UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

EXPLORANDO PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS A PARTIR DE DOBRADURAS EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

PRISCILA FERREIRA SILVEIRA

Porto Alegre
2020

PRISCILA FERREIRA SILVEIRA

EXPLORANDO PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS A PARTIR DE DOBRADURAS EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2020

PRISCILA FERREIRA SILVEIRA

EXPLORANDO PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS A PARTIR DE DOBRADURAS EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Banca Examinadora:

____

Profa. Dra. Leandra Anversa Fioreze – PPGEMAT/UFRGS

____

Profa. Dra. Melissa Meier – IFC

____

Prof. Dr. Vandoir Stormowski – PPGEMAT/UFRGS

Porto Alegre

2020

Resumo

Essa pesquisa tem como foco analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico e da argumentação a partir da exploração de situações geométricas de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica. A investigação, de cunho qualitativo, foi conduzida por um experimento, no nível do Ensino Fundamental com alunos de nono ano. Por meio de investigação geométrica, foram elaboradas atividades em formato de livro virtual no GeoGebraBook, nas quais se oportunizou o desenvolvimento de aspectos essenciais da atividade matemática, como a formulação e o teste de conjecturas, assim como a argumentação para validar ou refutar as mesmas. A investigação deu-se em ambiente de geometria dinâmica, mais especificamente, com o software GeoGebra, a partir da manipulação de objetos geométricos dinâmicos que simulam dobraduras em folhas de papel A4. Nessa pesquisa, buscou-se entender o papel da geometria dinâmica no desenvolvimento do pensamento geométrico e analisar como ocorre esse processo em uma sequência de atividades que foram trabalhadas a partir da investigação, da exploração e da construção de situações de dobraduras dinâmicas. Para analisar os dados, buscou-se suporte nos referenciais teóricos sobre geometria dinâmica e desenvolvimento do pensamento geométrico (GRAVINA, 2001, 1996; DE VILLIERS, 1997; GRAVINA e CONTIERO, 2011; NOTARE e BASSO, 2012, 2015, 2018), sobre o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (NASSER, 1993; CROWLEY, 1996) e sobre o potencial das tecnologias digitais para a aprendizagem de matemática (ARMELA, 2016; GOLDENBERG, 2000; GRAVINA, 1996, 2001). Os resultados da pesquisa apontam que o trabalho com dobraduras virtuais no ambiente de geometria dinâmica contribuiu para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois, ao desenvolverem justificativas para as propriedades das dobraduras exploradas, apropriavam-se de conceitos e propriedades que emergiram da exploração das dobraduras e desenvolviam ações próprias do pensamento geométrico.

Palavras-chave: geometria dinâmica, tecnologias digitais, educação matemática, pensamento geométrico, argumentação em geometria.

Abstract

This research focuses on analyzing the development of geometric thinking and argumentation from the exploration of geometric folding situations in a dynamic geometry environment. The investigation, of a qualitative nature, was conducted by an experiment, at the level of Elementary School with ninth-grade students. Through geometrical investigation, activities were developed in the form of a virtual book on the GeoGebraBook, in which the development of essential aspects of mathematical activity, such as the formulation and testing of conjectures, as well as the arguments to validate or refute them, were provided. The investigation took place in a dynamic geometry environment, more specifically, with the GeoGebra software, from the manipulation of dynamic geometric objects that simulate folding in sheets of A4 paper. In this research, we sought to understand the role of dynamic geometry in the development of geometric thinking and to analyze how this process occurs in a sequence of activities that were worked on from the investigation, exploration and construction of dynamic folding situations. To analyze the data, support was sought in the theoretical frameworks on dynamic geometry and the development of geometric thinking (GRAVINA, 2001, 1996; DE VILLIERS, 1997; GRAVINA and CONTIERO, 2011; NOTARE and BASSO, 2012, 2015, 2018), about Van Hiele's development model of geometric thinking (NASSER, 1993; CROWLEY, 1996) and on the potential of digital technologies for learning mathematics (ARMELA, 2016; GOLDENBERG, 2000; GRAVINA, 1996, 2001). The results of the research point out that the work with virtual folding in the dynamic geometry environment contributed to the development of the students' geometric thinking, because, when developing justifications for the properties of the explored folds, they appropriated concepts and properties that emerged from the exploration of the folds and developed actions typical of geometric thinking.

Keywords: dynamic geometry, digital technologies, mathematical education, geometric thinking, argument in geometry

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

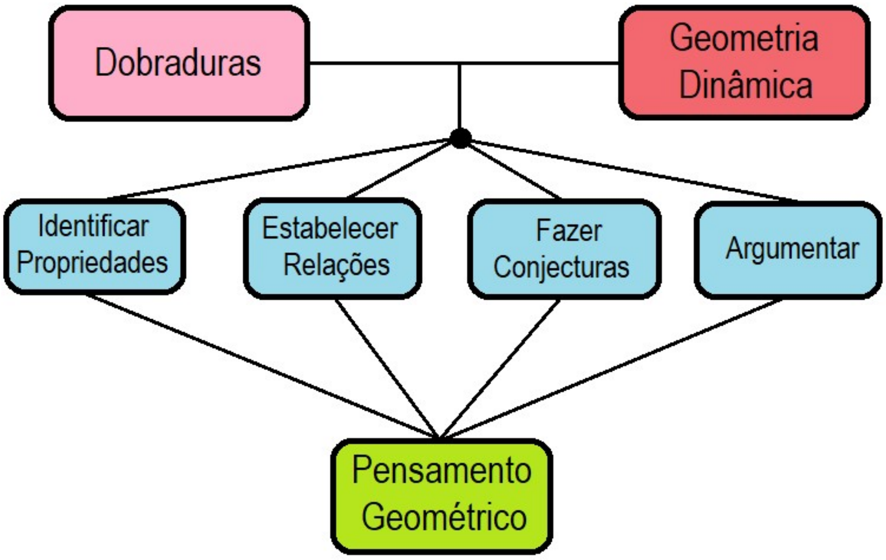
Minha experiência na graduação com a Geometria me fez perceber o quanto me identificava com essa área da Matemática. A partir da vivência em algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, em que se trabalhava com tecnologias digitais, percebi como esses recursos podem impactar na construção de conhecimento matemático e no desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Mais especificamente, ao cursar a disciplina de Geometria I, obtive contato com o software GeoGebra, no qual problemas propostos com o uso do software instigaram-me a investigar e descobrir propriedades geométricas. Nessa experiência, obtive motivação para trabalhar com tecnologias digitais, pois acredito que alunos do Ensino Básico precisam investigar e descobrir propriedades geométricas. Ao apresentar minhas motivações para minha orientadora, a mesma propôs algumas ideias de trabalhos inspiradas no que poderia me identificar e, dessa forma, essa investigação foi se delineando. Com isso, decidi por trabalhar com a simulação virtual de dobraduras em papel A4 no GeoGebra, com o intuito de investigar a seguinte questão norteadora: "**Como se dá a aprendizagem de propriedades geométricas que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica?**". Apesar de tratar-se de simulações na janela de visualização 3D do GeoGebra, as propriedades a serem exploradas são de Geometria Plana.

Ao realizar buscas[1] sobre trabalhos científicos que abordem dobraduras em ambiente de geometria dinâmica, utilizando como palavras-chaves geometria dinâmica, dobraduras em papel A4 e dobraduras no GeoGebra, não encontramos trabalhos, até o momento de escrita desta dissertação, que abordem, simultaneamente, Geometria Dinâmica e Dobraduras para o desenvolvimento do pensamento geométrico, o que realça a contribuição dessa dissertação e a relevância da investigação para a área de Tecnologias Digitais na Educação Matemática. Ao utilizar a simulação virtual de dobraduras em papel A4 no GeoGebra, investigamos como se desenvolve o pensamento geométrico ao manipular essas simulações virtuais para responder e argumentar sobre as questões propostas. Procuramos identificar o desenvolvimento do pensamento geométrico na intersecção entre a exploração das dobraduras e a geometria

[1] A pesquisa foi realizada nos seguintes bancos: repositório digital da UFRGS Lume, Google Acadêmico, Repositório Institucional UFJF, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações BDTD, Sistema Integrado de bibliotecas Universidade de São Paulo SIBi, Repositório Institucional UNESP, Repositório Institucional PUCRS, Repositório Digital da UFMG e Periódicos da Capes.

dinâmica, ou seja, que os alunos identifiquem propriedades, estabeleçam relações, façam conjecturas e argumentem. A Figura 1 ilustra o esquema da nossa investigação.

Figura 1 - Esquema da investigação



Fonte: Acervo da autora

Reforçando nossa motivação em trabalhar com a exploração para o desenvolvimento do pensamento geométrico, Notare e Basso (2012) destacam que o sistema de ensino, muitas vezes, vem omitindo dos alunos o verdadeiro processo de construção dos conceitos matemáticos, pois lhes são impostos teoremas, fórmulas e "regras", impedindo-os de vivenciarem o processo de exploração e descoberta.

No caso particular da Geometria, Gravina e Contiero (2011) apontam problemas em sua abordagem na escola,

> De uma forma geral, o estudo da geometria escolar tem foco na apresentação de conceitos e propriedades geométricas, sem que haja maiores preocupações com o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Os livros apresentam uma coleção de definições e as propriedades são tomadas como “fatos”, sem que haja uma maior explicação (GRAVINA, CONTIERO, 2011, p.2).

Assim como é importante saber escrever corretamente em linguagem matemática e realizar cálculos, também é necessário desenvolver o raciocínio matemático como, por exemplo, compreender uma fórmula para calcular a área de uma sala de aula. Como descubro essa área? Porque a fórmula funciona? Existem outras situações nas quais posso aplicá-la?

Podemos encontrar respostas para essas perguntas quando utilizamos um raciocínio matemático que considera os processos de construção e argumentação dessas fórmulas.

A aprendizagem da Matemática, segundo a BNCC (2017), precisa proporcionar que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações e associem essas representações a uma atividade matemática, fazendo induções e conjecturas. Espera-se, com isso, que o aluno desenvolva a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.

A BNCC (2017) aponta que o Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, a fim de favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

O raciocínio matemático e as demonstrações envolvem ações como abstrair, generalizar, estabelecer relações e fazer conjeturas. Ações que, segundo Gravina e Contiero (2011), costumam ser estranhas aos alunos. Portanto, é importante proporcionar um estudo da Geometria em que se desenvolva o raciocínio geométrico, de forma que sejam analisadas e exploradas propriedades e sejam construídos conceitos.

Notare e Basso (2012) afirmam que o aluno precisa sentir a necessidade de construir um conceito, ou seja, diante da necessidade de resolver um problema, emergem conceitos inerentes a ele. Assim na medida em que novos problemas vão sendo vivenciados se dá a construção do conhecimento matemático, pois, para resolver um problema é preciso que o aluno construa novas estruturas que permitam dar conta da situação enfrentada, rever conceitos já construídos e tentar reconstruí-los e enriquecê-los. Com isso, na resolução do problema, o caminho que o aluno percorre pode conduzir à resposta do problema e, além de ajudar a compreender e construir conceitos, também justifica a necessidade de aprendê-los.

O uso de tecnologias digitais traz essa possibilidade de construir conceitos a partir da resolução de problemas interessantes. O processo de resolução de problemas pode permitir que se desenvolva o raciocínio lógico matemático. O processo de o sujeito tentar resolver problemas sem compreender todos os conceitos envolvidos provoca a necessidade de aprendê-los, sendo assim, buscam o conhecimento de forma a entendê-lo, pois, há uma necessidade de saber. Assim como afirmam Notare e Basso

> A valorização de métodos e roteiros para a resolução de problemas faz com que alunos resolvam os problemas apresentados sem a necessidade de uma verdadeira compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nesses procedimentos; sem agir sobre as coordenações de suas ações e retirar delas qualidades que lhes são próprias. (NOTARE, BASSO, 2012, p.4)

Tais métodos e roteiros para a resolução de problemas, além de não favorecerem a necessidade de uma verdadeira compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nesses procedimentos, podem fazer com que o aluno os desconsidere. Destaca-se que, ao invés de ensinar métodos e roteiros para a resolução de problemas, estes podem ser construídos pelos alunos. Dessa forma, o aluno desenvolve o pensamento matemático e percebe a necessidade de compreensão e utilização dos conceitos matemáticos. Tudo isso é englobado na competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental 5, que diz ser importante "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados." (BNCC, 2017, p.265).

Indo ao encontro do uso das tecnologias digitais no processo de resolver problemas, o software GeoGebra será utilizado nessa pesquisa. Trata-se de um software de matemática dinâmica que reúne geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em uma única interface gráfica. O software proporciona um ambiente de resolução de problemas rico, no qual nele o sujeito constrói, manipula objetos e observa o resultado de suas ações. O GeoGebra torna mais acessíveis alguns problemas e ideias, proporcionando novas formas de representar e manipular objetos matemáticos. Para Basso e Notare

> O surgimento das tecnologias e dos ambientes dinâmicos proporcionou a evolução tanto da Matemática, quanto da Educação Matemática. Em Matemática, os computadores fomentaram a descoberta de novos campos. Na Educação Matemática, eles têm tornado mais acessíveis alguns problemas e ideias, proporcionado novas formas de representar e manipular os objetos matemáticos. (BASSO, NOTARE, 2015, p.3)

Com isso, pretende-se explorar e analisar como o uso do GeoGebra permite ao aluno investigar, em ambiente de geometria dinâmica, os conceitos geométricos que emergem a partir do dinamismo de figuras geométricas. Nesse contexto, o aluno estará sujeito a descobertas de conceitos geométricos com o objetivo de desenvolver habilidades que são características do raciocínio matemático (estabelecer relações, fazer conjeturas, resolver problemas, entre outros).

Dessa forma, como ocorre a aprendizagem de propriedades geométricas que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica é a questão norteadora dessa pesquisa. Para responder à pergunta, foi desenvolvido um livro dinâmico online no GeoGebra com atividades organizadas para o trabalho com dobraduras virtuais. A partir disso, foi realizado um experimento com alunos de nono ano utilizando o GeoGebraBook desenvolvido com as atividades de dobraduras propostas (as atividades desse livro online e o experimento realizado são descritos nos capítulos 4 e 5). Para dar suporte à análise dos dados produzidos e coletados, foi realizado um estudo teórico sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico (CROWLEY (1996), NASSER (1993)), a geometria dinâmica e o pensamento geométrico (ARMELLA (2016), GOLDENBERG (2000), NOTARE E BASSO (2015, 2018), GRAVINA (1996)) e dobraduras no ensino de geometria.

A dissertação está organizada da seguinte forma: Referencial teórico (capítulo 2), procedimentos metodológicos (capítulo 3), descrição e análise dos dados (capítulo 4), considerações finais (capítulo 5) e referências bibliográficas (capítulo 6).

O capítulo 2, referencial teórico, está subdividido em quatro seções: o desenvolvimento do pensamento geométrico (subdividido em Teoria de Van Hiele e A argumentação em Geometria), geometria dinâmica e o pensamento geométrico, dobradura no ensino de geometria, trabalhos correlatos. O capítulo 3, procedimentos metodológicos, está subdividido em duas seções: Cenário e Participantes, Organização da Oficina e o GeoGebraBook.

O capítulo 4, descrição e análise dos dados, descreve o experimento prático realizado, trazendo os dados coletados e produzidos e a análise dos mesmos. Esse capítulo está subdividido em cinco seções, nas quais cada seção descreve e analisa um encontro da oficina realizada.

O capítulo a seguir apresenta o estudo teórico realizado para o planejamento da metodologia e para a análise dos dados produzidos e coletados.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo, apresentam-se as bases teóricas em que essa pesquisa é apoiada. Aqui discute-se como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico e o papel da argumentação, trazendo a Teoria de Van Hiele para dar sustentação à análise do experimento. Também, se faz uma discussão sobre a geometria dinâmica e como pode se desenvolver o pensamento geométrico nesse ambiente. É discutido, também nesse capítulo, o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir do uso de dobraduras de papel e trabalhos já realizados sobre dobraduras e dobraduras em um ambiente dinâmico.

2.1 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A geometria euclidiana trata do saber matemático referente a objetos idealizados, ou seja, objetos que não existem no mundo físico, mas apenas no mundo das ideias. Segundo Gravina (2001), esses objetos são construídos a partir de processos de abstração e generalização, e no processo de aprendizagem da geometria, as idealizações sofisticam-se e os registros perceptivos transformam-se em objetos geométricos pela conceituação de suas propriedades e características. Com isso, o aluno que identifica uma figura geométrica pela sua aparência física e posteriormente determina a figura geométrica pelas suas propriedades, passou pelo processo de aprendizagem de geometria.

A geometria baseia-se, segundo Gravina (2001), em noções e relações primitivas, axiomas, definições e teoremas. As noções e as relações primitivas tratam de significados intuitivos, de definições não argumentadas teoricamente. Axiomas são pressupostos como ponto de partida, sem que haja questionamento sobre sua veracidade. Definições contribuem para a organização do modelo. Teoremas são afirmações provadas por meio de um encadeamento de inferências lógicas, a argumentação lógico-dedutiva. O sistema de representação da geometria possui o auxílio de simbologias e desenhos para dar suporte aos raciocínios dedutivos. Por exemplo, para resolver um problema geométrico, pode-se apoiar em simples desenhos e simbologias na resolução como auxílio para o raciocínio.

Gravina (2001) afirma que a dificuldade dos alunos em manipular conceitos figurais deve-se a restrições figurais que impõem à linha de raciocínio interpretações que figurativamente são consistentes, mas que não estão sujeitas às restrições conceituais. Ou seja, a dificuldade do aluno em identificar as propriedades e conceitos de classes de figuras evidencia-se quando se observam desenhos prototípicos. O aluno não compreende que um dado desenho é uma instância particular do componente figural.

Gravina (2001) discute que, do conhecimento empírico ao que é objeto de construção na geometria euclidiana, é feita uma adaptação, que se refere ao domínio de certo modelo da realidade dependendo de abstrações e deduções inseridas em um corpo teórico. Nesse caso, o modelo é determinado por axiomas com o domínio de seu funcionamento dado pelas regras de inferência lógica. O entendimento desse modelo depende de processo evolutivo de pensamento, que pode ser explicado pelo modelo de Van Hiele, abordado na subseção a seguir.

2.1.1 Teoria de Van Hiele

O modelo Van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Dina Van Hiele-Geldof (1984a) e Pierre Van Hiele (1984b), finalizados simultaneamente na Universidade de Utrecht. A teoria foi esclarecida, aperfeiçoada e promovida por Pierre Van Hiele após o falecimento de Dina, logo depois de concluir sua tese (CROWLEY, 1996), (NASSER, 1993).

O modelo de Van Hiele consiste em cinco níveis de compreensão que descrevem sequencialmente características do processo de pensamento geométrico: Visualização, nível 1; Análise, nível 2; Dedução Informal, nível 3; Dedução, nível 4; e Rigor, nível 5 (CROWLEY, 1996), (NASSER, 1993). Alguns autores adotam a seguinte notação para os níveis de compreensão: nível 0 (Visualização), nível 1 (Análise), nível 2 (Dedução informal), nível 3 (Dedução) e nível 4 (Rigor). Nesse trabalho, vamos adotar a primeira notação citada, ou seja, começando pelo nível 1 até o nível 5.

No nível 1 (Visualização), os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Crowley (1996) explica que nesse nível "Os conceitos de geometria são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos." (CROWLEY, 1996, p.2). Ou seja, os alunos reconhecem os elementos como um todo, por exemplo, as figuras geométricas são reconhecidas por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades. Um sujeito desse nível consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir uma figura. Porém, esse sujeito não consegue identificar as propriedades presentes nas figuras geométricas.

No nível 2 (Análise), o sujeito começa uma análise de conceitos geométricos. Por meio da observação e da experimentação, o sujeito começa a discernir as características das figuras. Crowley (1996) afirma que nesse nível "Surgem então propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes." (CROWLEY, 1996, p.3).

Por exemplo, em um paralelogramo, o sujeito desse nível consegue identificar ângulos congruentes, mas não consegue relacionar que, se os ângulos opostos são congruentes, então os lados opostos são paralelos. Porém, nesse nível, o sujeito não é capaz de explicar relações entre propriedades, não vê inter-relações entre figuras e não entende definições.

No nível 3 (Dedução Informal), o sujeito consegue estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras quanto entre figuras. Portanto, o sujeito é capaz de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida. As definições têm significado. Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Por exemplo, nesse nível o sujeito identifica que, se os lados opostos do quadrilátero são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais. Porém, nesse nível o sujeito não compreende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Com isso, o sujeito é capaz de acompanhar demonstrações formais, mas não percebe como pode ser alterada a ordem lógica e nem como se pode construir um argumento partindo de inícios diferentes ou não familiares (CROWLEY, 1996).

No nível 4 (Dedução), o aluno compreende o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. Além de percebida a inter-relação, nesse nível, também são percebidos o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Neste nível, o aluno é capaz de construir demonstrações e analisar a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreende a interação das condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

No nível 5 (Rigor), o sujeito é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, ou seja, pode-se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. Crowley (1996) explica que nesse nível a geometria é vista no plano abstrato e é o nível menos desenvolvido por Van Hiele e sua esposa.

Segundo Nasser (1993, p.31), "Os níveis formam uma hierarquia, no sentido de que não é possível atingir um nível sem dominar todos os níveis inferiores", e essa é a característica sequencial desse modelo. O avanço é determinado pelo progresso de um nível para o seguinte, que depende mais da experiência de atividades adequadas do que da idade ou da maturação (NASSER, 1993). Intrínseco e extrínseco consiste na característica que, o que está implícito em um nível, torna-se explícito no nível seguinte, ou seja, os objetos inerentes a um nível tornam-se os objetos de ensino no nível seguinte. Cada nível tem símbolos linguísticos próprios, e um conjunto de relações interligando-os, essa característica é a linguística. A combinação inadequada é a característica de que duas pessoas que raciocinam em níveis distintos não podem compreender uma à outra, essa combinação inadequada ocorre quando o curso se desenvolve em um nível diferente do qual o indivíduo se encontra. Dessa forma, a aprendizagem e o progresso desejado podem não se verificar quando ocorre a combinação inadequada, ou seja, professor ensinando em um nível diferente do qual o aluno se encontra.

Nasser (1993) e Crowley (1996) explicam que a teoria de Van Hiele estabelece, além dos cinco níveis de compreensão do pensamento geométrico já apresentados, também cinco fases pelas quais um aluno deve passar no processo de progressão a um nível mais elevado. Essas fases descrevem sequencialmente o processo de aprendizagem, sendo elas: (1) Interrogação ou Informação; (2) Orientação dirigida; (3) Explanação ou Explicação; (4) Orientação livre; (5) Integração.

Nesse trabalho, para cada dobradura apresentam-se perguntas iniciais para a realização das observações sobre as dobras, correspondendo à Fase 1 do aprendizado na Teoria de Van Hiele, ou seja, fase da Interrogação. A Fase 2, Orientação dirigida, encontra-se em alguns momentos nos quais a pesquisadora intervém e nas questões de respostas específicas. A Fase 3, de Explicação, emerge durante todo processo, pois os alunos exploram a dobradura, observam e discutem durante todo o momento. A Fase 4, Orientação livre, é apresentada em todo o momento em que a pesquisadora não intervém e nas questões em que há possibilidades de vários caminhos, pois são caracterizadas por tarefas abertas.

Na Fase 1, Interrogação ou Informação, fazem-se observações, levantam-se questões e introduz-se um vocabulário específico do nível. Na fase 2, Orientação dirigida, os alunos exploram o tópico de estudos a partir do material que o professor ordenou em sequência. Na Fase 3, Explanação ou Explicação, os alunos expressam e trocam suas visões emergentes sobre as estruturas que foram observadas, baseando-se em suas experiências anteriores. Na fase 4, Orientação livre, o aluno depara-se com tarefas mais complexas, que podem ser concluídas de diversas maneiras ou tarefas abertas. Na fase 5, Integração, os alunos reveem e resumem o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações (CROWLEY, 1996).

Com relação aos níveis de pensamento propostos por Van Hiele, a partir das atividades elaboradas nessa pesquisa, pretende-se observar de que forma características dos diferentes níveis podem emergir ao longo do desenvolvimento das atividades, sendo possível (ou não) observar tais características nas diferentes fases de aprendizagem. A seguir, abordamos a argumentação em Geometria, por se caracterizar como uma atividade importante do desenvolvimento do pensamento geométrico.

2.1.2 A Argumentação em Geometria

Segundo De Villiers (1997), a Matemática baseia-se no seguinte axioma fundamental: "Algo é verdadeiro se, e somente se, pode ser provado". Entretanto, para o autor, os livros didáticos costumam ensinar a deduzir os resultados, antes mesmo de aceitá-los como verdadeiros, contrariando o sentido verdadeiro do pensamento matemático. Ou seja, a dedução é feita para chegar à propriedade.

De Villiers (1997) comenta que a motivação para uma argumentação (e dedução) de determinada propriedade geométrica é a convicção da mesma, ou seja, temos que estar convencidos de que ela é verdadeira para querer prová-la. Assim, o desenvolvimento de uma dedução ou argumentação é feito após tomar-se uma propriedade como verdadeira. O autor afirma que, para verificar uma propriedade tomada como verdadeira, primeiro recorre-se a alguns casos particulares. Se a propriedade não vale para esses casos, é tida como falsa. Mas se a propriedade vale para esses casos, há o incentivo para argumentar e deduzir. No entanto, se depois de um tempo não sucedeu a argumentação e a dedução, começa-se a duvidar da validade da mesma e, talvez, pensar em outros casos para encontrar um contraexemplo.

De Villiers (1997) argumenta que a falta de dedução e argumentação de uma propriedade reflete na falta de compreensão sobre ela. Ou seja, argumentar e deduzir seriam formas de entendimento, algo mais do que apenas saber que a propriedade é verdadeira, de convencer seu raciocínio da veracidade. Por exemplo, ao observar uma figura geométrica com características visuais de um quadrado, podemos a definir como sendo um quadrado, porém a visualização não basta para afirmar que as propriedades de um quadrado são satisfeitas na figura. Ao observar, identificar e argumentar sobre as propriedades de uma figura geométrica, para defini-la ou classificá-la, constatando por meio de argumentação a veracidade da afirmação, pode-se sugerir que há entendimento e compreensão sobre as propriedades da figura, ou seja, a argumentação apoiada em propriedades e encadeamento lógico revela a possível compreensão sobre o objeto geométrico explorado.

Com isso, De Villiers (1997) argumenta que a principal função da prova matemática não é a de verificação, mas sim de explicação. O autor argumenta que essas provas, de explicação, produzem conhecimento sobre os conceitos relevantes e são mais importantes do que apenas confirmar um resultado.

Notare e Basso (2018) argumentam que a prova é uma característica essencial da Matemática. Também, afirmam que, no caso da geometria euclidiana, a argumentação tem papel fundamental para a compreensão e validação de teoremas, que caracterizam a essência axiomática-dedutiva desse campo da Matemática. Destacamos novamente que essa investigação não tem o objetivo de abordar provas matemáticas formais, que envolvem excesso de rigor e formalismo, mas o processo de raciocínio lógico-dedutivo, que percorre o caminho de falsos começos, formulação de conjecturas, explicações parciais e explorações informais, como ferramenta essencial para a compreensão da geometria, corroborando com Armella (2016) e Notare e Basso (2018).

Segundo Basso e Notare (2015), o processo de prova consiste em duas fases: a formulação de uma conjectura e a construção de uma prova. As figuras dinâmicas podem ter um importante papel no processo de prova. Na primeira fase, no sentido de mediar a exploração e realização de conjecturas e na identificação das propriedades. Na segunda fase, as ideias são logicamente organizadas.

A argumentação lógica e dedutiva, que caracteriza a dedução de uma propriedade, é importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico. É o processo de estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios, conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos, que são as hipóteses, às propriedades ditas decorrentes, que são as teses. Segundo Gravina (1996, p.3), “O desenho é a materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades.”.

