

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES CMC ESTÁVEIS EM  $\mathbb{R}^3$

WENDEL MAFRA GOMES DOS SANTOS

PORTO ALEGRE-RS

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## **SUPERFÍCIES CMC ESTÁVEIS EM $\mathbb{R}^3$**

Wendel Mafra Gomes dos Santos

Dissertação desenvolvida sob orientação do Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

PORTO ALEGRE-RS

2021

*À Adriane,  
e ao Artur.*

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado a vida, saúde e paz, e por continuar cuidando de tudo aquilo que não possuo controle.

Aos meus familiares, por todo amor, cuidado, incentivo e compreensão, os quais tem sido minha fonte de virtudes.

Ao Programa de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Agradeço especialmente ao Professor Diego Marcon, coordenador do programa, cujas aulas de Geometria Riemanniana contribuíram amplamente para a produção deste trabalho.

A todo corpo docente do PPGMAT - UFRGS, especialmente aos professores Artur Oscar Lopes, Lucas Backes, Pedro Frejilich e Thaísa Raupp, com os quais tive o prazer de passar algumas tardes enriquecendo meu aprendizado.

Ao meu orientador, professor Álvaro Ramos, de quem pude contar com todo apoio, compreensão e disponibilidade, sempre me tratando com respeito, amabilidade e cordialidade, sem o qual este trabalho não seria possível.

Ao Instituto Federal Farroupilha, por todo apoio recebido do seu programa permanente de incentivo à qualificação profissional.

## RESUMO

Apresentamos o teorema de Barbosa - do Carmo, o qual caracteriza as esferas como as únicas superfícies estáveis, com curvatura média constante, fechadas e imersas no  $\mathbb{R}^3$ , mencionando ainda alguns resultados relacionados. Para demonstrar o referido teorema, desenvolvemos de maneira natural uma introdução à teoria de estabilidade de superfícies.

**Palavras-chaves:** Caracterização da Esfera; Superfícies Estáveis; Teorema de Barbosa - do Carmo.

## ABSTRACT

We present the Barbosa - do Carmo theorem, which characterizes spheres as the only closed stable constant mean curvature surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$ , mentioning some related results. To demonstrate this theorem, we naturally develop an introduction to the theory of surface stability.

**Keywords:** Characterization of the Sphere; Stable Surfaces; Barbosa - do Carmo's Theorem.

# Sumário

Introdução	1
<b>1 Superfícies</b>	<b>5</b>
1.1 Preliminares . . . . .	5
1.2 Superfícies CMC . . . . .	11
1.2.1 Primeira Variação da Área . . . . .	12
1.2.2 Primeira Variação do Volume . . . . .	14
1.3 Superfícies Mínimas . . . . .	19
<b>2 Estabilidade</b>	<b>25</b>
2.1 Noções de Estabilidade . . . . .	26
2.2 Segunda Variação da Área . . . . .	28
2.3 Superfícies Estáveis . . . . .	31
<b>3 Classificação das superfícies estáveis do <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>35</b>
3.1 Teorema de Barbosa - do Carmo . . . . .	35
3.1.1 Demonstração do Teorema de Barbosa - do Carmo . . . . .	36
3.2 Alguns Resultados Relacionados . . . . .	39
3.2.1 Teorema de do Carmo - Peng . . . . .	40
3.2.2 Superfícies CMC de Fronteira Livre . . . . .	41
3.2.3 Teorema de Nunes . . . . .	45

# Introdução

Superfícies umbílicas são aquelas cujas curvaturas principais são iguais em todos os pontos. Exemplos simples de tais superfícies em  $\mathbb{R}^3$  são a esfera e o plano. Frequentemente em Matemática, quando surgem dificuldades de se apresentar outros exemplos, busca-se caracterizar aqueles que são conhecidos. Neste sentido, um resultado clássico de caracterização nos diz que se  $\Sigma$  é uma superfície umbílica conexa em  $\mathbb{R}^3$ , então  $\Sigma$  está contida em uma esfera ou em um plano.

A curvatura média de uma superfície é definida como a média das curvaturas principais. Assim, planos e esferas fazem parte de uma classe maior de objetos: *superfícies com Curvatura Média Constante* (CMC). Desta classe também fazem parte os cilindros, dentre outros. O estudo de tais superfícies teve início no século XVIII, e desde então tem se constituído um intenso campo de pesquisas. A definição de curvatura média dada aqui já aparece nos trabalhos de Meusnier (1776), no qual o *catenoide* é apresentado como outro exemplo de superfície CMC. De fato, o catenoide e o plano possuem curvatura média nula. Superfícies com tal característica são chamadas *superfícies mínimas*.

O catenoide pode ser obtido a partir da rotação de uma curva plana, a *catenária*, em torno de um eixo fixo. A catenária, por sua vez, é obtida como o lugar geométrico dos focos de uma parábola que rola tangencialmente ao longo de um eixo sem deslizar. Esta ideia de construir superfícies CMC por rotações de curvas planas obtidas a partir da rolagem de cônicas, no entanto, só foi apresentada décadas depois nos trabalhos de Delaunay (1841). Repetindo-se a ideia da construção da catenária, substituindo-se a parábola por uma elipse, obtemos uma *ondulária*. Se a cônica usada é uma hipérbole, obtemos uma *nodária*. Estas

curvas são conhecidas como as *roulettes de Delaunay*, e as superfícies de revolução obtidas, chamadas nos dois últimos casos de *onduloides* e *nodoïdes*, são superfícies CMC.

Depois dos trabalhos de Delaunay, não foram encontrados outros exemplos de superfícies de curvatura média constante não nula até algumas décadas atrás. Matemáticos dos séculos XIX e XX adotaram então a postura descrita no parágrafo inicial. Muitos destes resultados de caracterização tiveram enfoque no plano e na esfera. Destacamos primeiramente alguns resultados de caracterização da esfera.

Em 1956, Hopf prova que qualquer superfície com curvatura média constante que seja homeomorfa a uma esfera deve ser uma esfera redonda, isto é, uma esfera geodésica do  $\mathbb{R}^3$ . Entusiasmado com tal resultado, no mesmo ano Hopf conjecturou que toda superfície fechada (isto é, compacta e sem bordo) imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante é uma esfera redonda. Tal conjectura foi refutada somente em 1984 por Wente [17] ao apresentar exemplos de superfícies CMC imersas em  $\mathbb{R}^3$  homeomorfas ao toro.

Em 1958, Alexandrov mostrou que a esfera é a única hipersuperfície conexa, fechada, com curvatura média constante não nula e mergulhada no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Em 1988, Ripoll [11] generalizou o resultado de Alexandrov, assumindo a hipótese da hipersuperfície ser completa<sup>1</sup>, suposição mais fraca do que ser fechada, embora também tenha assumido as hipóteses de a hipersuperfície está contida em um cone plano<sup>2</sup> e propriamente mergulhada em  $\mathbb{R}^n$ .

O fato que a conjectura de Hopf não é verdadeira e a possibilidade de generalização do resultado de Alexandrov apontaram para a necessidade de um elemento mais geométrico para caracterizar as esferas. E foi então que surgiram os trabalhos na teoria de estabilidade. Em poucas palavras, uma superfície no  $\mathbb{R}^3$  é *estável* se pequenas perturbações não podem diminuir sua área sem alterar seu volume, e é *fortemente estável* se nenhuma pequena perturbação diminui sua área. Superfícies estáveis são aquelas que podem ser observadas na natureza.

---

<sup>1</sup>Intuitivamente, uma superfície completa é aquela que não apresenta furos ou fronteira. Ver definição 3.2.1 e parágrafo seguinte.

<sup>2</sup>Um octante do  $\mathbb{R}^3$  ou qualquer conjunto que difere disto apenas por um movimento rígido.

Considerando hipóteses de estabilidade, em 1984 Barbosa e do Carmo [1] obtiveram uma nova caracterização da esfera, mostrando que as esferas redondas (isto é, esferas com a métrica euclidiana) são as únicas hipersuperfícies imersas em  $\mathbb{R}^n$  com curvatura média constante não nula, fechadas e estáveis. Apresentar este resultado em  $\mathbb{R}^3$ , desenvolvendo naturalmente as noções de estabilidade necessárias, é um dos principais objetivos do presente trabalho.

Quanto aos planos, destacamos duas importantes caracterizações. Em 1916, Bernstein provou que se uma superfície mínima é gráfico de uma função definida em todo  $\mathbb{R}^2$ , então tal superfície é um plano. Já em 1979, do Carmo e Peng [4] caracterizaram o plano como a única superfície mínima completa e fortemente estável. Como veremos, gráficos mínimos são fortemente estáveis. Assim, o teorema de do Carmo - Peng generaliza o teorema de Bernstein.

A expressão “pequenas perturbações” a que nos referimos acima para ilustrar uma noção de estabilidade significa que estudamos variações em pequenas regiões de uma superfície, mantendo todo o restante, e principalmente o bordo de uma tal região, fixos. Com um grau de liberdade maior a esta condição, podemos supor uma variação que, ao invés de manter o bordo fixo, faz com que este esteja apenas contida em uma superfície fechada. Esta ideia dá origem às chamadas superfícies de fronteira livre. Em 1995, Ros e Vergasta [12] mostraram que uma superfície compacta, CMC, orientável, imersa, com bordo livre numa bola do  $\mathbb{R}^3$  e estável é uma calota esférica, um disco geodésico ou uma superfície de gênero 1. Finalmente, em 2016, Nunes [9] mostra que a terceira possibilidade levantada por Ros e Vergasta não acontece, mostrando que as superfícies umbílicas imersas nas bolas geodésicas do  $\mathbb{R}^3$  são as únicas superfícies estáveis com curvatura média constante de fronteira livre.

O presente trabalho contém 3 capítulos, os quais estão organizados da maneira seguinte. No primeiro capítulo, fixamos as notações e terminologias, apresentamos os conceitos essenciais, baseando-nos em [3] e [8]. Esta primeira parte apresenta também caracterizações de superfícies de curvatura média constante e superfícies mínimas a partir das fórmulas das primeiras variações da área e do volume. Já o segundo capítulo trata de algumas noções de estabilidade, sendo desenvolvido naturalmente a partir do estabelecido no capítulo inicial.

Mostra-se neste capítulo a segunda variação da área, que leva à definição de superfícies estáveis. No terceiro e último capítulo, apresentamos o teorema de Barbosa - do Carmo, bem como sua demonstração, e alguns resultados relacionados, tais como o teorema de do Carmo - Peng, e o teorema de Nunes, considerado a versão do teorema de Barbosa - do Carmo no contexto das superfícies de fronteira livre.

# Capítulo 1

## Superfícies

Iniciamos por fixar a terminologia. Salvo menção em contrário, quando se fizer necessário referência a um espaço ambiente, consideramos o espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Usaremos o termo “superfícies” para designar subvariedades bidimensionais do referido espaço. Quando não especificarmos a imersão tomada, consideramos a inclusão natural. Outros termos serão utilizados para as variedades do  $\mathbb{R}^3$  não mergulhadas, tais como “superfícies parametrizadas” para designar variedades obtidas a partir de uma única carta. Superfícies do  $\mathbb{R}^3$  serão nossos principais objetos de estudo, embora muitas ideias apresentadas possam ser generalizadas para outras variedades, dimensões e espaços ambientes.

As principais referências que embasam as ideias apresentadas neste capítulo são [2], [3] e [8].

### 1.1 Preliminares

Seja  $\Sigma$  uma superfície orientável com métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e conexão  $\nabla$  induzidas pelo  $\mathbb{R}^3$ . Usaremos o mesmo símbolo para designar as métricas de  $\Sigma$  e do  $\mathbb{R}^3$ , mas denotamos, ao longo do texto, por  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto com fronteira suave  $\partial\Omega$ . A área de  $\Omega$  é dada por

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} d\Sigma, \tag{1.1}$$

em que  $d\Sigma$  é o elemento de área de  $\Sigma$  (omitiremos frequentemente  $d\Sigma$  quando não houver ambiguidade). Se  $\varphi : U \rightarrow \Omega$  é uma vizinhança coordenada de  $p \in \Omega$ , então, em  $\varphi(U)$ ,  $d\Sigma = |\varphi_u \times \varphi_v| dudv$ .

O plano tangente a  $\Sigma$  em  $p = \varphi(u_0, v_0)$ , denotado por  $T_p\Sigma$ , é o espaço vetorial gerado por  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$ . Definimos em  $T_p\Sigma$  a forma quadrática  $I_p(x) = \langle x, x \rangle$ , chamada *primeira forma fundamental*. Sua representação matricial na base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  é

$$[I_p] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

onde  $E = I_p(\varphi_u)$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$  e  $G = I_p(\varphi_v)$ .

## Segunda Forma Fundamental

Um campo vetorial sobre  $\Sigma$  é uma aplicação que associa a cada  $p \in \Sigma$  um vetor tangente em  $T_p\Sigma$ . Seja  $\mathcal{X}(\Sigma)$  o conjunto dos campos vetoriais em  $\Sigma$ . Indicamos por  $\bar{X}$  a extensão de  $X$  a um campo vetorial no espaço ambiente, que é sempre possível tendo em vista que  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  é subvariedade e, portanto, a inclusão é um mergulho. Assim, utilizamos  $x = X(p) = \bar{X}(p)$  indistintamente para representar um vetor em  $T_p\Sigma$ . Consideramos ainda  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita do  $\mathbb{R}^3$ . Assim, tomando a decomposição  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}^\top + \bar{\nabla}^\perp$ , sabe-se que  $\nabla = \bar{\nabla}^\top$ . Lembramos também que a parte normal desta decomposição é a aplicação bilinear e simétrica  $B : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)^\perp$ , tal que  $B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X$ . Pode se mostrar que  $B$  está bem definida, isto é, não depende das extensões  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  consideradas. Tal aplicação está associada ao endomorfismo auto-adjunto  $W_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ , chamado *aplicação de Weingarten*, dado por

$$\langle W_p(x), y \rangle = \langle B(x, y), N \rangle, \quad (1.3)$$

em que  $N$  é vetor unitário normal a  $T_p\Sigma$  dado por  $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$ , e  $x = X(p)$ .

