UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

RAMIRO MICHELON

Reflexões sobre o ensino do curso de Pré-Cálculo da UFRGS

PORTO ALEGRE
2022

RAMIRO MICHELON

REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DO CURSO DE PRÉ-CÁLCULO DA UFRGS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

PORTO ALEGRE
2022

CIP – CATÁLOGO NA PUBLICAÇÃO

MICHELON, Ramiro

Reflexões sobre o ensino do curso de Pré-Cálculo da UFRGS/ Ramiro Michelon. Porto Alegre, 2022.

115 p.: il

Orientador: Alvino Alves Sant'Ana

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre – RS, 2022.

1. Pré-Cálculo, 2. Análise de Erros, 3. Análise de Conteúdo. I. Alves Sant'Ana, Alvino, orient. II. Título.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação do Curso de
Licenciatura em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

Reflexões sobre o ensino do curso de Pré-Cálculo da UFRGS

por

Ramiro Michelon

Esse Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14 hs do dia 05 de maio de 2022 como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado APROVADO.

Profa. Dra. Luísa Rodriguez Doering
IME-UFRGS

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
IME-UFRGS

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
IME-UFRGS

O Termo de Aprovação assinado encontra-se na coordenação do curso.

Porto Alegre, 05 de maio de 2022.

Voz Longínqua (Vzdálený hlas)

Baixa e longínqua
É a voz que ouço. De onde vem,
Fraca e vaga?
Aprisiona-me nas palavras,
Custa-me entender
As coisas pelas quais pergunta
Não sei e não sei
Como responder-lhe-ei.

Só o vento sabe,
Só o sol sábio conhece.
Pássaros pensativos,
O amor é belo,
Me insinuam algo.
E o mais
Só o vento sabe,
Só o sol conhece.

Por que, ao longe, erguem-se as rochas,
Por que vem o amor?
As pessoas são indiferentes,
Por que tudo lhes sai bem?
Por que eu não posso mudar o mundo?
Por que não sei beijar?
Não sei e não sei
Talvez um dia compreenda.

Só o vento sabe,
Só o sol sábio conhece.
Pássaros pensativos,
O amor belo,
Me insinuam algo.
E o mais,
Só o vento sabe,
Só o sol conhece.

(Zdeněk Rytíř e Karel Svoboda,
Tradução de Clarice Lispector)

AGRADECIMENTOS

Mãe e Pai, obrigado por tudo, todos os dias e por entenderem que, às vezes, é preciso nadar contra a corrente.

Prof. Alvino Alves Sant'Ana, obrigado por todas as oportunidades e por confiar em mim, aceitando a proposta que conta um pouco do projeto que tanto ajudas.

Profas. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana e Dra. Luísa Rodriguez Doering, por aceitarem me avaliar e aprimorar o trabalho.

Profs. Dr. Claus Ivo Doering, Dra. Luísa Rodriguez Doering, Ma. Liana Beatriz Costi Nácul e Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana, pelos relatos e aprendizados compartilhados.

Colegas, que sempre juntos, estão nas horas difíceis e nas horas banais. Abraços especiais para Ana Paula Giussani Mocellin, Rafael Jacobs Kehl, Gabriela Teixeira da Silva e Emanuel Rodrigues Kapczynski.

Professoras e professores, que além de transmitir conhecimento de ponta, se tornaram amigas e amigos. Abraços também para Ms. Ana Luiza de Freitas Kessler, Dra. Leandra Anversa Fioreze, Dra. Maria Cecília Bueno Fischer e Dr. Samuel Edmundo Lopes Bello.

Ma. Giovana da Silva Lenzi, obrigado por todo o auxílio com a burocracia da universidade e os conselhos mais diversos.

Aos professores e monitores que passaram pelo Pré-Cálculo comigo, muito obrigado. Em especial, abraços para o professor Dr. Álvaro Krüger Ramos e para Victória Corrêa Alves.

Ao leitor também, por tirar um pouco do seu tempo para ler um trabalho que conta um pouco da história do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS e um dos problemas relacionados à Educação Matemática: o erro.

RESUMO

A transição da Escola Básica para o Ensino Superior é um momento árduo para o estudante. O nível de conhecimento exigido e a linguagem mais formalizada, por vezes, causam estranhamento e geram dificuldades para seguir no curso universitário. Isso se torna mais evidente quando se observa os altos índices de reprovação nas disciplinas mais elementares. Na busca de melhorar os índices de aprovação em Cálculo, e experienciar uma transição do Ensino Médio para a Matemática de nível superior, um grupo de professores do Departamento de Matemática Pura e Aplicada, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, desenvolveu e implementou o curso de extensão Pré-Cálculo. Voltado para os ingressantes da UFRGS, que têm a disciplina de Cálculo em seu primeiro semestre, o Pré-Cálculo é um curso que pretende facilitar a transição do Ensino Médio para a Matemática de nível superior. O presente trabalho tem por objetivo a análise, e a classificação, das produções feitas por estudantes, em resposta a problemas matemáticos propostos em testes, e coletadas em duas edições do curso de extensão Pré-Cálculo. Para observar as produções recolhidas, foi realizado um relato histórico dos motivos, e situações, que levaram à criação e o desenvolvimento do Pré-Cálculo, por meio de documentos e conversas com professores que participaram ativamente da sua elaboração. Também foram feitas observações acerca do ensino do Pré-Cálculo como parte formadora do licenciando em Matemática, trazendo à tona a sua parte pedagógica. No seguimento, estudou-se a metodologia de Análise de Erros e a sua apropriação da Análise de Conteúdo. Assim, utilizando os conhecimentos adquiridos, procedeu-se o trabalho propriamente dito, especificando cada tópico do curso como uma competência do estudante a ser aprendida e dominada. Por fim, teceram-se considerações sobre o trabalho, desde a parte histórica do curso de Pré-Cálculo como da Análise de Erros, chegando no que as produções, e as classificações dos erros cometidos em tais produções, mostram sobre as dificuldades que o estudante teve ao aprender os conteúdos do curso.

Palavras-chave: Pré-Cálculo. Análise de Erros. Análise de Conteúdo.

ABSTRACT

The transition from Primary School to Higher Education is an arduous moment for the student. The level of knowledge required, and the more formalised language sometimes cause strangeness and create difficulties in following the university course. This becomes more evident when we observe the high failure rates in the most elementary subjects. In order to improve the pass rates in calculus, and to experience a transition from High School to College level mathematics, a group of professors from the Department of Pure and Applied Mathematics of the Federal University of Rio Grande do Sul developed and implemented the Pre-Calculus extension course. Aimed at students entering UFRGS, who take Calculus in their first semester, Pre-calculus is a course to ease the transition from high school to college level mathematics. The present work has as objective the analysis and the classification of the productions made by students, in response to mathematical problems proposed in tests, and collected in two editions of the Pre-calculus extension course. In order to observe the productions collected, a historical account of the reasons, and situations, that led to the creation and development of Pre-calculus was carried out, by means of documents and conversations with professors who actively participated in its elaboration. Observations were also made about the teaching of Pre-Calculus as part of the formation of the graduate student in Mathematics, bringing to light its pedagogical part. Following, the methodology of Error Analysis and its appropriation of Content Analysis was studied. Thus, using the knowledge acquired, the work itself was carried out, specifying each topic of the course as a student competence to be learned and mastered. Finally, considerations about the work were made, since the historical part of the Precalculus course as the Error Analysis, arriving in what the productions, and the classifications of the errors committed in such productions, show about the difficulties that the student had when learning the contents of the course.

Keywords: Pre-Calculus. Error Analysis. Content Analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

COMGRAD	Comissão de Graduação
DEST	Departamento de Estatística
DMPA	Departamento de Matemática Pura e Aplicada
IM	Instituto de Matemática
IME	Instituto de Matemática e Estatística
PROGRAD	Pró-Reitoria de Graduação
PROREXT	Pró-Reitoria de Extensão
PUCRS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

MAT01041	Código da disciplina Ensino-Aprendizagem de Matemática III
MAT01044	Código da disciplina Laboratório de Prática de Matemática III
MAT01072	Código da disciplina Laboratório de prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III.
MAT01167	Código da disciplina Equações Diferenciais II
MAT01169	Código da disciplina Cálculo Numérico
MAT01353	Código da disciplina Cálculo e Geometria Analítica IA

MAT01354	Código da disciplina Cálculo e Geometria Analítica IIA
MAT01355	Código da disciplina Álgebra Linear IA

M1	Turma 1, da manhã, do curso de Pré-Cálculo de 2019
M2	Turma 2, da manhã, do curso de Pré-Cálculo de 2019
M3	Turma 3, da manhã, do curso de Pré-Cálculo de 2018

LISTA DE TABELAS

Sumário

1. Introdução

A entrada na universidade representa um marco na aprendizagem do estudante. É na aquisição de conhecimento proporcionado pelas disciplinas que se reformula a escrita em linguagem científica, principalmente nos estudos envolvendo a Matemática. Para muitos esse novo modo de estudo é um baque e, por diversos motivos, as dificuldades vindas da Escola Básica ressurgem e põem em xeque a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

As dificuldades para cursar disciplinas universitárias, principalmente as iniciais como Cálculo e Álgebra Linear, geram um alto índice de reprovação, que resulta em um aumento expressivo de turmas no semestre seguinte, e, por vezes, a desistência da vida acadêmica. A fim de facilitar a transição da Matemática aprendida no Ensino Médio para a do Ensino Superior, bem como para melhorar os índices de aprovação em Cálculo, desenvolveu-se o curso de extensão Pré-Cálculo na UFRGS. É nele que o estudante tem um primeiro contato com essa nova linguagem, mais sofisticada, e tendo informações úteis para a vida acadêmica. Na parte da Matemática revisam-se os conteúdos que, por vezes, são deficitários na Escola Básica, ou nem são vistas.

Ao longo da trajetória acadêmica do autor, por ter participado como monitor do curso de Pré-Cálculo, em seis edições, entre os anos de 2013 a 2019, percebeu que algumas questões abordadas, nos problemas propostos e nos testes, apresentam maior dificuldade de compreensão e resolução. Com a sua entrada no curso de Licenciatura em Matemática, no ano de 2018, ao estudar metodologias presentes na Educação Matemática, se tornou mais evidente a necessidade de pesquisar sobre o erro, visualizado em tais produções, e procurar possíveis causas para tais acometimentos.

Nesse sentido, é de interesse, da parte do educador matemático e do pesquisador, fazer suposições sobre o que as produções, que os alunos são confrontados perante problemas matemáticos, podem dizer a respeito das falhas de aprendizagem em Matemática?

Para tanto, este trabalho tem em seu início um histórico, dentro da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS, da criação e desenvolvimento do curso de Pré-Cálculo. Através dos relatos, indispensáveis, de seus organizadores, puderam ser feitas considerações sobre as causas e motivações que culminaram no projeto.[1]

> A entrevista, além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de colega de dados de alcance superficial ou genérica. [...] ela também pode ser vantajosa com pessoas com grande conhecimento, pois permite ao entrevistado fazer emergir aspectos que não são normalmente contemplados por um simples questionário. (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 120).

Além disso, também foi feita uma descrição de como o curso de Pré-Cálculo auxilia na formação do estudante de Licenciatura em Matemática, por meio da disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III. Esta foi desenvolvida em conversa com uma das professoras que incorporou o curso na prática docente, auxiliando o futuro professor a olhar para si e melhorar o seu trabalho na relação com o educando.

Como suporte teórico, utilizaram-se os conceitos de Análise de Erros e Análise de Conteúdo. A primeira, que é considerada pelo autor como tendência em Educação Matemática, é uma abordagem metodológica que procura compreender quais são as dificuldades de aprendizado, tendo seus fundamentos na Psicologia e na Didática da Matemática. E que se apropria das rotinas propostas pela Análise de Conteú-

[1] Devido a Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais (LGPD) (Lei nº 13.709 de 2018), as entrevistas encontram-se em posse do autor do texto e suas transcrições não foram incluídas no trabalho. Assim, sempre que trouxermos uma transcrição literal das entrevistas, apenas será identificado o entrevistado, sem a referência ao documento.

do na forma de organização, classificação e tratamento, para que então, sejam conduzidas à parte prática do trabalho.

Para o terceiro momento, foram obtidos, por meio do Termo de Consentimento Informado, cópias dos testes realizados por estudantes que participaram do Pré-Cálculo, em turmas, uma de 2018 e duas de 2019, e que aceitaram fazer parte da pesquisa. Nos testes constam problemas referentes ao conteúdo do curso e, para tanto, as questões foram tratadas como forma de avaliação de competências. Cada uma das dez seções diz respeito a um assunto que o estudante deve aprender, treinar e dominar. Nelas foram dados os enunciados de cada ano, o que era esperado que o estudante respondesse e quais erros foram mais observados.

Ao final, teceu-se considerações sobre o trabalho, retomando todo o processo de construção do capítulo de criação e desenvolvimento do Pré-Cálculo, e da metodologia de Análise de Erros. Também, fez-se comentários sobre cada competência exigida, pelo programa, ao estudante, através da análise das respostas que esse rol de testes pode apresentar.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo Geral

Analisar e classificar, com o apoio da Análise de Erros em Educação Matemática, as produções obtidas pelos estudantes participantes do curso de extensão Pré-Cálculo, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

2.2. Objetivos Específicos

Fazer levantamento histórico do curso de Pré-Cálculo, ministrado por docentes do Departamento de Matemática Pura e Aplicada, do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS.

Descrever os aspectos teóricos da Análise de Erros e da Análise de Conteúdo, trazendo-as ao problema da pesquisa.

A partir dos dados obtidos nos testes das edições de 2018 e 2019 do curso, classificar, segundo teoria utilizada, alguns dos erros cometidos nos testes dos participantes.

