

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**FÁBIO MAGALHÃES NUNES**

**ANÁLISE DA CORRELAÇÃO ENTRE O IBOVESPA E O ATIVO PETR4: ESTIMAÇÃO  
VIA MODELOS GARCH E MODELOS ADITIVOS**

**Porto Alegre  
2009**

**FÁBIO MAGALHÃES NUNES**

**ANÁLISE DA CORRELAÇÃO ENTRE O IBOVESPA E O ATIVO PETR4: ESTIMAÇÃO  
VIA MODELOS GARCH E MODELOS ADITIVOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, com quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Oliveira Kloeckner

**PORTO ALEGRE  
2009**

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da  
UFRGS

N972a

Nunes, Fábio Magalhães

Análise da correlação entre o Ibovespa e o ativo PETR4: estimação via Modelos GARCH e modelos aditivos/ Fábio Magalhães Nunes. – Porto Alegre, 2009.

091 f.: il.

Orientador: Gilberto de Oliveira Kloeckner.

Ênfase em Economia Aplicada.

Dissertação (Mestrado em Economia) Universidade Federal do Rio grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós Graduação em Economia, Porto Alegre, 2009.

1. Volatilidade: índice Bovespa. 2. Volatilidade: PETR4.  
3. índice Bovespa: Ativo PETR4: Correlação. I. Kloeckner, Gilberto de Oliveira. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós Graduação em Economia.  
III. Título.

CDU 336.764  
519.23

**FÁBIO MAGALHÃES NUNES**

**ANÁLISE DA CORRELAÇÃO ENTRE O IBOVESPA E O ATIVO PETR4: ESTIMAÇÃO  
VIA MODELOS GARCH E MODELOS ADITIVOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, com quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Oliveira Kloeckner

Aprovada em: Porto Alegre, Agosto de 2009.

---

Prof. Dr. Gilberto de Oliveira Kloeckner (Orientador)  
UFRGS

---

Prof. Dr. Igor Morais.  
UNISINOS

---

Prof. Dr. Oscar Claudino Galli  
UFRGS

---

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo  
UFRGS

## **AGRADECIMENTOS**

Compartilho essa alegria com toda minha família especialmente, minha mãe Elizabete, minha irmã Flávia.

Sem o apoio incondicional da minha namorada, Bárbara, não venceria essa batalha. Agradeço ao Matheus por me distrair nos momentos de stress com seu sorriso e alegria

Agradeço ao professor Gilberto Kloeckner, meu orientador, por entender minha situação e não medir esforços para me ajudar.

Agradeço aos meus colegas, André, Bruno (carioca), Bruno (cearense) e Pedro pela convivência nessa batalha.

E por fim, agradeço ao meu pai, Milton Nunes, um grande homem, que não pode me ver atingir esse trunfo, porém estará sempre torcendo por mim. Aprendi muito com esse grande ser Humano, sem sombra de dúvidas, o maior de todos.

“..Nas pequenas coisas que  
Identificamos o caráter de um  
Homem..”  
Milton Nunes (meu pai, meu Herói)

## RESUMO

A estimação e previsão da volatilidade de ativos são de suma importância para os mercados financeiros. Temas como risco e incerteza na teoria econômica incentivaram a procura por métodos capazes de modelar a variância condicional que evolui ao longo do tempo. O objetivo central desta dissertação foi modelar via modelos ARCH – GARCH e modelos aditivos o índice do IBOVESPA e o ativo PETR4 para analisar a existência de correlação entre as volatilidades estimadas. A estimação da volatilidade dos ativos no método paramétrico foi realizada via modelos EGARCH; já para o método não paramétrico, utilizou-se os modelos aditivos com 5 defasagens.

Palavras Chaves: IBOVESPA. PETR4. modelos GARCH. modelos Aditivos. Estimação paramétrica. Estimação não paramétrica.

## **ABSTRACT**

Volatility estimation and forecasting are very important matters for the financial markets. Themes like risk and uncertainty in modern economic theory have encouraged the search for methods that allow for modeling of time varying variances.

The main objective of this dissertation was estimate through GARCH models and additive models of IBOVESPA and PETR4 assets; and analyzes the existence of correlation between volatilities estimated. We use EGARCH models to estimate through parametric methods and use additive models 5 to estimate non parametric methods.

Key Words: IBOVESPA. PETR4. GARCH models. Additive models. Parametric estimation and Non parametric estimation.



## Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Volatilidade de um ativo modelado via GARCH(1,1) .....	17
Gráfico 2 - Exemplificação dos parâmetros de suavização. ....	34
Gráfico 3 - Preços de Fechamento PETR4 .....	45
Gráfico 4 – Valor de Fechamento do IBOVESPA.....	45
Gráfico 5 – Variação IBOVESPA x PETR4.....	46
Gráfico 6 – Retornos diários IBOVESPA.....	47
Gráfico 7 – PETR4 x Preço do Brent.....	48
Gráfico 8 – Histograma Retornos Diários IBOVESPA.....	50
Gráfico 9 – Plot Q – Q Retornos diários IBOVESPA.....	51
Gráfico 10 – Histograma Retornos diários ao quadrado d índice IBOVESPA.....	52
Gráfico 11 – Histograma Retornos Diários PETR4.....	54
Gráfico 12 – Plot Quantis – quantis dos Retornos diários do PETR4.....	55
Gráfico 13 – Retornos Diários PETR4.....	57
Gráfico 14 - Histograma Retornos ao quadrado do ativo PETR4.....	58
Gráfico 15 – Plot Quantis-quantis dos retornos ao quadrado do PETR4.....	59
Gráfico 16 – Plot Quantis Resíduos ARMA(3,0) – EGARCH(1,3).....	64
Gráfico 17 – Plot Q x Q resíduos IBOVESPA.....	67
Gráfico 18 – Volatilidade estimada PETR4 e IBOVESPA via Modelos EGARCH.....	68
Gráfico 19 – Volatilidade estimada períodos 1994 à 2005.....	69
Gráfico 20 – Autocorrelação dos resíduos do modelo ARMA (3,0).....	72
Gráfico 21 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 4 – IBOVESPA.....	74
Gráfico 22 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 – IBOVESPA.....	75
Gráfico 23 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 6 - IBOVESPA.....	76
Gráfico 24 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 com span ótimo – IBOVESPA.....	77
Gráfico 25 – Estatísticas provenientes do modelo aditivo 5 para o IBOVESPA.....	78
Gráfico 26 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 4 – PETR4.....	80

Gráfico 27 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 –PETR4.....	81
Gráfico 28 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 com o span ótimo – PETR4.....	82
Gráfico 29 – Estatísticas provenientes do modelo aditivo 5 com span ótimo para a série da PETR4.....	83
Gráfico 30 – Volatilidade estimada via modelos aditivos para as séries do IBOVESPA e PETR4.....	84

## Lista de Quadros

Quadro 1 – Funções Núcleos.....	33
Quadro 2 – Correlação entre o preço do Brent x Cotação TR4.....	49
Quadro 3 – Output teste BDS Eviews 5.0.....	52
Quadro 4 - Correlograma dos Retornos diários ao Quadrado do IBOVESPA.....	53
Quadro 5 – Correlograma dos Retornos Diários do PETR4.....	56
Quadro 6 – Output teste BDS para os Retornos Diários do Ativo PETR4.....	57
Quadro 7 - Correlograma dos Retornos ao quadrado do PETR4.....	59
Quadro 8 – Sumário de Estatísticas do ARMA (3,0) para PETR4.....	60
Quadro 9 – Correlograma dos resíduos ao quadrado da série do IBOVESPA.....	66
Quadro 10 – Coeficiente de Correlação das Volatilidade estimadas.....	69
Quadro 11 – Coeficiente de Correlação Volatilidades estimadas – Período 1994 à 2005.....	69
Quadro 12 – Correlação entre as volatilidades estimadas via modelos aditivos.....	84

## Lista de Tabelas

Tabela 1 – Estatísticas do teste de Ljung – Box para os Retornos Diários de PETR4.....	61
Tabela 2 – Modelos de Heterocedasticidade Condicional para o PETR4.....	62
Tabela 3 - Modelos de Heterocedasticidade Condicional para o IBOVESPA.....	65
Tabela 4 – Coeficientes de Informação modelos aditivos IBOVESPA.....	73
Tabela 5 – Definição do Span ótimo para o modelo aditivo 5 IBOVESPA.....	77
Tabela 6 – Coeficientes de informação para definição do modelo aditivo ótimo PETR4.	79
Tabela 7 – Definição do Span ótimo para o modelo aditivo 5.....	82

## Sumário

<b>1 Introdução.....</b>	<b>14</b>
<b>2 Modelos Determinísticos de Estimação da Volatilidade.....</b>	<b>17</b>
2.1 Modelos ARCH.....	18
2.1.1 Identificação de um modelo ARCH.....	21
2.1.2 Estimação do Modelo ARCH.....	22
2.2 Modelos GARCH.....	23
2.3 Modelos EGARCH.....	25
2.4 Modelos TARGH.....	27
2.5 Teste BDS (Brock, Dechert & Scheinkman).....	27
<b>3 Estimação Não Paramétrica.....</b>	<b>30</b>
3.2 Restrição nas Funções Núcleos.....	32
3.3 Parâmetro de Suavização.....	34
3.3.1 Formas de definir-se o $h^*$ .....	35
3.3.1.1 Critério de Informação e Validação Cruzada.....	35
3.3.1.2 Seletores Anexos (Plug- in).....	36
3.4 Estimador de Nadaraya-Watson.....	36
3.5 Modelos Aditivos.....	39
3.5.1 Backfitting Algorithm.....	40
3.5.2 Modelos Aditivos de Volatilidade.....	41
3.5.3 Identificação dos Modelos Aditivos.....	41
<b>4 Estimação dos Modelos.....</b>	<b>44</b>
4.1 Apresentando as Séries.....	44
4.1.1 O que é IBOVESPA?.....	46
4.1.2 Variações Petr4 x Preço do Petróleo.....	48
4.2 Características Estatísticas das Séries (análise quantitativa dos dados).....	50
4.2.1 IBOVESPA.....	50
4.2.2 PETR4.....	54
4.3 Estimação da Volatilidade.....	60

4.3.1 Estimação Paramétrica via Modelos de Heterocedasticidade Condicional.....	60
4.3.2 Estimação Via Modelos Aditivos.....	71
<b>5 Considerações Finais.....</b>	<b>86</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>88</b>

## **1 Introdução**

Uma infinidade de pessoas passa, a maior parte de seu tempo, estudando modelos ou teorias que as auxiliem na determinação ou na previsão das variações dos ativos econômicos. O interesse geral da economia foi, sempre, tentar antever a dinâmica dos indicadores econômicos; começando por John M. Keynes com sua elucidação acerca das expectativas condicionais, passando por Lucas com sua teoria de expectativas racionais, e não esquecendo de Fridman com suas expectativas adaptativas. Teóricos modernos como Krugman, Roubini, Barro e entre outros; não medem esforços para desenvolverem métodos para fomentar essa ânsia por tornar a economia uma ciência exata e com grande capacidade preditiva.

Com o avanço do mercado de capitais junto com o grande volume de cifras e pessoas envolvidas, prever a dinâmica dos ativos econômicos, além de antever o comportamento dos preços futuros das ações, passou a ser uma “febre” dentre inúmeros teóricos. Cursos de pós-graduação, com ênfase no mercado de capitais, emergem a cada dia, assim como novas teorias e análises que podem ser lidas e encontradas com facilidade.

Começando com os modelos CAPM, de Sharpe (1964) e Lintner (1965), os quais serviam como base para a análise de risco dos ativos; chegando aos modelos de heterocedasticidade condicional de Engle (1982) e Bollerslev (1986), além de suas derivações; e por fim, analisando os modelos não paramétricos de estimação propostos por Hastie & Tibshirani (1990). Concluimos que os avanços verificados na determinação e na previsão das variações dos indicadores econômicos estão condicionados ao avanço da econometria e da informática.

Uma explicação para a afirmativa explicitada no parágrafo anterior seria: poderíamos estimar o modelo CAPM de Sharpe (1964) e Lintner (1965) através do método dos Mínimos Quadrados Ordinários, sendo necessário frisar que esse método exige algumas condições primárias para gerar estimativas eficientes e não viesadas:

- Série estacionária
- Não haver heterocedasticidade
- Distribuição normal;

Todavia, nem sempre as séries respeitam tais condições, o que sugere uma reflexão de como estimar o modelo CAPM para séries não lineares, heterocedásticas e que não seguem

uma distribuição normal (quando a distribuição tiver formato leptocúrtico<sup>1</sup>). Para este exemplo, em específico, o Método dos Momentos Generalizados (GMM)<sup>2</sup> seria o mais eficaz, já que o mesmo é mais robusto que o MQO, ao passo que suas estimativas seriam eficientes.

Dessa forma, notamos que certas suposições e condições impostas por determinados modelos ou métodos de estimação acabam limitando nosso escopo de análise; ao passo que novas formas teriam que ser criadas para se chegar a resultados mais satisfatórios. Nesse sentido, identificamos os modelos sugeridos por Engle (1982) e Bollerslev (1986) como precursores dessa nova forma de se estimar séries financeiras. Adicionalmente, com os modelos não paramétricos propostos por Hastie & Tibshirani (1990), chegamos a outro patamar, uma vez que para esse método de estimação não há necessidade de se supor qual distribuição os dados seguem o que minimiza nosso erro de especificação do modelo, (Ziegelmann, 2002).

Sendo assim, este trabalho buscará realizar um estudo do comportamento dos ativos financeiros, utilizando como base o Índice IBOVESPA e o ativo mais líquido da bolsa de valores de São Paulo (BOVESPA) o PETR4<sup>3</sup>. Estimar-se-á a volatilidade desses ativos mediante a utilização dos modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional (ARCH), adicionalmente, se estimará a volatilidade dos mesmos ativos através do método não paramétrico Aditivo.

A utilização do ativo PETR4 é justificada por ele ser o mais negociado na bolsa de valores de São Paulo. Com um volume relativo de negociações nos últimos 12 meses de 16% do volume total de negociação da bolsa.

Dessa forma, o objetivo central dessa dissertação é verificar a existência de correlação entre a volatilidade do IBOVESPA com a volatilidade do PETR4. Tem-se como hipótese “*a priori*” que a correlação seja positiva e significativa (superior a 50%), todavia a partir de procedimentos estatísticos, se tentará provar esse argumento.

Como dito anteriormente, utilizamos o índice IBOVESPA e o PETR4 como nossa base de dados, sendo o período analisado compreendido entre 01 de Julho de 1994 até 31 de Dezembro de 2008. Frisa-se que o período de escolha foi tal em virtude da instituição do plano Real, e porque nesses quase 15 anos, passamos por diversas crises, o que influencia diretamente nossa estimação via modelos de volatilidade.

O roteiro de trabalho divide-se em:

---

<sup>1</sup> Possuem caudas pesadas, como a distribuição “t” e a GED.

<sup>2</sup> Para melhor apreciação vide Hamilton (2003).

<sup>3</sup> Corresponde as ações da Petrobrás preferencial.



Primeiramente, serão apresentados alguns modelos determinísticos de como se estimar a volatilidade das séries. Neste capítulo, serão apresentados os modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional. Além de ser demonstrado como identificá-los e estimá-los. Ainda como subseção deste capítulo, apresentaremos o teste BDS (Brock, Dechert & Scheinkman, 1996) o qual servirá como forma alternativa de determinar se uma série é IID<sup>4</sup>.

Após os modelos determinísticos, será apresentada a teoria que suporta os modelos não paramétricos. Apresentar-se-á as funções núcleo de Kernel e seus suavizadores, os estimadores de Nadayra – Watson, bem como o método Aditivo de estimação não paramétrica. Sendo que a grande vantagem dos modelos aditivos é o fato deles poderem assumir uma forma muito parecida aos modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional, entretanto utilizando como propriedades de estimação as não paramétricas.

Em continuidade, na primeira seção do capítulo 4, serão demonstradas as séries para as quais estimaremos as volatilidades (paramétricas e não paramétricas); adicionalmente, será efetuado todo o procedimento de estimação apresentando todos os resultado obtidos mediante a estimação no software Eviews e R. Além disso, será verificado se as volatilidades obtidas das séries são correlacionadas e também será identificado qual o melhor modelo de volatilidade para as ambas as séries.

Por fim, nas considerações finais, apresentaremos um breve resumo do trabalho evidenciado todos os resultados obtidos e, de forma complementar, serão realizadas algumas proposições quanto a trabalhos futuros acerca do tema.

---

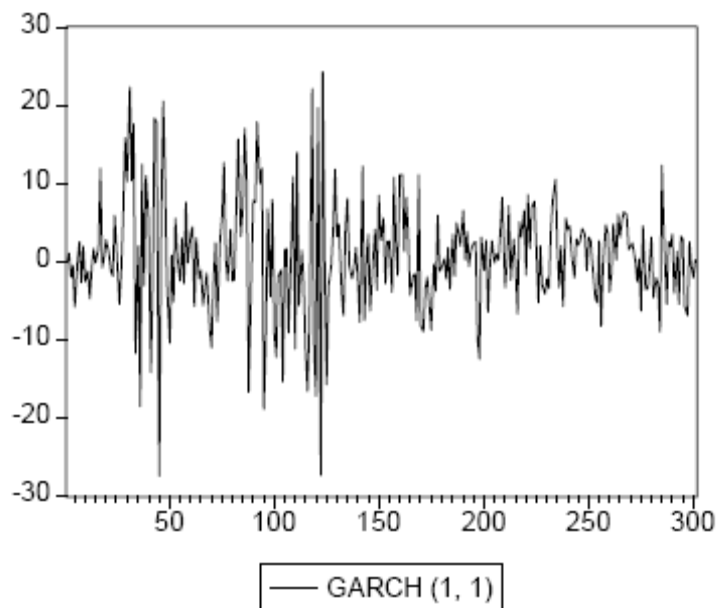
<sup>4</sup> Para melhor entendimento vide seção 2.5 deste trabalho.

## 2 Modelos Determinísticos de Estimação da Volatilidade

No início da década de 80, assistiu-se ao surgimento dos modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional ARCH (ver Engle, 1982). Esses modelos foram, posteriormente, generalizados por Bollerslev (1986) com GARCH, originando vasta literatura sobre o assunto, ainda inesgotada provavelmente.

A razão principal do surgimento desses modelos é que, antes disso, os modelos econométricos de séries de tempo, financeiros e macroeconômicos, enfatizavam apenas o primeiro momento condicional. Dependências temporais de ordem superior eram simplesmente tratadas como perturbações aleatórias. Essas dependências expressam a existência de aglomerações na série e alternância de períodos de baixa volatilidade com períodos de alta volatilidade (vide eixo das abscissas).

O gráfico 1 apresenta essas características:



**Gráfico 1 – Retorno de um ativo modelado via GARCH (1,1)**

Os modelos de heterocedasticidade condicional surgiram principalmente, porque a importância do risco e da incerteza na teoria econômica moderna tornou-se proeminente, e pelo fato de modelos como o CAPM de Sharpe (1964) e Lintner (1965) não funcionarem tão bem empiricamente. Talvez fosse necessário incluir momentos de ordem maior no modelo CAPM para aproximá-lo dos dados empíricos. Assim, desenvolveram-se técnicas que permitem a modelagem temporal de variâncias e covariâncias. De fato, os modelos de

heterocedasticidade condicional GARCH fundamentam-se na estimação da variância condicional em vez de considerá-la constante ao longo do tempo.

A distinção de uso entre momentos de segunda ordem condicionais e não condicionais é a contribuição principal desses modelos. Enquanto a matriz de covariância não condicional para as variáveis de interesse pode ser invariante no tempo, a matriz de covariância condicional depende de estados passados da natureza.

Empiricamente observa-se que as séries financeiras não têm distribuição normal-padrão em geral, dada elevada probabilidade de eventos extremos. Então, os modelos GARCH teriam a capacidade de modelar esse fato estilizado.

## 2.1 Modelos ARCH

Os modelos ARCH, Auto Regressivo com Heterocedasticidade Condicional, foram desenvolvidos por Engle (1982) a fim de estimar a variância da inflação européia. Este modelo tem como premissa básica que o retorno de um ativo qualquer  $X_t$  é não correlacionado serialmente, o que denota que o passado do retorno não influencia o presente. Entretanto uma outra premissa é que a variância condicional, neste caso a volatilidade, é função quadrática dos retornos passados o que evidencia a existência de correlação na variância.

### Definição 2.1 - Retornos

Entenda-se retorno por:

$$X_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (2.1)$$

onde  $P_t$ , com  $t = 1, 2, \dots, n$ , é o preço de um ativo em vários períodos.

Um modelo ARCH(r) é definido como:

$$\begin{aligned} X_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Onde  $\varepsilon_t$  é *i.i.d*(0,1)  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $r > 0$

Nota-se que ao descrevermos o modelo à distribuição dos erros (resíduos),  $\varepsilon_t$ , não necessita ser Normal, ela pode assumir qualquer distribuição que melhor explique as caudas pesadas das séries financeiras<sup>5</sup>.

Para melhor apresentarmos os modelos ARCH<sup>6</sup>, consideraremos o caso onde  $r = 1$ .

Dessa forma, o modelo ARCH (1) é descrito por:

$$\begin{aligned} X_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$$

Calculando a média e a variância incondicionais da série chega-se aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \text{a) } E(X_t) &= E\{E(X_t / F_{t-1})\} = 0 \\ \text{b) } Var(X_t) &= E(X_t^2) = E\{E(X_t^2 / F_{t-1})\} = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Sendo o processo  $X_t$  estacionário de segunda ordem, então para todo  $E(X_t^2) = E(X_{t-1}^2) = Var(X_t)$ , temos que:

$$Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad (2.4)$$

Uma generalização do resultado encontrado em (2.4) para o modelo ARCH(r) é:

---

<sup>5</sup> Neste sentido, os modelos ARMA, subestimavam as séries financeiras, uma vez que ao supor que inovações, ou choques externos tinham como características serem ruído branco e variância constante, acabava limitando nossa análise. Com o surgimento dos modelos auto regressivos, o princípio de normalidade não precisava ser seguido o que acarreta maior qualidade a estimação de séries financeiras, já que elas são caracterizadas por terem caudas pesadas.

<sup>6</sup> Vide Tsay (2002).

$$E(X_t^2) = E(h_t) = E(h_t)E(\varepsilon_t^2) = h_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2} \quad (2.5)$$

Cabe frisar, que algumas restrições são necessárias para garantir a estacionariedade e a positividade da variância condicional. Como foi explicitado anteriormente, tem-se que  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i > 0$  é a condição suficiente para que a variância condicional seja positiva.

Além disso,  $\sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 < 1$  é a condição necessária para que a série seja estacionária. Isso significa que as raízes do polinômio  $1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i L^i$  devem estar fora do círculo unitário.

Sabe-se ainda, que normalmente, os retornos de uma série financeira apresentam caudas longas (pesadas) de modo que o coeficiente de curtose é maior do que 3. Esse resultado denota que a série não é normalmente distribuída e sua função de densidade de probabilidade é chamada de leptocúrtica. O coeficiente de curtose é dado por:

$$K = \frac{E(X_t)^4}{(E(X_t)^2)^2} \quad (2.6)$$

Até este momento, definiu-se o que é um modelo ARCH e suas premissas básicas, entretanto nada se falou sobre como identificá-lo e construí-lo. Nesta próxima subseção, será apresentado como se identificar um modelo ARCH.

### 2.1.1 Identificação de um modelo ARCH

Como primeiro passo para identificar um modelo ARCH, deve-se tentar ajustar um modelo ARMA para remover a correlação serial na série de  $X_t$ , se esta existir. A idéia nesse caso é utilizarmos os modelos Auto Regressivos e de Médias Móveis para removermos a correlação serial da serie  $X_t$ .

$$\phi(B)X_t = \theta_0 + \theta(B)a_t \quad (2.7)$$

Sendo que  $a_t \sim ARCH(r)$ . Para melhor apresentação dos modelos, ao nos referirmos a  $X_t$ , estar-se-á supondo que a série seja não correlacionada serialmente.

Como segundo passo do processo de identificação, verifica-se se a série  $X_t$  apresenta heterocedasticidade condicional. Na literatura existem inúmeros testes que podem ser utilizados para verificação deste objetivo, para tanto, será apresentado três testes que podem ser realizados para examinar  $X_t^2$ .

- i) Teste de FAC e FACP – verificou-se que os modelos ARCH<sup>7</sup> assemelham-se a um modelo ARMA (Max (p, q),q). Assim as funções de autocorrelação, FAC e as funções de autocorrelação parcial, FACP, devem sugerir se a série  $X_t^2$  é heterocedástica e, mais especificamente, a FACP nos informará qual a ordem do modelo ARCH que estaremos modelando.
- ii) Teste de Ljung – Box (Q) – A estatística de Ljung - Box é utilizada para se testar a presença ou não de heterocedasticidade condicional na série. O teste consiste em verificar se a hipótese nula de que a soma das autocorrelações é estatisticamente diferente de zero se verifica. Sendo assim tem-se:

$$H_0 : \sum_{j=1}^n \hat{\rho}_j = 0 \text{ e } (2.8)$$

A estatística Q é calculada da seguinte forma:

---

<sup>7</sup> Da mesma forma os GARCH, que será apresentado posteriormente.