A forma  $\Pi_p(x, y) = \langle W_p(x), y \rangle$  é chamada *segunda forma fundamental em  $p$  com relação a orientação  $N$*  ou *operador de forma* (algumas vezes, a aplicação  $B$  também recebe estes

nomes). Denotaremos, com certo abuso de notação,  $\Pi_p(x) := \Pi_p(x, x)$  para designar a forma quadrática associada a  $W_p$ . A matriz de  $\Pi_p$  relativa à base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  é

$$[\Pi_p] = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

em que  $e = \Pi_p(\varphi_u)$ ,  $f = \Pi_p(\varphi_u, \varphi_v)$  e  $g = \Pi_p(\varphi_v)$ .

Vejamos uma interpretação para  $W_p$ . Tomando  $x = X(p) = \bar{X}(p)$ , temos

$$\langle W_p(x), y \rangle = \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y, N \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle(p) \quad (1.5)$$

Como  $\langle \bar{Y}, N \rangle = 0$ , já que  $N$  é normal e  $\bar{Y}$  é tangente, segue da compatibilidade da conexão  $\bar{\nabla}$  com a métrica que  $\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle = -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N \rangle$ . Assim,

$$\langle W_p(x), y \rangle = -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_x N, y \rangle, \quad (1.6)$$

e portanto

$$W_p(x) = -\bar{\nabla}_x N. \quad (1.7)$$

## Aplicação Normal de Gauss

Considerando, para cada  $p \in \Sigma$ , a identificação natural entre  $N(p)$  e de seu translado à origem de  $\mathbb{R}^3$ , definimos a *aplicação normal de Gauss*  $\mathcal{G} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$  como o ponto final de tal translação. Como  $T_p \Sigma$  e  $T_{\mathcal{G}(p)} \mathbb{S}^2$  são planos paralelos, estendemos a estes tal identificação. Temos então uma interpretação para  $W_p$ : como  $\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}_X N$  é tangente a  $\Sigma$ ,

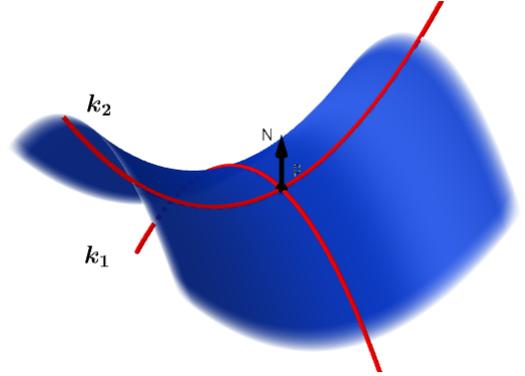
$$d\mathcal{G}_p(x) = dN_p(x) = \frac{d}{dt} N(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{D}{dt} N(\gamma(t))|_{t=0} = \bar{\nabla}_{\gamma'(0)} N = \bar{\nabla}_x N = -W_p(x),$$

para uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = x \in T_p \Sigma$ . Portanto,  $W_p$  é o negativo da derivada da aplicação normal de Gauss.

## Curvaturas

Os autovalores  $k_1$  e  $k_2$  da aplicação simétrica  $W_p$  são chamados *curvaturas principais* de  $\Sigma$  em  $p$ , e os autovetores  $e_1$  e  $e_2$  associados são as *direções principais*.

$k_1$  e  $k_2$  são também os valores máximo e mínimo das curvaturas das interseções de  $\Sigma$  com seus planos normais, chamadas *curvaturas normais*. A *curvatura de Gauss*  $K(p)$  e a *curvatura média*  $H(p)$  de  $\Sigma$  em  $p$  são definidas, respectivamente, pelos determinante e semi-traço da aplicação linear  $W_p$ . Assim,



$$K(p) = k_1(p)k_2(p) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

O vetor curvatura média  $\vec{H}$  é definido por  $\vec{H} = \sum_{i=1}^2 B(E_i, E_i)$ , com  $E_i$  campos vetoriais ortonormais<sup>1</sup> em  $\Sigma$ . Se  $e_i = E_i(p)$ , então

$$\langle \vec{H}(p), N \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^2 B(E_i, E_i)(p), N \right\rangle = \sum_{i=1}^2 \langle W_p(e_i), e_i \rangle = \text{tr}(W_p) = 2H(p). \quad (1.8)$$

Como  $\vec{H}$  tem a direção de  $N$ , segue que  $\vec{H} = 2HN$  e que  $|\vec{H}| = 2H$ .

Seja  $[W_p]$  a matriz de  $W_p$  relativa à base  $(\varphi_u, \varphi_v)$ . Então, por (1.2) e (1.4) resulta que

$$[\Pi_p] = [I_p][W_p],$$

e portanto

$$[W_p] = [I_p]^{-1}[\Pi_p]. \quad (1.9)$$

Esta última igualdade resulta em fórmulas explícitas para as curvaturas Gaussiana e média em função de  $(u, v) = \varphi^{-1}(p)$ :

$$K = \det[W_p] = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.10)$$

e

$$H = \frac{1}{2}\text{tr}[W_p] = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}. \quad (1.11)$$

<sup>1</sup>Um referencial ortonormal é uma família de campos vetoriais  $E_i$  tais que  $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ , onde  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$ , e  $\delta_{ij} = 0$ , caso contrário.

Finalmente, observamos que

$$4H^2 - 2K = k_1^2 + k_2^2 = \Pi^2(e_1) + \Pi^2(e_2) = |\Pi|^2 \quad (1.12)$$

é a norma da segunda forma fundamental, e assim

$$2(|\Pi|^2 - 2H^2) = (k_1 - k_2)^2 \geq 0 \quad (1.13)$$

e portanto

$$|\Pi|^2 \geq 2H^2, \quad (1.14)$$

onde a igualdade só ocorre se  $k_1 = k_2$ , isto é, se  $p \in \Sigma$  é ponto umbílico.

## Operadores diferenciáveis e fórmula de Minkowski

Se  $X, E_1, E_2$  são campos vetoriais sobre  $\Sigma$ , tais que  $E_i$  é um referencial ortonormal, então o *divergente de  $X$*  é dado por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle. \quad (1.15)$$

Observe que  $\operatorname{div} X$  é o traço da aplicação linear  $y \rightarrow \bar{\nabla}_y X$ , para  $y = Y(p) \in Tp\Sigma$ .

A Regra de Leibniz para o divergente do produto de uma função real  $u$  por um campo vetorial  $X$ , ambos em  $\Sigma$ , é

$$\operatorname{div}(u \cdot X) = u \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla u, X \rangle, \quad (1.16)$$

onde  $\nabla u$  é o campo vetorial *gradiente* de  $u$ , tal que para cada  $p \in \Sigma$ , é dado por  $\langle \nabla u, x \rangle = du_p(x)$ , para todo  $x \in Tp\Sigma$ . Definimos o *Laplaciano* de  $u$  por

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u). \quad (1.17)$$

Dado um ponto  $p \in \Sigma$  existe uma vizinhança  $U \subset \Sigma$  e campos de vetores  $E_1, E_2 \in \mathcal{X}(U)$  ortonormais em cada ponto de  $U$ , tais que, em  $p$ ,  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ . Nestas condições,  $\{E_1, E_2\}$  é chamado um *referencial geodésico* em  $p$ . Considerando um tal referencial, uma função  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  e um campo vetorial  $X = \sum_i a_i E_i$ , temos

$$\nabla f(p) = \sum_i E_i(f) E_i(p), \quad (1.18)$$

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_i E_i(a_i)(p), \quad (1.19)$$

e

$$\Delta f(p) = \sum_i E_i(E_i(f))(p). \quad (1.20)$$

A regra de Leibniz tem importantes consequências. Por exemplo, integrando (1.16) em um domínio relativamente compacto  $\Omega \subset \Sigma$  e aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \langle uX, \mathbf{n} \rangle ds = \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div} X d\Sigma + \int_{\Omega} \langle \nabla u, X \rangle d\Sigma,$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário exterior normal a  $\partial\Omega$  e tangente a  $\Omega$ . Se  $u$  se anula em  $\partial\Omega$ , então a equação acima implica em

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, X \rangle d\Sigma = - \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div} X d\Sigma. \quad (1.21)$$

Outra importante consequência de (1.16) ocorre quando  $\Sigma$  é uma superfície fechada (isto é, compacta e sem bordo). Nestas superfícies, o teorema da divergência nos diz que  $\int_{\Sigma} \operatorname{div} X d\Sigma = 0$ . Assim, tomando  $X = \nabla v$  em (1.16), obtemos a fórmula integral de Dirichlet

$$\int_{\Sigma} u \Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0. \quad (1.22)$$

Finalmente, (1.22) resulta na importante *fórmula integral de Minkowski* (1.23), utilizada na demonstração do teorema de Barbosa - do Carmo. Se  $\Sigma$  é uma superfície fechada e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão de curvatura média constante  $H \neq 0$ , tomando  $u = 1$  e  $v = \langle \phi, \phi \rangle / 2$ , obtemos

$$\int_{\Sigma} 1 + H \langle \phi, N \rangle d\Sigma = 0, \quad (1.23)$$

tendo em vista que  $\Delta \langle \phi, \phi \rangle / 2 = 2 + 2H \langle \phi, N \rangle$ . De fato, dado  $p \in \Sigma$  e um referencial ortonormal  $\{E_1, E_2\}$ , geodésico em  $p$ , temos  $\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, E_k \rangle = 0$ ,  $\phi = \langle \phi, N \rangle N + \sum_{i=1}^2 \langle \phi, E_i \rangle E_i$

e  $\bar{\nabla}_{E_i}\phi = E_i^2$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\langle\phi,\phi\rangle(p) &= \sum\frac{1}{2}E_i(E_i\langle\phi,\phi\rangle)(p) \\
&= \sum E_i\langle\bar{\nabla}_{E_i}\phi,\phi\rangle = \sum E_i\langle E_i,\phi\rangle \\
&= \sum\langle\bar{\nabla}_{E_i}E_i,\phi\rangle + \langle E_i,\bar{\nabla}_{E_i}\phi\rangle \\
&= \sum\langle\bar{\nabla}_{E_i}E_i,\langle\phi,N\rangle N\rangle + \sum\langle\phi,E_j\rangle E_j + 2 \\
&= 2 + \langle\phi,N\rangle\sum\langle\bar{\nabla}_{E_i}E_i,N\rangle = 2 + \langle\phi,N\rangle\langle\vec{H},N\rangle = 2 + 2H\langle\phi,N\rangle(p).
\end{aligned}$$

## 1.2 Superfícies CMC

A designação “*Superfícies de Curvatura Média Constante (CMC)*” é autoexplicativa. Os exemplos mais simples de tais superfícies em  $\mathbb{R}^3$  são o plano, a esfera e o cilindro. Observe que as direções principais nestes casos são tangentes a retas ou a circunferências de certo raio  $r$ , cujas curvaturas são 0 e  $1/r$ , respectivamente. As médias entre dois destes valores, tomados da maneira conveniente, levam a  $H = \text{constante}$  em cada caso.

São de particular interesse as superfícies CMC em que  $H = 0$ , como o plano, *chamadas superfícies mínimas*. Seu estudo pode ser motivado a partir do problema de Plateau: “se  $\gamma$  é uma curva fechada, encontrar a superfície de menor área cujo bordo é  $\gamma$ .” Estudando a questão, o próprio Plateau realizou experimentos com películas de sabão. Devido a tensão superficial exercida pela atmosfera, estas películas possuem energia proporcional a sua área. Uma película de sabão formada a partir da imersão de um arame na forma de uma curva  $\gamma$  tende a adotar, pelo menos localmente, a forma de uma superfície de área mínima cujo bordo é  $\gamma$ . Como veremos, da fórmula da primeira variação da área seguirá que as superfícies minimizantes possuem curvatura média nula.

---

<sup>2</sup>Identificamos  $\phi$  com o campo posição no  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $\gamma : I \rightarrow \Sigma$  uma curva tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = E_i(p)$ . Assim,  $\gamma$  é identificada com sua imagem por  $\phi$ . Da compatibilidade da conexão  $\bar{\nabla}$  com a derivada covariante  $\frac{D}{dt}$ , temos  $(\bar{\nabla}_{E_i}\phi)(p) = \bar{\nabla}_{\gamma'(0)}\phi = \frac{D\phi(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{D\gamma(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \gamma'(0) = E_i(p)$

Mais geralmente, se a película de sabão separa duas regiões de diferentes pressões, a película tenderá a adotar a forma de uma superfície CMC. Isto é o que acontece, por exemplo, com as bolhas de sabão, cujo o ar no interior tem pressão maior que o ar exterior. Num estado de equilíbrio, é razoável esperar que a pressão resultante seja a mesma em todos os pontos da bolha, o que por sua vez implicará em curvaturas constantes ao longo da superfície. Podemos assim motivar o estudo das superfícies CMC a partir do problema isoperimétrico, cujo enunciado se resume a “encontrar a superfície compacta de menor área dentre todas que delimitam certo volume”.

### 1.2.1 Primeira Variação da Área

Sejam  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão da superfície  $\Sigma$ ,  $I = (-\epsilon, \epsilon)$  um intervalo real e  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Uma variação de  $\Omega$  é uma função diferenciável  $\Phi : I \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que, para cada  $t \in I$ , os mapas  $\phi_t(p) = \Phi(t, p)$  são imersões isométricas, com  $\phi_0 = \phi$ . Dizemos que a variação  $\Phi$  fixa o bordo se  $\Phi(t, p) = \Phi(0, p) \forall p \in \partial\Omega$  e  $\forall t \in I$ .

Seja  $L = \frac{\partial\Phi}{\partial t}|_{t=0}$  o campo variacional associado. Se  $L$  é normal a  $\Sigma$  para todo  $p \in \Omega$ , dizemos que  $\Phi$  é uma variação normal.

Seja  $A(t)$  a área de  $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ . Pela fórmula da mudança de variáveis podemos calcular o área de  $\Omega_t$  em termos de uma integral em  $\Omega$ . Assim,

$$A(t) = \int_{\Omega_t} d\Sigma_t = \int_{\Omega} \det(d\phi_t) d\Sigma, \quad (1.24)$$

onde  $d\Sigma_t$  é a forma volume induzida em  $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$ .