3. Justificativa

A dificuldade em Matemática apresentada por diversos ingressantes da universidade representa um aspecto de importante reflexão aos professores, mostrando as deficiências que ainda acometem a educação brasileira, tanto na Escola Básica quanto no Ensino Superior. O curso de Pré-Cálculo da UFRGS possibilita, ainda que em pouco tempo, uma percepção das possíveis deficiências na Matemática, advindas da Escola Básica. Uma das alternativas de compreender melhor esse problema é analisando as produções que os estudantes dão aos questionamentos propostos. Para tanto, o uso do recurso da Análise de Erros permite um melhor entendimento do saber matemático, mostrando ao estudante suas falhas e auxiliando a explorar novas propriedades de uma regra, situação ou técnica importante.

Os erros contêm um potencial educativo que precisa ser melhor explorado, não só pelos professores, como também, pelos próprios alunos (PINTO, 1998, p. 26). O objeto de pesquisa, o curso de Pré-Cálculo da UFRGS, traz um auxílio ao ingresso à vida universitária, uma vez que é um caminho entre o Ensino Básico e o Ensino Superior, retomando o aprendizado do primeiro e já preparando para os ensinamentos do segundo. É também um trabalho que permite mais liberdade de investigação, uma vez que, conforme Pinto (1998), muitas vezes, na Escola Básica,

> o professor não gosta de tornar pública sua intimidade profissional, de abrir sua sala de aula para ser estudada. Por mais que o pesquisador explique que a intenção não é avaliar o trabalho docente, um estudo de erro dos alunos acaba provocando alguma suspeita por parte do professor. (PINTO, 1998, p.62).

e, por abranger várias turmas, não se foca no que o professor ensina, mas no que se é ensinado. Elencar e analisar tais erros podem tornar o processo de aprendizagem mais facilitados, uma vez que direciona o trabalho na possível remediação das dificuldades apresentadas.

4. O Curso de Pré-Cálculo

Faz parte da formação do estudante universitário, de áreas do conhecimento onde a Matemática está envolvida, ter disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Tal saber é ministrado no início da vida acadêmica, por ser pré-requisito de assuntos avançados de cada curso. Porém, por diversos motivos como a defasagem apresentada pelo conteúdo que, muitas vezes não é visto ou é mal assimilado no Ensino Médio, problemas individuais de aprendizagem e até mesmo o impacto gerado pela linguagem mais formalizada da universidade, acaba por dificultar ainda mais o acesso ao conhecimento científico.

Na busca de diminuir tais problemas, um grupo de professores do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul criou, e implementou, um curso se propõe a facilitar a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, na área da Matemática, e a preparar os estudantes para a disciplina de Cálculo: o Pré-Cálculo. Esse capítulo tem no seu desenvolvimento um pouco da história e das motivações para tal elaboração, bem como a sua utilização na formação do licenciando em Matemática.

4.1. O problema das reprovações em Cálculo

As universidades brasileiras têm, segundo o Artigo 207 da Constituição Brasileira de 1988, como pilares de sustentação, o ensino, a pesquisa e a extensão. É a partir deles que o estudante se prepara para o mundo profissional, seja ele do trabalho ou da pesquisa científica. Muitas vezes porém, o estudante não está preparado para a linguagem técnica utilizada nas instituições.

Por ter suas fundamentações "comuns" bem estruturadas e formalizadas, a Matemática é uma das áreas do conhecimento que apresentam rigor em seus conteúdos. Observa-se então que muitos estudantes têm dificuldade em assimilar propriedades básicas, como a extração de dados importantes para resolução de problemas, em enunciados, e a falta de habilidade de operações aritméticas. Chamie (1991) aponta três grupos de convergência sobre as dificuldades na relação aluno-matemática: a primeira sobre o significado em Matemática, a segunda relacionada ao preconceito e a terceira comentando o desenvolvimento linear do currículo da Escola Básica.

> Dentre os indícios mais apontados, pelos professores, do despreparo dos alunos que ingressavam na universidade, estava a incapacidade de se expressar, a incapacidade de utilização da linguagem escrita, visível na dificuldade de construir frases completas e consistentes (e sem erros de ortografia) que os alunos demonstravam. (MALTA, 2004, p. 42).

Não é incomum encontrar estudantes ingressantes, em universidades, cada vez mais despreparados. Tal despreparo pode estar relacionado aos diferentes meios de aprendizagem aos quais os estudantes foram expostos. A diversidade de alunos por sala de aula com diferentes habilidades, interesses e níveis de formação apresenta claramente as deficiências na formação e/ou no domínio de conteúdos (MASOLA e ALLEVATO, 2016, p.64). As dificuldades são mais aparentes nos Cálculos, por ser na maioria dos cursos, um primeiro contato com a Matemática superior. Logo, os altos índices de reprovação são mais perceptíveis.

Na situação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS, tal constatação vinha sendo observada pelos professores das disciplinas de Cálculo. Lopes (1999), traz um trabalho estatístico sobre as turmas de Cálculo II, as quais ministrou em 1997, em comparação com outras universidades federais, chegando à conclusão de que "o fenômeno das altas taxas de reprovação nos cursos de Cálculo, atinge variados cursos em diferentes universidades do país" (LOPES, 1999, p. 134).

Lopes (1999) também tece considerações do que poderia ser feito para diminuir tão alta taxa de reprovações, como a inclusão de um curso de Pré-Cálculo para alunos com baixo desempenho no concurso Vestibular, diminuição do número de estudantes em cada sala de aula, exigência de nota mínima para cursar a disciplina de Cálculo e presença de monitores qualificados. Cientes desses e outros fatos, professores do Departamento de Matemática Pura e Aplicada (DMPA) da UFRGS iniciaram algumas modificações que procurassem se adereçar.

4.2. A unificação de disciplinas de Matemática da UFRGS

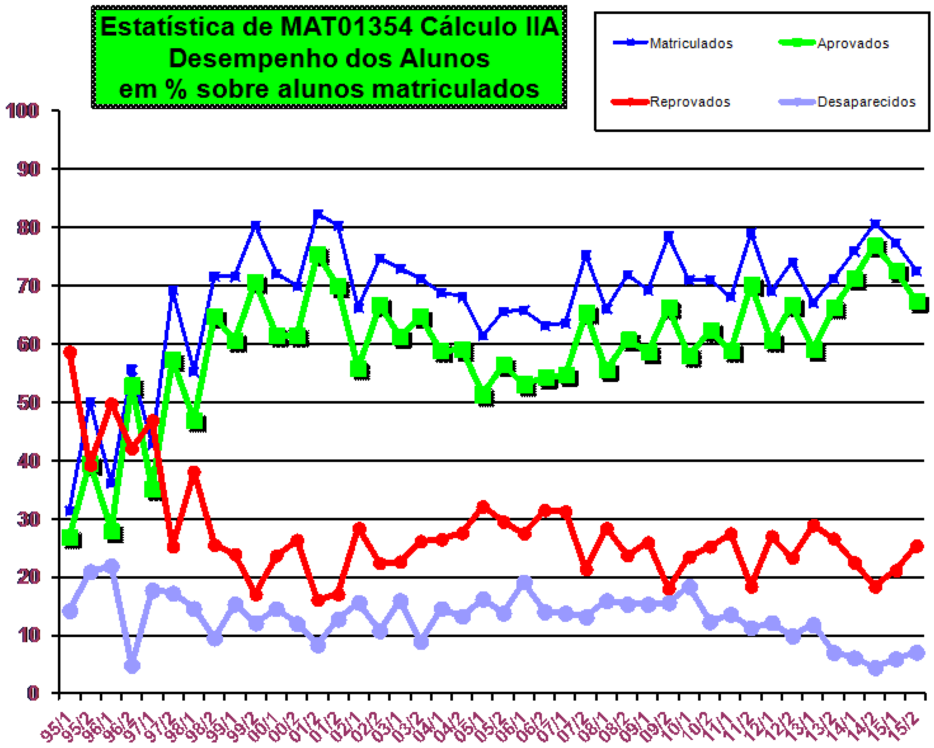
A Reforma Universitária de 1968, através da Lei nº 5.540, modificou o Ensino Superior no Brasil. Dentre as modernizações, pode-se ressaltar, no Artigo 11, a estruturação da universidade em departamentos, cada um abrangendo uma área de conhecimento e pesquisa. Além disso, o Artigo 17 proporcionou a abertura de vagas, nos cursos de graduação, para "candidatos que hajam concluído o ciclo colegial ou equivalente e tenham sido classificados em concurso vestibular" (BRASIL, 1968).

Nessas disposições, o número de estudantes que passaram a frequentar universidades, e conseguir um diploma superior, aumentou consideravelmente. Se tornou necessária a abertura de mais turmas para as disciplinas, principalmente aquelas que eram componente curricular de diversos cursos.

Um problema gerado, porém foi que, com uma quantidade maior de turmas, o número de docentes também aumentou, e, por mais que existisse um plano de ensino a ser seguido, havia discrepância entre turmas de uma mesma disciplina. Além disso, o perfil de aula do professor, bem como a bibliografia utilizada, influenciava nas formas de avaliação e nas provas aplicadas, resultando em mais aprovações ou reprovações.

Docentes do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS, principalmente os que ministravam as disciplinas de Cálculo II, visualizavam tais diferenças, através do acompanhamento estatístico de aprovados e reprovados. Isto fica evidente ao ver os dados dos primeiros semestres da imagem a seguir.

Figura 4.1: Estatística da disciplina Cálculo e Geometria Analítica IIA



Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/~mat01354/2graf.html. Acesso em 02/04/2022.

Buscando dirimir os altos índices de reprovação e os problemas de diferenças de conteúdo em cada turma, um grupo de professores começou um movimento de unificar o ensino destas disciplinas, como a organização de material a ser ministrado e lista de problemas. Essa reorganização culminou na unificação da disciplina MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica IA, no primeiro semestre de 1998, com algumas mudanças significativas:

> a) a adoção de um livro texto <u>único</u> para todas as turmas;
> b) a elaboração de um cronograma de atividades <u>único</u> para todas as turmas;
> c) a disponibilização, por parte de monitores e professores, de horários para atendimento extraclasse, [...];

> d) a unificação dos critérios de avaliação;
> e) a unificação das verificações de conhecimento por faixas de horário [...];
> f) a elaboração do cronograma, das provas e dos critérios de correção com a participação de toda a equipe de professores;
> g) a correção conjunta das provas [...]. (DOERING, DOERING e NÁCUL, 2004, p. 208).

Nesse novo cenário, o estudante não precisou mais ficar restrito às explicações de um professor, podendo procurar auxílio com os outros professores da disciplina, bem como ter a possibilidade de assistir as aulas em outros horários, sem perda do conteúdo. Do mesmo modo, o docente não era, grosseiramente, mais professor de uma única turma, o que permitiu, através das reuniões entre professores da disciplina, uma troca de experiências que auxiliassem nas suas dificuldades.

Para o Departamento, ocorreu uma dinamização na forma de tratamento das disciplinas. As reclamações se tornaram pontuais, a unificação das provas possibilitou que cada professor focasse na correção de uma única questão. Também, não havia mais tanto problema em encontrar professor para possíveis substituições, pois utilizava-se um livro texto único.

Conforme relato do Professor Dr. Claus Ivo Doering, durante a entrevista,

> [...] havia muitos livros de Cálculo [...]. E na época, em 99, foi lançado o Anton, e havia alguns professores, lá no Instituto, me lembro bem que usavam o Anton em inglês, para eles, para dar as aulas. E como ele foi traduzido [...] e aí alguns professores acharam que o Anton talvez fosse uma boa para a unificação. Começou no Cálculo II, depois no Cálculo I.[2]

Percebe-se que a unificação envolveu não só a universidade, mas outros agentes que se relacionavam com tal. Reforçado pela Professora Dra. Luísa Rodriguez Doering, "O Anton surgiu como um livro interessante, bom. E isso foi muito importante. Tanto que ele teve várias reedições, cada vez que a gente achava alguma coisa, era enviado para a editora e a editora lançava mais um livro".

---

[2] Anton, H., Bives, I., Davies, S. Cálculo, vol. 1 e 2. Bookman.

A percepção é visível quando olhados valores da redução de reprovações após a unificação, apresentados na tabela a seguir. Doering, Doering e Nácul (2004), explanam que M é o número de matriculados, D é o número de reprovados por excesso de faltas, R é o número de reprovados e A o número de aprovados. Além disso, a porcentagem de aprovados é sobre os alunos que estavam matriculados e presentes.

Tabela 4.1: Dados da unificação de Cálculo e Geometria Analítica IA.

