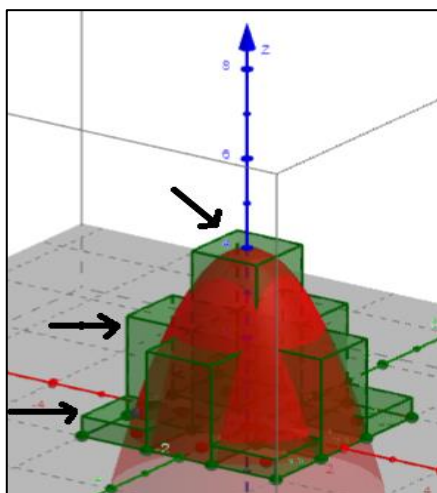
**Pesquisadora:** *O que está acontecendo com esses prismas verdes? No início tu tinhas um cubo e agora?*

**Ren\_3:** *Ele pega aqui ó, por exemplo, desse lado sei lá, mais ou menos na metade (Mostra as alturas dos prismas) o de cima continua, só que ali tá... eu não sei qual é o lado (analisa os prismas e o parabolóide). Deve ser um ou dois o lado dele, mas a altura é quatro...*

**Pesquisadora:** *Aham, e as alturas de todos os prismas são as mesmas?*

**Ren\_3:** *Não, aqui que tem três, tem três alturas diferentes... (analisa...) uma altura quase zero, esse aqui deve ser dois... (mostra outro prisma). Não sei, deixa eu ver... Ah, dá pra ver aqui, então... (gira os sólidos da Janela 3D) é dois. Não sei se tem um dois ali (se aproxima da tela). O máximo sempre vai ser o quatro, o máximo dessa aqui (mostra a função) mas as outras alturas são pontos entre o quatro e o zero.*

**Figura 19** – Comparação entre o volume dos prismas e do parabolóide



Fonte: Elaborada pela autora

**Pesquisadora:** *Essas alturas tem uma relação com o parabolóide?*

**Ren\_3:** *Sim, todos são... o meio do prisma é sempre um ponto do parabolóide. (mostra no parabolóide) Se bem que aqui não tá muito no quatro... (mostra o prisma do centro). Não sei se esse sempre vai ser quatro... Ih, agora não sei se vai ser sempre quatro, o máximo... Eu achei que ia dar aí no centro, talvez só para números ímpares... Se eu botar em cinco (modifica 'm' para 5 e 'n' também). Cinco e cinco, acho que vai pegar aqui no meio.... É só em ímpares que vai ficar... Só em ímpares, porque daí o ímpar tem o central.... Daí pega bem no máximo....*

**Pesquisadora:** *Bem, tu disseste que o volume desses prismas verdes vai diminuindo...*

**Ren\_3:** *Sim*

**Pesquisadora:** *E o que acontece com a quantidade de prismas?*

**Ren\_3:** *Vai aumentar, e bastante...*

**Pesquisadora:** *E o volume de todos esses prismas, ele aumenta ou diminui?*

**Ren\_3:** *Diminui até certo ponto, vai diminuir cada vez menos... Sabe o quadrado... Até começar a travar... ou vai diminuindo... não sei se é uma função logaritmo... ou ao quadrado. Sei que o volume não é linear, dos prismas.*

**Pesquisadora:** *E esse volume está se aproximando de quem?*

**Ren\_3:** *Do parabolóide... Tá cada vez ficando só dentro e menos fora. Tem menos sobra de volume...*

Ren\_3 usou diferentes conceitos e definições para justificar o que estava acontecendo com os prismas. Verificou o que acontecia e através das propriedades extraídas, concluiu que a soma dos volumes dos prismas tende ao volume do parabolóide. A partir das observações e das ações sobre o *applet*, Ren\_3 construiu um novo conceito: que a soma dos volumes dos prismas tende ao volume do parabolóide, pois à medida que diminui-se a área da base de cada prisma, diminui o volume de cada um deles e conseqüentemente o volume de todos, cuja soma chega a um limite que corresponde ao volume do parabolóide. Com a construção desse conceito pode-se identificar uma abstração refletida, que segundo Piaget (1995) é uma forma superior de abstração, resultante de um processo de reflexionamentos e reflexões em que o estudante toma consciência de uma abstração reflexionante.

A interação com o *applet* fez com que ocorressem conexões, transformação de suas ideias, gerando um conhecimento novo. Na análise feita em relação ao que estava acontecendo com os prismas, utilizou conhecimentos anteriores sobre os números, sólidos geométricos, máximo de uma função, entre outras propriedades e os aplicou na situação proposta. Com isso, identifica-se a presença de abstração reflexionante, especialmente pseudoempírica, pois utilizou uma variedade de propriedades que não estavam visíveis no parabolóide nem no *applet*, mas foram úteis para construir novos conhecimentos, que levaram a um novo conceito.

Enquanto manuseava e examinava as diferentes funcionalidades do *applet*, sugeriu-se que Bru\_4 colocasse os botões  $m=1$  e  $n=1$  (responsáveis pelas partições dos prismas) formando, assim, um cubo em torno do parabolóide, cujas medidas da face coincidem com a base e altura do parabolóide.

**Pesquisadora:** *Que sólido tu formaste?*

**Bru\_4:** *Um cubo*

**Pesquisadora:** *O volume do cubo formado é o mesmo do parabolóide?*

**Bru\_4:** *Não, porque o parabolóide vai diminuindo, na parte inferior... superior.*

**Pesquisadora:** *Então como é o volume do cubo em relação ao parabolóide?*

**Bru\_4:** *Maior*

**Pesquisadora:** *Por que?*

**Bru\_4:** *Porque ele tem as mesmas medidas... e o parabolóide vai diminuindo... Por exemplo, ali (mostra no sólido) ele tem a parte a mais (o cubo).*

**Pesquisadora:** *Alterando os valores de  $m$  e  $n$ , o que acontece com o cubo?*

**Bru\_4:** *O cubo está se dividindo...*

**Pesquisadora:** *E o seu volume?*

**Bru\_4:** *Vai diminuindo.*

**Pesquisadora:** *E a quantidade de prismas está diminuindo ou aumentando?*

**Bru\_4:** *Aumentando.*

**Pesquisadora:** *Por que tu achas que o volume de cada prisma está diminuindo?*

**Bru\_4:** *Porque eles vão tendo pedacinhos menores. As medidas deles vão sendo menores. E, vai ficar próximo de um certo valor, mas não para.... Acho que não.*

**Pesquisadora:** *O volume vai ficar próximo de quem?*

**Bru\_4:** *Do parabolóide.*

**Pesquisadora:** *E tu achas que tem outra forma de calcular o volume do parabolóide?*

**Bru\_4:** *Acho que não...*

Bru\_4 faz a relação entre o volume dos prismas e o volume do parabolóide. Por abstração empírica verificou e concluiu que os prismas cada vez menores iam se encaixando de forma que o volume total dos mesmos, tendia ao volume do parabolóide. No entanto, isso não é o suficiente para pensar em abstração reflexionante, pois essa conclusão ocorre de forma muito vaga. Em suas respostas percebe-se muita insegurança, no entanto, por hipótese, a interação com o *applet* auxilia na construção de um conceito.

Rap\_5 construiu um sólido observando a base do parabolóide, o qual chamou de sólido retangular.

**Pesquisadora:** *Que sólido tu tens? Tu poderias chamar de cubo?*

**Rap\_5:** *Não,.... acho que é um sólido retangular.*

**Pesquisadora:** *Falando do volume, tu achas que ele corresponde ao volume do parabolóide?*

**Rap\_5:** *Não, não... conforme eu vou mexendo aqui na sequência ele vai se aproximando...*

**Pesquisadora:** *Daí o que tu vais fazendo com o prisma verde?*

**Rap\_5:** *Ele vai se dividindo. Agora ele está só em um retângulo...*

**Pesquisadora:** *E o que vai acontecendo com o volume dos prismas verdes?*

**Rap\_5:** *Ele diminuiu bastante...*

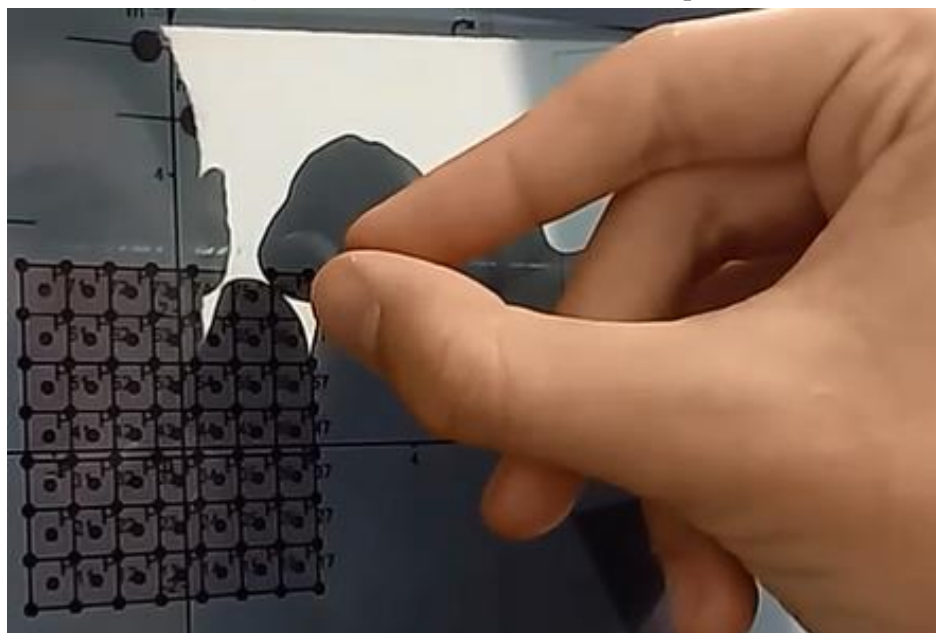
**Pesquisadora:** *Então o que vai acontecendo com o volume de cada um dos prismas?*

**Rap\_5:** *O prisma vai se adequando ao parabolóide que tem no meio. Quando tiver o máximo aqui pra direita, o m e o n.*

**Pesquisadora:** *E tu achas que tem um máximo?*

**Rap\_5:** *Ah, não, eu quis dizer o máximo aqui no computador... É na verdade estaria tendendo cada um desses quadradinhos aqui a zero (mostra os quadrados da base que são a base dos prismas).*

**Figura 20** – O tamanho da base de um prisma



Fonte: Vídeo durante a entrevista

**Pesquisadora:** *Hum, e daí o volume total também tende a zero?*

**Rap\_5:** *Não, o volume total por exemplo, ele deve estar pegando o ponto aqui desse parabolóide e tendendo só o retangulozinho debaixo a zero. Tipo no caso o volume seria a área vezes a altura que é um ponto da função e daí ele vai tendendo a essa área zero, mas a altura vai ser sempre igual naquele ponto... no outro ponto vai ser diferente...*

**Pesquisadora:** *E o que vai acontecendo com a quantidade de prismas?*

**Rap\_5:** *Vai ficando cada vez maior, só que cada vez com uma área menor a base de cada prisma. Por exemplo, tu vais pegando prisma total que tinha e vai tendo cada vez mais repartições.*

**Pesquisadora:** *Tu falaste alguma coisa em Somas de Riemann. Tu achas que poderias aplicar isso?*

**Rap\_5:** *É, acho que é isso que está acontecendo, só que em 3D.*



Concluiu que o volume de um sólido não regular pode ser calculado utilizando a mesma ideia do cálculo da área de uma região irregular. Recordou das Somas de Riemann e aproveitou a ideia para tratar dos cortes feitos nos prismas e que fazem com que os mesmos preencham o espaço do parabolóide. É notável a presença de abstração reflexionante, do tipo refletida, pois, Rap\_5 conseguiu utilizar e aprimorar um conceito para construir outro, através do *applet*, chegando ao objetivo proposto. A tecnologia, nesse caso, favorece a construção de conceitos, pois é possível ir e voltar para verificar o que está acontecendo com os prismas e sua relação com o parabolóide.