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^n \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \xrightarrow{D} \chi_n^2 \quad (2.9)$$

- iii) Teste de Multiplicador de Lagrange - Este teste foi proposto, inicialmente, por Engle; o qual definiu o teste como:

$$H_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad \text{x} \quad H_a = \alpha_i \neq 0 \quad \text{para qualquer } i > 0$$

Dessa forma, os parâmetros associados à estimação de  $X_t$  devem ser diferentes de zero para que se rejeite  $H_0$  e verifique-se dessa maneira heterocedasticidade.

Após breve explanação acerca dos meios para identificarmos um modelo ARCH, será apresentado na próxima subseção desse trabalho como proceder para estimar um modelo ARCH.

### 2.1.2 Estimação do Modelo ARCH

Os estimadores do Modelo ARCH, são obtidos através do método de máxima verossimilhança.

A função de máxima verossimilhança é dada por:

$$L(x_1, \dots, x_T / \alpha) = f(x_T / F_{T-1}) f(x_{T-1} / F_{T-2}) \dots f(x_{r+1} / F_r) f(x_1, \dots, x_r / \theta, \alpha) \quad (2.10)$$

e supondo-se normalidade dos resíduos  $\varepsilon_t$  podemos reescrever da seguinte forma;

$$L(x_1, \dots, x_T / \alpha) = \prod_{t=r+1}^T (\sigma_t \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_t^2}\right\} f(x_1, \dots, x_r / \alpha) \quad (2.11)$$

para  $T$  grande, o termo  $f(x_1, \dots, x_T / \alpha)$  pode ser desprezado<sup>8</sup>. Dessa forma, maximizamos a função de verossimilhança condicional:

$$L(x_1, \dots, x_T / \alpha, x_1, \dots, x_r) = \prod_{t=r+1}^T (\sigma_t \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_t^2}\right\} \quad (2.12)$$

onde a volatilidade  $\sigma_t^2 = h_t$  é obtida recursivamente,

Para verificar se o modelo estimado é adequado, pode-se calcular a estatística  $Q$  de Ljung – Box para a sequência de  $\tilde{X}_t$ , ou calcula-se os coeficiente de assimetria e curtose estimados e/ou fazer um gráfico QxQ para avaliar a suposição de normalidade.

Após apresentação dos Modelos ARCH, será apresentado a generalização dos modelos ARCH; os modelos GARCH.

## 2.2 Modelos GARCH

Uma generalização dos modelos ARCH foi sugerida por Bollerslev (1986, 1987, 1988) o chamado modelo GARCH (generalized ARCH). Sabe-se que um modelo ARMA pode ser mais parcimonioso no sentido de apresentar menos parâmetros do que um modelo AR ou MA puro. Do mesmo modo, um modelo GARCH pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH.

Um modelo GARCH pode ser definido por

$$\begin{aligned} X_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Onde  $\varepsilon_t$  é *i.i.d*(0,1)  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) < 1$ ,  $m = \max(r, q)$ .

---

<sup>8</sup> Vide Engle (1982) para melhor apreciação



As restrições impostas acima nos remetem à um modelo GARCH estacionário e positivo, entretanto essas restrições especificam apenas uma condição suficiente, mas não necessária<sup>9</sup>. Vale lembrar que os resíduos nesse tipo de modelo devem ser apenas independentes e identicamente distribuídos (IID<sup>10</sup>) não importando a qual distribuição segue, uma vez que eles devem seguir a melhor distribuição que especifique suas características podendo essa ser a “t” ou a de erros generalizados.

O modelo GARCH (r,q) pode ser interpretado como um processo autoregressivo em  $X_t^2$ , dessa maneira pode-se especificar que

$$v_t = X_t^2 - h_t = (\varepsilon_t^2 - 1)h_t \quad (2.14)$$

E dessa maneira obtém-se

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j (X_{t-j}^2 - v_{t-j}) \quad (2.15)$$

que pode ser reescrito como

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(r,q)} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j v_{t-j} + v_t \quad (2.16)$$

Olhando com critério esta última equação, verifica-se que a mesma lembra um modelo ARMA[ $\max(r,q)$ , q], o que sugere que poder-se-ia identificar um modelo GARCH através da metodologia apresentada por Box-Jenkins. Contudo, essa metodologia é falha, pois se não estivermos tratando de um modelo GARCH esse método de identificação não é válido.

Apenas frisando, conforme visto nos modelos ARCH, o coeficiente de curtose (K) de um modelo GARCH também tende a ser maior do que 3, o que remete a uma função de densidade probabilidade com caudas pesadas.

---

<sup>9</sup> Ver Nelson e Cao (2002)

<sup>10</sup> Na seção 2.5 deste trabalho apresentaremos o teste BDS (Brock, Dechert & Scheinkman; 1987) o qual é utilizado para verificar se as variáveis que compõe uma série são Independentes e igualmente distribuídas).

### 2.2.1 Identificação do Modelo GARCH

Para identificar-se um modelo GARCH, poderia ser utilizado o teste de Ljung - Box (Q), bem como o teste LM e também analisar-se o correlograma dos resíduos; entretanto como a especificação dos modelos GARCH é mais difícil e sutil sugere-se que o pesquisador estime modelos GARCH de ordem baixa, verificando se o mesmo respeite as premissas básicas (levantadas nos modelos ARCH) e depois compare os modelos analisando qual resulta em um critério de informação Akaike ou Schwartz maior; uma vez que o modelo que possuir um critério de informação maior em módulo é o mais recomendável.

Após a explicitação dos modelos ARCH - GARCH pode-se notar que os mesmos, tratam a variância dos retornos de maneira simétrica, já que ambos modelam a volatilidade valendo-se de uma função quadrática dos retornos. Porém é censo comum afirmar (evidências empíricas) que variações negativas dos retornos dos ativos tem um peso maior do que variações positivas, ao passo que a volatilidade associada a um choque negativo é maior do que a um choque positivo; e é nesse sentido que repousa o caráter assimétrico da volatilidade. Sendo assim, serão apresentados a seguir, dois modelos que tratam a volatilidade de maneira assimétrica ao passo que os mesmos têm por consequência darem pesos maiores a variações negativas assim como ocorre na prática<sup>11</sup>.

### 2.3 Modelos EGARCH

Para tentar superar a deficiência dos modelos ARCH e GARCH quanto à assimetria da volatilidade, Nelson (1991) propôs o modelo EGARCH – modelo de heterocedasticidade condicional auto regressivo generalizado exponencial – o qual possibilita que choques assimétricos sejam absorvidos, bem como que se possam assumir parâmetros negativos para explicar o modelo<sup>12</sup>.

---

<sup>11</sup> Existem diversas variações dos modelos ARCH e GARCH, entretanto analisa-se apenas os modelos assimétrico EGARCH e TARARCH, uma vez que o foco deste trabalho não é fazer uma revisão bibliográfica de todos os modelos que estimam a volatilidade.

<sup>12</sup> Viu-se que nos modelos ARCH e GARCH parâmetros negativos não poderiam compor o modelo o mesmo devido as restrições impostas.

O modelo EGARCH é definido por

$$\begin{aligned}
 X_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t \\
 \ln(h_t) &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left| \frac{X_{t-i}}{h_{t-i}} \right| + \sum_{k=1}^r \gamma_k \frac{X_{t-i}}{h_{t-i}} \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

A especificação logarítmica impede que a variância seja negativa e o parâmetro  $\gamma$  ajusta a assimetria dos efeitos. Se  $\gamma = 0$ , então um choque positivo tem o mesmo efeito na volatilidade que um choque negativo de mesmo tamanho; sendo o impacto nesse caso simétrico. Porém, caso o parâmetro  $\gamma$  seja negativo, chama-se o efeito do choque assimétrico como efeito alavancagem.

Um ponto que não pode ser esquecido, é que as raízes do polinômio  $\left(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j L^j\right)$  devem estar fora do círculo unitário afim que a variância seja estacionária. E de acordo com Nelson (1991), a estacionariedade estrita é dada se  $\sum_{i=1}^q \alpha_i^2 < \infty$ . Ainda, segundo Nelson (1991), a melhor forma de se estimar o EGARCH é supondo-se os erros distribuídos pela função de Distribuição dos Erros Generalizados, GED:

$$f(u_t) = \frac{v \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{\varepsilon_t}{\lambda}\right|^v\right)}{\lambda 2^{\frac{v+1}{v}} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)} \quad (2.18)$$

Quanto à identificação, bem como a estimação do modelo EGARCH, elas seguem os mesmos critérios apresentados para os modelos ARCH e GARCH.

## 2.4 Modelos TARGH

As formulações econométricas para captação de impactos assimétricos foram bastante estudadas, como no caso do EGARCH apresentado anteriormente. Entretanto Zakoian (1994) propôs o modelo de heterocedasticidade condicional autorregressivo truncado, TGARCH, o qual é expresso da seguinte forma:

$$\sigma_t^a = w + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^a + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^a + \sum_{k=1}^r \gamma_k d_{(\varepsilon_{t-k} \leq 0)} |\varepsilon_{t-k}|^a \quad (2.19)$$

onde  $d(\cdot)$  é uma variável “dummy” igual a zero se o erro não satisfaz a condição imposta entre parênteses, e 1, caso satisfaça.

Glosten, Jagannathan e Runkle (1993) modificaram o modelo, impondo  $a=2$ , que é a especificação, utilizada no programa Eviews.

O modelo implica um aumento da volatilidade quando notícias ruins, representadas por  $\varepsilon_{t+k} < 0$ , são acompanhadas por um coeficiente positivo, isto é, por  $\gamma_k > 0$ . É possível observar que o modelo GARCH é um caso especial do TGARCH, bastando impor  $\gamma_k = 0$  para qualquer  $k$ .

Como explicitado anteriormente, como o modelo GARCH é uma variação do TGARCH, sua estimação bem como identificação se dá pelo mesmo procedimento ilustrado para o ARCH e GARCH.

## 2.5 Teste BDS (Brock, Dechert & Scheinkman)

Este teste foi proposto por Brock, Dechert & Scheinkman em 1996, o qual visa identificar se as variáveis aleatórias que compõem uma série são IID – independentes e identicamente distribuídas. Conforme Fernandes e Premont (2003), o BDS apresenta um alto poder contra uma variedade de modelos lineares, não lineares e não estacionários.

O teste BDS é derivado da medida conhecida como correlação integral, na qual se correlaciona dois pontos dispersos no espaço  $m$  – dimensional, No contexto de séries de tempo,  $X_t$ , será tratada como um vetor  $X_t^m = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$ . A correlação integral teórica será:

$$C(\zeta, m) = \int \int_{u \quad v} I(u, v, \zeta) dF_m(u) dF_m(v) \quad (2.20)$$

sendo que a função indicadora  $I(\cdot)$  é 1 quando  $|u - v| < \zeta$ , e zero, caso contrário;  $F_m(\cdot)$  é a função distribuição de  $X_t^m$ , ela indica a distribuição das  $m$ - observações consecutivas.

Adicionalmente, Brock, Dechert & Scheinkman (1996) demonstraram que a estatística generalizada:

$$C(\zeta, m, t) = \frac{2}{(T - m)(T - m + 1)} \sum_{t \leq s} I(X_t^m, X_s^m, \zeta) \quad (2.21)$$

é um estimador consistente de  $C(\zeta, m)$ . Conforme Serfling (1980 apud Fernandes & Preumont, 2003) a utilização de uma estatística vinculada ao fato de que esta apresenta mínima variância quando comparamos com todos os outros estimadores não viesados, converge rapidamente para a normalidade.

Se o processo  $X_t$  é IID, então  $F_m(X_t^m) = \prod_{i=0}^{m-1} F_1(X_{t-j})$ , e  $C(\zeta, m) = C(\zeta, 1)^m$  quase certamente. Esta relação é utilizada para construir o seguinte teste a fim de detectar os desvios da propriedade IID.

$$BDS(\zeta, m, T) = \sqrt{T} \frac{C(\zeta, m, T) - C(\zeta, 1, T)^m}{\sigma(\zeta, m, T)} \sim N(0, 1) \quad (2.22)$$

sendo que  $\sigma(\zeta, m, T)$  é uma função não trivial da correlação integral.

O teste BDS, será estimado via o software Eviews 5.0, dessa forma, no output do resultado, caso o p-valor seja inferior a 5% , rejeita-se a hipótese nula de que as séries sejam IID.

Após esta apresentação acerca dos modelos determinísticos paramétricos da volatilidade, apresentaremos no próximo capítulo uma forma não paramétrica de se estimar a

volatilidade das séries. Sendo que a grande diferença entre as formas de se estimar a volatilidade apresentadas nessa dissertação, está no aspecto que na estimação não-paramétrica não há necessidade de se supor qual distribuição os retornos seguem.

### 3 Estimação Não Paramétrica

A motivação para trabalhar-se com a estimação não paramétrica pode ser sintetizada na seguinte frase:

“.....trabalhar com modelos não paramétricos ao invés dos paramétricos se apresenta quando o pesquisador não possui conhecimento suficiente sobre o processo gerador explicativo, permitindo desta forma que os dados falem por si mesmos...”(Santos, 2008 pg 35)

Segundo Ziegelmann (2002), modelos não paramétricos são caracterizados por conter uma ou mais funções desconhecidas e por não apresentarem espaço paramétrico de dimensão finita. Existem os modelos semi-paramétricos os quais se caracterizam por serem compostos por uma ou mais funções desconhecidas, e por terem um espaço paramétrico desconhecido com dimensão finita. Por fim, os modelos paramétricos, explicitados no capítulo anterior, caracterizam-se por possuírem apenas o espaço paramétrico de dimensão finita como uma estrutura desconhecida.

Dessa forma, nos deparamos com um dilema, uma vez que a principal vantagem do modelo não paramétrico repousa no aspecto de minimizar o erro de especificação do modelo, entretanto essa maior flexibilidade na hora de definir o modelo gera alguns custos como: convergência mais lenta, perda do poder de extrapolação e o problema de dimensionalidade. Neste trabalho, será utilizado, o método de Suavização de Kernel para modelar as estruturas explicativas. Para tanto, podem ser encontradas referências desse modelo nos trabalhos de Ziegelmann (2002), Fan e Gilbels(1996) e Fan e Yao(2003).

Neste capítulo, será apresentado os principais pontos para a estimação não paramétrica. Adicionalmente, se apresentará a função núcleo e o estimador de Nadaraya – Watson. Por fim, apresentaremos os modelos aditivos os quais serão utilizados para estimarmos a volatilidade das séries do IBOVESPA e do ativo PETR4.

#### 3.1 Introdução

A estimação não paramétrica via Função Núcleo desenvolveu-se nos estudos das densidades. Esses estudos possibilitaram o desenvolvimento da estimação via função núcleo, pois se sabia que a função de distribuição empírica era o melhor estimador para a função de

distribuição desconhecida; entretanto no estudo das densidades essa associação não poderia ser realizada diretamente; sendo este o fato gerador das funções núcleo.

Definição 3.1.1 ( Distribuição Empírica ).

Seja  $\{X_1; X_2, \dots, X_n\}$  uma amostra aleatória de  $F_X$ . O estimador empírico de  $F_X$  é dado por:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x)}(X_i), \quad \forall x \in R \quad (3.1)$$

Como o estimador  $\hat{F}_n$  não é diferenciável (nos pontos amostrais), não podemos utilizá-lo para estimar a densidade de X. Dessa forma, será utilizado um estimador alternativo a (3.1) o qual é descrito por

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[x]}(X_i), \quad \forall x \in R \quad (3.2)$$

Sendo este um estimador empírico de  $f_x$ . Entretanto, mesmo na utilização desse estimador alternativo, incorremos em um conflito, uma vez que a probabilidade do evento  $[X_i = x]$  ocorrer é nula, caso  $X_i$  seja uma variável aleatória contínua. Mediante isso, reescreveremos (3.2) como,

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[x]}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0]}(X_i - x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(X_i - x) \quad (3.3)$$

onde  $K(\cdot) = 1_{[0]}(\cdot)$ . Após essa flexibilização da fórmula; utilizando (3.3), com propriedades de regularidades mais desejáveis, cria-se uma família de estimadores cujos desempenhos são próximos do ótimo.

Definição 3.1.2 (estimador de Densidade)

Seja  $\{X_1; X_2, \dots, X_n\}$  uma amostra aleatória da distribuição  $F_X = \left(\int f_x\right)$ . O estimador por função – núcleo de  $f_x$  é dado por:



$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(X_i - x), \quad (3.4)$$

onde  $K(\cdot)$  é uma função conhecida, intitulada função núcleo.

Todavia, para que o estimador definido pela função (3.4) tenha propriedades que respeitem nossos interesses, devemos restringi-lo a funções  $K(\cdot)$  que respeitem as propriedades de regularidade que serão apresentadas na seção posterior.

### 3.2 Restrição nas Funções Núcleos

Sendo a função  $K(X_i - \cdot)$  interpretada como o peso de cada variável aleatória sob o estimador de densidade, num ponto específico de  $x \in R$ ; faz sentido que a função  $K(\cdot)$  seja simétrica, tal que as variáveis localizadas na mesma distância de  $x$  tenham o mesmo peso na estimativa da densidade empírica de  $x$ . Para tanto, toma-se como premissas básicas que a função núcleo satisfaça os seguintes axiomas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1 \quad (3.5) \text{ Continuidade}$$

e, como consequência o da simetria, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx = 0 \quad (3.6)$$

Para tanto, vide o quadro 1 abaixo, o qual ilustra alguns exemplos de funções núcleos para casos conhecidos<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> Segundo Cleveland e Loader (1996a, p. 11) e Loader (1999, p. 23) esta função deve ser contínua, simétrica, com maior peso em torno de  $x_0$  e decrescente a medida em que  $x$  se afasta de  $x_0$ . Dentre as escolhas possíveis, destacam-se as funções retangular, tri-cúbica, de Epanechnikov e a normal ou Gaussiana.

K(x)	Nome
$\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$	Uniforme
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Normal
$0,75(1-x^2)\mathbf{1}_{( x \leq 1)}$	Epanechnikov
$\frac{15}{16}(1-x^2)^2\mathbf{1}_{( x \leq 1)}$	Biponderada
$(1- x )\mathbf{1}_{( x \leq 1)}$	Triangular
$\frac{1}{2}\mathbf{1}_{( x \leq 1)}$	Retangular

**Quadro 1 – Funções Núcleos**

### 3.3 Parâmetro de Suavização

Adicionalmente, para gerar maior flexibilização da estimativa  $f_x$ , um novo parâmetro será introduzido, sendo esse responsável por quantificar a escala<sup>14</sup> ou grau que cada variável aleatória influenciará na definição da estimativa. A nova função é descrita por:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) \quad (3.7)$$

onde  $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$ . O parâmetro  $h$ , conhecido como parâmetro de suavização ou de alisamento, influencia diretamente o peso dado a cada estimativa de  $x$  para definição da estimativa para  $f_x(x)$ . Dessa forma, utilizando-se um parâmetro  $h$  “grande”, observações mais afastadas de  $x$  passarão a influenciar mais a estimativa de  $f_x(x)$ , enquanto que quanto menor o  $h$ , mais influência terão as variáveis mais próximas de  $x$ . Segundo Ziegelmann (2002), quanto maior for o parâmetro de suavização, mais suave torna-se a função de densidade, sendo assim mais plana e regular; já quanto menor o parâmetro, mais detalhada e irregular a função fica. Esse detalhamento ou suavização da densidade é acarretada pela influência do parâmetro  $h$  junto ao núcleo da função escolhida, para melhor apreciação vide

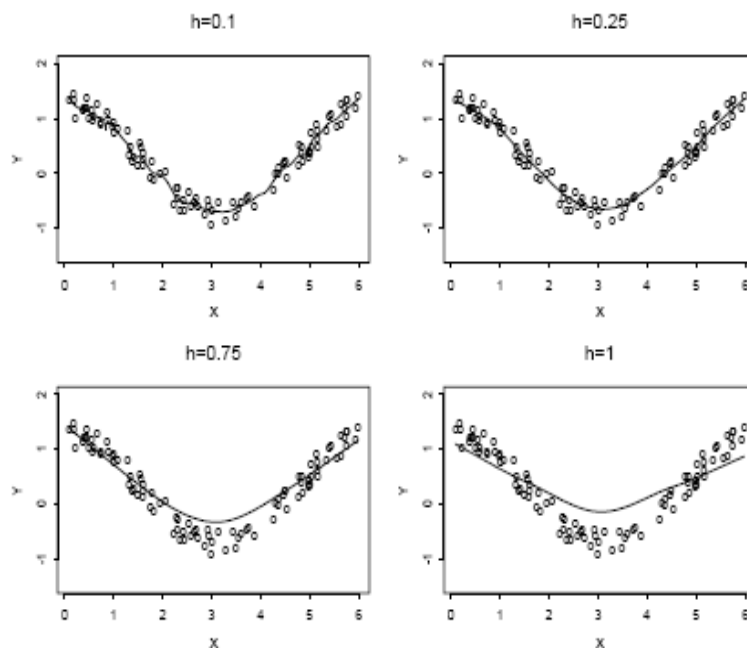


gráfico 2

**Gráfico 2: exemplificação dos parâmetros de suavização.**

<sup>14</sup> O quanto de informação o dado carregará para definição da densidade; ou de outra maneira, indicará a vizinhança de dados para determinação do modelo.

Nota-se que o gráfico 2 mostra estimativas de regressão local para diferentes valores de  $h$ . Conforme dito por Ziegelmann (2002), quando  $h = 0,1$  se obtém uma função muito mais detalhada em comparação a utilização de  $h = 1$ . Todavia, para esta função, o  $h$  que melhor captura a real curva das variáveis  $X$  e  $Y$  é o  $0,25$  já que a curvatura da função expressa com exatidão a distribuição das variáveis pré definidas. Segundo Cleveland e Loader (1996), o grande objetivo na definição do  $h^*$  é produzir uma estimativa que não distorça a relação de dependência das variáveis envolvidas na função.

Por fim, o parâmetro  $h^*$  define o número “real” de observações que serão utilizadas na composição da estimativa de cada  $f_X(x)$ .

### 3.3.1 Formas de definir-se o $h^*$

A literatura é rica quanto a formas de definir-se o  $h$  que melhor expressa a relação de dependência das variáveis envolvidas. Neste trabalho, será apresentado um breve resumo das pesquisas realizadas por Loader (1995 e 1999) as quais discutem dois métodos diferentes de definição do  $h^*$ .

Loader concluiu que a definição do  $h^*$  pode ser dividida em dois grupos: os que utilizam o critério de informação e *cross validation* para definir o  $h^*$ , e os que utilizam aproximação via séries de Taylor para definição do parâmetro de suavização ótimo.

#### 3.3.1.1 Critério de Informação e Validação Cruzada.

Estes métodos caracterizam-se por também serem utilizados na estimação da regressão paramétrica. Dessa forma, estes métodos consistem em se usar alguma medida de aderência para chegar-se ao parâmetro ótimo. Segundo Santos (2008), o princípio básico da validação cruzada é “*prever cada valor da resposta  $Y_i$ , do restante dos dados, isto é, deixando-se um dos pontos da amostra de lado para validação do modelo e utilizando-se as observações restantes para sua estimação*” (pg 42. Santos 2008).

Observando-se a função da validação cruzada,

$$CV(h) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \{Y_t - m_{h-t}(X_t)\}^2 \quad (3.8)$$

deduz-se que o  $h^*$  será aquele valor que minimizar a função 3.8, já que esta muito se parece com a equação dos betas de uma regressão paramétrica onde  $CV(h^*) = 0$ .

Quanto à utilização do Critério de informação para definição do parâmetro ótimo de suavização, entende-se que quanto maior for a estatística oriunda da utilização do  $h$  melhor será o modelo, visto que os critérios de Akaike e Schwarz dizem que quanto maior em módulo for a estatística gerada na utilização desse parâmetro melhor é o modelo.

### 3.3.1.2 Seletores Anexos (Plug-in)

Flexibilizando-se a equação do erro em média quadrática Via expansão de Taylor, temos<sup>15</sup>:

$$h^* = C_p(k) \left\{ \frac{\int \sigma^2(x) dx}{T \int [m^{(p+1)}(x)]^2 f(x) dx} \right\}^{\frac{1}{(2p+3)}} \quad (3.9)$$

Segundo Ziegelmann (2002), a intenção é usar a expressão 3.9 como seletor de janela, mas como existem alguns termos desconhecidos os mesmos precisam ser estimados. O método “*direct plug in*” consiste em estimar os termos desconhecidos de 3.9 e substituir os mesmos por suas estimativas.