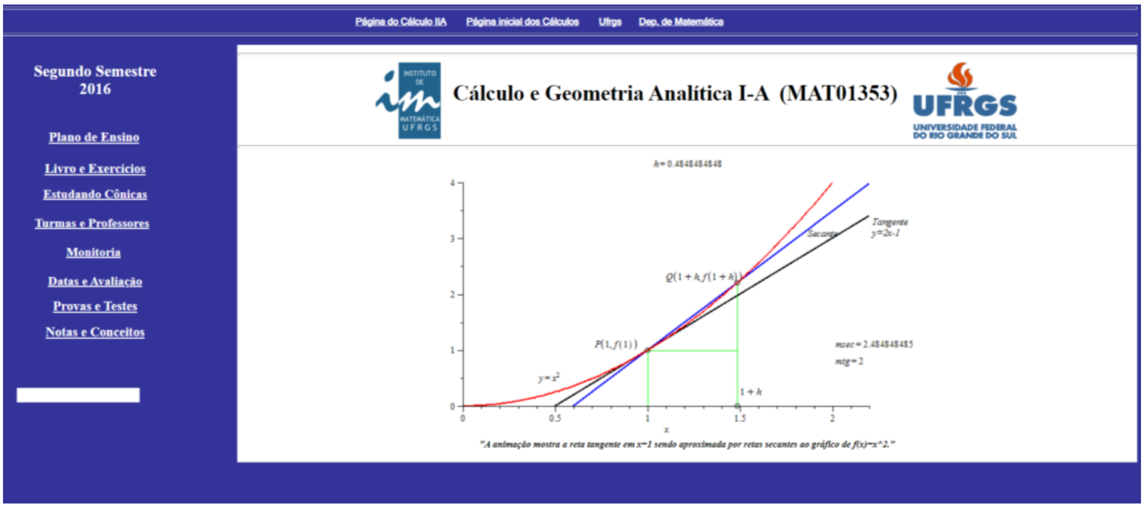
Semestre	Matriculados	%D	%R/M	%A/M	%A/P
1995-1	865	20,8	46,5	32,7	41,3
1995-2	430	20,5	51,9	27,7	34,8
1996-1	873	18,3	40,0	41,7	51,1
1996-2	473	28,1	48,2	23,7	32,9
1997-1	1110	22,7	47,9	29,4	38,0
1997-2	645	25,7	32,9	41,4	55,7
1998-1	1002	20,3	36,4	43,3	54,3
1998-2	460	29,4	26,1	44,6	63,1
1999-1	1000	17,9	38,4	43,7	53,2
1999-2	592	20,9	45,1	34,0	42,9
2000-1	908	18,0	40,0	42,1	51,3
2000-2	704	18,0	40,3	41,6	50,8
2001-1	1076	15,4	36,6	48,0	56,7
2001-2	700	18,7	30,9	50,4	62,0
2002-1	1027	15,4	35,4	49,2	58,1
2002-2	758	17,9	36,1	45,9	55,9

Fonte: (DOERING, DOERING e NÁCUL, 2004, p. 218)

As mudanças na organização da disciplina, e redução das reprovações observadas, foram reconhecidas como acertos, não só pelo DMPA, mas pelos órgãos superiores da universidade. (DOERING, DOERING e NÁCUL, 2004, p. 211). Isso motivou a unificação de outras disciplinas, como MAT01354 – Cálculo e Geometria Analítica IIA, MAT01355 – Álgebra Linear IA, MAT01167 – Equações Diferenciais II e MAT01169 – Cálculo Numérico .

Com esta etapa concluída, iniciou-se a implementação de material de apoio didático, disponibilizado em um site específico da disciplina, contando com informações sobre o semestre letivo.

Figura 4.2: Página do site da disciplina Cálculo e Geometria Analítica IA



Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/~mat01353/1calculo.html. Acesso em 03 de abril de 2022

Com essas etapas superadas, algumas dificuldades, de cunho conteudista, persistiam e eram constantemente notadas por professores e monitores. Em sua maioria, os problemas advinham da falta, ou da não-aprendizagem, de determinados saberes que são ensinados no Ensino Médio. Alguns professores começaram então a pensar em ações que ajudassem a sanar tais empecilhos.

4.3. Desenvolvimento e implementação do Pré-Cálculo

Como foi comentado na seção anterior, com o passar dos semestres pós-unificação das disciplinas de Matemática, algumas dificuldades, advindas da Escola Básica, se tornaram evidentes. Conforme relatado em entrevista com a Professora Luísa Rodriguez Doering, o problema já estava escancarado a muito tempo, de que os alunos não tinham certa destreza, ou uma certa familiaridade, com vários conteúdos do Ensino Médio.

No primeiro semestre de 2002, então, com a presença de quatro turmas, ocorreu a primeira edição do Curso de Pré-Cálculo. Entretanto, "por ter sido realizado concomitantemente às aulas, as exigências necessárias para as outras disciplinas cursadas resultou em uma evasão grande de estudantes". (DOERING, DOERING e NÁCUL, 2004, p. 221). A grande mudança, da edição no decorrer do semestre para a oficial, registrada, foi a busca de apoio e autorização, por parte da administração central da universidade, principalmente pela Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD) e Pró-Reitoria de Extensão (PROREXT), para que as aulas fossem ministradas no período de férias.

Esse apoio resultou em um trabalho muito mais organizado e voltado aos ingressantes. Segundo relato da Professora Ma. Liana Beatriz Costi Nácul, durante a entrevista, "Depois acabou sendo até promovido pela Extensão e a própria Pró-Reitoria chamava os alunos vestibulandos de todos os cursos [...]. O Pré-Cálculo já era direcionado a todos os alunos que tivessem a disciplina de Cálculo no primeiro semestre". E por ser realizado fora do período letivo, era necessária essa participação que vinha fora do departamento.

Voltado então, aos ingressantes da universidade, o convite era enviado logo após o resultado do Concurso Vestibular.

Figura 4.3: E-mail-convite enviado aos alunos ingressantes da UFRGS em 2013.

Porto Alegre, dia de fevereiro de 2013.

Prezado Calouro:

Em nome da UFRGS, queremos parabenizá-lo pela aprovação no Vestibular 2013.

Vimos convidá-lo a participar da edição 2013/1 do Curso de Pré-Cálculo, organizado pelo Departamento de Matemática Pura e Aplicada (DMPA) do Instituto de Matemática da UFRGS. Trata-se de um Curso dirigido aos calouros 2013/1 de todos os Cursos da UFRGS, cuja grade curricular contenha **disciplinas de Cálculo em seu primeiro semestre.** O Curso de Pré-Cálculo visa propiciar uma experiência que facilite a transição do Ensino Médio para a Matemática de nível superior, em especial o Cálculo, incentivando a autonomia e autocrítica no estudo e na superação das dificuldades. Por se caracterizar como uma atividade que busca melhorar os índices de aprovação em Cálculo, disciplina tida como um filtro em vários Cursos, o Curso de Pré-Cálculo atenderá, prioritariamente, aos alunos que obtiveram menos do que 12 acertos na Prova de Matemática do Concurso Vestibular 2013.

Horários e Inscrições:

O curso será realizado de 25 de fevereiro a 07 de março com 4 horas de aula diárias.

As inscrições serão realizadas somente pela Internet, de 14 a 21 de fevereiro, acessando o endereço http://www.ufrgs.br/precalculo . No mesmo endereço estão disponibilizadas as demais informações do Curso. **Para efetuar a inscrição no Curso de Pré-Cálculo 2013/1 você deverá informar seu número de CPF e como senha a data de seu aniversário (somente os 8 dígitos, no formato ddmmaaaa).**

O curso de Pré-Cálculo utilizará como livro texto o livro "Pré-Cálculo", 3ª edição, 2012, da Editora da UFRGS, que poderá ser adquirido pela internet no endereço www.editora.ufrgs.br, na Livraria Cultura, ou ainda na Livraria Terceiro Mundo, localizada no Campus do Vale. Salientamos que o livro será usado em todas as aulas e que dispor de um exemplar é essencial para acompanhar o Curso.

Seja bem-vindo à UFRGS,

PROREXT DMPA-IM PROGRAD

Fonte: do autor.

Devido à elevada população que poderia participar do curso – todos os que tinham em sua grade curricular as disciplinas de Cálculo – optou-se pelo atendimento daqueles ingressantes que, no Concurso Vestibular, tivessem feito 14 acertos ou menos, em uma época em que a prova de Matemática do Vestibular tinha 30 questões (DOERING, DOERING e NÁCUL, 2004, p. 228).

Figura 4.4: Cursos que frequentavam o Pré-Cálculo.

Cursos da UFRGS com alguma disciplina obrigatória de Cálculo em seu primeiro semestre:

Cursos com MAT01353 e MAT01354 no primeiro ano

Ciência da Computação
Ciências Atuariais - Noturno
Design de Produto
Engenharia Ambiental
Engenharia Cartográfica - Noturno
Engenharia Civil
Engenharia da Produção
Engenharia de Alimentos
Engenharia de Computação
Engenharia de Materiais
Engenharia de Minas
Engenharia Elétrica
Engenharia Mecânica
Engenharia Metalúrgica
Engenharia Química
Estatística (Bacharelado)
Física (Bacharelado + Licenciatura)
Física - Noturno (Licenciatura)
Matemática (Bacharelado)
Química (Bacharelado + Licenciatura)
Química - Noturno (Licenciatura)
Química Industrial

Cursos com outro Cálculo no primeiro semestre

Administração	MAT01102
Administração - Noturno	MAT01102
Agronomia	MAT01019
Biomedicina	MAT01109
Ciências Biológicas (Bacharelado + Licenciatura)	MAT01109
Ciências Contábeis	MAT01109
Ciências Econômicas	MAT01024
Farmácia	MAT01109

Geologia	MAT01109

Fonte:
https://web.archive.org/web/20060505214746/http://www.ufrgs.br/procalculo/precalculo/cursos.html
Acesso em 03 de abril de 2022.

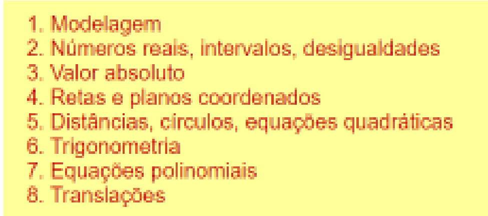
Tendo todo o planejamento e o apoio das instâncias superiores, faltava ainda decidir uma metodologia de ensino e quais os conteúdos específicos que deveriam estar presentes no curso. Quanto ao primeiro, como era um primeiro contato com a universidade, não seria viável ter a rigidez e formalidade exigidos. Além disso, os estudantes deveriam exercitar a teoria aprendida, tirando proveito dos monitores presentes. Optou-se portanto, pela utilização da Resolução de Problemas.

As aulas de Pré-Cálculo são divididas em três momentos: no primeiro acontece uma aula expositiva, no qual o professor apresenta a teoria proposta pelo cronograma; no segundo momento são propostos problemas relacionados ao conteúdo daquele dia. Resolvidos, muitas vezes em grupo, os estudantes tinham o auxílio constante dos monitores para sanar dúvidas que existiam. E depois, no terceiro momento, alguns problemas eram resolvidos no quadro, principalmente aqueles que apresentavam maior dificuldade.

Já com relação aos conteúdos, por ser uma transição da Matemática aprendida no Ensino Médio para a do Ensino Superior, parece ser claro que funções e modelagem de funções estivessem presentes. Para esse trabalho era necessária também uma parte que envolvesse conjuntos numéricos, sendo percebido pela falta de destreza algébrica. Além disso, Geometria Analítica e Trigonometria.

Dessa forma, os conteúdos abordados nas primeiras edições estão listados na imagem:

Figura 4.5: Conteúdos abordados nas primeiras edições do curso.

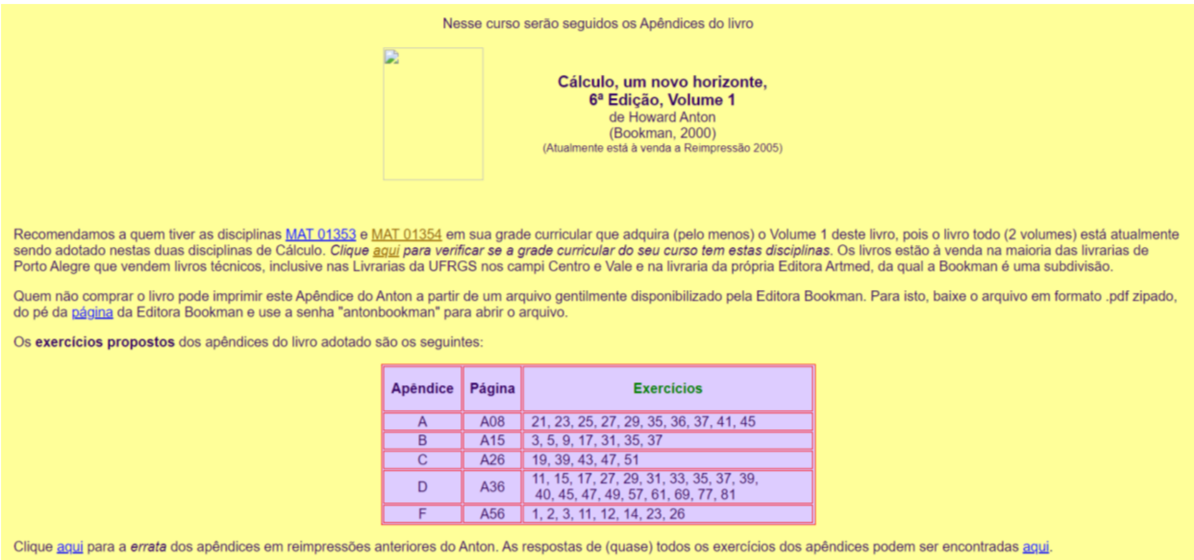


1. Modelagem
2. Números reais, intervalos, desigualdades
3. Valor absoluto
4. Retas e planos coordenados
5. Distâncias, círculos, equações quadráticas
6. Trigonometria
7. Equações polinomiais
8. Translações

Fonte:
https://web.archive.org/web/20060716002433/http://www.ufrgs.br/procalculo/precalculo/precalculo.html#informa
Acesso em 03 de abril de 2022.

Definido o que se ia ministrar, faltava uma bibliografia a ser seguida. Parece ter sido um seguimento da própria unificação que a seleção de exercícios do próprio livro-texto que se usava na disciplina de Cálculo.

Figura 4.6: Relação dos exercícios propostos na edição de 2006.



Nesse curso serão seguidos os Apêndices do livro

Cálculo, um novo horizonte,
6ª Edição, Volume 1
de Howard Anton
(Bookman, 2000)
(Atualmente está à venda a Reimpressão 2005)

Recomendamos a quem tiver as disciplinas MAT 01353 e MAT 01354 em sua grade curricular que adquira (pelo menos) o Volume 1 deste livro, pois o livro todo (2 volumes) está atualmente sendo adotado nestas duas disciplinas de Cálculo. *Clique aqui para verificar se a grade curricular do seu curso tem estas disciplinas*. Os livros estão à venda na maioria das livrarias de Porto Alegre que vendem livros técnicos, inclusive nas Livrarias da UFRGS nos campi Centro e Vale e na livraria da própria Editora Artmed, da qual a Bookman é uma subdivisão.