Antes de prosseguir, precisamos do seguinte resultado:

**Lema 1.2.1.** *Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial com produto interno e uma orientação. Seja  $(v_1, \dots, v_n)$  uma base positiva. Se  $A = [a_{ij}]$ , com  $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ , então*

$$\det[v_1, \dots, v_n] = \sqrt{\det A}. \quad (1.25)$$

*Demonstração.* Seja  $(e_1, \dots, e_k)$  uma base ortonormal positiva de  $\mathcal{V}$ . A  $s$ -ésima coordenada de  $v_i$  nesta base é  $\langle v_i, e_s \rangle$ . Assim,

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \sum_s \langle v_i, e_s \rangle \langle e_s, v_j \rangle = \sum_s V_{is} V_{sj} = (V^t V)_{ij} \Rightarrow \det A = (\det V)^2. \quad (1.26)$$

Como cada coluna  $i$  de  $V$  é dada por  $V(e_i) = [v_i]$ , segue o resultado.  $\square$

Este lema fornece uma relação entre o jacobiano de  $\phi_t$  e a métrica de  $\Sigma_t$ : se  $g(t) = \det(g_{ij}(t))$ , com  $g_{ij}(t) = \langle d\phi_t(e_i), d\phi_t(e_j) \rangle$ , então  $\det(d\phi_t) = \sqrt{g(t)}$ , considerando  $a_{ij} = g_{ij}$  e  $V = d\phi_t$ .

**Teorema 1.1** (Primeira Variação da Área). *Seja  $\Phi$  uma variação de  $\Omega$  que fixa o bordo. Então*

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, L \rangle d\Sigma, \quad (1.27)$$

onde  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$ ,  $N$  é um campo normal unitário, e  $L$  é o campo variacional associado a  $\Phi$ .

*Demonstração.* Sejam  $p \in \Omega$  e  $\{E_1, E_2\}$  um referencial ortonormal e geodésico em  $p$ . Os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\phi_t$  são  $E(t) = g_{11}(t)$ ,  $F(t) = g_{12}(t)$  e  $G(t) = g_{22}(t)$ . Logo,  $g(t) = E(t)G(t) - F^2(t)$ . Portanto, como  $g(0) = 1$ , segue do lema anterior que

$$\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \det(d\phi_t)|_{t=0} d\Sigma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g(t)}|_{t=0} d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g'(0) d\Sigma.$$

Logo,

$$A'(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E'(0) + G'(0) d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} g_{ii}(t)|_{t=0} d\Sigma. \quad (1.28)$$

Considera-se um sistema de coordenadas numa vizinhança de  $p$  na variedade produto  $M = I \times \Sigma$  cujos campos vetoriais coordenados sejam  $\partial t, \partial i$  tais que  $\partial t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  e  $\partial i = E_i^t$ , onde cada  $E_i^t$  é uma extensão local de  $E_i$  a um campo vetorial em  $M$ . Da simetria da conexão riemanniana, campos coordenados comutam. Assim,  $0 = [\partial t, \partial i] = \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} E_i - \bar{\nabla}_{E_i} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Portanto, da compatibilidade de  $\bar{\nabla}$  com a métrica, temos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g_{ii}(t)|_{t=0} = \langle \bar{\nabla}_{\partial t} E_i^t, E_i^t \rangle|_{t=0} = \langle \bar{\nabla}_{E_i^t} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, E_i^t \rangle|_{t=0} = \langle \bar{\nabla}_{E_i} L, E_i \rangle. \quad (1.29)$$

Portanto,

$$A'(0) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{E_i} L, E_i \rangle d\Sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} L \, d\Sigma, \quad (1.30)$$

de acordo com (1.15). Tomando  $\operatorname{div} L = \operatorname{div} L^{\top} + \operatorname{div} L^{\perp}$ , observamos que

$$\operatorname{div} L^{\perp} = \sum \langle \bar{\nabla}_{E_i} L^{\perp}, E_i \rangle = - \sum \langle L^{\perp}, \bar{\nabla}_{E_i} E_i \rangle = - \langle L^{\perp}, \vec{H} \rangle = - \langle L, \vec{H} \rangle, \quad (1.31)$$

pois  $\vec{H} = \sum B(E_i, E_i)$  e  $0 = \langle L^{\perp}, e_i \rangle = \langle L^{\perp}, \nabla_{E_i} E_i \rangle = \langle L^{\top}, \vec{H} \rangle$ . Portanto,

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, L \rangle d\Sigma + \int_{\Omega} \operatorname{div} L^{\top} d\Sigma, \quad (1.32)$$

pois  $\vec{H} = 2HN$ . Do teorema da divergência, segue que

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, L \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n}, L^{\top} \rangle ds, \quad (1.33)$$

e a segunda integral é zero, já que por hipótese a variação fixa o bordo, e assim  $L|_{\partial\Omega} = 0$ .  $\square$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, o termo  $\langle \vec{H}, L \rangle = \langle 2HN, L \rangle$  mostra que, para todo campo variacional  $L$ ,  $\vec{H}$  é a direção em que a área decresce mais rapidamente.

## 1.2.2 Primeira Variação do Volume

Introduzimos a noção de volume a partir de uma superfície fechada  $\Sigma$  mergulhada no  $\mathbb{R}^3$ . Neste último caso,  $\Sigma$  delimita um domínio tridimensional  $\mathcal{D}$ . Definimos o volume de  $\Sigma$  como o volume de  $\mathcal{D}$ . Considerando o campo vetorial identidade, isto é  $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $I(x, y, z) = (x, y, z)$ , temos  $\operatorname{div} I = 3$ . Pelo teorema da divergência,

$$V(\Sigma) = \int_{\mathcal{D}} 1 = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} I = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, I \rangle = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, \phi \rangle,$$

onde  $N$  é o campo unitário normal a  $\partial\mathcal{D} = \Sigma$  e  $\phi$  é o mergulho de  $\Sigma$  no  $\mathbb{R}^3$  considerado. Por analogia, para uma imersão  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definimos o volume  $V(\Omega)$  de um domínio relativamente compacto  $\Omega \subset \Sigma$ , na orientação  $N$ , por

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \langle N, \phi \rangle d\Sigma. \quad (1.34)$$

Se  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , (1.34) mede o volume algébrico delimitado por  $\Omega$  e o cone  $C$  formado por  $\partial\Omega$  e a origem do  $\mathbb{R}^3$ . Isto pode ser visto a partir da parametrização de  $C$  dada por  $\psi(s, t) = s\gamma(t)$ , onde  $\gamma$  é uma parametrização de  $\partial\Omega$ . Assim,

$$3V(\Omega \cup C) = \int_{\Omega} \langle N, \phi \rangle + \int_C \langle N_C, \psi \rangle,$$

onde  $N_c$  é o campo unitário normal a  $C$ . Finalmente, observamos que  $\langle N_C, \psi \rangle = 0$ . Por outro lado, a dependência de (1.34) com relação a origem de  $\mathbb{R}^3$  desaparece se  $V(C) = 0$ , isto é, se  $\partial\Omega$  está contido num plano que contém a origem.

**Exemplo 1.2.1** (Gráficos). *Apesar deste parecer um exemplo muito particular, sabe-se que toda superfície em  $\mathbb{R}^3$  é localmente um gráfico sobre o seu plano tangente. Seja  $\Omega$  o gráfico de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Omega$  pode ser parametrizado por  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Como  $|\varphi_x \times \varphi_y| = |(1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y)| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$ , segue que*

$$A(\Omega) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy \quad e \quad N = \frac{(1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y)}{|(1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y)|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Além disso, o volume de  $\Omega$  é dado por

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \langle N, \varphi \rangle d\Sigma = \frac{1}{3} \int_U (-xf_x - yf_y + f) dx dy. \quad (1.35)$$

Seja  $Y(p) = pf(p)$  um campo vetorial em  $U$ . Temos  $\operatorname{div} Y = xf_x + yf_y + 2f$ . Com a hipótese adicional de que  $f|_{\partial U} \equiv 0$ , o teorema da divergência implica em

$$\int_U (xf_x + yf_y + 2f) dx dy = \int_U \operatorname{div} Y = \int_{\partial U} f(p) \langle \mathbf{n}, p \rangle dx dy = 0. \quad (1.36)$$

Portanto, como esperado, obtemos

$$V(\Omega) = \int_U f(x, y) dx dy, \quad (1.37)$$

a partir da adição de (1.35) a um terço de (1.36).

Considerando a variação  $\Phi(t, p) = \phi_t(p)$  e demais definições feitas no início da seção (1.2.1), o volume  $V(t)$  de  $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$  é dada por

$$V(t) = \frac{1}{3} \int_{\Omega_t} \langle N(t), \phi_t \rangle d\Sigma_t = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \langle N(t), \phi_t \rangle \sqrt{g(t)} d\Sigma. \quad (1.38)$$

Assim, temos o seguinte

**Teorema 1.2** (Primeira variação do Volume). *A função  $V(t)$  é diferenciável em  $t = 0$  e*

$$V'(0) = \int_{\Omega} \langle N, L \rangle d\Sigma, \quad (1.39)$$

onde  $N$  é um campo normal unitário, e  $L$  é o campo variacional associado a  $\Phi$ .

*Demonstração.* De (1.32) e (1.38) resulta que

$$3V'(0) = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \langle N(t), \phi_t \rangle |_{t=0} \sqrt{g(0)} d\Sigma + \int_{\Omega} \langle N, \phi \rangle (-2H \langle N, L \rangle + \operatorname{div} L^{\top}) d\Sigma. \quad (1.40)$$

Temos

$$\left. \frac{d}{dt} \langle N(t), \phi_t \rangle \right|_{t=0} = \langle N'(0), \phi \rangle + \langle N, L \rangle. \quad (1.41)$$

$N'$  é ortogonal a  $N$ , pois  $\langle N(t), N(t) \rangle = 1$ . Para o referencial ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p\Sigma$ , temos  $\langle N(t), d\phi_t(e_i) \rangle = 0$ . Assim,

$$\langle N'(0), e_i \rangle + \langle N(0), \left. \frac{d}{dt} d\phi_t(e_i) \right|_{t=0} \rangle = 0. \quad (1.42)$$

Como  $E_i(t) = d\phi_t(e_i)$ , e os campos coordenados comutam, segue que

$$\left. \frac{d}{dt} d\phi_t(e_i) \right|_{t=0} = \left. \frac{DE_i}{dt} \right|_{t=0} = \bar{\nabla}_L E_i(0) = \bar{\nabla}_{e_i} L. \quad (1.43)$$

Assim, tomando  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f = \langle N, L \rangle$ , (1.42) implica em

$$\langle N'(0), e_i \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} L \rangle = -e_i(\langle N, L \rangle) + \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, L \rangle = -e_i(f) - \langle W_p(e_i), L^{\top} \rangle. \quad (1.44)$$

Por linearidade, segue que (1.44) é verdadeira  $\forall v \in T_p\Sigma$ . Portanto, em  $p$ , segue que

$$N'(0) = -\nabla f - W_p(L^{\top}). \quad (1.45)$$

Assim, a equação (1.41) implica em

$$\left. \frac{d}{dt} \langle N(t), \phi_t \rangle \right|_{t=0} = \langle -\nabla f - W_p(L^{\top}), \phi \rangle + f. \quad (1.46)$$

Portanto, (1.40) resulta em

$$3V'(0) = \int_{\Omega} \langle -\nabla f - W_p(L^{\top}), \phi \rangle + f + \langle N, \phi \rangle (-2H \langle N, L \rangle + \operatorname{div} L^{\top}) d\Sigma. \quad (1.47)$$

Por outro lado, observamos que

$$\operatorname{div}(\langle N, \phi \rangle L^\top) = \langle N, \phi \rangle \operatorname{div} L^\top + \langle \nabla \langle N, \phi \rangle, L^\top \rangle = \langle N, \phi \rangle \operatorname{div} L^\top - \langle \phi, W_p(L^\top) \rangle, \quad (1.48)$$

pois

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle N, \phi \rangle, L^\top \rangle &= \langle (e_1 \langle N, \phi \rangle, e_2 \langle N, \phi \rangle), L^\top \rangle = \langle (\langle \nabla_{e_1} N, \phi^\top \rangle, \langle \nabla_{e_2} N, \phi^\top \rangle), L^\top \rangle \\ &= -\langle W_p(\phi^\top), L^\top \rangle = -\langle \phi, W_p(L^\top) \rangle, \end{aligned}$$

tendo em vista que a aplicação de Weingarten é auto-adjunta e  $\langle \phi^\perp, W_p(L^\top) \rangle = 0$ . Além disso,

$$\operatorname{div} f \phi^\top = f \operatorname{div} \phi^\top + \langle \nabla f, \phi^\top \rangle = f(2 + 2H \langle N, \phi \rangle) + \langle \nabla f, \phi \rangle. \quad (1.49)$$

Substituindo (1.48) e (1.49) em (1.47), e aplicando o teorema da divergência

$$3V'(0) = \int_{\Omega} 3f + \operatorname{div}(\langle N, \phi \rangle L^\top + f \phi^\top) d\Sigma = \int_{\Omega} 3f d\Sigma + \int_{\partial\Omega} \langle \langle N, \phi \rangle L^\top + f \phi^\top, \mathbf{n} \rangle d\Sigma \quad (1.50)$$

Portanto, se a variação fixa o bordo,  $L$  e  $f = \langle N, L \rangle$  se anulam em  $\partial\Omega$ , e segue o resultado.  $\square$

Tendo obtido as fórmulas das primeiras variações da área e volume nos teoremas 1.1 e 1.2, podemos obter uma caracterização para as superfícies CMC. Retomando a motivação inicial do estudo de tais superfícies a partir das bolhas de sabão, temos a seguinte definição: uma variação *preserva volume* se o funcional  $V(t)$  associado é constante. Precisaremos do seguinte resultado:

**Lema 1.2.2.** *Sejam  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\int_{\Omega} f = 0$ . Então existe uma variação de  $\Omega$  que preserva volume cujo campo variacional é  $L = fN$ . Além disso, se  $f = 0$  em  $\partial\Omega$  a variação também pode ser tomada de modo a fixar o bordo  $\partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Seja  $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\int_{\Omega} g \neq 0$  e  $g|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $I = (-\epsilon, \epsilon)$ , definimos

$$\Phi : \Sigma \times I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(p, t, s) = \phi(p) + (tf(p) + sg(p))N(p).$$