### 3.4 Estimador de Nadaraya-Watson

Para analisar a interação de um conjunto de dados IID, neste caso  $(X, Y)$ , cujo tamanho da população seja  $n$ ,  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ , define-se que a esperança condicional desse conjunto seja assim apresentada:

$$E(Y / X = x) \quad (3.10)$$

<sup>15</sup> Para melhor apreciação vide Santos (2008).

e adicionalmente, deseja-se modelar a relação entre as variáveis que compõem esse conjunto como:

$$Y_i = E(Y_i / X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

onde  $\varepsilon_i$  é o erro amostral de cada observação,

Definindo  $m(x)$  como a representação de  $E(Y / X = x)$  e supondo-se que o conjunto composto por X e Y seja contínuo; temos:

$$m(x) = \int_R y f_{Y/X=x}(y) dy = \int_R y \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} d(y) \quad (3.12)$$

Utilizando-se o método Plug - In, apresentado anteriormente<sup>16</sup> chegamos:

$$m(x) = \int_R y \frac{\hat{f}_{XY}(x, y)}{\hat{f}_X(x)} dy \quad (3.13)$$

conforme visto em 3.7, definiu-se um estimador ótimo para  $f_x(x)$ , agora será definido, um estimador ótimo para  $f(X, Y)$  utilizando-se o parâmetro de suavização. Dessa forma, utilizando-se o raciocínio análogo, chegamos:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{nh^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) K\left(\frac{Y_i - y}{h}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) K_h(Y_i - y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$ . Substituindo 3.7 e 3.14 em 3.13, temos:

---

<sup>16</sup> Substituindo-se as funções desconhecidas por suas estimativas 3.11.

$$\hat{m}(x) = \int_R \frac{\hat{f}_{XY}(x, y)}{\hat{f}_X(x)} dy = \quad (3.15.1)$$

$$\int_R y \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) K\left(\frac{Y_i - y}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} dy = \quad (3.15.2)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) \int_R y K\left(\frac{Y_i - y}{h}\right) dy}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} \quad (3.15.3)$$

através da transformação de variáveis  $v = \left(\frac{Y_i - y}{h}\right)$  e lembrando que os axiomas necessários para a função  $K(\cdot)$  é que ela seja simétrica e possua norma 1, dessa forma;

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) \int_R y K(v) dy}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} = \quad (3.16)$$

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) Y_i}{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x)} \quad (3.16.1)$$

sendo que a equação 3.16.1 expressa o estimador de Nadaraya – Watson.

Podemos reescrever a equação 3.16.1 por

$$\hat{m}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{n,i}(x) Y_i \quad (3.17)$$

onde

$$W_{n,i}(x) = \frac{nK_h(X_i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x)} \quad (3.18)$$

Nota-se que o estimador de Nadaraya - Watson descrito na equação 3.17, nada mais é que a média ponderada das  $n$  observações de  $Y$  pela seqüência de pesos definidas por  $W_{n,i}$ .

### 3.5 Modelos Aditivos

Os modelos aditivos são uma generalização dos modelos de regressão lineares, os quais foram estudados por Hastie & Tibshirani (1990). Enquanto, nos modelos de regressão linear múltipla a função de regressão é tida como linear, e dessa forma, aditiva nas variáveis explicativas; nos modelos aditivos, o pressuposto de linearidade é abandonado, mas a forma aditiva é mantida. Sendo assim, conforme Hastie & Tibshirani (1990), o principal insight desenvolvido pelos modelos aditivos repousa no aspecto de permitir que os componentes de regressão linear assumam formas não paramétricas.

Segundo Fan & Gijbels (1996), o modelo aditivo é definido por:

$$Y = \alpha + \sum_{j=1}^d g_j(X_j) + \varepsilon \quad (3.19)$$

onde  $g_j = g_1, \dots, g_d$  são funções univariadas desconhecidas. Segundo Hastie & Tibshirani (1990) para evitar a existência de constantes livres, e por consequência, garantir a *identificabilidade* do modelo se faz necessário a seguinte restrição:

$$E\{g_j(X_j)\} = 0, \quad j = 1, \dots, d \quad (3.20)$$



fato, este que impõe:

$$E(Y) = \alpha \quad (3.21)$$

o que caracteriza que esse modelo pode ser encarado como um mecanismo para redução da dimensão.

Ainda segundo Fan & Gijbels (1996), quando o modelo aditivo é válido, tem - se;

$$E\left\{Y - \alpha - \sum_{j \neq k} g_j(X_j) \mid X_k\right\} = g_k(X_k), \quad k = 1, \dots, d \quad (3.22)$$

O que implica no surgimento de um algoritmo o qual permite calcular de maneira independente e univariada cada função de  $g_1, \dots, g_d$ . Esse algoritmo independente é conhecido por Backfitting Algorithm; o qual será brevemente apresentado abaixo.

### 3.5.1 Backfitting Algorithm

Esse procedimento consiste em através da regressão inicial, calcular os resíduos parciais desta e regredir novamente. O procedimento de Backfitting Algorithm segue os seguintes passos:

- 1) Inicialização:  $\hat{\alpha} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$ ,  $\hat{g}_k = g_k^0$ ,  $k = 1, \dots, d$
- 2) Para cada  $k = 1, \dots, d$ , obter  $\hat{g}_k = S_k \left\{ Y - \hat{\alpha} - \sum_{j \neq k} \hat{g}_j(X_j / X_k) \right\}$  e obter  $\hat{g}(\cdot)$ .
- 3) Manter rodando até o segundo passo convergir.

Por fim, conclui-se que os modelos aditivos superam o problema de dimensionalidade, devido ao sistema de ajuste ser construído a partir de suavizadores univariados (Ziegelmann, 2002). Adicionalmente, espera-se que o Backfitting Algorithm gere estimativas que sejam as melhores aproximações aditivas à superfície de regressão.

Com o objetivo de sintetizar tudo que foi apresentado sobre modelos aditivos em uma frase, temos:

“...nos modelos aditivos, podemos verificar a contribuição individual de cada variável em prever a resposta.” (Kirchner, Souza & Zielgelmann, pg 4)

### 3.5.2 Modelos Aditivos de Volatilidade

De acordo com o exemplo sugerido por Zielgelmann (2002), no qual volatilidade é descrita por modelos aditivos, tem-se:

$$\sigma^2(X_t) = \prod_{i=0}^{d-1} g_i(X_{t-i}) \quad (3.23)$$

sendo que o mesmo pode ser reescrito por:

$$\log \sigma^2(X_t) = \sum_{i=0}^{d-1} \log g_i(X_{t-i}) \quad (3.24)$$

sendo a expressão (3.24) a representação do modelo aditivo para o log da volatilidade. Conforme explicitado anteriormente, utilizamos o procedimento de Backfitting Algorithm para gerarmos as melhores aproximações aditivas à superfície da regressão.

Entretanto, nada foi dito sobre como identificar o melhor modelo aditivo para estimar-se a volatilidade das séries de ativos a serem utilizadas nesse trabalho. Sendo assim, na seção posterior, serão apresentadas duas formas para efetuarmos esse procedimento de identificação.

### 3.5.3 Identificação dos Modelos Aditivos

Segundo Hastie & Tibshirani (1990), uma forma de se realizar a inferência quanto a identificação dos modelos aditivos é a utilização da soma dos quadrados dos resíduos e seus graus de liberdade aproximados como mecanismo de auxílio na escolha dos modelos.

A partir do modelo aditivo<sup>17</sup>;

$$y_i = \alpha + \sum_{j=1}^d g_j(X_{ji}) + \varepsilon_i, \quad (3.25)$$

a soma dos quadrados dos resíduos pode ser definida como:

$$SQR = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i \right)^2 \quad (3.26)$$

onde  $\hat{y}_i$  denota o valor ajustado através da avaliação do modelo na observação  $x_i$ .

Como, em cada passo do procedimento de Backfitting Algorithm, uma matriz de suavização está envolvida, a qual é definida por  $S_j$ , podemos<sup>18</sup> representar o modelo aditivo ajustado para cada observação como  $S_j y$ , onde  $y$  denota o vetor de respostas observadas. Dessa forma segundo Bowman & Azzalini (1997), os graus de liberdade utilizados no modelo podem ser calculados via utilização da última matriz, neste caso  $S_n$ . Por fim, tem-se uma estimativa a ser utilizada como o número de graus de liberdade da especificação do modelo. Adicionalmente, a estimativa dos graus de liberdade são obtidos através do traço da matriz de suavização  $S_i$ .

A comparação entre modelos alternativos podem ser efetuadas através de um teste F aproximado ou a partir de um critério de informação aproximado de Akaike (AIC).

O teste F aproximado é especificado da seguinte maneira:

$$F = \frac{(SQR_2 - SQR_1) / (df_2^{res} - df_1^{res})}{SQR_1 / df_1^{res}} \quad (3.27)$$

esse teste baseia-se no teste F para comparação de modelos paramétricos. Entretanto, no que diz respeito à distribuição a seguir para apuração dos valores, não pode-se realizar a mesma

<sup>17</sup> Exemplo proposto por Santos (2008)

<sup>18</sup> As linhas da matriz  $S_j$  consistem nos pesos que foram utilizados na estimação de cada  $x_i$ .

analogia ao teste F original, ao passo que Hastie & Tibshirani (1990) sugerem que ao menos alguma aproximação pode ser feita mediante as estimativas de

$(df_2^{res} - df_1^{res})$  e  $df_1^{res}$  como os graus de liberdade a serem utilizados.

A outra forma de compararmos os modelos aditivos é pelo critério de informação aproximado de Akaike (AIC), sendo este utilizado para comparação dos modelos alternativos ou ,como especificado anteriormente, para definição do parâmetro de suavização ótimo.

O critério de informação é descrito por:

$$AIC = D\left(y; \hat{\mu}\right) | n + 2df\phi | n \quad (3.28)$$

onde os graus de liberdade ,  $df = tr(S)$ , tornam o AIC assintoticamente não viesado.

Desta forma, neste capítulo procurou-se apresentar a metodologia necessária para a estimação dos modelos não paramétricos. Com isso, no capítulo 4 realizaremos a estimação da volatilidade do Índice IBOVESPA, bem como do ativo PETR4 pelos métodos paramétricos e não paramétricos com o objetivo de respondermos o seguinte questionamento: Será que conseguiremos comprovar a existência da correlação entre a volatilidade do IBO

VESPA com o ativo PETR4 e vice versa? Adicionalmente, tentaremos desmistificar qual método de estimação é mais eficiente para esses casos.

## 4. Estimação dos Modelos

Neste capítulo, se estimará a volatilidade de forma paramétrica e não paramétrica de duas séries financeiras de alta representatividade para o mercado de capitais brasileiro. As séries são o Índice IBOVESPA e o ativo PETR4, o qual é o mais negociado na bolsa de capitais de São Paulo. Nossa amostra é composta por 3576 observações, sendo o período de análise compreendido entre 01 de Julho de 1994 a 31 de Dezembro de 2008.

Frisa-se, que a série do IBOVESPA, foi coletada do site “[br.finance.yahoo.com](http://br.finance.yahoo.com)”, enquanto que os preços diários do ativo da Petrobrás foram coletados no próprio site da empresa; [www.petrobras.com.br](http://www.petrobras.com.br).

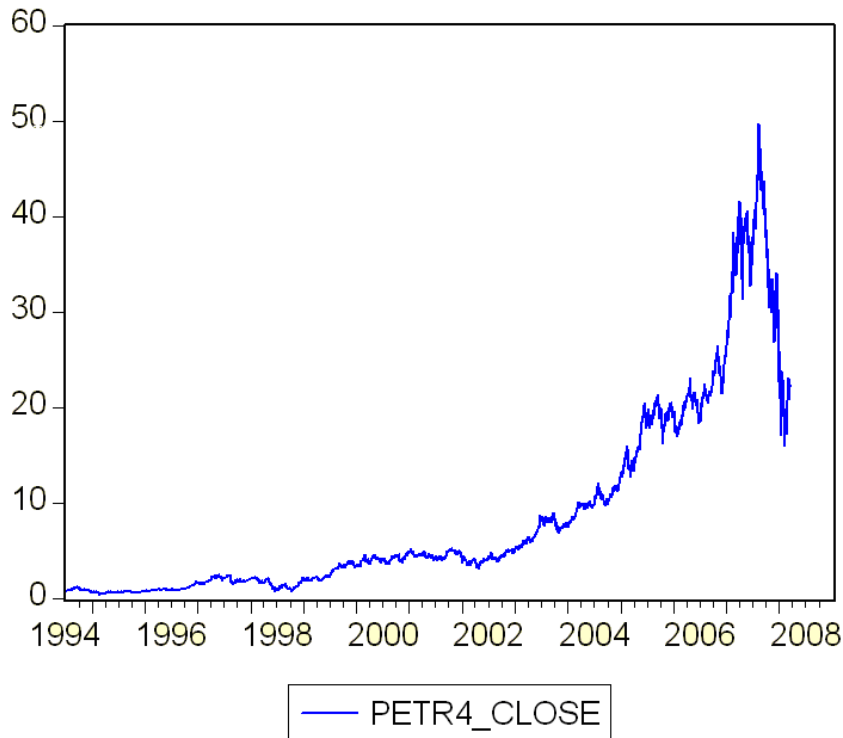
Dessa forma, na primeira seção deste capítulo, serão apresentados os dados, para os quais será realizado uma breve reflexão, e após, se efetuará, todos os procedimentos econométricos para a estimação da volatilidade de ambas as séries.

### 4.1 Apresentando as Séries

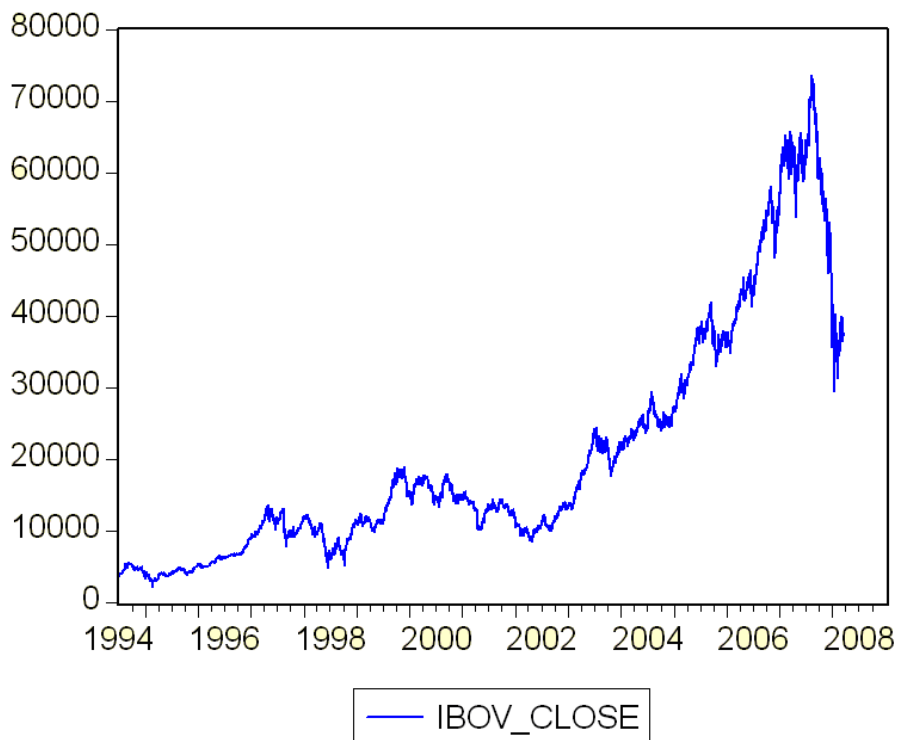
Essas duas séries foram selecionadas como nossas amostras de estudo, uma vez que o objetivo principal desse trabalho é demonstrar que a volatilidade do Índice IBOVESPA é altamente influenciada pela volatilidade do ativo PETR4<sup>19</sup>. Observando-se os gráficos individuais da oscilação dos preços de fechamentos do ativo PETR4 bem como do IBOVESPA tem-se,

---

<sup>19</sup> A idéia central, é demonstrar que o ativo PETR4, representa por quase a totalidade da variação índice IBOVESPA.

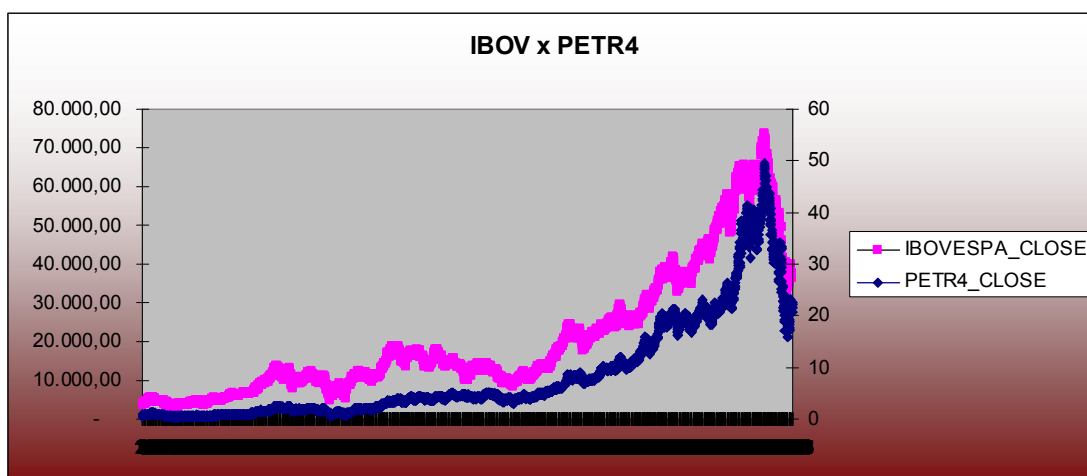


**Gráfico 3 - Preços de Fechamento PETR4**



**Gráfico 4 - Valor de Fechamento do IBOVESPA**

Onde nota-se uma forte simetria das variações, entretanto para facilitar a análise, verifiquemos o Gráfico 5 o qual traz as séries sobrepostas uma a outra;



**Gráfico 5 – Variação IBOVESPA x PETR4**

Fica visível que a tendência de ambas as séries é praticamente a mesma, embora o IBOVESPA sofra maiores oscilações.

Dando-se continuidade ao trabalho, se definirá o real significado do Índice IBOVESPA.

#### **4.1.1. O que é IBOVESPA?**

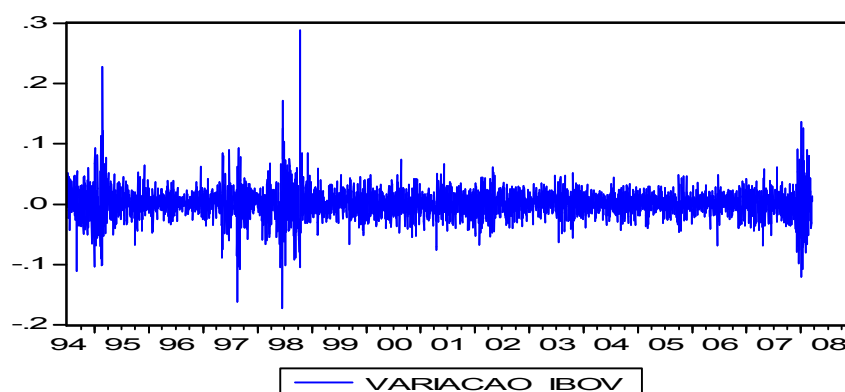
Conforme a verificado no site da BMF&BOVESPA<sup>20</sup>, o IBOVESPA é o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações constituída em 02/01/1968 (valor-base: 100 pontos), a partir de uma aplicação hipotética. Supõe-se não ter sido efetuado nenhum investimento adicional desde então, considerando-se somente os ajustes efetuados em decorrência da distribuição de proventos pelas empresas emissoras (tais como reinversão de dividendos recebidos e do valor apurado com a venda de direitos de subscrição, e manutenção em carteira das ações recebidas em bonificação). Dessa forma, o índice reflete não apenas as variações dos preços das ações, mas também o impacto da distribuição dos proventos, sendo considerado um indicador que avalia o retorno total de suas ações componentes. Sendo que a carteira teórica do IBOVESPA é formada pelas ações que atenderam cumulativamente aos seguintes critérios, com relação aos doze meses anteriores à formação da carteira: i) estar incluída em uma relação de ações cujos índices de negociabilidade somados representem 80% do valor acumulado de todos os índices individuais; ii) apresentem participação, em termos de

<sup>20</sup> [www.bovespa.com.br](http://www.bovespa.com.br)

volume, superior a 0,1% do total; iii) ter sido negociada em mais de 80% do total de pregões do período. Dentro dessa metodologia, a cada quadrimestre a carteira teórica do IBOVESPA é reavaliada, visando manter a sua representatividade ao longo do tempo. Em tais reavaliações, identificam-se as alterações na participação relativa de cada ação no índice, bem como sua permanência ou exclusão, além é claro, das novas inclusões. Vale destacar que as ações que não atenderem simultaneamente a dois dos três critérios definidos para a inclusão são excluídas do IBOVESPA. A carteira teórica tem vigência de quatro meses, vigorando para os períodos janeiro-abril, maio- agosto e setembro-dezembro.

Um ponto que dever ser ressaltado é que o ativo PETR4 compõe o IBOVESPA, todavia, não podemos considerar que apenas um ativo possua tamanha capacidade de influenciar um índice composto por mais de 150 ativos das mais diversas companhias brasileiras.

Por fim, pode-se verificar no gráfico 6 os retornos diários<sup>21</sup> do IBOVESPA para o período de análise,



**Gráfico 6 – Retornos diários IBOVESPA**

onde se not, cluster's<sup>22</sup> de volatilidade acentuados no final de 1994 em decorrência da implementação do plano Real e também influenciada pela Crise no México; no anos de 1997 ,1998 e início de 1999 com a chamada crise dos Tigres Asiáticos e com a crise na Rússia, e entre 2007 e 2008 com a crise do Sub-prime.

<sup>21</sup> Como definido no capítulo 2, consideramos o retorno de uma série como:  $X_y = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$

<sup>22</sup> Agrupamentos, momentos de alta volatilidade.



#### 4.1.2 Variações Petr4 x Preço do Petróleo

Analisando-se as cotações do ativo PETR4, em comparação com o preço do Brent<sup>23</sup>, o qual está expresso em R\$, notamos uma forte simetria das variações.

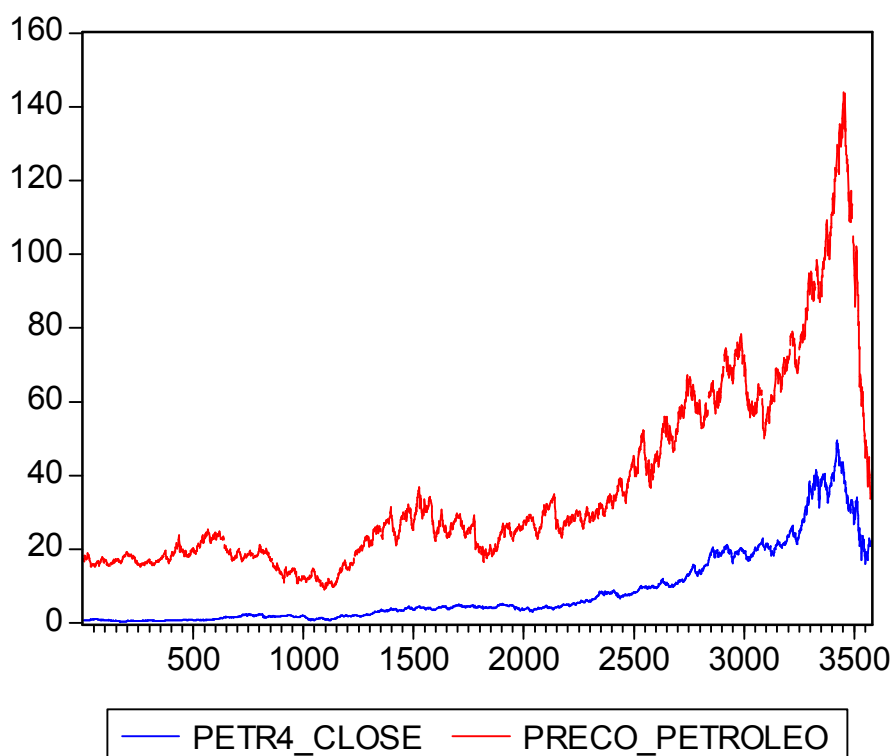


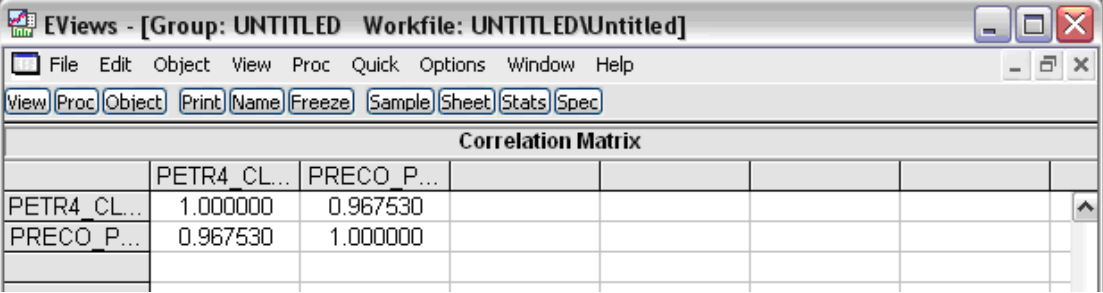
Gráfico 7 – PETR4 x Preço do Brent

Adicionalmente, realizando-se uma análise criteriosa do gráfico notamos que o valor do ativo da PETR4, segue a mesma tendência das variações dos preços do petróleo. Frisa-se que essa tendência era esperada, uma vez que o petróleo é uma commodity com alta demanda mundial, e por se tratar de um bem cuja fonte é esgotável, em períodos de menores ofertas, seu preço sofre forte variação e as ações das empresas “produtoras” de petróleo sofrem essa influência. Períodos como a Guerra do Golfo (não compreendido nesse trabalho), bem como a invasão norte americana no Afeganistão, impactam positivamente no preço do Brent, uma vez que nesses episódios a oferta do bem poderia sofrer alguma pressão e conseqüentemente, seu preço internacional aumenta o que impacta diretamente nas cotações das empresas petrolíferas.