De Villiers (1997) apresenta que a argumentação pode ser um meio de descoberta em muitas ocasiões. O autor conclui que, para o desenvolvimento da argumentação, devem ser permitidos ao aluno a oportunidade de exploração, conjecturas, testes, refutações, reformulações e explicações. Para o autor, ambientes de geometria dinâmica incentivam esse tipo de pensamento. Nessa pesquisa, analisamos como emergem a exploração, as conjecturas, os testes, as refutações, as reformulações e as explicações, como também, analisamos o desenvolvimento da argumentação dos alunos. O papel desses ambientes no desenvolvimento do pensamento geométrico é discutido na seção a seguir.

2.2 GEOMETRIA DINÂMICA E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O uso da tecnologia digital oferece a professores e alunos uma oportunidade para ampliar e aprofundar as formas de raciocínio sobre as estratégias matemáticas envolvidas na resolução de problemas. Armella (2016) defende e utiliza duas habilidades como essenciais para os alunos: construir e explorar modelos dinâmicos para examinar um grande número de exemplos; identificar e formular conjecturas ou invariâncias e procurar argumentos para apoiar as relações matemáticas, indo ao encontro das atividades matemáticas defendidas por De Villiers (1997) como importantes para desenvolver argumentações. Armella (2016) aponta que, com a utilização de tecnologias digitais nessa abordagem, pode-se construir empiricamente, visualmente e formalmente vários conceitos e estratégias de resoluções de problemas que ajudam a relacionar e dar sentido a esses conceitos. Armella (2016) argumenta que as tecnologias digitais possibilitam representações que desenvolvem o raciocínio utilizando argumentações para a resolução de problemas. Ainda, o autor afirma que levar o aluno pelo caminho de argumentos visuais pode contribuir para o caminho de provas mais formais, a partir do estabelecimento de relações entre raciocínio empírico e raciocínio dedutivo.

A geometria dinâmica proporciona ao indivíduo novos meios de investigação. A construção virtual de objetos geométricos permite que o sujeito manipule e observe como a construção se comporta, se ela mantém propriedades geométricas ou deforma-se sob a ação do movimento. Por exemplo, se construirmos um quadrado no GeoGebra utilizando como estratégia estabelecer as coordenadas dos vértices, quando estes vértices forem manipulados, o quadrado perde suas propriedades, ou seja, deixa de ser um quadrado. Agora, se construirmos um quadrado a partir de suas propriedades, como lados e ângulos congruentes, quando manipulado, continua sendo quadrado.

A simples solução desse problema, construir um quadrado em ambiente de geometria dinâmica sem perder suas propriedades quando manipulado, possibilita aprendizagem de vários conceitos, pois, há vários caminhos que podem ser seguidos. A BNCC (2017) argumenta que a resolução de problemas é objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental e Armella (2016) defende que as tecnologias digitais proporcionam oportunidades de explorar a Matemática via resolução de problemas.

As competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação), definidas pela BNCC, podem ser desenvolvidas com o uso das tecnologias digitais. Na resolução de problemas, os alunos, ou solucionadores de problemas, podem contar com tecnologias digitais para representar e explorar as tarefas por meio de abordagens empíricas e visuais, que podem fornecer informações úteis para pensar argumentos formais.

Contudo, Goldenberg (2000) defende que o valor de uma tecnologia depende de como ela é usada, ou seja, uma mesma tecnologia digital pode não contribuir ao mesmo tempo em que pode contribuir para a aprendizagem. Isso depende do bom uso dessa tecnologia. O bom uso é refletir sobre os objetivos de aprendizagem e sobre a tecnologia que pode ser mais adequada para isso, sem domesticá-la.

É importante que se tenha uma boa tomada de decisões, que se tenha conhecimento dos diferentes papéis que a tecnologia pode assumir na sala de aula. Defende-se que não se deve subestimar o uso das tecnologias digitais com a finalidade de tornar as aulas atraentes, mas sim enfatizar seu uso de forma a potencializar a aprendizagem dos alunos.

Com relação à aprendizagem de matemática, Armella (2016) afirma que o raciocínio matemático implica mais do que chegar a conclusões logicamente deduzidas, com base em suposições e definições, mas envolve também explorações informais, falsos começos, formulação de conjecturas e explicações parciais antes de construir argumentos formais ou provas. Dessa forma, nessa pesquisa, não temos a pretensão de que os alunos cheguem a demonstrações impecáveis e formais, ou em respostas perfeitas para todos os problemas, mas sim que percorram um caminho que proporcione o desenvolvimento do pensamento geométrico, com a oportunidade de explorar, conjecturar e argumentar sobre suas escolhas e conclusões. Isso faz com que provas e argumentos fiquem mais claros para os estudantes, porque eles mesmos desenvolveram, a partir de suas próprias ações, discussões e investigações.

Basso e Notare (2015) argumentam que, uma das principais contribuições dos ambientes de geometria dinâmica é a evolução do conceito de argumentação em geometria. Nesses ambientes, podem ser oferecidas atividades que favoreçam a exploração, a conjectura, a argumentação, a discussão e, por fim, a prova. Assim, a noção de prova em Matemática escolar muda com a experimentação, pois torna-se um processo de procurar argumentos que explicam a veracidade de uma afirmação, de acordo com regras de consequência lógica. E é nesse sentido que entendemos a argumentação em nossa pesquisa.

Dessa forma, Notare e Basso (2018) argumentam que, atualmente, ambientes de geometria dinâmica têm colaborado para o resgate das discussões sobre a importância da prova nas aulas de Matemática. Esses ambientes trazem a possibilidade de movimentar objetos geométricos (pontos, retas, figuras geométricas, etc.), construídos a partir de propriedades geométricas, fazendo com que essas propriedades sejam realçadas e observadas, assim como regularidades importantes no processo de argumentação. Com isso, é possível proporcionar um espaço para a elaboração, teste e validação de conjecturas, etapas importantes do processo dedutivo, corroborando com ideias de De Villiers (1997) e Armella (2016).

Em Geometria, o desenho apresenta propriedades geométricas particulares para cada configuração geométrica. Uma das dificuldades básicas apresentadas pelos alunos, segundo Gravina (1996), corresponde a perceber no desenho configurações simples dentro de configurações complexas, as quais serão os "elos" que compõe a cadeia de argumentação. Outra dificuldade básica apresentada, segundo Gravina (1996), é o controle do desenho para que características de contingência da representação não sejam incorporadas às propriedades matemáticas que determinam a configuração. Por exemplo, é comum os alunos caracterizarem o retângulo como uma figura de lados diferentes, mas iguais dois a dois, devido ao desenho protótipo em associação, o qual é apresentado nessa configuração. Nisso, a propriedade passa a ser tomada como tal, excluindo o quadrado como um retângulo e deixando de lado propriedades geométricas do retângulo.

Segundo Gravina (1996), dois principais aspectos didáticos de utilização das tecnologias digitais são

> [...] a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente. (GRAVINA, 1996, p.7)

Com a manipulação de figuras geométricas em ambiente de geometria dinâmica, o aluno observa características que se mantêm na figura, permitindo-o deduzir propriedades que se apresentam nos movimentos. Por exemplo, na manipulação de um retângulo o aluno pode observar que em alguns momentos a figura configura-se com os quatro lados iguais, o que se conclui que “ter lados diferentes” não é uma propriedade característica do retângulo.

A partir da manipulação em ambiente de geometria dinâmica, regularidades e invariantes vão aparecendo. Consequentemente, pela essência do pensamento matemático, a busca por uma justificativa que independa de experiências concretas pode ocorrer. Assim, se estabelece o processo de dedução.

Dessa forma, Basso e Notare (2015, p.3) afirmam que “Hoje, com os recursos tecnológicos interativos e dinâmicos, temos um ganho de compreensão, proporcionado pelas representações agora acessíveis por meio desses ambientes.”.

Isso porque esses ambientes proporcionam a possibilidade de representação e manipulação de objetos matemáticos que não são possíveis com lápis e papel, abrindo novas possibilidades para o pensamento matemático. Esclarece-se que a ideia não é invalidar outros ambientes de aprendizagem, mas sim explorar a potencialidade que o ambiente dinâmico pode proporcionar para a aprendizagem de geometria, utilizando esse ambiente de forma a desencadear o pensamento matemático, proporcionando aos alunos possibilidades para acessar e manipular objetos matemáticos até então não acessíveis.

Para Basso e Notare (2015), o ambiente dinâmico pode ajudar os alunos a desenvolver novas formas de olhar para os problemas matemáticos, desenvolvendo a construção de modelos mentais e habilidades de generalização e flexibilidade de pensamento. Também, os autores alegam que “A matemática torna-se funcional uma vez que as tecnologias levam ao desenvolvimento do pensamento matemático como forma de resolver um problema e não como um fim em si mesmo.” (BASSO, NOTARE, 2015, p.4).

Assim, o ambiente dinâmico pode levar o aluno a compreender que pode se tornar um sujeito capaz de criar e pensar em matemática. A resolução de problemas nesse ambiente de geometria dinâmica deve proporcionar ao aluno descobrir conceitos e propriedades geométricas, construindo, assim, seu próprio conhecimento sobre geometria.

Segundo Basso e Notare (2015), os ambientes de geometria dinâmica possibilitam um nível elevado de realismo para representar diferentes objetos matemáticos pela manipulação direta de construções geométricas, que permitem a visualização de conceitos de geometria a partir do estudo de propriedades invariantes dessas construções enquanto seus componentes são manipulados. Neste campo de experimentação, a afirmação de uma propriedade geométrica torna-se a descrição de um fenômeno geométrico acessível à observação, pois, as construções geométricas nesse ambiente, ao serem manipuladas, mantém suas propriedades definidas em sua construção (BASSO, NOTARE, 2015).

Esse ambiente de geometria dinâmica possibilita ao aluno tornar possíveis suas ideias informais, dando início a um processo de coordenação com ideias mais formalizadas sobre determinado assunto. É preciso que o aluno analise se ele construiu o que pretendia construir inicialmente, baseando-se na evidência perceptiva. O aluno precisa analisar se o objeto geométrico construído, ao manipular, mantém suas propriedades e relações internas (BASSO, NOTARE, 2015).

Com isso, analisamos como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos em ambiente de geometria dinâmica. A seguir, apresentamos estudo sobre as dobraduras no ensino de Geometria, por ser um dos focos centrais dessa pesquisa.

2.3 DOBRADURA NO ENSINO DE GEOMETRIA

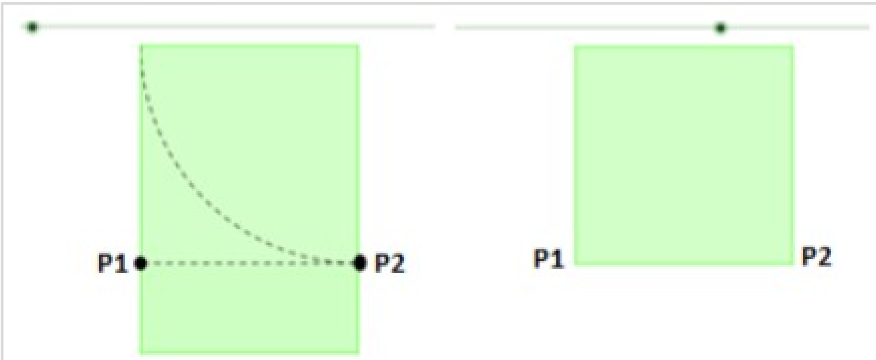
Silva (2009) defende o uso de dobraduras de papel para o ensino básico, argumentando que questões elementares podem ser trabalhadas a partir do suporte oferecido pelo desenvolvimento dessas dobras. Silva (2009) explica que, ao realizar dobras, utiliza-se de régua e compasso "escondidos" na folha de papel, afirmando a existência um rico campo para o desenvolvimento de atividades sobre questões importantes no desenvolvimento do pensamento matemático.

O autor destaca algumas possibilidades de trabalho com dobraduras, dentre as quais citam-se as que serão abordadas nesse trabalho: formas, classificação segundo a medida dos lados; os fundamentos geométricos das dobras; conceitos de Matemática e vocabulário específico de Geometria; simetria, congruência e ângulos. Silva (2009) afirma que, por proporcionar uma referência visual para conceitos geométricos, as dobraduras podem auxiliar no ensino de conceitos relativos à Geometria.

As dobraduras em origami foram objetos de estudos em meados da década de 70 (MENEZES, 2014). Humiaki Huzita foi um matemático que nasceu no Japão, porém viveu a maior parte da vida na Itália. Huzita ficou conhecido por formular no final desta década os primeiros seis axiomas, chamados inicialmente de operações básicas, para definir uma única dobra que pode alinhar várias combinações de pontos e retas já pré-existentes, ou seja, descrevia a matemática de dobrar o papel com o intuito de resolver problemas de construção geométrica. Anos depois, em 1989, Jacques Justin sugeriu que as combinações possíveis de uma única dobradura não eram seis, mas sete, as quais são apresentadas a seguir.

O Axioma 1 diz que, dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos. Nessa situação, podemos dizer que essa dobra é uma reta que contém tais pontos, remetendo ao primeiro postulado de Euclides, que afirma que existe uma única reta que passa por dois pontos distintos. Podemos observar esse axioma, por exemplo, na Dobradura 1 das atividades propostas nessa pesquisa, pois para dobrar a folha de papel A4 que determina um quadrado, é necessário determinar dois pontos nas laterais da folha e, existe uma única dobra que passa por esses dois pontos, como podemos observar na Figura 2.

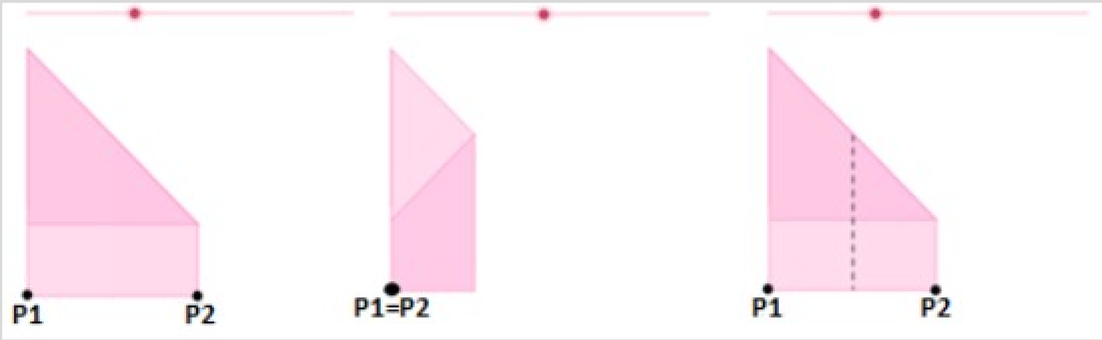
Figura 2 - Exemplo do Axioma 1 na Dobradura 1



Fonte: Acervo da autora

O Axioma 2 diz que, dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma única dobradura que os torna coincidentes. Nessa dobradura, é construída a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$, podendo ser encontrado também o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$ pela intersecção do segmento $\overline{P_1P_2}$ com a mediatriz. Pin e Uribe (2016) associam esse axioma à existência e unicidade da mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$. Podemos observar, por exemplo, esse axioma na Dobradura 3 das atividades propostas nessa pesquisa: ao realizar a segunda dobra da atividade, fazemos coincidir os pontos P_1 e P_2, e a dobra realizada é a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$, como mostra a Figura 3.

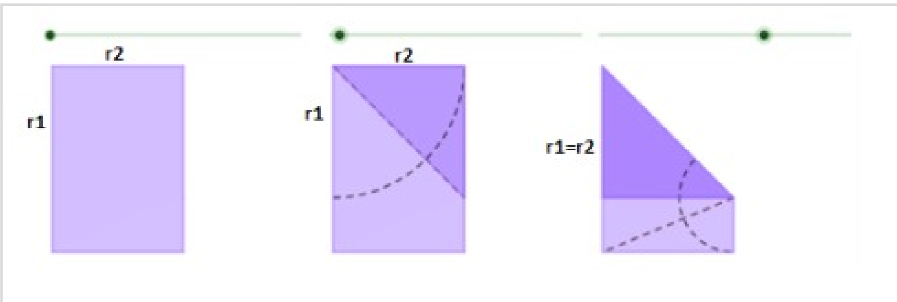
Figura 3 - Exemplo do Axioma 2 na Dobradura 3 – Determinação da Mediatriz



Fonte: Acervo da autora

O Axioma 3 diz que, dadas duas retas r_1 e r_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2. Nessa dobradura, se as retas r_1 e r_2 forem paralelas, então a dobra descreverá uma reta paralela às retas r_1 e r_2. Se as retas r_1 e r_2 forem concorrentes, a dobra descreve a bissetriz dos ângulos entre as retas, sendo que há duas possibilidades de dobrar e não apenas uma. Pin e Uribe (2016) associam esse axioma às bissetrizes dos ângulos formados pela intersecção das duas retas. Podemos observar esse axioma, por exemplo, na Dobradura 3 das atividades propostas nessa pesquisa, em que o lado esquerdo e o lado direito da folha de papel A4, ao coincidirem, formam uma dobra paralela a esses dois lados, como mostra a Figura 3. Podemos observar esse axioma também na Dobradura 2 das atividades propostas nessa pesquisa, pois ao coincidir o lado superior da folha de papel A4 com o lado esquerdo da mesma (lados concorrentes), a dobra determina a bissetriz desses dois lados da folha de papel A4, como mostra a Figura 4.

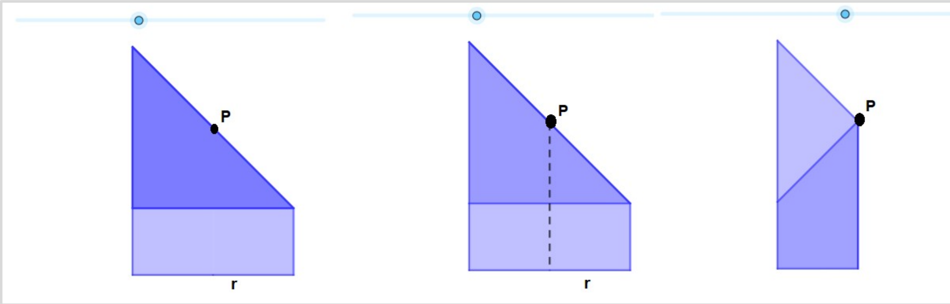
Figura 4 - Exemplo do Axioma 3 na Dobradura 2 – Caso de retas concorrentes



Fonte: Acervo da autora

O Axioma 4 diz que, dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular à reta r que passa por P. Pin e Uribe (2016) associam esse axioma à existência e unicidade da reta perpendicular que passa por um ponto. Podemos observar esse axioma, por exemplo, na Dobradura 4 das atividades propostas nessa pesquisa, ao realizar a segunda dobra: dado o ponto P e o segmento r (lado inferior da folha de papel A4), ao realizar a dobra que faz coincidir os lados direito e esquerdo da folha, obtém-se, no segmento determinado pela dobra, uma reta perpendicular ao segmento r passando por P, como mostra a Figura 5.

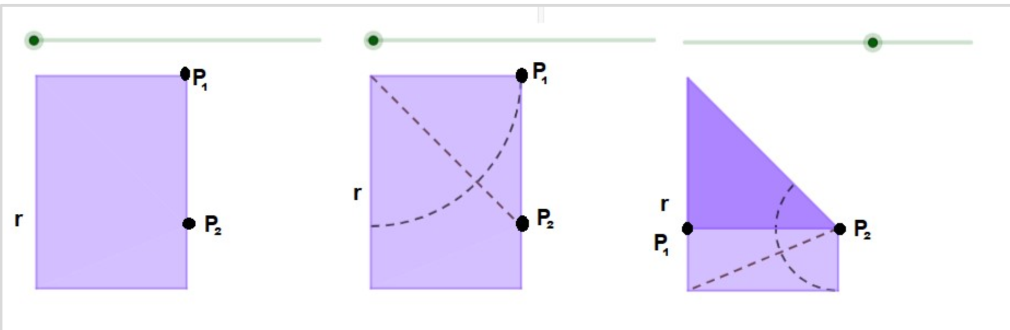
Figura 5 - Exemplo do Axioma 4 na Dobradura 4 - Reta Perpendicular



Fonte: Acervo da autora

O Axioma 5 diz que, dados dois pontos distintos P_1 e P_2 e uma reta r, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2.Pin e Uribe (2016) afirmam que a quantidade de soluções para esse axioma pode ser nenhuma, uma ou duas, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois é equivalente a encontrar a intersecção da reta r com um círculo com centro em P_2 e de raio $\overline{P_1P_2}$. Podemos observar esse axioma, por exemplo, na Dobradura 2 das atividades propostas nessa pesquisa, ao incidir o ponto P_1 sobre o segmento r, a dobra realizada passa pelo ponto P_2, como mostra a Figura 6. Nesse caso, existe uma única solução, pois para incidir P_1 em r, de maneira que a dobra realizada passe por P_2, é necessário que a distância entre P_2 e r seja igual à distância entre P_1 e P_2.

Figura 6 - Exemplo do Axioma 5 na Dobradura 2

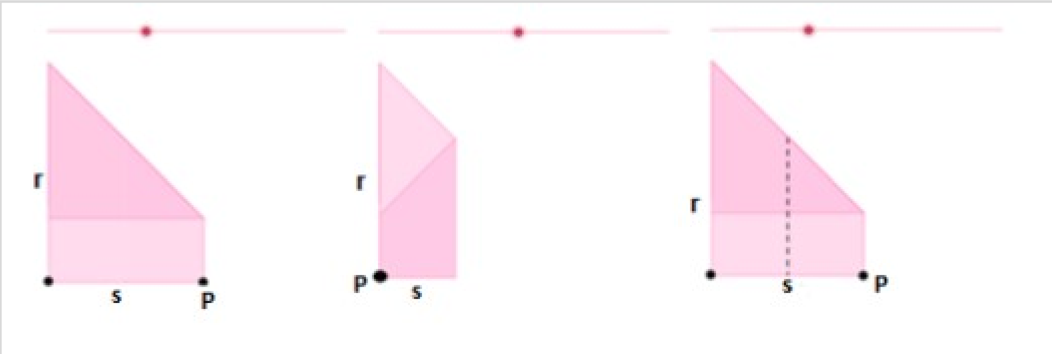


Fonte: Acervo da autora

O Axioma 6 diz que, dados dois pontos distintos P_1 e P_2 e duas retas distintas r e s, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r e P_2 sobre s. Pin e Uribe (2016) afirmam que esse axioma não pode ser construído com régua e compasso. Esse axioma não se encontra nas dobraduras realizadas nesse trabalho.

O Axioma 7 diz que, dados um ponto P e duas retas r e s, existe uma dobra que faz coincidir P em r e é perpendicular à reta s. Esse axioma pode ser observado na Dobradura 3 das atividades propostas nessa pesquisa: ao realizar a segunda dobra, ao incidir o ponto P sobre o segmento r, é realizada uma dobra perpendicular ao segmento s, como mostra a Figura 7.

Figura 7 - Exemplo do Axioma 7 na Dobradura 3 - Reta Perpendicular



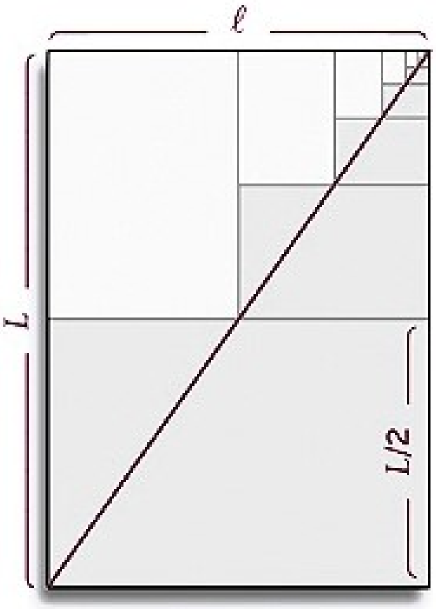
Fonte: Acervo da autora

Além dos axiomas discutidos acima, para entender sobre as dobraduras que serão propostas na primeira etapa dessa pesquisa, é importante conhecer as características da folha utilizada, nesse caso A4, pois as regularidades geométricas que emergem das dobraduras resultam das proporções específicas dessa folha. Esse formato de papel mede 210 milímetros de largura e 297 milímetros de altura, medidas adotadas em 1954, no sistema alemão e que depois se formalizaram na norma ISO 216 da International Organization for Standardization[2]. Nessa norma, há uma série de formatos, que começa em A0, sendo o maior, e decresce até A10, com 26 por 37 milímetros. Todos esses formatos são construídos de forma a obter o formato de número superior dobrando ao meio uma folha, ou seja, essas medidas foram escolhidas de forma que dobrando a folha A0 se obtém a folha A1 e assim por diante. Com isso, mantém-se sempre a mesma proporção entre os lados do papel, ou seja, o papel A4 de

[2] International Organization for Standardization. ISO. Disponível em: https://www.iso.org/standard/36631.html. Acesso em: 12 set. 2018.

medidas L por l, ao ser dobrado ao meio resulta no papel A5 de l por $\frac{L}{2}$. Então, assumindo $l = 1$, temos na folha A4 as medidas $\frac{L}{l} = \frac{L}{1}$ e, na da folha A5, as medidas $\frac{l}{\frac{L}{2}} = \frac{1}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{L}$. Logo a proporção é $\frac{2}{L} = \frac{L}{1} \Rightarrow 2 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$. Assim a razão entre as dimensões das folhas é $1/\sqrt{2}$. Esses resultados serão utilizados em algumas dobraduras propostas nessa pesquisa. A Figura 8 ilustra a geometria da folha A4.

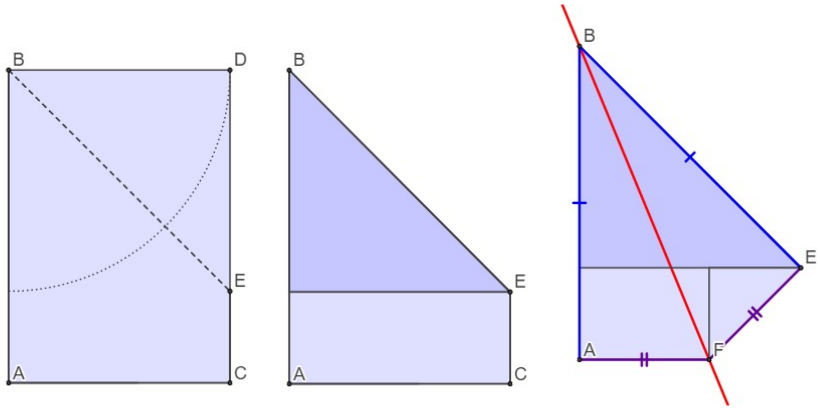
Figura 8 - Geometria da Folha A4



Fonte: NUNO, Crato. **A Geometria do A4. Ciência.**

Vamos apresentar um exemplo, para ilustrar algumas propriedades que podem ser exploradas a partir de dobraduras. Faça a seguinte dobradura: escolha um vértice da folha A4 e leve-o até o lado maior oposto da folha, de maneira que o lado menor sobreponha o lado maior. Repita o processo para o retângulo que se forma. Prove que $BE \equiv BA$. A Figura 9 ilustra a dobradura simulada no GeoGebra.

Figura 9 – Exemplo de atividade de dobradura



Fonte: Acervo da autora.

Mostramos acima que o lado maior L é igual à $\sqrt{2}$, tomando o lado menor l como 1. Com isso, podemos mostrar, a partir do teorema de Pitágoras, que BE é igual $\sqrt{2}$, pois por construção podemos observar que $BD \equiv DE$. Portanto $BE \equiv BA$. Com essa atividade, podemos perceber alguns conceitos que emergem do problema apresentado, como congruências de lados e ângulos, teorema de Pitágoras, propriedades de quadrados e círculos, proporções, entre outros. Essa atividade pode ser explorada, como o uso do GeoGebra para manipular o objeto papel virtual e observar a consequência de suas ações, proporcionando um ambiente investigativo rico.

