UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM GEOGEBRA

EDUARDO DIETRICH DOS SANTOS

Porto Alegre
2021

EDUARDO DIETRICH DOS SANTOS

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciando em Matemática

Orientador Metodológico
Prof. Dr. Vandoir Stormowski

Porto Alegre
2021

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de matemática

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM GEOGEBRA

EDUARDO DIETRICH DOS SANTOS

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Profª. Drª. Maria Cecilia Bueno Fischer
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

RESUMO

Para analisar como os alunos realizam os processos de tratamento e conversão de registros semióticos de funções logarítmicas e quais suas compreensões, propôs-se a elaboração, aplicação e análise de uma prática a partir do *software GeoGebra*. Escolheu-se o *GeoGebra* por possuir um grande potencial semiótico de exploração, visto que sua interface apresenta tanto a representação gráfica de uma função quanto a representação algébrica, e ambas podem ser alteradas dinamicamente. Essa prática consiste em uma sequência de questões, intercalando *applets* e questionamentos, tendo sido aplicada em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, no Colégio Dom Feliciano, colégio da rede privada, localizado em Gravataí – RS. Após a análise sustentada teoricamente pela teoria de Raymond Duval acerca dos Registros de Representação Semiótica, os resultados da pesquisa qualitativa realizada mostram que, a partir da representação gráfica presente nos *applets*, os alunos compreendem o comportamento da função e realizam intuitivamente a conversão entre os registros gráficos e algébricos para explicar esse comportamento.

Palavras-chave: Funções Logarítmicas. Semiótica. *GeoGebra*.

ABSTRACT

To analyze how students perform processes of treatment and conversion of semiotic registers of logarithmic functions and what their understanding is, we proposed the development, application and analysis of a practice using the software GeoGebra. GeoGebra was chosen because it has a great semiotic exploration potential, since its interface presents both the graphical representation of a function and the algebraic representation, and both can be changed dynamically. This practice consists of a sequence of questions, alternating applets and questioning, and was applied to a senior year high school class at Colégio Dom Feliciano, a private school located in the city of Gravataí, in the state of Rio Grande do Sul. After the analysis supported by Raymond Duval's theory on the Registers of Semiotic Representation, the results of the qualitative research show that, from the graphic representation present in the applets, students understand the behavior of the function and intuitively perform the conversion between the graphic and algebraic registers to explain this behavior.

Keywords: Logarithmic functions. Semiotics. *GeoGebra*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Durante todo o Ensino Médio tive a matemática como disciplina de maior facilidade. Acredito que essa facilidade se deu por conta de conseguir compreender a construção lógica por trás de cada conteúdo. Logaritmo me foi apresentado como uma ferramenta para determinar a incógnita quando ela estava no expoente, sendo assim, uma continuação do conteúdo de equações exponenciais. Neste momento, foram trabalhadas as propriedades dos logaritmos, mudança de base, além de problemas envolvendo matemática financeira, crescimento populacional e meia-vida de materiais radioativos. Nesses problemas, utilizávamos calculadoras científicas para determinar o valor dos logaritmos.

Meu contato seguinte com logaritmo foi ao estudar para o vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Pesquisando mais sobre o assunto, tive conhecimento das funções logarítmicas, as quais interpretei como inversas de funções exponenciais, e utilizei meus conhecimentos sobre deslocamento gráfico, conteúdo que estudei no primeiro ano do Ensino Médio, para resolver as questões das provas.

Por fim, ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, tive a oportunidade de estudar logaritmos novamente, na disciplina de Introdução às Funções Transcendentes. Primeiramente foi realizado um estudo teórico sobre logaritmo, definindo seu conceito e propriedades. Em seguida, estudamos as funções logarítmicas a partir do software *GeoGebra*[1]. Nesse estudo, construímos a função $f(x)=a.\log(b.x+c)+d$, e a partir da modificação dos parâmetros, determinamos o comportamento da função.

Ao realizar essa atividade, pensei que minha compreensão de logaritmos poderia ter sido mais ampla, caso tivesse realizado uma tarefa similar a esta no Ensino Médio. Sendo essa minha primeira motivação para a realização desse trabalho.

Ao participar da disciplina de Educação Matemática e Docência III, tive meu primeiro contado com estudos relacionados às representações semióticas, compreendendo sobre as representações e as transições entre elas. Por ser um aporte

[1]*Software* que pode funcionar como uma calculadora gráfica, além de possibilitar criações de régua e compasso. Disponível em https://www.geogebra.org/.

teórico que permite identificar aspectos do processo de aprendizagem em matemática, essa teoria está presente nessa proposta de atividade envolvendo as funções logarítmicas.

Sendo assim, proponho uma prática na qual, a partir do *GeoGebra*, serão trabalhadas as funções logarítmicas e suas relações com as funções exponenciais. A partir dessa prática serão realizados os estudos referentes às representações semióticas realizadas pelos alunos durante as etapas do trabalho. Portanto, esse trabalho visa responder à questão: **Como os alunos do Ensino Médio realizam e compreendem o tratamento e a conversão de registros semióticos de funções logarítmicas?**

A estrutura deste trabalho está organizada em quatro capítulos. O segundo capítulo apresenta as considerações teóricas, onde é apresentado um resumo da teoria de Duval referente aos registros de representação semiótica na aprendizagem de matemática. A seguir, é apresentada uma análise sobre as potencialidades do recurso tecnológico, em especial, o *GeoGebra*. Por fim, apresentamos os trabalhos correlatos. O terceiro capítulo apresenta a metodologia de pesquisa utilizada, além da atividade que foi elaborada, aplicada e analisada. No quarto capítulo, estão apresentadas as análises dos dados oriundos da prática, a partir da teoria de Duval. O trabalho é finalizado com reflexões sobre a pesquisa.

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Neste capítulo apresentamos o referencial teórico. Iniciando com a teoria de Duval, referente aos registros de representação semiótica na aprendizagem de matemática. Em seguida, realizamos uma análise sobre o uso de tecnologias digitais, em especial o *GeoGebra*, para o ensino de matemática. E finalizamos este capítulo com as reflexões acerca dos trabalhos correlatos.

2.1. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Existe uma importante distinção que deve ser feita entre as representações de um objeto matemático e o objeto em si, e estes dois conceitos não devem ser confundidos. Um objeto matemático é um conceito abstrato, enquanto uma representação desse objeto é algo concreto. Apesar disso, os objetos só podem ser compreendidos através de suas múltiplas representações, já que eles não estão disponíveis aos sentidos de forma imediata. Duval[2] (2012, p. 268) aborda essa questão através do Paradoxo Cognitivo do Pensamento Matemático:

> De um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível.

Dessa forma, apesar de haver uma diferenciação importante entre o objeto matemático e as suas representações, esses dois conceitos não podem ser vistos como dissociados no processo cognitivo, tampouco como um sendo a exteriorização do outro. As representações mentais, que se referem às imagens e conceitualizações que o indivíduo possui, e as representações semióticas, que são produções com uso de signos (Duval, 2012, p. 269), se entrelaçam e dialogam ao longo do processo de aprendizagem de matemática.

Nessa perspectiva, um sistema de representação semiótica é caracterizado como:

> um conjunto de signos expressos por meio da fala, da escrita e do desenho, associado a um conjunto de regras de produção e de organização destes

[2] Professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale, na França

> signos, que estabelecem o fluir do discurso e a um conjunto de relações entre signos e seus significados (NOTARE; FIOREZE; HALBERSTADT, 2015, p. 4).

Existe uma série de sistemas semióticos diferentes em suas concepções. Podemos destacar aqui os sistemas caracterizados como registros de representação semiótica, que possuem um grande potencial de aprendizado quando trabalhados na matemática. Um sistema semiótico passa a ser considerado um registro quando, "além de representar conceitos e ideias, tem regras de funcionamento, que permitem a realização de processos matemáticos que levam a novos conceitos e ideias" (Notare; Gravina, 2013, p. 3). Alguns exemplos de registros de representação semiótica são o registro algébrico, em que podemos resolver equações, o registro numérico, em que podemos calcular com o uso de algoritmos, o registro geométrico, em que podemos compreender objetos de maneira visual, e a língua natural, que usa as palavras como meio de comunicação.

Por essas características, os registros são extremamente importantes no desenvolvimento da matemática como área de conhecimento, possibilitando que se percebam diferentes propriedades dos objetos matemáticos e proporcionando a possibilidade de manipulação a fim de obter-se novas conclusões, resultados e compreensões. Essas possibilidades estão associadas a dois conceitos relevantes no contexto da semiótica: a conversão e o tratamento.

Esses conceitos são definidos por Duval (2012) como formas distintas de realizar transformações sobre as representações. O tratamento é caracterizado como as transformações que são realizadas dentro de um mesmo registro, enquanto a conversão é associada à transformação de uma representação em um registro para uma representação em outro registro. Um exemplo de tratamento são as transformações realizadas ao longo da resolução de uma equação, como aplicar operações em ambos os lados de uma igualdade. Ou seja, são transformações de uma equação em outra, mas sempre continuam sendo equações e por isso permanecem no mesmo registro. A conversão pode ser observada quando transformamos uma função representada em um registro algébrico em uma mesma função representada em um registro gráfico. O objeto matemático é o mesmo, mas está sendo convertido em diferentes registros.

É importante ressaltar que esses processos de conversão e tratamento são distintos e independentes um do outro. Por exemplo, um estudante que é capaz de fazer tratamentos em dois registros distintos com facilidade pode não conseguir realizar conversões entre esses mesmos registros. Duval (2012) exemplifica essa observação no caso de diferentes maneiras de realizar cálculos com números racionais: saber operar com números decimais e com frações não significa que o aluno consegue transitar de uma representação para outra.

Seguindo essa perspectiva, Notare e Gravina (2013, p. 3) propõem que é "na aprendizagem da Matemática, e nas conversões, muito mais do que nos tratamentos, que se encontram as maiores dificuldades dos alunos". Existe um certo nível de abstração relacionado com o processo de conversão que não é necessário no tratamento.

Duval (2012) apresenta três pontos de vista como justificativas para a importância da coordenação de diferentes registros de representação no funcionamento do pensamento humano. O primeiro desses fatores, que é considerado o mais superficial, baseia-se na economia de tratamento. Esse argumento propõe que "a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada" (Duval, 2012, p. 279). Uma expressão algébrica, por exemplo, expressa uma relação entre variáveis que pode ser descrita em língua natural, utilizando-se palavras, mas isso gera frases que podem ser extensas e de difícil compreensão. No registro algébrico, por outro lado, a relação é apresentada de forma mais rápida e simples, contanto que se tenha certo domínio do sistema semiótico em questão.

O segundo fator apresentado pelo autor diz respeito à complementaridade dos registros, propondo que a representação de um objeto em um dado registro envolve a seleção de aspectos para serem, ou não, levados em conta. "Isto quer dizer que toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados" (Duval, 2012, p. 280). Neste sentido, representações de um mesmo objeto em diferentes sistemas semióticos apresentam possibilidades distintas, possibilitando percepções e tratamentos únicos, inviáveis em outros registros.

O terceiro e último argumento foca na conceitualização, ressaltando a importância da mobilização de pelo menos dois registros para a compreensão dos objetos estudados. O estudo de objetos matemáticos em suas múltiplas representações se faz necessário para que a representação não seja confundida com o objeto em si. Por exemplo, quando trabalhamos com funções e focamos nas representações em registros algébricos, o aluno pode entender que a função é apenas uma equação. O mesmo pode acontecer quando o estudo é focado no registro gráfico, dificultando o entendimento do conceito além de uma única representação. Nesse sentido, não é apenas importante trabalhar em diferentes registros, mas criar possibilidades de articulação entre essas representações para que o objeto matemático, nesse caso, as funções, possam ser interpretadas como um conceito que é mais do que um conjunto de representações.

Para o autor, uma "compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do 'sentido' daquilo que é feito" (Duval; 2012, p. 283). Apesar de essa limitação não impedir todo tipo de compreensão, o entendimento acaba se tornando restrito e aprendizados posteriores não são incentivados, além de que isso dificulta a aplicação dos conhecimentos adquiridos em outras situações distintas. Por isso, a coordenação de registros possui um importante papel no processo de aprendizado de Matemática, não sendo suficiente automatizar algoritmos para tratamentos.

Nesse contexto, as ideias ligadas à perspectiva semiótica possuem um grande potencial no que diz respeito à aprendizagem de matemática. No tema abrangido nesta pesquisa, vemos que a consideração dos diferentes registros, dos processos de tratamento e as conversões, podem proporcionar uma compreensão global do que é o logaritmo. Isso se dá pois podemos pensar nas diferentes representações do objeto matemático, desconstruindo a tendência dos alunos de associarem um objeto a uma única representação. Poder desenvolver conceitos matemáticos de maneira diversificada traz a possibilidade de se compreender a complexidade dos objetos, a relação entre as representações e a abstração necessária para se entender um objeto matemático em sua essência.