Quem não comprar o livro pode imprimir este Apêndice do Anton a partir de um arquivo gentilmente disponibilizado pela Editora Bookman. Para isto, baixe o arquivo em formato .pdf zipado, do pé da página da Editora Bookman e use a senha "antonbookman" para abrir o arquivo.

Os **exercícios propostos** dos apêndices do livro adotado são os seguintes:

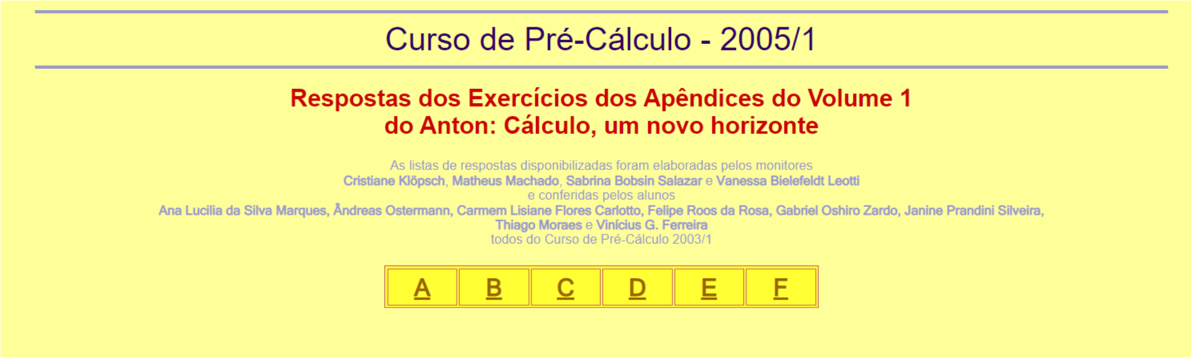
Apêndice	Página	Exercícios
A	A08	21, 23, 25, 27, 29, 35, 36, 37, 41, 45
B	A15	3, 5, 9, 17, 31, 35, 37
C	A26	19, 39, 43, 47, 51
D	A36	11, 15, 17, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 45, 47, 49, 57, 61, 69, 77, 81
F	A56	1, 2, 3, 11, 12, 14, 23, 26

Clique aqui para a *errata* dos apêndices em reimpressões anteriores do Anton. As respostas de (quase) todos os exercícios dos apêndices podem ser encontradas aqui.

Fonte:
https://web.archive.org/web/20060716002433/http://www.ufrgs.br/procalculo/precalculo/precalculo.html#inscrito
Acesso em 04 de abril de 2022.

Dicas para resolução e respostas para os exercícios propostos poderiam ser observados no site do programa, uma novidade na época.

Figura 4.7: Página de dicas e respostas aos exercícios selecionados.



Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/pre-calculo/anton/respostas.html
Acesso em 04 de abril de 2022.

Porém, ao longo das edições, foi percebida a necessidade de organizar melhor o material a ser utilizado. Desenvolveu-se então uma apostila com exercícios selecionados. A apostila continha somente exercícios selecionados e as respostas poderiam ser obtidas acessando o site do programa.

Figura 4.8: Apostila do programa


Notas de PRÉ-CÁLCULO

Ada Maria de Souza Doering
Alvino Alves Sant'Ana
Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Elisabete Zardo Búrigo
Flávia Malta Branco
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Maria Paula Gonçalves Fachin
Marilaine de Fraga Sant'Ana
Vânia Kraemer

INSTITUTO DE MATEMÁTICA — U.F.R.G.S.

Maio de 2007

Fonte: arquivo pessoal.

Não muito tempo depois, iniciou-se um projeto de criação de um livro específico para o curso. É relatado, na entrevista concedida pelo Professora Dra. Luísa Rodriguez Doering, que

> [...] a gente precisava de um livro que tivesse uma linguagem mais intermediária entre o que havia no Ensino Médio e o que era um pouco mais formal. Depois de ter várias listas de exercícios e apostilas a gente disse: bom, agora tá na hora de compilar tudo num livro. Então, de novo, contou com a Pró-Reitoria, agilizando a impressão do livro, etc.. E o grupo de professores que se dispôs a escrever um livro colaborativo.

Assim, desenvolveu-se o livro colaborativo, escrito pelos professores que lecionavam no curso. Em linguagem mais simplificada, aborda com teoria e exercícios os conteúdos previstos. Nessa fase já houve uma readequação dos conteúdos a serem ensinados.

Figura 4.9: Conteúdos atualmente abordados no curso.

1. **Funções reais: números reais, desigualdades, valor absoluto**
2. **Geometria Analítica: distância no plano, retas e círculos no plano**
3. **Polinômios: a família x^n, translações, reflexões, alongamentos**
4. **Equações polinomiais: algoritmo da divisão, raízes racionais, frações parciais**
5. **Trigonometria: funções trigonométricas, lei dos senos e cossenos**
6. **Trigonometria: radianos, gráficos da função seno e relacionadas**

Fonte: https://www.ufrgs.br/precalculo/precalculo/precalculo.html#informa
Acesso em 04 de abril de 2022.

Figura 4.10: Livro do programa Pré-Cálculo.

Fonte: arquivo pessoal.

O curso de Pré-Cálculo auxilia aqueles estudantes que apresentam dificuldades, ou falhas de aprendizagem. Se em 1999, Lopes fez um estudo particular sobre as reprovações em Cálculo II, traçando considerações sobre o baixo desempenho no Vestibular e a aprovação na disciplina, aqui evidencia-se que o curso contribui para o aprendizado e para a superação das dificuldades trazidas, da Escola Básica. Conforme comentado na entrevista com os professores, consta no Relatório de Ação de Extensão do Pró-Cálculo de 2008 que, dos estudantes que haviam acertado até 13 questões de Matemática no Vestibular, aqueles que fizeram o Pré-Cálculo tinham maior aprovação na disciplina de Cálculo I, do que aqueles que obtiveram mesmo número de acertos, no Vestibular, mas que não fizeram o curso de Pré-Cálculo. O mesmo acontecia com aqueles ingressantes que acertaram entre 14 e 17 questões de Matemática (no Vestibular), e que não se observavam diferenças para aqueles estudantes que tinham acertado mais que 18 questões (no Vestibular), chegando à conclusão de que o curso de Pré-Cálculo era benéfico para os calouros que apresentavam maior risco de reprovação em Cálculo.

Isso significa que, para o aluno que foi bem no Vestibular, não importava se participava do Pré-Cálculo ou não, seu desempenho na disciplina de Cálculo I era bom. Mas, se foi mal no Vestibular e fazia o Pré-Cálculo, então o curso era importante para a formação do mesmo, além de influenciar na não desistência do curso.

A existência do curso de Pré-Cálculo, na UFRGS, é um ganho, não só para o estudante, mas para o departamento e para a universidade, que pode proporcionar um primeiro contato com a Matemática universitária e preparar esse estudante para as disciplinas que serão cursadas.

O processo de unificação das disciplinas iniciais de Matemática resultou num projeto que modificou o sistema de ensino, no DMPA. O Pré-Cálculo auxiliou muitos estudantes a sanar suas deficiências, advindas, muitas vezes, dá má-interpretação, e não conhecimento, dos conteúdos escolares.

4.4. Pré-Cálculo na formação do professor de Matemática

Conforme o Pré-Cálculo foi ganhando importância na universidade, o sistema de ensino foi visto como oportunidade de aprendizagem para os estudantes da Licenciatura em Matemática. Através das Resoluções N.ºs 05, 06, 07 e 08 de 2004, os currículos da Licenciatura em Matemática (diurno e noturno), do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS (na época Instituto de Matemática) sofreram alterações. Dentre elas, a junção das disciplinas MAT0141 – Ensino-Aprendizagem de Matemática III e MAT01044 – Laboratório de Prática de Matemática III em uma nova: MAT01072 – Laboratório de prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III.

Entrando em vigor a partir do primeiro semestre de 2005, cujos objetivos, para o licenciandos, eram que:

> 1. adquiram uma visão geral dos programas de nível fundamental e médio, no tocante aos temas da súmula, identificando a presença de obstáculos didáticos e epistemológicos, reconhecendo diferentes abordagens para os conteúdos e relacionando recursos didáticos variados.
> 2. reconheçam o potencial dos recursos midiáticos – jornal e Internet- para o ensino de matemática, desenvolvendo e implementando experiências pedagógicas.
> 3. Adquiram familiaridade com o planejamento e com a prática de ensino. (GARCIA, 2008),

foi no primeiro semestre de 2006 que, ministrada pela Professora Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana, iniciou-se os estudos e a inclusão do Pré-Cálculo como parte formadora dos estudantes de Matemática, principalmente para os que cursavam a disciplina no primeiro semestre.

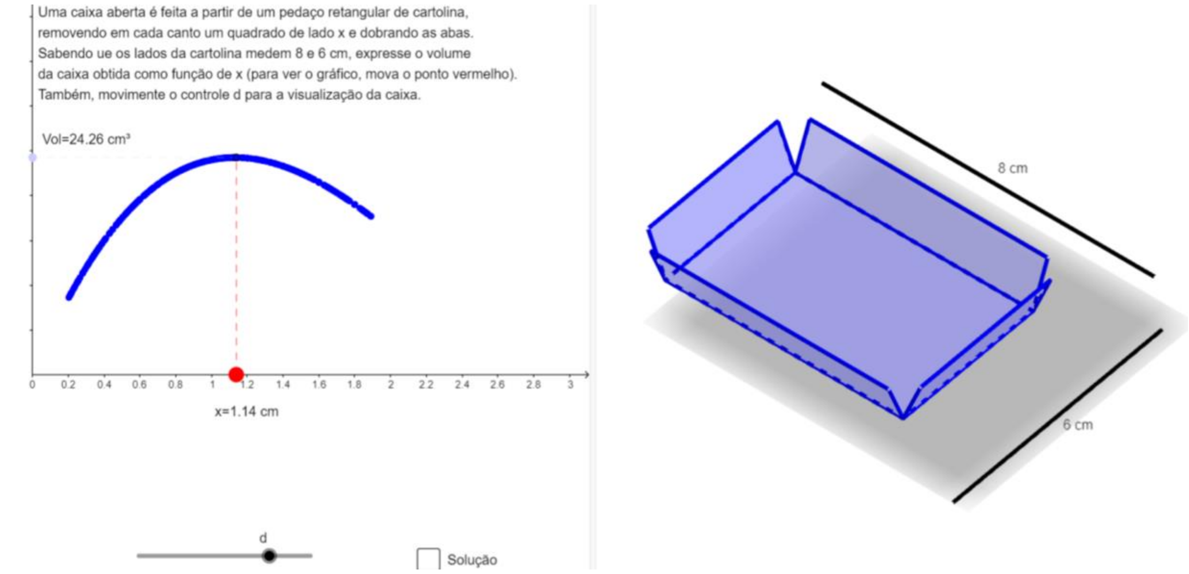
Enquanto que no curso de extensão o conteúdo é dado de forma contínua, na disciplina há um estudo mais profundo acerca dos saberes presentes, bem como uma preparação do estudante de como se portar diante de uma turma que não está mais num local onde há um cuidado maior com o seu aprendizado. Considerações como a forma de comunicar, a linguagem utilizada de modo que o docente facilite o entendimento do conteúdo. Por ser um intermediário entre a Escola Básica e o Ensino Superior, ao mesmo tempo em que introduz uma linguagem mais formal, utiliza o fator pedagógico para que o impacto não seja tão grande, a ponto, muitas vezes, de levar esse estudante à desistência do curso.

A título de exemplo, o autor desse trabalho participou da disciplina no primeiro semestre de 2020. Nas poucas aulas presenciais que participou, antes que as aulas se tornassem remotas devido a pandemia de Coronavírus, quando a resolução de exercícios eram feitas no quadro, ocorria uma discussão do modo como cada exercício era explicado, como agir em determinadas situações, o que não fazer e o que melhorar.

Como relatado anteriormente, a metodologia utilizada no curso de Pré-Cálculo é a de Resolução de Problemas. Justamente, pelo Laboratório III ser uma disciplina de prática, algumas oportunidades de utilização de outras tendências em Educação Matemática puderam ser postas em prática com o curso. O uso de Modelagem Matemática é um exemplo.