Portanto, analisamos como surgem os axiomas nos diálogos e argumentações dos alunos durante a realização das atividades propostas. Na seção a seguir, são apresentados outros trabalhos que investigaram o uso de dobraduras nas aulas de Matemática, não sendo encontrado trabalhos que utilizam especificamente as propriedades decorrentes das medidas de papel A4.

2.4 TRABALHOS CORRELATOS

Diante da investigação que se propõe essa pesquisa, foi realizada uma busca por trabalhos relacionados ao tema, que objetivou responder à pergunta: **Qual o panorama atual de trabalhos que envolvem o uso de dobraduras virtuais em ambiente de geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento geométrico?** A partir dessa questão, realizou-se uma busca nos seguintes bancos: repositório digital da UFRGS Lume, no Google Acadêmico, no Repositório Institucional UFJF, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações BDTD, no Sistema Integrado de bibliotecas Universidade de São Paulo SIBi, no

Repositório Institucional UNESP, no Repositório Institucional PUCRS, no Repositório Digital da UFMG e nos Periódicos da Capes sobre pesquisas, dissertações e teses que abordem o uso de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica. Nessa pesquisa, foram utilizadas as seguintes palavras-chaves: geometria dinâmica, dobraduras em papel A4, dobraduras no GeoGebra. Não foram encontrados resultados específicos, tratando de dobraduras de papel A4 no GeoGebra, sendo encontrados trabalhos que tratam de dobraduras em papel utilizando material concreto. A seguir, descrevemos os trabalhos que mais se aproximam de nossa pesquisa. O Quadro 1 apresenta um resumo dos trabalhos que serão apresentados.

Quadro 1 – Trabalhos correlatos encontrados

Quadro resumo				
Título	Autor(es)	Ano	Local	Assunto
Estudando Geometria através de dobraduras	Frolini	2014	Rio Claro, SP	Dobraduras em papel A4
O Origami no Ensino-Aprendizagem de Matemática	Silva	2009	Porto Alegre, RS	Dobraduras em papel A4
O uso de dobraduras como recurso para o ensino da Geometria Plana: história, teoremas e problemas	Menezes	2014	Fortaleza, CE	Dobraduras em papel A4

Frolini (2014), em sua dissertação, constrói conceitos geométricos utilizando dobraduras e construções básicas no papel sulfite. Também solicita demonstrações das propriedades geométricas envolvidas nas dobraduras e comenta ser evidente a falta de contato que os alunos tinham com demonstrações matemáticas. As dobraduras propostas nesse trabalho referem-se a construções de retas, mediatriz, bissetriz, reta perpendicular a uma reta, entre outros. Na pesquisa apresentada nessa dissertação, serão consideradas construções de polígonos, nas quais as dobraduras serão realizadas em ambiente dinâmico.

Silva (2009), em seu TCC, apresenta o sistema de diagramação de Akira Yoshizawa e os tipos de dobras desse sistema, escolhendo alguns modelos como: caixa simples; módulo Sonobe; cubo Sonobe; Tetraedro Estrutural. Pela dificuldade de visualização e compreensão dos alunos, o autor decide filmar os passos da construção dos origamis. Silva criou um portal on-line para que professores e alunos tenham acesso ao material didático produzido por ele, que consistem em vídeos dos passos de construção. Nesse trabalho, o autor propõe trabalhar dobraduras em papel, abordando axiomas da geometria euclidiana e construções geométricas tradicionais.

Menezes (2014), em sua dissertação, propõe atividades de dobraduras de papel para a aprendizagem de conceitos geométricos e de figuras geométricas. Também propõe o uso de dobraduras para a resolução de teoremas e problemas: Teorema de Pitágoras; Teorema de Haga; Trissecção do lado de um quadrado; Problema de duplicação do cubo; Trissecção do ângulo; Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de 54° e 36°; Retângulos com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Retângulo áureo; Cônicas; Parábola; Elipse; Hipérbole. Esse trabalho foi desenvolvido com a intenção de contribuir para a formação do professor de Matemática na apropriação e ensino do conteúdo de Geometria Euclidiana Plana no ensino básico para seus alunos. O autor, assim como Silva (2009), trata de vídeos com os passos de construção das dobraduras. Menezes (2014) sugere que o trabalho abra caminhos para as dobraduras de papel no GeoGebra, mas não se aprofunda na tecnologia, concentrando-se apenas no material concreto.

Nossa pesquisa aproxima-se dos trabalhos apresentados acima pelo fato de trabalhar conceitos e propriedades geométricas a partir da ideia de dobraduras. Entretanto, avançamos no que diz respeito ao uso das tecnologias digitais, propondo que os alunos explorem e construam dobraduras em ambientes de geometria dinâmica, para compreender as propriedades geométricas que são exigidas na construção ou que decorrem das dobraduras realizadas. O fato de não encontrarmos trabalhos que abordem, simultaneamente, dobraduras e geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento geométrico realça a contribuição dessa dissertação e a relevância da investigação para a área de Tecnologias Digitais na Educação Matemática.

O capítulo a seguir apresenta os procedimentos metodológicos, descrevendo as atividades planejadas para serem aplicadas a alunos de nono ano. Nele também se encontra a descrição do livro dinâmico criado no GeoGebra online, referente às simulações das dobraduras construídas e de questões de investigação propostas.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa tem cunho qualitativo, na qual buscamos compreender como se dá a aprendizagem de propriedades geométricas que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica. Nessa perspectiva, as respostas não são objetivas e o propósito não é contabilizar quantidades como resultados, mas sim conseguir compreender o comportamento do indivíduo no ambiente de geometria dinâmica, diante dos problemas e atividades propostas. Estamos interessados em investigar o processo de descoberta e desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, e não o resultado ou produto final de suas participações. Realizamos um estudo do processo e das produções dos estudantes, buscando identificar indícios de desenvolvimento de pensamento geométrico, a partir da observação de propriedades referenciadas, utilizadas ou descobertas ao longo do trabalho com dobraduras virtuais.

Para Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa possui cinco características, porém nem todos os estudos que podem ser considerados qualitativos apresentam todas estas características. A primeira característica é que "Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal." (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.47), ou seja, na pesquisa qualitativa o investigador se introduz no ambiente da pesquisa e coleta dados (diário de campo, registros dos alunos, etc.) e, ao analisar os dados coletados, pode rever os dados na sua totalidade, pois o investigador possui observações do contexto da produção desses dados.

A segunda característica da pesquisa qualitativa que Bogdan e Biklen (1994) apontam é a descrição, os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. O que caracteriza a pesquisa qualitativa é que os investigadores tentam analisar os dados em toda a sua riqueza e nenhum dado é simplificado.

A terceira característica da pesquisa qualitativa apontada por Bogdan e Biklen (1994) é que os investigadores se interessam mais pelo processo do que pelo resultado ou produto. Por exemplo, o investigador interessa-se em analisar como o indivíduo resolveu certo problema do que analisar se conseguiu resolver o problema.

A quarta característica da pesquisa qualitativa é que "Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva." (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.50), ou seja, os investigadores não recolhem dados para provar ou não hipóteses construídas previamente, mas sim, constroem abstrações conforme os dados recolhidos vão agrupando-se.

E por fim, a quinta característica é que “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.” (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.50), ou seja, a perspectiva do indivíduo, como ele entende sobre certo problema. Os investigadores qualitativos em Educação, segundo Bogdan e Biklen (1994), estão continuamente a questionar o indivíduo de investigação, com o objetivo de perceber o modo como ele interpreta as suas experiências.

Dessa forma, dados produzidos foram oriundos das produções dos alunos em atividades constituídas de simulações, no GeoGebra, de dobraduras de folha A4, inspiradas nas atividades disponíveis em https://www.geogebra.org/m/NJ3EKuyb#chapter/269802[3]. As atividades foram organizadas em duas etapas: (1) exploração de propriedades geométricas a partir de simulações de dobraduras dinâmicas virtuais em folha A4 no GeoGebra; (2) construção, no GeoGebra, de simulações de dobraduras simples, para compreender as propriedades geométricas inerentes a essas situações. A organização das atividades em duas etapas foi pensada, em um primeiro momento, de forma que, a etapa 1 do experimento envolvesse as investigações do GeoGebraBook, com o objetivo de proporcionar a exploração e manipulação dinâmica das dobraduras, para desencadear a elaboração de conjecturas sobre as figuras formadas e a argumentação sobre as mesmas.

Por outro lado, a etapa 2 do experimento, abordaria a construção de dobraduras dinâmicas virtuais pelos estudantes. Para realizar as construções, o aluno precisa compreender conceitos e propriedades geométricas presentes na simulação da dobradura de papel virtual e na sua construção. Destaca-se a importância dessa etapa, pois, muitas vezes, os conceitos e propriedades geométricas cruciais na construção virtual não são percebidos em situações concretas, nas quais o estudante apenas dobra o papel, sem se preocupar com as regularidades geométricas que resultam desse processo, pois não precisam delas para a dobradura, sendo elas apenas necessárias quando precisam reproduzir a dobradura no ambiente dinâmico. Porém, antecipamos que, no experimento prático realizado, não foi possível trabalhar a etapa 2 das atividades organizadas como o esperado. Sendo assim, esta pesquisa se aprofunda na análise da etapa 1 das atividades organizadas, que envolvem a manipulação e exploração das dobraduras virtuais no GeoGebraBook e o processo de argumentação geométrica dos estudantes.

Como já afirmado anteriormente, Basso e Notare (2015) definem duas fases para o processo de argumentação, a primeira fase é a de formulação de uma conjectura, que o sujeito explora a situação, formula uma conjectura e pesquisa por elementos, esses elementos são

---

[3] CAMBRÉ, Chris. Folding paper , doing geometry figures. **GeoGebra online**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/NJ3EKuyb#chapter/269802. Acesso em: 7 jun. 2018.

propriedades e conceitos geométricos que ajudam a explicar a conjectura. A segunda fase é a de construção de uma argumentação, na qual esses elementos devem ser colocados em uma sequência lógica. Assim, nessa pesquisa a primeira fase consiste no aluno explorar a dobradura virtual, identificar conceitos e propriedades, conjecturar, argumentar e discutir a fim de que se construa a dobradura virtual com suas propriedades e conceitos observados e discutidos na primeira fase, constituindo a segunda fase da argumentação.

Basso e Notare (2015) definem duas categorias para a ação de arrastar: arrastar para explorar e conjecturar e arrastar para validar uma conjectura ou argumentação. Na primeira categoria, os alunos arrastam objetos geométricos para observar a figura em busca de regularidades e invariantes. Na segunda categoria, os alunos arrastam um objeto geométrico para verificar uma conjectura já descoberta. Essa ação de arrastar estará presente nessa pesquisa, pois na exploração da dobradura virtual o aluno realiza a primeira categoria, o processo de manipular a dobradura o ajudará a conjecturar. Na construção do movimento de dobradura virtual, o aluno realiza a ação de arrastar para validar a construção, analisar se foram mantidas as mesmas propriedades da dobradura virtual.

Para produção dos dados, foram utilizados os seguintes instrumentos: diário de campo em todos os encontros, com anotações da professora-pesquisadora; registros escritos em editor de texto para as atividades de exploração, a fim de produzir dados que forneçam indícios de pensamentos dos estudantes durante a realização das atividades; gravação de vídeos, a fim de investigar o processo de cada aluno a partir de suas colocações e de intervenções que busquem elucidar dados importantes.

3.1 CENÁRIO E PARTICIPANTES

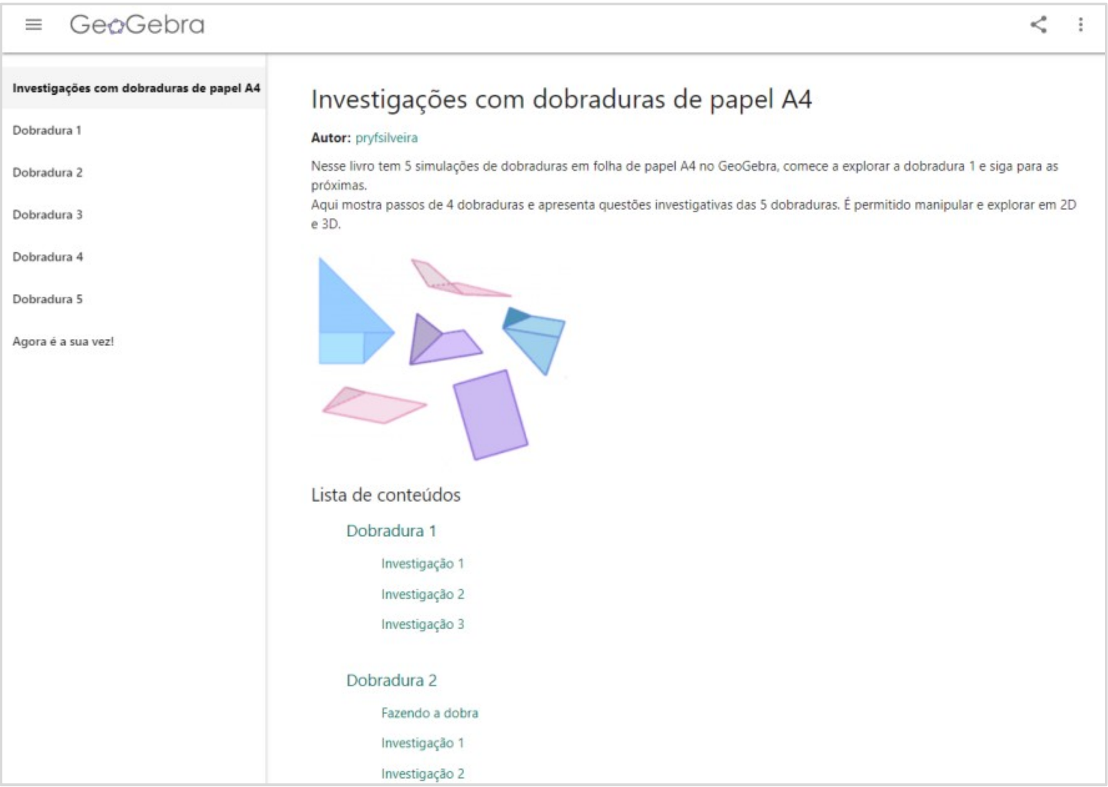
Para a realização da pesquisa e produção dos dados, foi oferecida uma oficina para as turmas de nono ano de uma Escolha Estadual de Ensino Fundamental, localizada na cidade de Charqueadas. A escola atende os anos iniciais e finais (1° ao 9° ano) nos turnos matutino e vespertino, possuindo em torno de 460 alunos. A escola disponibiliza de 13 computadores no laboratório de informática para uso dos alunos, porém até o momento da oficina alguns não funcionavam corretamente. Foram realizados cinco encontros, com duração de duas horas, nas terças-feiras em contra turno durante o mês de abril do ano de 2019.

Os alunos foram convidados pela pesquisadora em sala de aula, no início da aula, duas semanas antes de começar a oficina, entregando o termo de consentimento para aqueles que se interessaram. O convite foi realizado para as duas turmas de nono ano da escola, sendo que cada turma era formada por aproximadamente trinta alunos. Foram entregues vinte termos de consentimento para os alunos que estavam presentes no momento do convite e que aceitaram recebê-lo. No primeiro encontro, treze alunos compareceram na oficina, porém, nos encontros seguintes, quatro alunos permaneceram na oficina.

3.2 ORGANIZAÇÃO DA OFICINA E O GEOGEBRABOOK

Para a organização da pesquisa, foi produzido um GeoGebraBook (livro digital do GeoGebra online) com as dobraduras e sequências de atividades. Esse livro pode ser acessado pelo link: https://www.geogebra.org/m/kg5tgaed. Ao acessar o material, é possível visualizar um resumo do livro com seus capítulos, dividido em cinco dobraduras organizadas em atividades que denominamos *Investigações* e a atividade final, denominada *Agora é a sua vez!*, como pode ser visto na Figura 10 e na Figura 11.

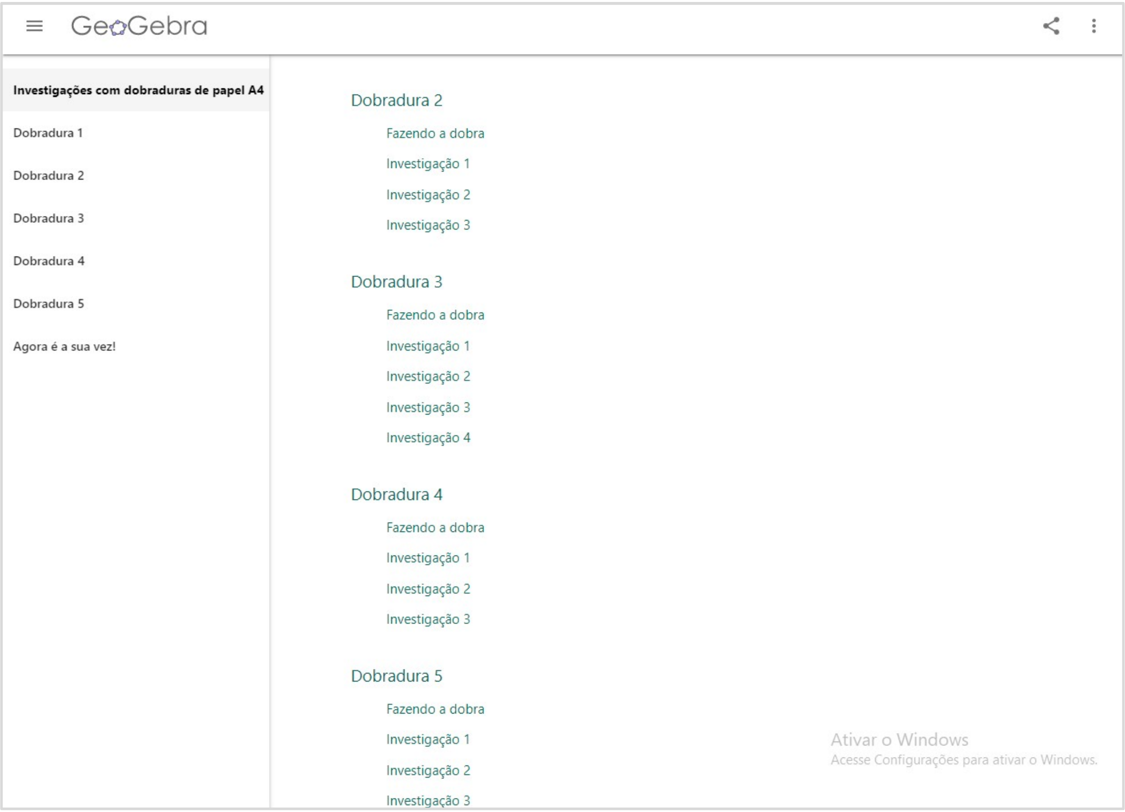
Figura 10 - Capa do livro digital – tela de apresentação principal



Fonte: Silveira (2018)

A estrutura geral das investigações foi pensada para contemplar etapas do pensamento geométrico como: 1) manipular e explorar; 2) realizar conjecturas, identificando características e propriedades gerais das figuras; 3) realizar conjecturas, identificando propriedades geométricas que definem as figuras; e 4) argumentar sobre as conjecturas realizadas.

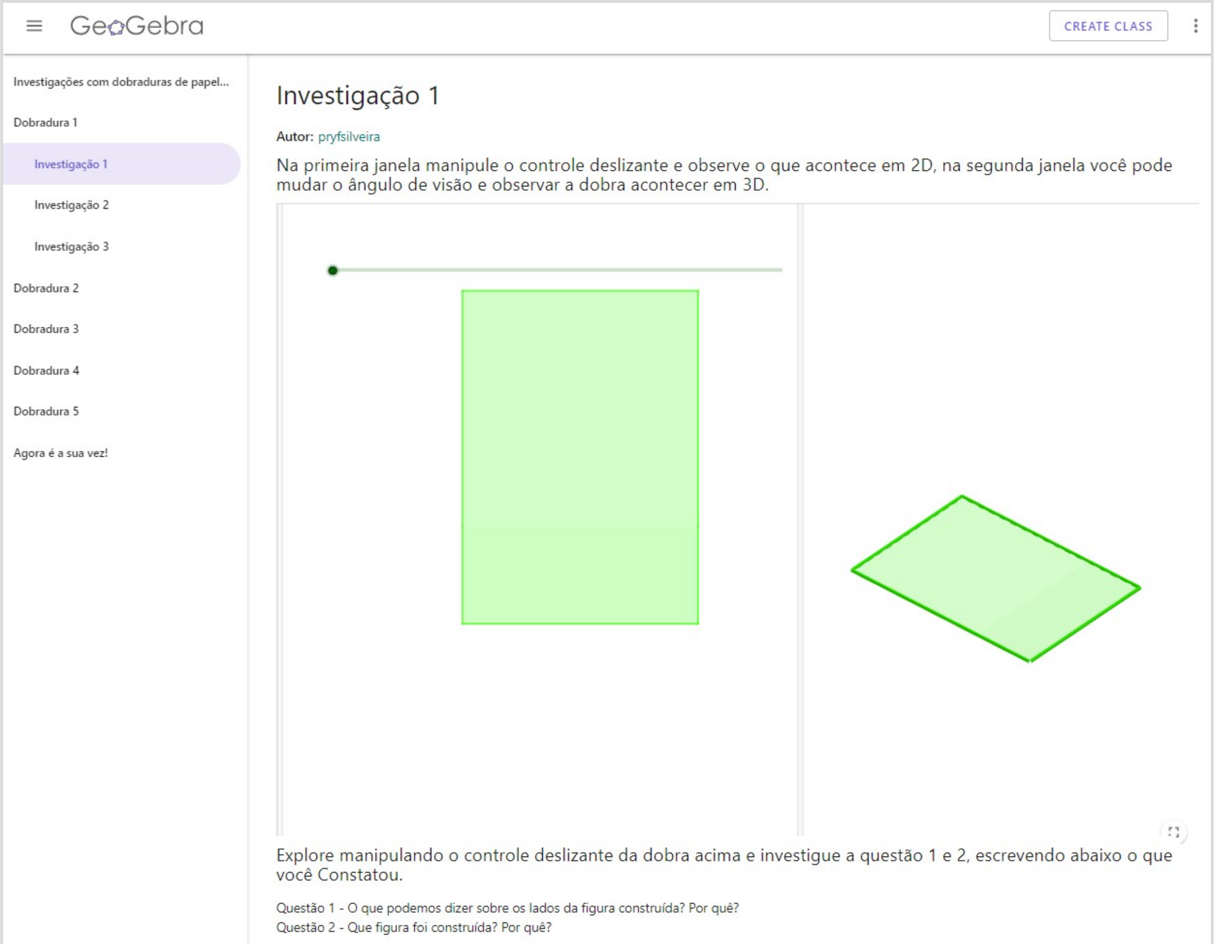
Figura 11 - Capa do livro digital – tela de apresentação com menu das atividades



Fonte: Silveira (2018)

A organização do livro sugere a ordem dos capítulos e atividades, com a investigação 1 da Dobradura 1 sendo a primeira atividade. Pode ser observada, na Figura 12, a dobradura que se forma e as primeiras questões a serem exploradas pelos alunos. A ordem das dobraduras foi pensada para que começassem com as dobras que consideramos mais simples e figuras geométricas que pensamos serem mais conhecidas pelos alunos. Assim, a primeira dobradura corresponde à figura quadrado, a segunda dobradura corresponde ao triângulo, a terceira dobradura ao paralelogramo, a quarta dobradura ao trapézio e a quinta e última dobradura corresponde à pipa.

Figura 12 - Investigação 1 da Dobradura 1



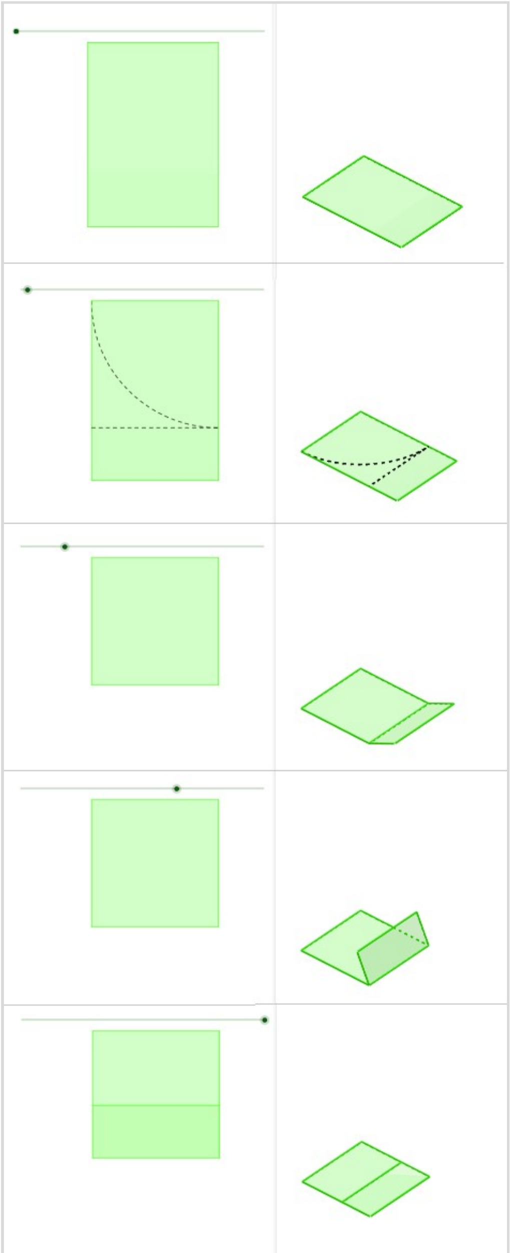
Fonte: Silveira (2018)

A orientação aos estudantes é: Explore, manipulando o controle deslizante da dobra acima, as questões 1 e 2, escrevendo abaixo o que você constatou. A Figura 12 apresenta as duas primeiras questões da Dobradura 1:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os lados da figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Que figura foi construída? Por quê?

A proposta da questão 1 era provocar nos estudantes as primeiras observações e elaborações de conjecturas sobre as propriedades dos lados do quadrado a partir da manipulação da dobradura virtual. A linguagem adotada pelos alunos em suas respostas não precisa apresentar rigor matemático, mas expressar uma ideia sobre os lados da figura que se forma a partir das dobras realizadas. Na questão 2, era esperado que identificassem o quadrado, ou pelo menos um retângulo. A intenção das perguntas era incentivar os alunos a explorarem as dobras virtuais e identificarem informações sobre os lados da figura, quais características observavam. A Figura 13 apresenta o dinamismo da Dobradura 1, nessa dobradura não há passos para realizar a dobra.

Figura 13 - Dinamismo da Dobradura 1



Fonte: Silveira (2018)

Na Investigação 2 e na Investigação 3 da Dobradura 1 é apresentada a mesma configuração de exploração, mudando apenas as questões, ou seja, nelas é possível a manipulação da Dobradura 1 para as novas questões a serem investigadas. Com isso, na Investigação 2 são apresentadas as seguintes questões:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Quanto medem os ângulos da figura? Por quê?

Na questão 1, da Investigação 2, o intuito era provocar os alunos a observarem relações sobre os ângulos da figura, buscando identificar se os mesmos tinham entendimento sobre ângulos retos e ângulos congruentes. Já na questão 2, o intuito era que eles argumentassem sobre o ângulo reto.

Na Investigação 3, são apresentadas as seguintes questões:

- Questão 1 - Para dobrarmos a folha de papel A4 e construirmos um quadrado basta dobrar em qualquer parte da folha? Por quê?
- Questão 2 - Quais são os critérios para construirmos a mesma figura? Como fazemos essa construção? Por quê?

Nas Questões 1 e 2, da Investigação 3, esperávamos que, a partir da manipulação e observação das dobraduras virtuais, os alunos argumentassem sobre a forma de dobrar o papel para obter um quadrado, dando indícios de compreensão sobre congruência de lados e utilização implícita de axiomas das dobraduras, mesmo que de forma informal.