Em sua fala, Djo\_6 demonstrou um conhecimento em relação ao plano, ignorando muitas vezes o espaço. Agindo sobre o *applet*, concluiu que a divisão em prismas com base cada vez menor, leva ao volume do parabolóide.

**Pesquisadora:** *Que tipo de sólido tu construístes?*

**Djo\_6:** *Um quadrado. Um cubo na verdade. É, tem uma pequena variação.*

**Pesquisadora:** *Tu podes dizer que o cubo tem volume próximo do volume do parabolóide? Dá para dizer que é o mesmo volume?*

**Djo\_6:** *Não.*

**Pesquisadora:** *Por que tu achas que não?*

**Djo\_6:** *Justamente por essa área aqui que fica fora (mostra a sobra no cubo e parabolóide) Eu até acredito que a área do cubo tenha o dobro do volume do parabolóide.*

**Pesquisadora:** *Ah.*

**Djo\_6:** *Pensando que se essa divisão do cubo fosse aqui e isso fosse exatamente uma linha reta quase próxima, visualmente falando. Então, acredito que a área do cubo tá dando o dobro da área do parabolóide.*

**Pesquisadora:** *Então, tu acreditas que o volume do cubo seja maior ou menor que do parabolóide?*

**Djo\_6:** *É menor, a metade.*

**Pesquisadora:** *Então vai modificando  $m$  e  $n$ , o que tu percebes que está acontecendo?*

**Djo\_6:** *Ele tá reduzindo a altura de  $z$ . É ele tá na verdade encaixando, tipo ele está dividindo a área em mais cubos. E respeita a função dessa*

*curva aqui (mostra o parabolóide), cada vez encaixando mais dentro para ter menos perda. Então fica mais próximo do valor.*

**Pesquisadora:** *Então o que tu achas que está acontecendo com o volume desses sólidos verdes?*

**Djo\_6:** *Ele está reduzindo. Cada vez que aumenta  $m$  e  $n$  aqui, ele aumenta o número de cubos, ele divide mais os cubos em tamanhos menores que fiquem mais próximos à curva da função, que dá esse arco aqui.*

**Pesquisadora:** *E quem define essas alturas dos prismas verdes? Essas diferentes alturas?*

**Djo\_6:** *A altura limite acho que é dada pelo quatro.... (pensa, mexe, fala,...) é a altura limite acredito que é dada pelo quatro. Ela vai cada vez diminuindo e criando mais um. De acordo com a curva.*

**Pesquisadora:** *E essas outras alturas também tem alguma relação com a função?*

**Djo\_6:** *Sim, porque cada vez que eu aumento o valor de  $m$  e  $n$ , elas vão se aproximando mais da curva que a função representa. Então provavelmente se eu botar elas no máximo aqui, ela vai dar exatamente respeitando a curva e o volume exato do parabolóide.*

**Pesquisadora:** *Então tu achas que o volume desses prismas verdes vai se aproximando do volume do parabolóide?*

**Djo\_6:** *Isto...*

**Pesquisadora:** *Não tenderia a zero? Ou tu achas que o volume dos prismas verdes poderia tender a zero?*

**Djo\_6:** *Acredito que não.*

**Pesquisadora:** *E quem seria o limite?*

**Djo\_6:** *Pois é o limite seria o volume do parabolóide.*

Analisando a fala de Djo\_6, verificou-se sua visão voltada ao plano, o que sugere que o estudante não tenha claros alguns conceitos de geometria plana e espacial. Sua percepção ainda esteve voltada fortemente para o plano, pois apesar de a pesquisadora repetir por várias vezes a pergunta sobre volume, Djo\_6 insistia em falar de área.

No último momento da fala, sim, referiu-se ao volume dos sólidos e afirmou que o volume dos prismas tendia ao volume do parabolóide, o que percebeu empiricamente. Já o

fato de mencionar a altura dos prismas, que ia se adequando à curva do parabolóide de acordo com a função que ele representa é uma evidência de abstração pseudoempírica, pois retirou do parabolóide uma função, que ali colocou através de conhecimento prévio.

Afirmou que o limite das somas dos volumes dos prismas seria o volume do parabolóide. No entanto, essa afirmação pode ser considerada uma resposta induzida pela pesquisadora.

Diferente dos demais, Luc\_7 girava o sólido tentando visualizar a base do parabolóide. A partir da base que construiu os prismas.

**Pesquisadora:** *Qual é a base do teu parabolóide?*

**Luc\_7:** *No caso a forma? Um círculo, um cilindro?*

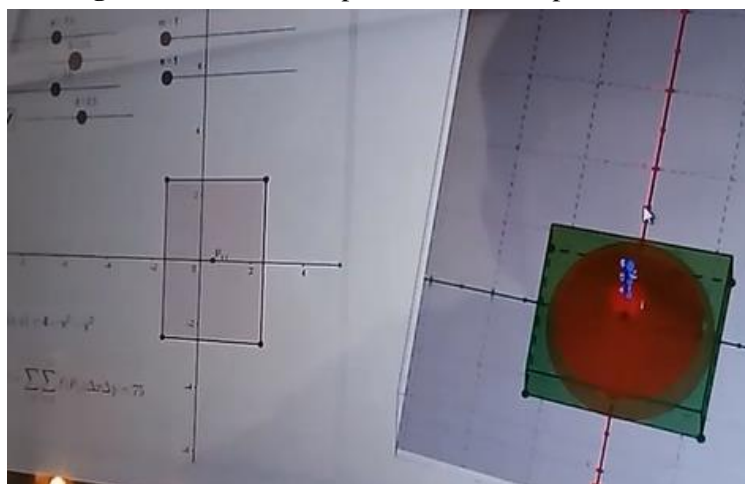
**Pesquisadora:** *Qual a outra forma que mais se aproxima dessa?*

**Luc\_7:** *O círculo seria.... um quadrado??*

**Pesquisadora:** *Um quadrado, tu terias como ajeitar um quadrado ali?*

**Luc\_7:** *Sim... (Mexe e tenta enquadrar a base do parabolóide, no plano xy, num quadrado. Modifica os valores com os botões a, b, c e d para fazer o quadrado como base do prisma verde. Assim, forma o cubo, depois vai modificando m e n e o mesmo é dividido em prismas retangulares).*

**Figura 21** – A base do parabolóide e um prisma



Fonte: Vídeo durante a entrevista

Essa conexão bastante rápida que fez em relação à circunferência e ao quadrado, sugere uma abstração pseudoempírica, pois se baseou nas propriedades do quadrado e da circunferência para encontrar o retângulo que mais se aproxima da base do parabolóide. A

hipótese é de que fez uma relação entre o raio da circunferência e o lado do quadrado, optando pelo quadrado que formaria, então, a base do cubo.

**Pesquisadora:** *O que está acontecendo? Tu tinhas um prisma lá no início!*

**Luc\_7:** *Sim, agora estou fazendo mais prismas. Agora a forma dele já está muito mais parecida do prisma acima do eixo x, pelo menos, plano xy.*

**Pesquisadora:** *E, como são as alturas desses prismas? São todas iguais?*

**Luc\_7:** *As altuuuras.... os bem periféricos parecem que não... e os mais do meio parecem que tem a mesma altura. Até porque era um quadrado, um quadrado não, um cubo... e ele foi dividido em partes... verticalmente a princípio... Acredito que quanto mmm.... é eles... Quanto mais tu dividir, mais tu vais ter alturas diferentes. Se eu for aumentando cada vez mais o número de prismas, menores eles iam acabar ficando, até poderiam ter a mesma altura. Só eles... estariam tão pequenos que ficariam, do jeito que fossem estruturados, ficariam próximos da forma do parabolóide.*

**Pesquisadora:** *Então quem define essas alturas?*

**Luc\_7:** *O 4 na fórmula... Ah, não seria o quatro porque quanto mais eles diminuem a altura deles diminui também.*

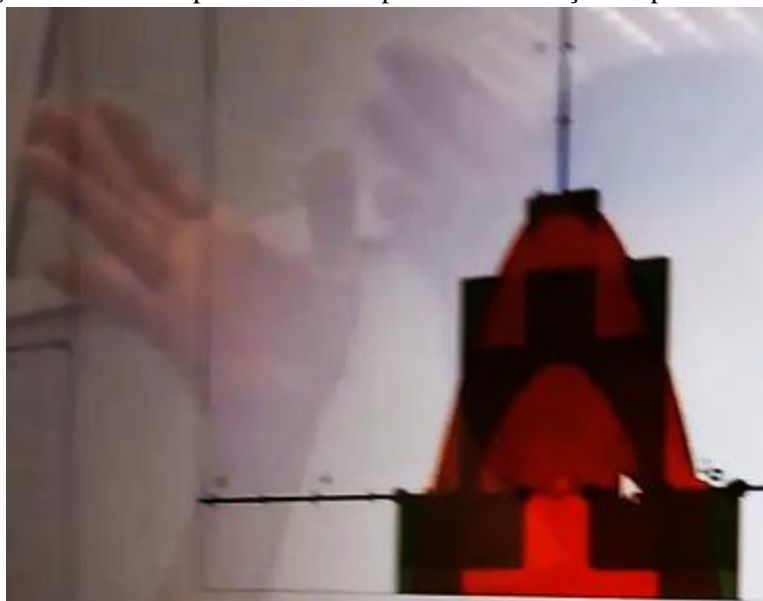
**Pesquisadora:** *Então, o que acontece à medida que tu vais aumentando o número de prismas...*

**Luc\_7:** *Quanto mais aumenta o número de prismas, a princípio mais exato deveria ser, vai... Eu chego mais perto ainda do volume real do parabolóide. Tanto que aqui é somatório dos... (mostra o somatório) prismas...*

**Pesquisadora:** *Tu achas que esse volume agora já está mais próximo que o primeiro que tu tinhas?*

**Luc\_7:** *Já. Já está mais próximo porque tem vários outros sólidos, um maior número de sólidos com menor volume, juntando eles o volume deles fica mais perto que o anterior, um único sólido.*

**Figura 22** – O comportamento dos prismas em relação ao parabolóide



Fonte: Vídeo durante a entrevista

**Pesquisadora:** *Então se tu fores dividindo, aumentando o valor de  $m$  e  $n$ , vai aumentar o número de prismas?*

**Luc\_7:** *Sim, vai aumentar, tendendo ao infinito chegando a um resultado bem próximo ao real volume do parabolóide.*

**Pesquisadora:** *E quem estaria tendendo ao infinito?*

**Luc\_7:** *O número de prismas.*

**Pesquisadora:** *E o volume?*

**Luc\_7:** *O volume do parabolóide ou dos prismas?*

**Pesquisadora:** *Dos prismas, a soma.*

**Luc\_7:** *O volume dos prismas tenderia ao volume do parabolóide.*

Por abstração pseudoempírica, Luc\_7 concluiu que a quantidade de prismas vai aumentando enquanto o volume de cada um deles e sua soma diminui, tendendo a um determinado valor. Esse valor, segundo ele, corresponde ao volume do parabolóide, a partir das partições realizadas.