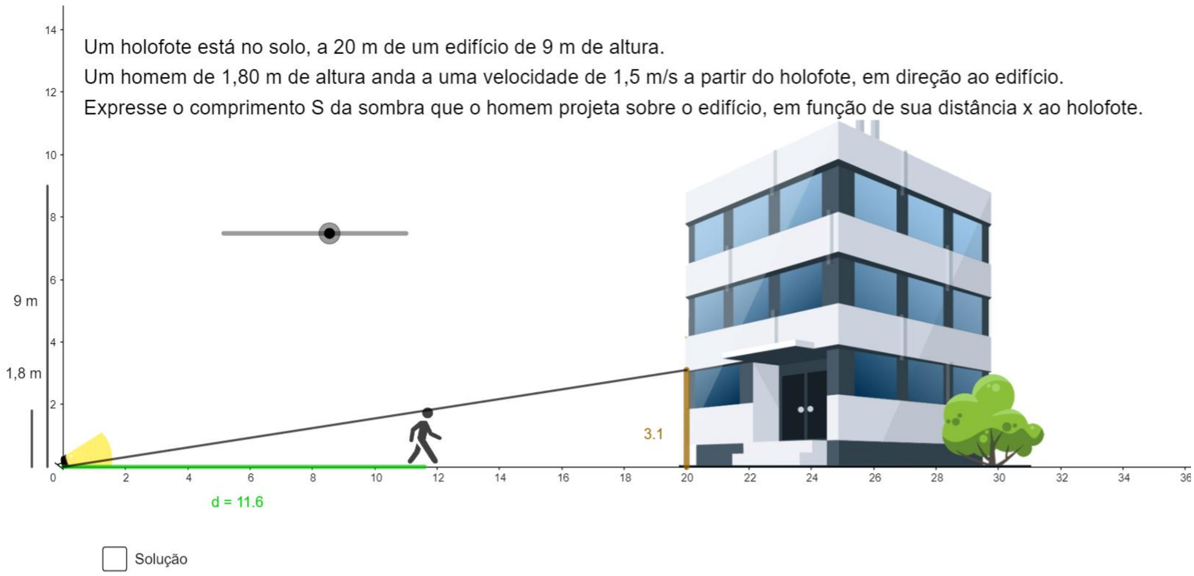
Além disso, o uso de tecnologias digitais também se tornou parte integrante. Apesar de pontuais, e restrito aos conteúdos de movimentações das representações gráficas de funções, elas têm tido uma maior abertura nos últimos anos. Tanto na elaboração dos exercícios do livro colaborativo, para melhor visualização, como na produção de vídeos explicativos, em tempos de aulas remotas. Como no curso o conteúdo é "fechado", é possível também a inclusão de outros assuntos ligados à disciplina de Cálculo, como funções exponenciais e logarítmicas.

Figura 4.11: Exemplo 1 de exercício de funções elaborado no Geogebra®.



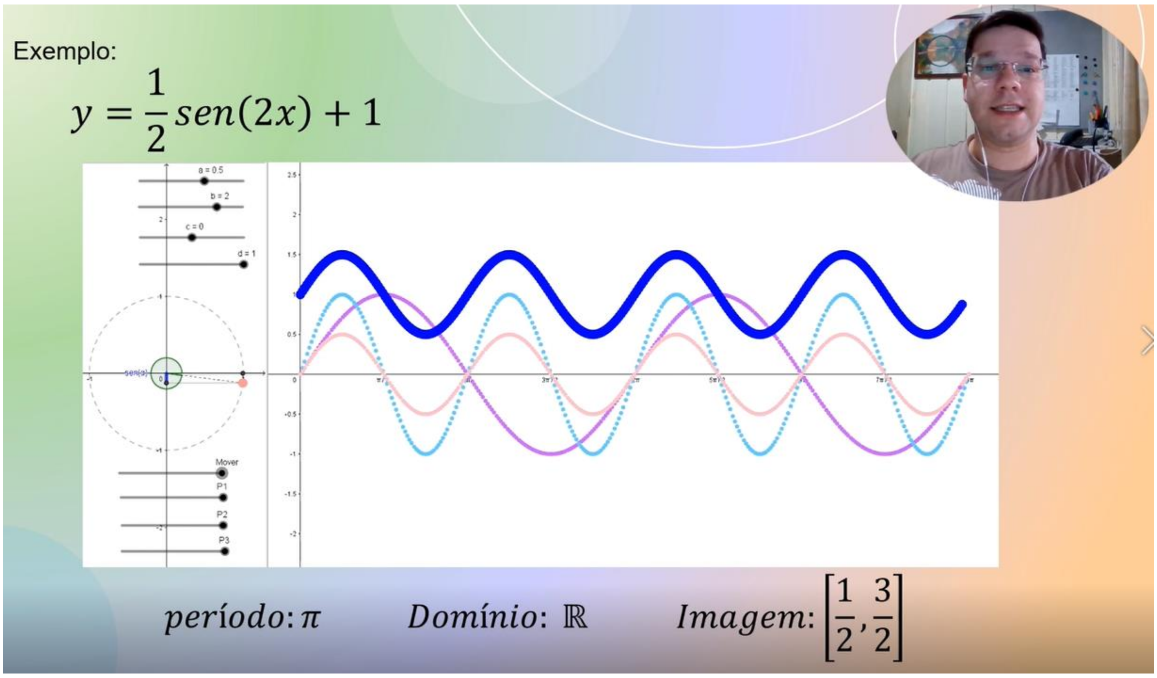
Fonte: arquivo pessoal. Disponível também em https://www.geogebra.org/m/wkfmrzp8.

Figura 4.12: Exemplo 2 de exercício de funções elaborado no Geogebra®.



Fonte: arquivo pessoal. Disponível também em https://www.geogebra.org/m/a6hg6yqe.

Figura 4.13: Exemplo de vídeo explicativo de conteúdo.



Fonte: arquivo pessoal. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=K3pAp9xyl-o.

Outro aspecto importante, que é trabalhado na disciplina de Laboratório III, é com relação à correção de problemas. O erro cometido em questões não é visto como agente excludente, mas como agente que aponta a falha e não a penaliza, dando a oportunidade de reorganizar o aprendizado do estudante que cursa o Pré-Cálculo. A construção do parâmetros de correção, por parte dos licenciandos, é realizada de forma conjunta e discutida de modo a não penalizar as falhas apresentadas. Nesse sentido, a produção observada nos testes é avaliada não só pelo que se espera do estudante do Pré-Cálculo, mas pelo que ele traz de bagagem aprendida.

Nesse sentido, o estudante da Licenciatura compreende que o erro é parte integrante da aprendizagem e não deve ser tratado como algo a ser evitado. Também, que o estudante pode aprender com esse erro, retomando o conteúdo, por ele aprendido, e observando diferentes formas do mesmo assunto.

A inclusão do curso de Pré-Cálculo, como parte integrante do aprendizado, na disciplina de Laboratório de prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III, é muito importante para a formação do futuro professor. Não é só uma prática de ensino, na qual são retomados assuntos ligados ao Ensino Médio. É uma oportunidade de trabalhar na própria universidade com o Ensino Superior, mostrando como é diferente o tratamento ligado ao planejamento, as ações e avaliações da aprendizagem.

O Pré-Cálculo tem sido um facilitador, não só das disciplinas de Cálculo. É devido a ele que os participantes, vestibulandos aprovados, têm um primeiro contato com a vida universitária. Sendo um momento de integração, em que ainda não há toda a formalidade da ciência pura, seu serviço vai além de transmissão de conteúdo. É nele que muitos descobrem como acontecem os trâmites de matrícula e do semestre, como se faz o TRI e como se acessa o RU – Restaurante Universitário.

Como foi comentado, a avaliação dos estudantes não é feita só em dizer se está certo ou errado. É preciso ir além, pensar como o estudante pensou, compreender as causas de tal falha. Por mais que seja em uma situação crítica, na qual professores e monitores têm que lidar com os erros que advêm da Escola Básica, se torna importante estudar tais erros e classificá-los. Para tanto, o próximo capítulo é destinado a revisar a história da Análise de Erros, para então, adequar essa tendência da Educação Matemática aos testes do Pré-Cálculo.

5. Análise de Erros

No capítulo anterior procedeu-se um levantamento histórico acerca da criação e implementação do curso de Pré-Cálculo da UFRGS. Pela participação, do autor do trabalho, em várias edições do programa, observaram-se alguns aspectos importantes relativos aos exercícios propostos, mas, principalmente, aos testes realizados, de primeira área e segunda área. Tais aspectos são os erros cometidos pelos estudantes, que, por diversos motivos, ocorrem no processo de aquisição do conhecimento.

Surge então, a necessidade de olhar mais a fundo tais erros e classificá-los, de acordo com sua natureza. Mas, simplesmente trazê-los à luz da discussão não é suficiente. Se faz necessário um embasamento teórico do que é o erro na Educação Matemática e como se dão as pesquisas sobre o tema. Utilizar-se-á, então, a Análise de Erros como metodologia de pesquisa, e não como metodologia de ensino. Assim, será possível elencar algumas classificações que aparecem na literatura, juntamente com alguns conceitos da Análise de Conteúdo.

5.1. Concepção de Análise de Erros

No curso da História da Ciência, a Matemática sempre exerceu um papel de destaque, agindo como uma reguladora dos conceitos que estão sob seu domínio, dos básicos aos mais complexos. Proporciona-se assim uma elaboração simplificada e sucinta das “regras” que regem os seus conteúdos. Para atingir tal consenso, se faz necessário um estudo profundo acerca das falhas que podem acontecer e que colocam à prova toda uma teoria. É neste momento em que aparece um estudo do erro.

Analisar uma produção matemática escrita requer não somente rigor, mas uma busca dos possíveis gatilhos que favorecem o pensamento precipitado. De nada adianta apontar o erro cometido por alguém se não procurar compreender o que ocasionou tal ato. Esta anomalia é, de certa forma, um diagnóstico de que algo não foi bem assimilado. Por ser um resultado que não é esperado, é tratado como uma falha de aprendizagem. No que tange à fase de aprendizagem de determinada competência matemática, cabe à Educação Matemática encontrar, compreender e remediar os fatores de tal acontecimento. "[...] analisar as produções é uma atividade que traz, para o professor [...] a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes" (CURY, 2007, p. 15).

Porém, o erro é um saber e não deve ser rejeitado. Pode parecer um exemplo simples, mas imagine se matemáticos fossem céticos a ponto de não aceitar todo o trabalho empenhado para o desenvolvimento de Geometrias Não-Euclidianas, simplesmente porque não habilitar o Postulado das Paralelas fosse um erro crasso?

Radatz (1979) traz um breve apanhado sócio-histórico da dificuldade em encontrar produções iniciais, documentadas, acerca do erro, como objeto de estudo da Educação Matemática, nos Estados Unidos, na Europa e União Soviética. Nesse sentido, infere-se que o trabalho com a análise do erro remonta a estudos que têm caráter psicológico.

> Os métodos e hipóteses da pesquisa americana em erros têm sido longamente orientadas em torno do Behaviorismo, enquanto na Europa, aspectos da teoria da Gestalt e influenciados pelas ideias de reformadores pedagógicos. Já na União Soviética as condições do sistema educacional alterado e o currículo foram fatores importantes. Estas diferenças podem ser uma das razões pelas quais a pesquisa sobre erros na aprendizagem da Matemática raramente foi divulgada para além das fronteiras nacionais[3]. (RADATZ, 1979, p. 163).

Dos primeiros relatos encontrados na literatura, e exemplificando cada uma dessas correntes, Cury (2007) cita três autores. Nos Estados Unidos aparecem os es-

---

[3] *The methods and hypotheses of American research on errors have long been oriented toward behaviourism, whereas in Europe aspects of Gestalt theory and ideas of pedagogical reformers have been influential; in the Soviet Union the conditions of the changed educational system and the curriculum were important factors. These differences may be one reason why research finding on errors in mathematics learning were seldom exchanged across national boundaries.* (tradução do autor)

tudos de Thorndike (1936, p. 77), que representam bem os conceitos ligados ao Behaviorismo, tais como o sucesso da aprendizagem se dá pelos exercícios de repetição e o desejo profundo do aprendiz, bem como o uso das Leis do Exercício e do Efeito[4]. Desta segunda lei, depreende-se que caso o estudante não estivesse satisfeito com o modo de resolver exercícios, o desânimo poderia levá-lo ao erro.

Com relação à Europa, partindo das percepções filosóficas acerca do erro cometido por matemáticos, feitas por Poincaré (1908) na criação e na invenção em Matemática, em especial sobre como os estados consciente e inconsciente auxiliam o fluxo de pensamento na resolução de um problema, quanto mais elevado o saber específico de algo, mais erros são cometidos, mas esses mesmos erros são percebidos e sanados. Segundo Hadamard (1954, p. 49), a razão para isso é que sempre que um erro foi cometido, o *insight* – a mesma sensibilidade científica de que falávamos – avisa-me que os meus cálculos não parecem como deveriam[5]. Com relação ao terceiro caso, a União Soviética, surge a crítica à abordagem estatística das pesquisas para avaliação das habilidades matemáticas feitas por Krutetskii (1976), que focavam no resultado de testes e não na forma de resolução.

Um avanço para a área veio com o trabalho *Human Problem Solving* (Resolução de Problemas Humanos) de Newell e Simon (1972) que, no intuito de entender como se comporta o pensamento ao resolver problemas, fazem uma correspondência da Teoria da Informação e Operacionalização, estudadas em Matemática Aplicada, para o campo da aprendizagem, trabalhando com uma linha de pesquisa que considera o homem como um ser processador da informação. Isto sugeriria que uma pessoa

---

[4] Lei do Exercício: o uso fortifica e o desuso enfraquece as conexões mentais.
Lei do Efeito: as conexões acompanhas ou seguidas de estados de satisfação tendem a fortalecer-se; as conexões acompanhadas ou seguidas de estados de aborrecimento, tendem a enfraquecer-se. (THORNDIKE, 1936, p. 78).

[5] *The reason for that is that whenever an error has been made, insight – that same scientific sensibility we have spoken of – warns me that my calculations do not look as they ought to.* (tradução do autor)

poderia ter a aprendizagem modelada tal qual um computador. Como esse processo é dependente do desenvolvimento conceitual, ele só poderia ser utilizado após o sujeito ser capaz de assimilar os conhecimentos adquiridos (NEWELL e SIMON, 1972, p. 7). Este fato se aproxima, então, da abordagem cognitiva, estudada por Piaget.

5.2. Contribuições da Psicologia e da Epistemologia

Tendo feitas a observação acerca do processamento da informação, os erros poderiam ser equiparados, então, a instruções inadequadas, num programa de computador, que não permitem que o aprendiz alcance o resultado desejado (BORASI, 1996, p. 4)[6]. No Construtivismo Piagetiano, o conhecimento é construído pela percepção, interpretação e incorporação das ações realizadas pelo ser com o meio (interações sujeito-meio (LA TAILLE, 1997, p. 32)). Justamente por interpretar o que está englobando o sujeito, este é passível de não assimilação. Nas escritas de La Taille (1997, p. 35), Piaget chamou de *perturbação: aquilo que faz obstáculo à assimilação*. Tal perturbação teria duas categorias: uma que se opõe à acomodação e a outra que é representada pela insatisfação, ou insuficiência, quanto ao recebimento do saber.