2.2. Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação

Cada vez mais, podemos perceber nossas interações com as pessoas e com o mundo sendo mediadas pelas tecnologias. Existe uma presença quase constante das tecnologias no nosso cotidiano, e é necessário que busquemos compreender as características e os impactos emergentes das relações entre tecnologias e indivíduos.

No contexto educacional, esse estudo das relações entre pessoas e tecnologias se torna ainda mais relevante, uma vez que estamos olhando para a maneira como os estudantes aprendem nas interações com as mídias digitais. Investigações e pesquisas sobre como esses aparelhos podem reestruturar o processo de aprendizado, são essenciais para o desenvolvimento de uma educação coerente com os avanços da sociedade.

Gilleran (2006) propõe que o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) pode ser uma forma de personalizar o processo de aprendizado para cada aluno através de propostas que se baseiam no envolvimento ativo dos estudantes na construção do conhecimento. Na Educação Matemática, a tecnologia pode contribuir para que a disciplina se torne mais atraente e interessante, uma vez que os estudantes podem ter grande afinidade com as tecnologias em seus cotidianos.

Apesar disso, essa motivação não é garantida e, mesmo quando ela ocorre, ela pode não durar muito tempo. Nessa perspectiva, Borba e Penteado (2019, p. 15), propõem que "um dado *software* utilizado em sala de aula pode, depois de algum tempo, se tornar enfadonho da mesma forma que para muitos uma aula com uso intensivo de giz, ou outra baseada em discussão de textos, pode também não motivar.". Por isso, as tecnologias digitais não surgem como um substituto "melhor" para todo e qualquer recurso, uma vez que a comparação entre mídias é, no mínimo, problemática. A inserção das tecnologias na sala de aula de matemática deve surgir como uma alternativa que pode complementar e ser complementada pelo trabalho com diferentes recursos, compreendendo-se que o aprendizado se transforma de acordo com as potencialidades do contexto em que ele ocorre.

Segundo Maltempi e Mendes (2016, p. 89), a inserção das TDICs na sala de aula possibilita "gerar múltiplas representações do conhecimento (estáticas e dinâmicas); oferecer interatividade com o conteúdo e a possibilidade de colaboração com outros aprendizes ou especialistas e realizar cálculos matemáticos com grande eficiência". Essas contribuições devem ser levadas em conta quando planejamos a abordagem das tecnologias digitais no ensino de Matemática pois, caso contrário, corre-se o risco de não proporcionar um real aproveitamento das possibilidades oferecidas. Nesse sentido, é importante sempre ter em mente as limitações e possibilidades dos recursos que trazemos para a sala de aula.

Por isso, nesta pesquisa, vamos refletir sobre o potencial pedagógico do *GeoGebra*, software essencial para o desenvolvimento desta pesquisa. O *GeoGebra* é um software que possui diversas características inovadoras que o destacam entre os demais e o tornam adequado para a proposta explorada neste trabalho. Além de ser gratuito e ter uma interface amigável e intuitiva, o software possui gráficos, janelas algébricas e tabelas que estão interligados e possuem propriedades dinâmicas, o que facilita e incentiva que o aluno crie conjecturas e teste suas hipóteses (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2014).

Por agregar computação algébrica, funções e geometria dinâmica, o *GeoGebra* possui um grande potencial semiótico a ser explorado (STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2013). Os diferentes registros propostos pelo software se entrelaçam e possibilitam que sejam feitas operações de tratamento e conversão de maneira conjunta, proporcionando a criação de conexões entre os diferentes processos sendo trabalhados em sala de aula.

Um exemplo do potencial semiótico do software é a possibilidade de interação com a janela algébrica do software com alterações imediatas na visualização gráfica. O aluno pode criar e alterar equações que vão sendo representadas de maneira visual no próprio software. O procedimento de alterar as expressões na janela algébrica e ver essas mudanças nos gráficos pode possibilitar um entendimento sobre o significado dessas representações e como elas se relacionam, trazendo uma nova dimensão de significado para o objeto estudado.

Além disso, o software possui elementos dinâmicos que podem contribuir de diversas maneiras para o processo de aprendizagem de matemática. Interagindo com o software, o aluno pode criar pontos, circunferências, polígonos e uma série de outros objetos que podem ser arrastados, aumentados e diminuídos de maneira intuitiva, proporcionando uma visão dinâmica da própria matemática. Em outras mídias, como no lápis e o papel, a matemática se torna mais estática, sem haver esse potencial de mudanças instantâneas que o software possibilita.

Nesse sentido, o conhecimento construído com o uso do *GeoGebra* não pode ser dissociado do próprio software. As propriedades específicas do *GeoGebra,* que incluem sua interface, suas ferramentas e as maneiras que um estudante pode interagir com esses elementos são únicas, e o aprendizado decorrente desse encontro entre aluno e tecnologia se torna tão único quanto o software em si.

Por isso, reconhecemos o potencial das Tecnologias Digitais para promover o aprendizado de matemática em sala de aula, uma vez que o uso de softwares pode permitir a associação instantânea entre diferentes representações de um mesmo objeto, além de permitir experimentações de diferentes hipóteses, que podem proporcionar o protagonismo do aluno em seu processo de construção do conhecimento.

Também entendemos que a importância da implementação das tecnologias digitais de forma efetiva nas salas de aula não surge como um substituto "melhor" para outras tecnologias, de maneira a hierarquizar as mídias, e sim como uma alternativa de ensino que pode complementar o entendimento da matemática em suas possibilidades. Diferentes mídias proporcionam diferentes aprendizados, e devem ser usadas de maneira a explorar as suas características para promover ambientes de aprendizagem complexos e diversificados.

2.3. Trabalhos Correlatos

Uma série de trabalhos já foram realizados em temas semelhantes ao abordado nesta pesquisa. Nesta seção, vamos apresentar uma análise aprofundada de dois destes trabalhos.

A primeira pesquisa a ser analisada é o Trabalho de Conclusão de Curso de Rocha (2019), intitulado *Aprendizagem de Inequações no Ensino Médio: um estudo com o software GrafEq e os registros de representação semiótica*. O objetivo do trabalho é analisar como o software GrafEq contribui na aprendizagem de equações. Mais especificamente, a pesquisa buscou analisar como os estudantes transitam entre os registros algébrico e gráfico no processo de compreensão de inequações.

Para investigar esses objetivos, uma sequência de atividades foi elaborada e aplicada com uma turma do 3° ano do Ensino Médio em uma escola estadual de Porto Alegre. A primeira parte dessas atividades ocorreu em sala de aula através de uma folha de atividades, em que foram trabalhadas diferentes variáveis visuais de funções e foi proposta a construção de algumas inequações. A segunda parte ocorreu em um Laboratório de Informática, em que os alunos foram convidados a utilizar o GrafEq para visualizar e criar inequações.

Os dados produzidos foram as folhas de atividades com as respostas dos alunos, os arquivos de criação dos alunos no GrafEq e a transcrição de áudios de conversa entre alunos durante o desenvolvimento das atividades. A pesquisadora se baseou na Teoria de Registros de Representações Semiótica de Duval para fazer sua análise, pensando no potencial semiótico do software e nos diferentes registros que foram abordados através das atividades.

A partir do trabalho realizado, a pesquisadora concluiu que:

> A versatilidade do GrafEq favoreceu a aprendizagem de inequações, pois os participantes puderam verificar no mesmo instante o significado matemático por trás de suas construções. Ainda, esse software permitiu a realização de testes onde os alunos poderiam verificar suas estratégias, algo que, somente com o lápis e o papel, talvez não fosse possível. Também acreditamos que as atividades de construção como as que foram propostas puderam levar ao domínio de conceitos dos objetos em estudo, por meio da mobilização dos diferentes registros de representação semiótica. [...] De maneira gradativa, o grupo de participantes foi se familiarizando, criando autonomia e dominando o software. Nas avaliações por parte dos alunos quanto ao uso do software, verificamos que utilizar o GrafEq é uma boa alternativa ao ensino tradicional de Matemática.(ROCHA, 2019, p. 63)

Em outras palavras, verificou-se que as tecnologias tiveram um papel fundamental para a atividade, possibilitando a realização de testes de hipóteses, a visualização instantânea de gráficos e o domínio dos conceitos abordados nas aulas.

A partir do trabalho de Rocha (2019), é possível identificar semelhanças e diferenças em relação à pesquisa aqui proposta. Primeiramente, vemos uma diferença tanto no conteúdo quanto no software sendo utilizado. A pesquisadora optou pelas inequações sendo trabalhadas através do GrafEq, enquanto a nossa pesquisa busca trabalhar logaritmo com o GeoGebra.

Apesar disso, podemos ver muitas semelhanças no objetivo das pesquisas. Ambas buscam olhar para o aprendizado de matemática com tecnologias através da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, considerando-se as possibilidades de visualização e interação com diferentes registros. Nesse sentido, a pesquisa de Rocha (2019) contribuiu para a realização desta pesquisa por estabelecer conclusões que podem se assemelhar aos resultados produzidos neste trabalho.

O segundo trabalho que consideramos relevante para esta pesquisa é a dissertação de Santos (2011), intitulada *O ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra*. O objetivo do trabalho é elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática sobre funções logarítmicas utilizando o GeoGebra. Duas principais questões nortearam o andamento da pesquisa:

> 1. Os alunos com a sequência didática proposta neste trabalho conseguem reconhecer elementos fundamentais para o estudo da função logarítmica, tais como domínio, imagem e o esboço do gráfico? Em que medida? Quais as dificuldades encontradas? Quais avanços percebidos?
> 2. O uso do software GeoGebra como estratégia didático-pedagógica no estudo da função logarítmica contribuiu ou não para a aprendizagem dos alunos? (SANTOS, 2011, p. 24)

Vemos que a primeira questão está relacionada com a sequência didática, considerando seu potencial de ensino e aprendizagem das funções logarítmicas, enquanto a segunda questão foca nas TDICs e no potencial do software em si.

Para investigar essas perguntas, uma sequência de atividades foi elaborada com base no Caderno do Professor de Matemática do 1° ano do Estado de São Paulo e em uma entrevista realizada com um ex-professor de matemática dos alunos, aplicada com uma turma do 3° ano do Ensino Médio em uma escola da rede Estadual de São Paulo, no município de Itaquaquecetuba. A sequência era formada por quatro principais atividades com diferentes objetivos e abordando diferentes conteúdos relacionados com logaritmo, como potências e funções inversas.

Os dados produzidos foram os registros escritos dos alunos e transcrições de diálogos entre os estudantes. A análise transita entre os diferentes eixos teóricos da pesquisa, propondo relações dos dados com a Teoria de Registros de Representações Semiótica de Duval e com os Processos do Pensamento Matemático Avançado.

A partir do trabalho realizado, a pesquisadora concluiu que foi possível desenvolver conceitos pertinentes para a compreensão das funções logarítmicas e que o GeoGebra contribuiu para a aprendizagem dos alunos. Além disso, algumas das dificuldades relatadas pela autora incluem a conversão do registro gráfico para o registro algébrico e o tratamento numérico e algébrico.

O trabalho de Santos (2011), por ser uma dissertação, abordou uma série de questões que estão fora do escopo da nossa pesquisa. Esses elementos incluem uma abordagem teoricamente aprofundada, tanto na discussão da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval quanto na perspectiva dos Processos do Pensamento Matemático Avançado.

Apesar das diferenças, podemos ver muitas semelhanças entre as duas pesquisas. Ambas trabalham com logaritmo através do software GeoGebra, buscando analisar uma proposta didática nesse contexto. Nesse sentido, a pesquisa de Santos (2011) proporcionou uma visão aprofundada do tema de pesquisa e trouxe possibilidades de análise que contribuíram para o processo de compreensão dos dados produzidos em nossa pesquisa.

Os trabalhos relacionados com os diferentes eixos temáticos abordados nessa pesquisa, como o ensino de logaritmo, o uso de softwares e a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, trouxeram uma nova visão para a pesquisa aqui proposta. Além de proporcionarem diferentes possibilidades teóricas e metodológicas para o desenvolvimento da pesquisa, esses trabalhos contribuíram para o entendimento do cenário da pesquisa em Educação Matemática em seus contextos específicos, evidenciando o lugar do nosso trabalho neste cenário.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para responder à pergunta diretriz e alcançar os objetivos da pesquisa, adotamos a metodologia de pesquisa qualitativa. Assim, apresentaremos nesse capítulo as características metodológicas, a atividade proposta e seus objetivos.