<sup>23</sup> Brent, nada mais é que petróleo cru.

Neste trabalho, entretanto não se acredita que o impacto de uma variação dos preços do petróleo afete na mesma grandeza os preços dos ativos das empresas petrolíferas, já que fatores externos podem sustentar os ativos das empresas, por exemplo, como a descoberta de poços da camada pré-sal realizadas pela Petrobrás entre Junho e Julho de 2008, em meio a crise do sub-prime.

Para corroborar com a análise gráfica, realizou-se um teste de correlação entre o Preço do Brent e a cotação da Petr4, chegando-se ao seguinte resultado:



The screenshot shows the EViews software interface with a 'Correlation Matrix' window. The window title is 'EViews - [Group: UNTITLED Workfile: UNTITLED\Untitled]'. The menu bar includes File, Edit, Object, View, Proc, Quick, Options, Window, and Help. Below the menu bar are buttons for View, Proc, Object, Print, Name, Freeze, Sample, Sheet, Stats, and Spec. The main area displays a table with the following data:

Correlation Matrix							
	PETR4_CL...	PRECO_P...					
PETR4_CL...	1.000000	0.967530					
PRECO_P...	0.967530	1.000000					

**Quadro 2 – Correlação entre o preço do Brent x Cotação PETR4**

Conforme a tela do software estatístico EViews 5.0, nota-se que a correlação entre as duas variáveis é de 0,96, de um total de 1; o que vem a validar a interpretação executada no gráfico 7, que preço do Brent tem forte influência sobre os ativos das empresas petrolíferas, neste caso, na Petrobrás.

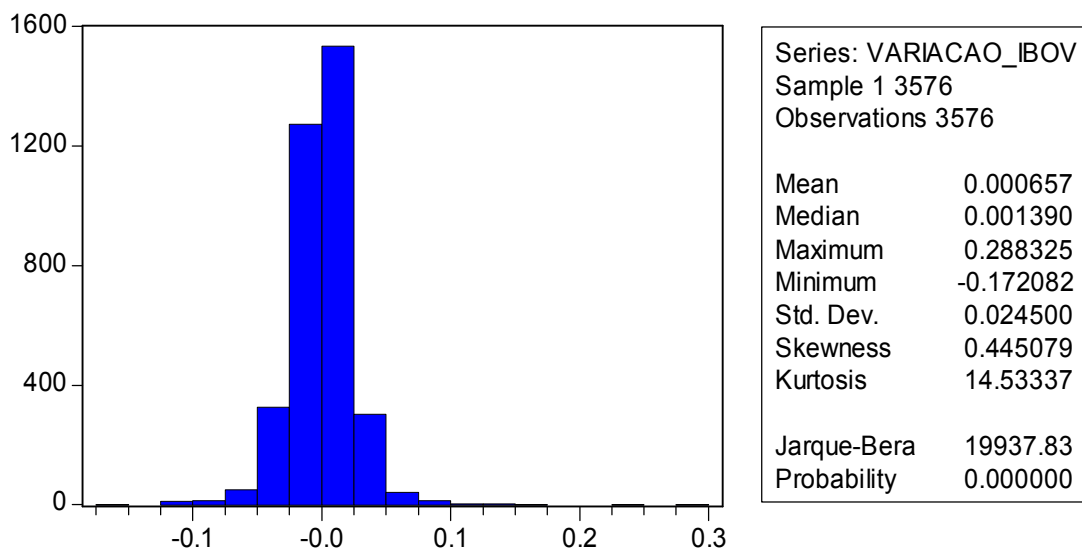
Dessa forma, na próxima seção desse trabalho, serão apresentadas as características estatísticas das duas séries utilizadas nessa dissertação.

## 4.2 Características Estatísticas das Séries (análise quantitativa dos dados)

Nesta seção do trabalho, será demonstrado via gráficos e testes estatísticos quais as principais características<sup>24</sup> das séries do PETR4 e IBOVESPA no período de análise. Salienta-se que nossa amostra é composta por 3576 observações, as quais compreendem o período histórico de 01 de Julho de 1994 a 31 de Dezembro de 2008.

### 4.2.1 IBOVESPA

Observando-se o histograma da série dos retornos diários do IBOVESPA conclui-se:



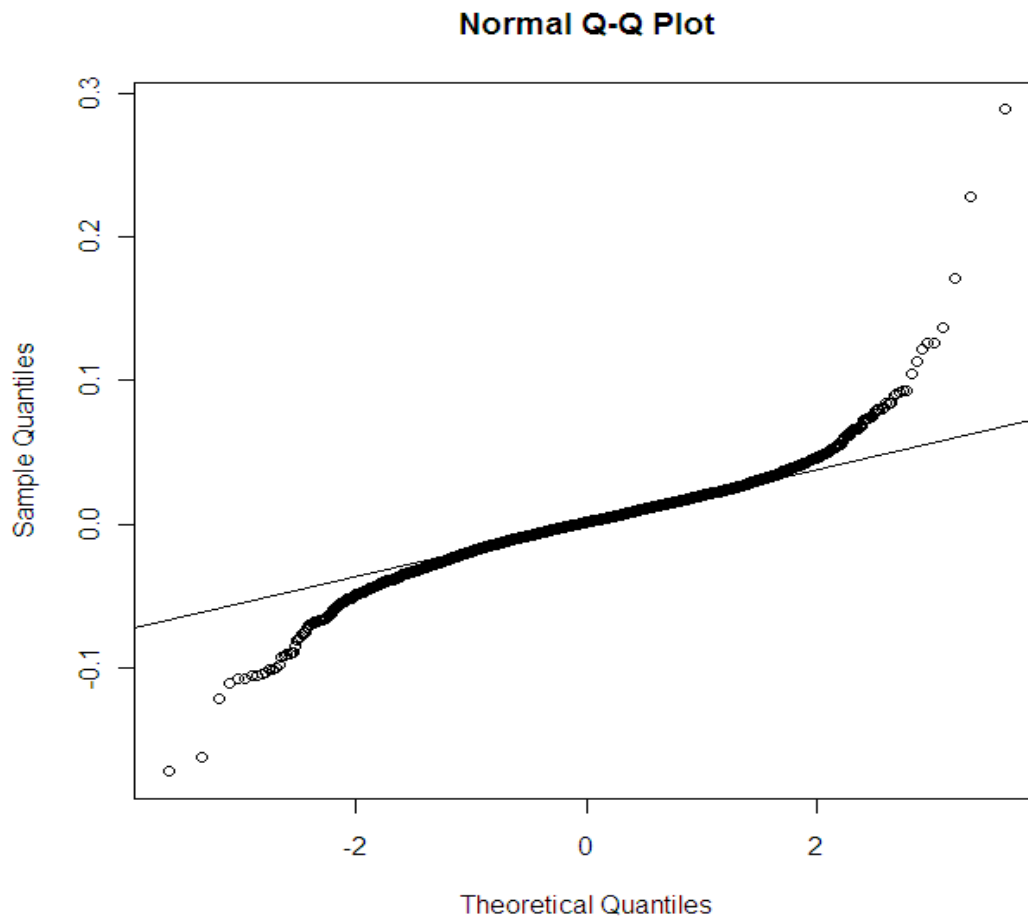
**Gráfico 8 – Histograma Retornos Diários IBOVESPA**

que os retornos não seguem uma distribuição normal, já que se analisando o coeficiente de Curtose<sup>25</sup> da série identifica-se que o valor é de 14,53, sendo que o coeficiente de uma série normal é próximo de 3. Adicionalmente, verifica-se que a estatística do teste de Jarque-Bera, o qual detém como hipótese nula de a série ser normalmente distribuída, é rejeitada uma vez que seu p-valor é igual a zero. Ainda na análise dos retornos diários do IBOVESPA, nota-se via gráfico dos quantis, as caudas pesadas da série, fato este que vem a corroborar com a

<sup>24</sup> Entende-se como principais características os seguintes aspectos: Histograma das séries, teste BDS, desvio padrão, coeficiente de curtose e assimetria e teste de Jaque – Bera.

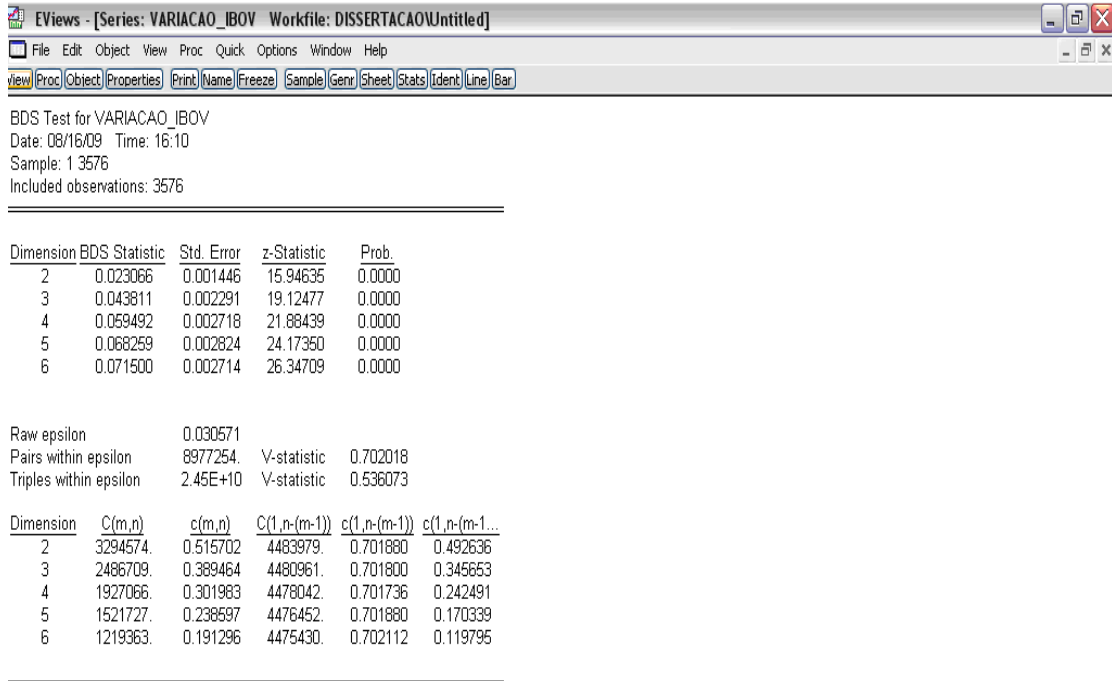
<sup>25</sup> No gráfico, está descrito em inglês como "Kurtosis".

conclusão dos retornos não serem normalmente distribuídos. Adicionalmente, identificou-se que a distribuição dos retornos diários do IBOVESPA possui uma maior concentração para retornos negativos, o que indicará que um modelo heterocedástico, que capte o efeito da assimetria, seja o mais indicado.



**Gráfico 9 – Plot Q – Q Retornos diários IBOVESPA.**

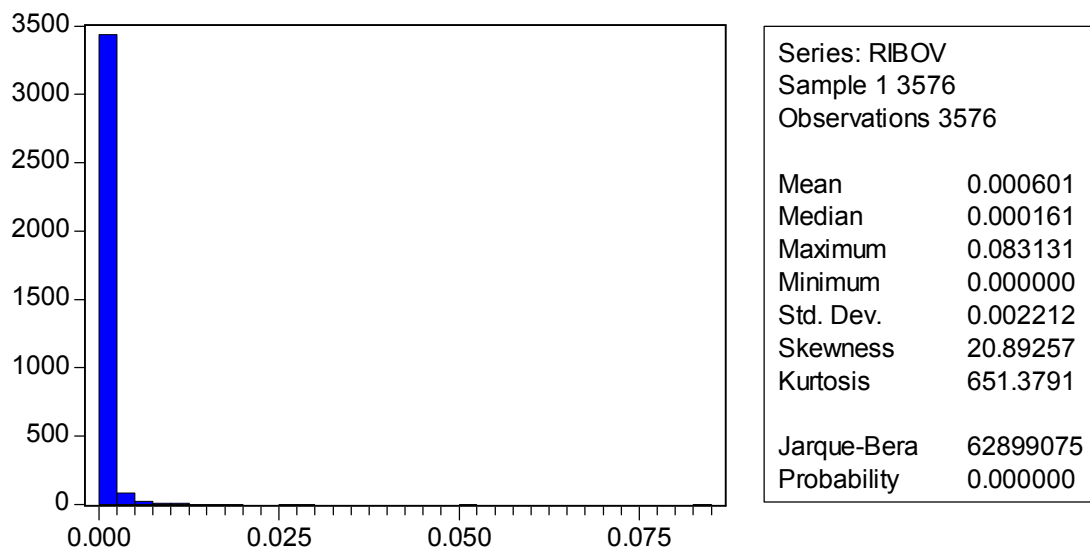
Em continuidade com a bateria de testes, realizou-se o teste BDS, a qual, conforme explicitação no capítulo 2, busca identificar se a série é IID. Entretanto, percebe-se que a série sofre correlação serial, ao passo que o teste BDS, com certeza rejeitará a hipótese nula de que a série seja IID.



**Quadro 3 – Output teste BDS Eviews 5.0**

Conforme output do teste fica evidenciado que a série sofre com algum tipo de dependência, uma vez que os p-valores para todas as dimensões do teste são iguais a zero, o que leva a aceitar a hipótese alternativa de que a série não é IID.

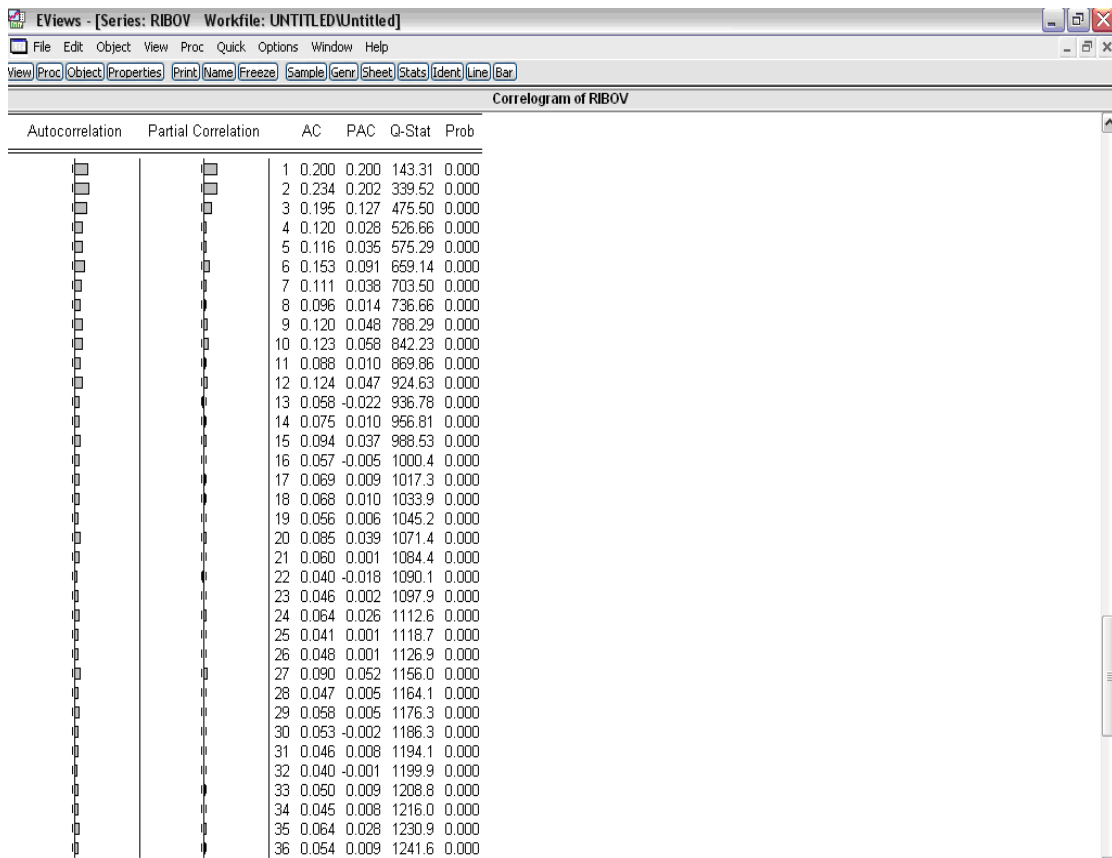
Agora, analisando-se as estatísticas provenientes dos retornos ao quadrado do IBOVESPA, encontra-se:



**Gráfico 10 – Histograma Retornos diários ao quadrado do índice IBOVESPA**

Claramente, a série não é normalmente distribuída, como indica o teste de Jarque – Bera.

E validando o conceito de Engle (1982), sobre os modelos de heterocedasticidade condicional, realizou-se o correlograma dos retornos ao quadrado do IBOVESPA, comprovando a correlação serial entre os retornos:



**Quadro 4 - Correlograma dos Retornos diários ao Quadrado do IBOVESPA**

Para tanto, vide que as barras das funções de autocorrelação e de auto -correlação parcial, transpõem o limite máximo o que indica que série sofre de correlação serial.

Esse resultado sustenta a utilização dos modelos de heterocedasticidade condicional para melhor estimação da volatilidade da série.

#### 4.2.2 PETR4

Efetuando-se a mesma análise executada para a série do IBOVESPA, temos as seguintes características sobre a série dos retornos diários do ativo PETR4:

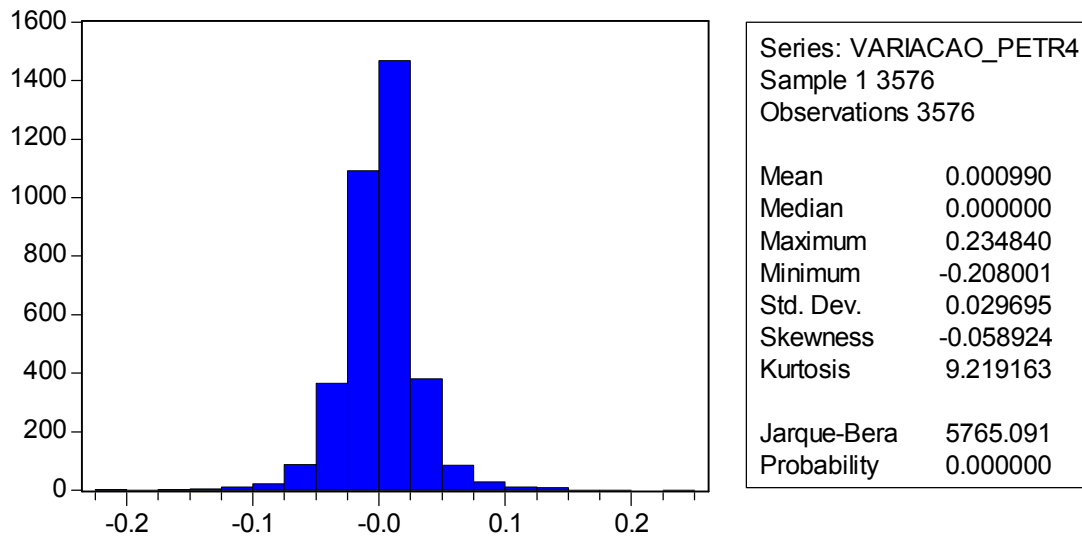
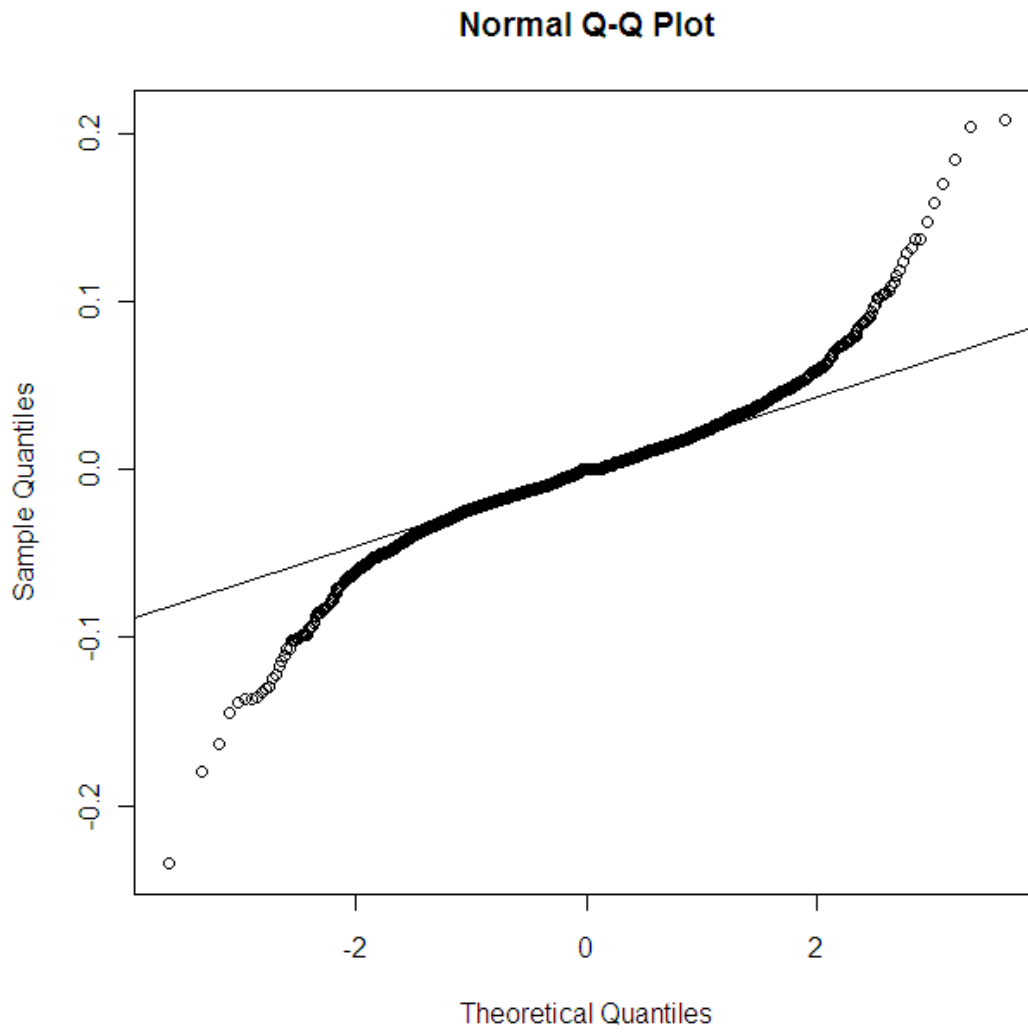


Gráfico 11 – Histograma Retornos Diários PETR4

verifica-se que não se pode assumir que a série seja normalmente distribuída pelo fato das estatísticas do teste de Jarque-Bera e pelo fato do coeficiente de Curtose negarem essa suposição. Percebe-se também, que a maior parte dos retornos assumem valores negativos, ao passo que modelos de heterocedasticidade condicional que capturem a assimetria dos retornos sejam os mais indicados<sup>26</sup>.

Para tanto, será apresentado o gráfico dos quantis o qual explicita a cauda pesada dos retornos diários do ativo PETR4 e a maior presença de retornos negativos.