Depreende-se, então, que acontece uma falha nesse processo. Tal falha pode ser considerada uma anomalia ("alguma coisa que não faz sentido" (SIEGEL & CAREY, 1989, p. 23)).

> Porque os erros, por definição, são resultados que não correspondem às expectativas, podem ser considerados como um exemplo prototípico de uma anomalia. Assim, também eles podem ser vistos como um estímulo natural

[6] *Errors are here equated to inappropriate instructions in a computer program that do not allow the learner to reach the desired outcome.* (tradução do autor).

para a reflexão e exploração e como um meio para apoiar a investigação. (BORASI, 1996, p. 28)[7].

Em uma perspectiva psicogenética, Pinto (1998, p. 27) analisa duas formas do funcionamento do erro: uma de cunho formal, onde o erro se opõe ao acerto, e a outra de dimensão natural, "visto" pelo próprio sujeito, como integrante possível e necessário da construção do conhecimento. Pedagogicamente, quando o educador proporciona situações problemas que induzem um desequilíbrio cognitivo, o educando é posto a um formato que instiga o trabalho de provar o saber adquirido. "[...] é benéfico para os estudantes de Matemática, pois poderia contribuir para o desenvolvimento de algumas competências metacognitivas."[8] (BORASI, 1996, p. 32).

Se a Análise de Erros encontrou na Matemática um lugar de amplo estudo, se faz necessário ter um suporte educacional ao professor, para que se entenda o que está em jogo quando o erro acontece. E é na Didática da Matemática, em especial na sua Epistemologia, que se pode encontrar uma resposta.

Dos trabalhos feitos em 1934 por Popper (2001) e em 1978 por Lakatos (1997), sobre a fundamentação e lógica do conhecimento, pesquisadores da Educação Matemática começaram a se perguntar sobre as transformações que os conhecimentos matemáticos passam ao serem ensinados bem como os modelos do saber matemático que são construídos e continuam em constante evolução (IGLIORI, 2010, p. 95). Um dos primeiros a se aprofundar nesse assunto foi Bachelard (1938), que no primeiro capítulo do livro *A Formação do Espírito Científico* supõe que é no interior do indivíduo que ao se deparar com um novo saber, surgem conflitos com experiências ante-

---

[7] *Because errors, by definition, are results that do not meet expectations, they can be considered a prototypical example of an anomaly. Thus they, too, can be viewed as a natural stimulus for reflection and exploration and as a means to support inquiry.* (tradução do autor).

[8] *[...] could be beneficial to mathematics students as it could contribute to developing some of the metacognitive skills [...].* (tradução do autor).

riormente vividas, gerando uma má interpretação e afetando o estabelecimento correto do conhecimento. Tais conflitos foram denominados obstáculos.

> A análise dos obstáculos no contexto da matemática deve ser realizada com uma atenção particular, pois, segundo argumentou Bachelard, a evolução dessa ciência apresentaria uma maravilhosa regularidade em seu desenvolvimento, conhecendo períodos de paradas, mas não etapas de erros ou rupturas que destruíssem o saber estabelecido anteriormente. (PAIS, 2018, p. 40).

Os obstáculos foram estudados mais a fundo por Brousseau (1983), que traz três origens fundamentais: ontogênica (relacionadas às capacidades cognitivas), didática (decorrentes das escolhas do sistema de ensino) e epistemológica (saber mal adaptado) (PINTO, 1998, p. 37). Um erro não seria, então, a ausência do saber, mas um conhecimento mesmo assim.

> Além disso, esse conhecimento não é um conhecimento falso, uma vez que permitiu ou permite produzir respostas satisfatórias ou corretas a determinados tipos de problemas. No entanto, esse mesmo conhecimento, ao ser transposto ou aplicado a outras categorias de problemas, acaba produzindo respostas inadequadas ou incorretas, produzindo erros. Mas esses erros produzidos por obstáculos devem, por sua vez, ser considerados um tipo especial de erros, uma vez que não se incluem entre aqueles produzidos pelo desconhecimento, pela ignorância, pelo acaso, pela imprevisibilidade ou pelo descuido. (BROUSSEAU apud MIGUEL, 2004, p. 92).

A noção de obstáculo sem dúvida é um avanço para a área da Análise de Erros, quando vista historicamente, mas, por considerar o erro com um conhecimento, este não some de uma hora para outra. Ele permanece no indivíduo e se adapta a novas experiências e saberes vivenciados.

5.3. Borasi e a Taxonomia de Erros e a situação brasileira

Com o advento de novas teorias em Psicologia da Educação Matemática, o estudo dos erros ganhou novos desafios: não só avaliar mas utilizar o erro como material educacional. Nos trabalhos de Radatz (1979, 1980) consta catalogações de produções científicas, até a década de 1970, que envolvem a área. Além disso, reconduz o foco do desenvolvimento das pesquisas, procurando expandir o erro pelo processamento da informação.

> As razões para esse desenvolvimento parecem ser as seguintes:
> 1. Desapontamento e ceticismo, tanto em relação às normas quanto critérios para os resultados de testes de Matemática, têm aumentado a atenção para vários aspectos diagnósticos do ensino.
> 2. A reforma curricular dos conteúdos matemáticos provavelmente não conduziu a menores dificuldades e erros, mas a novos erros específicos.
> 3. A individualização e diferenciação da instrução matemática requereram diagnósticos específicos das dificuldades [...].
> 4. Críticas aos paradigmas tradicionais para a investigação empírica [...] estimularam outros métodos de investigação na Educação Matemática [...][9]. (RADATZ, 1979, p. 163-164).

Citando os autores que trabalharam sobre alguns tipos de erros cometidos, chega à algumas conclusões, entre as quais, de que estes não são a ausência de respostas corretas ou de falhas isoladas, bem como são passiveis de investigação de como ocorre a aprendizagem em Matemática (RADATZ, 1989, p. 170).

É também nos Estados Unidos que aparece uma das pensadoras mais conhecidas na área. A matemática Raffaella Borasi amplia as possibilidades, no processo de ensino-aprendizagem, do trabalho com os erros. Remontando questões da Filosofia e

[9] *1. Disappointment with and skepticism about both norm-referenced and criterion-referenced achievement tests in mathematics have increased attention to the diagnostic aspects of teaching.*
2. Reform of the mathematical content of the curriculum has probably not led to fewer difficulties and errors; it has certainly led to new and content-specific errors.
3. The individualization and differentiation of mathematics instruction required skillful, specific diagnoses of difficulties [...].
4. Criticisms of the traditional paradigms for empirical research [...] have stimulated other methods of research in mathematics education [...]. (tradução do autor).

História da Ciência, passa a tratar as falhas cometidas não como algo a ser demonizado, mas uma oportunidade de exploração de tal como afirmação verdadeira, e quais implicações esse novo conhecimento traria para o processo formativo. Segundo Cury (2007, p. 38), "ao invés de tentar eliminar o erro, reexplicando o processo, [...], ela sugere que o professor, por exemplo, proponha aos alunos investigar se há [...] 'regra' [...], por eles inventada, funcione".

A essa exploração das potencialidades que o estudo do erro, pelo estudante, tem, Borasi denomina uma das expressões mais encontradas em seus trabalhos: trampolins para a aprendizagem (*springboards for inquiry*), que nada mais é que tirar proveito dos erros como forma de aprendizagem. Sugerindo que, dependendo do nível de abstração matemática do conteúdo abordado em sala de aula, a investigação acerca do erro pode adquirir diferentes questionamentos, que Borasi também aborda as chamadas Posturas de Aprendizagem. Essas posturas foram organizadas de modo a relacionar os níveis de discurso matemático (realizar um conteúdo específico, compreender uma técnica e compreender a natureza desta técnica) com três posturas frente se analisar erros (remediação, descoberta e investigação). Tal organização é chama de Taxonomia dos usos dos Erros, apresentada na tabela a seguir.

Tabela 5.1: Taxonomia dos usos dos Erros como Trampolins de Aprendizagem

	Nível do Discurso Matemático		
Postura de Aprendizagem	Trabalhar um conteúdo matemático específico	Compreender uma técnica matemática	Compreender a natureza da Matemática
Descoberta	Reconhecimento do erro cometido e compreensão de tal erro, corrigindo-o.	Reconhecimento do erro cometido, esclarecendo a má-interpretação do conceito.	Reconhecimento do erro cometido, esclarecendo a má-interpretação da natureza da Matemática.
Remediação	Erros e resultados incertos são usados de forma construtiva, a fim de obter a sua resolução, ob-	Erros e resultados incertos são usados de forma construtiva ao aprender um novo conceito, re-	Erros e resultados incertos são usados de forma construtiva ao aprender sobre a natureza da

	servando possíveis falhas.	gra ou tópico.	Matemática.
Investigação	Erros e resultados motivam questões que podem gerar investigações em diferentes sentidos.	Erros e resultados motivam questões que geram novas perspectivas e *insights* de conceitos, regras, etc. e não direcionados à lição original.	Erros e resultados motivam questões que levam à novas perspectivas e *insights* da natureza da Matemática.

Fonte: Borasi (1996, p. 138). Tradução do autor.

A partir desse momento, seu trabalho volta-se muito mais a elencar exemplos de como o uso do erro em sala de aula pode tornar o ensino de Matemática mais enriquecedor (um exemplo interessante é sobre as diferentes definições para uma circunferência (BORASI, 1996, p. 213-214)). As contribuições de Borasi aproximaram ainda mais a Análise de Erros como área de interesse, e de pesquisa, da Educação Matemática.

No que tange às produções brasileiras, Cury (2007, p. 49) traz um registro dos trabalhos relacionados ao erro, explicando que eles aparecem, principalmente, nas últimas duas décadas do século XX. Nesse ínterim, Cury também é a principal referência na área. Desenvolveu seus trabalhos olhando para os erros cometidos por estudantes das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, em universidades, e para a contribuição da Análise de Erros na formação dos professores de Matemática. Por ter a maior participação e divulgação na área, o Rio Grande do Sul apresenta uma gama maior de estudos sobre o tema. Atualmente há trabalhos em praticamente todos os estados, ainda que sejam poucos. A maioria está voltada à observação dos conteúdos das disciplinas de Cálculo, contando com dificuldades de compreensão de alguns conceitos e dados estatísticos, bem como os que focam nos erros de propriedades aritméticas dos números, na Escola Básica.

5.4. Modelos de Classificação de Erros

Ao se avaliar uma produção matemática, o professor realiza uma análise do desenvolvimento feito pelo estudante. Deve-se interpretar o que foi escrito e compreender o que aconteceu, caso encontre algum erro. E, geralmente, indicar onde tal lapso aconteceu. Porém, cada falha cometida tem sua particularidade. Se faz necessária então, uma classificação de tal falha. E pior ainda é que cada pesquisador utiliza diferentes métodos e categorias. Na busca de simplificar todo esse processo, surgem pesquisas sobre modelos de classificação.

Bastante citado, e entre os primeiros métodos que tratam do assunto está o elaborado por Ginsburg (1977), trabalhado e estendido em Esteley y Villareal (1996). Já Radatz (1979) propôs que, no ainda uso do pensamento por processamento da informação, lista, com exemplos, erros devidos a:

a) dificuldades de linguagem;
b) dificuldades na obtenção de informação espacial (representação visual da Matemática);
c) domínio deficiente das competências e conceitos prévios;
d) associação incorreta ou rigidez de pensamento, que se expande em:
   i. erros de perseverança;
   ii. erros de associação;
   iii. erros de interferência;
   iv. erros de assimilação;
   v. erros de transferência negativa de tarefas anteriores;
e) aplicação de regras ou estratégias irrelevantes.

Um segundo modelo foi feito pelos israelenses Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Os autores fazem uma classificação empírica dos erros, com base em uma análise construtiva das soluções dos alunos, realizadas por especialistas (RICO, 1995, p. 14) e consta com seis categorias:

a) dados mal utilizados;
b) linguagem mal interpretada;
c) inferência logicamente inválida;
d) teorema ou definição distorcida;
e) falta de verificação da solução;
f) erro técnico.

Após muitos trabalhos voltados à análise das produções escritas de estudantes de Cálculo, Cury chegou à conclusão de que "independentemente das teorias que fundamentavam as pesquisas e da forma como as respostas eram apresentadas, eu estava analisando o *conteúdo* da produção, ou seja, empregando uma [...] *análise de conteúdo*" (CURY, 2007, p. 63).

> A abordagem de análise de conteúdo tem por finalidade, a partir de um conjunto de técnicas parciais, mas complementares, explicar e sistematizar o conteúdo da mensagem e o significado desse conteúdo, por meio de deduções lógicas e justificadas, tendo como referência sua origem (quem emitiu) e o contexto da mensagem ou os efeitos dessa mensagem. (OLIVEIRA et al, 2003, p. 3-4).

Desse modo, ocorre um certo regramento que serve como base para realizar uma categorização. Este formalismo se dá pela Estatística que é realizada ao final do levantamento e enunciação do que se deseja observar.

Desenvolvida nos Estados Unidos, no início do século XX, e aprimorada com o advento da tecnologia, tem entre seus maiores expoentes a francesa Laurence Bardin, que no seu livro Análise de Conteúdo, publicado em 1977, sistematiza toda a teoria existente traz os passos para realizar um bom trabalho. Entre os quais, ao se trabalhar com respostas, é possível fazer uma divisão de um caso geral para particular, ou inversamente, segundo um critério de referência.