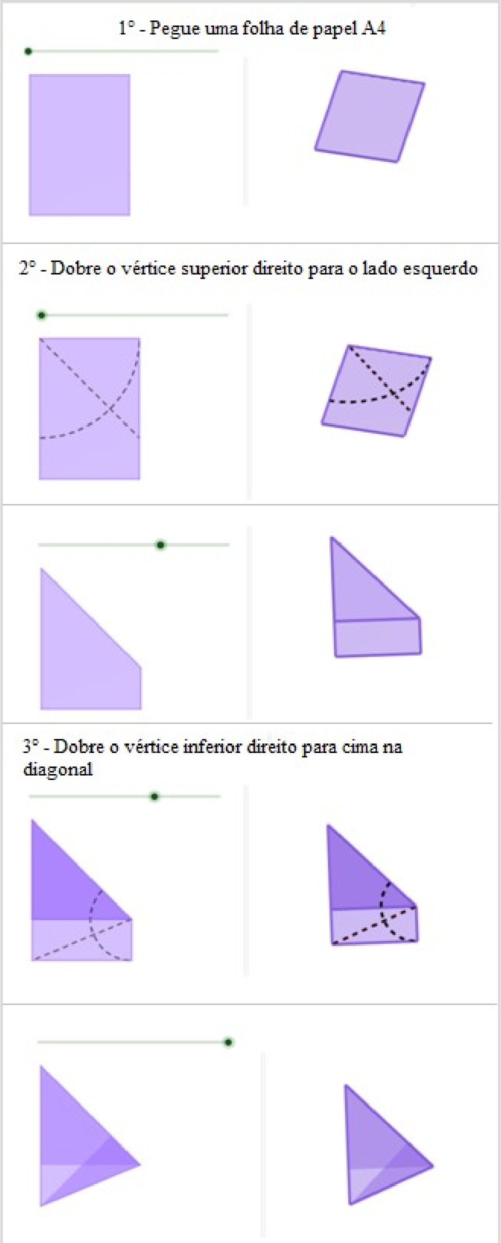
Em seguida, a Dobradura 2 inicia com o subcapítulo: Fazendo a Dobra. Como pode ser observado na Figura 14, são dados os passos da dobradura que se apresenta.

Figura 14 – Tela de apresentação da Dobradura 2

Fonte: Silveira (2018)

Na Figura 15 pode ser acompanhado o dinamismo da Dobradura 2.

Figura 15 - Dinamismo da Dobradura 2



Fonte: Silveira (2018)

A Investigação 1 da Dobradura 2 apresenta as questões:

- Questão 1 - Quais características você observa na figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Que figura foi construída? Por quê?

Nas questões da Investigação 1, esperávamos que os alunos identificassem que a figura construída possui três lados, determinando um triângulo. A Investigação 2 da Dobradura 2 apresenta a questão:

- Questão 1 - Qual tipo de triângulo foi construído, pensando em seus lados? Por quê?

Na Investigação 2, a ideia era que os alunos identificassem dois lados congruentes, correspondendo ao triângulo isósceles. A utilização de nomenclatura formal não era esperada, mas a observação de dois lados congruentes e um diferente, a partir da manipulação da dobradura virtual, era esperada.

A Investigação 3 da Dobradura 2 apresenta as questões:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os ângulos do triângulo construído? Tem algum ângulo congruente? Por quê?
- Questão 2 - Como classificamos esse triângulo quanto aos seus ângulos? Por quê?
- Questão 3 - Quais as medidas dos ângulos desse triângulo? Por quê?

Nas questões 1, 2 e 3, da Investigação 3, a ideia era provocar os alunos a observarem o comportamento dos ângulos da figura construída a partir da dobradura, mediante a manipulação e observação, ou a partir da utilização implícita dos axiomas das dobraduras.

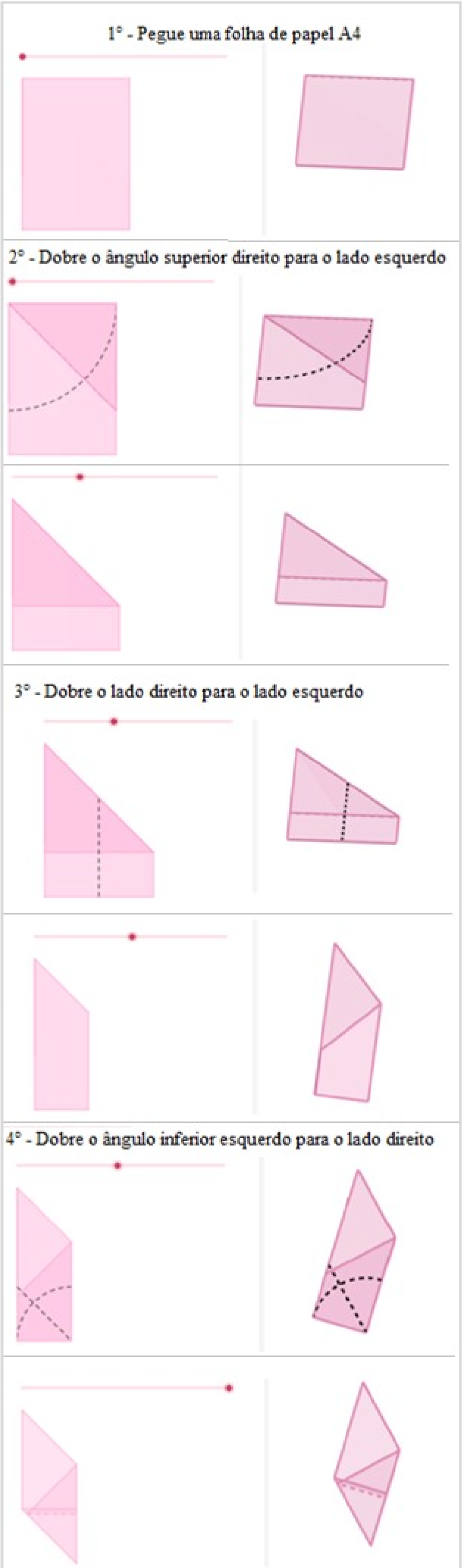
A Dobradura 3 também apresenta os passos da construção, conforme podem ser observados na Figura 16.

Figura 16 – Tela de apresentação da Dobradura 3

Fonte: Silveira (2018)

A Dobradura 3 forma um paralelogramo, e o dinamismo dessa dobra pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 - Dinamismo da Dobradura 3



Fonte: Silveira (2018)

A Dobradura 3 tem as seguintes questões de investigação:

Investigação 1:

- Questão 1 - Quais características podemos observar na figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Qual figura foi construída? Por quê?

Na Investigação 1, era esperado que os alunos identificassem características como a determinação de quatro lados e definissem o quadrilátero formado. A congruência e paralelismo dos lados opostos poderiam ser observados, levando-se em consideração as experiências prévias dos alunos com as dobraduras já realizadas.

Para a Investigação 2, foi proposta a questão apresentada a seguir, cujo objetivo era provocar os alunos a observarem propriedades específicas sobre os lados do paralelogramo formado.

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os lados dessa figura? Por quê?

Assim, na Investigação 2, era esperado que os alunos identificassem os lados opostos paralelos e congruentes.

A questão proposta na Investigação 3 foi a seguinte:

- Prove que a figura construída é um paralelogramo.

A partir dessa questão, esperávamos que os estudantes elaborassem argumentações para justificar as propriedades argumentadas, apoiados pela manipulação da dobradura virtual e pelos axiomas das dobraduras, de forma implícita.

Para a Investigação 4, foram elaboradas as questões:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Há ângulos congruentes? Por quê?
- Questão 2 - Quais as medidas dos ângulos da figura construída? Por quê?

Na Investigação 4, era esperado que os alunos identificassem os ângulos opostos congruentes e, se possível, as medidas desses ângulos.

A Dobradura 4 forma um trapézio, conforme pode ser observado na Figura 18. Como a dobradura anterior, essa apresenta os passos de construção e em seguida questões de investigação.

As questões elaboradas para Investigação 1 foram:

- Questão 1 - Quais características da figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Que figura foi construída? Por quê?

Na Investigação 1, era esperado que os alunos identificassem quatro lados, mas sem expectativas sobre paralelismo das bases e congruência dos lados laterais.

A Investigação 2 propõe as seguintes questões:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os lados da figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Como se classifica a figura construída de acordo com seus lados? Por quê?

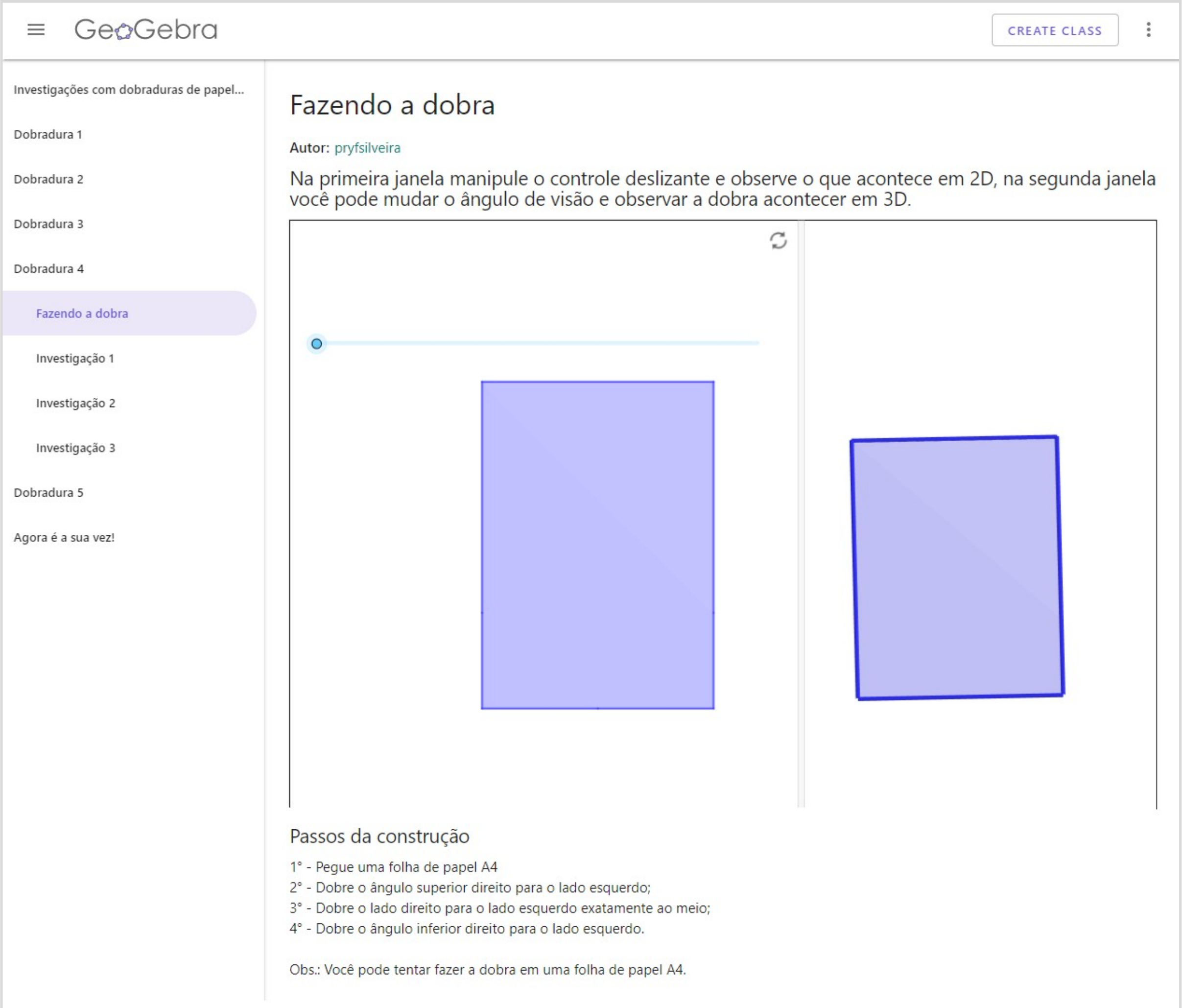
Na Investigação 2, a partir das questões que sugeriam a manipulação e observação específica sobre os lados da figura, já se esperava a conjectura e identificação de propriedades geométricas, conduzindo à definição do trapézio isósceles.

Para a Investigação 3, foram elaboradas as seguintes questões:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Que medidas têm esses ângulos? Por quê?

Na Investigação 3, era esperado que os alunos identificassem os ângulos das bases congruentes e argumentassem sobre a medida desses ângulos.

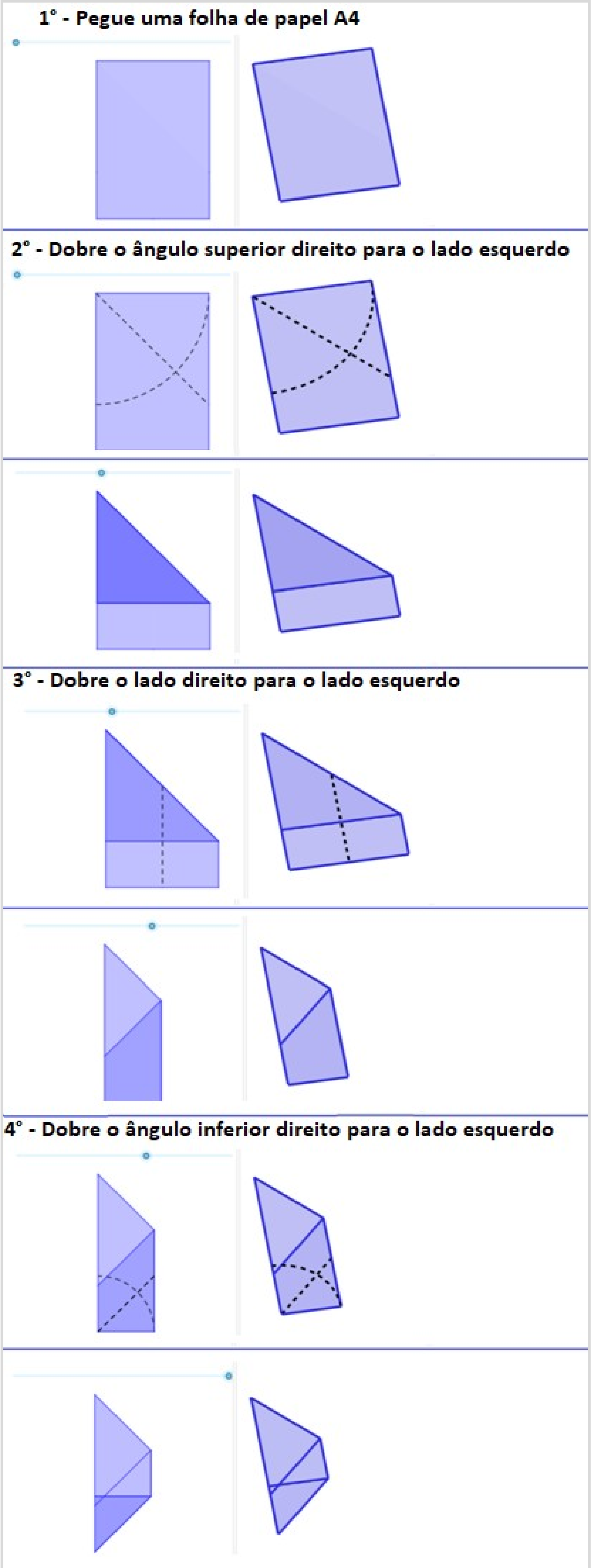
Figura 18 – Tela de apresentação da Dobradura 4



Fonte: Silveira (2018)

Na Figura 19 podem ser observados seus passos de construção.

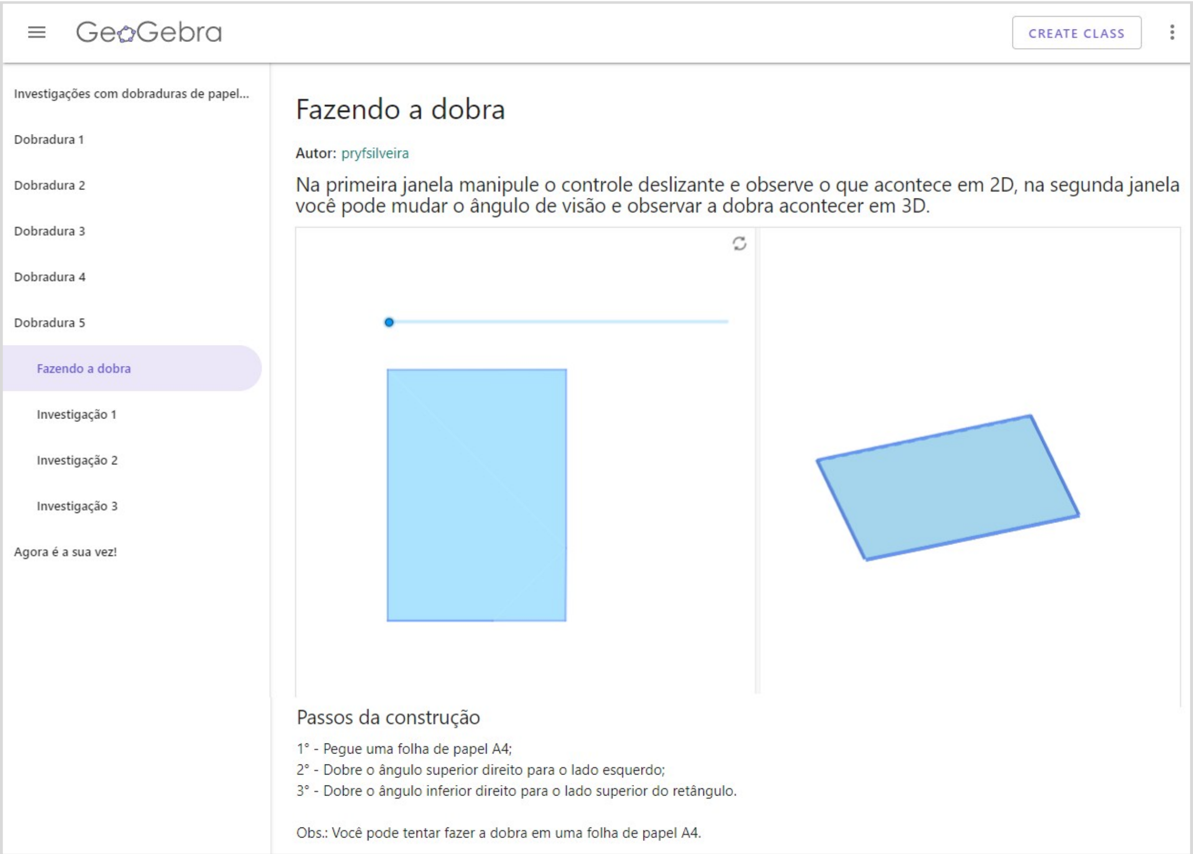
Figura 19 - Dinamismo da Dobradura 4



Fonte: Silveira (2018)

A última exploração de dobradura proposta é a Dobradura 5, que resulta em uma pipa, como pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 – Tela de apresentação da Dobradura 5



Fonte: Silveira (2018)

Na Figura 21, pode ser observado o dinamismo da dobra. A seguir, apresentamos as questões investigadoras da Dobradura 5.

A Investigação 1 propõe as seguintes questões:

- Questão 1 - Quais características podemos observar na figura? Por quê?
- Questão 2 - Que figura foi formada? Por quê?

Na Investigação 1, era esperado que os alunos identificassem os quatro lados da figura, possivelmente as congruências dos lados consecutivos e observassem que a forma da figura era de pipa.

Na Investigação 2, as questões propostas foram:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os lados da figura? Por quê?
- Questão 2 - Há algum lado congruente? Por quê?

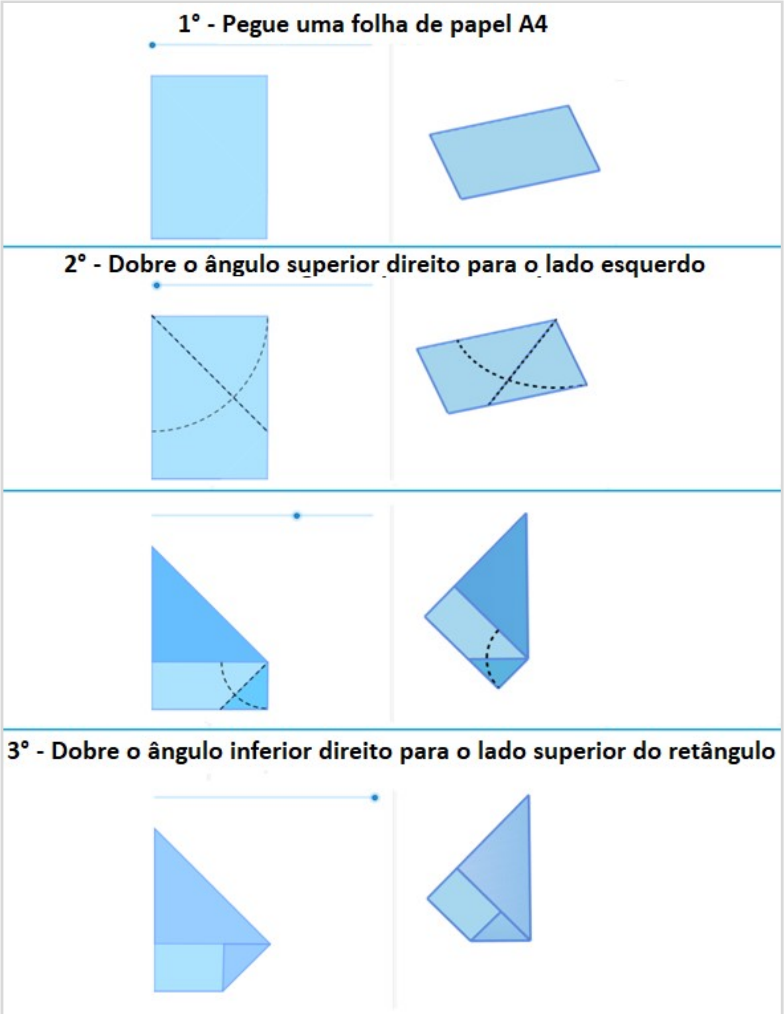
Na Investigação 2, as questões provocam os alunos a observarem as características e propriedades dos lados da figura. Assim, era esperada a identificação de lados consecutivos congruentes e a argumentação sobre as congruências.

As questões propostas pela Investigação 3 foram:

- Questão 1 - O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê?
- Questão 2 - Quanto medem esses ângulos? Por quê?

Na Investigação 3, a ideia era a manipulação, observação e identificação de características sobre as medidas dos ângulos da pipa, e a argumentação sobre as conjecturas levantadas.

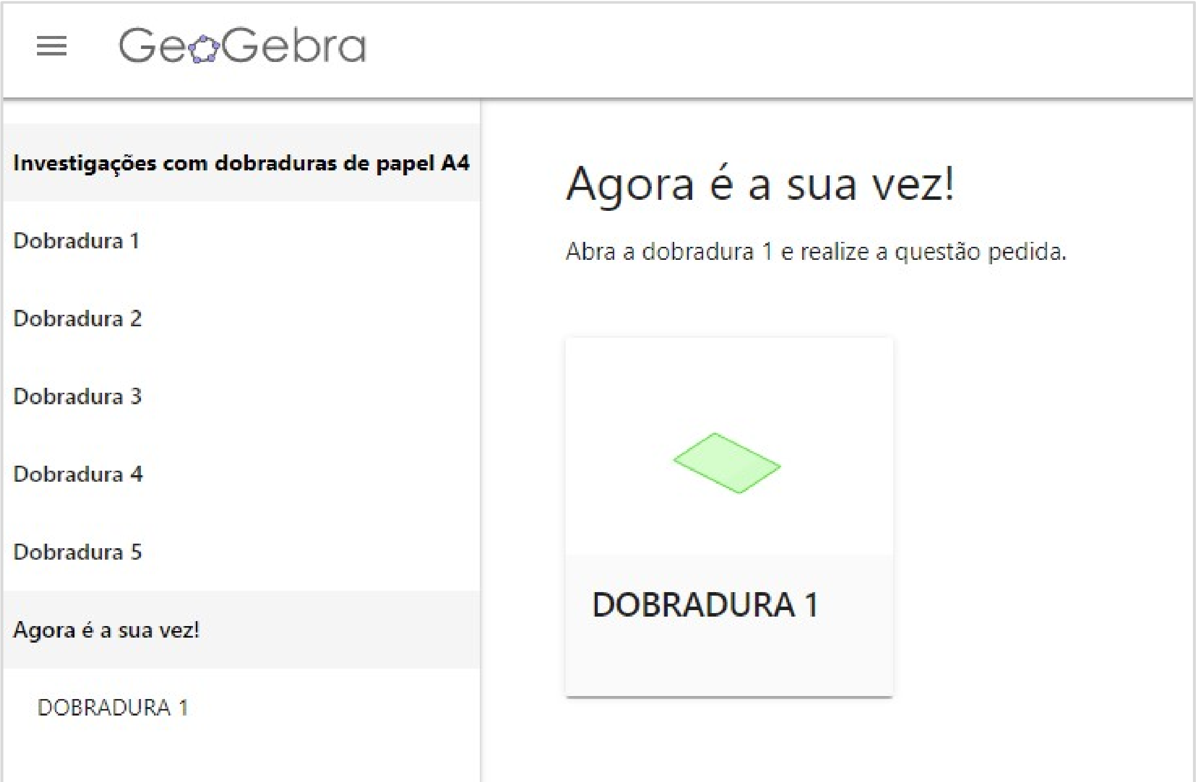
Figura 21 - Dinamismo da Dobradura 5



Fonte: Silveira (2018)

Depois das atividades investigativas com as cinco dobraduras, nas quais os objetivos principais eram manipulação, exploração, observação, elaboração de conjecturas, identificação de propriedades e argumentação sobre as mesmas, na atividade final é proposto ao aluno a construção da Dobradura 1 no GeoGebra, conforme mostra a Figura 22.

Figura 22 - Atividade de construção de dobradura virtual



Fonte: Silveira (2018)

As dobraduras e atividades desse livro virtual seguem uma organização definida pela autora desse trabalho. Espera-se observar o desenvolvimento dos alunos ao manipular as dobraduras no GeoGebra para investigar as questões propostas. Destaca-se novamente que, apesar das simulações de dobraduras serem realizadas na janela de visualização 3D do GeoGebra, o objetivo de nossa investigação não está no desenvolvimento de habilidades de visualização espacial, e sim na exploração, identificação e argumentação de propriedades da Geometria Plana.

O capítulo a seguir apresenta a descrição dos encontros da oficina realizada e a análise das atividades desenvolvidas.

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental, localizada na cidade de Charqueadas. Foi oferecida uma oficina sobre dobraduras de papel A4 em ambiente de geometria dinâmica aos alunos do nono ano dessa escola. Treze desses alunos inscreveram-se na oficina. Esses treze alunos serão nomeados nesse trabalho de Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4, Aluno 5, Aluno 6, Aluno 7, Aluno 8, Aluno 9, Aluno 10, Aluno 11, Aluno 12 e Aluno 13.

A oficina foi marcada para os dias 2, 9, 16, 23 e 30 de abril de 2019, todos na terça-feira em contra turno. Cada encontro da oficina teve duas horas de duração, começando às oito horas e trinta minutos e terminando às dez horas e trinta minutos.

Durante a apresentação da proposta da oficina para duas turmas de nono ano dessa escola, foi constatado que nenhum aluno conhecia o software GeoGebra. Durante conversa com a professora de Matemática, a diretora e a vice-diretora, descobrimos que o laboratório de informática não era utilizado há mais de dez anos. Durante esse tempo, foi solicitado um técnico para conferir os computadores que poderiam ser utilizados e, entre aproximadamente vinte máquinas, haviam sete funcionando.

Antes do primeiro encontro, procurei acessar os computadores para prepará-los para a oficina, ligar todos e acessar o GeoGebraBook das atividades. Aparentemente estava tudo certo, com as construções propostas sendo visualizadas nas janelas 2D e 3D do material online.