Seja  $V(t, s)$  o volume da superfície definida por  $\Phi(\cdot, t, s)$  para  $t$  e  $s$  fixados. Como,  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}(p, 0, 0) = g(p)N(p)$ , de (1.39), considerando a variação  $\Phi$  para cada  $t$  fixado, resulta que

$$\frac{\partial V}{\partial s}(0, 0) = \int_{\Omega} \langle N, gN \rangle d\Sigma = \int_{\Omega} g d\Sigma \neq 0. \quad (1.51)$$

Portanto, considerando a equação  $V(t, s) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , segue do teorema da função implícita que existe um difeomorfismo  $j : I_1 \rightarrow I_2$ ,  $I_i \subset I$ , tal que  $j(0) = 0$  e  $V(t, j(t)) = c$ . Logo, a variação  $\phi_t(p) = \Phi(p, t, j(t))$  preserva volume. Mostremos que o campo variacional associado é  $L = fN$ . De fato, derivando  $V(t, j(t)) = c$  com relação a  $t$  obtemos

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(0, 0) + j'(0) \frac{\partial V}{\partial s}(0, 0) = \int_{\Omega} f + j'(0)g d\Sigma = j'(0) \int_{\Omega} g d\Sigma \Rightarrow j'(0) = 0. \quad (1.52)$$

Portanto,

$$L(p) = \left. \frac{\partial \phi_t(p)}{\partial t} \right|_{t=0} = (f(p) + j'(0)g(p))N(p) = f(p)N(p) \quad (1.53)$$

No caso particular em que  $f = 0$  ao longo de  $\partial\Omega$ , como  $g$  satisfaz a mesma condição, segue que a variação  $\Phi(p, t, j(t))$  fixa o bordo.  $\square$

O próximo teorema caracteriza superfícies CMC como aquelas cuja área é “crítica” para pequenas perturbações que não alteram seu volume, isto é, como pontos críticos do funcional área para todas as variações que preservam volume e fixam o bordo:

**Teorema 1.3.** *Seja  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão.  $\Sigma$  tem curvatura média constante  $H$  se, e somente se, para cada domínio relativamente compacto  $\Omega \subset \Sigma$  de fronteira suave, e para cada variação de  $\Omega$  que preserva volume e fixa o bordo,  $A'(0) = 0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $H$  seja constante. Como a variação preserva volume, da fórmula da primeira variação da área, (1.1), temos

$$A'(0) = -2H \int_{\Omega} \langle N, L \rangle d\Sigma = -2HV'(0) = 0. \quad (1.54)$$

Reciprocamente, sejam

$$f = H - \frac{1}{A(\Omega)} \int_{\Omega} H d\Sigma, \quad \Omega^+ = \{q \in \Omega \mid f(q) > 0\} \text{ e } \Omega^- = \{q \in \Omega \mid f(q) < 0\}.$$

Afirmamos que  $\Omega^+ = \Omega^- = \emptyset$ . Supondo, por absurdo, que isto não ocorra, tomamos  $\omega^+$  e  $\omega^-$  funções de corte não negativas e diferenciáveis em  $\bar{\Omega}$ , cujos suportes estejam contidos, respectivamente, em  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ , e tais que  $\int_{\Omega}(\omega^+ + \omega^-)f d\Sigma = 0$  (esta escolha é razoável, pois  $\int_{\Omega} f = 0$ ). Estas condições implicam que  $\omega^+$  e  $\omega^-$  são nulas em  $\partial\Omega$ . Se  $g = (\omega^+ + \omega^-)f$ , então  $g|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\int_{\Omega} g = 0$ .

Assim, pelo lema 1.2.2, existe uma variação que preserva volume, fixa o bordo, cujo campo variacional é  $L = gN$ . Por hipótese, para esta variação

$$0 = A'(0) = -2 \int_{\Omega} gH d\Sigma. \quad (1.55)$$

Portanto, como  $(H - f) \int_{\Omega} g d\Sigma = \int_{\Omega} g(H - f) d\Sigma = 0$  e  $\omega^+$  e  $\omega^-$  são não negativas, temos

$$0 = \int_{\Omega} gH - g(H - f) d\Sigma = \int_{\Omega} gf d\Sigma = \int_{\Omega} (\omega^+ + \omega^-)f^2 d\Sigma > 0, \quad (1.56)$$

o que é absurdo. Logo,  $f = 0$  em  $\Omega$ . Como  $\Omega$  é arbitrário, segue que  $f = 0$  em  $\Sigma$ .  $\square$

### 1.3 Superfícies Mínimas

No caso particular em que  $H = 0$ , dizemos que  $\Sigma$  é uma *superfície mínima*. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1.3.1** (Gráficos Mínimos). *A partir da parametrização usual de um gráfico dada no exemplo 1.2.1 acima, os coeficientes das formas 1° e 2° fundamentais são*

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2, \quad e = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad f = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad g = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Logo, a equação (1.11) implica em

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2} = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} + (1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy}}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_x + \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_y = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right). \end{aligned}$$

Portanto, o gráfico de  $f$  é uma superfície mínima se, e somente se,

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0. \quad (1.57)$$

A igualdade (1.57) é chamada equação das superfícies mínimas na forma divergente, e é equivalente a

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + (1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} = 0, \quad (1.58)$$

também chamada equação das superfícies mínimas.

**Exemplo 1.3.2** (Plano). Como pode ser verificado diretamente, a função  $f(x, y) = ax + by + c$ , definida em todo  $\mathbb{R}^2$  para quaisquer  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , satisfaz a equação (1.58), e portanto, seu gráfico, um plano, é uma superfície mínima.

A recíproca a este fato é verdadeira, e é o conteúdo do teorema de Bernstein:

**Teorema 1.4** (Bernstein). Se uma superfície mínima  $\Sigma$  é gráfico de uma função  $f$  definida em todo  $\mathbb{R}^2$ , então  $\Sigma$  é um plano.

Uma versão mais geral deste teorema será apresentada no próximo capítulo, como consequência do teorema de Do Carmo - Peng.

**Exemplo 1.3.3** (Catenoide). O catenoide é a única superfície mínima de revolução. A menos de homotetias, rotações e translações, pode ser obtido rotacionando o gráfico de  $y = \cosh z$  em torno do eixo  $z$  (ver figura 1.1). Nestas condições, uma parametrização do catenoide seria

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u).$$

Logo,

$$\varphi_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1), \quad \varphi_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0),$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u),$$

$$N = (-\operatorname{sech} u \cos v, -\operatorname{sech} u \sin v, \operatorname{tgh} u), \quad \varphi_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0),$$

$$\varphi_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0), \quad \varphi_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são:  $E = G = \cosh^2 u$  e  $F = 0$ .

Tendo em vista que

$$e = \langle \varphi_u, W_p(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, -dN_p(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = -1,$$

de maneira semelhante obtemos  $f = 0$  e  $g = 1$  como os coeficientes da segunda forma fundamental. Da equação (1.11) resulta que

$$H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Portanto, o catenoide é uma superfície mínima.

**Exemplo 1.3.4** (Helicoide). *O helicoide é uma superfície regrada (isto é, formado pela “união” de retas) que, a menos de homotetias, rotações e translações, pode ser obtido a partir da hélice  $\gamma(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$ : as retas que compõe o helicoide são determinadas por cada ponto de  $\gamma$  e sua projeção ortogonal no eixo  $z$ . Nestes termos, uma parametrização do helicoide é*

$$\psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

Cálculos análogos aos do exemplo 1.3.3 mostram que a equação (1.11) implica em  $H = 0$ .

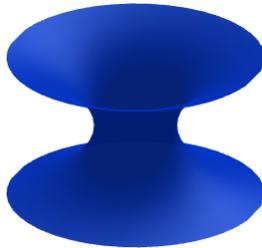


Figura 1.1: Catenoide



Figura 1.2: Helicoide

No mesmo espírito do teorema 1.3, temos a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

**Teorema 1.5.** *Nos termos da seção 1.2.1, a superfície  $\Sigma$  (ou a imersão  $\phi$ ) é **mínima** se, e somente se, para cada domínio relativamente compacto  $\Omega \subset \Sigma$  de fronteira suave,  $A'(0) = 0$  para toda variação de  $\Omega$  que fixa o bordo.*

*Demonstração.* Se  $A'(0) = 0$  para toda variação que fixa o bordo, tomamos uma função real  $u$  tal que  $u = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $u > 0$  em  $\text{Int}(\Omega)$ . A variação  $\Phi(t, p) = \phi(p) + tu(p)H(p)N(p)$  fixa o bordo e é tal que  $L = uHN$ . Assim,

$$0 = A'(0) = \int_{\Omega} \langle 2HN, L \rangle d\Sigma = \int_{\Omega} \langle 2HN, uHN \rangle d\Sigma = \int_{\Omega} 2uH^2 d\Sigma. \quad (1.59)$$

Como  $u > 0$  em  $\text{Int}(\Omega)$ , segue que  $H = 0$  em  $\Omega$ . A recíproca é imediata.  $\square$

Vemos assim que as Superfícies Mínimas são pontos críticos do funcional área definido em 1.2.1. Dentre tais pontos críticos, destacam-se os pontos de mínimo: uma superfície  $\Sigma$  é um *minimizante de área* se, para cada região  $R$  em  $\Sigma$ , a área de  $R$  é menor ou igual a área de qualquer outra porção de superfície  $R'$  que tenha o mesmo bordo que  $R$  (isto é,  $\partial R = \partial R'$ ). O exemplo abaixo mostra que nem todas superfícies mínimas são minimizantes de área no sentido acima exposto, embora o teorema 1.5 garanta que a recíproca seja verdadeira.

**Exemplo 1.3.5** (Mínima não minimizante de área). *Tendo em mente o exemplo 1.3.3 do catenoide, fixemos  $a > 0$  e seja  $b = \cosh a$ . Seja  $\Sigma$  a porção do catenoide tal que  $|z| \leq a$ . Temos  $\partial\Sigma = C^+ \cup C^-$ , onde  $C^\pm$  são os círculos de raio  $b$  contidos nos planos  $z = \pm a$  centrados no eixo  $z$ . Obviamente, tais planos contêm os discos  $x^2 + y^2 \leq b^2$ . Seja  $\Sigma'$  a superfície formada por estes discos. A área de  $\Sigma'$  é  $A(\Sigma') = 2\pi b^2 = 2\pi \cosh^2 a$ . Por outro lado, a área de  $\Sigma$  é*

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a (EG - F^2)^{1/2} dudv = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a \cosh^2 u dudv = 2\pi(a + \sinh a \cosh a).$$

Logo,  $\Sigma$  não é um minimizante de área se

$$A(\Sigma') < A(\Sigma) \Leftrightarrow 2\pi \cosh^2 a < 2\pi(a + \sinh a \cosh a) \Leftrightarrow 1 + e^{-2a} < 2a.$$

Os gráficos das funções reais  $j(a) = 1 + e^{-2a}$  e  $h(a) = 2a$  se intersectam em único ponto  $a_0 > 0$ . Ver figura 1.3. Se  $a > a_0$ , então  $\Sigma$  não é um minimizante de área.

Veremos no exemplo 2.3.6 uma porção do catenoide cujos subdomínios são minimizantes de área. Mostramos ainda no exemplo 3.2.1 uma homotetia de tal porção chamada *catenoide crítico*.

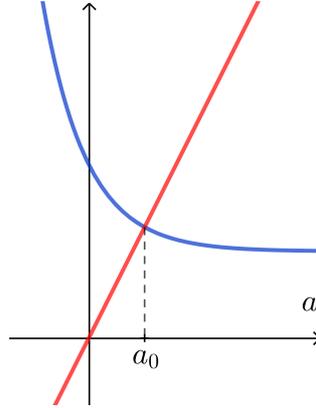


Figura 1.3: Gráficos das funções reais  $j(a) = 1 + e^{-2a}$  e  $h(a) = 2a$

### Superfícies mínimas são minimizantes locais

Consideramos aqui as notações e ideias estabelecidas nos exemplos 1.2.1 e 1.3.1. Objetivamos mostrar que gráficos mínimos são minimizantes de área (proposição 1.3.1) e assim concluir que, pelo menos em pequenas vizinhanças, superfícies mínimas são minimizantes, já que toda superfície é localmente um gráfico.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $\Omega$  o gráfico de  $f$ . Considere a 2-forma  $\omega$  definida em  $\Omega \times \mathbb{R}$  tal que, para  $X, Y \in \mathbb{R}^3$ , tem-se

$$\omega(X, Y) = \det(X, Y, N). \quad (1.60)$$

O fato de ser  $\omega$  uma forma bilinear alternada implica que seu conhecimento na base canônica do  $\mathbb{R}^3$  a determina completamente. Assim,

$$\omega(e_1, e_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad \omega(e_2, e_3) = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad \omega(e_1, e_3) = \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Logo,

$$\omega = \frac{dx \wedge dy - f_x dy \wedge dz + f_y dx \wedge dz}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad (1.61)$$

o que implica em

$$d\omega = \left[ 0 - \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_x - \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_y \right] dx \wedge dy \wedge dz. \quad (1.62)$$

De acordo com a equação (1.57), se  $f$  satisfaz a equação das superfícies mínimas, então  $d\omega = 0$ , ou seja, a forma  $\omega$  é fechada. Além disso, para quaisquer pares de vetores ortonormais  $X, Y \in \mathbb{R}^3$  no ponto  $(x, y, z)$ , temos

$$|\omega(X, Y)| \leq 1, \quad (1.63)$$

onde a igualdade é verdadeira se, e somente se,  $X, Y \in T_{(x,y,f(x,y))}\Omega$ , tendo em vista que  $|\omega(X, Y)|$  determina o volume do paralelepípedo formado pelo triedro  $(X, Y, N)$ .