A principal contribuição, sem dúvida nenhuma, é a Organização, ou Etapas, da Análise. São três polos, que devem ser seguidos cronologicamente:

1. <u>Pré-Análise</u>: fase da organização do material a ser estudado. Fragmentada em quatro etapas:
   a. Leitura (conhecimento do conteúdo que será analisado);
   b. Escolha dos documentos (partindo de todos os documentos disponíveis, toma-se uma amostra que representa o conjunto universo);
   c. Formulação de hipóteses (suposições que serão postas à prova, na análise);
   d. Elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final.
2. <u>Exploração do material</u>: aplicação do item (1.);
3. <u>Tratamento, inferência e interpretação</u>: descrição das classificações anteriores através de operações estatísticas, permitindo estabelecer resultados como tabelas e dados estatísticos.

Na terceira etapa ocorre a categorização. Para Oliveira et al. (2003), a qualidade de uma análise de conteúdo é dependente do seu sistema de categorias. Um conjunto de boas categorias, segundo Bardin (1977, p. 147-148), deve ter exclusão mútua (cada elemento existe em uma única categoria), homogeneidade, pertinência, objetividade e fidelidade e produtividade.

A apropriação da Análise de Conteúdo pela Análise de Erros propiciou uma direção mais definida do caminho a ser percorrido, tanto na parte de categorização, quanto na parte inferencial. Nas palavras de Cury (2012, p. 244), "Categorias pertinentes são aquelas que refletem as intenções do pesquisador e são adequadas aos objetivos por ele pretendidos". No tratamento dos resultados obtidos, o auxílio dos modelos estatísticos se mostra de grande valia e a presença de tabelas e gráficos, dados pela análise frequencial, permite uma discussão fundamentada, acerca dos objetos de estudo.

6. Ações Diagnósticas

Tendo feito todo um suporte teórico-histórico, da implementação do curso de Pré-Cálculo, passando pela unificação das disciplinas do Instituto de Matemática e Estatística, e da concepção da Análise de Erros como campo de pesquisa, associando-a com a Análise de Conteúdo, neste capítulo passar-se-á ao trabalho de observação e classificação dos erros cometidos por estudantes, nos testes realizados em duas edições do curso de Pré-Cálculo.

Diagnosticar se o conhecimento adquirido por um estudante foi satisfatório é um procedimento muito difícil para o professor. Seja por meio de trabalhos, lista de exercícios, testes ou provas, o acompanhamento da aprendizagem contém muitas variáveis. Em particular se tem: por um lado o aluno, que será classificado pelo seu desempenho; por outro o docente, que pondera se o conteúdo foi suficiente, se a sua metodologia de ensino é capaz de facilitar a transmissão, ou construção pelo estudante, do conhecimento. Como esta discussão foge do escopo do trabalho, não será olhada mais profundamente aqui.

Para estimar o conhecimento revisitado, ou adquirido, pelos estudantes do Pré-Cálculo da UFRGS, é proposta a realização de dois testes, um de primeira área e um de segunda área. Para as turmas de início de ano (logo após o Concurso Vestibular e antes das aulas de primeiro semestre), o curso tem duração de duas semanas, com aulas de segunda-feira à quinta-feira. Logo, os testes são feitos na última aula de cada semana. Para as turmas de meio de ano (que ingressarão na universidade no segundo semestre), o curso tem duração maior. Com encontros nas terças-feiras e quintas-feiras, os testes são feitos ao término da segunda semana da área estudada. Nesses testes, é solicitado ao estudante o domínio dos conteúdos abordados em aula.

Ao longo das edições em que o autor participou (2013, 2014, 2016, 2017, 2018 e 2019), foram sendo percebidos alguns padrões de resposta, e de dificuldades, quanto aos exercícios propostos. Seja na interpretação de um enunciado como no que se espera de uma primeira resposta a ser dada, o conteúdo gerado diz, de certo modo, quais são as deficiências e as aprendizagens dos estudantes. Este capítulo é destinado a olhar mais atentamente as respostas dadas nos testes do curso.

Para tanto, foram recolhidos, através do Termo de Consentimento Informado, os testes de primeira e segunda área dos estudantes de três turmas, uma ministrada em 2018 e duas em 2019. A primeira foi ministrada ao longo do primeiro semestre e às outras logo após o Vestibular. Devido a este fato, algumas especificidades precisam ser levadas em conta. O primeiro exercício da turma de 2018 é referente à equação de retas e esboço da sua representação gráfica, diferentemente das turmas de 2019, que receberam uma questão de números reais. Logo, ele será tratado separadamente. Também, para o teste de segunda área, a turma de 2018 teve somente três exercícios. Dois deles (fatoração e estudo de sinais de polinômios) serão alocados junto aos seus similares de 2019. Já a questão referente à trigonometria será tratada separadamente, pois as propostas, do exercício, eram diferentes.

Os testes selecionados para exemplificar os erros estão com um código. Ele foi elaborado através da indicação da turma. Após foi feita uma organização aleatória dos testes, nomeando-os por duas letras alfabéticas. Utilizou-se os ensinamentos do capítulo anterior, da Análise de Conteúdo, para classificação dos erros cometidos.

Tabela 6.1: Relação de testes selecionados para análise.

Turma	2018 – M3	2019 – M1	2019 – M2	TOTAL
Teste 1	15	37	18	70
Teste 2	15	37	18	70

Fonte: arquivo pessoal.

6.1. Números Reais

Nesta competência, é solicitado que os estudantes tenham destreza algébrica, dominando o conhecimento acerca de números reais, inequações, e que consigam realizar um estudo de sinais de expressões algébricas (conteúdo referente ao 1º capítulo).

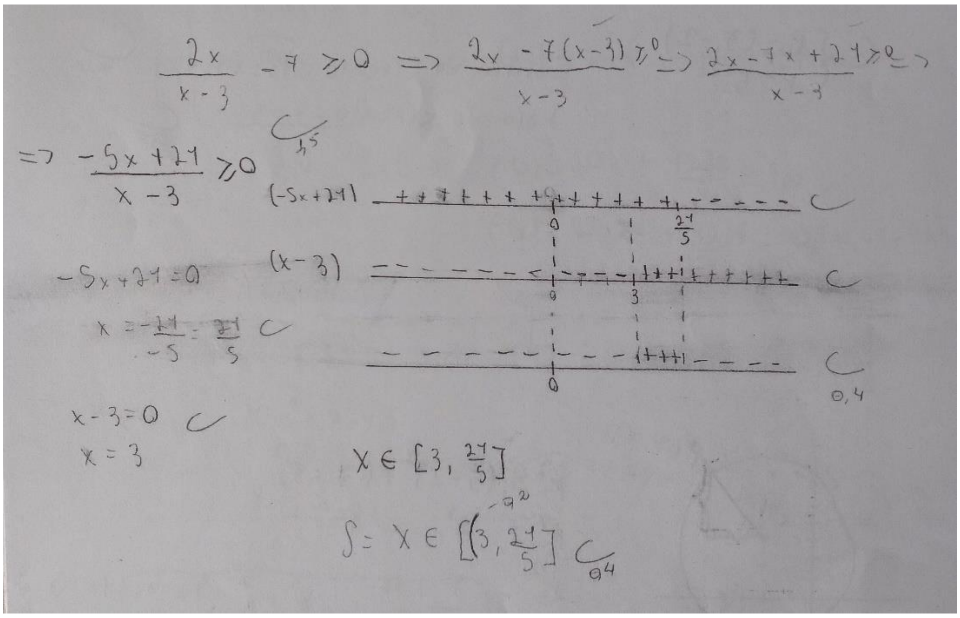
Questão: Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a desigualdade abaixo:

$$\frac{2x}{x-3} \geq 7.$$

Para essa questão, era esperada a resolução da inequação, tomando cuidado para que não fosse feita a conhecida multiplicação cruzada, o que ocasiona a perda de parte da solução. Após, que ocorresse um estudo de sinais, para o numerador, para o denominador e para a inequação em si, obtendo portanto, os componentes da resposta, que deveria ser escrita por linguagem de conjuntos ou por extenso. Dos 55 testes observados, das duas turmas de 2019, 14 foram de respostas corretas.

O primeiro erro a ser considerado é o de troca de parênteses por colchetes, no reconhecimento de intervalo aberto e fechado. 14 testes estão inclusos nessa categoria.

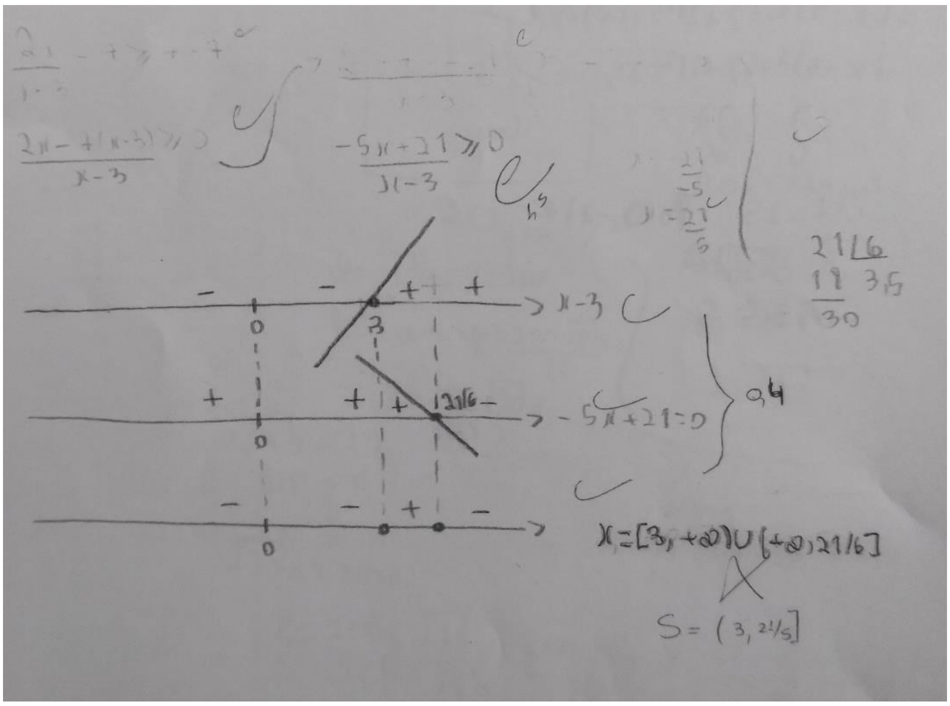
Figura 6.1.1: Erro de inclusão de valor do estudante M1BI.



Fonte: arquivo pessoal.

Em 9 testes foram encontrados erros no estudo de sinais. Com isso, houve a modificação da resposta final.

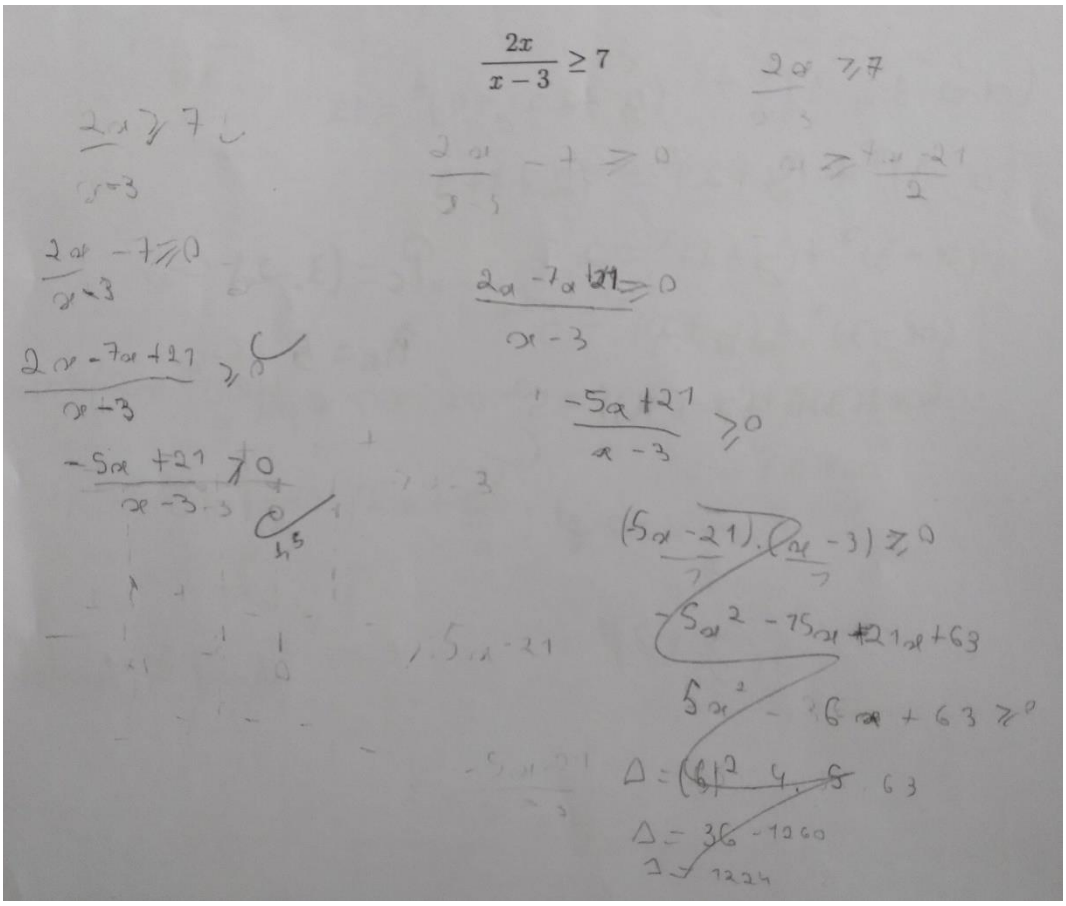
Figura 6.1.2: Erro no estudo de sinais do estudante M1BJ.



Fonte: arquivo pessoal.