4.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Assim que os treze alunos participantes da oficina chegaram, foi solicitado que sentassem em duplas ou trios e começassem a primeira investigação proposta no GeoGebraBook. Nesse momento, percebeu-se que a internet se mostrou muito lenta e as figuras da janela de visualização 3D de todos os computadores desapareceu. A primeira hipótese para o ocorrido foi, de fato, de que a internet poderia ser muito lenta. Para contornar a situação, foram copiados manualmente os arquivos das dobraduras 1 e 2 em cada computador, para que os alunos acessassem a atividade e dessem início ao trabalho. Para nossa surpresa, ainda assim não era possível visualizar as construções realizadas na janela 3D.

Vasculhando o GeoGebra, não havia a opção de janela 3D no software, pois era uma versão antiga do mesmo que estava instalada nas máquinas do laboratório.

Após apresentar a proposta da oficina e sem possibilidades para dar continuidade às atividades programadas para esse encontro, foi solicitado aos alunos que acessassem um novo arquivo no GeoGebra e construíssem um quadrado. O intuito dessa atividade não programada era de que os alunos conhecessem o software, explorassem suas ferramentas e vivenciassem uma primeira experiência com geometria dinâmica, pensando na última atividade em que os alunos teriam de construir as simulações no GeoGebra. Porém, destacamos que o processo de construção de dobraduras não constituiu o foco central dessa pesquisa.

Todos os alunos, em grupos, construíram o quadrado da seguinte forma: colocaram quatro pontos no plano observando os eixos x e y, de forma que, ligando os pontos com segmentos, todos eles teriam a mesma medida. Dessa forma, todos os quadrados foram construídos em uma mesma posição, ou seja, com os lados paralelos aos eixos coordenados, provavelmente porque os estudantes estão habituados com as imagens prototípicas da figura quadrado, em que os lados sempre estão paralelos às margens das folhas de papel. A geometria dinâmica pode proporcionar a superação dessas restrições conceituais a particularidades figurais, se a situação for problematizada.

Os grupos foram questionados sobre o porquê da figura construída por eles ser um quadrado; eles acharam engraçado o fato de terem que explicar, revelando a não familiaridade com o processo de argumentação. Temos o exemplo de um aluno, que comentou que era óbvio porque parecia um quadrado. Percebemos, nesse momento, que os alunos apresentam comportamento do nível de Visualização (nível 1) do modelo de Van Hiele em relação ao quadrado, pois mostraram saber reproduzir e reconhecer o quadrado pela sua aparência física como um todo, mas não ainda pelas suas propriedades.

Os alunos responderam que era um quadrado porque tinham lados iguais e apenas o Aluno 1 e o Aluno 4 observaram que os ângulos de um quadrado devem medir noventa graus. Nesse momento, observamos que os alunos identificam algumas propriedades geométricas do quadrado, evidenciando também comportamento típico do nível 2, de Análise. Aos alunos que responderam apenas sobre os lados iguais, foi apresentada a construção no GeoGebra de um losango, para mostrar que os lados também eram iguais e questioná-los se a figura construída era um quadrado. De modo geral, os alunos responderam que não. Ao perguntar para o grupo porque não era, o Aluno 9 respondeu que era porque estava virado. Então foi construído pela pesquisadora um quadrado não paralelo aos eixos e questionado sobre essa construção, conforme mostra o extrato de diálogo a seguir:

Pesquisadora: Essa figura é um quadrado? Aluno 8: Não é um quadrado! Aluno 7: Ele está virado também! Aluno 1: Mas se virar ele vai parecer um quadrado. Aluno 2: As pontas parecem duas mais abertas e duas mais fechadas no primeiro e no segundo parecem iguais. Aluno 5: O segundo é um quadrado porque tem os ângulos retos. Pesquisadora: Então basta ter lados iguais para ser um quadrado? Todos: Não Aluno 5: Não, ele precisa ter os ângulos retos também. Pesquisadora: E se tiver só ângulos retos, basta para ser um quadrado? Aluno 2: Não, porque senão vai ser um retângulo.

As discussões apresentadas acima levaram os alunos a identificarem propriedades do quadrado, revelando um processo intermediário entre os níveis 1 e 2 do modelo de Van Hiele em relação ao quadrado, pois parecem compreender características do quadrado, porém apoiadas na observação da aparência da figura.

Depois de discutir sobre as propriedades do quadrado, a pesquisadora moveu os pontos da construção de todos os alunos e questionou se ainda era um quadrado. Os estudantes foram surpreendidos pela deformação da figura e responderam que não. O ambiente de geometria dinâmica possibilitou que os alunos refutassem uma ideia inicial de que suas construções correspondiam a quadrados e proporcionou uma possibilidade de avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico. Diante da situação e com a expectativa de instigar os estudantes na exploração e descoberta das propriedades do quadrado, foi solicitado que construíssem um quadrado de maneira que, quando movimentado, não perdesse suas propriedades. Para isso, realizou-se uma discussão sobre retas perpendiculares e sobre as propriedades do círculo, além de serem incentivados a explorar as ferramentas do GeoGebra.

Durante esse processo, a pesquisadora procurou somente fazer perguntas para que os alunos refletissem sobre a construção, mas dando a dica de começarem com dois pontos e utilizarem círculos e retas perpendiculares, já que era a primeira experiência de construção dinâmica desses estudantes. Como essa atividade não fazia parte do planejamento inicial e a pesquisa busca compreender como propriedades geométricas emergem a partir da manipulação e exploração nas dobraduras no GeoGebraBook, não iremos nos aprofundar na descrição e análise desse encontro. Para o leitor com interesse no desenvolvimento desse encontro, as análises encontram-se no Apêndice 7.3.

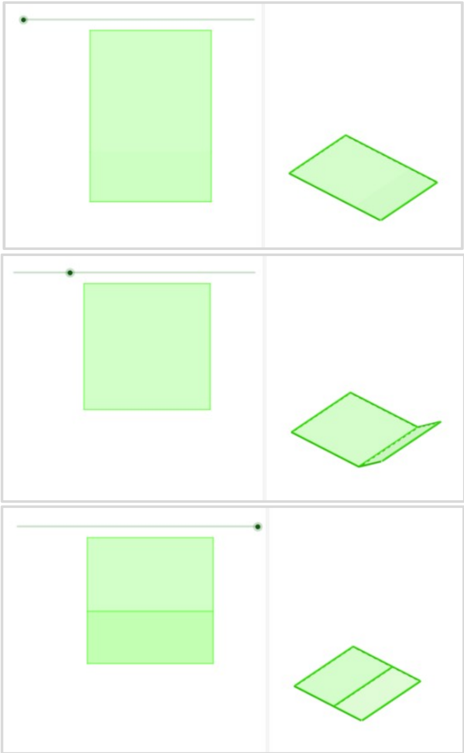
4.2 SEGUNDO ENCONTRO

Antes de iniciar esse encontro, fez-se uma nova tentativa de instalação de uma versão atualizada do GeoGebra nos computadores, mas não se obteve sucesso, pois os computadores estavam desatualizados. Nessas condições, era impossível prosseguir com a oficina. Porém, havia solicitado aos alunos que levassem seus notebooks e instalassem o GeoGebra em seus smartphones. Dois alunos levaram seus notebooks. Infelizmente nesse encontro compareceram somente três alunos dentre os que haviam comparecido no primeiro encontro, pois alguns estavam na escola em outra atividade e que, segundo o Aluno 1 e o Aluno 2, poderiam estar na oficina, mas não quiseram participar.

Prosseguiu-se o encontro com as atividades planejadas para o primeiro encontro e os dois alunos com os notebooks já haviam instalado o GeoGebra. Apesar de ter autorização para utilizar o wifi da escola, não foi possível acessar o GeoGebraBook por ser muito lenta a internet, o que impossibilitou o uso do GeoGebra nos smartphones (havia alunos com o aplicativo do GeoGebra instalado no smartphone para a oficina). Portanto, as atividades foram copiadas para as máquinas dos estudantes por meio de pen drive para dar prosseguimento à proposta. Infelizmente, o Aluno 3 não estava muito participativo e os três alunos alegaram não “ter um relacionamento bom” com a Matemática.

A primeira atividade propõe a dobradura de folha A4 de maneira que forme um quadrado, conforme a Figura 23.

Figura 23 – Dobradura 1



Fonte: Acervo da autora

Foi solicitado aos alunos que explorassem, manipulassem e investigassem a situação apresentada. Em bloco de notas ou em editor de texto, os alunos entregaram respostas às questões referentes a cada uma das dobraduras. Essas respostas são apresentadas nesse trabalho no decorrer do relato da forma exata como os alunos escreveram.

A primeira questão pergunta: "*O que podemos dizer sobre os lados da figura construída? Por quê?*". Para os três alunos foi imediato perceber que a figura tinha todos os lados iguais e já concluíram que era um quadrado, conforme as respostas apresentadas a seguir.

Que todos os lados são iguais, pois estão a mesma distancia do centro. (Aluno 1, Aluno 2) Todos os lados são iguais, pois todos tem o ângulo aprox. de 90 graus. (Aluno 3)

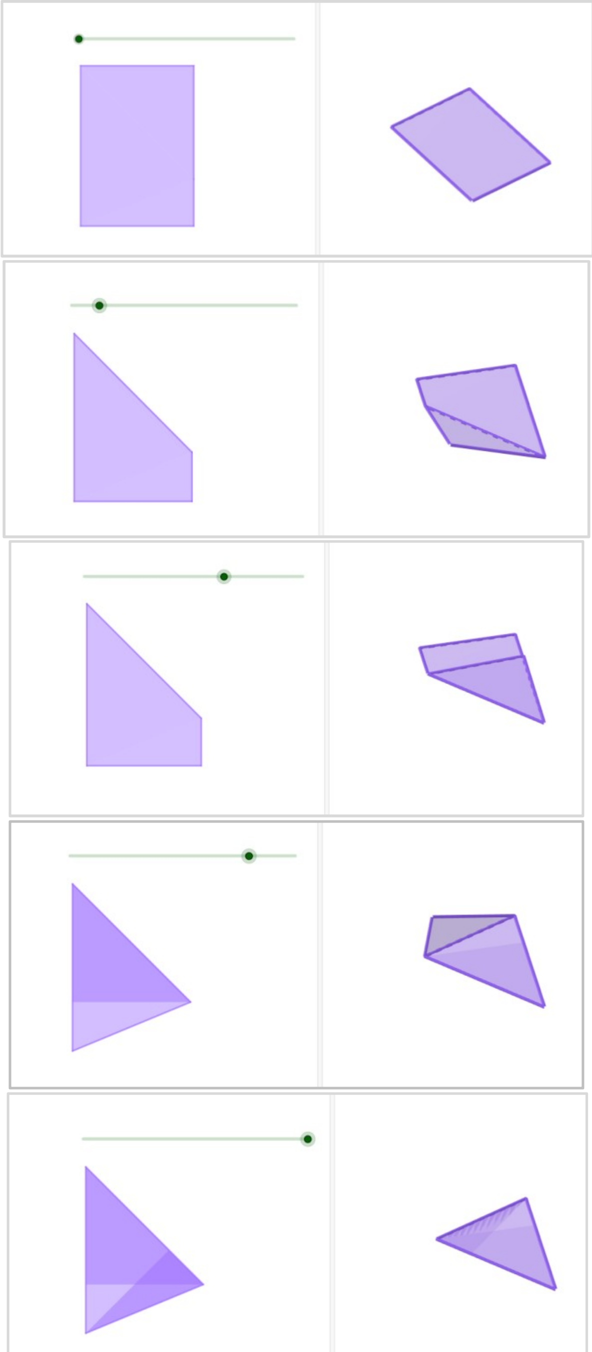
Dando continuidade à atividade, passaram à pergunta: "*Que figura foi construída? Por quê?*", na qual já haviam deduzido na primeira observação da dobradura. Seguem as respostas desses alunos.

Um quadrado, pois as medidas usadas para fazer a dobra resultaram em ângulos de 90 graus. (Aluno 1, Aluno 2) Um quadrado, porque as medidas eram iguais. (Aluno 3)

Nessas duas questões, os alunos apresentaram dificuldades para justificar suas respostas. Na primeira questão, foi sugerido aos alunos que apenas falassem sobre o que os levou à resposta. Para a segunda questão, foram relembrados do primeiro encontro, no qual foi questionado sobre as características e propriedades que uma figura precisava ter para ser um quadrado. Nessa primeira dobradura, podemos constatar que o Aluno 1, Aluno 2 e o Aluno 3 apresentam um processo intermediário entre os níveis 1 e 2 do modelo de Van Hiele, pois reconhecem as propriedades da figura, mas ainda se apoiam na observação da sua aparência física.

Então seguiram para a dobradura 2, que simula a dobra de um papel A4 formando um triângulo isósceles, conforme ilustra a sequência de imagens da Figura 24.

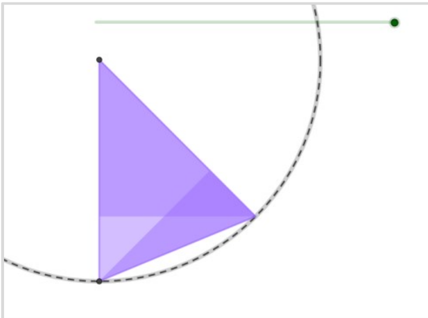
Figura 24 – Ilustração da Dobradura 2 (A)



Fonte: Acervo da autora

Depois de observarem e manipularem a dobradura, foi questionado: “*Quais características você observa na figura construída? Por quê?*”. Durante a exploração no GeoGebra, o Aluno 2 estava sugerindo um círculo, que não está destacado no GeoGebraBook, com centro em um dos vértices do triângulo e que passasse pelos outros dois vértices da base, conforme é ilustrado na Figura 25. Percebe-se, nessa situação, a tentativa de uso dos recursos da geometria dinâmica para verificar uma conjectura estabelecida pelo Aluno 2: a de que o triângulo possui dois lados congruentes.

Figura 25 - Triângulo



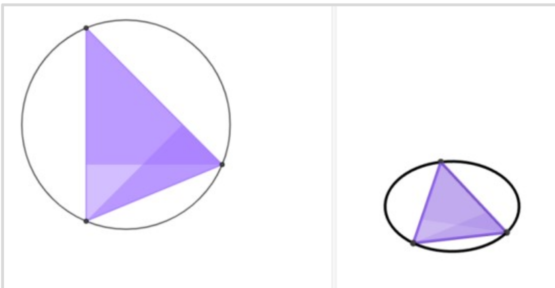
Fonte: Acervo da autora

A partir dessa observação, seguiu a discussão:

Aluno 2: Os vértices não estão a mesma distância do centro como um circulo. Aluno 1: Que círculo? Não tem círculo aí. Aluno 3: É não tem.

Entretanto, o Aluno 2 não conseguiu construir esse círculo passando pelos dois vértices do triângulo, constatando de forma equivocada que a construção desse círculo não é possível. Mas o Aluno 2 seguiu tentando identificar um círculo com centro equidistante aos vértices da base do triângulo, conforme a Figura 26.

Figura 26 - Círculo circunscrito ao triângulo



Fonte: Acervo da autora

A seguinte discussão sucedeu a exploração:

Aluno 2: Mas tem um círculo que passa pelos três pontos Aluno 1: Que círculo? Aluno 2: Ali passando pelas três pontas do triângulo, tem um centro no triângulo. Aluno 1: Tá o triângulo tem um centro, mas em que isso vai nos ajudar?

Durante a discussão, eles concordaram que havia um centro, mas não seguiram a discussão e apresentaram as seguintes respostas:

Que ela tem 3 ângulos, é necessário fazer mais dobras que no quadrado. (Aluno 1, Aluno 2) Ela tem três pontas , ela é roxa e tem três dobras. (Aluno 3)

O uso do GeoGebra permitiu que os alunos elaborassem uma conjectura a respeito dos lados do triângulo, mas não conseguiram avançar na construção. Nessa segunda questão, os estudantes já compreenderam o que era esperado na resposta, ou seja, eles se desprenderam de tentar responder o que achavam que deveriam e começaram a responder o que eles realmente pensavam sobre o que estavam observando. Essa mudança de respostas é importante para entendermos a aprendizagem que eles constroem e como pensam a respeito.

Com isso, seguiram para a pergunta "*Que figura foi construída? Por quê?*", obtendo as seguintes respostas:

Foi construido um triangulo isóceles porque tem apenas dois lados iguais. (Aluno 1, Aluno 2) Foi um triangulo, pois tem três ângulos. (Aluno 3)

Nessas respostas, o Aluno 1 e o Aluno 2 haviam respondido que foi construído um triângulo escaleno, apesar de não ter sido solicitado na questão a classificação do triângulo, mas quando eles partiram para a questão "*Qual tipo de triângulo foi construído, pensando em seus lados? Por quê?*", responderam:

Escaleno, apenas dois lados iguais. (Aluno 1, Aluno 2) Um escaleno: dois lados iguais. (Aluno 3)

Então, depois de responderem, expliquei os tipos de triângulos e o Aluno 1 e o Aluno 2 voltaram na questão anterior e alteraram a resposta para triângulo isósceles. Com isso, pode ser observado apenas um erro de nomenclatura, pois os alunos mostraram compreender o conceito. Nessas questões, ainda foi observada certa dificuldade em justificar as respostas, evidenciando que o desenvolvimento do pensamento geométrico ainda se encontra em uma fase inicial.

Em seguida, os alunos manipularam e observaram a dobradura para responder à questão: "*O que podemos dizer sobre os ângulos do triângulo construído? Tem algum ângulo congruente? Por quê?*", e responderam que:

> Visualmente falando apenas dois ângulos são iguais.<3 (Aluno 1, Aluno 2)
> Foi construído um triangulo isósceles de três dobraduras, com 2 ângulos congruentes concluí isto visualmente (no olhomêtro). (Aluno 3)

Depois seguiram para a pergunta "*Como classificamos esse triângulo quanto aos seus ângulos? Por quê?*" e declaram que não sabiam a classificação do triângulo em relação aos ângulos, sendo que já haviam estudado esse conteúdo.

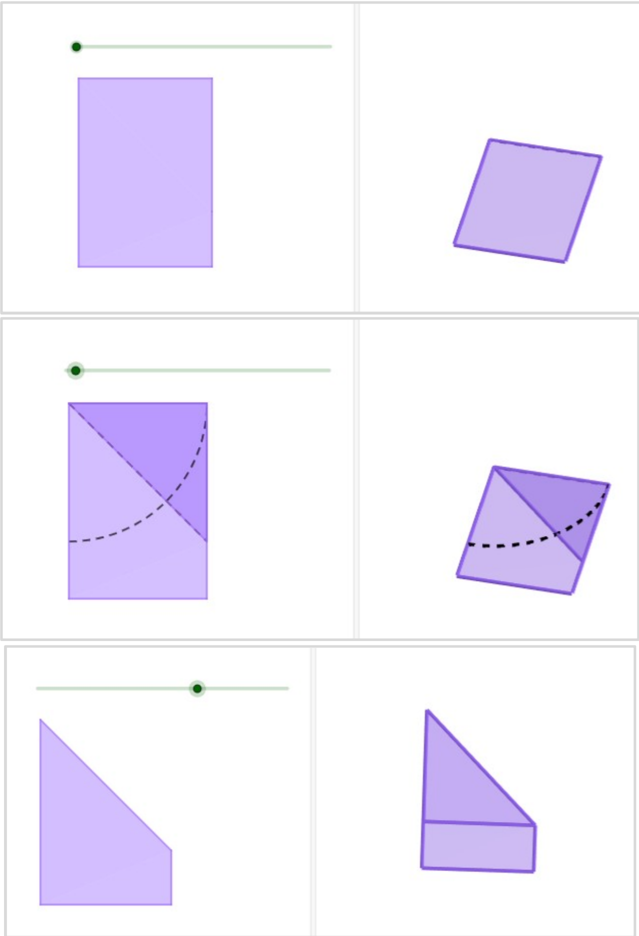
> A gente não sabe classificar mas é um triangulo isóceles (Aluno 1, Aluno 2)
> N sei classificar mas é um sinônimo de triangulo isósceles (Aluno 3)

As respostas dos alunos revelam indícios de comportamento típico do nível de Visualização (Nível 1) da teoria de Van Hiele, pois identificam características das figuras geométricas, porém, percebem pela sua aparência física, como podemos identificar nas expressões "*visualmente falando*" ou "*concluí isto visualmente (no olhometro)*", sem se apoiar nas propriedades que as definem. A geometria dinâmica proporciona um espaço para exploração de figuras, para que seja possível a elaboração de conjecturas sobre as mesmas. Dando continuidade às questões, foi perguntado "*Quais as medidas dos ângulos desse triângulo? Por quê?*", no qual os alunos responderam que:

> Para o primeiro angulo dividimos 90 por 2 por causa da dobradura que foi feita; para o segundo ângulo subtraimos 45 de 180 que resultou em 135 graus, que foram divididos ao meio resultando em 67,5, no terceiro os triangulos são iguais. (Aluno 1, Aluno 2)
> Se divide por dois q da 45, pq dobrou la, dps 180 menos 45 e ficou 135 (Aluno 3)

Analisando as respostas, verificamos que os alunos sabem que a folha de papel A4 tem o formato de um retângulo com ângulo de 90° em cada vértice. Ao dobrar o vértice superior direito para o lado esquerdo, eles observaram que o ângulo de 90° do vértice superior esquerdo é dobrado em sua bissetriz, que divide o ângulo ao meio, portanto concluíram que o ângulo formado vai medir 45°, conforme pode ser observado na sequência de imagens da Figura 27. De forma intuitiva, os alunos utilizaram o Axioma 3 das dobraduras em seus argumentos, pois os dois lados da folha de papel A4 (superior e esquerdo) são concorrentes e coincidem ao realizar a dobra, determinando a bissetriz do ângulo formado por esses lados. A manipulação dinâmica permite que os alunos explorem e observem a bissetriz do ângulo sendo construída pela dobra realizada, o que conduz à argumentação usada por eles "*dividimos 90 por 2 por causa da dobradura que foi feita*" e "*Se divide por dois q da 45, pq dobrou lá*".

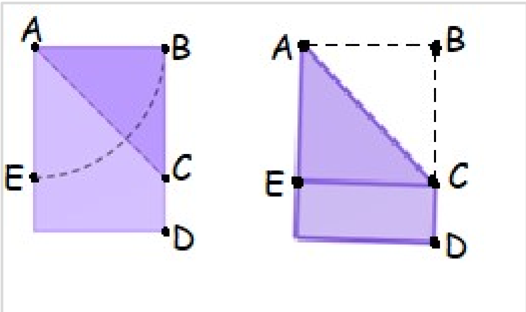
Figura 27 - Ilustração da Dobradura 2 (B)



Fonte: Acervo da autora

Nessa primeira dobra, os alunos visualizaram o quadrado (ABCE) da dobra anterior sendo dobrado ao meio conforme a Figura 28.

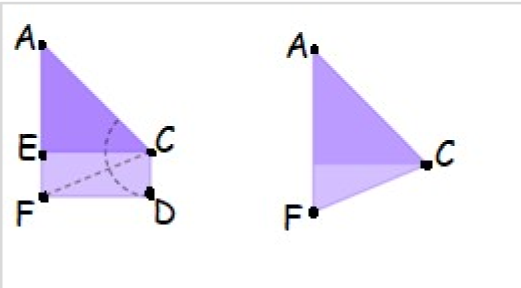
Figura 28 - Dobradura 2 e o quadrado



Fonte: Acervo da autora

Com isso, os alunos observaram que o papel está sendo dobrado na bissetriz (Axioma 3) do quadrado ABCE, advindo da experiência com a Dobradura 1, identificando o ângulo $B\hat{C}A = 45°$. Então, observando o segmento $\overline{BD}$, os alunos identificaram o ângulo raso $B\hat{C}D$ e perceberam que é subtraído 45° desse ângulo, concluindo que, ao fazer a primeira dobra do triângulo, se obtém o ângulo $A\hat{C}D = 135°$. Na segunda dobra (Figura 29), ao dobrar-se o segmento $\overline{DC}$ sobre o segmento $\overline{AC}$, novamente os alunos identificam que o segmento $\overline{FC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}D$ (Axioma 3), obtendo o ângulo $A\hat{C}F = 67{,}5°$. O ângulo $C\hat{F}A$ não foi calculado por eles, pois deduziram (indícios de pensamento geométrico dedutivo) ser congruente ao ângulo $A\hat{C}F = 67{,}5°$ pela resposta anterior em que definiram a dobra construída como um triângulo isósceles. No processo de cálculo de ângulos dessa dobradura, os alunos utilizam, para argumentar sobre os ângulos, o Axioma 3 das dobraduras, que afirma que duas retas concorrentes, ao coincidirem em uma dobra, determinam a bissetriz do ângulo formado por essas duas retas. Além disso, é possível identificar na argumentação dos alunos, um passo além no processo de dedução e argumentação, pois não precisaram realizar cálculos para o terceiro ângulo, apoiando-se no fato do triângulo ser isósceles e, portanto, com dois ângulos congruentes.

Figura 29 - Ilustração da Dobradura 2 (C)



Fonte: Acervo da autora

Aqui podemos perceber o início de uma análise dos conceitos geométricos (e não apenas observação da aparência das figuras), o que revela um avanço para o nível 2 do modelo em relação ao pensamento geométrico. A partir da manipulação da dobradura dinâmica e da observação, os alunos começam a discernir as características das figuras, nesse caso, a classificação do triângulo por meio de seus ângulos.

4.3 TERCEIRO ENCONTRO

No terceiro encontro, compareceram os alunos 1, 2, 4 e 5, portanto decidiu-se realizar as mesmas atividades do encontro anterior, já que havia duas questões sobre o quadrado que não foram realizadas. Nessa aula, apenas um aluno levou notebook, com isso os quatro alunos trabalharam juntos, com exceção de algumas perguntas, nas quais os alunos 1 e 2 lembravam do encontro anterior.

Começamos pela Dobradura 1, que forma um quadrado. Depois de manipularem e observarem a dobradura virtual, os alunos foram questionados: "*O que podemos dizer sobre os lados da figura construída? Por quê?*". Os alunos 4 e 5 responderam:

São iguais, por causa da dobradura (Aluno 4, Aluno 5)

Em seguida, foram questionados: "*Que figura foi construída? Por quê?*". Imediatamente, os alunos 4 e 5 responderam que era um quadrado, mas apresentaram dificuldade em justificar. Portanto, podemos identificar que o Aluno 4 e o Aluno 5 apresentam comportamento do nível de Visualização (nível 1) segundo o modelo de Van Hiele, pois identificam ser um quadrado pela sua aparência física e não pelas suas propriedades.

Assim como no encontro anterior, foram realizados questionamentos sobre as características e propriedades do quadrado. Discussões entre os estudantes e a pesquisadora ocorreram, como podemos observar nos diálogos a seguir:

Aluno 5: é um quadrado porque tem quatro lados Aluno 4: Nem toda figura de quatro lados é um quadrado, tem o retângulo Pesquisadora: Observem o retângulo, porque é um retângulo? Todos: Porque tem quatro lados e é mais comprido Pesquisadora: Que outras características tem esse retângulo? ... Pesquisadora: Se algum desses lados for torto ainda seria um retângulo? Todos: Não Pesquisadora: O que precisa para ser um retângulo? Todos: Reto Pesquisadora: Então seus ângulos têm que ser retos, tem algum lado congruente: Todos: Sim, esses dois são iguais e os outros dois também Pesquisadora: O quadrado é um retângulo? Todos: Não Pesquisadora: Quais as propriedades do retângulo? Aluno 1: Tem que ter um ângulo reto Aluno 2: Lados iguais dois a dois Pesquisadora: E o quadrado possui essas propriedades? Aluno 4: Não sei Aluno 5: Talvez Aluno 2: Não Aluno 1: Acho que sim Aluno 2: Mas o quadrado tem todos lados iguais e não dois a dois iguais

Pesquisadora: Ele tem os lados dois a dois iguais por todos os lados serem iguais

Com isso, os alunos concluíram sua resposta, que já traz indícios de transição de nível, pois agora propriedades são utilizadas para argumentar.