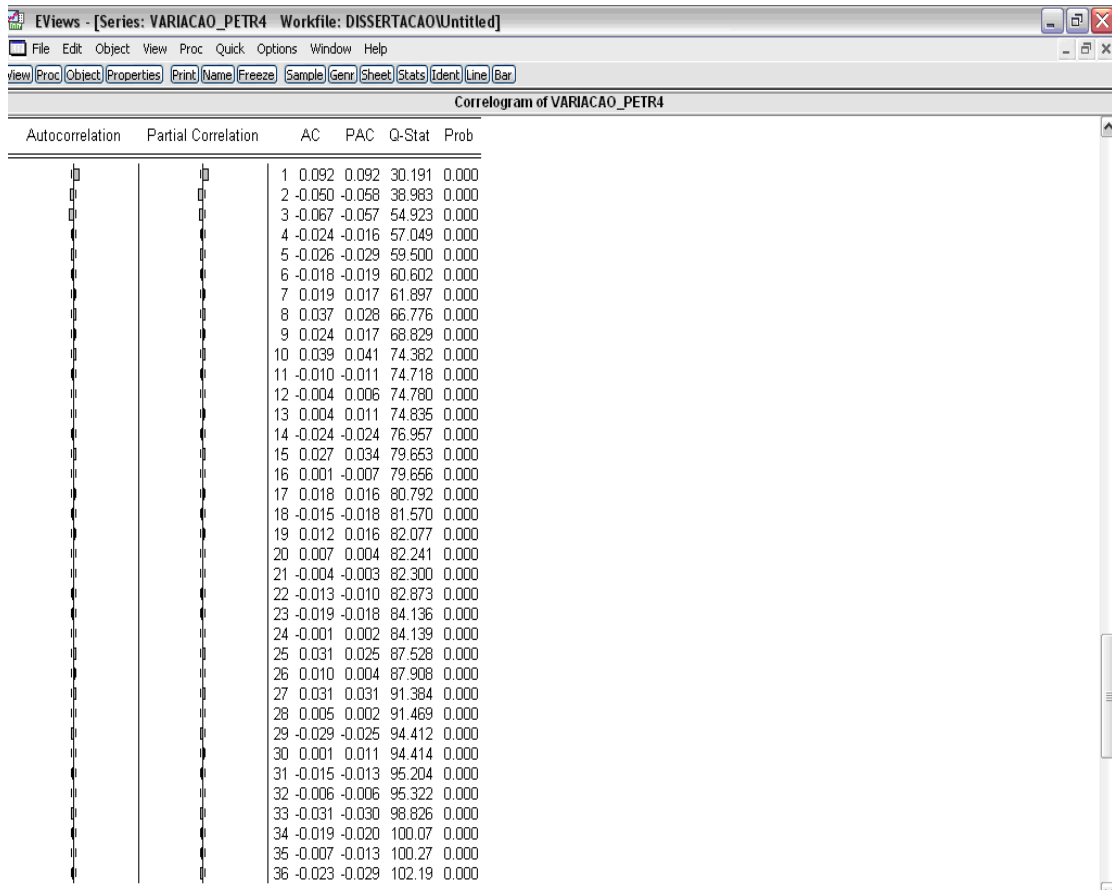
<sup>26</sup> Vide capítulo 2 da dissertação, sobre os modelos EGARCH E TARCH.



**Gráfico 12 – Plot Quantis – quantis dos Retornos diários do PETR4**

E verificando-se o correlograma dos retornos diários;





**Quadro 5 – Correlograma dos Retornos Diários do PETR4**

Encontra-se uma dependência serial entre as variáveis, o que nos leva a determinar um modelo ARMA<sup>27</sup> para extinguirmos essa correlação afim de estimarmos a volatilidade de forma eficiente. Destaca-se que no momento em que se estima um modelo de volatilidade a série só deve possuir dependência linear em sua variância (retornos ao quadrado), para mais vide Engle (1982). Como forma alternativa de se demonstrar essa correlação na série dos retornos diários, observando-se o resultado do teste BDS, nota-se que ele rejeita a hipótese nula das séries serem IID. O que só vem a corroborar com os outros testes realizados anteriormente.

<sup>27</sup> Auto Regressivo de Médias Móveis.

EViews - [Series: VARIACAO\_PETR4 Workfile: DISSERTACAOUntitled]

File Edit Object View Proc Quick Options Window Help

View Proc Object Properties Print Name Freeze Sample Gen Sheet Stats Ident Line Bar

BDS Test for VARIACAO\_PETR4  
 Date: 08/16/09 Time: 16:07  
 Sample: 1 3576  
 Included observations: 3576

---

Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
2	0.023321	0.001510	15.44385	0.0000
3	0.048981	0.002397	20.43573	0.0000
4	0.068821	0.002851	24.14095	0.0000
5	0.079038	0.002968	26.63050	0.0000
6	0.082807	0.002859	28.96314	0.0000

Raw epsilon	0.037281		
Pairs within epsilon	8994116.	V-statistic	0.703337
Triples within epsilon	2.47E+10	V-statistic	0.539827

Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1)...
2	3307979.	0.517800	4492359.	0.703192	0.494479
3	2532733.	0.396672	4489752.	0.703177	0.347692
4	2000111.	0.313429	4487789.	0.703263	0.244609
5	1600620.	0.250967	4484780.	0.703185	0.171929
6	1300280.	0.203990	4484027.	0.703461	0.121183

---

#### Quadro 6 – Resultado teste BDS para os Retornos Diários do Ativo PETR4

Por fim, apenas como forma ilustrativa, pode-se verificar o gráfico dos retornos diários da PETR4,

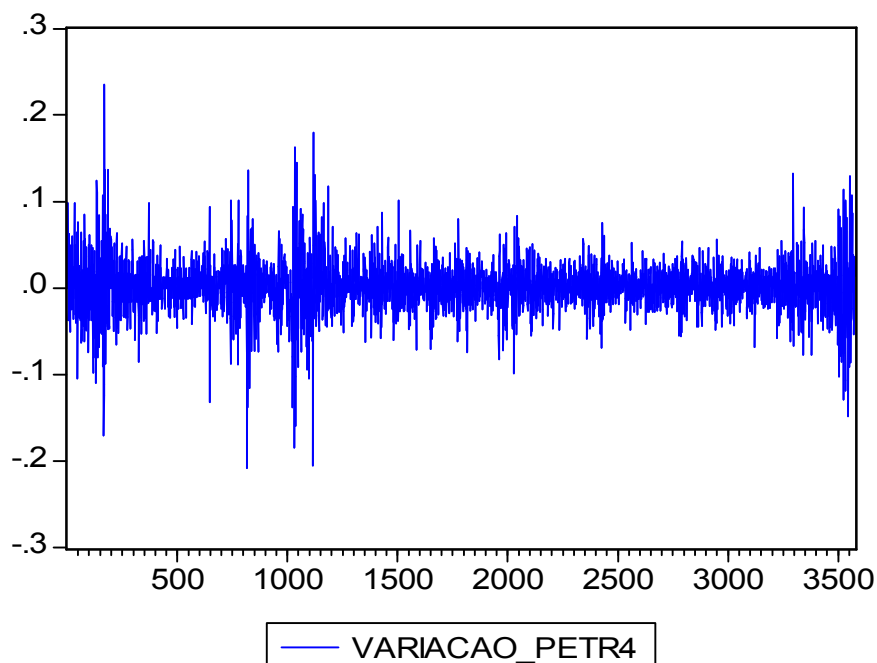
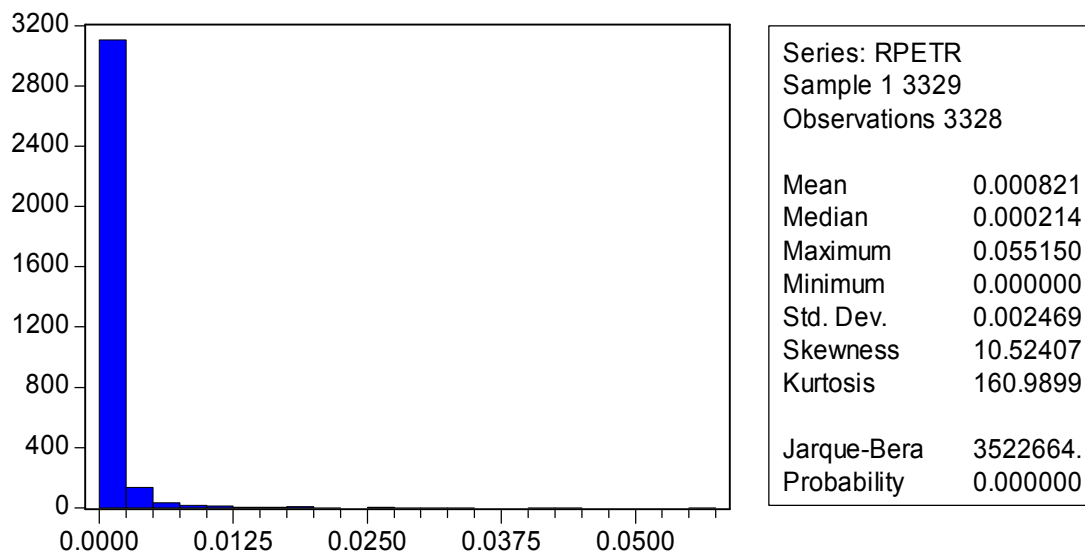


Gráfico 13 – Retornos Diários PETR4

o qual demonstra que a série é estacionária uma vez que, o gráfico não apresenta nenhuma tendência de crescimento ou decrescimento e pelo fato de os retornos diários serem calculados através da diferença dos logaritmos naturais dos preços do ativo(o que por si só é uma forma de se remover a não estacionaridade de uma série).

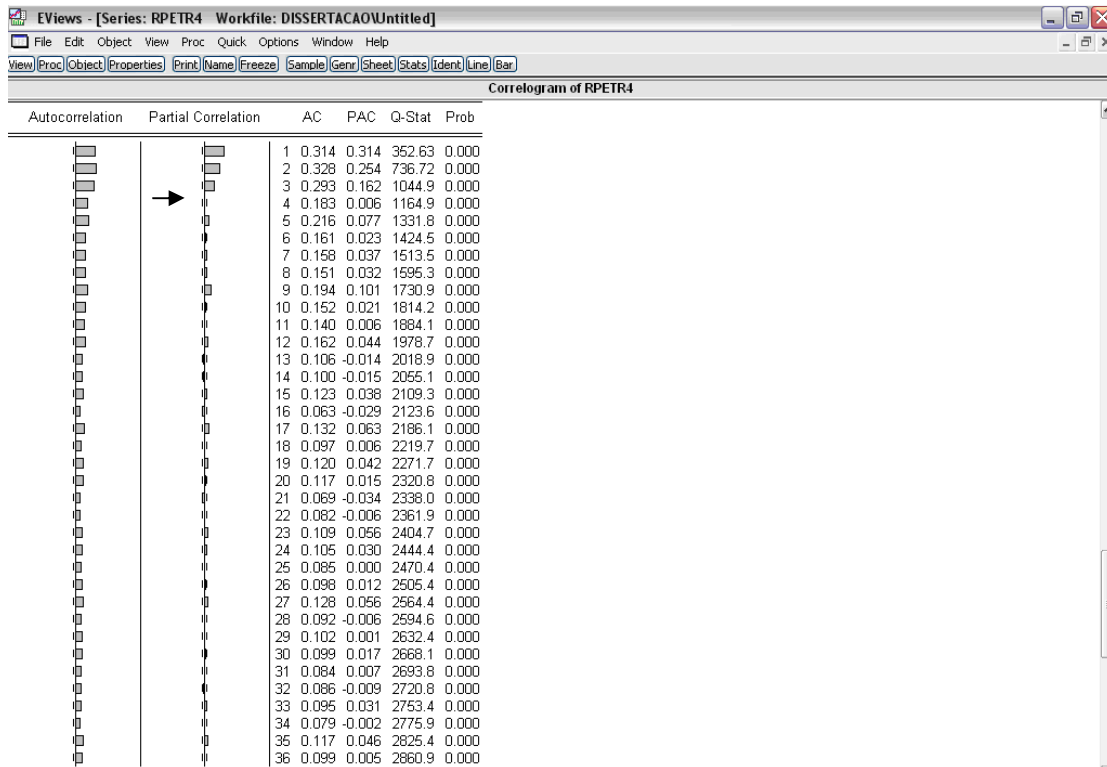
Agora, observando-se o histograma dos retornos diários ao quadrado do ativo PETR4 tem-se;



**Gráfico 14 - Histograma Retornos ao quadrado do ativo PETR4**

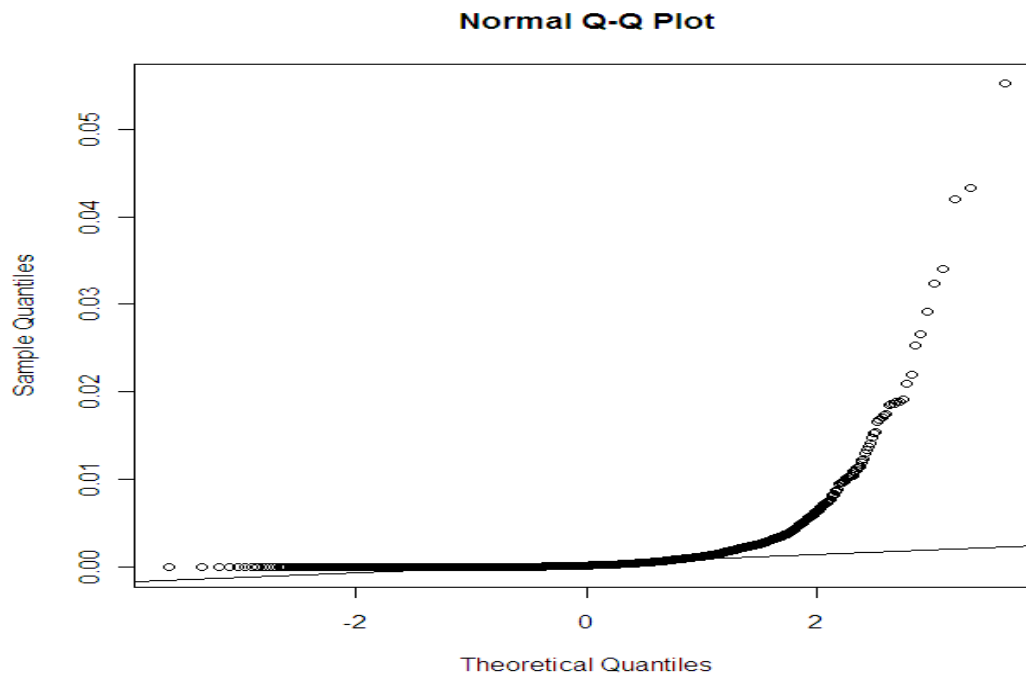
que os retornos ao quadrado não podem ser considerados distribuídos normalmente, pelos simples fatos das estatísticas provenientes dos testes de Jarque – Bera e do coeficiente de Curtose negarem essa característica. Além disso, o histograma indica uma forma bem pouco parecida com uma distribuição normal, o que só vem a corroborar com os testes.

Verificando-se o correlograma dos retornos diários ao quadrado do PETR4 percebe-se claramente que os retornos ao quadrado sofrem o problema de correlação serial, o que pode ser evidenciado através da função de correlação parcial, na qual encontra-se nos três primeiros lags forte correlação.



**Quadro 7 - Correlograma dos Retornos ao quadrado do PETR4**

Por fim, observando-se o gráfico dos quantis, fica claro as caudas pesadas da séries dos retornos ao quadrado, o que vem a somar aos procedimentos anteriores.



**Gráfico**

**15 -Plot Quantis-quantis dos retornos ao quadrado do PETR4**

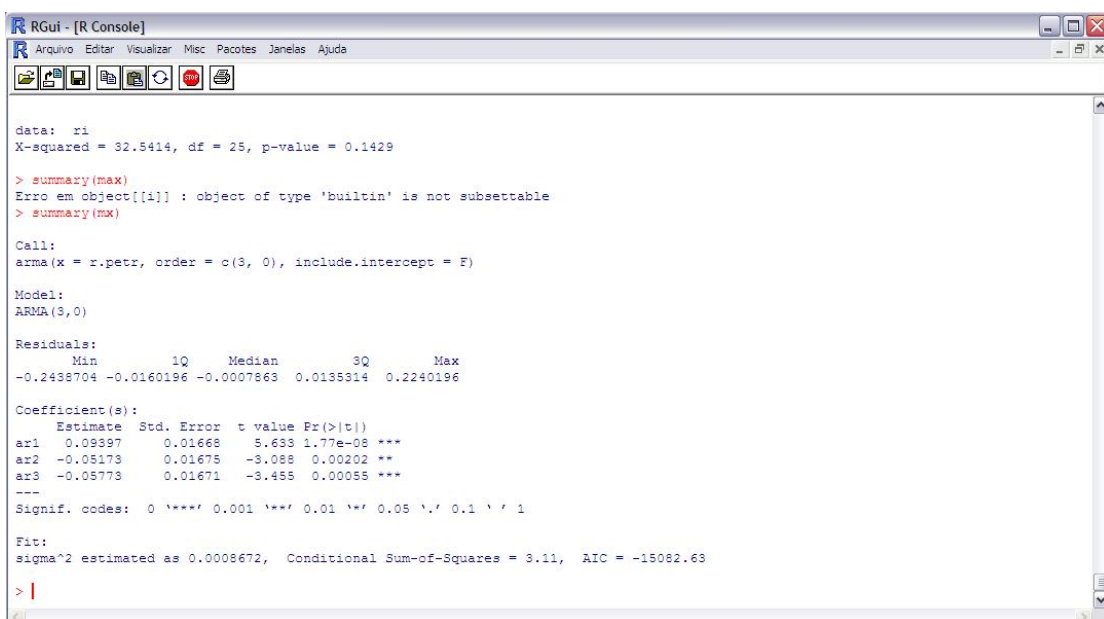
### 4.3 Estimação da Volatilidade

Nesta seção, se estimará ,de duas formas distintas, a volatilidade das séries utilizadas neste trabalho. Para tanto, na primeira subseção deste trabalho, apresentaremos os modelos determinísticos de volatilidade, em que será aplicado os métodos de identificação e de estimação dos modelos. Já na segunda parte desse capítulo, será estimado a volatilidade das séries utilizando-se a metodologia não paramétrica de estimação.

Conforme explicitado anteriormente, a grande diferença entre os métodos paramétricos para os não paramétricos está no fato de que na estimação não paramétrica os dados falam por si, sendo o que o modelo se ajusta para a melhor especificação e estimação dos dados, enquanto no modelo paramétrico suposições são necessárias.

#### 4.3.1 Estimação Paramétrica via Modelos de Heterocedasticidade Condicional

Começando pela série da PETR4, de acordo explicitado na seção 4.2 deste trabalho, identificou-se que a mesma sofre de autocorrelação serial dos retornos. Sendo assim, deve-se remover essa estrutura de dependência das series do retorno, para tanto utilizou-se uma modelo ARMA(3,0), o qual regrediu-se utilizando o software R. Observando-se o resultado do sumário da regressão, nota-se que todos os coeficientes associados a essa regressão são estatisticamente significativos



```

RGui - [R Console]
Arquivo Editar Visualizar Misc Pacotes Janelas Ajuda

data: r1
X-squared = 32.5414, df = 25, p-value = 0.1429

> summary(mx)
Erro em object[[1]] : object of type 'builtin' is not subtable
> summary(mx)

Call:
arma(x = r.petr, order = c(3, 0), include.intercept = F)

Model:
ARMA(3,0)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.2438704 -0.0160196 -0.0007863  0.0135314  0.2240196

Coefficient(s):
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1  0.09397      0.01668    5.633 1.77e-08 ***
ar2 -0.05173      0.01675   -3.088  0.00202 **
ar3 -0.05773      0.01671   -3.455  0.00055 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:
sigma^2 estimated as 0.0008672, Conditional Sum-of-Squares = 3.11, AIC = -15082.63

> |

```

**Quadro 8 – Sumário de Estatísticas do ARMA (3,0) para PETR4**

Além disso, observando-se o quadro 8 que traz as estatísticas do teste de Ljung e Box (1979)<sup>28</sup>, observa-se que a estrutura auto correlacionada foi dos retornos diários do PETR4, foi ajustada<sup>29</sup>.

X-squared	Lag	P-value
0.49	4	0.97
166.55	10	0.08
245.92	15	0.06
28.34	20	0.10
325.41	25	0.14
408.39	30	0.09
503.48	36	0.06

**Tabela 1 – Estatísticas do teste de Ljung – Box para os Retornos Diários de PETR4**

Dessa forma, após o ajuste da correlação serial da série dos retornos diários de PETR4, pode-se começar a execução dos procedimentos para definição do melhor modelo heterocedástico condicional para a série do PETR4.

Conforme apresentado no quadro 8, deste trabalho, os retornos diários ao quadrado do ativo PETR4 apresentam correlação serial, dessa maneira serão apresentados na tabela 2 modelos auto regressivos de heterocedasticidade condicional que removem essa correlação, sendo que o critério de seleção do modelo será o que detiver maior valor (em módulo) do coeficiente de AIC<sup>30</sup> conjuntamente com o maior log de verossimilhança.

<sup>28</sup> Vide Hamilton (2003).

<sup>29</sup> Para um nível de significance de 5%.

<sup>30</sup> Akaike.

#	Modelo	Distribuição	AIC	Log Likelihood	
1	ARMA(3,0) - ARCH(3)	t'student	-11,7752	21.044,38	(a)
2	ARMA(3,0) - GARCH(2,0)	t'student	-11,4466	20.456,38	(b)
3	ARMA(3,0) - GARCH(2,1)	t'student	-11,798	21.085,09	(b)
4	ARMA(3,0) - GARCH(3,0)	t'student	-11,4459	20.456,05	(b)
5	ARMA(3,0) - TGARCH(2,0)	t'student	-11,6724	20.860,78	(b)
6	ARMA(3,0) - TGARCH(2,1)	t'student	-11,798	21.086,13	(b)
7	ARMA(3,0) - TGARCH(3,0)	t'student	-11,6732	20.863,27	(b)
8	ARMA(3,0) - TGARCH(3,1)	t'student	-11,8068	21.102,98	(b)
9	ARMA(3,0) - EGARCH(2,0)	t'student	-11,7952	21.080,19	(b)
10	ARMA(3,0) - EGARCH(2,1)	t'student	-11,7958	21.082,13	(b)
11	ARMA(3,0) - EGARCH(3,0)	t'student	-11,4459	21.091,03	
<b>12</b>	<b>ARMA(3,0) - EGARCH(3,1)</b>	<b>t'student</b>	<b>-11,8002</b>	<b>21.091,08</b>	
13	ARMA(3,0) - EGARCH(2,0)	GED	-11,9513	21.359,03	(b)
14	ARMA(3,0) - EGARCH(2,1)	GED	-11,9534	21.363,80	(b)
15	ARMA(3,0) - EGARCH(3,1)	GED	-11,9469	21.353,05	(b)

#### Nota

- (a) Entretanto os parâmetros são não significativos estatisticamente.  
(b) Não removeu toda a correlação da série dos retornos ao quadrado

**Tabela 2 – Modelos de Heterocedasticidade Condicional para o PETR4**

Para remover a correlação serial da série dos retornos ao quadrado, foram rodados 15 modelos, para os quais apenas dois detiveram sucesso em remover a heterocedasticidade da série. Dessa forma, comparando o coeficiente de informação de cada modelo, conjuntamente com a estimativa do log de Verossimilhança de ambos modelos, chegamos a conclusão de selecionar o modelo ARMA(3,0) – EGARCH(3,1), sendo que supomos que a distribuição dos resíduos é a t'student, a qual é leptocúrtica (caudas pesadas). Cabe salientar, que o modelo EGARCH consegue captar de forma eficiente o problema de assimetria<sup>31</sup>, o qual, conforme Nelson(1991), é chamado de *Leverage*.

Sendo assim, a representação do modelo estimado pode ser descrito da seguinte forma:

$$y_t = 0,107_{(0,0073)} * AR(1) + 0,144_{(0,0095)} * AR(2) + 0,132_{(0,008565)} * AR(3)$$

a qual refere-se a parte ARMA(3,0) do modelo (os números entre parênteses são os desvios padrões de cada parâmetro), enquanto que a função:

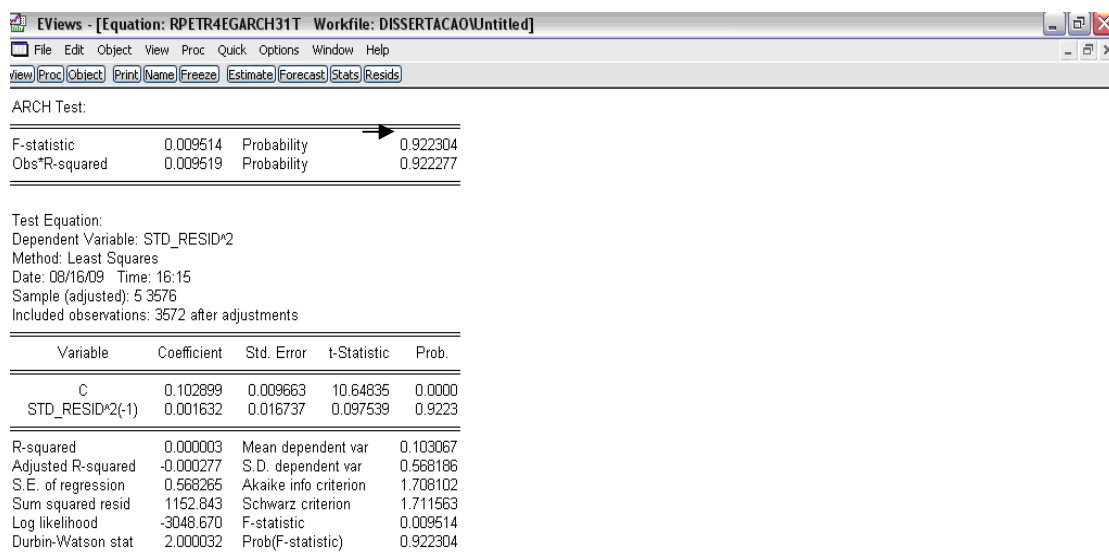
<sup>31</sup> Retornos negativos influem com maior força a volatilidade do que retornos positivos.

$$y_t = h_t \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} \ln(h_t) = & -0,3519_{(0,035)} - 0,117_{(0,22)} \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| + 1,239_{(0,44)} * \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + 1,423_{(0,07)} * \ln(h_{t-1}) \\ & - 0,858_{(0,117)} * \ln(h_{t-2}) + 0,4147_{(0,05)} * \ln(h_{t-3}) \end{aligned}$$

Refere-se ao modelo EGARCH(3,1).