**Proposição 1.3.1.** *Seja  $U$  um conjunto convexo. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a equação das superfícies mínimas e  $S \subset U \times \mathbb{R}$  é qualquer outra superfície com  $\partial S = \partial\Omega$ , então*

$$A(\Omega) \leq A(S). \quad (1.64)$$

*Demonstração.* Como  $U \times \mathbb{R}$  é convexo, toda forma fechada é também exata neste conjunto (p. 278-280, de [13]). Assim, existe uma 1-forma  $\lambda$  tal que  $d\lambda = \omega$ . Pelo teorema de Stokes, segue que

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\lambda = \int_{\partial\Omega} \lambda = \int_{\partial S} \lambda = \int_S d\lambda = \int_S \omega. \quad (1.65)$$

Combinando isto com (1.63) (e a observação que a segue), tem-se

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \omega = \int_S \omega \leq \int_S dS = A(S). \quad (1.66)$$

□

Em uma vizinhança convexa  $U \subset T_p\Sigma$  suficientemente pequena, podemos definir uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $V \subset \Sigma$  é o gráfico de  $f$ . Assim, toda superfície é localmente um gráfico sobre seu plano tangente. Da proposição 1.3.1 segue que gráficos mínimos são minimizantes. Portanto, toda superfície mínima é localmente um minimizante de área.

# Capítulo 2

## Estabilidade

No capítulo anterior, motivamos o estudo das superfícies CMC a partir do problema de Plateau e experimentos com películas de sabão. Isto conduziu à caracterização das superfícies CMC como pontos críticos do funcional área para toda variação que fixa o bordo e preserva volume. No estudo clássico de variações, é natural a pergunta sobre quais pontos críticos são de fato mínimos relativos. As soluções a esta questão possuem como característica segundas derivadas não negativas. Dentre tais soluções, destacam-se as que podem ser produzidas experimentalmente, como a esfera, sendo assim chamadas *estáveis*.

Neste capítulo, mostraremos que, a partir de uma analogia com o método dos multiplicadores de Lagrange, existe ainda uma outra caracterização para superfícies CMC obtida a partir de variações que não necessariamente preservam volume. O estudo de segundas derivadas para tais variações conduzirá a noção de *estabilidade forte*. Veremos no próximo capítulo, no teorema de Do Carmo - Peng, que o plano é a única superfície completa, CMC e fortemente estável. Entretanto, se  $H \neq 0$  e supormos apenas estabilidade, ao invés de estabilidade forte, o teorema de Barbosa - do Carmo nos assegura que as esferas são as únicas superfícies completas, CMC e estáveis.

## 2.1 Noções de Estabilidade

Inicialmente, descrevemos a outra caracterização para superfícies de curvatura média constante. Dada uma variação  $\Phi$  (que não necessariamente preserva volume) e um número real  $\lambda$ , definimos o funcional  $J_\lambda$  por

$$J_\lambda(t) = A(t) - 2\lambda V(t). \quad (2.1)$$

Os teoremas 1.1 e 1.2 implicam então em

$$J'_\lambda(0) = -2 \int_\Omega H \langle N, L \rangle d\Sigma - 2\lambda \int_\Omega \langle N, L \rangle d\Sigma = -2 \int_\Omega (H - \lambda) \langle N, L \rangle d\Sigma. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.1.** *Seja  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão.  $\Sigma$  tem curvatura média constante  $H$  se, e somente se,  $J'_H(0) = 0$  para cada domínio  $\Omega \subset \Sigma$  relativamente compacto de fronteira suave e para toda variação  $\Phi$  de  $\Omega$  que fixa  $\partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Se  $H$  é constante, tomamos  $\lambda = H$  em (2.2). Reciprocamente, assumimos que exista  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $J'_\lambda(0) = 0$  para toda variação que fixa o bordo de  $\Omega$ . Em particular, isto é verdadeiro para toda variação que preserva volume. Considerando tais variações, como  $\lambda$  é constante, segue que

$$0 = J'_\lambda(0) = A'(0) - 2\lambda V'(0) = A'(0).$$

Logo,  $A'(0) = 0$  para toda variação que fixa o bordo e preserva volume. Portanto, o teorema 1.3 implica que  $\Sigma$  tem curvatura média constante.  $\square$

Conforme mencionado na introdução do capítulo, dentre todos os pontos críticos, são de particular interesse aqueles que são mínimos relativos. Para uma superfície que é um mínimo local, sabe-se que  $A''(0)$  é não negativo. Como cada um dos teoremas 1.3 e 2.1 fornece uma diferente caracterização das superfícies CMC, temos duas diferentes noções de estabilidade:

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\Sigma$  uma superfície de curvatura média constante  $H$ ,  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão e  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto de fronteira suave  $\partial\Omega$ . Assim:*

- O domínio  $\Omega$  é chamado estável se  $A''(0) \geq 0$  para toda variação que preserva volume e fixa  $\partial\Omega$ ;
- O domínio  $\Omega$  é chamado fortemente estável se  $J_H''(0) \geq 0$  para toda variação que fixa  $\partial\Omega$ .

A superfície  $\Sigma$ , ou a imersão  $\phi$ , é chamada (fortemente) estável se todo  $\Omega \subset \Sigma$  é (fortemente) estável.

Observamos que se a condição  $J_H''(0) \geq 0$  é válida para toda variação que fixa o bordo, em particular isto é verdadeiro para variações que preservam volume, nas quais temos  $V'(t) = 0$ . Logo,  $J_H''(0) = A''(0) - 2HV''(0) = A''(0)$ . Portanto, segue desta definição que estabilidade forte implica em estabilidade. Como veremos nos exemplos 2.3.2 e 2.3.3, a esfera é o principal exemplo que mostra que a recíproca não é verdadeira.

Intuitivamente, a definição 2.1.1 nos diz que uma superfície é estável se qualquer pequena perturbação não pode diminuir sua área sem alterar seu volume. Por outro lado, se uma superfície é fortemente estável, então nenhuma perturbação diminui sua área, independente do que aconteça com o volume. Tendo isto em mente, podemos ver que faz sentido esferas serem estáveis, já que são soluções do problema isoperimétrico. Entretanto, ao tomarmos uma família de esferas concêntricas, estamos produzindo uma variação que diminui a área. Logo, esferas não são fortemente estáveis.

Se pensarmos, porém, em um plano, nossa intuição nos diz que é impossível deformá-lo sem aumentar sua área. O mesmo também deve ocorrer com qualquer gráfico mínimo. O próximo exemplo nos diz que é correto tal pensamento:

**Exemplo 2.1.1** (Gráficos mínimos são fortemente estáveis). *Do que vimos na seção 1.3, gráficos mínimos são minimizantes de área para quaisquer variações, logo  $A''(0) \geq 0$ . Como em superfícies mínimas  $H = 0$ , segue que  $J_H(t) = A(t)$ . Logo,  $J_H''(0) \geq 0$ . Portanto, tais superfícies são fortemente estáveis.*

Outros exemplos de superfícies estáveis e fortemente estáveis serão apresentados após obtermos uma expressão para  $A''(0)$ , o que será feito na próxima seção.

## 2.2 Segunda Variação da Área

Iniciamos com alguns lemas que, além de facilitarem a demonstração do principal resultado desta seção, serão utilizados na demonstração do teorema de Barbosa - do Carmo. Consideramos aqui as hipóteses e notações estabelecidas na seção 1.2.1.

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão,  $N$  um campo normal unitário em  $\Sigma$  e  $|\Pi|$  a norma da segunda forma fundamental associada a  $N$ . Seja  $\{e_1, e_2\}$  um referencial ortonormal em  $\Sigma$ , o qual identificamos com sua extensão a uma vizinhança do  $\mathbb{R}^3$ . Com isso, é verdadeira a identidade*

$$\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = -|\Pi|^2. \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Como  $\langle N, N \rangle = 1$ , segue que  $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$ . Portanto,

$$\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = - \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \quad (2.4)$$

$$= - \sum_i \langle \sum_j \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j, \sum_k \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle e_k \rangle \quad (2.5)$$

$$= - \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 = -k_1^2 - k_2^2 = -|\Pi|^2. \quad (2.6)$$

□

**Lema 2.2.2.** *Sejam  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto de fronteira suave  $\partial\Omega$  e  $\Phi : I \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma variação normal de  $\Omega$ . Se  $H(t)$  é a curvatura média de  $\Sigma_t = \Phi(t, \Sigma)$  e  $f = \langle L, N \rangle$ , então a função  $H$  é diferenciável e*

$$2H'(0) = \Delta f + |\Pi|^2 f. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Da equação (1.8), resulta  $2H = \langle 2HN, N \rangle = \langle \vec{H}, N \rangle$ . A partir das ideias que levam à dedução das equações (1.9) e (1.11), podemos concluir que, para qualquer  $t \in I$ ,

$$\vec{H}(t) = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(t) (\bar{\nabla}_{e_i^t} e_j^t)^N. \quad (2.8)$$

Logo,

$$2H'(0) = \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{H}, N \rangle|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} |_{t=0} \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle + \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(0) \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j^t, N \rangle|_{t=0}, \quad (2.9)$$

Como

$$\sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow \sum_k \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} g_{kj} = - \sum_k g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial t},$$

e em  $t = 0$  temos  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ , segue que, em um ponto  $p \in \Sigma$  dado, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} &= - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \langle e_i, e_j \rangle = - \langle \bar{\nabla}_L e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \bar{\nabla}_L e_j \rangle = - \langle \bar{\nabla}_{e_i} L, e_j \rangle - \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} L \rangle = \\ &= -e_i(\langle L, e_j \rangle) + \langle L, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle - e_j(\langle L, e_i \rangle) + \langle L, \bar{\nabla}_{e_j} e_i \rangle = 2 \langle L, \bar{\nabla}_{e_j} e_i \rangle = 2f \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle, \end{aligned}$$

pois  $[e_i, e_j] = 0$  e  $L = fN$ . Logo, de acordo com (1.5), a primeira parcela de (2.9) é

$$2f \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle^2 = 2f |\Pi|^2. \quad (2.10)$$

Para a segunda parcela de (2.9),

$$\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(0) \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j^t, N \rangle|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\partial t} \bar{\nabla}_{e_i} e_j^t, N \rangle|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_L \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle. \quad (2.11)$$

Assim, utilizando a definição do tensor de curvatura  $R$  de  $\mathbb{R}^3$ , o fato de que  $[L, e_i] = 0^1$ , e que  $R(e_i, L)e_j = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_L \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_L e_i, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} L, N \rangle = e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} L, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} L, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= e_i \langle e_i(f)N + f \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle - \langle e_i(f)N + f \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= e_i(e_i(f)) - f \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = e_i(e_i(f)) + f \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle. \end{aligned}$$

A partir do lema 2.2.1, obtemos

$$\sum_i \langle \bar{\nabla}_L \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = \Delta f - |\Pi|^2 f. \quad (2.12)$$

Somando a (2.10), obtemos a expressão desejada para (2.9).  $\square$

<sup>1</sup>Ver parágrafo subsequente a equação (1.28).

Observamos que, para variações que preservam volume, temos  $V'(t) = 0$ . Logo,  $J_H''(0) = A''(0) - 2HV''(0) = A''(0)$ . Assim, determinaremos inicialmente  $J_H''(0)$  para variações normais, obtendo posteriormente uma expressão para  $A''(0)$  para variações que preservam volume. Uma prova em contexto mais geral pode ser encontrada em [1] ou [5].

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto de fronteira suave  $\partial\Omega$  e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H$ . Seja  $\Phi : I \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma variação normal de  $\Omega$  que fixa  $\partial\Omega$ . Se  $f = \langle L, N \rangle$ , então*

$$J_H''(0) = - \int_{\Omega} f \Delta f + f^2 |\Pi|^2 d\Sigma. \quad (2.13)$$

*Demonstração.* Os teoremas 1.1 e 1.2 aplicados a cada  $\Sigma_t$ , aliados a definição de  $J_H$  e a equação (2.2), implicam em

$$J_H'(t) = -2 \int_{\Omega} (H(t) - H) f(t) d\Sigma_t, \quad (2.14)$$

onde  $f(t) = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t), N(t) \rangle$ . Assim, a segunda derivada de  $J_H$  é

$$J_H''(t) = -2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [H(t) - H] f(t) d\Sigma_t - 2 \int_{\Omega} (H(t) - H) \frac{\partial}{\partial t} [f(t) d\Sigma_t]. \quad (2.15)$$

Em  $t = 0$ ,  $H(0) = H$  é constante. Logo, de acordo com o lema 2.2.2,

$$J_H''(0) = - \int_{\Omega} 2H'(0) f d\Sigma = - \int_{\Omega} f \Delta f + f^2 |\Pi|^2 d\Sigma. \quad (2.16)$$

□

**Teorema 2.2** (Segunda Variação da Área). *Sejam  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto de fronteira suave  $\partial\Omega$  e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de média constante  $H$ . Seja  $\Phi : I \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma variação normal de  $\Omega$  que fixa  $\partial\Omega$  e preserva volume. Então,*

$$A''(0) = - \int_{\Omega} f \Delta f + f^2 |\Pi|^2 d\Sigma. \quad (2.17)$$

*Demonstração.* Para variações que preservam volume, temos  $V'(t) = 0$ . Logo,  $J_H''(0) = A''(0) - 2HV''(0) = A''(0)$ . □

## 2.3 Superfícies Estáveis

A regra de Leibniz para o divergente, equação (1.16), implica que  $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + |\nabla f|^2$ . Se  $f \in C^\infty(\Omega)$  e  $f = 0$  em  $\partial\Omega$ , podemos transformar a expressão de  $A''(0)$ , a partir do teorema da divergência, em

$$A''(0) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f\nabla f) d\Sigma + \int_{\Omega} |\nabla f|^2 - f^2|\Pi|^2 d\Sigma = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 - f^2|\Pi|^2 d\Sigma. \quad (2.18)$$

Isto nos permite a interpretação da expressão de  $A''(0)$  como uma forma quadrática  $\mathcal{I}$  agindo no espaço de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$ , o fecho do espaço  $C_K^\infty(\Omega)$  com a norma  $L^2$  mais a norma  $L^2$  do gradiente da função:

$$\mathcal{I} : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 - f^2|\Pi|^2 d\Sigma,$$

onde, neste contexto,  $\nabla f$  representa o gradiente fraco de  $f$ . Assim, diremos que o domínio  $\Omega \subset \Sigma$  é:

- *Estável* se  $\mathcal{I}(f) \geq 0$  para toda  $f \in W^{1,2}(\Omega)$  tal que  $\int_{\Omega} f = 0$ ;
- *Fortemente estável* se  $\mathcal{I}(f) \geq 0$  para toda  $f \in W^{1,2}(\Omega)$ ;