Quadrado, porque tem ângulos de 90 graus e os lados são iguais (Aluno 4, Aluno 5)

Depois seguiram para a próxima pergunta "*O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê?*". Foi surpreendente a resposta:

Que a soma dos angulos do quadrado = 360 graus, e tem 90 graus em cada ângulo, porque eu pensei que as voltas do quadrado dariam 360 graus (Aluno 4, Aluno 5, Coleta de dados)

Além do Aluno 4 e do Aluno 5 identificarem que cada ângulo do quadrado mede 90°, também perceberam que a soma dos ângulos internos do quadrado resulta em 360°. Diante da manipulação da dobradura no GeoGebra, o Aluno 4 observou sobre a soma dos ângulos:

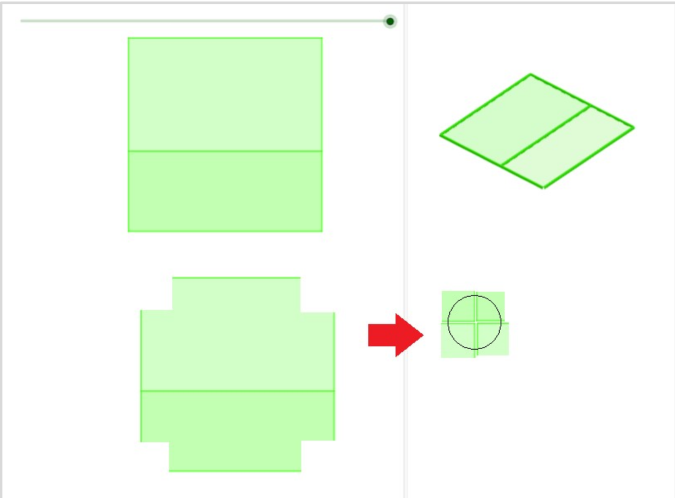
Aluno 4: O ângulo ali é 360° Aluno 5: Não é, é 90° Pesquisadora: Porque tu pensou isso? Aluno 4: Porque ele faz todo o círculo.

A pesquisadora questionou o aluno, para entender seu pensamento. Com gestos e demonstrações na dobradura do GeoGebra, o Aluno 4 explicou:

Pesquisadora: Me explica isso Aluno 4: Ali se eu pegar e juntar todas as pontas do quadrado eles fazem a volta do círculo

O Aluno 4 visualizou os quatro vértices do quadrado encontrando-se em um só vértice, como apresenta a Figura 30. Dobrando os vértices do quadrado para um mesmo ponto (centro do quadrado), é possível observar que eles formam o círculo completo. Assim, de forma empírica, é possível constatar que a soma dos ângulos internos do quadrado é 360°. A partir da manipulação e observação de uma dobradura virtual, sem uma orientação para chegar na conclusão de somar os ângulos internos, o Aluno 4 percorreu seu próprio caminho de investigação, concluindo uma propriedade da figura. Há indícios dos níveis 2 e 3, Análise e Dedução Informal, pois o Aluno 4 identifica propriedades e estabelece alguma inter-relação entre propriedades do quadrado.

Figura 30 - A soma dos ângulos do quadrado é 360°



Fonte: Acervo da autora

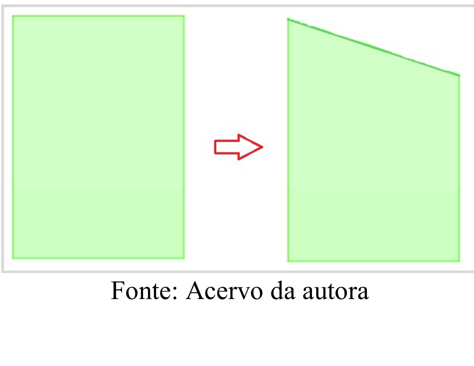
Depois seguiram para a questão "*Quanto valem os ângulos da figura? Por quê?*". Sem justificativa, responderam:

90 graus (Aluno 4, Aluno 5)

Em seguida, foi solicitado que os alunos 1 e 2 discutissem juntos a questão "*Para dobrarmos a folha de papel A4 e construirmos um quadrado basta dobrar em qualquer parte da folha? Por quê?*", pois essa questão não havia sido trabalhada no encontro anterior. Os alunos responderam mostrando com uma folha de papel que, se dobrarmos um vértice do papel pela diagonal, não seria mais um retângulo (veja na Figura 31):

Não, porque se dobrar uma pontinha vai deixar de ser um retangulo e portanto vai deixar de ser um quadrado (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Figura 31 - Ilustração da explicação dos alunos (A)



Fonte: Acervo da autora

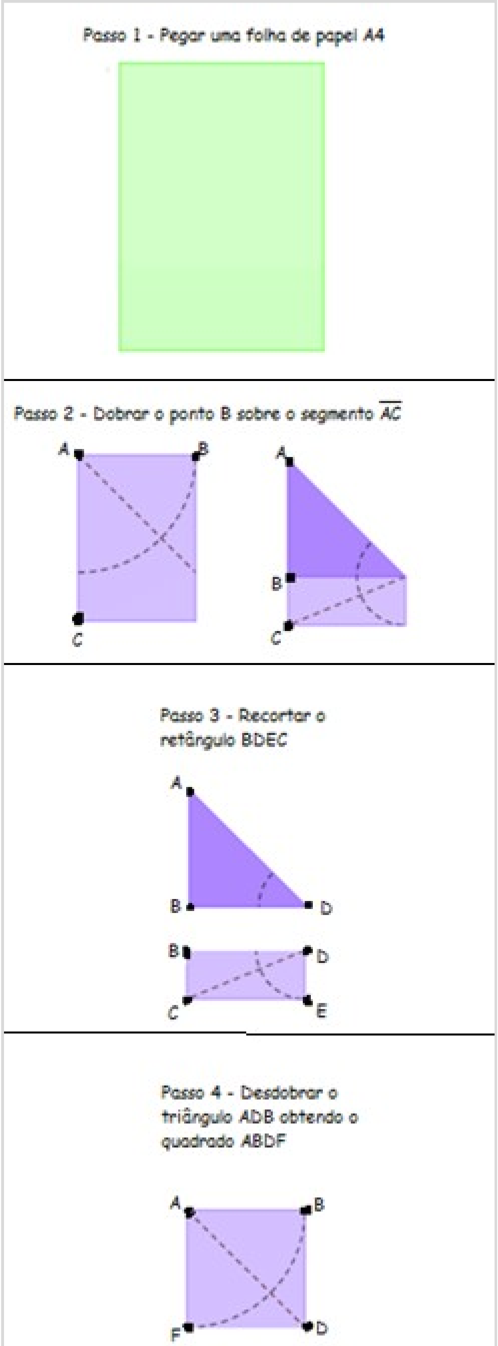
Nessa resposta, podemos identificar conhecimentos implícitos dos alunos, quando afirmam que, se a figura não é um retângulo, então não pode ser um quadrado. Esse fato evidencia um avanço do pensamento geométrico desses alunos, pois em um primeiro momento, os alunos identificaram o quadrado e o retângulo como figuras distintas, e agora evidenciam entender um quadrado como um retângulo por possuir as propriedades do retângulo, características do nível 3, Dedução Informal, na qual os alunos estabelecem inter-relações de propriedades entre figuras e são capazes de compreender inclusão de classes. O Axioma 4 das dobraduras é utilizado, pois afirma que, dados um ponto e uma reta, existe uma única dobra que é perpendicular à essa reta e que passa por esse ponto. Isso porque queremos dobrar, nesse caso, a ponta superior direita do papel A4 sobre o lado direito, de forma que passe em um ponto específico do lado esquerdo, porém existe uma única maneira de realizar essa dobra para que ela seja perpendicular aos lados direito e esquerdo.

Dando continuidade às atividades, foi questionado "*Quais são os critérios para construirmos a mesma figura? Como fazemos essa construção? Por quê?*". Os alunos explicaram:

> pegando uma folha de oficio e dobrando uma das pontas para dentro alinhando com o papel e cortando o que sobrar temos um quadrado de quatro lados iguais, para ter certeza de que todos os lados estão de fato iguais podemos dobrar todas as pontas pra dentro que elas irão encaixar. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Analisando suas respostas, verificamos que os alunos pegariam um papel A4 e dobrariam o segmento $\overline{AB}$ sobre o segmento $\overline{AC}$, coincidindo os segmentos concorrentes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ (Axioma 3), formando duas figuras: o triângulo ABDe o retângulo $BDEC$. Os alunos explicaram que cortariam o retângulo $BDEC$, quando afirmam "*cortando o que sobrar*". Restando o triângulo ABD, desdobrariam a folha obtendo o quadrado $ABDF$, conforme a Figura 32.

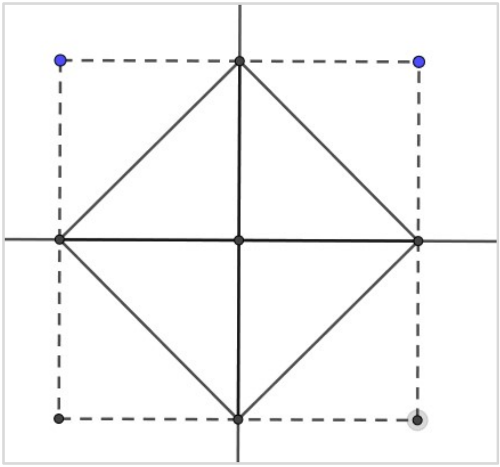
Figura 32 - Ilustração da explicação dos alunos (B)



Fonte: Acervo da autora

Para justificar, os alunos disseram que bastava dobrar todas as pontas para o centro do quadrado e o encaixe das mesmas bastava para ser um quadrado. Um início de raciocínio argumentativo está implícito aqui, pois os alunos apresentam deduções e provas informais, que caracterizam o nível 3 do modelo de Van Hiele. Além disso, tal observação evidencia a utilização de propriedades, mesmo que de forma implícita, pelos alunos. O fato de, ao dobrar os vértices do quadrado para o seu centro, encaixar perfeitamente, deve-se ao fato de todos os lados serem congruentes, conforme é ilustrado na Figura 33. O centro do quadrado é a intersecção das mediatrizes de seus lados, dividindo o quadrado em quatro quadrados congruentes.

Figura 33 - Ilustração da explicação dos alunos (C)



Fonte: Acervo da autora

Dando continuidade ao trabalho, seguiu-se para a Dobradura 2, com momentos de manipulação, observação e exploração. Foi questionado aos alunos: "*Quais características você observa na figura construída? Por quê?*". Nesse momento, foi possível perceber que os alunos 4 e 5 estavam passando pelo mesmo processo dos demais colegas no encontro anterior, de se desprenderem da ideia de que precisam responder o que a pesquisadora acharia certo e partirem para a ideia de responderem o que eles realmente pensam. Assim, responderam:

É roxo, era um retangulo, tem três lados, é um triangulo, (Aluno 4, Aluno 5)

Em seguida, responderam à pergunta "*Que figura foi construída? Por quê?*".

um triângulo, pois tem três lados (Aluno 4, Aluno 5)

A pergunta seguinte foi: "*Qual tipo de triângulo foi construído, pensando em seus lados? Por quê?*", na qual responderam:

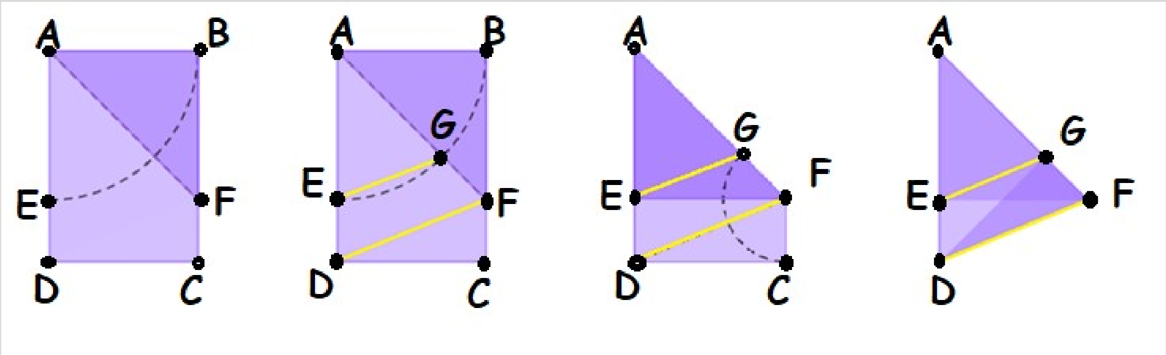
Isósceles, pq tem dois lados iguais (Aluno 4, Aluno 5)

Até aqui, as respostas indicam comportamentos típicos dos níveis 1 e início do 2 do modelo de Van Hiele, no qual os alunos respondem pela aparência física da figura, mas também são capazes de identificar algumas propriedades básicas. Então os alunos observaram, a partir da dobra realizada, que a diagonal do quadrado tem a mesma medida do lado maior do papel A4. A manipulação dinâmica no GeoGebra permitiu que os alunos identificassem essa característica, com utilização implícita do Axioma 2, que garante a congruência dos lados pela propriedade da mediatriz. O Aluno 2 explica em palavras e gestos indicando seu raciocínio na dobradura no GeoGebra, como mostra o extrato de diálogo a seguir:

Pesquisadora: Como vocês sabem que os dois lados do triângulo são iguais? Aluno 2: Porque um lado do triângulo é a diagonal do quadrado que é igual a medida do lado maior do papel A4. Pesquisadora: Mas como tu sabe que são iguais? Aluno 1: É não tem como saber. Aluno 2: É sim, ali tem o pontilhado do círculo que mostra que uma parte são iguais, e as partesinhas que sobra em cada uma são iguais porque quando dobra aquele lado fica em cima da diagonal.

Nesse diálogo os alunos discutem e trocam ideias sobre as estruturas observadas. O Aluno 2 observou, a partir da dobradura no GeoGebra, que o triângulo é isósceles, chegou a argumentos informais de demonstração, apresentando comportamentos do nível 3 do modelo de Van Hiele. Analisando a argumentação do Aluno 2, podemos dizer que, inicialmente, são demarcados pontilhados que definem a diagonal do quadrado $ABFE$ (segmento $\overline{AF}$) e o movimento de dobrar o lado menor da folha de papel A4 para o lado maior da folha de papel A4 (dobrar o segmento $\overline{AB}$ sobre o segmento $\overline{AE}$), como ilustra a Figura 34. O segmento $\overline{AF}$ é mediatriz do segmento $\overline{EB}$ de acordo com o Axioma 2, o que garante a congruência, e também o segmento $\overline{AF}$ é bissetriz do ângulo $E\hat{A}B$ conforme o Axioma 3. Na última dobra realizada, podemos observar o retângulo $EFCD$ que é dividido pela sua diagonal. Assim, ao fazer coincidir o ponto C sobre o ponto G (Axioma 2), o segmento $\overline{CF}$ sobrepõe o segmento $\overline{GF}$. Portanto, como $\overline{AB} = \overline{AE}$ e $\overline{ED} = \overline{CF} = \overline{GF}$, então $\overline{AD} = \overline{AF}$. Percebe-se que o pensamento geométrico desse estudante avança para argumentações apoiadas nas experiências das dobras exploradas, realçando o papel da manipulação dinâmica para observar e conjecturar, atividades importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Figura 34 - Ilustração da explicação dos alunos (D)



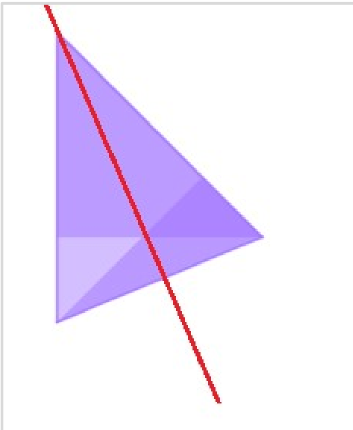
Fonte: Acervo da autora

As questões seguintes foram: Questão 1 - O que podemos dizer sobre os ângulos do triângulo construído? Tem algum ângulo congruente? Por quê?; Questão 2 - Como classificamos esse triângulo quanto aos seus ângulos? Por quê?; Questão 3 - Quais as medidas dos ângulos desse triângulo? Por quê?. Seguem as respostas dos alunos:

Q1 - São três angulos, aparentemente os ângulos da menor base sao iguais(Aluno 4, Aluno 5)
Q2 - Obtusângulo, porque todos os angulos são menores que 90 graus. (Aluno 4, Aluno 5)
Q3 - Peguei a folha com um angulo de 90 graus, dobrei ela no meio, ficou com 45 graus, o retangulo que sobre na menor base, se dobrar no meio, forma dois triangulos iguais (Aluno 4, Aluno 5)

Na questão dois, houve um equívoco quanto à nomenclatura, pois observaram que todos os ângulos do triângulo são menores que 90°, mas classificaram incorretamente o triângulo como obtusângulo. Nas questões um e dois, observam-se nas respostas propriedades da figura geométrica, apesar de serem apoiadas pela aparência física da figura, correspondendo a uma transição do nível 1 ao nível 2, pois os alunos já identificam propriedades na figura geométrica. Na questão três, os alunos 4 e 5 deduzem o valor de apenas um ângulo, a segunda parte da resposta indica o início de uma demonstração informal, faltando argumentações, mas trazendo a ideia sobre o porquê os dois ângulos seriam congruentes, utilizando a ideia do Axioma 3 sobre bissetrizes. Nessa questão, o Aluno 4 e o Aluno 5 sugeriram que, ao dobrar a folha "ao meio" com ângulo de 90°, determinam um ângulo de 45°, usando implicitamente o Axioma 3. Em seguida, identificam que o retângulo, ao ser dobrado "no meio", determina dois triângulos congruentes, o que garante a congruência dos ângulos. É possível observar comportamentos característicos dos níveis 2 e 3. O Aluno 4 e o Aluno 5 observaram a bissetriz do ângulo de 45° do triângulo, que divide o mesmo em dois triângulos congruentes, conforme se observa na Figura 35, alegando que os outros dois ângulos seriam congruentes.

Figura 35 - Dobradura 2 e a bissetriz



Fonte: Acervo da autora

O ambiente de geometria dinâmica permitiu aos alunos explorar, conjecturar, testar, explicar contribuindo para o desenvolvimento da argumentação, corroborando com De Villiers (1997), Armella (2016) e Notare e Basso (2018). Portanto, esse ambiente de geometria dinâmica é essencial para o processo de raciocínio lógico-dedutivo dos alunos, pois permite que manipulem as dobras observando como a construção se comporta, se ela mantém propriedades geométricas ou deforma-se sob a ação do movimento.

4.4 QUARTO ENCONTRO

Nesse encontro, compareceram os alunos 1, 2, 4 e 5. Assim como no encontro anterior, nesse encontro os alunos levaram um notebook e trabalharam coletivamente. Deu-se continuidade à oficina, trabalhando com as atividades das dobraduras 3 e 4. Ao iniciar a exploração da Dobradura 3, que forma um paralelogramo, os estudantes foram questionados sobre "*Quais características podemos observar na figura construída? Por quê?*", no qual responderam:

> É roxo, rosa, tem quatro lados, dois ângulos obtuso e dois agudos, dois lados iguais dois a dois; visualmente foram essas as observações feitas. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Novamente, percebemos que suas respostas se apoiam, ora na aparência física da figura, que é característica do nível 1 do modelo de Van Hiele, ora em algumas propriedades, características do nível 2. Em seguida, foram questionados sobre "*Qual figura foi construída? Porquê?*". Os alunos não souberam classificar a figura observada; um aluno sugeriu verbalmente que fosse um losango torto, o que levou ao questionamento sobre quais as características do losango. Nesse momento, os alunos decidiram pesquisar no Google sobre os tipos de quadriláteros e suas características, o que permitiu concluírem que não é um losango, conforme extrato a seguir:

É um paralelogramo, porque possui os lados opostos paralelos. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Aqui, apesar da resposta estar apoiada pela aparência física da figura, os alunos começam a sentir a necessidade de analisar as propriedades das figuras para defini-las, caracterizando parte do nível 2 do modelo de Van Hiele, no qual o aluno reconhece as figuras pelas suas propriedades. Compreendemos que a pesquisa no Google contém conteúdos e informações incertas, pois os alunos poderiam encontrar conteúdo equivocado sobre características de figuras geométricas, porém essa pesquisa que os alunos realizaram foi monitorada pela pesquisadora para garantir que as fontes fossem confiáveis. Nesse momento, apontamos a importância de se trabalhar a pesquisa com os alunos, porém esse não é o foco desse trabalho. Em seguida, responderam à pergunta "*O que podemos dizer sobre os lados dessa figura? Por quê?*", a qual já haviam comentado sua resposta anteriormente:

Os lados opostos são paralelos e iguais. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Então, depois dos alunos realizarem suas observações a pesquisadora solicita que justifiquem suas respostas. Para avançar no processo de exploração e argumentação, nesse momento, foi solicitado aos alunos que argumentassem que a figura é, de fato, um paralelogramo, ou seja, que utilizassem argumentos sustentados por propriedades geométricas decorrentes das dobraduras realizadas. Como os estudantes não haviam tido contato com demonstrações antes e um aluno sugeriu utilizar os ângulos, a pesquisadora explicou que duas retas são paralelas se a reta perpendicular a uma delas é também perpendicular à outra. Assim, os alunos discutiram sobre como argumentar. Para reorganizar as ideias e registrar o pensamento dos alunos, foi gravado um vídeo dessa argumentação, na qual os alunos utilizaram um papel físico para manipular as dobraduras, como ilustra a sequência de Figuras 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43.

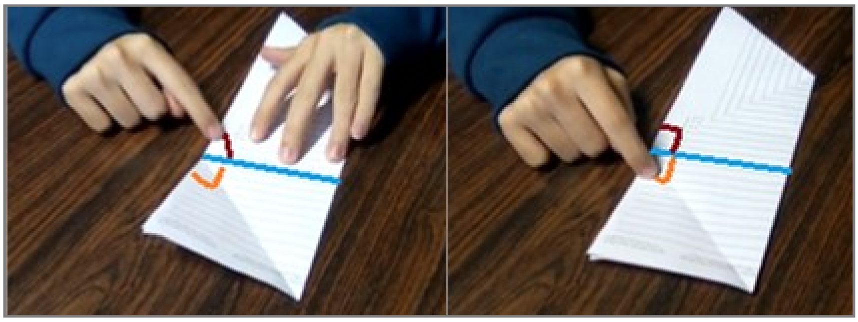
1. Como aqui tem 180° e a linha está partindo no meio

Figura 36 - Argumentação dos alunos 1

Fonte: Acervo da autora

2.	Tem 90° de cada lado

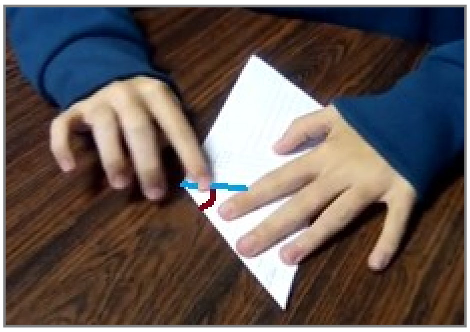
Figura 37 - Argumentação dos alunos 2



Fonte: Acervo da autora

3.	Então a gente pegou o 90° e dobrou no meio e ficou 45°

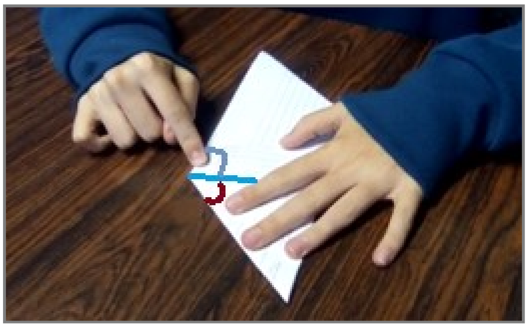
Figura 38 - Argumentação dos alunos 3



Fonte: Acervo da autora

4.	Então tem o 45° e aqui ficou 90°

Figura 39 - Argumentação dos alunos 4



Fonte: Acervo da autora

5.	Como nós temos uma folha que é quadrada nas pontas, nós temos 90° aqui

Figura 40 - Argumentação dos alunos 5

Fonte: Acervo da autora

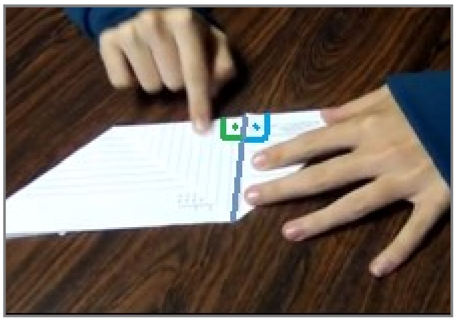
6.	E como nós dobramos os 90° aqui e aqui tem 180°

Figura 41 - Argumentação dos alunos 6

Fonte: Acervo da autora

7.	Aqui então tem 90° porque 90 + 90 = 180

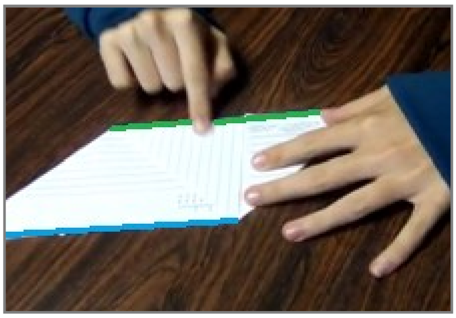
Figura 42 - Argumentação dos alunos 7



Fonte: Acervo da autora

8.	Então esses lados são paralelos, o lado direito e o lado esquerdo

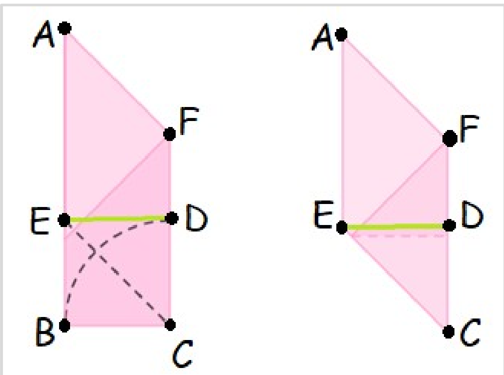
Figura 43 - Argumentação dos alunos 8



Fonte: Acervo da autora

Nessa argumentação, o Aluno 1, com o auxílio de seus colegas, argumenta que os lados direito e esquerdo da figura são paralelos. Analisando a argumentação do grupo, identificamos que, primeiro o Aluno 1 observa o segmento $\overline{ED}$ (observe a Figura 44), que representa a marca da dobradura, é a bissetriz do ângulo de 180°. Essa argumentação está apoiada na ideia do Axioma 3 das dobraduras, pois percebem bissetrizes do ângulo na dobradura.

Figura 44 – Demonstração da Dobradura 3 (A)



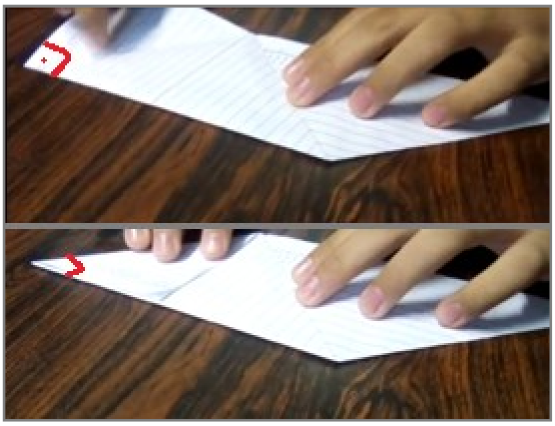
Fonte: Acervo da autora

A partir dessa etapa de observação, percebe-se que o Aluno 1 pode argumentar sobre a perpendicularidade entre os segmentos $\overline{ED}$ e $\overline{AE}$. Para mostrar a perpendicularidade entre o segmento $\overline{ED}$ e o segmento $\overline{FC}$, o Aluno 1 observa que a folha de papel A4 tem seus ângulos retos e o ângulo $E\hat{B}C$, ao ser dobrado em torno do segmento (aqui encontra-se o Axioma 2, sendo construída a mediatriz $\overline{EC}$ do segmento $\overline{BD}$), coincide com o ângulo $E\hat{D}C$ concluindo que esse ângulo mede 90°, metade do ângulo $F\hat{D}C$, pelo Axioma 3, pois o segmento $\overline{EC}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{E}D$. Com isso, o Aluno 1 conclui que o segmento $\overline{ED}$ também é a bissetriz do ângulo $F\hat{D}C$ e, portanto, os segmentos $\overline{FC}$ e $\overline{AE}$, podem ser considerados paralelos.