Todos os coeficientes são significativos, sendo o efeito alavancagem  $\gamma = -0,117$ . O quadro abaixo segue o resultado do teste ARCH LM, o qual demonstrará pela aceitação da hipótese nula que os resíduos dos modelos não são correlacionados serialmente:



The screenshot shows the EViews interface with the following data:

**ARCH Test:**

Statistic	Value	Probability
F-statistic	0.009514	0.922304
Obs*R-squared	0.009519	0.922277

**Test Equation:**  
 Dependent Variable: STD\_RESID\*2  
 Method: Least Squares  
 Date: 08/16/09 Time: 16:15  
 Sample (adjusted): 5 3576  
 Included observations: 3572 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.102899	0.009663	10.64835	0.0000
STD_RESID*2(-1)	0.001632	0.016737	0.097539	0.9223

**Additional Statistics:**

R-squared	0.000003	Mean dependent var	0.103067
Adjusted R-squared	-0.000277	S.D. dependent var	0.568186
S.E. of regression	0.568265	Akaike info criterion	1.708102
Sum squared resid	1152.843	Schwarz criterion	1.711563
Log likelihood	-3048.670	F-statistic	0.009514
Durbin-Watson stat	2.000032	Prob(F-statistic)	0.922304

### Quadro 8 – Teste ARCH LM para os resíduos do ARMA(3,0) EGARCH(3,1)

Adicionalmente, verificando-se o gráfico 16 do plot dos quantis dos resíduos,



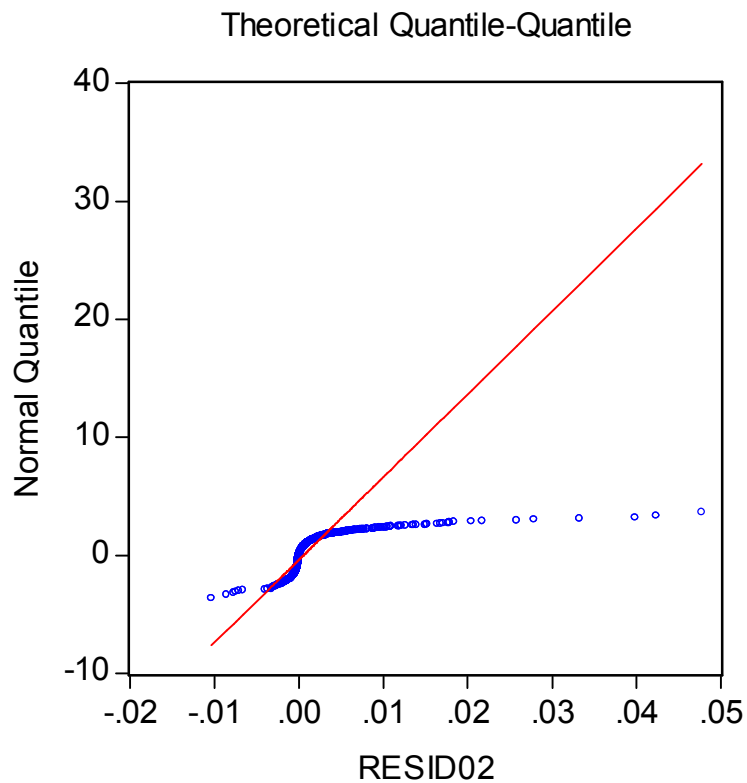


Gráfico 16 – Plot Quantis Resíduos ARMA(3,0) – EGARCH(1,3)

Verifica-se que os resíduos não são distribuídos normalmente. Após apresentação da estimação da volatilidade para série do PETR4, se apresentará a estimação da série do IBOVESPA.

Seguindo a mesma ordem de apresentação do modelo para a série do IBOVESPA, tem-se que devemos remover a correlação serial da série dos retornos diários do IBOVESPA, para tanto, utilizaremos um modelo ARMA(3,0), o qual gera as seguintes estatísticas:

**Call:**

**arma(x = r.ibov, order = c(3, 0), include.intercept = F)**

**Model:**

**ARMA(3,0)**

**Residuals:**

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.173649	-0.011441	0.001504	0.013609	0.287678

**Coefficient(s):**

Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
----------	------------	---------	----------

ar1 0.03934 0.01671 2.355 0.0185 \*  
 ar2 -0.02988 0.01670 -1.789 0.0736 .  
 ar3 -0.04081 0.01670 -2.444 0.0145 \*

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:

sigma^2 estimated as 0.0005972, Conditional Sum-of-Squares = 2.13, AIC = -16386.62

verifica-se que o parâmetro AR(2) é estatisticamente igual a zero, para p-valor de 5%. Entretanto, analisando-se as estatísticas provenientes do teste de Ljung – Box, encontra-se que o problema da correlação serial das séries foi removido com eficiência. Dessa forma, após a remoção da dependência serial na série dos retornos, ira estimar-se o modelo heterocedástico que melhor explica a volatilidade da série do IBOVESPA. Observando-se a tabela 3, verifica-se as estatísticas provenientes do critério de informação de cada modelo, assim como as estatísticas do teste de log verossimilhança,

#	Modelo	Distribuição	AIC	Log Likelihood	
1	ARMA(3,0) - ARCH(3)	t'student	-12,4949	22.330,12	
2	ARMA(3,0) - GARCH(2,0)	t'student	-12,245	21.882,94	
3	ARMA(3,0) - GARCH(2,1)	t'student	-12,548	22.425,05	
4	ARMA(3,0) - TGARCH(2,0)	t'student	-12,4554	22.259,74	
5	ARMA(3,0) - TGARCH(2,1)	t'student	-12,549	22.427,92	
6	ARMA(3,0) - TGARCH(2,0)	GED/Parâmetro fixo	-11,5147	20.578,09	(a)
7	ARMA(3,0) - TGARCH(2,1)	GED	-12,7329	22.756,36	(a)
8	<b>ARMA(3,0) - EGARCH(2,0)</b>	<b>t'student</b>	<b>-12,5544</b>	<b>22.436,38</b>	
9	ARMA(3,0) - EGARCH(2,1)	t'student	-12,5538	22.436,38	
10	ARMA(3,0) - EGARCH(3,0)	t'student	-12,5539	22.436,60	
11	ARMA(3,0) - EGARCH(2,0)	GED/Parâmetro fixo	-11,8581	21.191,54	
12	ARMA(3,0) - EGARCH(2,0)	GED	-12,5673	22.459,56	(a)
13	ARMA(3,0) - EGARCH(2,1)	GED	-12,7267	22.745,32	(a)
14	ARMA(3,0) - EGARCH(3,0)	GED	-12,5564	22.440,97	(a)
15	ARMA(3,0) - EGARCH(3,1)	GED	-12,7263	22.745,51	

**Nota**

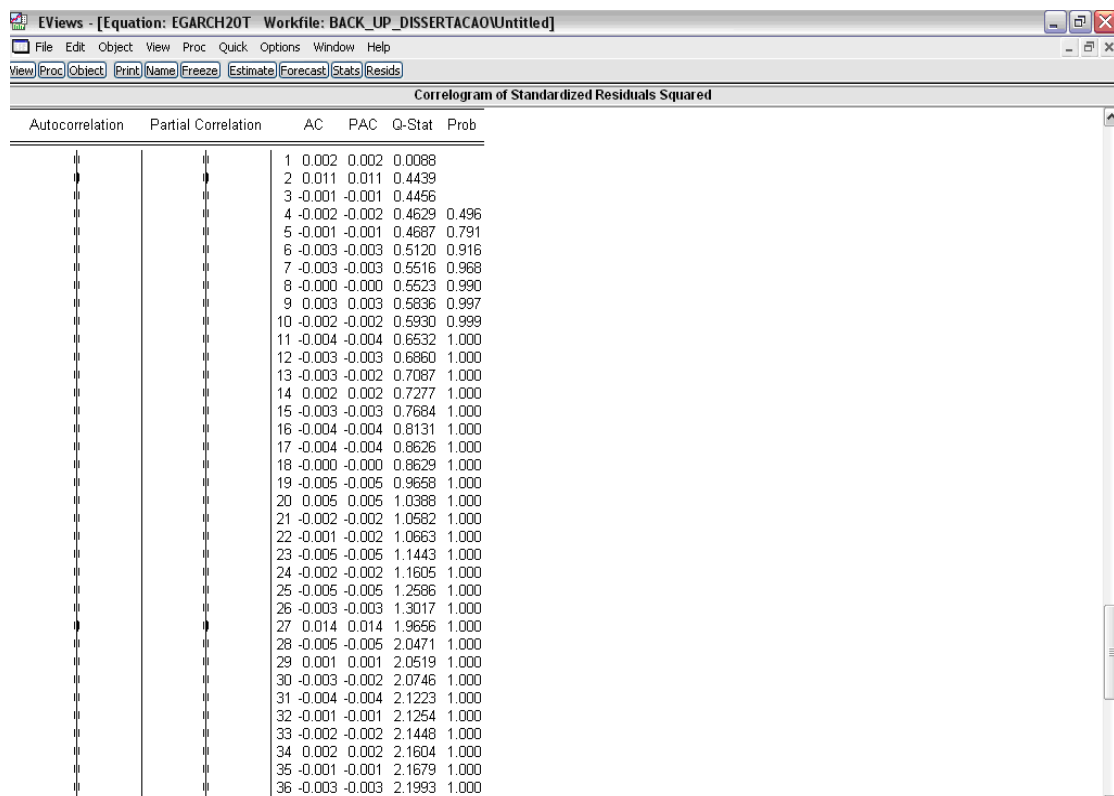
(a) Não removeu toda a correlação da série.

**Tabela 3 - Modelos de Heterocedasticidade Condicional para o IBOVESPA**

Nota-se que comparativamente, o modelo ARMA(3,0) – EGARCH(3,1) com distribuição GED, apresentou estatísticas do critério de informação de AIC superiores ao modelo o modelo ARMA(3,0) – EGARCH(2,0) todavia, este modelo utilizou um número

menor de parâmetros para chegar a um resultado satisfatório<sup>32</sup>, o que levou a escolha deste como o mais efetivo na explicação da volatilidade da série do IBOVESPA.

Dessa forma, observando-se o correlograma dos resíduos ao quadrado da série do IBOVESPA, mostras que a correlação serial dos retornos foi completamente removida, já que os p-valores associados a cada lag do correlograma são maiores que 5% (nosso limite de aceitação), fato este que leva a aceitação da hipótese nula de que a série é não correlacionada.(vide quadro 12);



**Quadro 9 – Correlograma dos resíduos ao quadrado da série do IBOVESPA**

As estatísticas geradas pelo modelo ARMA(3,0) – EGARCH (2,0) com distribuição t'student, foram:

$$y_t = 0,109 * y_{t-1} + 0,114 * y_{t-2} + 0,127 * y_{t-3}$$

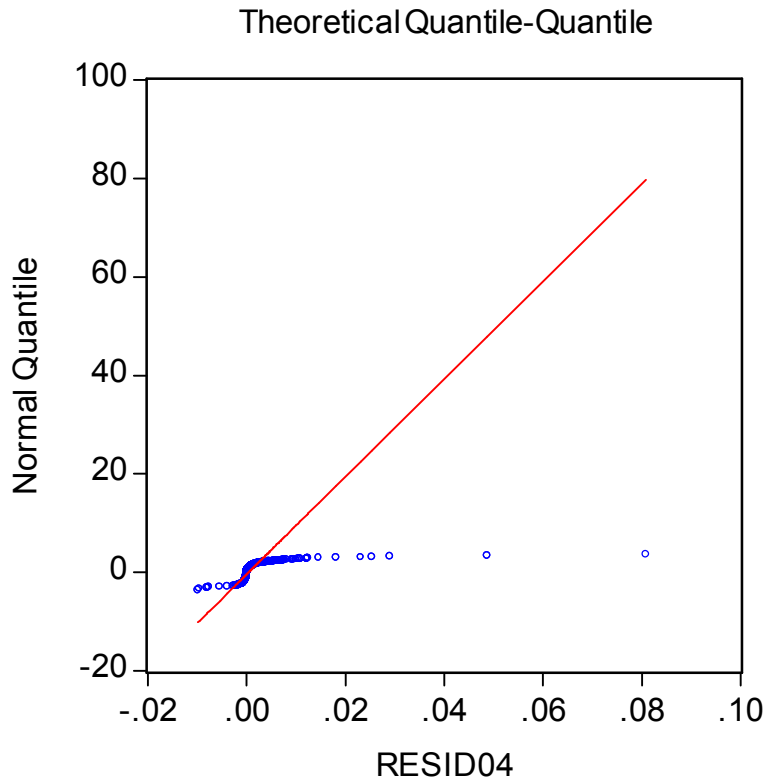
$$y_t = h_t \varepsilon_t$$

$$Ln(h_t) = -0,339 + 6,394 * \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + 0,884 * Ln(h_{t-1}) + 0,0897 * Ln(h_{t-2})$$

Sendo todos os parâmetros significativos.

<sup>32</sup> Além do critério de informação, selecionamos o modelo via o critério da parcimônia.

Adicionalmente, olhando-se o gráfico 15 do plot dos quantis para série do IBOVESPA, nota-se claramente que os resíduos não são distribuídos normalmente.

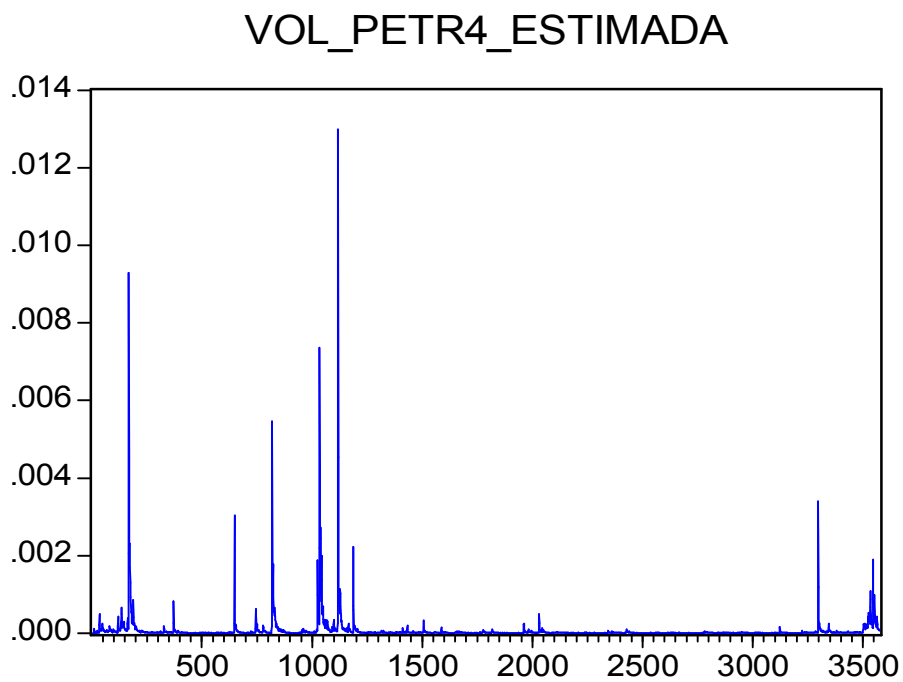
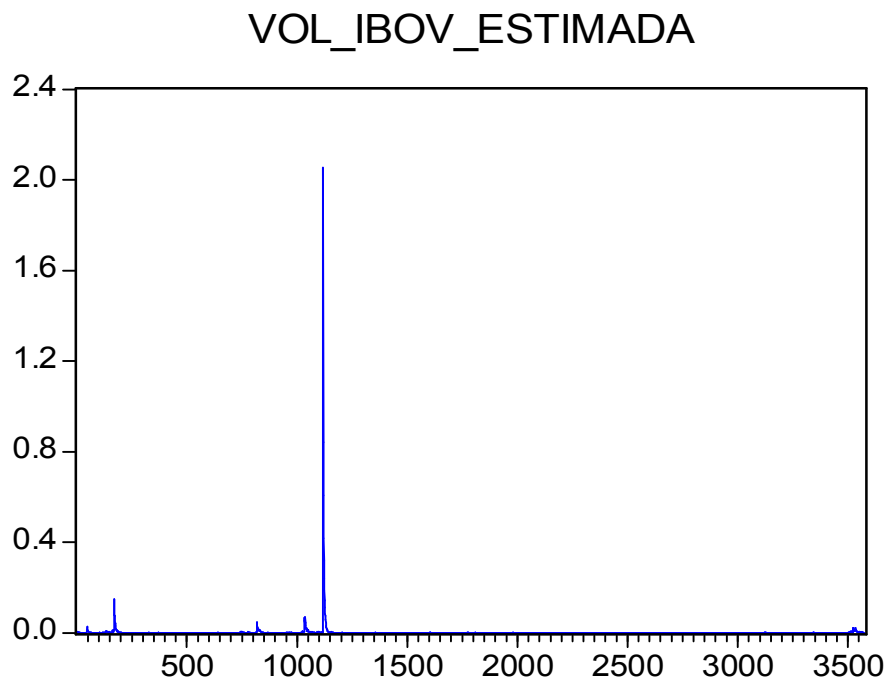


**Gráfico 17 – Plot Q x Q resíduos IBOVESPA**

Uma observação deve ser feita, uma vez que os modelos heterocedásticos que geraram melhores estimativas foram os EGARCH, todavia com distribuição t'student, o que vai contra a proposição realizada por Nelson (1991) a qual dizia que os modelos EGARCH, deveriam ser estimados com a distribuição dos erros generalizados (GED). Mas como a distribuição t'student assume caudas pesadas, nenhuma perda nesse sentido foi verificada.

Após a estimação de ambos os modelos, será verificado se existe correlação entre a volatilidade estimada dos modelos, uma vez que essa é a pergunta central desse trabalho.

Em uma primeira análise, observando-se o gráfico das volatilidades estimadas de ambos os modelos, nota-se claramente uma forte simetria entre elas, uma vez que, para quase toda amostra, verifica-se forte relação,



**Gráfico 18 – Volatilidade estimada PETR4 e IBOVESPA via Modelos EGARCH**

Todavia, realizando o teste de correlação da série, verificou-se que ambas possuem uma correlação de 0,62, (62%) o que é muito forte. Sendo que uma variação de um ponto percentual no ativo PETR4 influencia o IBOVESPA em 0,62.

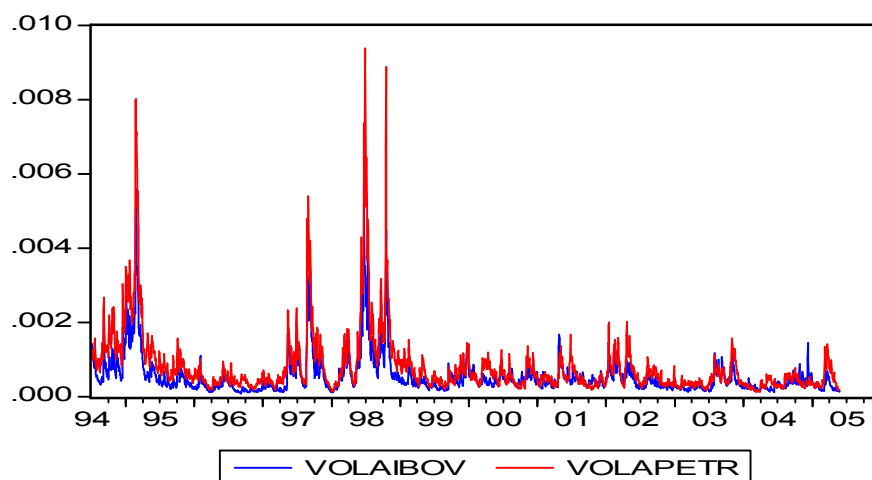
EViews - [Group: CORRELACAO_IBOV_PETR4 Workfile: DISSERTACAOUntitled]			
File Edit Object View Proc Quick Options Window Help			
View Proc Object Print Name Freeze Sample Sheet Stats Spec			
Correlation Matrix			
	VOL_IBOV_ESTIMADA	VOL_PETR4_ESTIMADA	
VOL_IBOV_ESTIMADA	1.000000	0.619251	
VOL_PETR4_ESTIMADA	0.619251	1.000000	

**Quadro 10 – Coeficiente de Correlação das Volatilidade estimadas**

Vale lembrar que este trabalho se propôs a comparar um período de 14 anos, aproximadamente, se realizássemos esse cálculo, entre os períodos de 1994 até 2005, chegaríamos a uma correlação de 93%.(vide quadro 11,e gráfico 19)

EViews - [Group: CORR Workfile: ECONOMETRIAIUntitled]					
File Edit Object View Proc Quick Options Window Help					
View Proc Object Print Name Freeze Sample Sheet Stats Spec					
Correlation Matrix					
	VOLAIBOV	VOLAPETR			
VOLAIBOV	1.000000	0.931720			
VOLAPETR	0.931720	1.000000			

**Quadro 11 – Coeficiente de Correlação Volatilidades estimadas – Período 1994 à 2005**



**Gráfico 19 – Volatilidade estimada períodos 1994 à 2005**

Essa diferença nos níveis de correlação observada nos períodos reflete a forte oscilação do IBOVESPA, principalmente no ano de 2008, o que descolou um pouco da variação do PERT4. Para tanto, chegou-se nesses resultados pelo seguinte aspecto: o volume diário do PETR4 é muito superior a qualquer outro ativo negociado na Bolsa de Valores de São Paulo, dessa forma, sua variação influencia em grande escala à performance do índice IBOVEPA.

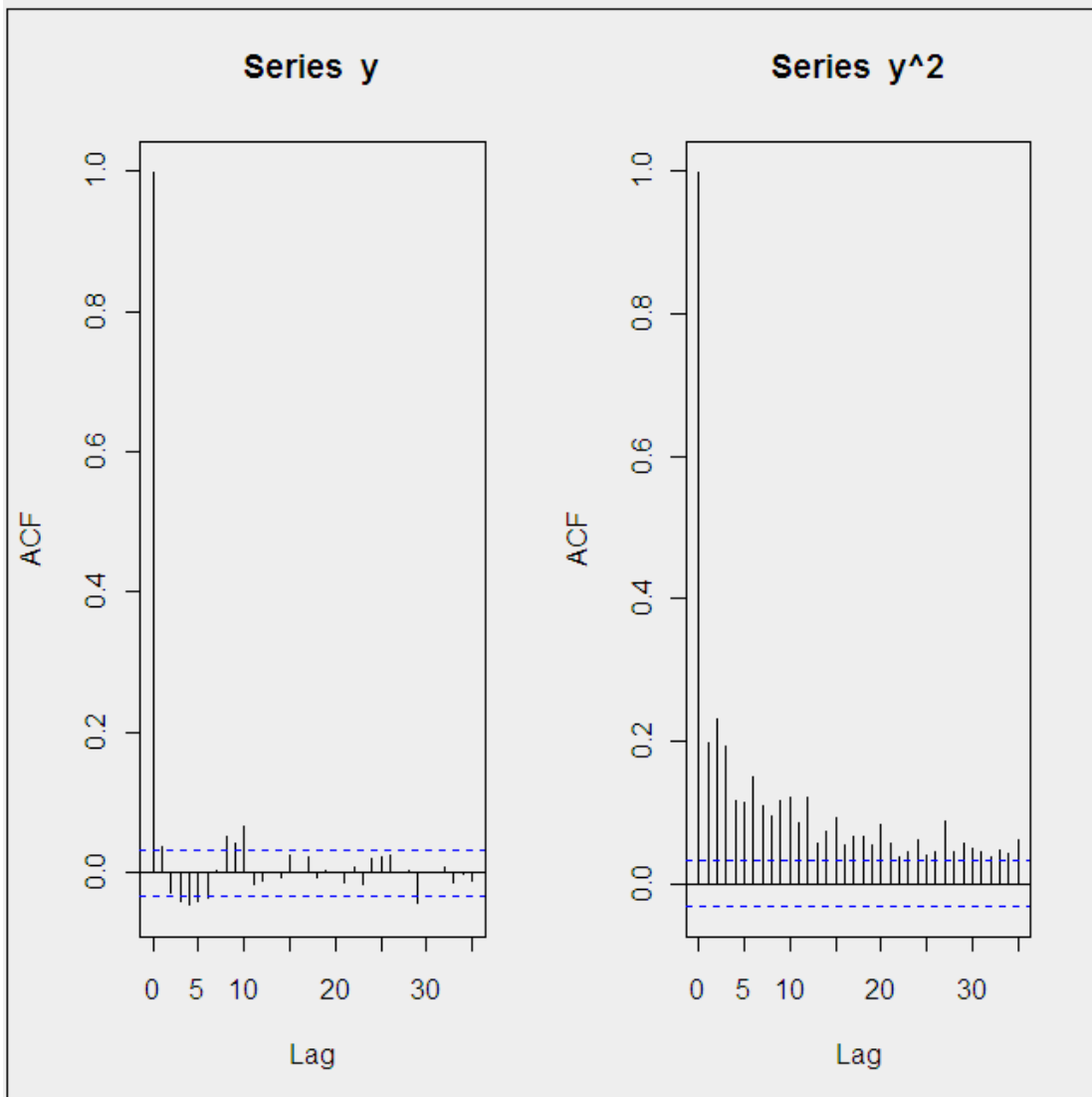
Na próxima seção, apresentaremos a estimação via modelos aditivos.