Através de suas coordenações das ações realizou abstrações reflexionantes, pois verificou diferentes alturas dos prismas, as quais relacionou com a ‘fórmula’ (a hipótese é que seja a função) que representa o parabolóide, que não é visível, mas é a partir dela que foi possível construir o parabolóide no *applet*.

Está presente o conceito de limite no de volume do parabolóide, ao qual chegou através de infinitas partições. Consta-se a presença de abstração reflexionante na forma refletida nessa fala, pois concluiu que o volume dos prismas juntos tende ao volume do parabolóide.

#### **5.4.1 Conclusão - Momento 4:**

Analisando as respostas dos entrevistados percebe-se uma segurança em suas afirmações de que o número de prismas aumenta para que consigam preencher melhor o parabolóide que é delimitado por uma função. Logo, os prismas adequam-se a essa função para que suas alturas estejam sempre mais de acordo com o parabolóide. Assim, a soma dos volumes dos prismas tende ao volume do parabolóide. Essa relação entre a quantidade de prismas e a soma de seus volumes tendendo ao volume do parabolóide pode ser bem visualizada no *applet*, favorecendo a abstração empírica. Consta-se de acordo com a fala dos estudantes que a tecnologia contribui para que esse entendimento ocorra de forma mais efetiva e consciente. Dessa forma, o uso da tecnologia favorece a abstração e consequente construção e compreensão de conceitos matemáticos.

Verifica-se esse processo de construção de conhecimento a partir da constatação de abstração pseudoempírica, quando os estudantes aumentavam o número de prismas e consequentemente diminuía o volume deles. A coordenação das ações responsáveis por esse fato é que leva à construção do conceito de volume de um sólido como o parabolóide. Essas mesmas coordenações das ações levaram os estudantes entrevistados a um processo de abstração refletida por concluírem que a soma dos volumes desses prismas tendia ao volume do parabolóide.

Por hipótese, esse reconhecimento de que a soma dos volumes dos prismas, enquanto aumentava sua quantidade e diminuía a área da base de cada um deles, tendia ao volume do parabolóide, auxiliou na compreensão do conceito de integral dupla, pois por abstração reflexionante ocorreram reflexionamentos e reflexões que na interação com o *applet*, possibilitaram a construção da noção de um conceito novo.

### 5.5 Momento 5: Relação entre o volume do sólido e a integral dupla.

*Pergunta: Você teria outra forma de calcular o volume de um sólido?*

Depois de terem concluído que a soma dos volumes dos prismas tende ao volume do parabolóide, foi possível fazer uma conexão do volume do parabolóide com a integral dupla da função.

**Hen\_1:** *Usando integral, ahh... a integral da função com os pontos laterais como os, os... limites, ou achando as raízes da função, que dão uma ideia de quais são os pontos onde cruzam, onde a parábola ou parabolóide cruza o eixo  $x$  e  $y$ .*

**Pesquisadora:** *Tu tens uma ideia de como poderíamos aplicar a integral, então?*

**Hen\_1:** *Eh,.. como eu aplicaria a integral na função?... Sim, ... eu sei que preciso, enfim, fazer o cálculo da integral, ... o cálculo da integral com base na função. Onde... nesse caso para  $x$  eu vou ter  $a$  e  $b$ . E, pra  $y$  vou ter  $c$  e  $d$ . Então eu calcularia a integral, chegaria numa nova função e essa função eu aplicaria  $a$  e  $b$ ,  $c$  e  $d$  nas novas funções que eu teria.*

**Pesquisadora:** *Tá, tu achas que tem alguma relação com os cálculos de integral que tu já viste?*

**Hen\_1:** *Tem, os cálculos de integral que eu fiz até agora, eles são, não são pra volume, são pra área, mas praticamente a mesma metodologia. Calculo a integral da função com base nos pontos laterais, pois nessa função já calculando a integral, eu aplico o ponto  $a$ , o número que eu tiver, no caso,  $-2$  e  $2$  aqui, nessa função já integrada e a maior menos a menor vai dar o valor da minha área. Então, como aqui a gente tem  $x$ ,  $y$  e  $z$ .... ahh eu imagino que... a gente, eu nunca fiz, mas eu faria uma multiplicação, então pela altura para calcular o volume em perspectiva de  $z$  no caso.*

**Pesquisadora:** *E, por ter  $x$  e  $y$ ... E no caso do volume tu terias uma única variável?*

**Hen\_1:** *Duas variáveis porque o volume tem que ter três dimensões. A altura sei que é constante. Nessa função no caso a altura é a constante, o número 4 e numa função com uma variável essa constante também seria uma altura, mas no eixo y. E nesse caso a gente tem uma função, uma variável que é x [mostra a função  $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ ]. Então teria uma parábola em x e outra em y. E, z seria igual a 4, então.*

**Pesquisadora:** *E, então tu poderias usar uma integral da forma que tu usavas para calcular a área?*

**Hen\_1:** *Não, teria que ter alguma coisa a mais, pois estou lidando com volume. Assim como eu calculo uma área plana, eu calculo lado vezes altura, quando eu calculo o volume de um cubo que tem o mesmo comprimento e largura da área plana, eu tenho que multiplicar aquela área por uma outra... pela altura, que nesse exemplo seria o eixo z, que dá ideia de profundidade.*

**Pesquisadora:** *Também, numa integral daquelas tu calculavas a integral em relação à variável x, por exemplo. E como tu poderias fazer se tu tens duas variáveis?*

**Hen\_1:** *(Pensa) com duas variáveis?... Eu poderia .... tentar definir... o valor de x primeiro... de y primeiro... depois substituiria... Ou,... se .... talvez eu calculasse a integral de um e depois a integral de outra... porque as duas têm a mesma altura... e as duas têm a mesma, nesse caso, tem a mesma largura e comprimento. Bem, eu não sei, eu nunca calculei pra o volume, mas pensando no cálculo do uso da integral pra área, daqui a pouco, quando chego no resultado da integral da área, nesse caso eu teria  $f(2)$  e  $f(-2)$  pra aplicar na função. Nesse caso, eu teria ah,  $f(2)$  e  $f(-2)$  para aplicar na função em relação a x e em relação a y. E aí com esses resultados,.. eu teria... eu poderia calcular um menos o outro e multiplicar pela constante 4. Seguindo do jeito que calculo a área de um cubo no caso.*

Em sua fala Hen\_1 tinha muito presente o emprego da integral para calcular o volume de um sólido, utilizando a função que o define. Trouxe a ideia da integral definida, resultado de um processo de abstração reflexionante que ocorreu com a área de uma região. Destacou que faria o mesmo com um sólido, como o parabolóide, por exemplo. Nesse sentido, pode-



se citar a abstração pseudoempírica, pois as propriedades que Hen\_1 colocou no objeto é o que foi retirando dele para encontrar a solução do problema. O uso do *applet*, além de facilitar a visualização, auxiliou na aplicação das propriedades conhecidas, as quais fizeram parte da construção de um novo conceito: o volume de um sólido.

O fato de acreditar na utilização da integral para calcular o volume, assim como utilizou a mesma para calcular a área, sugere uma abstração reflexionante num processo de reflexionamentos e reflexões, sendo que informações e conhecimentos anteriores auxiliaram na compreensão de um novo conceito.

Ao citar que aplicaria  $a$  e  $b$  na função em  $x$ , e  $c$  e  $d$  na função em  $y$  depois de ter aplicado a integral, supõe-se que esteve muito próximo de chegar a uma integral dupla. Na verdade, não definiu como integral dupla, pois não conhecia esta expressão, mas acompanhando suas falas e raciocínio ao longo da entrevista, pode-se supor que tinha condições de chegar à integral dupla.

A ideia de tender a um valor também leva a um limite e esse limite, segundo os entrevistados corresponde à integral, como percebe-se na fala de Lar\_2.

**Pesquisadora:** *E tu achas que a soma então dos volumes desses prismas tende a um determinado valor? Que valor seria esse?*

**Lar\_2:** *Ela tende à integral.*

**Pesquisadora:** *A integral? Seria a integral de que?*

**Lar\_2:** *A integral determina a área.... Ah, como é que posso dizer... A integral det... no caso vamos supor que tem uma linha aqui em cima, que cobre isso daqui (mostra por cima do parabolóide com a seta). A integral determinaria a área abaixo dessa linha (mostra novamente o contorno do parabolóide).*

**Pesquisadora:** *Hum, seria.... mas como esse sólido é um sólido em três dimensões, seria área ou seria o que?*

**Lar\_2:** *Pois é... É seria a área (mostra positivamente com a cabeça). A integral que eu saiba ela determina a área, não o volume. Pelo meu entender...*

Nessa fala Lar\_2 demonstrou sua convicção em relação ao conceito de integral como meio de calcular a área. Percebe-se a presença de abstração refletida, pois tinha consciência

disso, tanto que sua resposta imediata sobre o cálculo do volume foi utilizando a integral. No entanto, ficou na dúvida, pois acreditava que a integral fosse utilizada somente para calcular a área.

**Pesquisadora:** *E tu acha que talvez não daria p/ estender p/ volume?*

**Lar\_2:** *Sim, sim, daria pra estender pro volume... (Fica pensativa...)*

**Pesquisadora:** *E pra calcular a integral, tu precisas ter o quê?*

**Lar\_2:** *(Pensa...) Tu precisas... seria bom ter o valor inicial de  $x$ , mas tem funções em que não é necessário, é que depende... tem funções que eles te dão a função, mas não dão o valor inicial de  $x$  nem o final. E, tem outras que te dão o valor inicial e final, mas não dão a função. Então depende do tipo de função que é.*

**Pesquisadora:** *Humm, da função. E a função que nós usamos para construir esse parabolóide? (mostro com o dedo o parabolóide). O que ela tem de diferente? (Pausa) Daquela função da área?*

**Lar\_2:** *(Pensa) Provavelmente ela teria algum elemento elevado ao cubo ... Não, não, não é isso. Não tem nada a ver com cubo. (Sorri e mexe no sólido, gira ,...)*

**Pesquisadora:** *Ah, um sólido e o que muda?*

**Lar\_2:** *O sólido ele tem três dimensões, então não é apenas uma fachada, que a área de um 2D é uma fachada, mas o sólido ele é inteiro. (Mostra com os dedos um sólido)*

**Pesquisadora:** *Então ele tem o que além de  $x$  e  $y$  (mostro no plano  $xy$  com o dedo)?*

**Lar\_2:** *O  $z$  também.... Ela vai ter um elemento a mais...*

**Pesquisadora:** *Um elemento a mais... Mas mesmo assim tu achas que daria pra usar a integral pra fazer isso?*

**Lar\_2:** *Sim, sim... acho que daria...*

**Pesquisadora:** *Se tu pensares... área pra volume... teria alguma relação?*

**Lar\_2:** *Sim, sim... teria alguma relação... Pensando em formas geométricas, por exemplo, calcular a área de um quadrado seria lado ao quadrado. E pro volume de um quadrado é lado ao cubo, então tem relação... (mostra com o polegar e indicador a forma do quadrado) uma*

*coisa meio que leva à outra. Basicamente tu dás uma pequena aprimorada no cálculo de área pra conseguir o volume.*