3.1. Metodologia

A fim de analisar como os alunos do Ensino Médio realizam o tratamento e a conversão de registros semióticos de funções logarítmicas e quais suas compreensões, realizou-se a pesquisa no Colégio Dom Feliciano, escola da rede particular, em Gravataí, com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio composta por 23 alunos. A prática foi aplicada na modalidade de ensino híbrido[3], com alunos presenciais e remotos. Para participar da pesquisa, os estudantes deveriam assinar o termo de assentimento e seus responsáveis, o termo de consentimento. O colégio autorizou a participação dos alunos na pesquisa (Anexo 2).

A prática realizada foi dividida em 5 etapas. Na primeira, é realizada uma introdução, retomando conteúdos já estudados pelos alunos, acerca de logaritmos e funções. A segunda, subdivide-se em três questões, explorando o comportamento do gráfico da função $f(x)=\log(x)$. A terceira subdivide-se em 4 questões, explorando cada um dos parâmetros da função $f(x)=a.\log(b.x+c)+d$. Na quarta etapa, relacionam-se as relações entre funções logarítmicas e exponenciais. Por fim, são apresentadas cinco questões do ENEM.

Considerou-se a pesquisa qualitativa como a mais adequada, visto que desejava-se analisar os dados com o intuito de compreender como os alunos mobilizavam os registros. Esse processo abrange a análise da forma com que os alunos interagiram tanto com o material didático, quanto com os demais colegas e com o professor pesquisador.

Segundo Gerhardt e Silveira (2009), aqueles que utilizam os métodos de pesquisa qualitativa, buscam explicar o porquê das coisas, de forma que os dados analisados são não-métricos e se valem de diferentes abordagens. Sendo assim, a

[3] A expressão Ensino Híbrido será utilizada nesse texto para indicar que alguns alunos estavam em sala de aula, e outros (de forma síncrona) remotamente.

pesquisa qualitativa preocupa-se com aspectos da realidade que não podem ser quantificados.

> Suas características são: objetificação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância da diferença entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 32).

Os dados produzidos pelos alunos foram coletados diretamente da página da atividade, através do *GeoGebra Classroom*, uma funcionalidade do site *GeoGebra* na qual há duas interfaces. Na interface do professor, ele pode conferir em tempo real, as soluções de cada um dos alunos, observando os *applets*[4], alternativas marcadas e soluções escritas. Na interface dos alunos, eles podem interagir com os *applets* e responder as questões.

3.2. Atividades Planejadas

Esta prática foi elaborada a partir do site do *GeoGebra*, e está disponível para acesso através do link https://www.geogebra.org/m/fmjdupjz.

Planejada para ser realizada em dois encontros de dois períodos cada, a atividade visa proporcionar aos alunos um estudo de funções logarítmicas, no qual a partir do recurso tecnológico, seja possível explorar e compreender o comportamento das funções. A atividade pode ser conferida na íntegra no Anexo 3.

Inicialmente, foi apresentada uma introdução na qual os alunos deveriam optar entre duas alternativas para determinar a transição correta entre a forma logarítmica e exponencial de uma equação.

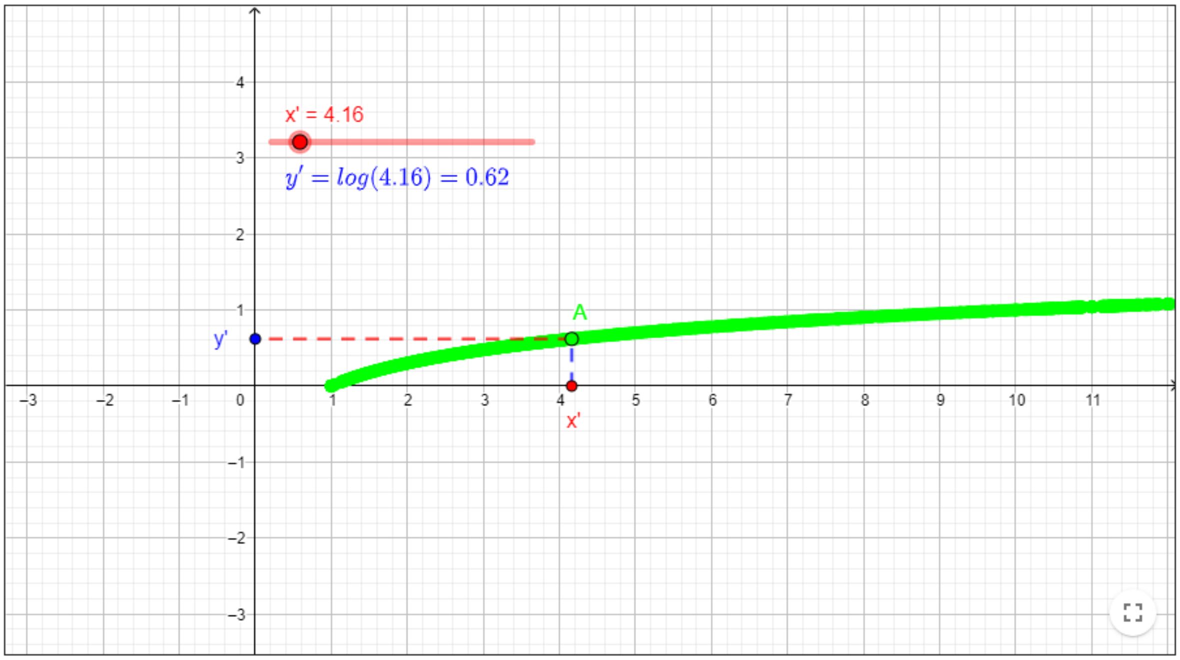
Na primeira questão, propôs-se estudar o comportamento da função f (x) = log x, para diferentes intervalos, a partir de um *applet*. O primeiro tópico iniciava pelo intervalo de x entre 1 e 30. Escolheu-se esse intervalo de domínio, pois compreendendo o comportamento, tanto gráfico quanto algébrico, da função nesse intervalo, o aluno possui os dados necessários para projetar como será o comportamento para todo x>1.

---

[4] Pequeno aplicativo decorrente de outro *software*.

Neste *applet* os alunos podem alterar a coordenada x' de um ponto A, e observar o comportamento da coordenada y' desse ponto, tal que y' = log (x'). Assim, o applet representa dinamicamente as transformações tanto gráficas quanto algébricas, possibilitando a realização de cálculos matemáticos com grande eficiência (Maltempi e Mendes, 2016). As cores utilizadas na estrutura algébrica, correspondem com as cores relacionadas as representações do *applet*.

Figura 1 – *Applet* 1 - a



Fonte: acervo pessoal

Assim, uma sequência de questionamentos fora apresentada, de modo que o aluno após identificar características da representação gráfica, consiga realizar a transformação para o registro algébrico, no qual, ao realizar tratamentos com a função, possibilite a construção de um argumento para a justificativa da generalização para o intervalo x>1.

O segundo tópico era semelhante ao primeiro, porém o intervalo analisado pelos alunos, foi o intervalo de x entre 0 e 1. Desse modo, os alunos a partir da mesma estratégia, podem compreender o comportamento diferente do apresentado anteriormente.

No terceiro tópico, finalizamos o estudo da função $y' = \log (x')$. Aqui, foi estudado o comportamento da função para x entre -20 e 0. Com o intuito de gerar o questionamento sobre como seria a função caso tivéssemos valores negativos no domínio.

A segunda questão apresenta uma função logarítmica construída a partir de parâmetros. Com a alteração desses parâmetros será possível a visualização de mudanças na representação gráfica. Para determinar o que implica alterar cada um dos parâmetros, os alunos necessitarão utilizar diferentes tipos de registros, como gráficos e algébricos. Buscando proporcionar a compreensão de cada parâmetro, essa questão também foi subdividida em tópicos, apresentando um parâmetro por tópico e em cada tópico, é solicitado que o aluno explique quais alterações ele nota no gráfico. O motivo que levou a cada alteração, é explorado na terceira questão.

Na terceira questão, é solicitado que os alunos expliquem o motivo pelo qual estão relacionadas as alterações nos parâmetros, e as respectivas alterações no gráfico observado no *applet*. Aqui, o *applet* possuí os quatro parâmetros, de modo que os alunos conseguissem explorar também as alterações ocorrendo simultaneamente. Para explicar cada caso, espera-se sejam realizadas conversões entre diferentes tipos de registros, de modo que os tratamentos realizados em cada uma das representações contribuam para complementação da explicação (Duval, 2012).

A quarta questão perguntava aos alunos quais relações eles observavam entre as funções $f\ (x) = \log x$, e a função $i\ (x) = 10^x$. Assim, foi apresentado o quarto *applet*, neste, além das funções f e i, eles também podiam inserir a função $g\ (x) = x$, pois ela viria a ser importante para notar a reflexão presente nessa questão. Não foram apresentadas mais instruções, pois a intenção era que os alunos respondessem, de fato, suas impressões.

Finalizando a atividade, foram apresentadas cinco questões do ENEM. Como as habilidades do exame que recebem maior destaque são: utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências; resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos; analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para construção de argumentos (Capella, 2018), apresentamos essas cinco questões para destacar que o exame aborda questões centradas no conceito de logaritmo, ou seja, transitar entre expressão exponencial e logarítmica, e as propriedades de logaritmos.

4. APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Neste capítulo analisaremos os dados coletados a partir da prática apresentada no capítulo 3, sustentados pelas teorias sintetizadas no capítulo 2. Para essa análise, subdividiremos o capítulo para que em cada subdivisão seja abordada uma questão, apresentando quando necessário, diferentes soluções e compreensões dos alunos. Destacamos que os alunos serão denominados por letras, a fim de manter o anonimato dos participantes, iniciando pela letra A, até finalizarmos na letra W. Assim, denominando todos os 23 alunos participantes.

Inicialmente os estudantes foram convidados a acessar a página do GeoGebra no navegador, para iniciarem a atividade. Assim, exploraram o comportamento da função logarítmica, visualizaram e compreenderam as mudanças gráficas ocasionadas por alterações em parâmetros na estrutura algébrica da função, destacaram relações entre a função logarítmica e a função exponencial, e por fim, debateram acerca dos conhecimentos matemáticos necessários para solucionar as questões do ENEM que envolviam o assunto de funções logarítmicas.

4.1. Introdução da atividade

Após apresentar-me para os 23 alunos presentes no primeiro encontro, sendo 16 alunos presentes presencialmente e 7 remotamente, auxiliei os alunos a acessarem a atividade, para então, iniciarmos a introdução. Minha primeira pergunta foi se eles lembravam de ter estudado logaritmos. Todos responderam que sim. Então, perguntei se eles consideravam um assunto fácil. Somente 4 alunos responderam que sim (alunos A, B, C, D). Por fim, perguntei quem já havia utilizado o *GeoGerba*, então, somente o aluno E se manifestou, ele havia utilizado em uma atividade de geometria plana.

Iniciando a introdução, solicitei que individualmente eles marcassem a alternativa que considerassem correta. Em tempo real, como representado na figura 2, eu conferia no site as repostas dos alunos, assim, quando o último aluno assinalou, observei que todos haviam acertado.

Figura 2 – Resposta Introdução

Assinale a sua resposta aqui

- ✓ $\log_b a = c \iff b^c = a$, ou seja, $\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$
- ☐ $\log_b a = c \iff b^a = c$, ou seja, $\log_2 8 = 3 \iff 2^8 = 3$

Fonte: acervo pessoal

Ao questioná-los acerca de como identificaram que a primeira alternativa era a correta, o aluno C respondeu que “a última conta entrega a questão”. Ele se referia ao fato de que era possível observar somente a última igualdade de cada alternativa, e assim, determinar a correta, pois a segunda era um absurdo. Então, perguntei se o resto da alternativa fazia sentido para eles. Alguns responderam que sim, outros sinalizaram que não estava muito claro. Assim realizei a leitura da primeira igualdade a partir da linguagem natural. Quando eu realizei essa conversão de registro algébrico para linguagem natural, diversos alunos sinalizaram que agora estavam entendendo. O aluno F disse: “Primeira vez que entendo por que os dois lados da seta são a mesma coisa.”.

A partir da frase dita pelo aluno F, observamos que enquanto o aluno analisava somente a representação algébrica, ele observava os símbolos que determinavam as relações. Porém, por não compreender o porquê dessa relação, ela se tornava algo imposto a ele. A realização de pelo menos dois registros, nesse caso algébrico e de linguagem natural, foi o que proporcionou a compreensão do objeto matemático (Duval, 2012), ou seja, da transição entre expressão logarítmica e exponencial. Pois na representação por linguagem natural, as relações entre cada objeto foram apresentadas de forma elucidativa. Assim, a introdução correspondeu aos objetivos que desejava-se alcançar ser elaborada, ou seja, proporcionar a compreensão da transição entre as representações.