**Exemplo 2.3.1** (Planos são fortemente estáveis). *Apesar disto também ser consequência direta dos exemplos 1.3.2 e 2.1.1, podemos verificar este fato a partir da forma  $\mathcal{I}$ : de fato, se  $\Sigma$  é um plano e  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio, então como as curvaturas principais de  $\Sigma$  são nulas, logo  $|\Pi|^2 = 0$ . Portanto, para toda  $f \in W^{1,2}(\Omega)$ , temos  $\mathcal{I}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Sigma \geq 0$ .*

**Exemplo 2.3.2** (Esferas são estáveis). *Por simplicidade, consideramos a esfera  $\mathbb{S}^2$ . Seja  $\Omega \subset \mathbb{S}^2$  um domínio, e  $f \in W^{1,2}(\Omega)$  tal que  $\int_{\Omega} f d\mathbb{S}^2 = 0$ . Podemos estender  $f$  a uma função  $\hat{f} \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ , tomando  $\hat{f}(p) = 0$  se  $p \in \mathbb{S}^2 - \Omega$ . Consideremos o espectro do operador laplaciano. Seja  $\lambda_2$  o segundo autovalor do problema*

$$\Delta g + \lambda g = 0, \quad \int_{\mathbb{S}^2} g d\mathbb{S}^2 = 0. \quad (2.19)$$

*O primeiro autovalor é  $\lambda_1 = 0$ , tendo as constantes como autofunções associadas. O segundo autovalor é  $\lambda_2 = 2$  [15]. De acordo com a caracterização de  $\lambda_2$  a partir do quociente*

de Rayleigh, temos

$$\lambda_2 \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla g|^2 d\mathbb{S}^2}{\int_{\mathbb{S}^2} g^2 d\mathbb{S}^2}, \quad \forall g \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2); \int_{\mathbb{S}^2} g d\mathbb{S}^2 = 0, \quad (2.20)$$

onde a igualdade ocorre somente nas autofunções<sup>2</sup>. Como em  $\mathbb{S}^2$  temos  $|\Pi|^2 = 2 = \lambda_2$ , e (2.20) vale para  $\hat{f}$ , logo para  $f$ , segue que

$$\mathcal{I}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 - 2f^2 d\mathbb{S}^2 = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 - \lambda_2 f^2 d\mathbb{S}^2 \geq 0, \quad (2.21)$$

para toda  $f \in W^{1,2}(\Omega)$  tal que  $\int_{\Omega} f d\mathbb{S}^2 = 0$ . Portanto,  $\Omega$  é estável. Como  $\Omega$  é arbitrário, segue  $\mathbb{S}^2$  é estável.

**Exemplo 2.3.3** (Esferas não são fortemente estáveis). Apesar deste fato ser consequência do teorema de do Carmo - Peng, mostramos as ideias da prova, baseando-nos nas notas de [8]. Assim, considere  $S$  um hemisfério e  $\Omega$  um domínio. Novamente, consideramos o espectro do operador laplaciano. Seja  $\lambda_1(S)$  o primeiro autovalor do problema  $\Delta g + \lambda g = 0$  com condição de Dirichlet  $g = 0$  em  $\partial S$ . A partir de simetrias, podemos estender qualquer autofunção de Dirichlet em  $S$  a  $\mathbb{S}^2$ . Assim, o espectro do laplaciano restrito a  $S$  será um subconjunto do espectro do laplaciano em  $\mathbb{S}^2$ . Temos  $\lambda_1(S) = 2$  [8]. Utilizamos a propriedade de monotonicidade de  $\lambda_1$  isto é, se  $G' \subsetneq G$ , então  $\lambda_1(G') > \lambda_1(G)$  [6]. Assim, se  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{S}^2$  tal que  $S \subsetneq \Omega$ , segue que  $\lambda_1(\Omega) < 2$ . Logo, se  $f$  é uma autofunção de  $\lambda_1(\Omega)$ , da caracterização de Rayleigh

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\mathbb{S}^2}{\int_{\Omega} f^2 d\mathbb{S}^2} = \lambda_1(\Omega) < 2 \implies \mathcal{I}(f) < 0. \quad (2.22)$$

Portanto,  $\Omega$  não é fortemente estável, logo  $\mathbb{S}^2$  não é fortemente estável.

**Exemplo 2.3.4** (Calotas esféricas menores ou iguais a hemisférios são fortemente estáveis).

Do exemplo anterior, segue ainda que se  $\Omega$  é uma calota esférica tal que  $\Omega \subseteq S$ , então  $\lambda_1(\Omega) \geq 2$ . Logo,

$$2 \leq \lambda_1(\Omega) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\mathbb{S}^2}{\int_{\Omega} f^2 d\mathbb{S}^2}, \quad \forall f \in W^{1,2}(\Omega). \quad (2.23)$$

Logo, como  $|\Pi|^2 = 2$  em  $\Omega$ , temos  $\mathcal{I}(f) \geq 0$ . Portanto,  $\Omega$  é fortemente estável.

---

<sup>2</sup>para ver isto, multiplicamos  $\Delta g + \lambda g = 0$  pela autofunção  $g$ , aplicamos (1.16), e integramos em  $\mathbb{S}^2$ . Resolvendo a equação resultante para  $\lambda$ , a igualdade pretendida seguirá do teorema da divergência

Nos exemplos acima percebemos que estabilidade está relacionada ao estudo do problema de autovalores associados ao operador de Jacobi  $\mathcal{L} = \Delta + |\Pi|^2$ , isto é,

$$\begin{cases} \mathcal{L}(f) + \lambda f = 0 & \text{em } \Omega, \\ f = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

O operador de Jacobi é do tipo elíptico e possui a propriedade de que seu primeiro autovalor  $\lambda_1$  pode ser caracterizado por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{-\int_{\Omega} f \mathcal{L}(f) d\Sigma}{\int_{\Omega} f^2 d\Sigma}, \forall f \in C^{\infty}(\bar{\Omega}); f = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}. \quad (2.24)$$

Assim, vemos que uma superfície é fortemente estável se, e somente se,  $\lambda_1(\Omega) \geq 0$ .

**Definição 2.3.1.** *Seja  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto de fronteira suave e  $N$  um campo normal unitário. Uma função  $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$  tal que  $\int_{\Omega} f = 0$ ,  $f = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\mathcal{L}(f) = 0$  é chamada função de Jacobi em  $\Omega$ . O campo vetorial normal  $J = fN$  é chamado campo de Jacobi.*

Observamos que a caracterização (2.24) de  $\lambda_1$  como um ínfimo também justifica sua monotonicidade com relação a inclusão. Assim, se  $\lambda_1(\Omega_1) = 0$  e  $\Omega_0 \subsetneq \Omega_1 \subsetneq \Omega_2$ , então  $\lambda_1(\Omega_0) > 0 > \lambda_1(\Omega_2)$ . Utilizamos estas ideias nos próximos exemplos. Além disso, admitimos o resultado abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em Fischer-Colbrie - Schoen [7]:

**Proposição 2.3.1.** *Sejam  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio relativamente compacto e  $\lambda_1(\Omega)$  o primeiro autovalor do operador de Jacobi  $\mathcal{L}$ , o qual age em funções  $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$  tais que  $f = 0$  em  $\partial\Omega$ . Se existe uma função positiva  $g$  tal que  $\mathcal{L}(g) = 0$  em  $\Omega$ , então  $\lambda_1(\Omega) = 0$ .*

**Exemplo 2.3.5** (Um cilindro não é estável). *Seja  $\Sigma = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Como as direções principais de  $\Sigma$  em cada ponto são tangentes a retas e circunferências de raio 1, cujas curvaturas são respectivamente 0 e 1, segue que  $\Sigma$  é uma superfície CMC com  $H = 1/2$  e  $|\Pi| = 1$ . Considerando coordenadas cartesianas  $(x, y, t)$  em  $\mathbb{R}^3$ , podemos parametrizar  $\Sigma$  por  $(\theta, t)$ , tomando  $x = \cos \theta$  e  $y = \sin \theta$ . Se  $f(\theta, t) = \sin t$ , então  $\Delta f = -\sin t$ . Logo,  $f$  satisfaz a equação*

$$\Delta f + |\Pi|^2 f = 0.$$

Seja  $\Omega_1$  o domínio limitado pelos círculos  $t = 0$  e  $t = \pi$ . Assim, como  $f(\theta, t) = \sin t$  é uma função positiva em  $\Omega_1$ , segue da proposição 2.3.1 que  $\lambda_1(\Omega_1) = 0$ , e portanto qualquer subdomínio  $\Omega_0$ , tal que  $\Omega_0 \subsetneq \Omega_1$ , é fortemente estável. Por outro lado, das considerações acima, se  $\Omega_2$  é qualquer outro domínio tal que  $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2 \subset \Sigma$ , então  $\Omega$  não é estável. Portanto,  $\Sigma = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  não é estável.

**Exemplo 2.3.6** (Catenoide crítico). Seja  $\Sigma$  o catenoide descrito no exemplo 1.3.3. Seja  $P$  um ponto em que uma reta que contém a origem  $O$  tangencia a catenária  $y = \cosh(z)$ . Consideremos então a esfera  $S$ , centrada na origem, cujo raio é a medida de  $\overline{OP}$  (ver figura 2.1). Seja  $N$  um campo unitário normal a  $\Sigma$  e seja  $X$  o campo posição  $X(p) = p$  para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ . Considere a função  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f = \langle N, X \rangle$ . Seja então  $\Omega$  a porção de  $\Sigma$  interior a  $S$ . Com a escolha conveniente da orientação de  $\Sigma$ , segue que  $f$  é positiva em  $\Omega$  e se anula em  $\partial\Omega$ , já que o campo  $X$  é tangente a  $\Sigma$  ao longo dos círculos perpendiculares ao eixo  $z$  que contêm  $P$  e seu antípoda. Porém, não é difícil mostrar que, como  $\Sigma$  é uma superfície mínima,  $f$  satisfaz a equação  $\Delta f + |\Pi|^2 f = 0$  (isso é uma consequência do Lema 3.1.3 no próximo capítulo). Logo, segue da proposição 2.3.1 que  $\lambda_1(\Omega) = 0$ , e portanto qualquer subdomínio de  $\Omega$  é fortemente estável.

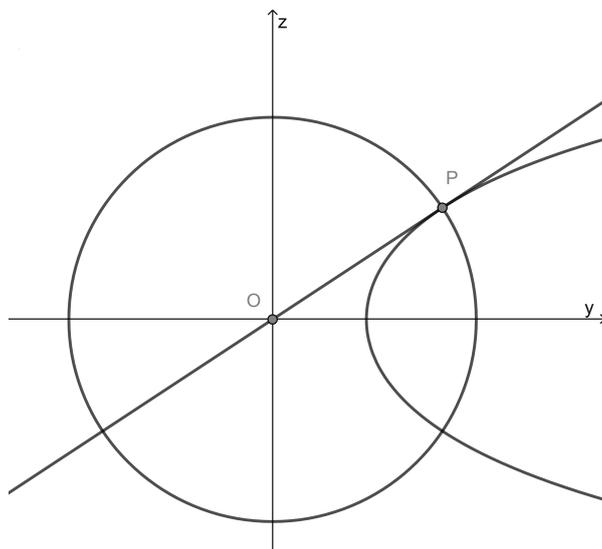


Figura 2.1: Construção do Catenoide Crítico

# Capítulo 3

## Classificação das superfícies estáveis do $\mathbb{R}^3$

Veremos neste capítulo como algumas poucas hipóteses adicionais influenciam profundamente a geometria de uma superfície estável com curvatura média constante. A primeira suposição consiste em considerarmos a classe das superfícies fechadas, isto é, superfícies compactas sem bordo. As implicações de tal suposição são discutidas na próxima seção, sendo um dos principais objetivos do trabalho. Na seção posterior apresentamos alguns resultados relacionadas, considerando o caso das superfícies mínimas, as quais não podem ser fechadas, e ainda as superfícies de fronteira livre, obtidas a partir de variações que não fixam o bordo, embora satisfaçam outras condições.

### 3.1 Teorema de Barbosa - do Carmo

Este é um teorema de classificação. Ele descreve de que tipo devem ser as superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura média constante, estáveis e fechadas. Alguns exemplos de superfícies fechadas são a *esfera*, o *toro*, e a *garrafa de Klein*.

Pensemos então em exemplos de superfícies fechadas, cuja curvatura média é a mesma em todos os seus pontos, tais que pequenas perturbações que preservam seu volume não

podem diminuir sua área. É uma tarefa árdua tentar imaginar uma superfície nestas condições que seja diferente de uma esfera. O teorema de Barbosa - do Carmo nos mostra que, de fato, isto é impossível.

**Teorema 3.1** (Barbosa - do Carmo). *Seja  $\Sigma$  fechada e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H \neq 0$ . Então  $\phi$  é estável se, e somente se,  $\phi(\Sigma)$  é uma esfera (redonda)  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .*

Este teorema, cuja demonstração será apresentada abaixo, implica que qualquer superfície CMC, não esférica, imersa em  $\mathbb{R}^3$  e fechada não é estável. Assim, para uma tal superfície existem deformações que diminuem sua área mesmo preservando seu volume. Se lembrarmos da motivação inicial das bolhas de sabão, isto quer dizer que, em um estado de equilíbrio, toda e qualquer tipo de bolha de sabão produzida tende a adotar o formato de uma esfera.