**Pesquisadora:** *Dessa forma? Tu terias alguma ideia de como daria para aplicar essa integral então?*

**Lar\_2:** *(Pensa) Como daria pra aplicar... De repente só incluindo um valor de z ali, daria o volume.*

**Pesquisadora:** *E... pensando numa curva do tipo  $y=x^2$ , por exemplo, ou menos  $y= -x^2$ , para calcular a área.... como tu disseste antes: tem que ter alguns valores... valor inicial e um final... para x ... E nesse caso (mostro o parabolóide), basta só definir um valor inicial para x e um final para x?*

**Lar\_2:** *Não, teria que definir um valor pra z também ... Eu acho que seria só pro ... Ah, não, não. Tem que pensar que isso aqui tem três dimensões... Então teria que determinar um valor pro y também.*

**Pesquisadora:** *Para o y também? Então...*

**Lar\_2:** *Que se a gente for olhar assim,... no caso, isso dessa vermelha seria o x, eu acho (mostra o eixo vermelho) e isso aqui seria o y,... é... tá bem no meio, teria que determinar um valor inicial... pra y e final também e ... o mesmo pra x. E pra z um valor pra cima (gira o sólido) ... digamos assim...*

**Pesquisadora:** *Quem é que determina o z? Poderíamos dizer que é o que desse parabolóide?*

**Lar\_2:** *Ele seria a altura?*

**Pesquisadora:** *E como eu tenho diferentes prismas, por exemplo, aqui, (mostro com o dedo suas alturas) essas alturas são todas iguais?*

**Lar\_2:** *(Presta atenção nos prismas, analisa....) Olha, ... parece que elas estão.... tem alturas diferentes....*

**Pesquisadora:** *Quem determina essas alturas?*

**Lar\_2:** *(Pensa) O que determina não seria a aproximação que eu coloco nelas? No caso todos eles têm tamanhos diferentes, mas eles vão diminuindo na mesma proporção (mostra com as mãos um gesto de diminuir, aumentar, esticar...) conforme eu for apertando e esticando.*

**Figura 23** – Prismas diminuem, aumentam, esticam



Fonte: Vídeo durante a entrevista

**Lar\_2:** *Então é uma coisa proporcional, não vai ficar um maior que o outro de repente.... vão se mantendo a mesma altura, uma altura proporcional...*

**Pesquisadora:** *E quem tu achas que é responsável pela determinação dessa altura?*

**Lar\_2:** *O z? Talvez...*

**Pesquisadora:** *O z, e o z é definido por quem?*

**Lar\_2:** *É definido pelo x e pelo y. Porque eu acho que ele vai se alongar p/ cima conforme isso daqui for alargado p/ os lados. (mostra para cima em z) [...] dá pra ver que ele tem um decaimento proporcional assim, aqui fica bem fininho e conforme tu desces ele vai aumentando (mostra os prismas dentro do parabolóide). Então eu acho que a altura do z é determinada pelo x e pelo y.*

**Pesquisadora:** *Como é que daria pra escrever uma integral, então?*

**Lar\_2:** *A integral teria que ter quatro elementos. No caso, a integral que a gente está usando agora, que é pra área ela possui a função, x inicial e x final. Ou melhor, teria que ter mais uns três elementos. Não, mais dois elementos, seria a função, x final, x inicial e a mesma coisa pro y, y inicial e y final. Isso nos daria o valor de z.*

**Pesquisadora:** *Então, tu achas que teria que ser determinado de forma separada?*

**Lar\_2:** *Não necessariamente separada. Acho que daria p/ inserir esses dados numa mesma função.*

Analisando as respostas de Lar\_2, pode-se afirmar que existe um conhecimento matemático bem estruturado que pode levar à construção de outros conceitos inclusive da interpretação do volume como a integral dupla da função. Citou que bastava dar uma aprimorada na área para chegar ao volume, o que pode-se interpretar como o cálculo da integral definida levando à integral dupla como uma forma de chegar ao volume. Essa sua organização do pensamento e das estratégias para encontrar o volume do parabolóide usando a integral, mostra um processo de reflexionamentos faltando a ocorrência das reflexões. Já em relação à área e ao cálculo da integral definida, verifica-se abstração reflexionante na forma de abstração refletida. Da mesma forma, segue o avanço de integral definida para integral dupla, quando sugere separar os intervalos em  $x$  e  $y$ .

O fato de citar que colocaria as informações na mesma função, demonstra uma proximidade na representação de uma função de duas variáveis e a aplicação da integral dupla.

**Pesquisadora:** *Existe outro cálculo para encontrar esse volume?*

**Ren\_3:** *Somar os prismas... Aprendi com o Cálculo I que é a integral...*

**Pesquisadora:** *A integral?*

**Ren\_3:** *A integral entre dois pontos... a função integral, não sei como se fala mas é a integral com base em dois pontos...*

**Pesquisadora:** *A integral da função considerando...*

**Ren\_3:** *Só que não sei como seria uma função de três eixos daí... De -2 até 2.*

**Pesquisadora:** *Em qual das variáveis?*

**Ren\_3:** *Em  $y$  e  $z$ ,  $x$ .*

**Pesquisadora:** *Em  $y$  e  $x$ , tu terias então, tanto pra  $y$  como  $x$  uma variação, de -2 a 2.*

**Ren\_3:** *Seria domínio, acho que é...*

**Pesquisadora:** *Pensando então naquela integral que tu podes calcular, o que mesmo?*

**Ren\_3:** *O volume no intervalo... se fosse só z e x o volume seria isso aqui (mostra o parabolóide) ... o cálculo 3D eu acho que.... (gira o parabolóide...) não sei, daria pra dividir em várias ... se eu cortasse em várias parábolas... e daí somar... Isso (mostra o contorno do parabolóide) parece uma elipse, daí daria pra calcular o volume de uma elipse e dividir por dois (girando o parabolóide).*

**Pesquisadora:** *Então, tu achas que a integral daria pra usar pra calcular esse volume? Daria para usar a integral tendo a variável x e a variável y?*

**Ren\_3:** *Acho,... Bom, não sei... seria uma integral daí multiplicando por dx e dy. Eu acho... Ou, dá pra usar o y igual a uma quantidade de x ou x igual a uma quantidade de y. Talvez o dy seja equivalente a algum dx e daí calcular a integral. Isso, substitui um y por um x. Daria...*

**Pesquisadora:** *Ah, tu achas que daria para usar as duas, dx e dy numa mesma integral?*

**Ren\_3:** *Sim, porque  $[y^2=4-x^2][...]$  daí eu substituo isso no cálculo da integral. .... Eu acho que o dx e o dy devem ter alguma relação... Só que teria que pensar de cabeça quanto daria..., mas eu acho que dá.*

**Pesquisadora:** *Com a integral que vocês usaram, calcularam o volume ou área?*

**Ren\_3:** *Área.*

**Pesquisadora:** *Então, de área para volume, muda, o quê?*

**Ren\_3:** *Muda uma incógnita.*

**Pesquisadora:** *Como tu disseste antes, vai somando, somando o volume desses prismas aí e isso se aproxima de um valor que é...*

**Ren\_3:** *O volume do parabolóide... Partimos do princípio que não daria pra colocar prismas suficientes, então a gente tem que usar a integral pra chegar no valor exato, quer dizer, exato não existe, mas o mais próximo possível.*

Ren\_3 sabia que o volume podia ser calculado através da integral da função, mas não citou como seria a integral, mas por usar  $dx$  e  $dy$ , a hipótese é de que chegaria à integral dupla, pois sugeriu integrar em relação a uma variável e em relação à outra. Fez uma relação com a área e integral definida, mas não conseguiu explicar como faria com as variáveis  $x$  e

y. Falou em exato e mais próximo possível o que pode estar relacionado como conhecimento prévio sobre limite.

Rap\_5 trouxe a ideia das somas de Riemann para calcular o volume do parabolóide.

**Pesquisadora:** *A partir daquelas somas, tu podes utilizar um cálculo diferente para chegar ao volume?*

**Rap\_5:** *É, se tu usas as somas de Riemann, tu podes aplicar a integral definida, aqui no caso. Para ter, por exemplo o volume na parte positiva. Na parte negativa não pega.*

**Pesquisadora:** *Então tu poderias aplicar a integral. E no caso desse sólido, há duas variáveis independentes, tu tens ideia de como poderias aplicar essa integral?*

**Rap\_5:** *É, aí eu acho que entra, por exemplo, a gente ainda não viu, mas acho que entra aquela parte  $dx$  no final da integral para especificar com qual variável tu estás trabalhando por vez. Aí imagino que você vai trabalhar uma variável por vez. Aqui tem duas então tu vais usar elas separadas ou uma por vez.*

**Pesquisadora:** *E qual seria o intervalo? Porque na integral definida tu tens um intervalo.*

**Rap\_5:** *É, provavelmente teria que dar um intervalo para  $x$  e um para  $y$ . Eu não sei se estão em intervalos iguais, mas por exemplo, dependendo aí do sólido, por exemplo, se ele começasse mais por aqui daí teria que dar o  $x$  por exemplo onde ele começa e onde termina, o  $y$  onde começa e onde termina. E a partir daí tu verias o  $z$ . Que daí daria a função e tu poderias usar a integral.*

**Pesquisadora:** *Então, se tu tens um intervalo para  $x$  e um intervalo para  $y$ , tu poderias aplicar a integral.*

**Rap\_5:** *Isso, a integral definida e descobrir o volume equivalente.*

**Pesquisadora:** *Então o volume desses sólidos (prismas verdes) se aproxima de um valor. Que valor é esse?*

**Rap\_5:** *O volume desse sólido aqui... (aponta para o parabolóide). Positivo. Do parabolóide e da integral definida do intervalo dado.*

O estudante mostrou conhecer o assunto, trouxe o cálculo de área como intermediário para chegar ao volume. A ideia das Somas de Riemann, resultante da interação com o *applet*, evidencia processos de abstração pseudoempírica. O fato de ter citado  $dx$  e  $dy$  e consequente indicação da variável a ser integrada, demonstra uma abstração refletida e consciência daquilo a que estava se referindo. Logo, percebe-se claramente a presença de abstrações reflexionantes, pois esteve muito próximo de aplicar a integral dupla, e acredita-se que só não o fez, por não ter tido contato com a integral dupla e seu cálculo. Talvez uma fala ou a escrita da integral dupla por parte da pesquisadora, levaria ao cálculo do volume através da integral dupla da função.

A maioria dos estudantes mencionou a integral, empregada para calcular a área de uma determinada região, como um possível caminho para calcular o volume.