### 4.3.2 Estimação Via Modelos Aditivos.

Para a estimação do Modelo Aditivo para série do IBOVESPA, excluiu-se 26 observações extremas, sendo 15 máximas e 13 mínimas; elas foram excluídas, pois estavam deturpando as estimativas geradas pelo modelo, uma vez que os modelos aditivos são muito flexíveis (Hastie; Tibshirani, 1990). Cerca de 60% dos dados retirados eram retornos deturpados pelo desdobramento das crises do México em 1994, dos tigres asiáticos em 1997 e pela crise Russa. Outros 40% dos dados, foram influenciados pelas crises do Petróleo em 2001 e 2002 e pela crise do Sub-prime em 2008.

Como o realizado para os modelos paramétricos determinísticos, para remover a correlação serial das séries dos retornos diários, utilizou-se um modelo de estrutura ARMA(3,0). Para tanto, evidencia-se no gráfico 19, abaixo, que após a utilização do modelo ARMA, a série dos retornos deixou de ser correlacionada, porém na série dos retornos ao quadrado a correlação persiste.





**Gráfico 20 – Autocorrelação dos resíduos do modelo ARMA (3,0)**

Agora, na estimação da volatilidade da série do IBOVESPA, utilizando-se os modelos aditivos, ressalta-se que meios alternativos somados ao teste F aproximado, bem como pelo critério de AIC, aproximados serão fundamentais para determinação do melhor modelo para se especificar a volatilidade. Neste trabalho, serão consideradas, formas alternativas na escolha do modelo mais apropriado os seguintes resultados: caso as estimativas de volatilidade apresentem retornos negativos, consideraremos que o modelo foi mal especificado; adicionalmente, analisa-se, o comportamento dos modelos mediante a visualização da contribuição individual de cada lag das variáveis explicativas; e por fim a análise dos resíduos padronizados.

Dessa forma, neste trabalho, estimaremos os modelos aditivos, conforme evidenciado em Santos(2008), em que se executou uma aproximação ao modelo ARCH(q), sendo o número de defasagens definidas mediante tentativas e comparação dos resultados pelos critérios elucidados no parágrafo passado<sup>33</sup>. Após a definição do modelo, em um segundo momento, se definirá o parâmetro de suavização ótimo.

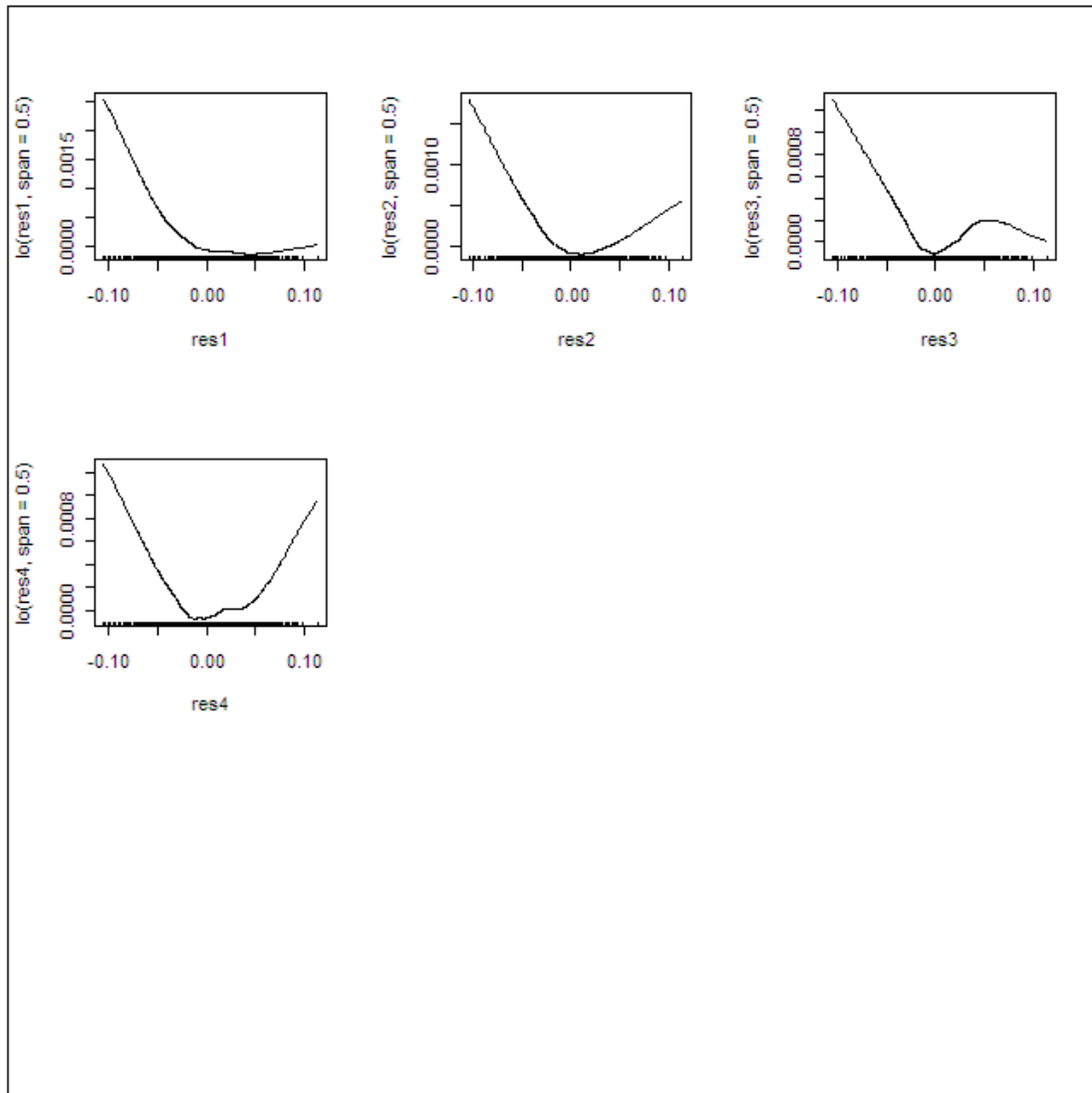
Dessa forma, efetuou-se a comparação de modelos aditivos com 1 a 6 termos defasados, todavia verificou-se que a inclusão de instrumentos funcionais foi significativo até o lag 7, entretanto o comportamento individual dessas variáveis não era lógico. Com isso, vide a tabela 4, a qual contempla os resultados obtidos a partir do teste de AIC de cada modelo cujos lag's vão de 1 a 6;

#	SQR	AIC
Modelo Aditivo (1)	0,003363	-39.064,61
Modelo Aditivo (2)	0,003162	-39.260,02
Modelo Aditivo (3)	0,003073	-39.338,67
Modelo Aditivo (4)	0,003012	-39.387,60
Modelo Aditivo (5)	0,002969	-39.415,10
Modelo Aditivo (6)	0,002911	-39.462,59

**Tabela 4 – Coeficientes de Informação modelos aditivos IBOVESPA**

Pelo critério de AIC, constata-se que o modelo 6 é o mais indicado. Todavia, conforme explicitado anteriormente, outros dois critérios serão utilizados para escolha do número de defasagens. O primeiro critério de avaliação alternativo, consiste na avaliação do comportamento visual dos últimos três modelos quanto a descrição visual das funções univariadas (aplicadas nos resíduos defasados) na aplicação aditiva da variável resposta (volatilidade). Iniciando-se com as descrições individuais do modelo aditivo 4, nota-se;

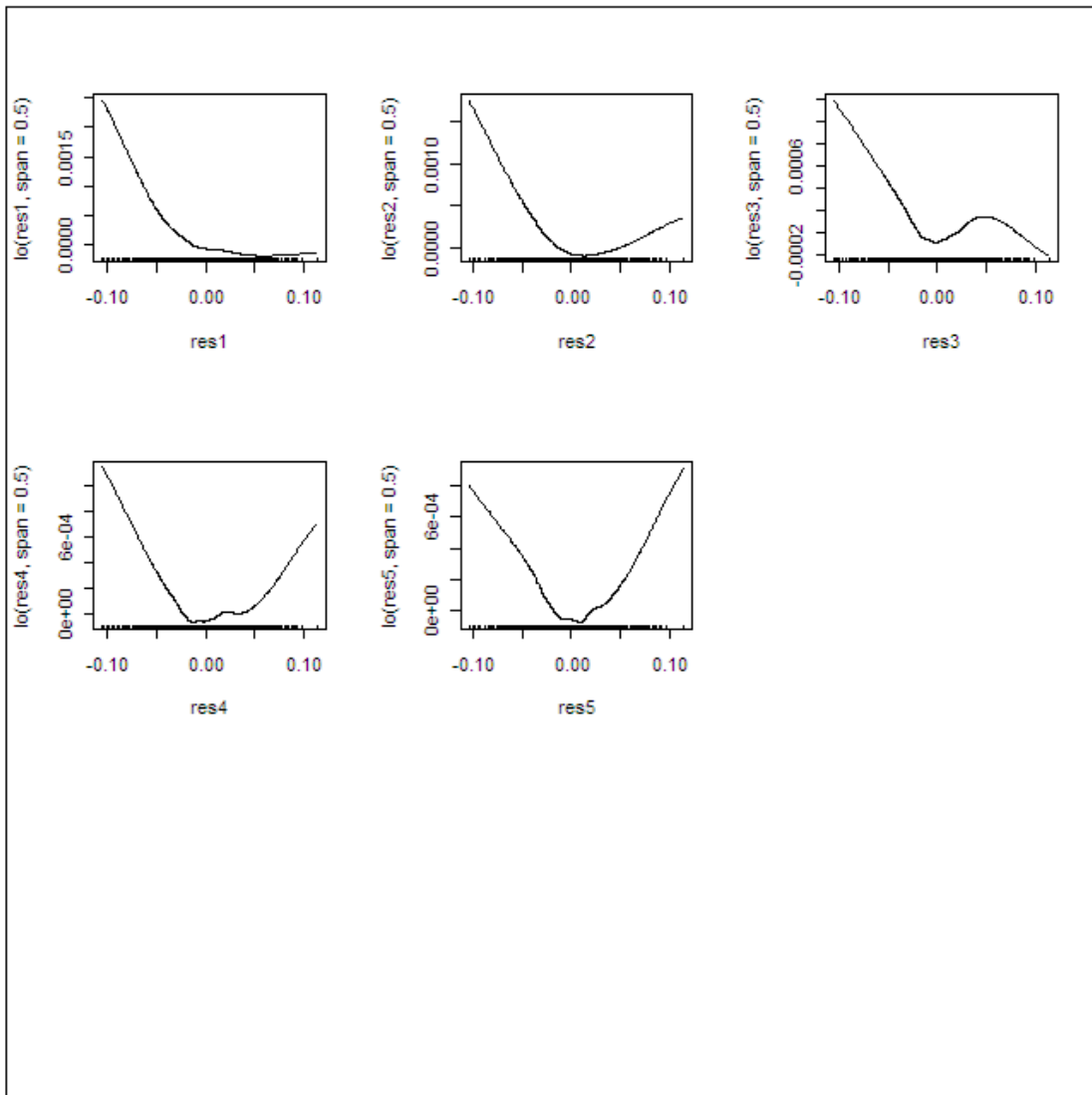
<sup>33</sup> Na definição dos modelos, utilizou-se como parâmetro de suavização 0,5, medida definida por Cleveland (1979) como padrão.



**Gráfico 21 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 4 - IBOVESPA**

que abaixo de cada estimativa um *rug plot* o que indica a região onde ocorre a maior concentração de observações. Analisando-se o quadro 21, pode-se se fazer uma relação com a curva proposta por Engle e Ng (1993), denominada como “New Impact Curve”, a qual mede a resposta da volatilidade frente a ocorrência de choques positivos e negativos. Observando-se as funções, notamos que o comportamento da terceira defasagem não é muito lógico, pois na ocorrência de retornos positivos, a resposta na volatilidade é negativa. Todavia, para as outras defasagens o comportamento foi conforme o fato estilizado diz. Adicionalmente, pode-se notar a maior inclinação da curva para retornos negativos, sendo isso a exemplificação gráfica do problema da assimetria.

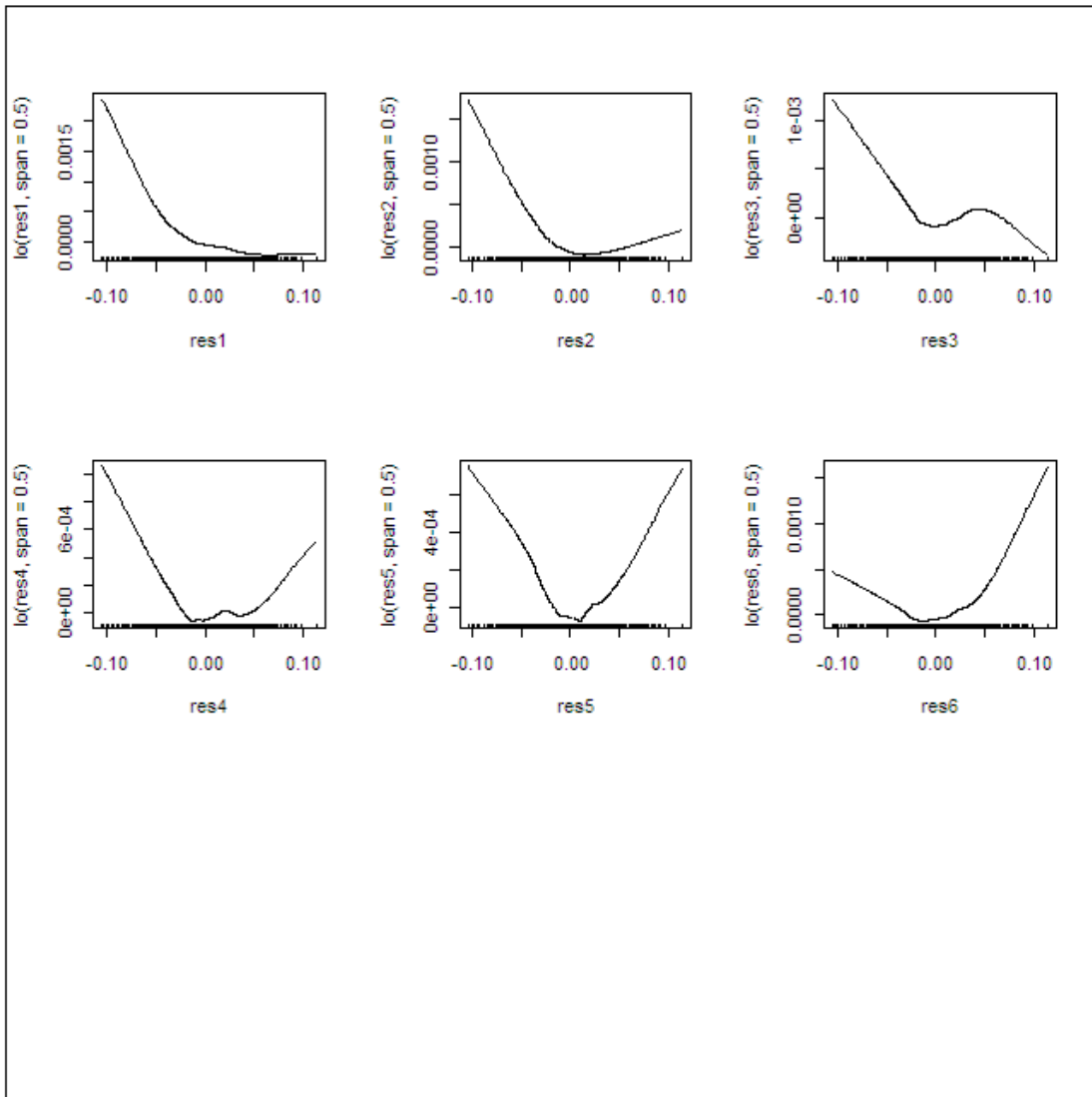
Analisando-se o comportamento visual do modelo aditivo 5, tem-se



**Gráfico 22 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 - IBOVESPA**

Que o comportamento visual das 4 primeiras defasagens são muito parecidas com o verificado para o modelo 5, entretanto, nota-se que alguns aspectos influenciam negativamente na escolha desse modelo. Na defasagem 1, encontra-se na ocorrência de retornos positivos, que resposta na volatilidade é constante o que não é verificado na prática. Outro aspecto refere-se a defasagem 5, uma vez que a inclinação para os retornos positivos é superior a dos retornos negativos, o que não é verdade.

Por fim, analisando-se o modelo 6, tem-se



**Gráfico 23 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 6 - IBOVESPA**

Que comportamentos pouco prováveis acontecem nas defasagens 1, 3, 5 e 6 o que remete a excluir esse modelo dos possíveis candidatos a especificação da série do IBOVESPA.

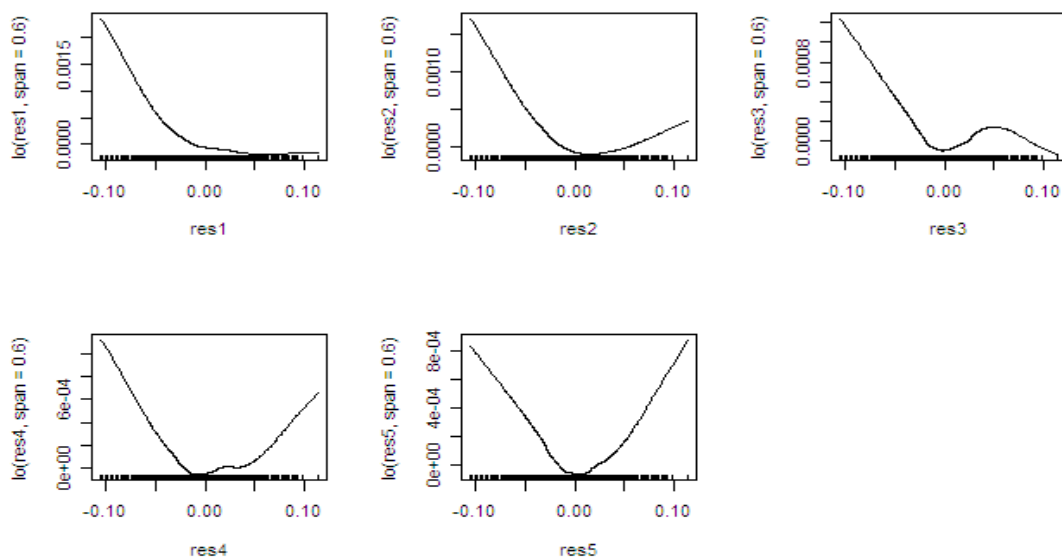
Dessa forma, escolheu-se o modelo aditivo 5 como o melhor para especificação do IBOVESPA. Agora, para determinação do span ótimo (parâmetro de suavização) rodaremos o modelo, utilizando níveis de suavização entre 03 à 08; uma vez que quanto maior os níveis menos detalhada tornam-se as curvas, e quanto menores os níveis mais flexível e detalhada serão as curvas, uma vez que o span define a distância do núcleo para que os parâmetros da regressão local sejam válidos.

Analisando-se o quadro abaixo;

Span	AIC
0,3	-39.406,48
0,4	-39.412,27
0,5	-39.415,10
<b>0,6</b>	<b>-39.415,38</b>
0,7	-39.409,22
0,8	-39.406,63

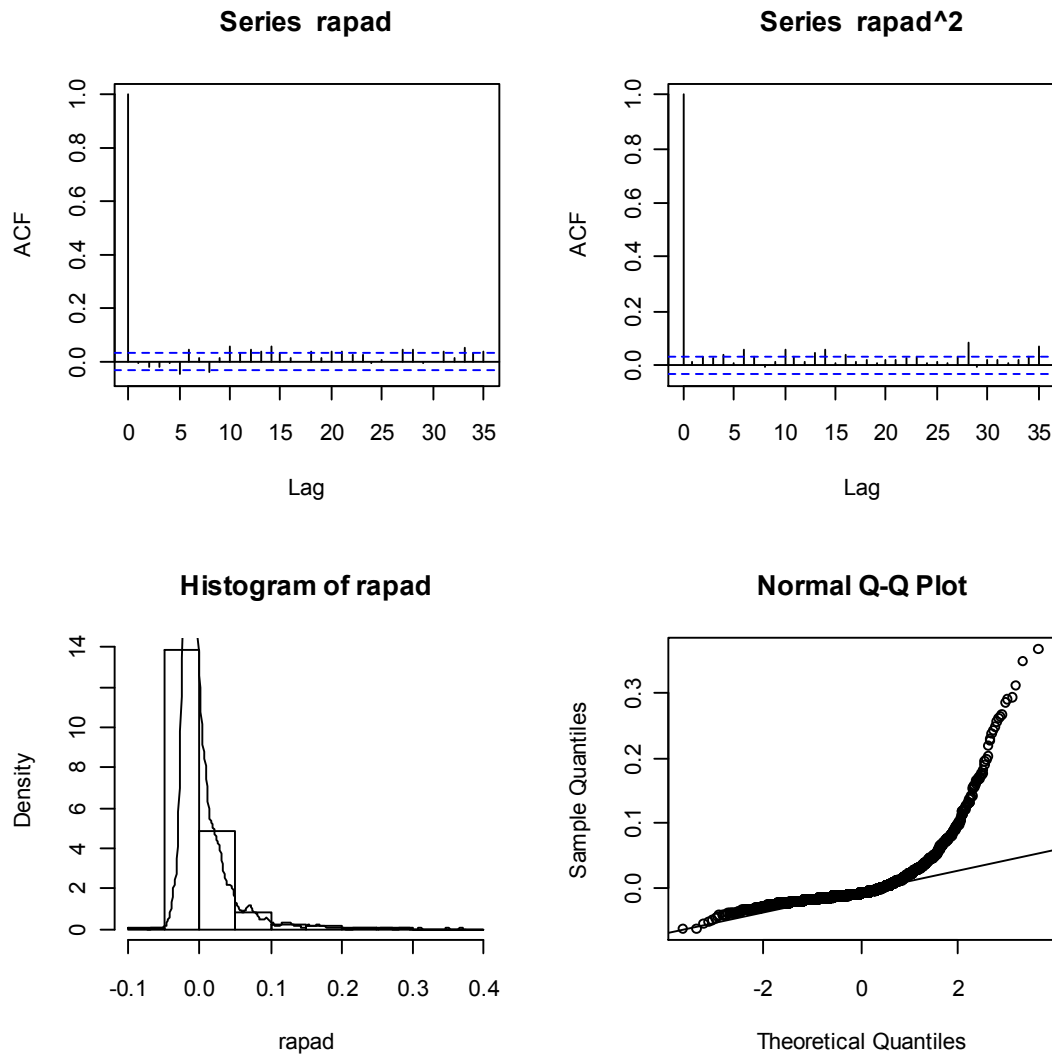
**Tabela 5 – Definição do Span ótimo para o modelo aditivo 5 IBOVESPA**

Nota-se que pelo critério de seleção de AIC aproximado, o span que melhor especifica o modelo para série do IBOVESPA é o 0,6; dessa forma o comportamento individual de cada variável explicativa do modelo pode ser verificado abaixo:



**Gráfico 24 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 com span ótimo - IBOVESPA**

Verifica-se que modelo aditivo com 5 defasagens com span de 0,6 conseguiu remover integralmente a correlação da série do retornos ao quadrado do IBOVESPA, (vide gráfico 25)



**Gráfico 25 – Estatísticas provenientes do modelo aditivo 5 para o IBOVESPA**

Dessa, forma, o mesmo procedimento executado para série do IBOVESPA será realizado para os retornos da PETR4.

Como sabido, a série dos retornos diários da PETR4 sofre com o problema de correlação serial, para tanto, ir-se-á remove-la valendo-se da utilização de um modelo  $ARMA(3,0)$ <sup>34</sup>.

<sup>34</sup> O mesmo modelo utilizado na estimação dos modelos determinísticos.

Vale enfatizar que retornos diários iguais a zero, foram excluídos de nossa série, uma vez que estavam dificultando a estimação; adicionalmente, foram excluídos 13 retornos extremos os quais eram retornos influenciados pela crise do Petróleo de 2001 e 2002 pela crise no sub-prime que derrubou o mercado mundial.