### 3.1.1 Demonstração do Teorema de Barbosa - do Carmo

Para provar o teorema 3.1, necessitamos de três lemas. O primeiro deles nos diz que o campo unitário  $N$  normal a  $\Sigma$  e as suas segundas derivadas possuem a mesma direção:

**Lema 3.1.1.** *Seja  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H$ . Dado  $p \in \Sigma$ , se  $\{e_1, e_2\}$  é um referencial ortonormal, geodésico em  $p$ , então*

$$\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = 0, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Fixe  $k \in \{1, 2\}$ . Como  $\langle N, e_k \rangle = 0$ , obtemos  $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle$ . Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle - \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle. \quad (3.2)$$

Como  $\bar{\nabla}_{e_i} N$  é tangente a  $\Sigma$  e  $\bar{\nabla}_{e_i} e_k(p)$  é normal, já que o referencial é geodésico em  $p$ , temos  $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = 0$ , e daí

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p), \quad (3.3)$$

onde a última igualdade segue da simetria da conexão  $\bar{\nabla}$ , isto é,  $\bar{\nabla}_{e_i}e_j - \bar{\nabla}_{e_j}e_i = [e_i, e_j] = 0$ . Isto, aliado ao fato de que em  $\mathbb{R}^3$  o tensor de curvatura  $R$  satisfaz  $R(e_i, e_k)e_i = 0$ , implica ainda em

$$\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_k}e_i(p) = \bar{\nabla}_{e_k}\bar{\nabla}_{e_i}e_i(p). \quad (3.4)$$

Logo,

$$\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}N, e_k \rangle(p) = - \sum_i \langle N, \bar{\nabla}_{e_k}\bar{\nabla}_{e_i}e_i \rangle(p) = - \langle N, \bar{\nabla}_{e_k}(\sum_i \bar{\nabla}_{e_i}e_i) \rangle(p). \quad (3.5)$$

Finalmente, como  $2H = \langle N, \sum_i \bar{\nabla}_{e_i}e_i \rangle$  é constante, segue que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k}N, \sum_i \bar{\nabla}_{e_i}e_i \rangle(p) = - \langle N, \bar{\nabla}_{e_k}(\sum_i \bar{\nabla}_{e_i}e_i) \rangle(p). \quad (3.6)$$

Portanto,

$$\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}N, e_k \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_{e_k}N, \sum_i \bar{\nabla}_{e_i}e_i \rangle(p) = 0, \quad (3.7)$$

já que os dois últimos termos são ortogonais, tendo em vista que  $\bar{\nabla}_{e_k}N$  é tangente e do referencial ser geodésico segue  $(\bar{\nabla}_{e_i}e_i)(p) = (\bar{\nabla}_{e_i}e_i - \nabla_{e_i}e_i)(p)$  é normal.  $\square$

O lema abaixo fornece uma maneira de encontrar soluções para a equação de Jacobi  $\mathcal{L}(f) = 0$ .

**Lema 3.1.2.** *Seja  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante,  $N$  um campo unitário normal a  $\Sigma$  e  $P \in \mathbb{R}^3$  um vetor fixado. A função  $f = \langle P, N \rangle$  satisfaz  $\Delta f + |\Pi|^2 f = 0$ .*

*Demonstração.* Se  $\{e_1, e_2\}$  é um referencial ortonormal, geodésico em  $p \in \Sigma$ , então o laplaciano  $\Delta$  em  $p$  é dado por  $\Delta f(p) = \sum_i e_i e_i f(p)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= \sum_i e_i e_i \langle P, N \rangle(p) = \sum_i \langle P, \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}N \rangle(p) \\ &= \sum_i \langle \langle P, N \rangle N + \sum_k \langle P, e_k \rangle e_k, \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}N \rangle(p). \end{aligned}$$

Dos lemas 2.2.1 e 3.1.1 segue que

$$\Delta f(p) = \langle P, N \rangle \sum_i \langle N, \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}N \rangle(p) = - \langle P, N \rangle |\Pi|^2(p) = - |\Pi|^2 f(p). \quad (3.8)$$

$\square$

**Lema 3.1.3.** *Seja  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H$  e  $N$  um campo unitário normal a  $\Sigma$ . A função  $g = \langle \phi, N \rangle$  satisfaz  $\Delta g = -2H - |\Pi|^2 g$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, e_2\}$  é um referencial geodésico em  $p \in \Sigma$ . Como  $\bar{\nabla}_{e_i} \phi = e_i$  e  $\langle e_i, N \rangle = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta g(p) &= \sum_i e_i e_i \langle \phi, N \rangle(p) = \sum_i e_i [\langle \bar{\nabla}_{e_i} \phi, N \rangle + \langle \phi, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle](p) \\ &= \sum_i [\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle \phi, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle](p) \\ &= -\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle(p) + \sum_i \langle \phi, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p) \\ &= -\langle \vec{H}, N \rangle(p) + \langle \phi, N \rangle \sum_i \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle(p). \end{aligned}$$

Portanto, da definição de  $\vec{H}$  e do lema 2.2.1 seque que

$$\Delta g(p) = -2H - |\Pi|^2 g(p). \quad (3.9)$$

□

Estamos então em condições de apresentar uma prova do principal resultado desta seção:

*Demonstração do Teorema de Barbosa - do Carmo.* O exemplo 2.3.2 mostra que esferas são estáveis. Reciprocamente, suponhamos que  $\Sigma$  seja fechada e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H \neq 0$ , orientada segundo um campo normal unitário  $N$ . Segue da fórmula de Minkowski, equação (1.23), que a função  $g = \langle \phi, N \rangle$  satisfaz

$$\int_{\Sigma} (1 + Hg) d\Sigma = 0. \quad (3.10)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.9) pela constante  $H$  e integrando em  $\Sigma$ , temos

$$H \int_{\Sigma} \Delta g d\Sigma = \int_{\Sigma} -2H^2 - |\Pi|^2 Hg d\Sigma. \quad (3.11)$$

Pelo teorema da divergência, o membro esquerdo de (3.11) é nulo, pois  $\Sigma$  é fechada. Logo,

$$2H^2 \int_{\Sigma} d\Sigma = - \int_{\Sigma} |\Pi|^2 Hg d\Sigma. \quad (3.12)$$

Seja  $f = 1 + Hg$ . A equação (3.10) implica que  $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ . Consideramos uma variação normal cujo campo variacional é  $L = fN$ . Assim,

$$A''(0) = \int_{\Sigma} -f\Delta f - |\Pi|^2 f^2 d\Sigma. \quad (3.13)$$

A partir do lema 3.1.3, temos

$$\begin{aligned} -f\Delta f - |\Pi|^2 f^2 &= -H(gH + 1)\Delta g - |\Pi|^2(gH + 1)^2 \\ &= -H(gH + 1)(-2H - |\Pi|^2 g) - |\Pi|^2(g^2 H^2 + 2gH + 1) \\ &= 2H^2 f - |\Pi|^2 f. \end{aligned}$$

Como  $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ , segue que

$$A''(0) = - \int_{\Sigma} |\Pi|^2 (Hg + 1) d\Sigma. \quad (3.14)$$

Como  $\phi$  é estável,  $A''(0) \geq 0$ . Segue, portanto, das equações (3.12), (3.14) e (1.14) que

$$2H^2 \int_{\Sigma} d\Sigma = - \int_{\Sigma} |\Pi|^2 Hg d\Sigma \geq \int_{\Sigma} |\Pi|^2 d\Sigma \geq \int_{\Sigma} 2H^2 d\Sigma. \quad (3.15)$$

Logo,  $|\Pi|^2 = 2H^2$ . Da observação subsequente a equação (1.14), segue que todos os pontos de  $\phi(\Sigma)$  são umbílicos. Como  $\Sigma$  é fechada, segue que é uma esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .  $\square$

Observamos que o teorema 3.1 continua válido se substituirmos a hipótese de fechada por completa<sup>1</sup>. Esse resultado foi demonstrado por A. da Silveira cerca de dois anos depois da publicação do resultado 3.1 de Barbosa - do Carmo. Ver teorema 3.3.

## 3.2 Alguns Resultados Relacionados

Nesta seção apresentamos alguns resultados diretamente relacionados ao Teorema de Barbosa - do Carmo. Devido ao fato das provas de tais resultados estarem baseadas na teoria de Superfícies de Riemann, na qual as imersões são tomadas juntamente com sua estrutura complexa, dentre outros assuntos não abordados neste trabalho, não apresentamos demonstrações aqui. Referências são dadas em cada caso.

---

<sup>1</sup>Ver definição 3.2.1.

### 3.2.1 Teorema de do Carmo - Peng

O leitor atento deve ter questionado sobre a validade do teorema 3.1 quando  $H = 0$ . De fato, existe uma versão semelhante, a partir da qual nomeamos esta seção, porém precisamos nos atentar sobre as hipóteses tomadas. O primeiro ponto de atenção é que uma superfície mínima não pode ser fechada, pois toda superfície fechada em  $\mathbb{R}^3$  apresenta pelo menos um ponto elíptico, isto é, um ponto cuja curvatura gaussiana  $K = k_1 k_2$  é positiva. Logo,  $k_1 k_2 > 0 \Rightarrow H = (k_1 + k_2)/2 \neq 0$ , o que é absurdo. Assim, não podemos supor que uma superfície mínima seja fechada. Entretanto, superfícies fechadas fazem parte de uma classe bem maior de superfícies: as completas. Intuitivamente, uma superfície completa é aquela que não apresenta “furos” ou fronteiras. Mais precisamente,

**Definição 3.2.1.** *Uma superfície  $\Sigma$  é completa se, para todo  $p \in \Sigma$ , as geodésicas que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

Isto também significa que se  $\Sigma$  é completa então quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por geodésicas minimizantes de distância. É isto que queremos dizer com “ $\Sigma$  não apresenta furos”. Além disso, para todo  $p \in \Sigma$ , nenhuma geodésica partindo de  $p$  pode atingir um ponto de fronteira. O fato de superfícies fechadas serem completas é consequência do teorema de Hopf - Rinow (ver [3], p. 165).

Alguns exemplos de superfícies mínimas completas são o catenoide e o helicoides (exemplos 1.3.3 e 1.3.4). Entretanto, pode-se mostrar que estes exemplos não são estáveis. E mesmo no caso dos gráficos mínimos, que são fortemente estáveis (exemplo 2.1.1), se considerarmos aqueles que são também completos, não temos muitas possibilidades.

De fato, a lista de superfícies mínimas, completas e fortemente estáveis é esgotada com o teorema de do Carmo - Peng [4], também provado de forma independente por Fischer-Colbrie - Schoen [7] e Pogorelov [10].

**Teorema 3.2** (do Carmo - Peng). *Seja  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão completa, fortemente estável, com curvatura constante  $H \geq 0$  e orientável. Então  $H = 0$  e  $\phi(\Sigma)$  é um plano.*

Como consequência deste teorema, e do fato de gráficos mínimos serem fortemente

estáveis (exemplo 2.1.1), temos a seguinte generalização do Teorema de Bernstein, teorema 1.4:

**Corolário 3.2.1.** *Se uma superfície  $\Sigma$  é um gráfico mínimo completo sobre um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , então  $\Omega = \mathbb{R}^2$  e  $\Sigma$  é um plano.*

Os teoremas de do Carmo - Peng 3.2 e de Barbosa - do Carmo 3.1 fornecem então classificações para o plano e para esfera. O teorema 3.2 pode ser ainda generalizado considerando a hipótese de estabilidade, hipótese mais fraca que estabilidade forte. De fato, isto foi alcançado por A. da Silveira em 1986, no teorema 1.3 de [14]:

**Teorema 3.3** (da Silveira). *Uma superfície CMC, imersa em  $\mathbb{R}^3$ , completa, não compacta e estável é um plano.*

Na próxima seção apresentamos um resultado de classificação das superfícies umbílicas no contexto das superfícies de fronteira livre.

### 3.2.2 Superfícies CMC de Fronteira Livre

Constatamos que superfícies CMC são soluções de um problema variacional, sendo caracterizadas como pontos críticos do funcional área para variações que preservam o volume e fixam o bordo. Mostramos aqui algumas implicações do abandono desta última condição.

Mais especificamente, dado um domínio suave, convexo e compacto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , de fronteira não vazia, estaremos interessados no estudo dos pontos críticos do funcional área para todas as superfícies  $\Sigma$  que dividem  $\mathcal{D}$  em duas regiões de volumes pré-determinados, tais que  $\text{Int}\Sigma \subset \text{Int}\mathcal{D}$  e  $\partial\Sigma \subset \partial\mathcal{D}$ . Neste contexto, de acordo com [12], tal reformulação é frequentemente referida como o *problema da partição para corpos convexos*. As superfícies que são pontos críticos deste problema intersectam  $\partial\mathcal{D}$  ortogonalmente. Além disso, possuem curvatura média constante, sendo portanto chamadas de *superfícies CMC de fronteira livre*. Como habitual, destacam-se dentre tais superfícies aquelas que são minimizantes de área. Assim, são chamadas *estáveis* as superfícies CMC de fronteira livre que possuem segunda

derivada da área não negativa para todas as variações que preservam volume. Definições precisas são dadas a seguir.

### Ideias Iniciais

Na dedução da fórmula da primeira variação da área, teorema 1.1, observamos que a hipótese da variação fixar o bordo foi utilizada somente para mostrar que a segunda integral em (1.33) é nula para tais variações. Descartando tal restrição, obtemos para quaisquer variações

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} H \langle N, L \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n}, L \rangle ds, \quad (3.16)$$

observando que o vetor exterior unitário  $\mathbf{n}$  normal a  $\partial\Omega$  é tangente à  $\Sigma$ , logo  $\langle L^\perp, \mathbf{n} \rangle = 0$ .

Consideremos então um domínio suave, convexo e compacto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , e seja  $\eta$  o campo vetorial normal unitário ao longo de  $\partial\mathcal{D}$  que aponta para dentro. Seja  $\Pi^{\partial\mathcal{D}}$  a segunda forma fundamental de  $\partial\mathcal{D}$  com relação a  $\eta$ , isto é,  $\Pi^{\partial\mathcal{D}}(X, Y) = \langle -\bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle$ , para campos vetoriais  $X$  e  $Y$  tangentes a  $\partial\mathcal{D}$ . A condição de convexidade em  $\mathcal{D}$  implica que  $\Pi^{\partial\mathcal{D}}(X, X) \geq 0$  para todo  $X$  tangente a  $\partial\mathcal{D}$ .

Seja  $\Sigma$  uma superfície orientável, compacta, de fronteira não vazia e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão que leva  $\text{Int}\Sigma$  em  $\text{Int}\mathcal{D}$  e  $\partial\Sigma$  em  $\partial\mathcal{D}$  de modo suave até mesmo na fronteira  $\partial\Sigma$ . Nestas condições, temos a seguinte

**Definição 3.2.2.** *Uma variação  $\Phi$  será chamada admissível se  $\Phi(t, \text{Int}\Sigma) \subset \text{Int}\mathcal{D}$  e  $\Phi(t, \partial\Sigma) \subset \partial\mathcal{D}$  para todo  $t \in I = (-\epsilon, \epsilon)$ . A superfície  $\Sigma$  é chamada estacionária se é um ponto crítico do funcional área para toda variação admissível que preserva volume.*

Utilizando a equação (3.16), no mesmo espírito do teorema 1.3, pode-se mostrar que  $\Sigma$  é estacionária se, e somente se,  $\Sigma$  possui curvatura média constante e intersecta  $\partial\mathcal{D}$  ortogonalmente ao longo de  $\partial\Sigma$ . Assim, uma superfície estacionária  $\Sigma$  é chamada *superfície de curvatura média constante de fronteira livre* se  $A'(0) = 0$  e, para cada variação admissível  $\Phi : I \times \Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $\Sigma_t = \Phi(t, \Sigma)$  divide o domínio  $\mathcal{D}$  em duas regiões de volumes pré-determinados para todo  $t \in I$ .