**Pesquisadora:** *Tu terias alguma outra forma, tu achas que existe algum cálculo para calcular esse volume ao invés de usar um applet, por exemplo?*

**Djo\_6:** *Ah, eu acredito que dá porque da mesma forma que a gente fez da área em questão da função, deve ter um jeito de calcular usando essa função com duas variáveis que vai me dar esse afastamento também. Então aí eu acredito que ele daria o volume sim, através de um cálculo.*

**Pesquisadora:** *Lembras que cálculo?*

**Djo\_6:** *É, pois é.... É, na verdade, como nós fizemos, tiramos uma foto de uma área que tivesse uma curva e aí a gente marcou os pontos no Geogebra que delimitava essa curva e aí fez o comando de função aí. (explicação da atividade e cálculo da integral)*

**Pesquisadora:** *Então daria para utilizar a integral aqui também?*

**Djo\_6:** *Só não sei pela questão de ter duas variáveis diferentes. Nunca trabalhei com duas variáveis. E como é volume também nesse caso, não sei se daria certo.*

**Pesquisadora:** *Tu terias alguma ideia?*

**Djo\_6:** *Sim, a ideia é bem próxima, acredito que talvez daria integrando essa função aqui.*

**Pesquisadora:** *Mas tu achas que daria para ir da área para o volume?*



**Djo\_6:** *É acredito que sim. E assim em 3D, o x vai me dar essa área aqui... e o y me daria essa relação de afastamento. Então um daria o plano e o outro a visão assim. Daí juntando os dois encaixando um no outro me daria esse volume... Só não sei a forma de calcular.*

**Figura 24** – Encaixe



Fonte: Vídeo durante a entrevista

**Pesquisadora:** *Mas tu achas que de forma separada em relação a x em relação a y poderias calcular?*

**Djo\_6:** *É acredito que chegaria em duas áreas fazendo separado, mas teria que fazer essa relação. Mas não tenho ideia como calcular esse aí.*

Djo\_6 apresentou uma ideia muito vaga de cálculo da integral usado para calcular a área e chegar ao volume. Até falou de duas variáveis, mas mostrou muitas dúvidas e não apresentou sugestão de como aplicar a integral.

Já Luc\_7 citou o cálculo da integral, mesmo que não tenha conseguido chegar na integral dupla.

**Pesquisadora:** *Ao invés de fazer essa divisão aí, em inúmeros prismas, teria algum cálculo que daria para aplicar e chegar ao volume do parabolóide?*

**Luc\_7:** *Sim, mas isso é com duas variáveis... A gente tem a f, seria a integral então....*

**Pesquisadora:** *Tu achas então que seria a integral dessa função de duas variáveis? E tu terias alguma ideia de como poderias aplicar?*

**Luc\_7:** *O que me vem na cabeça seria substituição... É isolar toda essa função, fazer o  $y^2 = 4 - x^2$  ... não cortaria, pois acabaria cortando todas as variáveis. Não, não daria para substituir... Essa fórmula não vai dar....*

**Pesquisadora:** *Mas tu achas que a integral tu conseguirias aproveitar?*

**Luc\_7:** *Sim*

**Pesquisadora:** *Por exemplo, com as funções de uma variável tu usas a integral para que?*

**Luc\_7:** *[...] então, seria a área....*

**Pesquisadora:** *A área tu achas que teria alguma relação com a integral?*

**Luc\_7:** *Sim porque ela, se faço a integral de um volume... eu chego na área...*

**Pesquisadora:** *Tu aplicas a integral de uma função e tu chegas na área. Isso com a função de uma variável. E aplicando a integral numa função de duas variáveis tu chegas ao volume?*

**Luc\_7:** *Acho que sim, mas não saberia como. Acho que precisaria das duas variáveis, mas... meio que faria duas integrais, uma em x outra em y, mas acho que não....*

Luc\_7 mostrou ter noção do uso da integral pensando no cálculo da área, mas não conseguiu aplicar esse conhecimento para calcular o volume. Citou duas integrais, uma em  $x$  e uma em  $y$ , mas ficou na dúvida. Percebe-se a presença de abstração pseudoempírica, pois utilizou propriedades e características da integral e das funções para responder aos questionamentos, até mesmo trouxe o conhecimento da derivada como inversa da integral.

### 5.5.1 Conclusão - Momento 5:

Considerando as respostas de todos os entrevistados, obteve-se diferentes conclusões acerca do volume do parabolóide.

Hen\_1 esteve muito próximo de chegar ao volume do parabolóide através da integral dupla, pois sugeriu aplicar a integral da função depois substituir  $a$  e  $b$  e para a função  $y$  aplicaria  $c$  e  $d$ . Essa compreensão sugere uma abstração reflexionante, e utilização de estratégias, partindo do cálculo de área através da integral definida progredindo para o cálculo de volume através da integral dupla da função. Por meio de sucessivos reflexionamentos e reflexões ocorreu o entendimento de que a integral de uma função pode ser interpretada como o volume de um sólido, o que pode levar à construção de uma noção do conceito de integral dupla.

Na mesma linha de pensamento, Lar\_2, através de suas respostas deixou transparecer que há a necessidade de se separar  $x$  e  $y$ , pensando num valor de  $x$  inicial e final e da mesma forma com  $y$ . A interação com o *applet*, facilitou a compreensão do conceito em questão.

Ren\_3 também tratou a integral de forma separada para  $x$  e para  $y$ , referiu-se a  $dx$  e  $dy$  na integral e uma substituição dos valores de  $x$  e de  $y$ . Utilizou essa ideia baseado no cálculo de área por integral. As coordenações de suas ações aprimoradas, segundo a hipótese, levaram à construção de novos conhecimentos, auxiliando na compreensão do conceito de integral dupla.

Assim como os outros, Rap\_5 estava ciente de que o cálculo da área de uma região podia ser obtido através do cálculo de integral definida. Assim, observou-se a presença de abstração refletida. Já o cálculo da integral de forma separada em relação às variáveis, sugere a ideia de integral dupla.

Com relação às falas de Djo\_6 não verificou-se a presença de abstração reflexionante, pois além de não ter apresentado segurança em relação ao cálculo da área, tratou de forma muito confusa a possibilidade de calcular o volume utilizando a integral.

Luc\_7 apresentou dúvida em relação ao cálculo da integral e até sugeriu a integral separada para  $x$  e para  $y$ , mas não se mostrou convicto disso. Calcularia as integrais de forma separada, mas não saberia como. Sugeriu calcular a área no plano e depois multiplicar pela altura, o que pode sinalizar uma abstração reflexionante em relação aos cálculos de área e volume de sólidos.

## 5.6 Conclusões Gerais

A partir das entrevistas realizadas com os estudantes e das observações feitas durante a sua realização, identificam-se muitas abstrações, tanto reflexionantes propriamente ditas quanto pseudoempíricas e refletidas.

Em todos os momentos, como identificados nessa pesquisa, percebe-se a presença da abstração empírica, que entende-se, favorecida pela possibilidade de visualização do sólido, na tela do computador, que proporcionou aos estudantes a extração de características físicas do objeto, o sólido. No entanto, essas abstrações nada informam sobre o problema da pesquisa. O que interessa a esta pesquisa são as abstrações reflexionantes, seja na forma de reflexionantes propriamente ditas, seja como abstração pseudoempírica, na medida em que os estudantes retiraram características ou propriedades que eles mesmos colocaram no sólido, seja na forma de abstração refletida, quando de forma convicta, conscientes, utilizaram conceitos e conhecimentos prévios para organizar as ideias e tentar criar estratégias de resolução da situação proposta. Muitas dessas ideias foram aprimoradas e utilizadas para encontrar a função que define um parabolóide, calcular o volume e conseqüentemente compreender o conceito de integral dupla.

Enquanto os estudantes realizavam a atividade com o *applet* e interagem com ele, acontecia um processo contínuo de reflexionamentos e reflexões, sendo assim construídos conceitos decorrentes de abstrações reflexionantes do tipo refletidas, de acordo com Piaget (1995). A presença dessas abstrações, contribuiu no processo como um todo. As respostas e estratégias utilizadas para responderem foram, portanto, tão ou mais valiosas que o produto final esperado nessa etapa da pesquisa.

Os resultados obtidos também tornam possível concluir que as tecnologias digitais podem contribuir na construção de conceitos matemáticos, em especial na compreensão da integral dupla. A interação dos estudantes com o *applet*, com a mediação planejada e realizada pela pesquisadora, proporcionou compreensões que não seriam possíveis somente manuseando um sólido como o parabolóide, manualmente. Afirma-se isso e ao mesmo tempo, tem-se condições de responder à questão de pesquisa, confirmando que o *applet* auxiliou na resolução de um problema envolvendo o volume de um sólido, levando ao cálculo da integral dupla como uma alternativa. Com a interação, dada uma região do espaço delimitada por uma superfície, pôde-se obter através dos volumes dos prismas circunscritos, aproximações do volume do parabolóide como um limite da soma desses volumes. Assim,

o conceito das Somas de Riemann pôde ser alargado para a ideia de volume, possibilitando retomar o conceito de limite, que segundo Tall (1996, 2002) está na porta de entrada do Cálculo. Sua utilização, portanto, favoreceu a compreensão do conceito de integral dupla através de reflexionamentos e reflexões.

Diante dos resultados obtidos, reafirma-se estar em concordância com Tall (1993, 2001) quando defende que um *software* precisa ser projetado para proporcionar o crescimento cognitivo do aluno.

Conclui-se que o *applet*, na forma como foi utilizado pela pesquisadora e estudantes, mostrou-se colaborador no desenvolvimento deste conteúdo, observando-se níveis cada vez mais elevados e favorecendo os processos de abstração reflexionante,

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática, em todos os níveis de ensino, continua sendo uma disciplina que apresenta resultados insatisfatórios nas avaliações internas e externas das instituições de ensino. Além disso, os estudantes apresentam muitas dificuldades durante a escolarização, mostrando-se incapazes de utilizar os conceitos trabalhados na resolução de situações-problemas do seu dia-a-dia, por não terem a devida compreensão de tais conceitos. Essas dificuldades vão aumentando à medida que os estudantes vão prosseguindo nos estudos, principalmente quando passam da educação básica para a superior. Assim, com a passagem da matemática elementar para a matemática avançada vêm à tona alguns problemas, que são consequência da falta de construção dos conceitos, pois em muitos casos é valorizada a memorização de técnicas e regras, que tem prazo de validade determinado até as avaliações de aferição do conteúdo.

Essa tese teve por objetivo investigar o quanto o *software Geogebra* pode contribuir na compreensão do conceito de integral dupla. Durante a realização dessa pesquisa muito se pensou, repensou, testou, recomeçou, mudando muitas vezes a direção da investigação para ter condições de responder ao problema de pesquisa e à questão proposta. Aplicou-se, inicialmente um método, cujos resultados não seriam os mais precisos nem os mais adequados para atingir o objetivo proposto, mas foram importantes para (re)pensar sobre a aprendizagem e o ensino de Cálculo. Como pré-proposta realizou-se uma investigação durante as aulas de Cálculo II com uma turma de 49 estudantes. No entanto, os resultados, mesmo sendo satisfatórios, e respondendo à questão de pesquisa, não traziam na sua essência a compreensão de um conceito nem explicitavam um processo de construção. Os dados foram obtidos através de atividades e questionamentos que levavam à solução do problema, conforme esperado. Como essa intervenção aconteceu durante as aulas da disciplina de Cálculo II, o conteúdo que estava sendo desenvolvido era exatamente a integral dupla. Com isso, as interpretações desses dados, tiveram que levar esse fator em consideração, pois, por constar no cronograma da disciplina que naquelas aulas seria desenvolvido o conteúdo integral dupla, mesmo que inconscientemente, interferia na construção daquele saber.

A pesquisadora adotara, naquela investigação, uma postura mais de professora que pretendia ensinar o conteúdo, do que de pesquisadora que buscava observar nas interações

dos estudantes com o *software Geogebra* uma evolução e as construções realizadas para chegar à compreensão do conceito de integral dupla. Com isso, ao invés de esperar que o estudante através de sua ação chegasse às conclusões, a pesquisadora os levava às mesmas, considerando as falas de alguns estudantes somente, pois não havia tempo para ouvir cada um deles e analisar suas estratégias e o processo de construção como um todo. Além desse fator que influenciava significativamente os resultados, foi necessário reduzir o número de estudantes envolvidos, a fim de analisar adequadamente a evolução do pensamento de cada um. Como Delval (2002) alerta, a intervenção constante do pesquisador é importante no sentido de buscar nas ações do estudante uma resposta, bem como, a partir das respostas fazer interferências. Isso não seria possível com esse grande número de estudantes, cuja intervenção individualizada não aconteceria, pois não se conseguiria observar e valorizar o processo, somente o resultado final.