Para registro de dados, a argumentação dos outros dois lados da figura foi gravada em vídeo pelo Aluno 4 com auxílio de seus colegas. Segue a sequência de figuras que ilustram essa exploração.

1.	Aqui tem 90° quando a gente fecha fica 45°

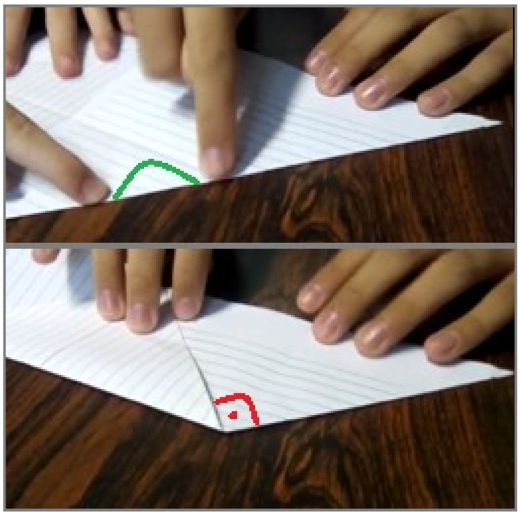
Figura 45 - Argumentação dos alunos 9



Fonte: Acervo da autora

2.	Aqui tem 180° quando fecha, aqui fica 90°

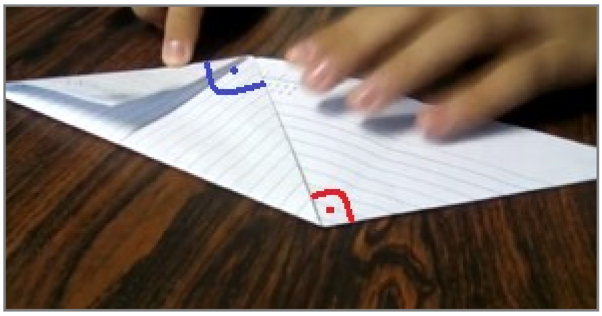
Figura 46 - Argumentação dos alunos 10



Fonte: Acervo da autora

3.	Aí aqui tem que ter 90° para fechar os 180°

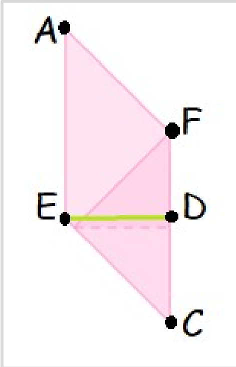
Figura 47 - Argumentação dos alunos 11



Fonte: Acervo da autora

Com isso, o Aluno 4 mostra o paralelismo entre os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EC}$ (Figura 52). Em um primeiro momento, o Aluno 4 observa que, ao dobrar o ponto B sobre o ponto D, está sendo demarcada a bissetriz do ângulo $B\hat{E}D$ (Axioma 3). Essa dobra determina o ângulo $C\hat{E}D = 45°$, conforme a Figura 48.

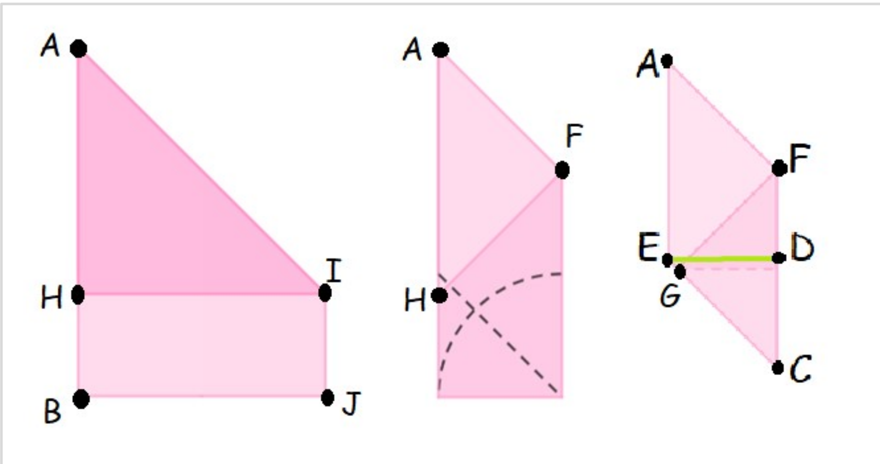
Figura 48 – Demonstração da Dobradura 3 (B)



Fonte: Acervo da autora

Em seguida, o Aluno 4 observa que, ao dobrar o segmento $\overline{IJ}$ sobre o segmento $\overline{HB}$, conforme a Figura 49, obtém-se a bissetriz (segmento $\overline{FH}$) do ângulo raso $A\hat{F}I$, novamente com suporte do Axioma 3. Com isso, o Aluno 4 identifica que o ângulo $A\hat{F}H = A\hat{F}G = 90°$.

Figura 49 – Demonstração da Dobradura 3 (C)



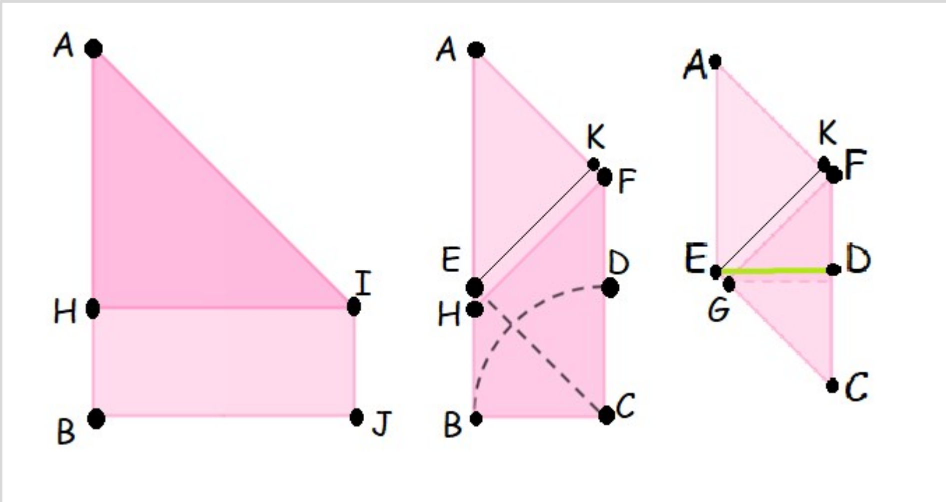
Fonte: Acervo da autora

Para argumentar sobre a perpendicularidade entre os segmentos $\overline{FG}$ e $\overline{EC}$, o Aluno 4 argumenta que o ângulo $F\hat{G}C$ deve medir 90°. O Aluno 4 supôs (utilizando uma folha de papel para visualizar) um segmento paralelo (segmento $\overline{EK}$) ao segmento$\overline{FG}$. O segmento $\overline{EK}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{E}D$, portanto o ângulo $A\hat{E}K = 45°$. Ao dobrar o ponto B sobre o ponto D, o segmento $\overline{EC}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{E}D$ (Axioma 3), com isso, o ângulo$B\hat{E}C = 45°$. Temos aqui um encadeamento de argumentos, característicos do pensamento geométrico em desenvolvimento.

A partir dessas observações por meio da exploração da dobradura no GeoGebra e utilizando uma folha de papel, o Aluno 4 argumenta que, como os ângulos $A\hat{E}K$ e $B\hat{E}C$

medem 45° cada um e são suplementares do ângulo $K\hat{E}C$, pois o fazem parte do ângulo raso $A\hat{E}B$, então o ângulo $K\hat{E}C = 90°$, como mostra a Figura 50.

Figura 50 – Demonstração da Dobradura 3 (D)



Fonte: Acervo da autora

Assim, como os segmentos $\overline{EK}$ e $\overline{GF}$ são paralelos, o ângulo $F\hat{G}C = 90°$. Dessa forma, fica argumentado que os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EC}$ são paralelos, pois possuem o segmento $\overline{GF}$ perpendicular aos dois simultaneamente.

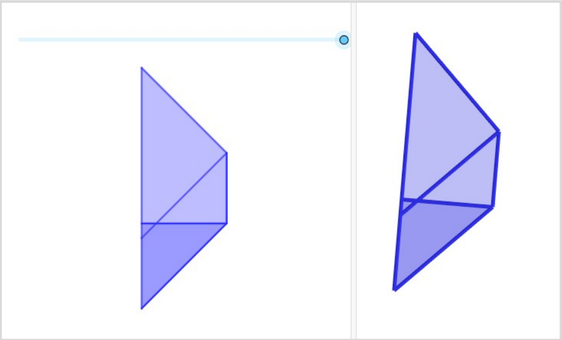
Podemos observar o nível 3, no qual os alunos fazem suas deduções informais, mas muitas propriedades geométricas estão implícitas. A manipulação da dobradura no GeoGebraBook possibilitou aos alunos construírem uma prova informal, sendo utilizada a folha de papel A4 apenas para fins de registro. Corroborando com Armella (2016), realçamos que o raciocínio matemático envolve explorações informais, formulação de conjecturas e explicações parciais. Também, corroborando com Notare e Basso (2018), na geometria euclidiana a argumentação tem papel fundamental para a compreensão e validação de teoremas, que caracterizam a essência axiomática-dedutiva desse campo da Matemática.

Depois dessa argumentação, as perguntas eram: "*O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Há ângulos congruentes? Por quê?*" e "*Quais os valores dos ângulos da figura construída? Por quê?*". Como a argumentação anterior dos estudantes estava apoiada pela análise de ângulos, não foi difícil para eles tirarem conclusões sobre os ângulos, conforme extrato a seguir.

Temos dois angulos de 45 graus e dois de 135 graus (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Na sequência das atividades, seguiu-se para a Dobradura 4, que forma um trapézio isósceles, como ilustra a Figura 51.

Figura 51 – Trapézio da Dobradura 4



Fonte: Acervo da autora

Após manipular a dobradura virtual e observar características geométricas que emergem dessa manipulação, os alunos responderam à pergunta "*Quais características da figura construída? Por quê?*":

Quadrilatero, dois lados paralelos, dois lados concorrentes, azul, formado por 3triangulos. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Nessa resposta, os alunos não apresentaram argumentações sobre suas observações, estabelecendo suas conclusões a partir da observação visual sobre as características da dobradura, caracterizando indícios do nível 1, conforme segue nas próximas duas respostas. Observamos que os alunos, nas primeiras dobraduras, identificaram características sobre a aparência física das figuras e, nessa dobradura, já são capazes de identificar propriedades geométricas, o que, segundo Gravina (2001), revela um processo de aprendizagem de geometria.

Em seguida, foi questionado *"Que figura foi construída? Por quê?"*. Os alunos não sabiam classificar, e novamente utilizaram o Google para pesquisar sobre os tipos de quadriláteros e suas propriedades. Dessa forma, concluíram:

Trapézio, porque tem dois lados paralelos e dois lados concorrentes. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Depois, responderam à questão "*O que podemos dizer sobre os lados da figura construída? Por quê?*".

Dois lados paralelos, dois lados concorrentes porque visualmente foi isso que observamos na figura. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Observamos que, nessa etapa da oficina, os alunos já observam propriedades geométricas da figura desde a primeira questão, o que reflete um avanço no pensamento geométrico desses estudantes. Apesar dos alunos concluírem as propriedades visualmente sem argumentá-las, percebe-se uma transição do nível 1 ao nível 2, pois as propriedades são identificadas de forma mais imediata.

Dando continuidade, foi questionado "*Como se classifica a figura construída de acordo com seus lados? Por quê?*", na qual obteve-se a resposta:

Trapézio Isósceles, pois possuem dois lados congruentes e dois lados diferentes. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Nessa resposta, os alunos apresentam indícios do nível 2, pois começam a discernir as características das figuras, conceituando classes de configurações. Quando questionados sobre "*O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê?*" e "*Que medidas tem esses ângulos? Por quê?*", foi possível perceber a facilidade para encontrar e observar diretamente o valor dos ângulos, pois, na primeira pergunta já estavam explícitas as duas respostas:

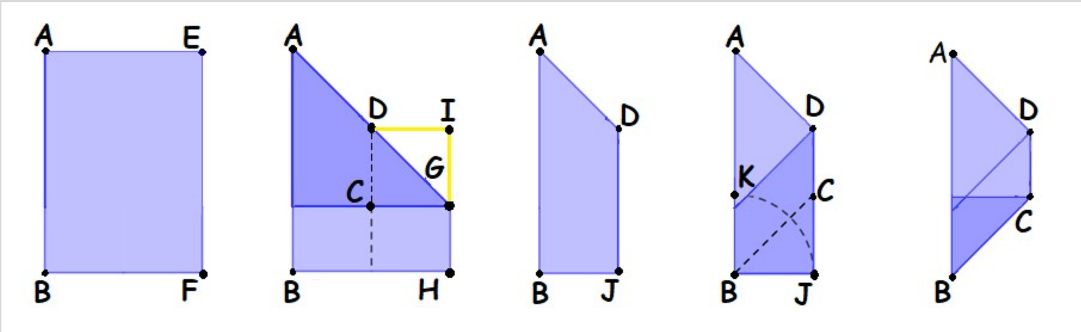
Dois obtusos e dois agudos. Dois angulos de 45 graus e dois de 135 graus. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Nessa resposta, os alunos perceberam (dito verbalmente durante a discussão da resposta) que os ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ estão sendo dobrados ao meio, ou seja, que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são bissetrizes respectivamente dos ângulos $B\hat{A}E$ e $F\hat{B}A$, como sustenta o Axioma 3. Portanto, os ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ medem 45° e, como esses ângulos têm medidas menores que 90°, os alunos os classificaram como ângulos agudos.

Já para o ângulo $A\hat{D}C$, os alunos perceberam, a partir da exploração da dobradura no GeoGebra que, ao dobrar o segmento $\overline{GH}$ sobre o segmento $\overline{AB}$, está sendo subtraído 45° do ângulo raso $A\hat{D}G$, pois, observaram que o segmento $\overline{AG}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}E$, como também é bissetriz do ângulo $C\hat{D}I$, conforme ilustrado na Figura 52. Assim, o ângulo $A\hat{D}C$ mede 135°. Ao dobrar o segmento $\overline{BJ}$ sobre o segmento $\overline{AB}$, constrói-se a bissetriz (segmento

$\overline{BC}$) do ângulo $K\hat{C}J$. Assim, como $D\hat{C}J$ é um ângulo raso e está sendo subtraído 45° desse ângulo, os estudantes concluíram que o ângulo $D\hat{C}B$ mede 135°. Finalmente, os alunos classificam os ângulos $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}B$ como obtusos, pois suas medidas são maiores 90°. A Figura 52 ilustra os elementos geométricos dessa argumentação.

Figura 52 – Demonstração da Dobradura 4



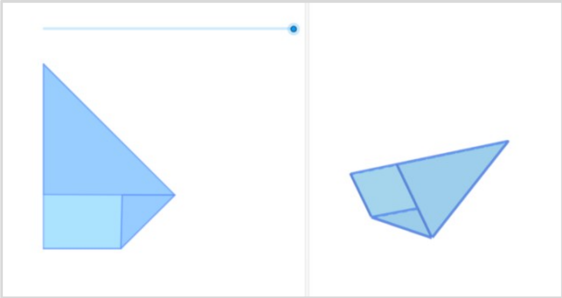
Fonte: Acervo da autora

Podemos observar indícios do nível 3, pois os alunos estabelecem inter-relações de propriedades na dobradura, reconhecem classes, formulam argumentos informais. Em relação ao pensamento geométrico, os alunos inicialmente manipularam a dobradura e identificaram propriedades visualmente, sem apresentar argumentação. Ao argumentarem sobre as medidas dos ângulos utilizando a dobradura, constataram a veracidade de suas conjecturas iniciais, corroborando com De Villiers (1997), que afirma que a motivação para uma argumentação de determinada propriedade geométrica é a convicção da mesma, ou seja, o desenvolvimento de uma argumentação tende a ser feito após tomar-se uma propriedade como verdadeira. Nesse processo de manipulação e observação de dobraduras no GeoGebraBook seguidos de perguntas, os alunos percorrem um caminho de argumentos visuais que, segundo Armella (2016), contribui para o caminho de argumentos mais formais, a partir do estabelecimento de relações entre o raciocínio empírico e o raciocínio dedutivo. Observamos, nas primeiras respostas dessa dobradura, que os alunos apresentaram noções intuitivas, sem argumentações, mas depois avançam para justificar suas conjecturas iniciais, corroborando com Gravina (2001).

4.5 QUINTO ENCONTRO

Nesse encontro, compareceram os alunos 1, 2, 4 e 5 com um notebook. Finalizamos a oficina com a Dobradura 5, que forma uma pipa ilustrada na Figura 53.

Figura 53 – Pipa da Dobradura 5



Fonte: Acervo da autora

Enquanto os alunos manipulavam e exploravam a dobradura no GeoGebra, imediatamente começaram a conjecturar respostas para as perguntas que foram feitas posteriormente. A partir das atividades, os alunos foram provocados a questionar e discutir antes de surgir as próximas questões, ou seja, durante a manipulação da figura no GeoGebra, os alunos já discutiam sobre as possíveis propriedades geométricas que podiam ser observadas nessa fase de manipulação. Em seguida, os alunos responderam à pergunta "*Quais características podemos observar na figura? Por quê?*".

> É azul, foi dobrada duas vezes, parece um triângulo, tem quatro lados, parece um diamante; porque de acordo com a imagem foi isso que observamos. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Para essa questão, houve a seguinte discussão:

> Aluno 2: Parece um Triângulo
> Aluno 4: Não é um triângulo porque tem quatro lados essa figura
> Aluno 5: Parece tem um triângulo e um retângulo

Analisando o diálogo, observa-se que houve uma conjectura inicial de que a figura seria um triângulo (provavelmente pela aparência visual da figura que, apesar de possuir quatro lados, lembra a imagem de um triângulo), mesmo identificando que a figura possui quatro lados. Ao discutirem sobre a questão, refutaram sua conjectura inicial, observando uma propriedade da figura e compreendendo classes de figuras, ou seja, a figura não se enquadra na definição de triângulos por possuir quatro lados. E agora precisavam reformular a conjectura, observamos nesse processo o que De Villiers (1997) defende para o desenvolvimento da argumentação, o processo de explorar, conjecturar, refutar e reformular. Em relação ao modelo Van Hiele de pensamento geométrico, os alunos apresentam uma transição de nível 2 e do nível 3, pois, discernem as características das figuras e compreendem as classes de figuras.

Em seguida, foi questionado "*Que figura foi formada? Por quê?*". Como eles já haviam discutido sobre que figura poderia ser e não sabiam classificar,decidiram novamente pesquisar no Google. Nessa dobradura, como dito antes, era esperado que os alunos identificassem uma pipa. Então, obteve-se uma resposta inesperada:

É um não trapézio porque nenhum lado é paralelo (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Essa definição não se costuma apresentar aos alunos. Os alunos também constataram, nesse momento, que o paralelogramo, quadrado, retângulo são casos particulares de trapézios, pois, segundo os alunos, trapézios têm pelo menos dois lados paralelos. Essa definição foi encontrada pelos alunos em suas pesquisas na internet. Depois disso, seguiram para as perguntas *"O que podemos dizer sobre os lados da figura? Por quê?" e "Há algum lado congruente? Por quê?"*, respondendo:

Tem quatro lados, nenhum deles é paralelo, porque olhando a imagem foi isso que a gente constatou. (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5) aparenta ter lados iguais (Aluno 4, Aluno 5) não tem lados iguais e nem aparenta ter. (Aluno 1, Aluno 2)

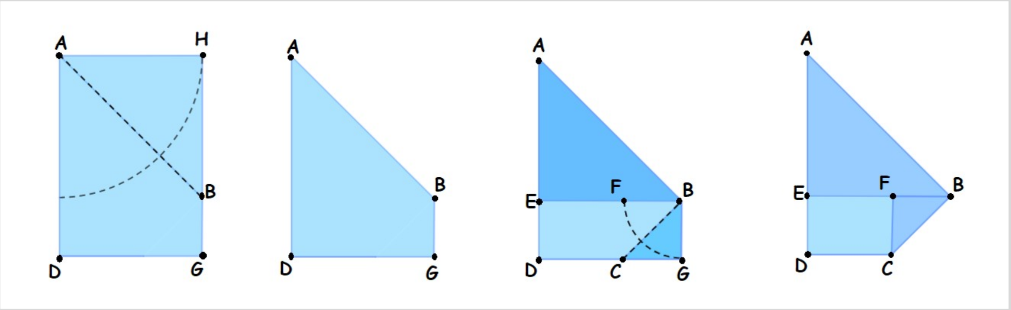
Como podemos verificar pelas respostas, a exploração dessa dobradura apresentou algumas discordâncias nas respostas. Os estudantes concordaram que não há lados paralelos na figura, mas discordam quanto à congruência de lados. Verbalmente, o Aluno 4 e o Aluno 5 sugerem que o lado esquerdo e o lado superior da figura são congruentes e não observam congruência entre os outros dois lados. Apesar das argumentações sobre congruência entre os lados do triângulo na Dobradura 2, o Aluno 1 e o Aluno 2 não observaram a mesma congruência dos lados maiores nessa Dobradura 5.

Para as questões *"O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê?" e "Quanto medem esses ângulos? Por quê?"*, a resposta foi elaborada em conjunto e, nesse momento, simples de serem calculadas e respondidas:

Dois retos, um agudo e um obtuso. Dois angulos de 90 graus, um angulo de 45 graus, um angulo 135 graus (Aluno 1, Aluno 2, Aluno 4, Aluno 5)

Verbalmente, os alunos argumentaram sobre as medidas dos ângulos da Dobradura 5. O ângulo $A\hat{D}G$ é o ângulo reto da folha de Papel A4. O ângulo $D\hat{A}B$mede 45°, pois, os alunos observaram que o segmento $\overline{AB}$ é bissetriz do ângulo $D\hat{A}H$ (Axioma 3), como pode-se observar na Figura 54. Em seguida, os estudantes identificaram o ângulo raso $H\hat{B}G$ que, ao dobrar o segmento $\overline{AH}$ sobre o segmento $\overline{AD}$, demarca a bissetriz (segmento $\overline{AB}$) do ângulo $E\hat{B}H$. Subtraindo 45° da medida do ângulo raso $H\hat{B}G$, tem-se que o ângulo $A\hat{B}G = 135°$. Ao dobrar o segmento $\overline{BG}$ sobre o segmento $\overline{EB}$, determina-se a bissetriz (segmento $\overline{CB}$) do ângulo $F\hat{B}G$. Então, novamente, subtrai-se 45° do ângulo $H\hat{B}G$. Portanto, o ângulo $A\hat{B}C = 90°$ e o ângulo $D\hat{C}B = 135°$, como pode-se observar na Figura 54.

Figura 54 – Demonstração da Dobradura 5

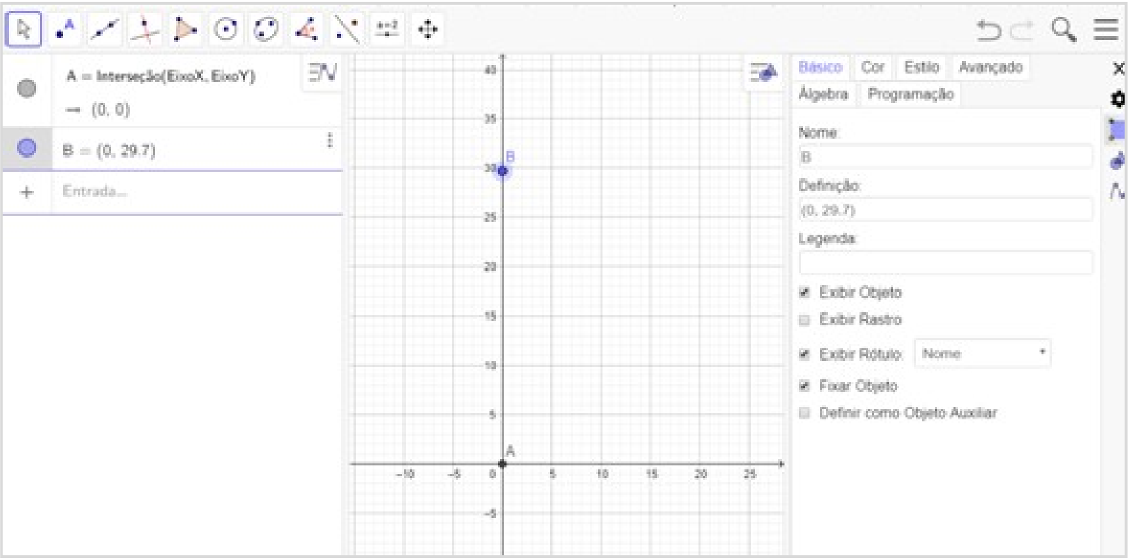


Fonte: Acervo da autora

Após elaborar a argumentação sobre a pipa, os alunos deveriam construir a dobradura dinâmica do quadrado no GeoGebra. Em um primeiro momento, os alunos discutiram sobre como construir a folha A4 com suas dimensões no GeoGebra. Foi sugerido que usassem pontos e coordenadas cartesianas para manter os pontos fixos da folha de papel A4 na medida da mesma, de forma que os vértices não pudessem ser movidos. Coordenadas cartesianas, assunto que os alunos não haviam estudado até esse momento, acabou sendo explorado durante essa construção.

Inicialmente, os alunos decidiram marcar o primeiro vértice da folha de papel A4 na origem do sistema de coordenadas. Para isso, os alunos precisavam saber em qual par ordenado deveriam marcar os demais pontos para que distância entre os pontos determinassem as dimensões corretas como na folha de papel A4. Em seguida, determinaram o ponto B, conforme mostra a Figura 55. Foi sugerido aos estudantes que, em cada um desses pontos, fosse selecionada a opção “Fixar Objeto” para não permitir o movimento dos mesmos.

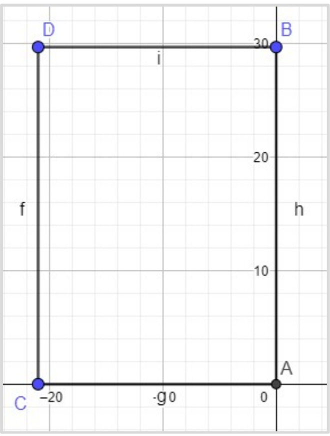
Figura 55 - Construção da dobradura (A)



Fonte: Acervo da autora

O ponto C foi escolhido pelos estudantes de modo que a folha de papel ficasse ao lado esquerdo do eixo y. O Aluno 1 sugeriu a coordenada $(-21{,}0)$ para o ponto C. Observando que o ponto não foi marcado onde planejaram, o Aluno 2 sugeriu a coordenada $(0, -21)$ para o ponto C. Em seguida, o Aluno 5 sugeriu que o ponto D teria a coordenada $(-21, -29.7)$, porém o ponto não se apresentou no local esperado. Então o Aluno 1 sugeriu que a coordenada do ponto D seria $(-21, +29.7)$. Concluindo a construção dos vértices da folha de Papel A4, a pesquisadora instruiu que construíssem segmentos entre os pontos, conforme ilustra a Figura 56.