4.2. Comportamento da função

Como a questão iniciaria o estudo de funções logarítmicas, perguntei se eles lembravam de funções. Após sinalizarem que lembravam, pedi alguns exemplos. Eles disseram: “reta, parábola, x^2, aquela que é um V (função vetorial).”. Após essa variedade de respostas, eu abri a calculadora gráfica do *GeoGerba* na tela que estava sendo projetada na sala e compartilhada com os alunos remotos, e perguntei: Nessa janela, chamada janela de álgebra, inserimos a representação algébrica da função que queremos reproduzir na janela gráfica. O que eu devo escrever para surgir uma reta na janela gráfica? O aluno B respondeu: “y=x.”. Então eu digitei e de fato apareceu uma reta. Perguntei: “E para surgir uma parábola?”, os alunos B e G responderam simultaneamente: “x^2.”. Então digitei $y=x^2$, gerando uma parábola. Questionei se eles saberiam me explicar o motivo pelo qual ao digitar y=x, gerava uma reta. O aluno B respondeu: “É poque quando o x é 1, o y também é 1, e assim vai indo.”. O aluno G disse: “E a outra é porque sempre vai o x ao quadrado.”.

Podemos observar que nesse primeiro diálogo, os alunos já estavam utilizando a linguagem natural, aportada justificativas decorrentes do registro algébrico, para responderem uma pergunta referente ao registro gráfico. Como em cada sistema de representação, eles conseguiram obter novos conceitos e ideias, esses sistemas são de fato, caracterizados como registros de representação semiótica (Notare e Gravina, 2013).

Aproveitei ainda esse momento para perguntar se era natural para todos que a parábola crescesse mais do que a reta, todos fizeram sinal de positivo com as cabeças. Embora eles concordarem, não significa que eles de fato compreenderam, minha intenção era que eles começassem a refletir sobre o comportamento das funções, o que foi trabalhado na questão a seguir.

O enunciado da questão 1, explicava que seria analisado um Ponto A, de coordenadas (x’, y’). Tal que y’ = log x’. No item *a*, ao trabalharem com o domínio da função restrito no *applet* ao intervalo [1, 30], os alunos observaram que o ponto A crescia, mas crescia cada vez menos.

Primeiramente, apresentarei as respostas do aluno A, o qual, acompanharemos suas soluções para o estudo do comportamento da função. Conforme outros alunos apresentem soluções que envolvem diferentes estratégias de solução, essas também serão apresentadas nesse capítulo.

i) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja 1?
“1.”

ii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja 2?
“100.”

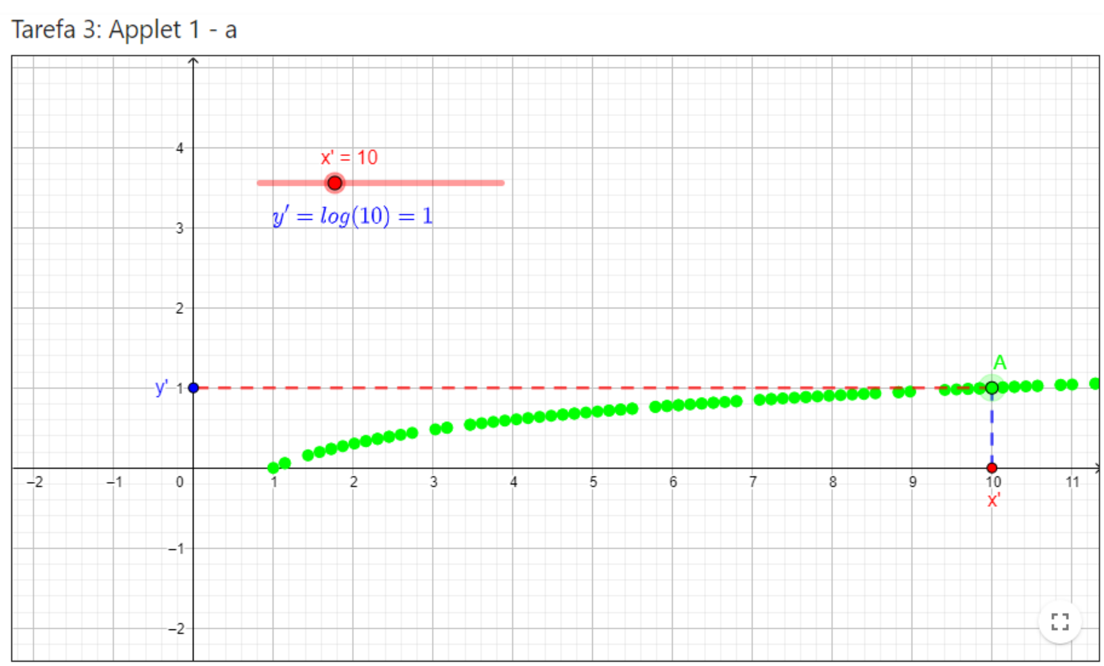
iii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja 3?
“1000, pois y'=log(x') | 10^y'=x' ---> 10^3=1000.”

iv) Se fosse possível aumentarmos o valor de x' infinitamente, chegaríamos a um "valor limite" para y'? Justifique.

“Não, pois embora a curva cresça cada vez menos, o valor de x e y será sempre maior que o anterior e continuará crescendo rumo ao infinito.”

Observe que embora ele tenha errado o primeiro item, pois a resposta correta seria 10, acredito que tenha sido erro de digitação, visto que todos os outros alunos acertaram esse item, pois bastava movimentar o x’ até a altura ficar em 1, como apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Applet 1 – a, aluno G



Fonte: acervo pessoal

Para responder os itens *ii* e *iii*, os alunos não teriam o auxílio direto do *applet*, pois o domínio era restrito, podendo aumentar até no máximo 30, assim, eles precisariam recorrer ao registro algébrico para solucioná-los, como apresentado por ele na solução do item *iii*, ao qual verbalmente solicitei uma justificativa. Ainda em relação aos itens *ii* e *iii*, respectivamente, destaco as respostas do aluno J: “100, fazendo 10 ao quadrado, o resultado é 100.” e “1000. Fazendo 10 ao cubo, o resultado é 1000.”. Observando a solução apresentada pelo aluno A, é evidente que ele utilizou o registro algébrico para obter o dado que não era possível ser obtido através da representação gráfica disponibilizada pelo applet. Porém, O aluno J responde através da linguagem natural. Observando o comportamento da função e observando o crescimento das coordenadas do eixo y em relação as coordenadas do eixo x, ele percebeu o padrão que a coordenada x’ será 10 elevado a y. Assim, embora tenham chegado ao mesmo resultado, percebe-se que a partir diferentes registros, um aluno realizou operações algébricas, enquanto o outro, compreendeu um comportamento, portanto, obtiveram distintas percepções de um mesmo objeto matemático, o que decorre de cada representação apresentar aspectos únicos (Duval, 2012).

A resposta do item *iv* é uma verdade, mas não responde completamente à pergunta, visto que um valor pode crescer infinitamente, porém, chegando cada vez mais próximo de uma assíntota. Observando somente a representação gráfica a partir do *applet*, não é possível determinar como será esse crescimento para valores de x>30. Assim, necessitava-se recorrer a outro registro de representação para responder essa pergunta.

Observe a reposta do aluno H para o item *iv*:

“Não, se x’ for sempre potências de base 10, y’ será o valor da potência, o que não vai ter limite.”.

Essa resposta abrange o fato de que y’ irá aumentar rumo ao infinito, pois teremos os pares ordenados: (0,1), (10,1), (100, 2), (1000, 3), (10.000, 4), ... assim, observamos que embora ambos tenham convertido o registro gráfico para o registro de linguagem natural, uma vez que após visualizarem a representação gráfica no *apllet*, eles explicaram o comportamento com suas palavras, apenas o aluno H passou pelo registro algébrico, contemplando a solução da pergunta em sua totalidade. Como realizaram a conversão de registros, ambos constataram conclusões acerca do comportamento da função, garantindo a aprendizagem (Duval, 2012), porém, o aluno H realizou uma constatação a mais.

No item *b*, o domínio estava restrito ao intervalo [0, 1]. Assim, o intervalo do gráfico representaria uma curva crescente, porém, localizada no quarto quadrante. Novamente, observaremos as repostas do aluno A.

i) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja -1?

“0.1”.

ii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja -2?

“0.01, pois y'=log(x') | 10^y'=x' ---> 10^-2=1/10^2=1/100=0.01”.

iii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja -3?

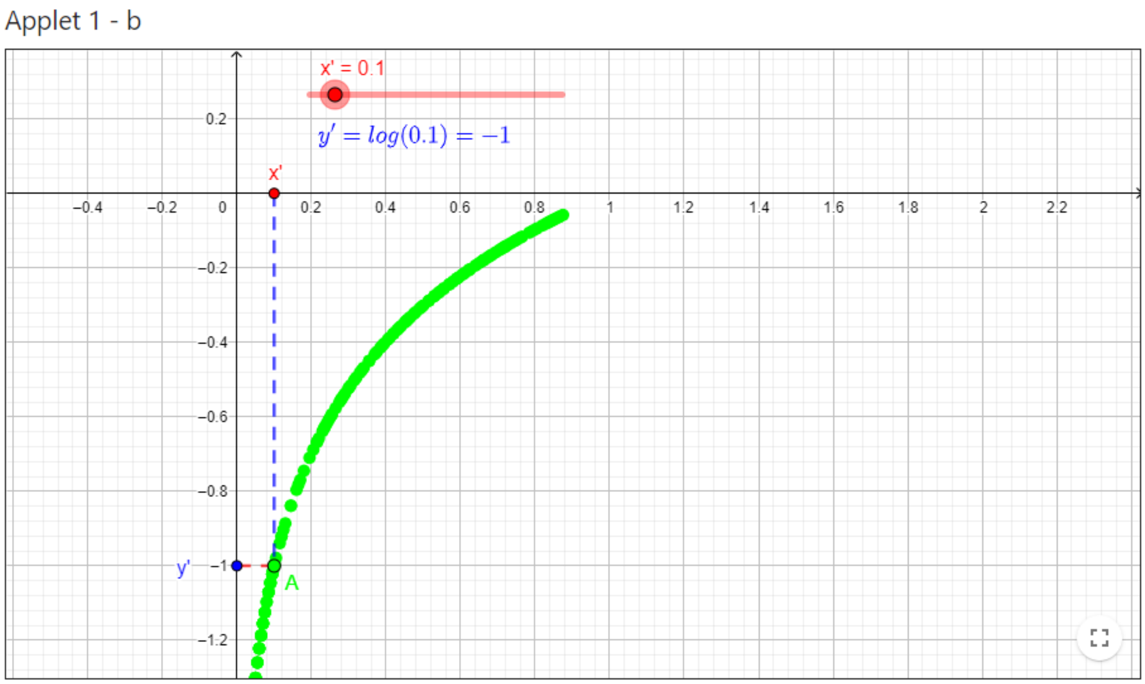
“0.001, pois y'=log(x') | 10^y'=x' ---> 10^-3=1/10^3=1/1000=0.001”.

iv) Se fosse possível aproximarmos infinitamente o valor de x' em relação ao zero, chegaríamos a um "valor limite" para y'? Justifique.

“Não, pois embora a curva diminua cada vez menos, o valor de x e y será sempre menor que o anterior e continuará em direção ao infinito negativo.”

Novamente, com a intenção de determinar o valor de x’, o aluno identificou a conversão do registro gráfico para o algébrico, disponível no *applet*. Embora ele não tenha realizado essa conversão, identificá-la será o ponto de partida para compreender o comportamento da função nos diferentes registros. No registro algébrico, o aluno A realizou uma transformação semiótica de tratamento, alterando a representação logarítmica para exponencial, e realizando as operações necessárias, de modo que ele determinou o valor de x’ para cada caso. No item *iv*, não fica claro se a dedução do aluno de que ao se aproximar de zero, x’ diminui cada vez menos, foi realizada a partir do registro gráfico ou algébrico. Como ele não especifica o motivo pelo qual ela diminui cada vez menos no item *iv*, essa dedução pode ter decorrido da comparação entre as repostas de cada um dos itens anteriores, observando que de y’ = -1, para y’ = -2, x’ deslocou-se 0,09 unidades, e de y’ = -2, para y’ = -3, x’ deslocou-se 0,009 unidades, portanto, diminuindo cada vez menos. Ou se essa dedução ocorreu a partir da análise do *applet*, pois como o controle deslizante foi programado para possuir um arredondamento de duas casas decimais, foi possível testar os valores de x’ = 0,1 e x’ = 0,01, conforme apresentado na Figura 4, encontrando as respostas dos itens i e ii, ou ainda ao analisar a curvatura do gráfico.