Em função disso, mudou-se o rumo da pesquisa e se decidiu seguir como propunha Piaget no método clínico. Assim, partiu-se para as entrevistas individualizadas com um número reduzido de estudantes que não tinham naquele momento estudado o conteúdo integral dupla. Portanto, convidou-se estudantes que estavam cursando a disciplina de Cálculo I e naquele momento já haviam estudado a integral definida. Nas entrevistas individualizadas o estudante era questionado enquanto manuseava o *applet do software Geogebra* e interagia com ele. A partir de suas respostas surgiam novas perguntas que eram respondidas de forma que a pesquisadora pudesse analisar e perceber como estava sendo elaborado e compreendido o conceito de integral dupla e outros conceitos relacionados a ele. Foi possível entender as conexões realizadas e os tipos de abstrações que estavam acontecendo, como também as que já haviam acontecido. Aplicando essa metodologia alcançou-se resultados bastante significativos e visualizou-se um processo de construção de conhecimento através da interação com o *software*.

Com a atuação da pesquisadora, não mais como professora, os resultados tornaram-se mais confiáveis. Assim, os estudantes não foram influenciados e levados a dar uma determinada resposta. Os resultados foram únicos, considerando as estratégias e conexões realizadas individualmente, cujas respostas às perguntas foram consequência de sucessivos reflexionamentos e reflexões. Ao mesmo tempo, o entrevistado é quem dava a direção da entrevista, sem desviar-se do eixo central da pesquisa, refletindo sobre sua interação com o *applet* e sobre as perguntas realizadas, considerando uma resposta anterior.

Analisando detalhadamente cada uma das entrevistas, verificou-se que o uso da tecnologia pode favorecer o desenvolvimento de vários temas matemáticos e a consequente construção do conhecimento matemático. Percebeu-se a ocorrência de um processo com várias construções e reconstruções, o que levaria, finalmente, ao cálculo do volume de um sólido qualquer interpretado como a integral dupla da função que representa esse sólido. Identificou-se a ocorrência de sucessivos reflexionamentos e reflexões gerando as abstrações reflexionantes colaborando na construção e compreensão de conceitos da matemática avançada, em concordância com Piaget (1995). O resultado da pesquisa foi extraído dessa conversa dirigida (entrevista), a partir da qual foi possível observar diferentes ideias e esquemas dos estudantes durante sua interação com o *applet*, gerando as interpretações. Essa interação entre estudante e *applet* ocasionou a elaboração da ideia de volume do sólido obtido através das somas dos prismas construídos sob a função representativa do sólido, interpretado como a integral da função nos intervalos dados.

A pesquisa proporcionou uma outra visão em relação às aulas de Cálculo e a metodologia empregada pelos professores depois da investigação. Os resultados obtidos influenciaram na promoção de mudanças no desenvolvimento do conteúdo integral dupla. Antes da aplicação da investigação com uma turma de estudantes de Cálculo e das entrevistas individualizadas, as aulas se resumiam às representações gráficas no plano e ao cálculo do volume de sólidos representados por figuras, que se dava através da aplicação direta do cálculo da integral dupla da função representativa do sólido. Depois da investigação, as tecnologias digitais, em especial o *software Geogebra* e o *applet* empregado na pesquisa, passaram a ser utilizados com mais frequência nas aulas de Cálculo II, passando a ser uma peça chave na promoção da construção do conceito de integral dupla, auxiliando no estudo deste conteúdo. Além de promover abstrações reflexionantes (pseudoempíricas e refletidas), o uso da tecnologia através do *software Geogebra* passou a tornar as aulas mais dinâmicas favorecendo a construção de conhecimento matemático, por essa interação estudante-*software*, que possibilita reflexão sobre reflexões anteriores, permitindo retornar, refazer e compreender a partir das sucessivas ações sobre o objeto virtual (*applet*).

A pesquisa, por sua vez, não teve influência positiva somente no desenvolvimento do conteúdo integral dupla. Sua relevância foi percebida tanto na matemática avançada como elementar e foi fundamental para que como pesquisadora, se repensasse a atuação em sala de aula. O fato de o método utilizado na pesquisa exigir que não se induzisse respostas, mas



que se questionasse o estudante, desafiando-o para que ele chegasse a respostas pensadas por ele, teve influência no sentido de mudar a prática de sala de aula. Tanto nas aulas de matemática avançada como aquelas da educação básica, que representam a matemática elementar, repensou-se e refletiu-se sobre a metodologia, empregando mais os questionamentos, de forma que os estudantes, antes de seguir receitas, construíssem passo a passo o conceito pretendido. As respostas que, inconscientemente, são dadas quando se atua como professora, passaram a ser respostas dos estudantes; respostas originadas do seu esforço de fazer conexões através da sua ação sobre o meio; no caso, um meio virtual. Com isso, desafia-se o estudante para que construa seu trajeto evolutivo de construção de conhecimento. A utilização de conhecimentos prévios, construídos anteriormente, favorece enormemente a construção de novos conceitos, pois ao longo de sua caminhada acontecem muitas abstrações reflexionantes, pseudoempíricas ou refletidas. Quanto mais o estudante for desafiado a fazer ele mesmo conexões, mais abstrações reflexionantes acontecerão, abstrações à enésima potência. De fato, como pesquisadora, foi possível olhar por outro ângulo para a prática docente que deve desafiar mais a autonomia pela construção de conceitos ao invés de facilitar e encurtar o processo do aluno.

Toda a pesquisa, desde a busca por estudos existentes sobre o assunto, a escolha do referencial teórico, a organização das entrevistas e a aplicação das mesmas, a escolha do público adequado para que se obtivessem resultados confiáveis, o registro dos dados obtidos, bem como, as análises realizadas, tudo isso, foi decisivo na composição do resultado final. Todo o processo contribuiu para que se pudesse responder à questão de pesquisa. Cada etapa contribuiu para que se concluísse que as tecnologias digitais têm importante papel na construção e compreensão de um conceito matemático, em especial do nosso tema de estudo, a integral dupla.

Esta pesquisa pode e deve ter continuidade no sentido de promover a construção do conceito de integral dupla, sendo utilizado em situações-problema, especialmente na Engenharia. A partir dos conhecimentos construídos, poder-se-ia propor um problema para analisar como o estudante faria a conexão volume-integral dupla depois da interação com o *applet*. Mas, desde que o professor que atue como mediador compreenda o verdadeiro sentido do ‘aprender’.

## 7. REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Marcio Vieira de. **Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche, 2017**. Tese de Doutorado. Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo –São Paulo. PUC-SP., 261p. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!/>. Acesso em 11 de novembro de 2017.
- ALVES, M. J. G. **Uma proposta para o ensino de cálculo diferencial e integral com a utilização do software Geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2014. Disponível em: <http://www.uss.br/arquivos;jsessionid>. Acesso em 1º de outubro de 2015.
- AMARAL, E. M. H.; MÜLLER, T. J. **Integração de Tecnologias para Construção de Objetos de Aprendizagem – O case E2D Ensino de Derivadas a Distância RENOTE**: Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v.10, n. 1, julho, 2012. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/30812>. Acesso em 1º de outubro de 2015.
- ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- APPELBAUM, Peter. **Learning and Technology? Technology and Learning? A Commentary** In: G. Aldon et al. (eds.), *Mathematics and Technology, Advances in Mathematics* Springer International Publishing AG 2017. p.335-345
- BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**, 1999 184 f. Doutorado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: Universidade de São Paulo, São Paulo.
- BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo; NOTARE, Márcia Rodrigues. *Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica*. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**. Porto Alegre, v.13, n. 2, dezembro, 2015. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/61432>. Acesso em 31 de outubro de 2019.
- BECKER, Fernando. **O que é construtivismo?** Série Idéias n. 20, São Paulo: FDE, 1994. p. 87-93. [www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias\\_20\\_p087-093\\_c.pdf](http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_20_p087-093_c.pdf)
- BECKER, Fernando. **Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional**. In: Schème – Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Vol. 6. UNESP, 2014. [www.marilia.unesp.br/scheme](http://www.marilia.unesp.br/scheme)
- BECKER, Fernando. **Abstração Pseudoempírica: significado epistemológico e impacto metodológico**. *Educ. Real.*, Mar 2017, vol.42, no.1, p.371-393. ISSN 2175-6236 In: Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/edreal/v42n1/2175-6236-edreal-42-01-00371> Acesso em: 28 de março de 2018

BEHAR, Patrícia. A.; NOTARE, Márcia Rodrigues. **A comunicação matemática on-line por meio do ROODA Exata**. In: BEHAR, P. A. (Orgs.). Modelos Pedagógicos em Educação à Distância. Porto Alegre: Artmed, 2009. p. 179-203.

BERSCH, Maria Elisabete; NASCIMENTO, S. M. S.; BACKENDORF, Viviane Raquel. **Sistemas recomendadores de conteúdo como estratégia para apoiar alunos com dificuldade na disciplina de Cálculo**. In: Revista Educação, Cultura e Sociedade. Sinop/MT, v.5, n. 1, 2015. p. 70-82

BIANCHINI, Waldecir. **Integral dupla – software Geogebra**. Disponível em: [www.geogebra.org/u/waldecir#materials/created](http://www.geogebra.org/u/waldecir#materials/created) - [www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS](http://www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS). Acesso em: 20/ago/2017.

BOGDAN, Robert C. e BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto – Portugal: Porto Editora, 1994.

BONA, Aline Silva de. **Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação**. 2012. 252f. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/63132> Acesso em: 17 fev. 2014.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BÚRIGO, Elisabete Zardo.; DOERING, Luisa Rodriguez ; OLIVEIRA, Fernando Rodrigues de. Um estudo sobre a compreensão das curvas de nível referenciado na teoria Apos. In: Maria Clara Rezende Frota; Barbara Lutaif Bianchini; Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. 1ed.Campinas: Papirus, 2013, v. 1, p. 115-142.

COLL, C.; MAURI, T.; ONRUBIA, J. A incorporação das tecnologias da informação e da comunicação na educação: do projeto técnico-pedagógico às práticas de uso. In: César Coll; Carles Monereo. (Org.) **Psicologia da educação virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação**. Porto Alegre, Artmed, 2010.

CURY, Helena Noronha; BISOGNIN, Eleni. **Calculando o volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividades de ensino para calouros de Engenharia**. COBENGE, 2006.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 2002. 267p. Tradução de Fátima Murad.

DUBINSKY, Ed. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: D. Tall (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer: Dordrecht, pp. 95–123, 1991. Disponível em: <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction>. Acesso em 10 de novembro de 2017.

DUBINSKY, Ed. From Piaget's Theory to APOS Theory: Reflective Abstraction in Learning Mathematics and the Historical Development of APOS Theory In: Arnon, et. al. **APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education**, Springer Science+Business Media New York 2014

ESCHER, Marco Antonio. **Dimensões Teórico- Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem**. 2011. 222p. Tese de Doutorado. UNESP - Rio Claro, São Paulo. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!/>. Acesso em 25 de agosto de 2017.