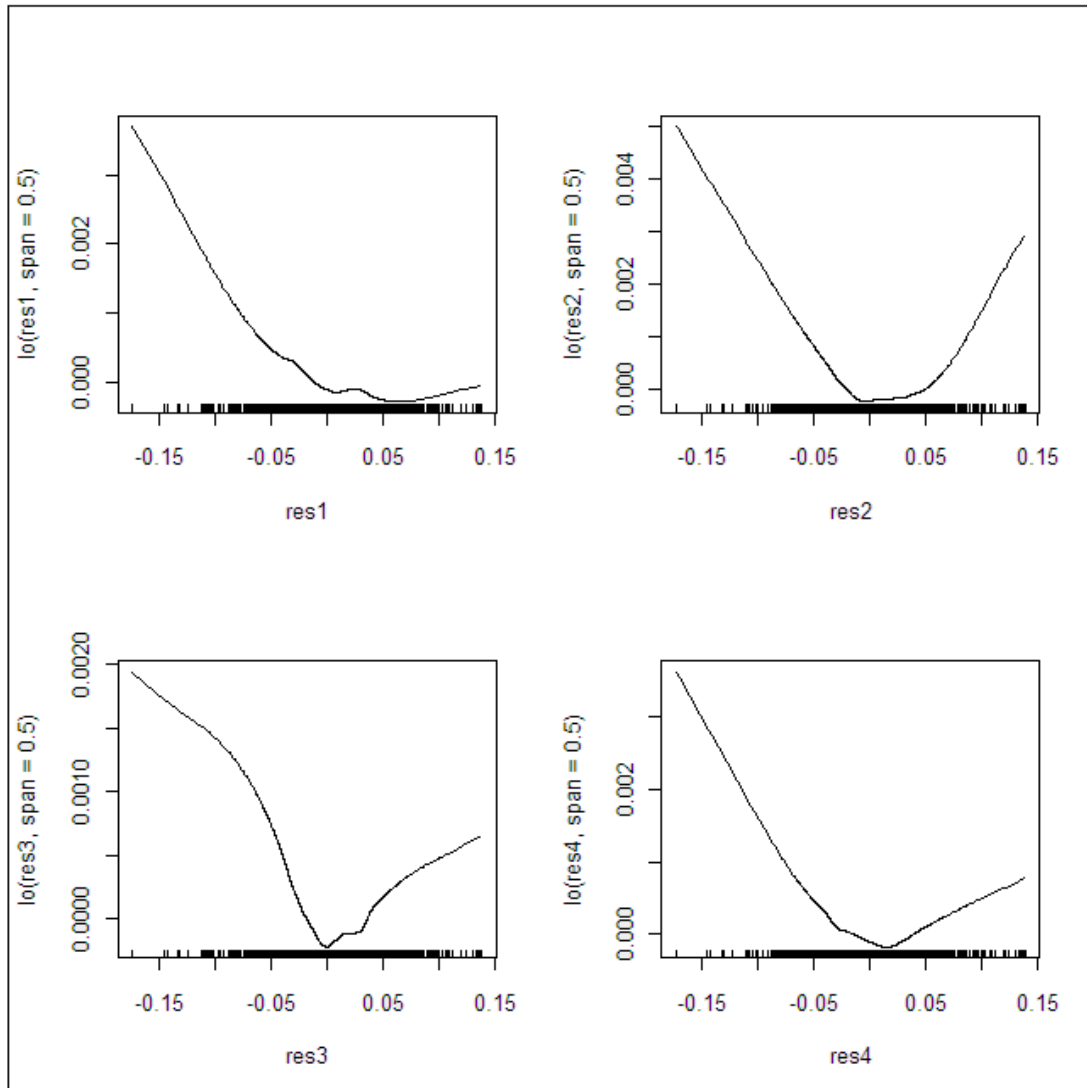
Após a estimação dos modelos aditivos com até 5 lag's de defasagem; já que a partir do 6, o acréscimo de mais uma variável não representava em ganho para especificação do modelo; chegou-se as seguintes estimativas de AIC;

#	AIC
Modelo Aditivo (1)	-32.274,99
Modelo Aditivo (2)	-32.584,89
Modelo Aditivo (3)	-32.653,52
Modelo Aditivo (4)	-32.696,30
Modelo Aditivo (5)	-32.714,78

**Tabela 6 – Coeficientes de informação para definição do modelo aditivo ótimo PETR4**

Nota-se que conforme o IBOVESPA, o modelo aditivo 5 atingiu um maior valor em modulo do critério de AIC, entretanto, será realizado o teste alternativo de visualização do comportamento individual das variáveis explicativas ao modelo. Frisa-se que este procedimento será executado apenas para os Lag's 4 e 5, visto que para os outros não conseguiu-se remover a correlação das séries.

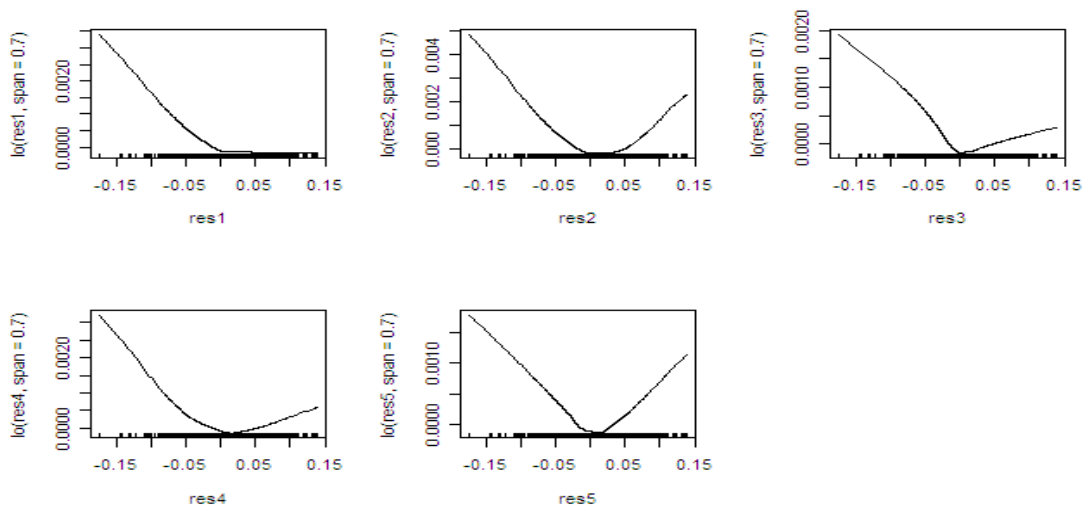




**Gráfico 26 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 4 – PETR4**

Para o modelo aditivo 4, verificamos que o comportamento das variáveis estão de acordo com o fato estilizado, embora no lag 1, observou-se um pequeno problema no que tange a resposta a um retorno positivo ser próximo a zero.

Já para o modelo aditivo 5 verifica-se



**Gráfico 27 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 – PETR4**

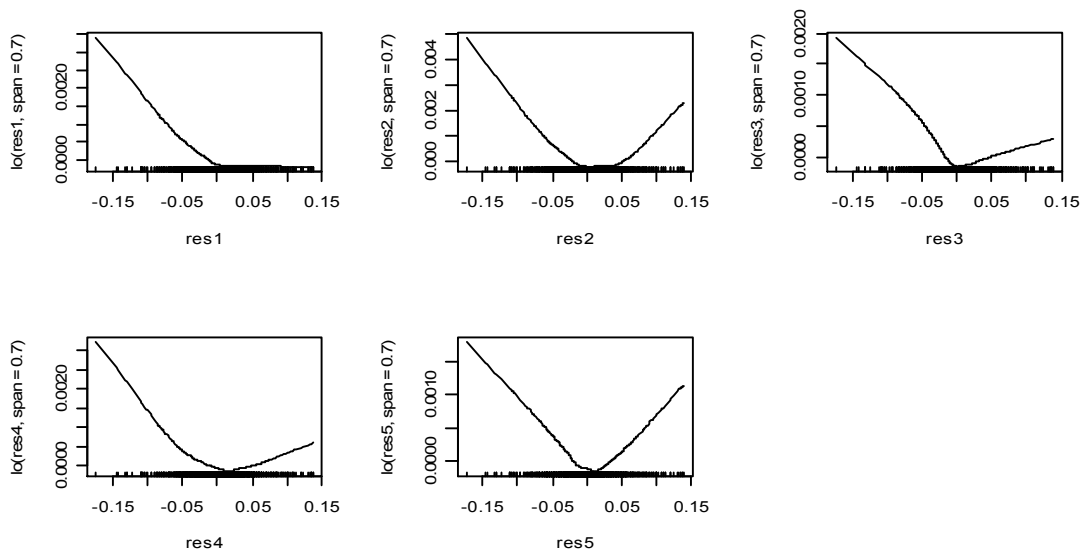
o mesmo problema encontrado no modelo aditivo 4. Uma vez que no gráfico representativo da primeira defasagem, tem-se que retornos positivos não impactam na volatilidade dos retornos. Essa premissa não é verdadeira, muito embora no gráfico representativo da defasagem 4 observou-se um ganho na especificação. Nesse, fica caracterizado perfeitamente conceito de assimetria dos retornos financeiros, uma vez que retornos negativos geram respostas maiores do que retornos positivos (isso se dá através da inclinação da curva), para tanto vide Engle (1993).

Pelas justificativas dadas no parágrafo anterior, a escolha do modelo que melhor estima os retornos ao quadrado do ativo PETR4 é o modelo aditivo 5, para tanto, nesse momento, é definido qual o span mais apropriado a ser utilizado na estimação;

Span	AIC
0,3	-32.706,80
0,4	-32.712,68
<b>0,5</b>	<b>-32.714,78</b>
0,6	-32.713,71
0,7	-32.705,28
0,8	-32.702,17

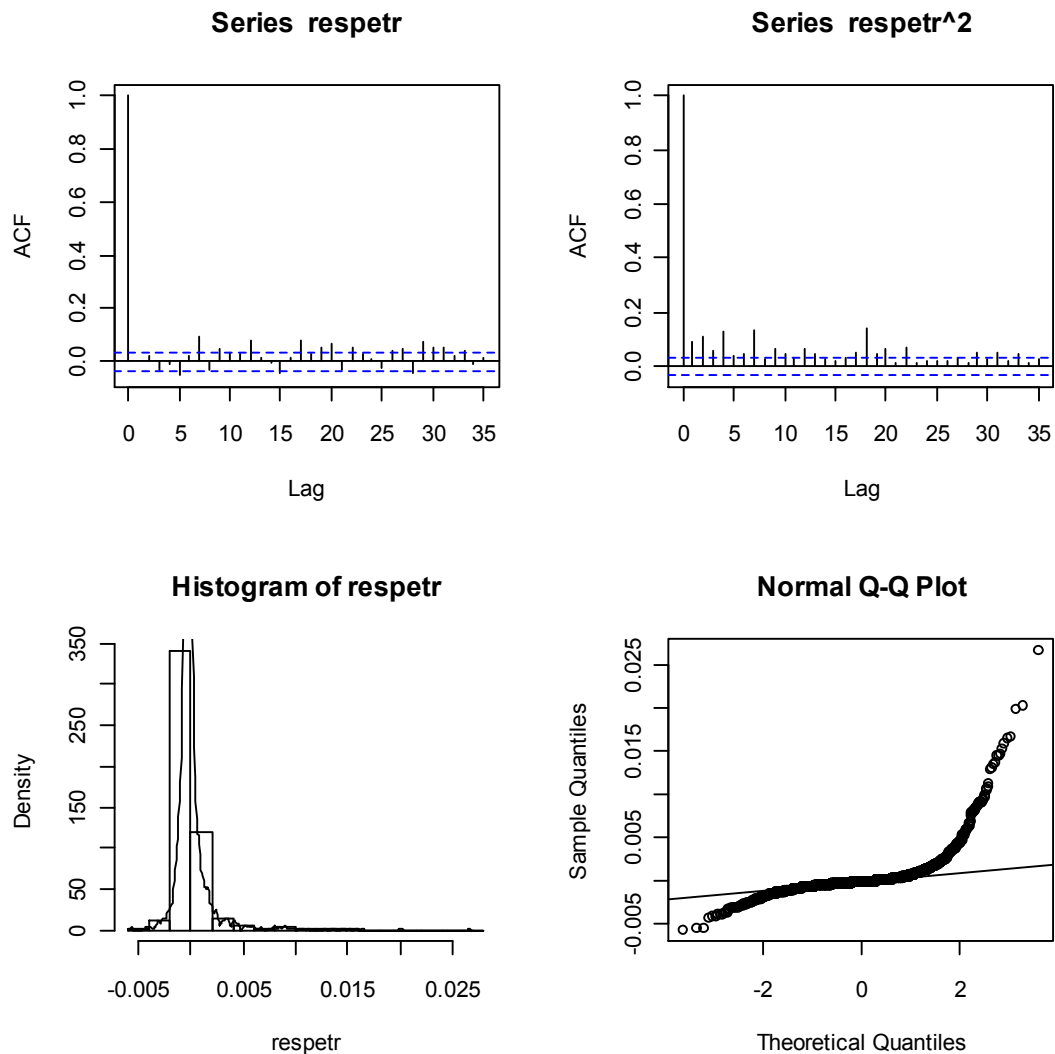
**Tabela 7 – Definição do Span ótimo para o modelo aditivo 5**

Coincidentemente, o span ótimo foi de 0,5; sendo que este foi utilizado como base para a definição do modelo ótimo. No entanto, após análise da volatilidade estimada, foi verificado, que tanto para o span 0,5 quanto para 0,6, valores de volatilidade negativos o que é matematicamente impossível, já que a volatilidade só pode assumir valores maiores ou iguais a zero; dessa forma, acabou-se escolhendo o span 0,7; sendo a visualização das curvas individuais do mesmo expostas abaixo;



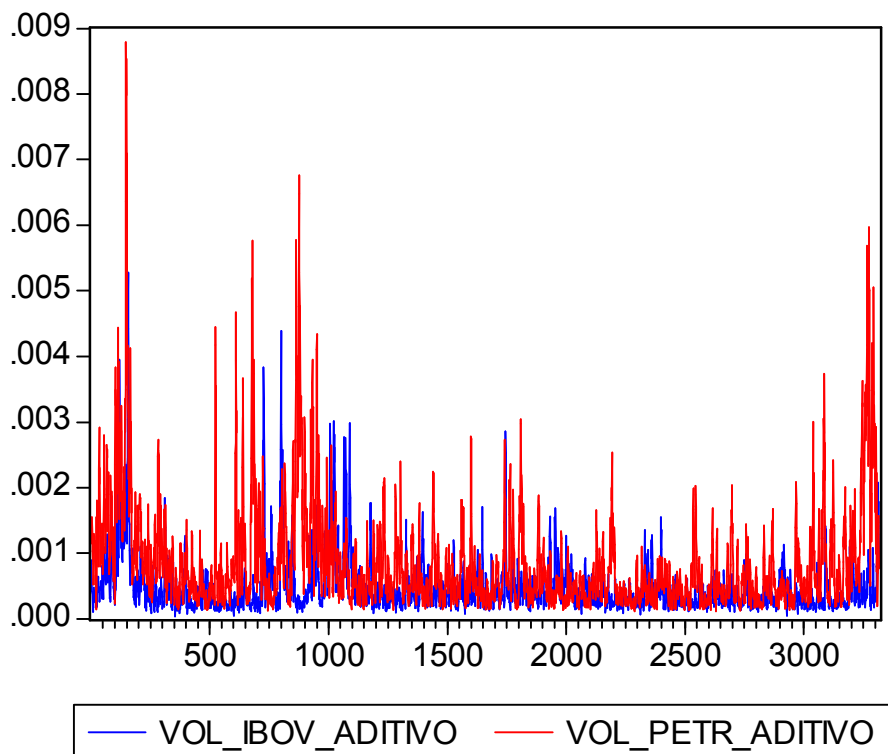
**Gráfico 28 – Comportamento individual da volatilidade modelo aditivo 5 com o span ótimo – PETR4**

Dessa maneira as estatísticas provenientes dessa estimação do modelo aditivo 5 com span 0,7 podem ser verificadas no quadro 21,



**Gráfico 29 – Estatísticas provenientes do modelo aditivo 5 com span ótimo para a série da PETR4**

Agora, após estimação das volatilidades das séries do IBOVESPA, bem como da PETR4 através da estimação via modelos aditivos, será verificado se existe correlação entre o ambas volatilidades estimadas.



**Gráfico 30 – Volatilidade estimada via modelos aditivos para as séries do IBOVESPA e PETR4**

Este é o gráfico das volatilidades estimadas via modelos aditivos, que demonstra uma forte simetria entre as mesmas. Todavia mediante as exclusões realizadas para melhor especificação do modelo, acredita-se que o nível de correlação verificado será menor do que nos modelos paramétricos.

EViews - [Group: UNTITLED Workfile: UNTITLED\Untitled]						
File Edit Object View Proc Quick Options Window Help						
View Proc Object Print Name Freeze Sample Sheet Stats Spec						
Correlation Matrix						
	VOL_IBOV...	VOL_PETR...				
VOL_IBOV...	1.000000	0.203104				
VOL_PETR...	0.203104	1.000000				

**Quadro 12 – Correlação entre as volatilidades estimadas via modelos aditivos**

E observando-se o coeficiente de correlação, nota-se que para cada unidade de variação no PETR4, temos um reflexo de 0,20 no IBOVESPA, que ainda pode ser considerado um valor elevado se for considerado que o índice IBOVESPA é composto por mais de 150 ativos, todavia, não se chegou a resultados parecidos como os dos modelos

paramétrico pelo simples fato que modelos aditivos são altamente flexíveis o que torna a estimação deles muito mais sensível. Conforme Zielgemann (2002), os custos dos modelos aditivos estão associados à perda do poder de extrapolação e taxas de convergências mais lentas.

## 5. Considerações Finais

O objetivo central deste trabalho era verificar a correlação entre o índice IBOVESPA com o ativo PETR4 o qual foi atingido com êxito.

A eliminação de algumas observações extremas pode ser entendida como um ponto negativo na estimação dos modelos aditivos. Devido às funções univariadas serem muito flexíveis, a exclusão dos retornos outliers fez-se necessária visto que as estimativas de volatilidade para estes casos seriam prejudicadas. Todavia, esse processo de exclusão de outliers não foi realizado na estimação dos modelos paramétricos, uma vez que a convergência nesses modelos é mais rápida que a verificada nos modelos aditivos, e dessa forma conseguiu-se atingir resultados satisfatórios.

Os modelos aditivos descrevem comportamentos visuais informativos da dependência da variável reposta frente as variáveis explicativas, sendo essa característica muito positiva para estudos empíricos.

Quanto aos modelos de volatilidade paramétrica, os mesmos demonstraram, mais uma vez, sua eficiência na explicação dos fatos estilizados.

No que tange aos resultados atingidos, entende-se que a correlação entre as duas séries pode ser explicada por alguns aspectos em especial: o ativo PETR4 é o mais negociado na bolsa de São Paulo, o seu peso no índice IBOVESPA é muito superior ao todos os outros ativos, sendo que sua influência só pode ser comparada aos ativos da Vale. Como no passado, em meados da década de 90 e início do novo século, a bolsa de valores não era uma forma de investimento popular, ações de grandes corporações acabavam por definir o índice IBOVESPA, como um todo.

Adicionalmente, quando o governo sinaliza que a população pode comprar ações com seu FGTS, fica nítido um incentivo subliminar para esse tipo de empresa, o que só aumenta o volume de negociações desses títulos.

Na estimação dos modelos de volatilidade paramétricos ARMA(3,0) – EGARCH, para ambas as séries, notou-se que a os resultados práticos convergiram perfeitamente com a metodologia apresentada por Nelson(1991). Já para os modelos aditivos, encontrou-se uma maior dificuldade na especificação do modelo, entretanto concluiu-se, que ambos os modelos são complementares, já que pela capacidade dos modelos aditivos explicarem os fatos ser bem superior a observada nos modelos GARCH.

Entende-se que este trabalho, conseguiu provar de forma econométrica o que era sabido em termos práticos. Entretanto, analisando outros índices da BOVESPA, como IBX e

o IBX50, poderíamos atingir resultados superiores, já que esses índices são compostos pelos 100 ativos e pelos 50 ativos mais negociadas na bolsa respectivamente.

Como questões futuras, poder-se-ia tentar compor um índice sem os ativos da Petrobrás e da Vale, para verificar-se como se daria a trajetória do índice, em comparação ao IBOVESPA, pois essa seria uma forma alternativa de verificar-se a influência desses ativos sobre o IBOVESPA.

Como outras sugestões de trabalhos, poder-se-ia utilizar os modelos GARCH multivariados, os quais permitem que séries de ativos expliquem a volatilidade de um terceiro, dessa forma, se realizaria uma amostra composta para verificar quais os ativos que mais influenciam a volatilidade do IBOVESPA.

Por fim, neste trabalho procurou-se provar uma hipótese prática, por meios formais (econômicos e técnicos), além disso, não identifiquei, na literatura, nenhum artigo ou trabalho do gênero fato este que só vem enriquecer ainda mais os resultados auferidos.



## REFERÊNCIAS

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, p.307-327, 1986.

BROOKS, C. Introductory econometrics for finance. Cambridge University Press, 2002.

CLEVELAND, W. Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots. *Journal Of the American Statistical Association*, v. 74 p. 829-836, 1979.

CLEVELAND, W. S.; LOADER, Clive R. Smoothing by local Regression: Principles and Methods). In: W. Hardle; M. G. Schimek (eds). *Statistical Theory and Computational Aspects of Smoothing Heidelberg (Germany): Physica-Verlag*, p. 10-49, 1996a.

CLEVELAND, W. S.; LOADER, Clive R.. Rejoinder to Discussion of Smoothing by local Regression: Principles and Methods. In: W. Hardle; eand M. G. Schimek ( editors), *Statistical Theory and Computational Aspects of Smoothing, Heidelberg (Germany): Physica-Verlag*, p. 113-120, 1996b.

COCHRANE, J. H. *Asset Pricing*. Princeton University Press. 2001

DIAS, R. O Uso de Splines em Regressão Não Paramétrica. Obtido em 10/07/2008, no endereço: <http://www.ime.unicamp.br/~dias/me661.html>.

EL-DASH, N. A. *Estimação Não Paramétrica de Volatilidade Modelos Contínuos*. Campinas, SP. 2002

ENDERS, W. *Applied Econometric time series*. New York: John Willey & Sons, 1995.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econométrica*, v. 50, n. 4, p. 987-1008, 1982.

\_\_\_\_\_. BOLLERSLEV, T. Modeling the persistence of conditional variance. (with discussion). *Econometrics Review*, n. 5, p. 1-50, 81-87, 1986.

FAN, J.; GIJBELS, Irene. *Local Polynomial Modeling and Its Applications*. London: Chapman and Hall, 1996.

FAN, J.; YAO, Q. *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. Londres. UK. Springer 2002.

GUJARATI, D. *Econometria Básica*. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2003.

HAMILTON, J. D. *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

HASTIE, Trevor; LOADER, Clive. *Local Regression: Automatic Kernel Carpentry*. 1993. *Statistical Science*, v. 8, p. 120-143, 1993.

HASTIE, Trevor; TIBSHIRANI, Robert. *Generalized Additive Models*. London: Chapman and Hall, 1990.

HASTIE, Trevor; TIBSHIRANI, Robert; FRIEDMAN, Jerome. *The Elements of Statistical Learning: data mining, inference e prediction*. New York: Springer-Verlag, 2001.

LINTNER, J. *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*. *Journal of Finance*, v. 20, p. 587-615, 1965.

LOADER, Clive. *Local Regression and Likelihood*. New York: Springer-Verlag, 1999.

LOADER, Clive. *Old Faithful Erupts: Bandwidth Selection Reviewed*. Working paper, AT&T Bell Laboratory, 1995.

MARQUETTI, A. ; Lorri, V. *Princípios e Aplicações de Regressão Local*.

NADARAYA, E. A. *On Estimating Regression*. *Theory of Probability and its Applications*, v. 9, p. 141-142, 1964.

NELSON, D. B. *Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach*. *Econométrica*, 59, p.347-370, 1991.

FERNANDES, M.; PREUMONT, Y. P. *The finite-sample size of the BDS test for GARCH standardized residuals*. Working Paper.

SANTOS, D. G. Estimação de Volatilidade em Séries Financeiras: Modelos Aditivos Semi – Paramétricos e GARCH. *Dissertação de Mestrado apresentada na Universidade Federal do Rio Grande do Sul*. BR. 2008

SHARPE, W. *Mutual fund performance*. Journal of Business, p. 119-138, 1966.

SHARPE, W. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Journal of Finance, v. 19, p. 425-442, 1964.

STONE, C. J. Consistent Nonparametric Regression, with discussion. The Annals of Statistics, 5, p. 549-645, 1977.

STONE, C. J. Optimal Rates of Convergence for Nonparametric Estimators. The Annals of Statistics, v. 8, p. 1348-1360, 1980.

TSAY. R. S. Analysis of financial time series. New York: John Willey & Sons, 2002.

ZIEGELMANN, F. A. Estimating of volatility functions: nonparametric and semi-parametric methods. *Tese de Doutorado apresentada a Universidade de Kent, U.K.* 2002.

WATSON, G. S. Smooth Rregression Aanalysis, Sankhya, Series. A, v. 26, p. 359-372, 1964.