Figura 4 – Applet 1 – b, aluno G



Fonte: acervo pessoal

Outra vez, os objetivos de aprendizagem esperados foram alcançados para os três primeiros itens da questão, visto que, para chegar as repostas das questões, foram realizadas as conversões os tratamentos. No item *iv*, caso o aluno tenha realizado a solução conforme a primeira hipótese, não podemos caracterizar como um caso de mono registro (Duval, 2012), pois os dados analisados decorrem dos itens anteriores, onde o aluno identificou a conversão de registro gráfico para algébrico e realizou o tratamento com as operações. No caso da segunda hipótese, o aluno teria realizado a conversão de registro gráfico para linguagem natural, garantindo assim, a compreensão do objeto matemático (Duval, 2012)

O item *c* aborda o caso de o domínio ser negativo, portanto, o controle deslizante varia dentro do intervalo [-20, 0]. Encerraremos a primeira questão, com a conclusão do aluno A.

c) É possível calcularmos o valor de y' quando x'<0 ? Justifique.

"Não, pois o valor de x nunca será negativo com uma base positiva, no caso 10, afinal como visto anteriormente, quando o y é positivo, x cresce rumo ao infinito; já quando o y é negativo, x diminui rumo ao infinito negativo, mas nunca ultrapassando a marca de 0."

Como nesse item a representação algébrica era inexistente no software, pois ele não realiza o cálculo do logaritmo quando x é negativo para a função *f*(x) = log (x), ela poderia indicar que não era possível. Porém, a comprovação se deu através de um argumento que parte da representação algébrica, mas é apresentado na representação de linguagem comum. Observe que o argumento apresentado pelo aluno é baseado em quando y' é positivo ou negativo, não sobrando outra possibilidade de valor para y'.

Finalizando seu argumento, o aluno afirma que: "já quando o y é negativo, x diminui rumo ao infinito negativo, mas nunca ultrapassando a marca de 0.". Observe que x está se aproximando de zero, ou seja, ele não está diminuindo rumo ao infinito negativo, como apresentado pelo aluno. Aqui, o aluno pode ter confundido o comportamento do x com o do y, pois é o y quem vai para o infinito negativo conforme x se aproxima de zero.

Como para essa questão o software não auxiliava diretamente na solução, pois os alunos ao construírem seus argumentos poderiam recorrer aos *applets* dos itens anteriores, porém nem todos fizeram isso, notou-se que aqueles que não conferirem o comportamento da função no *applet*, como o aluno A, confundiram as variáveis. Esse problema decorre de os alunos estarem realizando as atividades se deparando cada vez com um conceito novo.

4.3. Parâmetros x Representação gráfica

A questão 2, introduz os parâmetros na atividade. Ou seja, $f(x)=a.\log(b.x+c)+d$. Aqui, em cada item será estudado um parâmetro. É importante destacar que foi esclarecido aos alunos que nesse momento não era necessário justificar o motivo que levava a alteração no parâmetro gerar a respectiva alteração gráfica, mas sim, que o aluno explicasse quais alterações gráficas ele conseguiu observar.

Acompanharemos as soluções do aluno C.

a) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = \boldsymbol{a}.\log(x)$, ao alterarmos o parâmetro ***a***?

“A curvatura muda conforme o valor de a é alterado, e quando esse é negativo a curva é invertida.”

b) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = \log(\mathbf{b}.x)$, ao alterarmos o parâmetro ***b***?

“A curvatura vai para cima e para baixo, e quando o valor de b é negativo, a curva é invertida pro lado.”

c) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = \log(x+\mathbf{c})$, ao alterarmos o parâmetro ***c***?

“A curva anda para a esquerda e direita.”

d) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = (\log x)+\mathbf{d}$, ao alterarmos o parâmetro ***d***?

“A função vai para cima e para baixo.”

Todas as respostas do aluno C estão corretas. No item *a*, ele apresentou tanto o caso com ***a*** positivo, quanto ***a*** negativo. Apenas 8 alunos destacaram esses casos. Aparentemente, essa resposta foi obtida através da movimentação do controle deslizante e da observação da curva.

No item *b*, ele utilizou a mesma estratégia do item *a*. Nesse item, gostaria de trazer a solução do aluno K, pois ele apresentou uma resposta com mais elementos da representação algébrica.

“Como ***b*** está multiplicando *x*, ele está fazendo as coisas acontecerem antes. Eu sei disso pois já estudei deslocamento gráfico.”.

Observe que o aluno K foi o único aluno que apresentou uma ideia de antecipar ou atrasar elementos do gráfico. Sua lógica parece ter sido a seguinte, quando ***b*** for 1, para x=10 temos y=1, então se ***b*** for 2, teremos na coordenada x=10 o resultado que antes só teríamos na coordenada x=20.

Os itens ***c*** e ***d*** foram considerados os mais fáceis pelos estudantes. Por se tratar de deslocamentos respectivamente horizontais e verticais, visualmente é simples de compreender a alteração gráfica. Nesses tópicos, houveram alunos que destacaram para quais valores as funções seriam deslocadas para esquerda ou direita, e cima ou baixo.

Nessa segunda questão, os alunos trabalharam somente com o registro gráfico. Apesar de ter a representação algébrica da função no *applet*, a interação foi com o gráfico da função, sendo a partir dele que os dados para formulação das respostas foram obtidos pelos alunos. Destaca-se o uso do GeoGerba, pois devido a suas propriedades dinâmicas, possibilitou que os alunos criassem conjecturas e testassem duas hipóteses (Borba, Silva, Gadanidis, 2014). Embora, segundo Duval, trabalhar com único registro limite as percepções do aluno acerca do objeto matemático, essa questão foi apenas o início do estudo sobre parâmetros. Na próxima questão, os alunos irão trabalhar com outros registros, complementando as conclusões obtidas nessa questão.

4.4. Compreendendo o comportamento

Na terceira questão, os alunos deveriam explicar o porquê de cada alteração. Ou seja, por exemplo, por que o gráfico da função é deslocado para cima quando aumentamos valores positivos de ***d***? Para analisar a aprendizagem dos alunos a partir desses questionamentos, seguiremos a analisar as respostas do aluno C, pois a intenção é compreendermos a lógica por trás de suas explicações realizadas na questão anterior.

a) “O valor da f(x), no caso apenas y, será multiplicada por "a" e a curvatura torna-se mais acentuada ou invertida (quando "a" é negativo), pois o valor final inteiro do log está sendo multiplicado.“.

Observe que a lógica está correta, o aluno observou o tratamento da representação gráfica, ao analisar a curvatura. Em seguida, ele recorre a uma conversão, que pode ser identificada através do *applet*, passando do gráfico para o algébrico, onde ele justifica ao interpretar ***a*** como um tratamento pois está multiplicando o logaritmo. Apesar de não realizar a conversão de registro, mas sim, identificá-la, o aluno continua conseguindo realizar os tratamentos em cada registro, constatando em cada um, contribuições para sua conclusão.

b) “Os valores de x será multiplicado diretamente por "b" e, consequentemente, a curvatura permanecerá igual, embora a altura e o quadrante de x e y poderão ser alterados conforme o valor de "b". Isso ocorre pois o valor inteiro de x e y estão sendo multiplicados proporcionalmente, afinal o esse processo ocorre "antes do log".”

Observe que o aluno confunde o que seria alterar *x*. Após a análise realizada na representação gráfica, ele inicia o processo de justificativa a partir da representação algébrica. Aqui, nós realizamos o seguinte processo, determinamos *x* ou *y*, por exemplo, fixado o *x*=10, quando ***b***=1, obtínhamos y=log(1×10). Porém ao variarmos o valor de ***b***, note que x permanecerá o mesmo, mas teremos uma variação de y.

c) “O valor de x está sendo somado diretamente com "c" ("antes do log") e, consequentemente, a curvatura será mudada um pouco, embora essa alteração seja imperceptível no caso de valor pequenos como no gráfico. Com isso, a curva desliza pelo eixo x.”

No item *c*, por concluir que uma mudança de curvatura nesse caso seria praticamente imperceptível, o aluno não considera o fato de visualmente ocorrer apenas um deslocamento horizontal no seu *applet*, como justificativa. Porém, algebricamente ele nota que ocorrerá uma diferença de valor obtido ao aplicar o logaritmo. De fato, ao definirmos *x*=10, por exemplo, temos que log(10)=1, porém, ao considerarmos ***c***=5, estaremos calculando o log(15), ou seja, estamos calculando o que antes só aconteceria quando *x*=15. Utilizando a lógica apresentada anteriormente pelo aluno K, estamos adiantando a função ao somarmos 5 ao *x*.

d) “O valor final do log está sendo somado com "d" e, consequentemente, a curva deslizará pelo eixo y, enquanto x permanecerá igual.”

No item *d*, o aluno C realiza um processo semelhando ao realizado no item *c*. Porém, neste ele não escreve sobre a curvatura ser deformada. O método utilizado é comprovar algebricamente que somar um valor após o cálculo do logaritmo, resultando em um deslocamento horizontal na representação gráfica, visto que estamos acrescendo valores ao logaritmo de determinado *x*.

Nos itens apresentados nessa questão, observamos que o aluno após conferir as conclusões realizadas na questão anterior, acerca da alteração gráfica ocasionada pela alteração dos parâmetros, já partiu de uma conclusão resultante da observação de tratamentos. Porém para realizar as conclusões que justificariam essas alterações, eles realizaram tratamentos sobre a representação algébrica. A conversão da representação gráfica para algébrica, foi realizada pelo software, entretanto, foi essa conversão que possibilitou a construção do argumento. Não basta apenas trabalhar com diferentes registros, também é importante a relação entre essas representações do objeto matemático (Duval, 2012), portanto o *applet* nessa situação realizou esse processo para os alunos, contribuindo para a compreensão do objeto matemático pois seria inviável para cada alteração no parâmetro, realizarmos a conversão entre registros.

4.5. Funções logarítmicas e exponenciais

A quarta questão questionava os alunos acerca de quais relações eles poderiam observar entre as funções $f(x) = \log x$, e $i(x) = 10^x$. Nessa questão, observaremos as repostas de dois alunos.

Aluno D: “A relação entre as funções f(x) e i(x) é de inversão, pois para cada valor de x em f(x) produzirá um resultado diretamente espelhado na i(x).

EX: f(100)=log(100)=2

f(2)=10^2=100”

Aluno E: “Elas são espelhadas se comprando com a do meio.”.

Ao explicar como é a relação de inversão, o aluno D constrói uma justificativa de linguagem natural e representação algébrica, visto que ele apresenta um exemplo situacional algébrico. Porém essa explicação apresenta um termo relacionado à representação gráfica quando diz que as funções *f* e *i* são espelhadas. Já o aluno E, de certa forma acaba complementando a solução do aluno D, pois ele conclui que o espelhamento é em relação a função g(x)=x, que pode ser inserida no *applet* através de um botão. Sendo assim, mais uma vez é evidenciada a importância da conversão entre registros, visto que ela o que possibilitou a construção do argumento que demonstrou a compreensão da relação que existe entre as duas funções.

4.6. Funções logarítmicas no ENEM

Concluindo a atividade, apresentei aos alunos cinco questões do ENEM. Essas questões envolviam o assunto de funções logarítmicas e podem ser conferidas na íntegra no anexo 3. A partir de um debate, observamos quais conhecimentos matemáticos eram necessários para resolver cada questão. Na primeira questão, observamos que poderíamos encontrar a alternativa correta ao substituirmos os dados fornecidos pelo enunciado na expressão algébrica da função e utilizando as propriedades dos logaritmos. O aluno F perguntou se poderíamos estimar esse valor sem realizar os cálculos. Então, a partir do debate, a turma relacionou os dados da expressão algébrica com os parâmetros estudados na atividade, eliminando três alternativas. Porém, não conseguindo determinar a correta, pois duas alternativas continham o intervalo estimado.

A segunda questão novamente apresentava uma expressão algébrica de uma função logarítmica. Aqui, a partir dos dados do enunciado, deveriam isolar o logaritmo e utilizar a definição de logaritmo para encontrar a solução. Nessa questão, embora apresentada a expressão algébrica, os alunos não conseguiram estimar uma resposta sem realizarem os cálculos. Segundo eles, como os valores eram “quebrados”, era necessário realizar as contas.

A terceira questão, ao apresentar a expressão algébrica de uma função logarítmica, solicitava que os alunos transitassem entre a expressão logarítmica e a expressão exponencial. Mesmo realizando essa conversão, alguns alunos relataram que não entenderam a ideia sugerida pelo aluno A para determinar o intervalo de x. Então, eu expliquei essa parte final da solução.

A quarta questão, apresentava mais uma vez a expressão algébrica de uma função logarítmica. Os alunos comentaram que a estratégia de solução seria similar as questões 2 e 3. De fato, foi necessário apenas converter a expressão logarítmica para a expressão algébrica e então realizar as operações.