Figura 56 - Construção da dobradura (B)

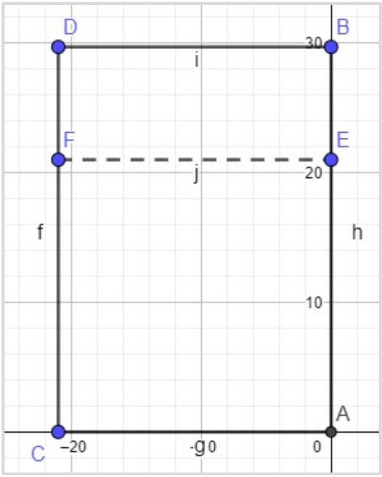


Fonte: Acervo da autora

Depois de construído o retângulo que representaria a folha de papel, a pesquisadora orientou os alunos a determinar as coordenadas dos pontos E e F, de maneira que o segmento

$\overline{FE}$ determinasse a dobra a ser realizada, conforme é ilustrado na Figura 57. Então os alunos discutiram sobre como marcar esses pontos. Era esperado que os alunos utilizassem a ferramenta círculo para determinar os pontos E e F. Porém, os alunos utilizaram coordenadas cartesianas, de maneira que o polígono $AEFC$ forme um quadrado. Então decidiram determinar os pontos $E(0,21)$ e $F(-21,21)$, conforme ilustrado na Figura 57.

Figura 57 - Construção da dobradura (C)

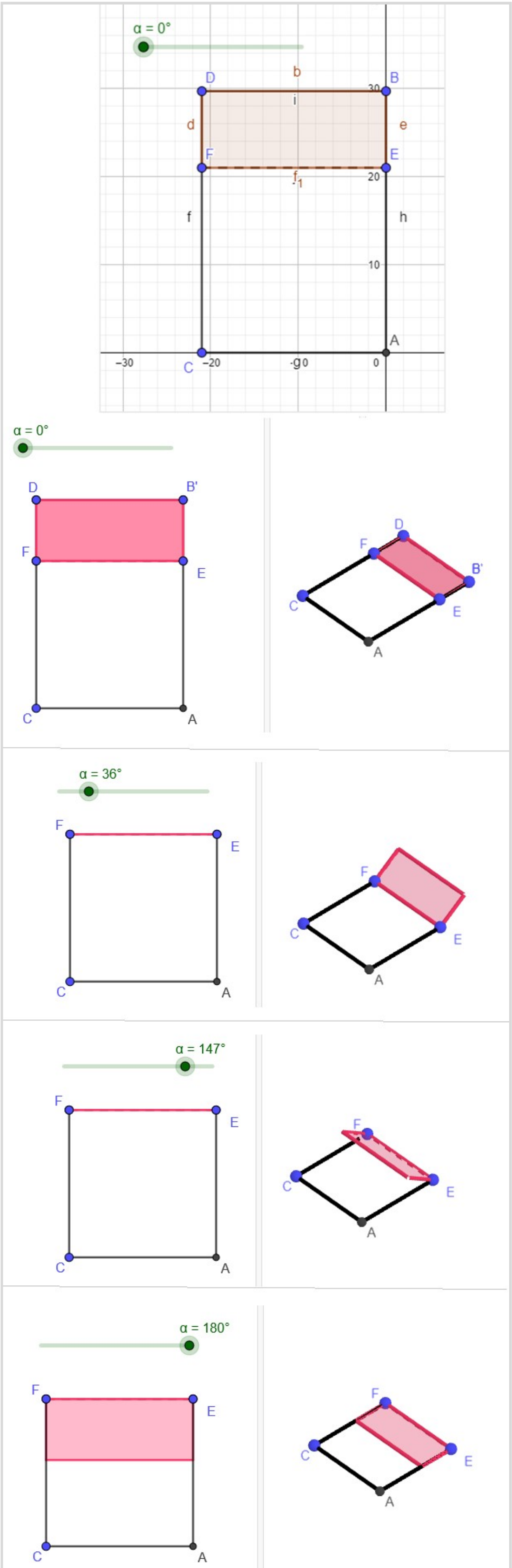


Fonte: Acervo da autora

Determinado o segmento $\overline{FE}$, foi construído o polígono $DBEF$ para ser girado em torno do segmento $\overline{FE}$. A pesquisadora instruiu na construção de um controle deslizante com ângulo e, na janela de visualização em 3D, o uso da ferramenta “girar em torno de uma reta” determinando o ângulo pelo controle deslizante. Em um primeiro momento, os alunos determinaram o controle deslizante com o ângulo entre 0° e 360°. Ao manipular o controle deslizante, os estudantes observaram que o polígono dava a volta completa, não simulando de forma correta uma dobra em papel, observando que a dobra realiza um ângulo de 180°. Então, ajustando o controle deslizante, concluíram a simulação da dobradura 1, conforme ilustra a Figura 58.

Dando continuidade à etapa de construção no GeoGebra, foi solicitada a construção de outra dobradura de escolha deles. Então sozinhos simularam a dobra da folha de papel A4 ao meio resultando na folha de papel A5. Pela falta de tempo, não foi possível aprofundar as discussões sobre as construções no GeoGebra. Os alunos perguntaram sobre como deixar “bonitinhas” as dobraduras, mas, infelizmente, não havia tempo para trabalhar com maior profundidade esses recursos com eles.

Figura 58 - Construção da dobradura (D)



Fonte: Acervo da autora

Nessa última atividade de construção das dobraduras, tínhamos como expectativa um aprofundamento desse processo de construção. Esperávamos analisar os conceitos e as propriedades geométricas que deveriam ser impostos na construção das dobraduras. Porém, pelo pouco tempo dedicado a essa etapa, o processo não ocorreu como esperado. Percebemos que nossa pesquisa se destacou pela elaboração do livro digital no GeoGebraBook e pelas atividades de exploração e manipulação das simulações das dobraduras, que proporcionaram o desenvolvimento de habilidades fundamentais do pensamento geométrico, como explorar, conjecturar e argumentar. Em geral, percebemos o desenvolvimento e o avanço do pensamento geométrico no decorrer desses encontros. O ambiente de geometria dinâmica proporcionou aos alunos o desenvolvimento do pensamento geométrico, apresentando inicialmente indícios do nível 1 do modelo de Van Hiele e no decorrer das atividades chegaram a apresentar indícios do nível 3.

Apresentamos no capítulo a seguir considerações finais sobre a pesquisa realizada.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebendo uma necessidade de proporcionar um ambiente de investigação e descoberta de propriedades geométricas aos alunos do Ensino Básico investigamos, nessa pesquisa, como se dá a aprendizagem de propriedades geométricas que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica. Constatamos que a investigação de dobraduras virtuais possibilita aos alunos a construção do conhecimento geométrico refletindo na evolução do pensamento geométrico.

A partir da sequência de atividades elaboradas para esse trabalho, podemos observar um avanço do pensamento geométrico desses alunos, que, inicialmente, classificavam figuras geométricas pela sua aparência física e, posteriormente, pelas características e propriedades geométricas. Esse avanço do pensamento geométrico foi proporcionado pelas atividades de exploração, manipulação, identificação de conjecturas e argumentação no software GeoGebra, que contribuiu para que habilidades importantes do pensamento geométrico fossem vivenciadas pelos estudantes que participaram da oficina.

O ambiente de geometria dinâmica proporcionou aos alunos um espaço para a construção de provas informais. Percebemos que, nesse processo de argumentação da veracidade de propriedades de figuras geométricas, das quais os alunos estavam convictos, houve um considerável avanço do pensamento geométrico. Percebemos que, a partir das atividades investigativas propostas no ambiente de geometria dinâmica, emergiram muitas propriedades e conceitos de figuras geométricas como, por exemplo, o triângulo isósceles que possui dois ângulos congruentes, o paralelogramo que possui ângulos opostos congruentes, o trapézio isósceles que possui ângulos consecutivos congruentes, assim como a noção de paralelismo, perpendicularidade, bissetriz, congruência de ângulos e segmentos, entre outros. Também emergiram conhecimentos implícitos, como por exemplo, a definição das bissetrizes que está presente nos axiomas das dobraduras e foi utilizada diversas vezes nas argumentações dos estudantes. Nessas atividades, também foi desenvolvida pelos alunos a necessidade de definir as figuras geométricas pelas suas propriedades, sendo isso um avanço do pensamento geométrico.

Podemos observar, durante todo esse processo na oficina, momentos de idas e vindas na evolução de pensamento geométrico dos alunos em cada dobradura explorada. Observamos que os alunos apresentaram indícios de nível 3 do pensamento geométrico em um encontro e, posteriormente, no encontro seguinte, novamente indícios do nível 1, revelando um movimento de avanços e retrocessos, natural de indivíduos que estão em processo de desenvolvimento cognitivo. Também observamos uma evolução de pensamento geométrico em cada encontro, pois, no primeiro encontro, apresentavam apenas indícios de nível 1 e 2 e, posteriormente, apresentavam indícios desses níveis, mas também do nível 3. Percebemos, durante as análises, a importância dessa oficina para o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois inicialmente os alunos não identificaram propriedades nas figuras, apenas as caracterizavam pela sua aparência física (indícios do nível 1), em seguida, já identificavam propriedades nas figuras (indícios do nível 2), e por fim, começaram a estabelecer relações entre as propriedades da dobradura, argumentando sobre suas afirmações iniciais e estabelecendo uma sequência lógica de argumentações (indícios do nível 3).

Em relação ao pensamento geométrico, em geral observamos que os alunos identificaram as figuras determinadas pelas dobraduras pela sua aparência física e, com o andamento da oficina, passaram a identificar as figuras geométricas formadas pelas dobraduras a partir de propriedades. Também observamos que, primeiramente, os alunos devem estar convictos de uma propriedade para, em seguida, argumentarem sobre sua veracidade (DE VILLIERS, 1997). Esse processo foi identificado em todas as perguntas iniciais, em que os alunos conjecturavam sobre suas observações sem argumentá-las e, em seguida, argumentavam sobre as mesmas, verificando (ou refutando) sua veracidade. Essas argumentações produziram conhecimento sobre os conceitos relevantes para os alunos. Alguns apareceram implicitamente, como os axiomas sobre as dobraduras, que foram incentivadas pelo ambiente de geometria dinâmica, corroborando com De Villiers (1997), Armella (2016), Notare e Basso (2018), enquanto outros argumentos ficaram mais evidentes aos alunos, pois eles mesmos desenvolveram, a partir de suas próprias ações, discussões e investigações.

Durante o desenvolvimento do experimento, não houve, por parte dos alunos, necessidade de utilização de papel A4, exceto para a gravação do vídeo das argumentações em que era necessário dobrar e desdobrar a folha para realizar a argumentação de seus pensamentos. Com isso, temos indícios de que a simulação de dobradura de papel A4 no GeoGebra foi suficiente na exploração das dobras para esses alunos.

Mesmo com evidências de aprendizagem construída pelos alunos na oficina, há alguns aspectos que poderiam ser melhorados, como os momentos em que a pesquisadora norteia os alunos. Um desses momentos, em que a pesquisadora norteia os alunos, é o último encontro, em que os alunos precisam construir a simulação da Dobradura 1. Essa atividade poderia ser mais produtiva se fosse permitido aos alunos explorar, com tempo adequado, maneiras de iniciar e concluir a construção, com tentativas e erros, explorando os recursos proporcionados pelo GeoGebra. Nesse sentido, também percebemos que seria interessante aos alunos construírem todas as dobraduras, claro que planejando o tempo necessário, com mais encontros, o que não foi possível realizar nessa pesquisa. Percebemos também a importância do processo de argumentação que ocorreu, por exemplo, na dobradura do paralelogramo, na qual foi solicitada uma "demonstração" das conjecturas que estavam sendo apresentadas pelos estudantes. A solicitação de "provas" pode estar presente em todas as dobraduras.

Apesar de realizarmos uma oficina, essas atividades de simulações de dobraduras no GeoGebraBook podem ser utilizadas em sala de aula para o estudo de Geometria. Esse trabalho contribuiu para o desenvolvimento de argumentação dos alunos que exploravam, formulavam conjecturas, em alguns momentos refutavam suas conjecturas e buscavam argumentos para validar suas conjecturas, ações que definem o pensamento geométrico.

Realizar essa pesquisa me fez perceber novas possibilidades de se trabalhar a Geometria em sala de aula, pois ainda pensava ser complicado utilizar métodos não tradicionais no ensino de Matemática, com novas abordagens apoiadas nas tecnologias digitais. Durante a análise dos dados coletados, percebi que houve mais aprendizagem dos alunos do que eu havia imaginado durante a realização da oficina, pois havia muitos conhecimentos geométricos implícitos que foram identificados na análise de dados, além das habilidades que estavam sendo desenvolvidas. Essa pesquisa também me ajudou a perceber a importância da argumentação na aprendizagem de Geometria e que é possível conduzir os alunos por esse caminho. Isso porque como aluna, na minha experiência do ensino básico, não me foram proporcionadas essas experiências, apenas na graduação, e realizando essa pesquisa percebi as possibilidades de aprendizagem que o ambiente de geometria dinâmica pode proporcionar aos alunos. A pesquisa também me fez perceber o que eu poderia mudar ao aplicar novamente essa oficina, e também pontos a pensar antes de aplicar outras atividades.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARMELLA, L. M.; TRIGO, M. S.; MACHIN, M. C. Problem solving and the use of digital Technologies within the Mathematical Working space framework. **ZDM Mathematics Education**, p. 827-842, 2016.

BASSO, M.; NOTARE, M. Pensar com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, p. 1-10, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf. Acesso em: 23 jul. 2018.

CROWLEY, M. L. Aprendendo e Ensinando Geometria. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1996, p. 1-20.

DE VILLIERS, M. The Role of Proof in Investigative, computer-based Geometry: Some personal reflections. **Chapter in Schattschneider, D. & King, J. (1997). Geometry Turned On!** Washington, 1997.

FROLINI, S. **Estudando Geometria através de dobraduras**. 2014. Dissertação (Mestrado em matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014.

GOLDENBERG, E. P. Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. **Education Development Center**, Inc, Newton, p. 1-8, 2000.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Belo Horizonte, p. 1-13, 1996.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (doutorado em informática na educação) – Pós-Graduação em informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M.; CONTIERO, L. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 9, n. 1, 2011.

International Organization for Standardization. ISO. Disponível em: https://www.iso.org/standard/36631.html. Acesso em: 12 set. 2018.

MENEZES, D. B. **O uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana**: História, Teorema e Problemas. 2014. Dissertação (Mestrado em matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

NASSER, L. A teoria de Van Hiele para o ensino de geometria. **Anais do 1° Seminário internacional de educação matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, p. 29-40, 1993.

NOTARE, M.; BASSO, M. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p. 1-10, 2018.

NOTARE, M.; BASSO, M. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o caminho do fazer ao compreender. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 10, n. 3, 2012.

NUNO, C. **A Geometria do A4**. Ciência. 2003. Disponível em: https://pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/A4_Expresso_20030607.htm. Acesso em: 11 set. 2018.

PIN, O. J.; URIBE, E. B. O. Os Axiomas de Huzita-Hatori e o Ensino da Geometria Euclidiana Plana Através da Construção de Polígonos. **Universidade Federal do Mato Grosso do Sul**, Três Lagoas, v. 8, n. Especial, p. 39-44, 2016.

SILVA, G. N. **Origamática**: o origami no ensino-aprendizagem de matemática. 2009. Trabalho de conclusão de curso de graduação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SILVEIRA, P. F. **Investigações com dobraduras de papel A4**. 2018. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/kg5tgaed. Acesso em: 28 nov. 2020.

7. APÊNDICES

7.1 TERMO DE CONSENTIMENTO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada ____, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) *Priscila Ferreira Silveira*. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por *Márcia Notare*, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone *51 9909-1818* ou e-mail *marcia.notare@gmail.com*.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Analisar como se dá a aprendizagem de propriedades geométricas que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica;
- Analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos;
- Observar e entender o papel da geometria dinâmica no desenvolvimento do pensamento geométrico e analisar como se dá esse processo em uma sequência de atividades a serem definidas;
- Planejar, implementar e validar uma proposta de atividades de geometria em um ambiente de geometria dinâmica.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (dissertação, artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre a geometria em um ambiente dinâmico, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço rua Professora Maria Helena Machado da Silva, 193, Charqueadas/telefone (51) 998182667/e-mail pry.f.silveira@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

7.2 AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, 18 de março de 2019.

Prezada Professora Rosana de Freitas Jobim

Diretora da Escola Estadual de Ensino Fundamental Piratini

A professora Priscila Ferreira Silveira, atualmente é mestranda regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMat) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do PPGEMat, a mestranda está desenvolvendo uma dissertação, na qual é elaborado um produto didático contemplando o uso de recursos digitais em processos de ensino e/ou aprendizagem em Matemática na Escola Básica

Esse produto deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisadora e professora responsável pela orientação desse trabalho de dissertação, reitero meu compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte telefone de contato: (51)3308.6212 (Secretaria do PPGEMat).

Agradeço a sua atenção.

Cordialmente,

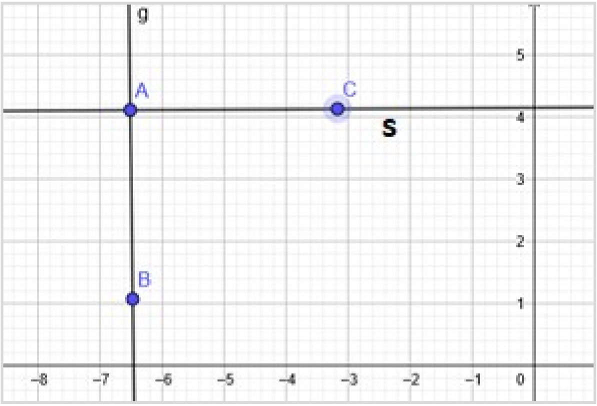
Márcia Notare
Professora do PPGEMat

7.3 ANÁLISE DO PRIMEIRO ENCONTRO

Esse apêndice apresenta a construção dos alunos de um quadrado no GeoGebra e a análise, realizadas no primeiro encontro. O Aluno 10, o Aluno 11 e o Aluno 12 iniciaram a construção com três pontos móveis. Essa construção seguiu os seguintes passos:

1. Construíram três pontos quaisquer A, B e C do plano, traçaram a reta g passando pelos pontos A e B e a reta s passando pelos pontos A e C (Figura 1);

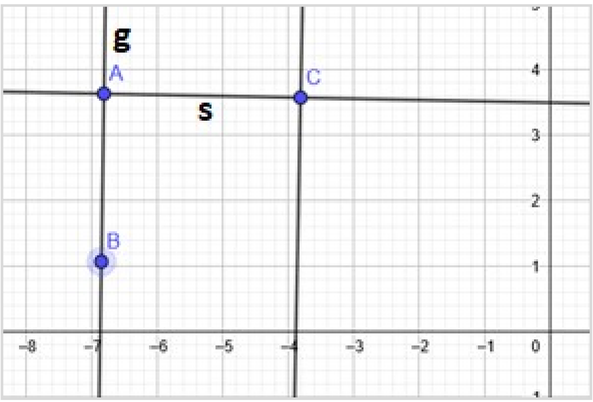
Figura 1 - Construção do quadrado no GeoGebra 1



Fonte: Acervo da autora

2. Traçaram a reta perpendicular à reta s passando pelo ponto C (Figura 2);

Figura 2 - Construção do quadrado no GeoGebra 2

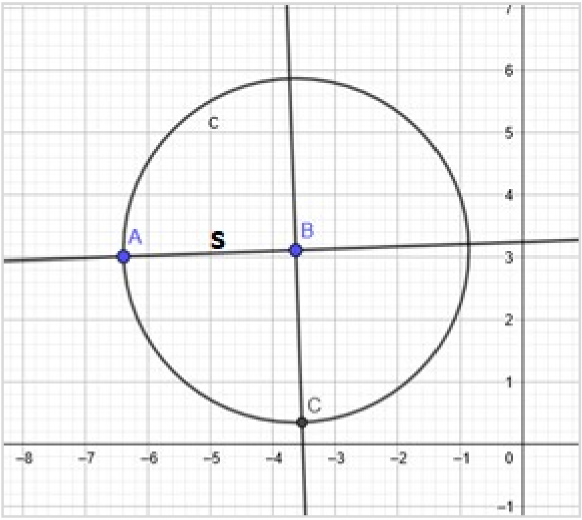


Fonte: Acervo da autora

Esses três alunos moviam os pontos, atividade proporcionada pela geometria dinâmica, observando e constatando que a construção não descrevia um quadrado. Dessa forma a pesquisadora sugeriu novamente que começassem a construção do quadrado com apenas dois pontos. Os demais grupos realizaram uma possível construção para o quadrado, no qual foram observados os seguintes passos:

1. Construíram os pontos A e B quaisquer do plano e traçaram a reta s passando pelos pontos A e B;
2. Traçaram a reta perpendicular à reta s passando pelo ponto B;
3. Traçaram o círculo com centro no ponto B passando pelo ponto A; marcaram o ponto C na intersecção entre o círculo e a reta perpendicular à reta s (Figura 3).

Figura 3 - Construção do quadrado no GeoGebra 3

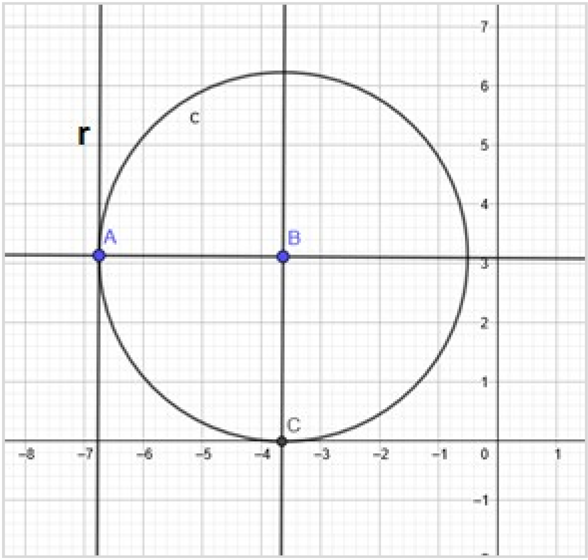


Fonte: Acervo da autora

Assim, os alunos construíram dois lados do quadrado, congruentes com medida igual ao raio do círculo. Durante manipulações e observações, os alunos analisaram como terminariam essa construção. A atividade de arrastar os pontos, nesse caso, estava proporcionando a exploração da figura para a identificação de alguma regularidade que permitisse dar continuidade à construção. Dessa forma, para os outros dois lados do quadrado, houve diferentes estratégias de construção pelos alunos. O Aluno 1, o Aluno 2, o Aluno 4, o Aluno 5 e o Aluno 6 construíram pelos seguintes passos:

1. Traçaram a reta r passando pelo ponto A e perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ (Figura 4);

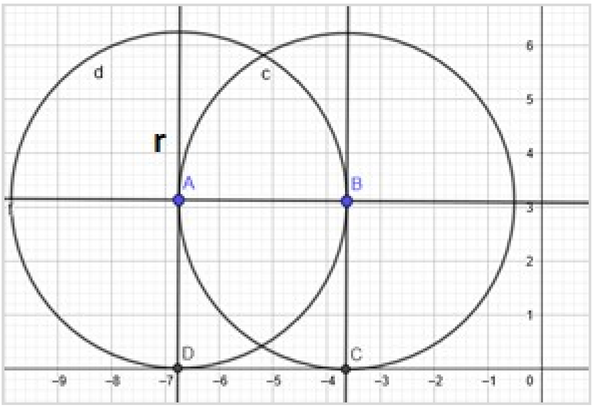
Figura 4 - Construção do quadrado no GeoGebra 4



Fonte: Acervo da autora

2. Construíram o círculo d passando por B com centro em A e marcaram o ponto D na intersecção entre o círculo d e a reta r (Figura 5).

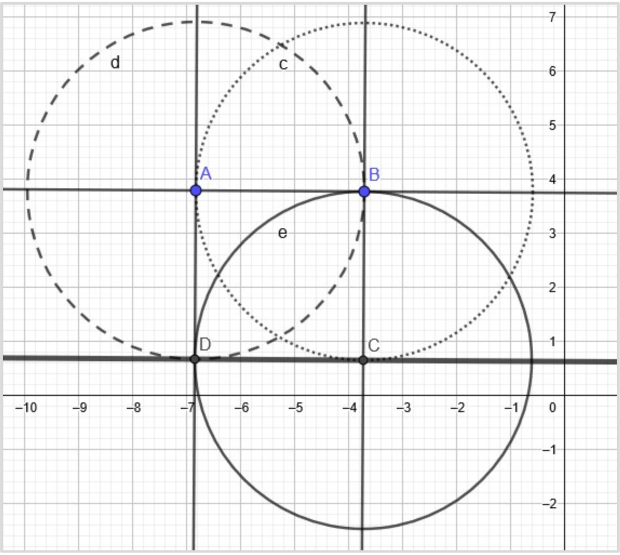
Figura 5 - Construção do quadrado no GeoGebra 5



Fonte: Acervo da autora

Nesse momento da construção, o quadrado ABCD já poderia ser formado pelos segmentos, porém esses alunos repetiram a construção para o lado $\overline{DC}$ do quadrado. Eles construíram um novo círculo e uma nova reta perpendicular, como pode ser observado na Figura 6.

Figura 6 - Construção do quadrado no GeoGebra 6



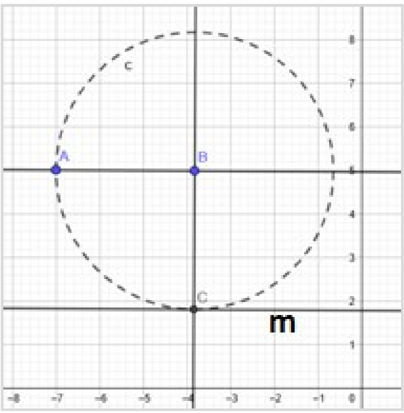
Fonte: Acervo da autora

Somente nesse momento da construção o Aluno 1, o Aluno 2, o Aluno 4, o Aluno 5 e o Aluno 6 perceberam que não era necessário esse último passo de construção, pois, pela construção das três primeiras retas, temos que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos e têm mesma medida, então o segmento $\overline{DC}$ é perpendicular a eles. Isso foi constatado pelos alunos a partir dos movimentos, ao manipular notaram que os pontos que formavam o quadrado sempre coincidiam, ou seja, o ponto D coincidia com a intersecção dos dois círculos com as retas perpendiculares.

Os demais alunos construíram o quadrado utilizando os seguintes passos:

1. Com os dois lados do quadrado construídos, conforme mostrado anteriormente, traçaram a reta m passando pelo ponto C e perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ (Figura 7);

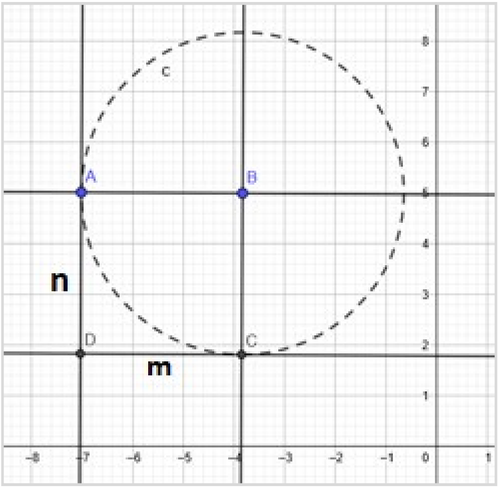
Figura 7 - Construção do quadrado no GeoGebra 7



Fonte: Acervo da autora

2. Traçaram a reta n passando pelo ponto A e perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, sendo D o ponto de intersecção entre as retas n e m (Figura 8).

Figura 8 - Construção do quadrado no GeoGebra 8



Fonte: Acervo da autora

A oficina seguiu de maneira que não havia um professor ensinando, mas um instrutor guiando com perguntas para o aluno investigar e construir seu conhecimento. Nesse encontro, os alunos tiveram a oportunidade de apropriarem-se das propriedades do quadrado, avançando no entendimento sobre ângulos, conceito que mostraram não entender inicialmente, além de reconhecer o quadrado em diferentes posições no plano, deixando de lado a representação de quadrado prototípica, com lados paralelos aos eixos coordenados. Esse fato resultou da exploração no ambiente dinâmico, no qual os estudantes entenderam que o quadrado pode ser "virado" e passaram a definir o quadrado a partir de suas propriedades, procurando identificá-las nas figuras, o qual foi observado durante suas construções no GeoGebra.