**Exemplo 3.2.1** (Catenoide Crítico). *Seja  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$  a bola unitária centrada na origem. Para cada  $\alpha > 0$ , seja  $C_\alpha$  o catenoide parametrizado por*

$$\varphi_\alpha(u, v) = \left( \alpha \cosh \frac{u}{\alpha} \cos v, \alpha \cosh \frac{u}{\alpha} \sin v, u \right). \quad (3.17)$$

*A parametrização apresentada exemplo 1.3.3 é o caso particular para  $\alpha = 1$  e  $C_\alpha$  é simplesmente a imagem homotética de  $C_1$  pelo parâmetro  $\alpha$ . O vetor unitário normal a  $C_\alpha$  é*

$$N = \left( -\frac{\cos v}{\cosh(u/\alpha)}, -\frac{\sin v}{\cosh(u/\alpha)}, \operatorname{tgh}(u/\alpha) \right). \quad (3.18)$$

*Temos então uma situação semelhante a apresentada no exemplo 2.3.6, com a ressalva que aqui partimos da esfera unitária: existe um único valor  $\alpha_0$  para o qual  $C_\alpha$  intersecta a esfera  $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{B}$  ortogonalmente. De fato, como em  $\mathbb{S}^2$  o vetor normal unitário é paralelo ao vetor posição, encontramos este valor observando que, da condição de ortogonalidade, temos  $\langle N, \varphi_\alpha \rangle = 0$  e isto implica que*

$$1 = \frac{u}{\alpha} \operatorname{tgh} \frac{u}{\alpha}. \quad (3.19)$$

*Mas a equação  $1 = t \operatorname{tgh} t$  apresenta uma única solução positiva  $t_0$ . Com isso obtemos que  $\frac{u}{\alpha} = t_0$ , o que, aliado à restrição de  $\varphi_\alpha \in \mathbb{S}^2$ , implica em solução única.*

*Assim, a porção de  $C_{\alpha_0}$  contida em  $\mathbb{B}$ , chamada catenoide crítico, é uma superfície CMC de fronteira livre. Na verdade, esta é uma superfície mínima de fronteira livre.*

Também podem ser feitas algumas adaptações no lema 1.2.2 de modo que suas implicações continuem válidas neste novo contexto. Com isso, dada uma função  $f$  diferenciável tal que  $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ , existe uma variação admissível de  $\Sigma$  que preserva volume cujo campo variacional é  $L = fN$ . Assim, se  $\Sigma$  é uma superfície CMC de fronteira livre, para toda variação normal e admissível que preserva volume, temos

$$A''(0) = \int_\Sigma |\nabla f|^2 - |\Pi|^2 f^2 d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi^{\partial\mathcal{D}}(N, N) f^2 ds. \quad (3.20)$$

Observamos que a última parcela acima surge da derivação de  $\langle \mathbf{n}, L \rangle$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor exterior unitário normal a  $\partial\Omega$  e tangente à  $\Sigma$ . De fato, como  $\Sigma$  intersecta  $\partial\mathcal{D}$

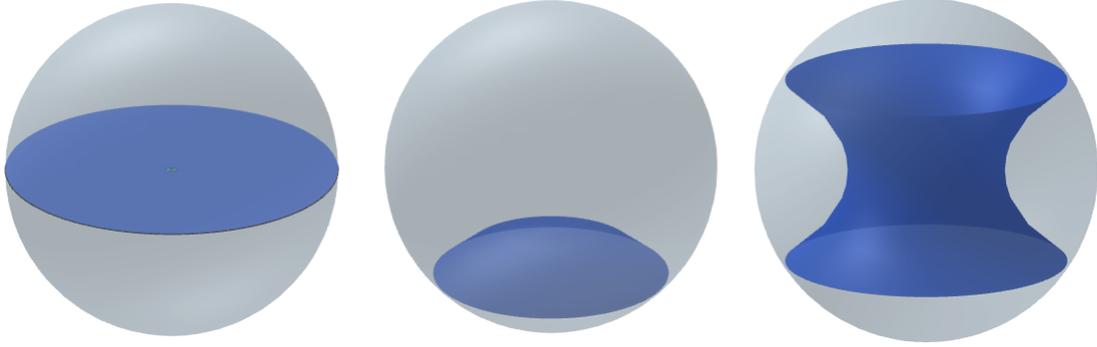


Figura 3.1: Exemplos de superfícies CMC de fronteira livre na bola unitária: da esquerda para a direita, temos um disco equatorial, uma calota esférica e um catenoide crítico.

ortogonalmente ao longo de  $\partial\Sigma$ , então  $\mathbf{n}(p) = -\eta(p)$  para cada  $p \in \partial\Sigma$ , onde  $\eta$  é o campo vetorial normal unitário ao longo de  $\partial\mathcal{D}$ . Logo,

$$\langle \mathbf{n}, \bar{\nabla}_L L \rangle = -\langle \bar{\nabla}_L \mathbf{n}, L \rangle = -f^2 \langle -\bar{\nabla}_N \eta, N \rangle = -\Pi^{\partial\mathcal{D}}(N, N) f^2.$$

Além disso, como  $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + |\nabla f|^2 \implies \operatorname{div}(f\nabla f) - f\Delta f = |\nabla f|^2$  e

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}(f\nabla f) d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle f\nabla f, \mathbf{n} \rangle ds = \int_{\partial\Sigma} f \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle ds = \int_{\partial\Sigma} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds,$$

também podemos escrever (3.20) como

$$A''(0) = - \int_{\Omega} f\Delta f + |\Pi|^2 f^2 d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - \Pi^{\partial\mathcal{D}}(N, N) f^2 ds. \quad (3.21)$$

**Definição 3.2.3.** Uma imersão estacionária  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathcal{D}$  é chamada estável se  $A''(0) \geq 0$  para toda variação normal admissível que preserva volume de  $\Sigma$ .

Em completa analogia às ideias apresentadas no início da seção 2.3, a partir da equação (3.20) podemos definir uma forma do índice no espaço de Sobolev  $W^{1,2}(\Sigma)$  dada por

$$\mathcal{I} : W^{1,2}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}(f) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - |\Pi|^2 f^2 d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi^{\partial\mathcal{D}}(N, N) f^2 ds. \quad (3.22)$$

Assim dizemos que a superfície estacionária  $\Sigma$  é estável se  $\mathcal{I}(f) \geq 0$  para toda  $f \in W^{1,2}(\Sigma)$  tal que  $\int_{\Sigma} f = 0$ .

**Exemplo 3.2.2** (Discos geodésicos e calotas esféricas). *Se  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é uma bola, então os discos geodésicos que intersectam  $\partial\mathcal{B}$  ao longo de um equador e as calotas esféricas que intersectam  $\partial\mathcal{B}$  ortogonalmente são exemplos de superfícies de curvatura média constante de fronteira livre. De fato, pode-se mostrar que estes são também estáveis.*

### 3.2.3 Teorema de Nunes

Semelhantemente à consequência dos teoremas de Barbosa - do Carmo e do Carmo - Peng, o teorema de Nunes nos fornece uma classificação das superfícies CMC de fronteira livre, estáveis e orientáveis imersas nas bolas geodésicas do  $\mathbb{R}^3$ . De fato, como consequência do teorema de Nunes deduzimos que *discos totalmente umbílicos são as únicas superfícies CMC de fronteira livre, imersas nas bolas geodésicas de  $\mathbb{R}^3$ , orientáveis e estáveis.*

Esta classificação tem início nos trabalhos de Ros - Vergasta, os quais estudaram superfícies CMC de fronteira livre imersas em domínios convexos do  $\mathbb{R}^n$ . Estes autores mostraram em [12] o importante resultado:

**Teorema 3.4** (Ros - Vergasta). *Se  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é uma bola fechada e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}$  é uma imersão estacionária e estável, então  $\partial\Sigma$  está mergulhada e as únicas possibilidades são*

- (i)  $\phi(\Sigma)$  é um disco totalmente geodésico;
- (ii)  $\phi(\Sigma)$  é uma calota esférica;
- (iii)  $\phi(\Sigma)$  tem genus  $g = 1$  e o número de componentes conexas da fronteira de  $\phi(\Sigma)$  é  $r = 1$  ou  $r = 2$ .

Ainda em [12], Ros - Vergasta afirmam desconhecer a existência de superfícies CMC de fronteira livre e estáveis de genus 1, mas ressaltam que não conjecturam que tais superfícies não existem, deixando então tal problema em aberto.

E a principal contribuição de Nunes [9] foi provar que que possibilidade (iii) do teorema 3.4 acima não se verifica:

**Teorema 3.5** (Nunes). *Se  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é uma bola fechada e  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}$  é uma imersão CMC de fronteira livre, orientável, compacta e estável, então  $\Sigma$  tem genus zero.*

A prova deste teorema usa ideias semelhantes as usadas por Ros - Vergasta para provar o teorema 3.4, baseando em funções testes adequadas cuja existência é garantida pelo “truque de Hersch”. Resumidamente, Ros-Vergasta consideram uma superfície fechada  $\Sigma'$  obtida a partir da superfície original  $\Sigma$  e da união de discos conformes a cada componente conexa de  $\partial\Sigma$ . Eles então utilizam os fatos de  $\Sigma'$  ser conformemente equivalente a esfera  $\mathbb{S}^2$ , e da energia de Dirichlet, a qual é controlado pelos invariantes topológicos, ser invariante por mapas conformes. O “truque de Hersch” consiste então em utilizar difeomorfismos de  $\mathbb{S}^2$  em  $\mathbb{S}^2$  para balancear o mapa conforme tomado de  $\Sigma'$  a  $\mathbb{S}^2$  de modo que as funções coordenadas de tal mapa se tornem adequadas ao uso como funções de teste, isto é, como funções utilizáveis nas técnicas de estabilidade. Por outro lado, como  $\Sigma$  é suposta compacta, Nunes considera diretamente a equivalência conforme de  $\Sigma$  ao disco unitário  $\mathbb{D}$  do  $\mathbb{R}^2$ , e assim o “truque de Hersch modificado” é empregado a partir do fato de  $\mathbb{D}$  ser conformemente equivalente a um hemisfério de  $\mathbb{S}^2$ . Isto porém impossibilita o uso de todas as funções coordenadas como funções de teste. Nunes então contorna tal problema mostrando que estabilidade no sentido das superfícies de fronteira livre implica em estabilidade forte no sentido do capítulo anterior. Isto possibilita melhores cotas para o gênero de  $\Sigma$  e para o número de componentes conexas de  $\partial\Sigma$ . Para mais detalhes, ver [9].

Este resultado implica então na classificação das superfícies CMC de fronteira livre, orientáveis, estáveis e imersas nas bolas do  $\mathbb{R}^3$ . Conforme mencionado pelo próprio autor em [9], esta é uma versão do teorema 3.1 para o contexto das superfícies de fronteira livre. Como tal teorema é válido em  $\mathbb{R}^n$  (de fato, a prova do teorema 3.1, apresentada neste capítulo em dimensão 3, é basicamente a mesma apresentada em [1] para qualquer  $n$ ), o autor afirma então que resultados análogos aos apresentados em [9] são esperados para outras dimensões. Esta questão foi então resolvida poucos anos atrás por Wang - Xia em [16]. De fato, existem muitas generalizações e diferentes contextualizações das ideias apresentadas neste trabalho, bem como muitas questões ainda sem soluções, constituindo

temas relevantes e atuais de pesquisa.

# Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J. L., do Carmo, M. P.: *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. Math. Z. 185, pp. 339-353 (1984).
- [2] do Carmo, M. P.: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA (2005).
- [3] do Carmo, M. P.: *Geometria Riemanniana*. 5 ed. (Coleção Projeto Euclides). Rio de Janeiro: IMPA (2015).
- [4] do Carmo, M. P., Peng, C. K.: *Stable Complete Minimal Surface in  $\mathbb{R}^3$  are Planes*, Bull. AMS 1, no. 6, pp. 903 - 906 (1979).
- [5] Colding, Tobias Holck. Minicozzi II, William P.: *A Course in Minimal Surfaces*. Graduate studies in mathematics. v 121. Providence, RI: AMS (2011).
- [6] Courant, R., Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics*. Wiley, New York (1989).
- [7] Fischer-Colbrie, D., Schoen, R.: *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*. Comm. Pure Appl. Math., 33, pp. 199-211 (1980).
- [8] López, R.: *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2013).
- [9] Nunes, I.: *On Stable Constant Mean Curvature Surfaces With Free Boundary*. Mathematische Zeitschrift, v. 287, p. 473-479 (2017).

- [10] Pogorelov, A. V.: *On the stability of minimal surfaces*. Soviet Math., 24, 274 - 276 (1981).
- [11] Ripoll, J.B.: *A characterization of spheres in Euclidean space*. Arch. Math 51, 474 - 475 (1988). Disponível em: < <https://doi.org/10.1007/BF01198633> >. Acesso em: 09 de junho de 2021.
- [12] Ros, A., Vergasta, E.: *Stability for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Free Boundary*. Geometriae Dedicata 56, pp. 19-33 (1995).
- [13] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. 3.ed. New York: McGraw-Hill (1976).
- [14] da Silveira, A.: *Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature*. Mathematische Annalen, 277, 629 - 638 (1987).
- [15] Shimakura, N.: *The partial differential operators of elliptic type*. Providence: AMS (1992).
- [16] Wang, G., Xia, C.: *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*. Math. Ann. 374, 1845 - 1882 (2019).
- [17] Wentz, H.: *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*. Pacific Journal of Mathematics vol. 121, N 01, (1986).