Por fim, a última questão selecionada apresentava a representação algébrica de uma função logarítmica e necessitava que os alunos convertessem a expressão logarítmica para a expressão exponencial e realizassem operações algébricas para encontrar a alternativa correta. A diferença entre essa questão e a anterior, era que nessa precisariam calcular para dois valores de y e depois realizar uma substituição.

Finalizando a atividade, o aluno D questionou por que não haviam questões envolvendo o gráfico da função. Respondi que ao selecionar todas as questões do ENEM envolvendo funções logarítmicas, nenhuma apresentava a representação gráfica da função, necessitando de conhecimentos acerca dessa representação para resolver a questão. O aluno então respondeu: “Mesmo não aparecendo os gráficos, o que a gente viu ajuda a resolver as questões, principalmente por que agora consigo entender o que estou calculando.”.

Para realizar essa amostra de questões, selecionei as que apresentassem alguma diferença na estratégia de solução, obtendo todos os conhecimentos acerca do assunto que foram abordados no exame. Podemos observar que as questões apresentam apenas a representação algébrica da função logarítmica. Por estarem limitadas a somente uma representação, observamos que as questões acabam por serem repetitivas, visto que conforme apontado por Duval, diferentes representações apresentam possibilidades distintas, possibilitando percepções e tratamentos únicos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como o trabalho buscava responder à pergunta: **Como os alunos do Ensino Médio realizam e compreendem o tratamento e a conversão de registros semióticos de funções logarítmicas?**, Observamos a partir das análises, que os alunos ao interpretarem o enunciado das questões, buscam as representações que melhor fornecem os dados para suprir os questionamentos. Caso essas representações estejam disponíveis, eles identificam a mais adequada para a construção dos seus argumentos, ou a que proporciona os dados necessários para a realização dos cálculos, mas sempre visando concluir o raciocínio. Quando a representação necessária não está apresentada, é realizada a conversão de registro. Nessa pesquisa, as conversões mais realizadas foram as conversões do registro gráfico ou algébrico para o registro de linguagem natural, pois atividades propostas apresentavam as representações gráficas e algébricas a partir dos *applets*. Ao realizar esse processo, eles realizam tratamentos tanto na representação algébrica, quanto na representação gráfica.

O *software GeoGebra* possibilitou que os alunos observassem um fato que para eles era uma novidade, o comportamento da função logarítmica. Porém, saber qual era a forma da representação gráfica não bastava, eles necessitavam explicar o motivo pelo qual essa era a representação. Assim, a dinamicidade do *software* foi fundamental. Enquanto podiam explorar a representação algébrica e as alterações decorrentes da alteração de parâmetros, o software também informava visualmente a representação algébrica da função. Como os alunos necessitavam justificar as transformações gráficas, testaram suas hipóteses recorrendo para a representação algébrica, onde a partir de transformações por meio de cálculos, conseguiram realizar suas conclusões e provar que compreenderam o comportamento da função.

Durante a elaboração da prática, precisei reformular diversas vezes as questões e a estrutura da atividade, para que cada questão proporcionasse aos alunos a possibilidade de trabalhar com diversos registros conforme buscavam explicar suas compreensões. Ao realizar a análise dos dados, foi possível observar que essa mobilização de diferentes representações de fato ocorreu por grande parte dos alunos.

Assim, analisar as construções dos alunos a partir do referencial teórico, possibilitou a conclusão de quais etapas da atividade podem ser futuramente melhor exploradas.

A prática realizada no laboratório de informática motivou o empenho dos alunos, eles debateram entre si, realizaram questionamentos ao professor e alguns inclusive relataram estar encantados com as possibilidades *software*, o que pode vir a despertar novos interesses e assim ampliar seus conhecimentos matemáticos.

Buscando a compreensão dos alunos acerca do objeto matemático estudado, nesse caso, a função logarítmica, a atividade proposta proporcionou a interação com deferentes registros. Como os alunos trabalharam com aspectos únicos de cada um desses registros, a fim de explicarem o objeto, conclui-se que de fato a prática apresentada proporciona o estudo do comportamento da função logarítmica e que o trabalho com os diferentes registros é essencial para a construção da argumentação matemática. Em futuras aplicações dessa prática, acrescentaria questões contextualizadas envolvendo a representação gráfica da função logarítmica, visto que as questões do ENEM não abordaram essa representação. Também incluiria o estudo do comportamento da função para diferentes bases do logaritmo. Como a turma conseguiu concluir a atividade os alunos demonstraram compreensão das diferentes representações desse objeto matemático, inserir mais essa questão envolvendo um novo *applet*, complementaria o estudo.

REFERÊNCIAS

CAPELLA, M. X. **Funções reais de variável real no ENEM:** análise, reflexões e ressonâncias no ensino da matemática de 1998 a 2018. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul 2018. Trabalho de conclusão de curso. Disponível em https://lume.ufrgs.br/handle/10183/190025. Acesso em: 06 mai. 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**. Florianópolis: v.07, n.2, p.266-297, 2012. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465. Acesso em 19 abr. 2021.

FIOREZE, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** uma análise a partir da teoria dos campos conceituais. Porto alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010, 240f. Tese, Doutorado em informática na educação, Porto Alegre, 2010. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/19011. Acesso em: 23 abr. 2021.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **RPEM**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, p. 10-34, 2013.

GERHARDT, T. E., SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. 1ª edição. Porto Alegre. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em https://books.google.com.br/books?id=dRuzRyEIzmkC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 17 abr. 2021.

NOTARE, M.; FIOREZE, L. A.; HALBERSTADT, F. F. O software GrafEq e os registros de representação semiótica: uma análise de trabalhos com ilusão de ótica. In: **CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 14., 2015, Chiapas, México. Anais [...]. Chiapas: CIAEM. p. 1-12.

NOTARE, M.; GRAVINA, M. A. A formação continuada de professores de Matemática e a inserção de mídias digitais na escola. In: **COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA**, 6., 2013, São Carlos. Anais [...]. São Carlos: UFSCar. p. 1-13.

ROCHA, J. P. **Aprendizagem de inequações no ensino médio:** um estudo com o software grafeq e os registros de representação semiótica. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul 2019. Trabalho de conclusão de curso. Disponível em https://lume.ufrgs.br/handle/10183/212860. Acesso em: 19 abr. 2021.

SANTOS, A. T. C. **O ensino na Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2011. 200p.

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M. A.; LIMA, J. V. Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, p. 01-10, 2015.

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M. A.; LIMA, J. V. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 11, n. 3, p. 01-10, 2013.

ANEXOS

ANEXO 1 – Carta de Apresentação para Direção do Colégio

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, 16 de setembro de 2021.

Prezada Professora Jane Terezinha Sagaspini

Diretora do Colégio Dom Feliciano

O(A) aluno(a) Eduardo Dietrich dos Santos, atualmente é graduando(a) regularmente matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o(a) graduando(a) está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador(a) e professor(a) responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo(a) graduando(a), reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (51) **XXXXXXXX** (Telefone de Contato do Orientador).

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

Vandoir Stormowski

Professor(a) do Departamento de Matemática Pura e Aplicada

ANEXO 2 – Termo de Consentimento Informado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, em nome do Colégio Dom Feliciano, responsável pelos alunos, da turma ____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que os alunos participem da pesquisa intitulada REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E CONVERSÕES ENTRE REGISTROS: ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM GEOGEBRA, desenvolvida pelo pesquisador Eduardo Dietrich dos Santos. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Vandoir Stormowski, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone **(51) XXXXXXXX** ou e-mail vandoir.stormowski@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação dos alunos não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Analisar as conversões entre registros realizadas pelos alunos a partir de uma prática sobre funções logarítmicas com uso do software *GeoGebra*.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração dos alunos se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que eles serão observados e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Não serão realizadas fotos ou filmagens, durante a participação dos alunos, apenas será coletado os dados preenchidos pelos alunos no software. Autorizo que estes sejam utilizados em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre Registros de Representação Semiótica, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no endereço **XXXXXXXX** telefone (51) **XXXXXXXX** / e-mail eduardodietrich98@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

ANEXO 3 – Atividade Aplicada no Colégio

Função Logarítmica

Autor: Eduardo Dietrich dos Santos

Introdução

Como indicado no título, nesta atividade estudaremos as Funções Logarítmicas.

Antes de começarmos a debater sobre Funções, assinale a alternativa que você considera estar correta:

Assinale a sua resposta aqui

☐ $\log_b a = c \iff b^c = a$, ou seja, $\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$

☐ $\log_b a = c \iff b^a = c$, ou seja, $\log_2 8 = 3 \iff 2^8 = 3$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Se você assinalou a alternativa correta, estamos prontos para iniciar a primeira questão!

Questão 1:

Nos itens a seguir, estudaremos o comportamento da função $f(x) = log\, x$, para diferentes intervalos de x.
Note que não está indicada a base do logaritmo, nesse caso convencionamos como 10.

Para compreendermos esse comportamento, iremos analisar o ponto A de coordenadas (x', y').

a) A partir do Applet 1 - a, responda os seguintes questionamentos:

i) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja 1?

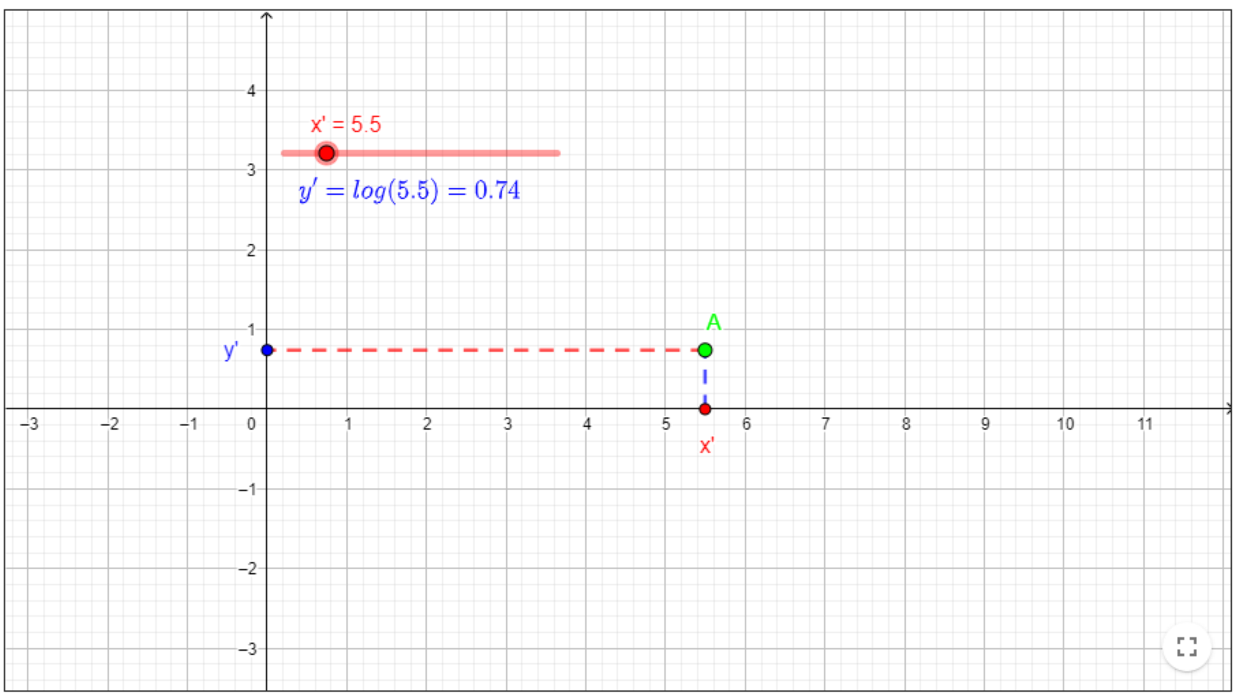
ii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja 2?

iii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja 3? Justifique.

iv) Se fosse possível aumentarmos o valor de x' infinitamente, chegaríamos a um "valor limite" para y'? Justifique.

Digite sua resposta aqui...

Applet 1 - a



b) A partir do Applet 1 - b, responda os seguintes questionamentos:

i) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja -1?