FARIAS, Maria Margarete do Rosário. **Introdução a noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no contexto das TIC: Implicações para Prática do Professor que ensina Matemática**. 2015. 348p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!/>. Acesso em 04 de novembro de 2017.

FLAVELL, John. Hurley. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. 5. ed. São Paulo: Livraria Pioneira, 1996

FITZSIMONS, Gail E. **Mathematics and Technology, Advances in Mathematics Education** G. Aldon et al. (eds.), University of Melbourne, Melbourne, VIC, Australia Springer International Publishing AG 2017, p. 607-621.

FLICK, Uwe. **Desenho da Pesquisa Qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FONTOURA, Leandro Ribeiro. **Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas**. 2016. 144p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!/>. Acesso em 25 de agosto de 2017.

GODARZI, Sara Qeisari; BAKHSHALIZADEH, Shahrnaz; AMINIFAR, Elahe. **The impact of using computer Algebra Systems (CAS) in teaching and learning of "Double Integral"**. Irã, 2009.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria**. In: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, Nov. 1996.

GUIMARAIS, Yara Patrícia Barral de Queiroz. **Exploração de convergência em tópicos de cálculo diferencial, integral e numérico, usando os softwares VCN e Geogebra**. Minas Gerais. Belo Horizonte, PUC-MG. 2010. 192p. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!/>. Acesso em 25 de agosto de 2017.

LIRA, Antônio da Fonseca de. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais**. 2008. 184f. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do

Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14666/000666894.pdf>>. Acesso em 25 de agosto de 2017.

MASSETO, Marcos Tarciso. **Competência pedagógica do professor universitário**. 2. ed. rev. São Paulo: Summus, 2012.

MELO, José Manuel Ribeiro de. **Conceito de Integral: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem**. 2002. 180p. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#/>!. Acesso em 25 de agosto de 2017.

MULLER, Thaisa Jacintho. **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo : uma proposta baseada em análise de erros**!. 2015. 203 f. Doutorado em Informática na Educação: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

HOUAISS, Antônio. **Pequeno dicionário Houaiss da língua portuguesa**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

NOTARE, Márcia Rodrigues. **Comunicação e aprendizagem matemática on-line: um estudo com o editor científico ROODA exata**. 2009. 201p. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle.net/10183/17256>. Acesso em: 11 de novembro de 2017.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**. Porto Alegre, v.10, n. 3, dezembro, 2012. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/36459>. Acesso em 1º de outubro de 2015.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v.14, n. 2, dezembro, 2016. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/70683>. Acesso em 16 de junho de 2017.

OLIVEIRA, Fábio Luiz. Tecnologias digitais e a produção de conhecimento acerca de funções de várias variáveis. In: **XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática IFES / UFES** – Vitória – ES, Novembro, 2013. Disponível em: [http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebapem/xvii\\_ebapem/paper/view/1348](http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebapem/xvii_ebapem/paper/view/1348) Acesso em 1º de outubro de 2015.

PASCHOS, Theodorus.; FARMAKI, Vassiliki. The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral: a case study. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 4, pp. 337-344. Prague: PME. 4 – 337, 2006. Disponível em: <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2006/PME30>. Acesso em 27 de novembro de 2017.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo. PUC-SP, 2000. 112p. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#/>. Acesso em 25 de agosto de 2017.

PIAGET, Jean. [1967] **Biologia e Conhecimento**. Trad. Francisco M. Guimarães. Petrópolis: Vozes, 1973. 423p.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

PIAGET, Jean. [1977] **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIRES, Luiz Fernando Rodrigues. **As Influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Estratégias de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral**. 2016. 242p. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#/>. Acesso em 17 de setembro de 2017.

ROBOTTI, Elisabetta; FRANK, Anna Baccaglini. Using Digital Environments to Address Students' Mathematical Learning Difficulties. In: FAGGIANO, E.; FERRARA, F.; MONTONE, A., **Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education Mathematics Education in the Digital Era**. (Ed). Itália: Springer, 2017, p. 77-106.

SAUER, Laurete Zanol. **O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos**. 2004. 197p. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/6953> Acesso em: 25 out. 2017.

SEALEY, Vicki. Definite integrals, riemann sums, and area under a curve: what is necessary and sufficient? In: Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds). **Proceedings of the 28<sup>th</sup> annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc>. Acesso em 03 de outubro de 2017.

SILVA, Antonio José da. **Noção de Limite de Funções Reais e Geogebra: Um estudo em Epistemologia Genética**. 2017. 221p. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/158305> Acesso em: 30 ago. 2017.

SILVA, J. I. G.; FERREIRA, D. H. L. O uso de tecnologias na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. In: **XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC-Campinas, 2009**. Anais. Campinas – PUC, 2009 Disponível em: <https://www.puc->

campinas.edu.br/websist/porta /pesquisa/ic/pic2009/htm/resumos.htm Acesso em: 1º de novembro de 2015.

SILVA, A. P.; PEREIRA, R. S. G.; DAMIN, W.; YONEZAWA, W. M. Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com auxílio do software Geogebra. In: **Espacios**. Vol. 35 N°4, 2014.

STEWART, James. **Cálculo**, volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013

SWOKOWSKI, Earl William; FARIAS, Alfredo Alves de. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

TALL, David. A graphical approach to integration and the fundamental theorem. In: **Mathematics Teaching**, 113 48– 51, 1986.

TALL, David. **Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change**. For the Learning of Mathematics, **9** 3, 37– 42, 1989.

TALL, David. **Computer environments for the learning of mathematics**. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline – The State of the Art, ed R. Biehler, R. Scholtz, R. W. Sträßer, B. Winkelmann. Dordrecht: Kluwer, 189-199, 1993.

TALL, David. Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, plenary address. In: L. Meira & D. Carraher, (Eds.), **Proceedings of PME 19**, Recife, Brazil, I, 61– 75, 1995.

TALL, David. Functions and Calculus In: University o/Warwick, United Kingdom A.J. Bishop et al. (eds.). **emational Handbook olMathematics Education**, **289 - 325 Kluwer Academic Publishers**, 1996

TALL, David. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), **Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics**, Chiang Mai, Thailand (pp. 3–20). ATCM Inc, Blackwood VA. ISBN 974-657-362-4, 2000.

TALL, David. Cognitive Development in Advanced Mathematics Using Technology. In: **Mathematics Education Research Journal**. 12 (3), 196–218, 2001.

TALL, David. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: **Advanced Mathematical Thinking** (Vol. 11, pp. 3-21). Kluwer Academic Publishers, 2002.

TALL, David. **A Sensible Approach to the Calculus**. To appear in *Handbook on Calculus and its Teaching*, ed. François Pluvinage & Armando Cuevas. 2012.

TALL, David. **Imparare a pensare matematicamente** Roma: Editori Riuniti university press, 2016.

THOMAS, George B.; WEIER, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo** Volume 2 – 12. Ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

THOMAS, Mike O. J. HONG Yoon Hong e OATES Greg. Innovative Uses of Digital Technology in Undergraduate Mathematics. In: FAGGIANO, E.; FERRARA, F.; MONTONE, A. (Ed). **Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education Mathematics Education in the Digital Era**. Itália: Springer, 2017, p. 109-136.

VIEIRA, Carlos Eduardo Milanezi; NICOLEIT, Evanio Ramos. Desenvolvimento de Objeto de Aprendizagem, baseado em Especificações de Normatização SCORM, para o Caso de Suporte à Aprendizagem de Funções. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v.5. n.1, 2007. Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/ciclo9/artigos>. Acesso em 12 de maio de 2015.

VILARREAL , Monica Ester. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. São Paulo. Disponível: <http://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/teses/> Acesso em: 11 de novembro de 2017.

ZANARDINI, Ricardo Alexandre Deckmann , **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: InterSaberes, 2017.



## APÊNDICE A: ROTEIRO DE ENTREVISTA

1. Observe, analise o *applet*. Veja o que é possível modificar....
2. Chamaremos o sólido vermelho de parabolóide.
3. Como podemos inserir um sólido como o parabolóide?
4. Como é a função do parabolóide?
5. Quantas são as variáveis?
6. Que variáveis você identifica?
7. Como você calcularia o volume do parabolóide?
8. O que acontece se você modifica os pontos  $a, b, c, d$ ?
9. E modificando os pontos  $m$  e  $n$ , o que acontece?
10. Então iniciando por  $m=1$  e  $n=1$ , que volume tu terias para o sólido verde?
11. Como podemos chamar esses sólidos verdes?
12. À medida que vais modificando os valores de  $m$  e  $n$ , o que vai acontecendo com a quantidade de prismas verdes?
13. E as alturas dos prismas, são iguais?
14. Quem define as alturas dos prismas?
15. Tem relação com a função do parabolóide?
16. O que acontece com o volume de cada prisma?
17. O que acontece com a soma do volume dos prismas?
18. De quem a soma do volume dos prismas se aproxima?
19. Somando o volume dos prismas, tem relação com o volume do parabolóide?
20. Que relação?
21. Tu achas que teria alguma outra forma de calcular o volume desse parabolóide?
22. Como poderíamos aplicar a integral?
23. Tu achas que tem alguma relação com os cálculos de integral que tu já viste?
24. Tu poderias usar uma integral do jeito que tu usavas para calcular a área?
25. O que muda na integral para calcular o volume?

## APÊNDICE B: ARTIGO BACKENDORF e BASSO, 2018

Link para acesso ao artigo completo: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86026/49389>



CINTED-UFRGS

Novas Tecnologias na Educação

### GeoGebra na aprendizagem de conceitos de matemática avançada

Viviane Raquel Backendorf – UNIVATES / PGIE-UFRGS – vrbackendorf@univates.br

Marcus Vinicius de Azevedo Basso – PPGIE / UFRGS - mbasso@ufrgs.br

**Resumo:** O presente artigo consiste numa pesquisa sobre a construção do conceito de integral dupla como volume de um sólido, segundo a teoria da abstração reflexionante e o uso do software GeoGebra. A investigação em torno do assunto se deu a partir de atividades realizadas com estudantes do Ensino Superior, numa disciplina de Cálculo II. Para embasar as discussões, além da teoria da abstração reflexionante de Piaget, utilizamos a teoria desenvolvida por David Tall sobre a matemática elementar e a matemática avançada, como suporte para entender as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no Ensino Superior. Ao analisar os resultados obtidos na pesquisa, concluímos que o uso do *software Geogebra*, favorece a construção de conceitos matemáticos, em especial da integral dupla como volume de um sólido.

**Palavras-chave:** Tecnologias Digitais, Abstração Reflexionante, Integral Dupla

### GeoGebra in the learning of concepts from advanced math

**Abstract:** The present article consists of a research on the construction of the concept of double integral as volume of a solid, according to the theory of reflective abstraction and the use of GeoGebra software. The investigation around the subject occurred from activities carried out with students of Higher Education, in a discipline of Calculus II. To support the discussions, in addition to Piaget's theory of reflective abstraction, we use the theory developed by David Tall on elementary mathematics and advanced mathematics as a support to understand the possible difficulties faced by students in higher education. In analyzing the results obtained in the research, we conclude that the use of Geogebra software, favors the construction of mathematical concepts, especially the double integral as the volume of a solid.