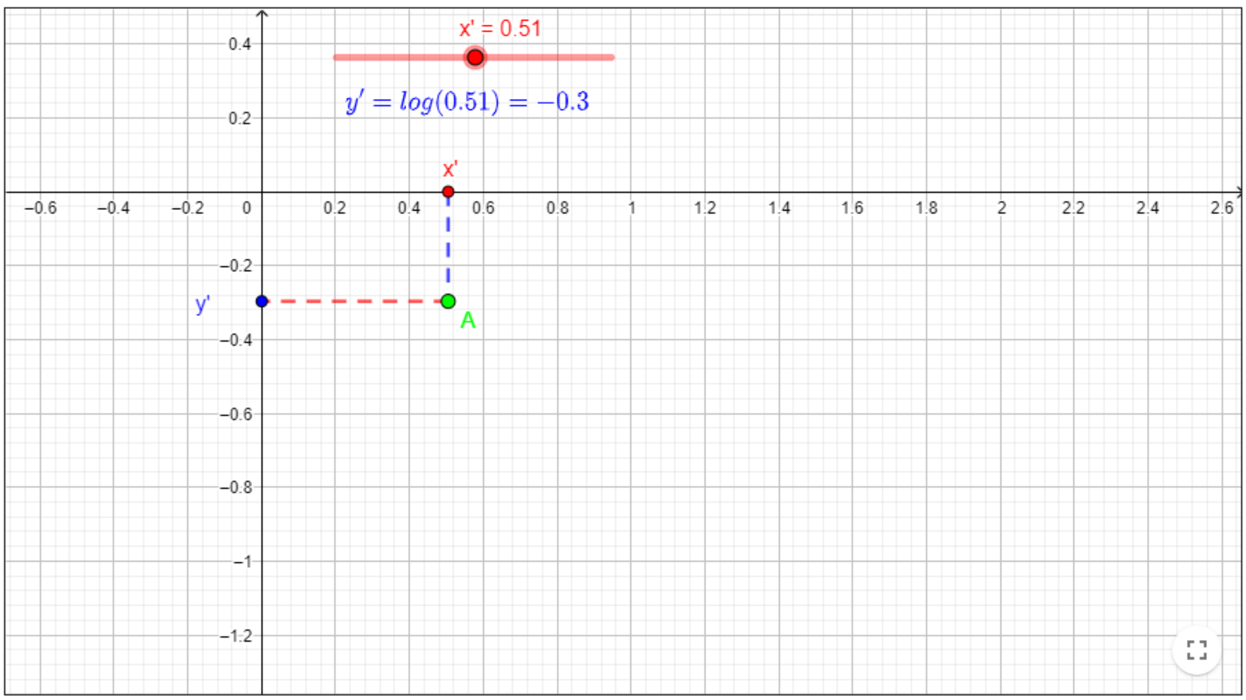
ii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja -2?

iii) Que valor devemos atribuir à x' para que a coordenada y' correspondente seja -3? Justifique.

iv) Se fosse possível aproximarmos infinitamente o valor de x' em relação ao zero, chegaríamos a um "valor limite" para y'? justifique.

Digite sua resposta aqui...

Applet 1 - b

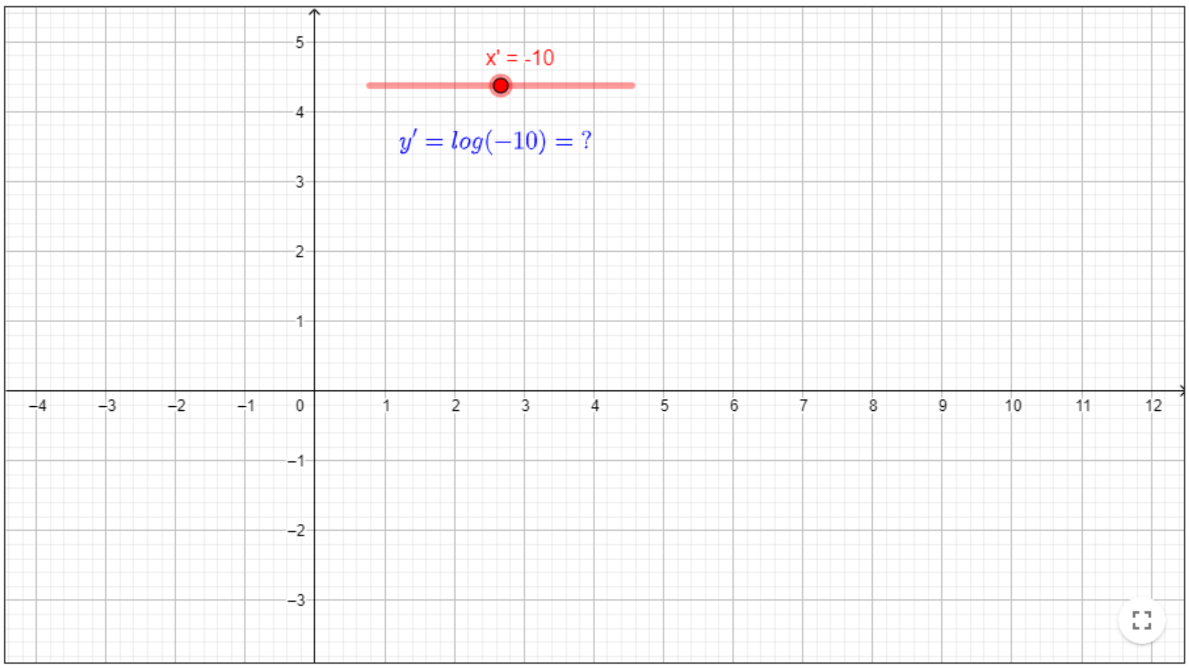


c) A partir do Applet 1 - c, responda:

É possível calcularmos o valor de y' quando x'<0 ? Justifique.

Digite sua resposta aqui...

Applet 1 - c



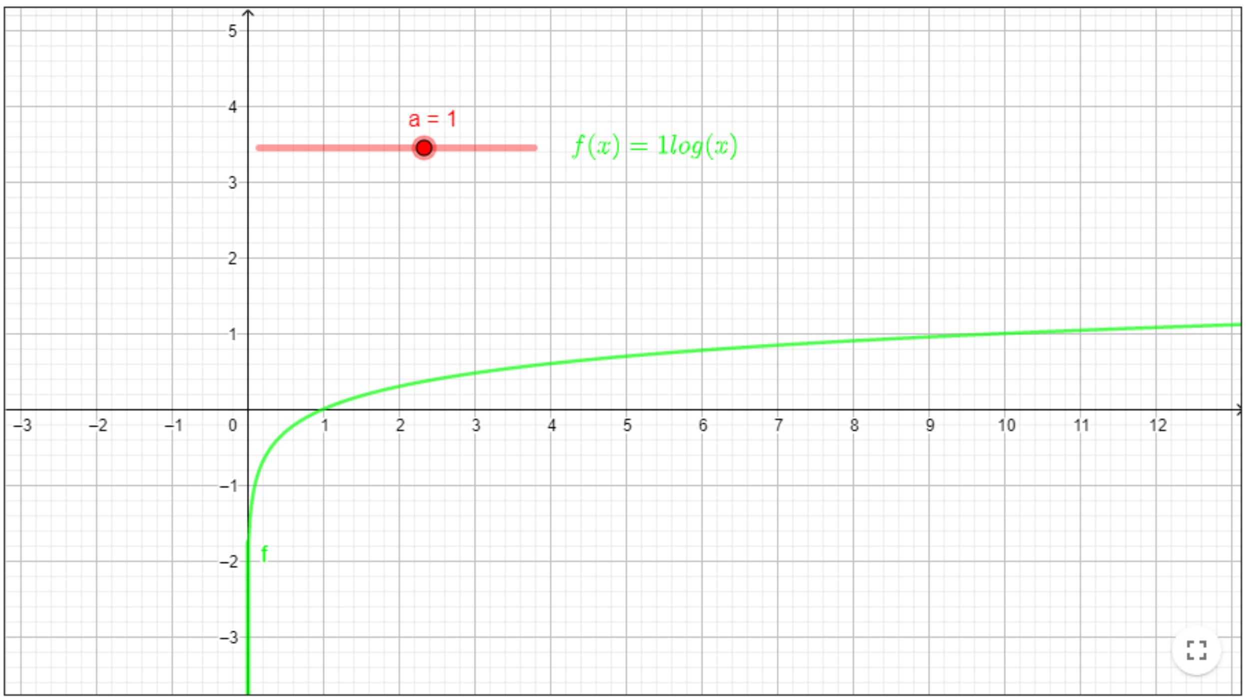
Questão 2:

Utilize os respectivos applets para determinar:

a) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = \boldsymbol{a}.\log x$, ao alterarmos o parâmetro $\boldsymbol{a}$?

Digite sua resposta aqui...

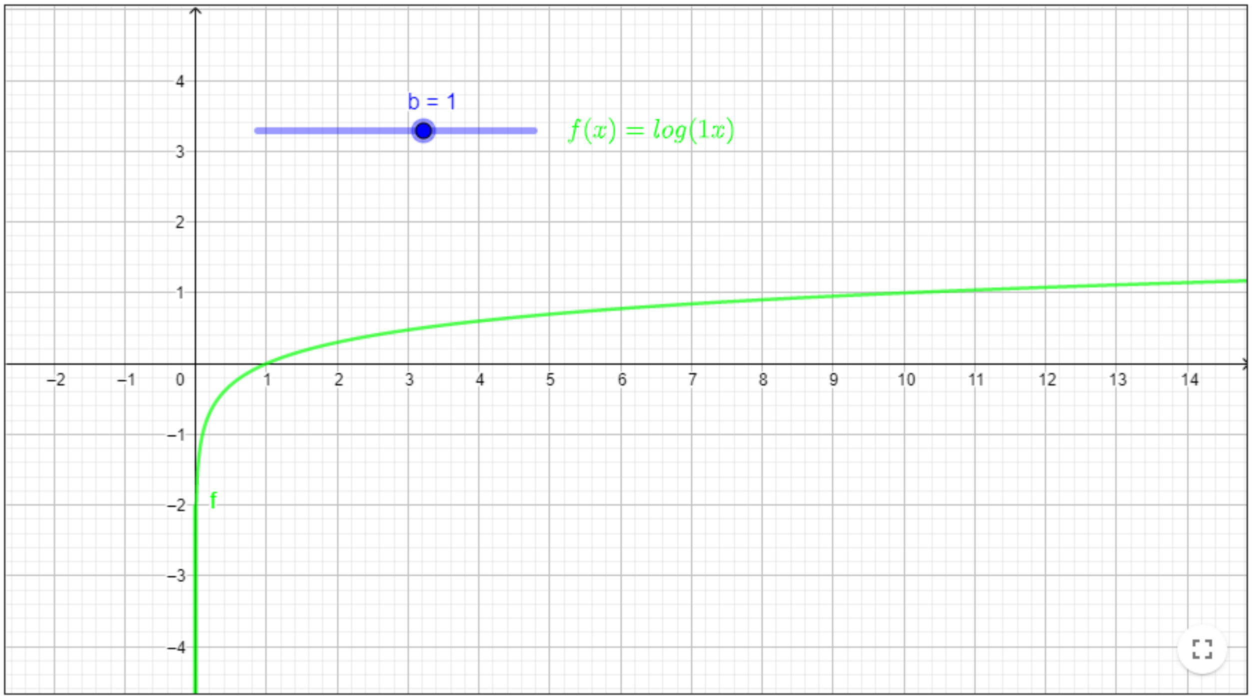
Applet a



b) O que ocorre com o gráfico da função $f(x)$ = log (**b**.x), ao alterarmos o parâmetro ***b***?

Digite sua resposta aqui...

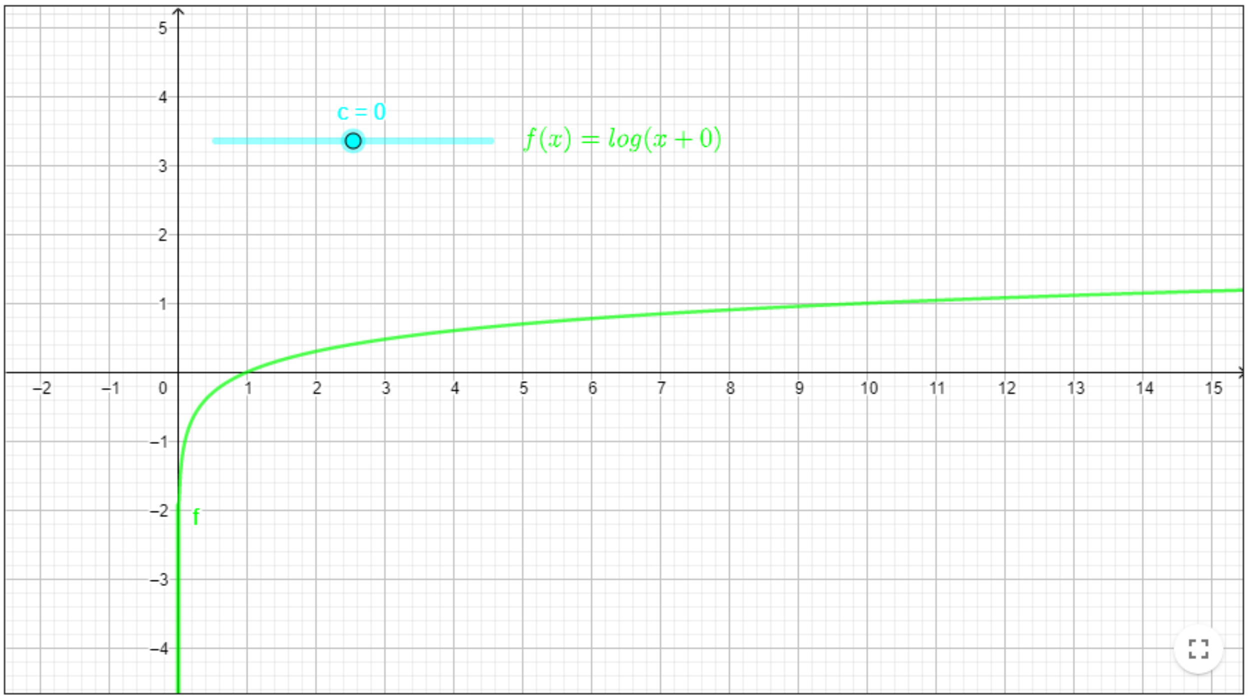
Applet b



c) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = log\ (x + c)$, ao alterarmos o parâmetro c?

Digite sua resposta aqui...

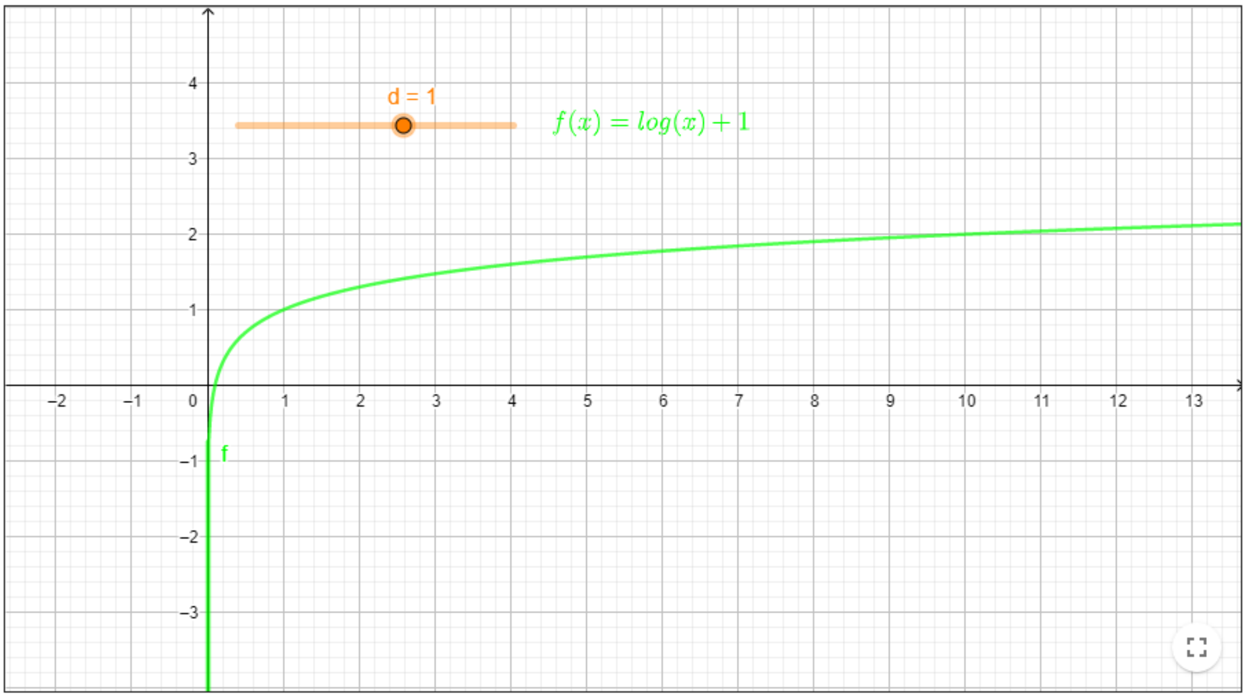
Applet c



d) O que ocorre com o gráfico da função $f(x) = (\log x) + \mathbf{d}$, ao alterarmos o parâmetro ***d***?

Digite sua resposta aqui...

Applet d

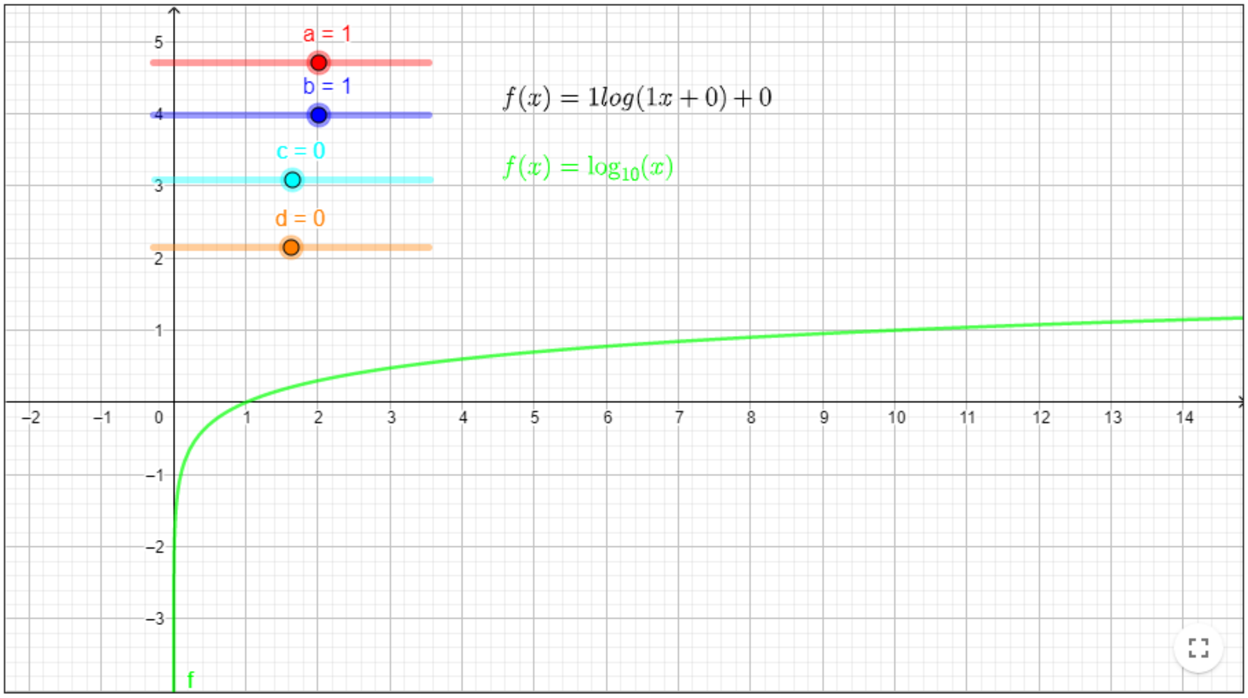


Questão 3:

Explique, para cada parâmetro, o motivo pelo qual estão relacionadas as alterações nos parâmetros e as respectivas alterações no gráfico observado no Applet 3.

Digite sua resposta aqui...

Applet 3

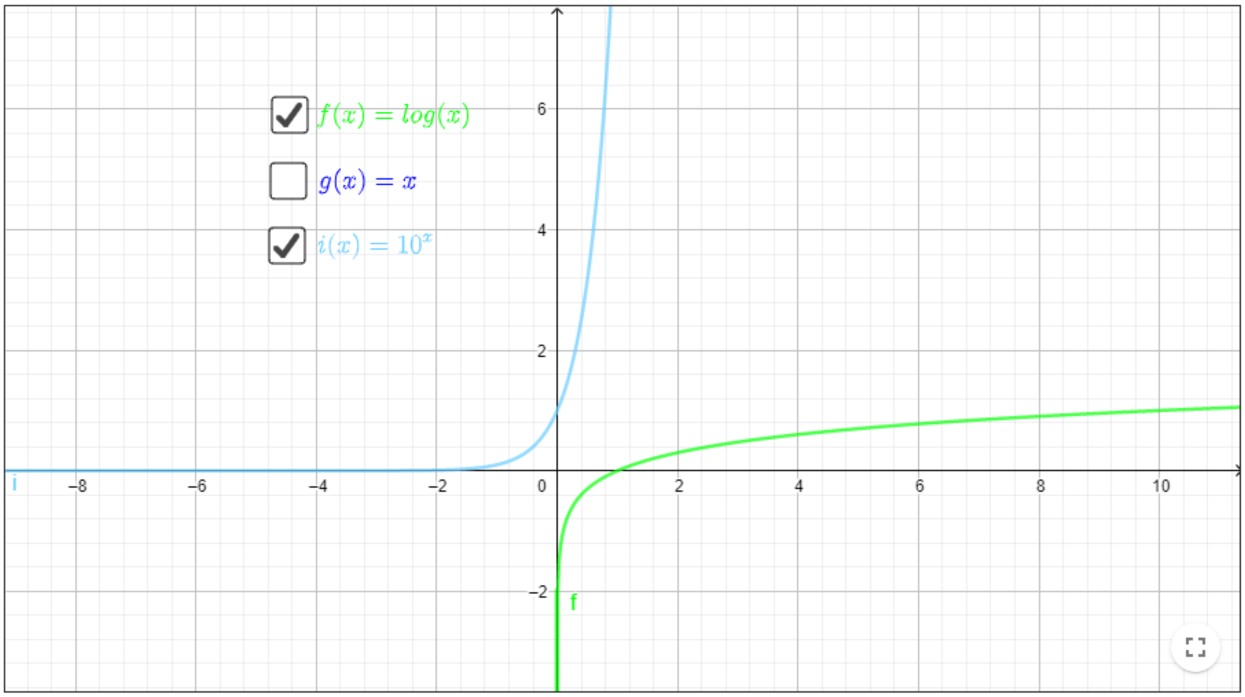


Questão 4:

Quais relações podemos observar entre a função $f(x) = log\ x$, e a função $i(x) = 10^x$.

Digite sua resposta aqui...

Applet 4



ENEM 2019

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_S) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \le M_s \le 3,9$
Ligeiro	$4,0 \le M_s \le 4,9$
Moderado	$5,0 \le M_s \le 5,9$
Grande	$6,0 \le M_s \le 9,9$
Extremo	$M_s \ge 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_S = 3{,}30 + \log(A.f)$, em que *A* representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μ m) e *f* representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μ m e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ **a)** Pequeno.
- ☐ **b)** Ligeiro.
- ☐ **c)** Moderado.
- ☐ **d)** Grande.
- ☐ **e)** Extremo.

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

ENEM 2011

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimas as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é um escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em 1 maio 2010 (adaptado).

U.S GEOLOGICAL SURVEY. **USGS Earthquake Magnitude Policy.**
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M0 do terremoto de Kobe em (dina · cm)?

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ **a)** $10^{-5.10}$
- ☐ **b)** $10^{-0.73}$
- ☐ **c)** $10^{-12.00}$
- ☐ **d)** $10^{-21.65}$
- ☐ **e)** $10^{-27.00}$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

ENEM 2019

A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que pH = -log *x* é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que *x* assuma

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ **a)** qualquer valor acima de 10^{-8}.
- ☐ **b)** qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
- ☐ **c)** valores maiores que 7 e menores que 8.
- ☐ **d)** valores maiores que 70 e menores que 80.
- ☐ **e)** valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

ENEM 2018

A água comercializada em garrafões pode ser classificada como muito ácida, ácida, neutra, alcalina ou muito alcalina, dependendo de seu *pH*, dado pela expressão

$pH = \log \frac{1}{H}$,

em que *H* é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico. A classificação de água de acordo com seu *pH* é mostrada no quadro.

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7{,}5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7{,}5$	Neutra
$3{,}5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3{,}5$	Muito ácida

Para o cálculo da concentração *H*, uma distribuidora mede dois parâmetros *A* e *B*, em cada fonte, e adota *H* como sendo o quociente de *A* por *B*. Em análise realizada em uma fonte, obteve $A = 10^{-7}$ e a água dessa fonte foi classificada como neutra.

O parâmetro *B*, então, encontrava-se no intervalo

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ **a)** $(-10^{14.5}, -10^{13}]$
- ☐ **b)** $[10^{-\frac{5}{7}}, 10^{-1})$
- ☐ **c)** $[10^{-1}, 10^{\frac{1}{2}})$
- ☐ **d)** $[10^{13}, 10^{14.5})$
- ☐ **e)** $[10^{5\times10^7}, 10^{7.5\times10^7})$

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

ENEM 2016

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

Assinale a sua resposta aqui

- [ ] **a)** $E_1 = E_2 + 2$
- [ ] **b)** $E_1 = 10^2 \cdot E_2$
- [ ] **c)** $E_1 = 10^3 \cdot E_2$
- [ ] **d)** $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$
- [ ] **e)** $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

VERIFIQUE SUA RESPOSTA