**Keywords:** Digital Technologies, Reflective Abstraction, Double Integral

## APÊNDICE C: ARTIGO BACKENDORF ET AL., 2015

Link para acesso ao artigo completo:

<http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/educacao/article/view/1769/1562>



### SISTEMAS RECOMENDADORES DE CONTEÚDO COMO ESTRATÉGIA PARA APOIAR ALUNOS COM DIFICULDADE NAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO

Maria Elisabete Bersch\*  
bete@univates.br  
Selma Maria Silva do Nascimento\*\*  
selmanasc10@hotmail.com  
Viviane Backendorf\*\*\*  
vrbackendorf@univates.br

#### RESUMO

Este artigo apresenta uma proposta para a utilização de sistemas recomendadores<sup>1</sup> de conteúdo como estratégia para apoiar alunos das disciplinas de cálculo no Ensino Superior. A proposição resulta da análise das dificuldades de aprendizagem apresentadas nestas disciplinas e bem como da análise do programa de apoio pedagógico discente desenvolvido por uma instituição de Ensino Superior como alternativa para qualificar o Ensino Superior. Objetivando promover maior aprendizagem e, conseqüentemente, diminuir os índices de reprovação nas disciplinas de cálculo, propõe-se a organização de ambientes de autoestudo sustentados por sistemas recomendadores de conteúdo de forma integrada ao atual serviço de monitorias.

**Palavras-chave:** ensino superior; dificuldades de aprendizagem; ensino de matemática; sistemas recomendadores de conteúdo.

#### 1 INTRODUÇÃO

Seguir a carreira de Engenheiro é o sonho de muitos jovens. Ingressando no Ensino Superior, especialmente em cursos de Engenharia, o aluno precisa ter gosto pela área das exatas ou desenvolvê-lo a tempo de não desistir de seus sonhos. No entanto, muitos

## APÊNDICE D: ARTIGO BACKENDORF e BASSO, 2018

Link para acesso ao artigo completo: <https://publicacoes.rexlab.ufsc.br/>

II Simpósio Ibero-Americano de Tecnologias Educacionais – SITE 2018  
 Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC  
 Anraungá, SC, Brasil – 11 a 13 de abril de 2018

### Tecnologia Digital, Cálculo Integral e Abstração Reflexionante

Viviane Raquel Backendorf, Marcus Vinicius de Azevedo Basso

<sup>1</sup> UNIVATES/UFSC

E-mail: [vrbackendorf@univates.br](mailto:vrbackendorf@univates.br), [mbasso@ufsc.br](mailto:mbasso@ufsc.br)

**Resumo.** O presente artigo consiste num estudo preliminar de uma pesquisa de Doutorado, a qual trata da construção do conceito de integral, segundo a teoria da abstração reflexionante e o uso das tecnologias digitais. A investigação em torno do assunto se deu a partir de atividades realizadas com estudantes do Ensino Superior, numa disciplina de Cálculo. Para embasar as discussões, além da teoria da abstração reflexionante de Piaget, utilizou-se a teoria desenvolvida por David Tall sobre a matemática elementar e a matemática avançada, como suporte para entender as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no Ensino Superior e a teoria defendida por Ed Dubinsky sobre a teoria da abstração reflexionante. Ao analisar os resultados obtidos nessa investigação, concluímos que o uso das tecnologias digitais favorece a construção de conceitos matemáticos como a integral definida. Logo, verificamos que o estudante, através de sua ação sobre o objeto, construiu o conceito de integral definida com a utilização do software *Geogebra*, que propiciou o processo de abstração reflexionante.

**Palavras-chave:** Tecnologias Digitais, Abstração Reflexionante, Cálculo Diferencial e Integral

#### Introdução

Falar da importância ou não de uma disciplina depende da relação entre o crítico e a disciplina. Sem dúvida, o professor de Matemática julga a mesma fundamental para o crescimento intelectual do indivíduo. No entanto, a resposta dos alunos em relação à disciplina de Matemática mostra que os objetivos propostos desde o Ensino Fundamental não estão sendo alcançados. A situação agrava-se no Ensino Superior quando estes mesmos estudantes decidem cursar Engenharia porque sempre apresentaram bom desempenho na Matemática. Logo, matriculados numa disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, obrigatória nos primeiros semestres, muitos estudantes acabam por desmotivar-se diante das dificuldades apresentadas na aprendizagem e assim, evadindo ou reprovando.

É do conhecimento dos profissionais da Educação, que este não é um problema verificado numa única Instituição ou região, mas é objeto de estudo em todo território nacional.

De modo especial, em relação ao Cálculo, verificou-se em muitos momentos que as dificuldades apresentadas não estão diretamente relacionadas à construção dos conceitos de derivada e integral, mas ao pouco domínio desses estudantes sobre os conteúdos da matemática básica. Outro aspecto a ser considerado é quando se torna necessário fazer uma conexão entre a teoria e a prática. Verifica-se uma deficiência com relação à utilização dos conhecimentos pertinentes na resolução de problemas aplicados às situações reais, o que vem gerando fóruns de discussão dos professores da área da matemática. Conforme Behar e Notare (2009 p. 187):

Sabe-se que há um sucesso aparente dos alunos na resolução de problemas. Isso ocorre porque, geralmente, eles aprendem, em suas aulas de matemática escolar, apenas rituais e receitas, como se houvesse um roteiro ou um modelo a ser seguido na resolução de um problema. [...] Esse processo está longe do verdadeiro "fazer matemática", que exige habilidades como conjecturar, testar, intuir, deduzir, generalizar; os alunos adquirem apenas a capacidade de efetuar cálculos.

As pesquisas e discussões acerca do assunto vem impulsionando a utilização da tecnologia digital para

## APÊNDICE E: ARTIGO BACKENDORF, 2017

Link para acesso ao artigo: <https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/anais-xxi-ebrapem-2/>



### A construção do conceito de Integral Dupla com utilização da tecnologia

Viviane Raquel Backendorf<sup>1</sup>

GDn<sup>o</sup>6 – Educação Matemática, Tecnologias e Educação à Distância

**Resumo do trabalho.** Este artigo apresenta o projeto de pesquisa de doutorado em Informática na Educação, que tem por objetivo verificar e analisar a influência da tecnologia na construção do conceito de integral dupla, no Ensino Superior. Para realizar o estudo será utilizado um Objeto de Aprendizagem contendo um desafio a ser resolvido, onde o estudante terá como apoio uma parte teórica contendo definições, o software Geogebra para construir e analisar graficamente e um aplicativo para desenvolver a integral algebricamente. A pesquisa, configurada como qualitativa e de caráter exploratório será analisada com base na Abstração Reflexionante de Piaget.

**Palavras-chave:** integral dupla; cálculo; objeto de aprendizagem; geogebra; abstração reflexionante.

#### Introdução

Falar da importância ou não de uma disciplina depende da relação entre o crítico e a disciplina. Sem dúvida, o professor de Matemática julga a mesma fundamental para o crescimento intelectual do indivíduo. No entanto, a resposta dos alunos em relação à disciplina de Matemática mostra que os objetivos propostos desde o Ensino Fundamental não estão sendo alcançados. A situação agrava-se no Ensino Superior quando estes mesmos estudantes decidem cursar uma Engenharia porque sempre apresentaram bom desempenho na Matemática. Logo, matriculados numa disciplina de Cálculo, obrigatória nos primeiros semestres, muitos estudantes acabam por desmotivar-se diante das dificuldades apresentadas e assim, evadindo ou reprovando.

É do conhecimento dos profissionais da Educação, que este não é um problema verificado numa única Instituição ou região, mas segundo Bersch, Nascimento e Backendorf (2015) é objeto de estudo em todo território nacional, como apontam também Cury e Bisognin (2006, p.2):

A preocupação com o ensino de Cálculo vem se mostrando constante; em quase todos os eventos relacionados com ensino de Matemática ou Engenharia temos encontrado trabalhos relacionados com as dificuldades demonstradas pelos alunos

---

<sup>1</sup> Doutoranda em Informática na Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS – [vrbackendorf@univates.br](mailto:vrbackendorf@univates.br) – Orientador: Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

## APÊNDICE F: ARTIGO BACKENDORF, ET AL., 2016

Link para acesso ao artigo: <http://www.cinted.ufrgs.br/ciclos/ciclo24/>

### **Emotional Design e Objetos de Aprendizagem: a percepção de estudantes do ensino fundamental**

**Viviane Raquel Backendorf, Vinicius Hartmann Ferreira, Magda Bercht**

Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação - UFRGS

Porto Alegre - RS - Brasil

vrbackendorf@univates.br, vinihf@gmail.com, bercht@inf.ufrgs.br

***Abstract.** The focus of Emotional Design is understand how positive emotions can be evoked in the use of a computational resource. This article presents the results of an experiment conducted with two groups of elementary school that aimed to identify the emotions aroused by the use of two learning objects (LO) for Mathematics and which aspects of each LO accounted for arouse such emotions. For this the students answered a questionnaire built on the Wheel of Affective States after the use of each of the LO.*

***Resumo.** Compreender como afetos positivos podem ser evocadas no uso de um recurso computacional é um dos focos da área intitulada Design Emocional. Este artigo apresenta os resultados de um experimento realizado com duas turmas do Ensino Fundamental que teve por objetivo identificar os afetos despertados pelo uso de dois Objetos de Aprendizagem para Matemática e quais aspectos de cada um foram responsáveis por despertar tais afetos. Para isso os estudantes responderam a um questionário construído com base na Roda dos Estados Afetivos após o uso de cada um dos objetos de aprendizagem.*

## APÊNDICE G: TERMO

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Estamos realizando uma pesquisa com o objetivo de construir o conceito de Integral Dupla com a utilização das tecnologias digitais (*software Geogebra*) com estudantes da disciplina de Cálculo II. Você está sendo convidado(a) para realizar as atividades desse processo. A sua colaboração poderá contribuir para a construção do conhecimento científico e beneficiar perspectivas de intervenções educacionais futuras. A participação na pesquisa é voluntária. Esta pesquisa é coordenada pelo Professor Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso e pela Doutoranda Viviane Raquel Backendorf, do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) com quem podem ser obtidas maiores informações (Av. Paulo Gama, 110 – prédio 12105 – 3º andar, sala 332, CEP 90040-060 – Porto Alegre – RS).

Se você tiver dúvidas em relação à pesquisa pode contatar os Pesquisadores responsáveis. A participação na pesquisa é voluntária. Portanto, caso não queira participar, você não precisa assinar este Termo. O fato de não querer participar não lhe trará nenhum prejuízo.

Após o encerramento do processo, você pode solicitar uma devolutiva individual de seus dados. Os resultados globais da pesquisa serão publicados posteriormente em algum periódico ou evento científico da área da matemática e/ou informática na educação, sem identificação da identidade dos participantes. Na apresentação dos dados desse trabalho, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo(a).

Pelo presente Termo de Consentimento, eu .....

.....

declaro que sou maior de 18 anos e que fui informado dos objetivos e da justificativa da presente pesquisa, e estou de acordo em participar da mesma. Fui igualmente informado: a) da liberdade de participar ou não da pesquisa, bem como do meu direito de retirar meu consentimento, a qualquer momento, e deixar de participar do estudo, sem que isso me traga qualquer prejuízo; b) da garantia de receber resposta a qualquer dúvida acerca dos procedimentos e outros assuntos relacionados com a pesquisa; c) da segurança de que não serei identificado e de que se manterá o caráter confidencial das informações registradas; d) que as informações obtidas serão arquivadas sem identificação pessoal junto ao banco de dados do pesquisador responsável; e) que os dados da pesquisa serão arquivados sob a guarda do pesquisador responsável por cinco anos e depois destruídos.

Data...../...../..... Assinatura do participante:.....

Assinatura do pesquisador responsável:.....