Em 2 testes foi observado que o estudante chegou na inequação desejada, mas não soube seguir adiante.

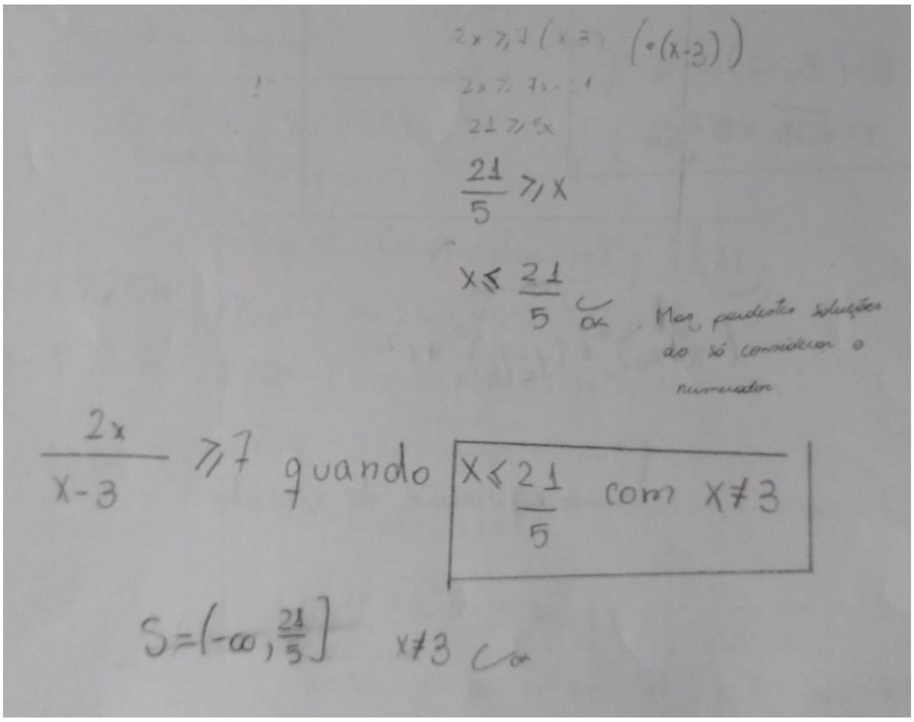
Figura 6.1.3: Erro de não seguimento do estudante M1AE.



Fonte: arquivo pessoal.

Em 4 testes aconteceu a multiplicação cruzada, ocasionando a perda de soluções.

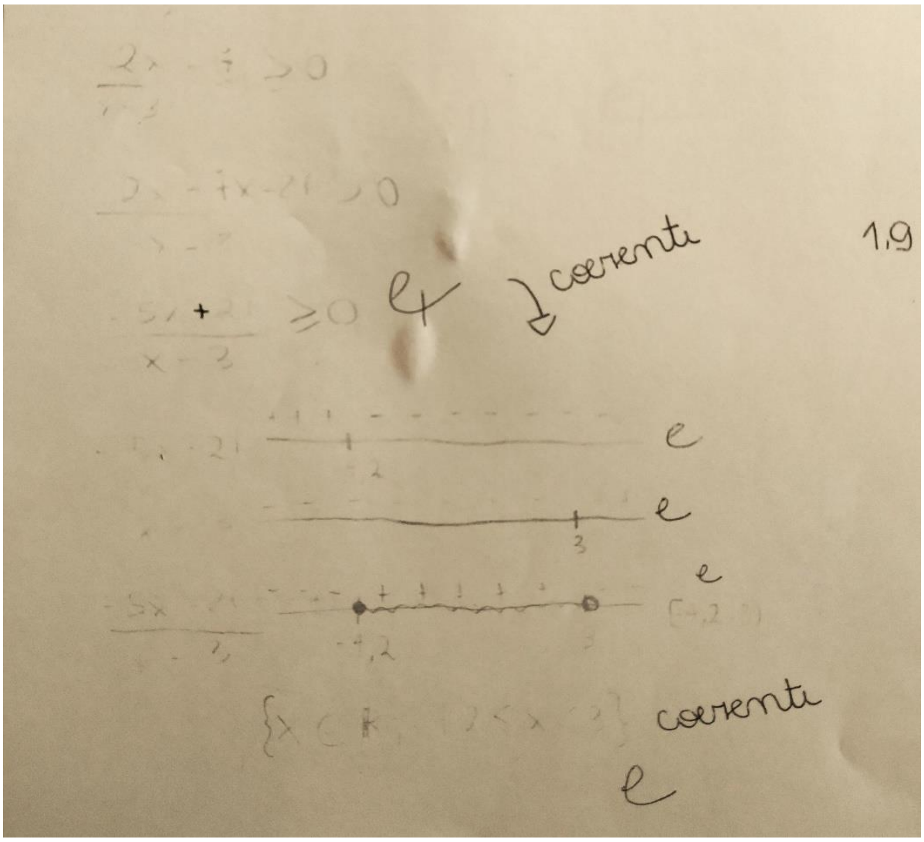
Figura 6.1.4: Erro de multiplicação cruzada do estudante M1AJ



Fonte: arquivo pessoal.

Em um teste ocorre erro de sinal, mas há continuação correta do exercício.

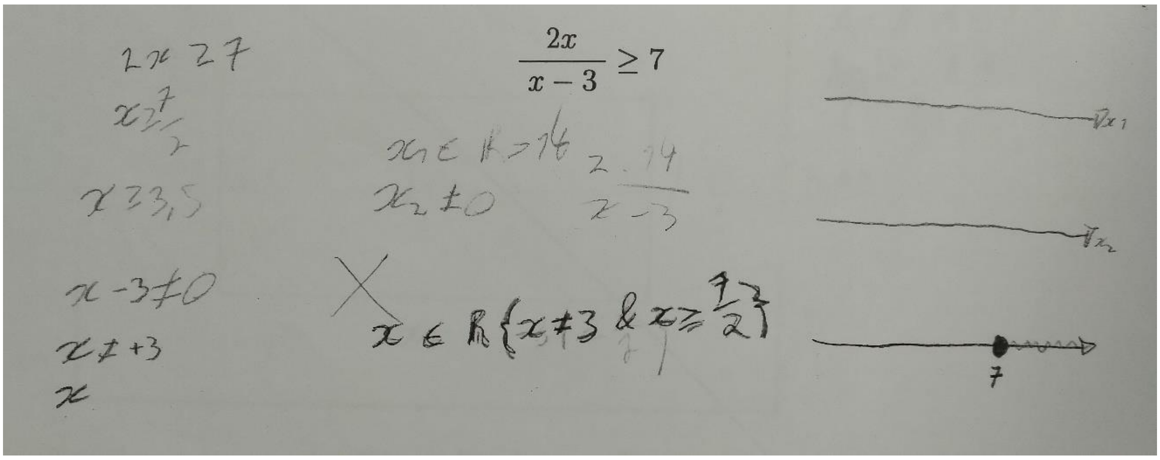
Figura 6.1.5: Erro de sinal com continuidade correta do estudante M2CZ.



Fonte: arquivo pessoal.

Por último, onze testes apresentaram erros de concepção inicial ou não foi feito nada.

Figura 6.1.6: Exemplo de não entendimento do estudante M1AG.



Fonte: arquivo pessoal.

De um modo geral, os erros mais frequentes foram a da inclusão do valor 3, que não está incluído no domínio da inequação. Também há alta incidência de estudantes que, mesmo com as aulas e exercícios propostos, não souberam fazer o exercício.

Tabela 6.1.1: Grade de respostas referente à Números Reais

	Exemplo de erros encontrados						
	Inclusão do valor onde a inequação não está definida	Estudo de sinais	Não soube seguir adiante	Multiplicação Cruzada	Erro de sinal	Outros tipos ou zeradas	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	-	14
Incorretas	14	9	2	4	1	11	41
Total							55

Fonte: arquivo pessoal.

6.2. Equação de Retas

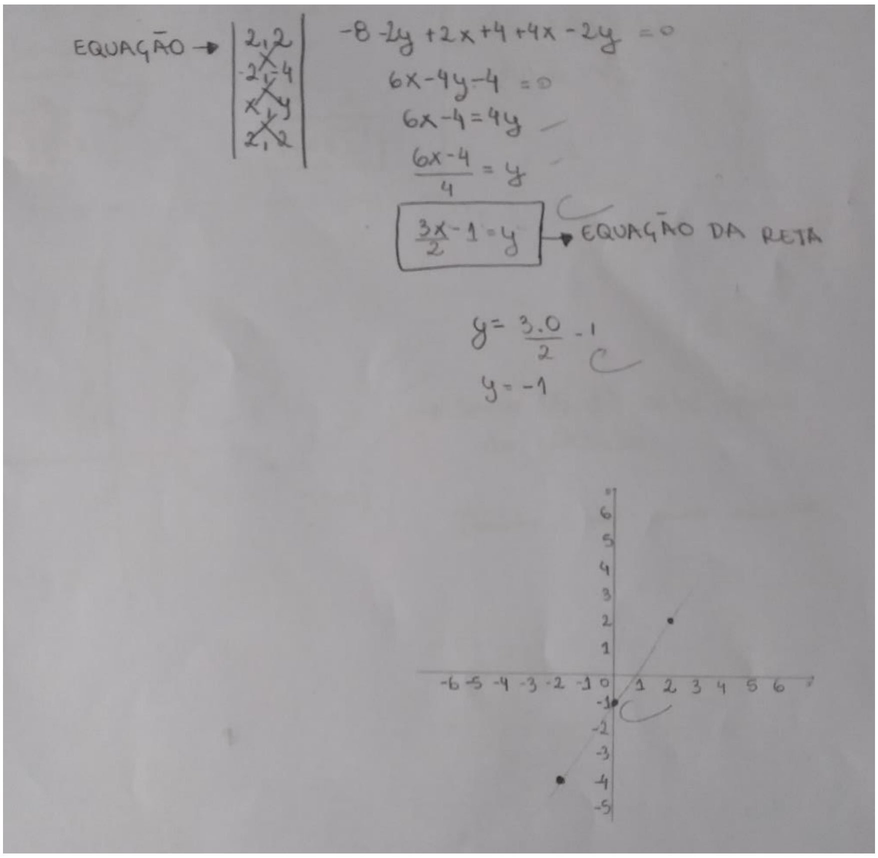
Para a turma de 2018, o professor ministrante elaborou uma questão envolvendo a formulação, da equação de uma reta, dados dois pontos.

Questão: Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(2{,}2)$ e $(-2,-4)$. Faça um esboço do gráfico desta reta no plano cartesiano abaixo.

Dos quinze testes obtidos, todos obtiveram respostas corretas, tendo somente sido observados diferentes métodos de resolução. Neles, o raciocínio apresentado, com argumentações apoiadas em operações e propriedades matemáticas, é válido.

Na primeira imagem, o estudante utilizou a regra do determinante para equação de reta. Ela não é ensinada no curso, mas não é desconsiderada, pois não é condenado o conhecimento prévio de outros conteúdos não abordados.

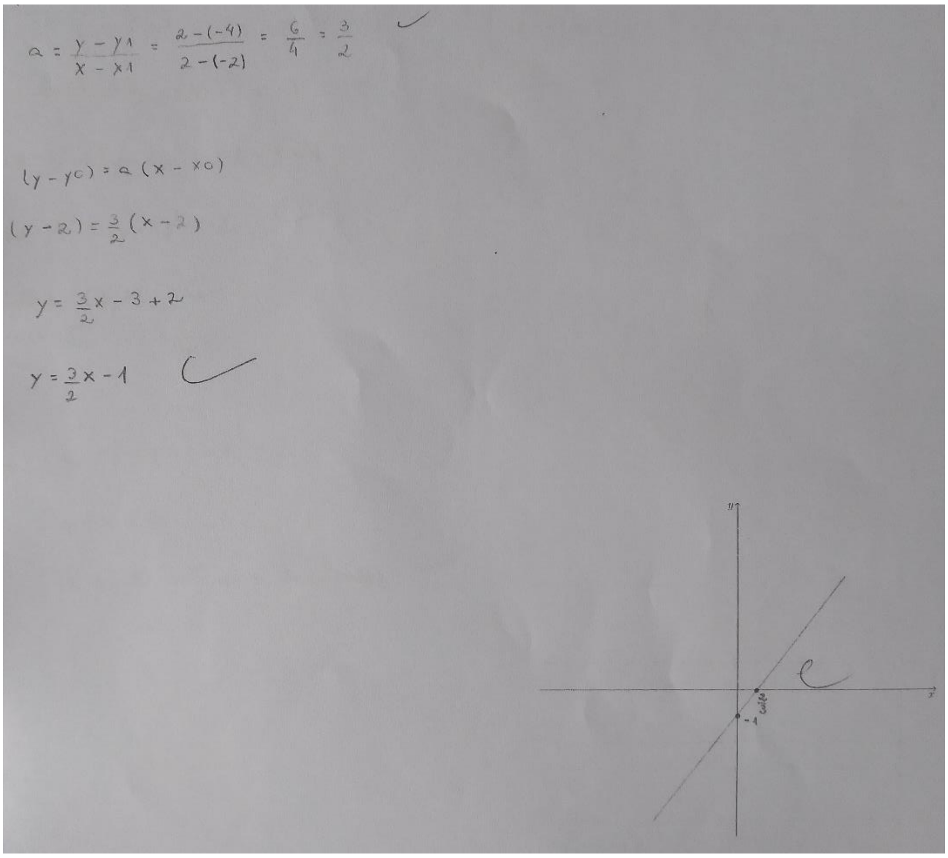
Figura 6.2.1: Resposta à questão 1 do estudante M3EA.



Fonte: arquivo pessoal.

Na segunda imagem, o estudante encontrou o coeficiente angular, pelo método da tangente, e em seguida encontrou a equação da reta.

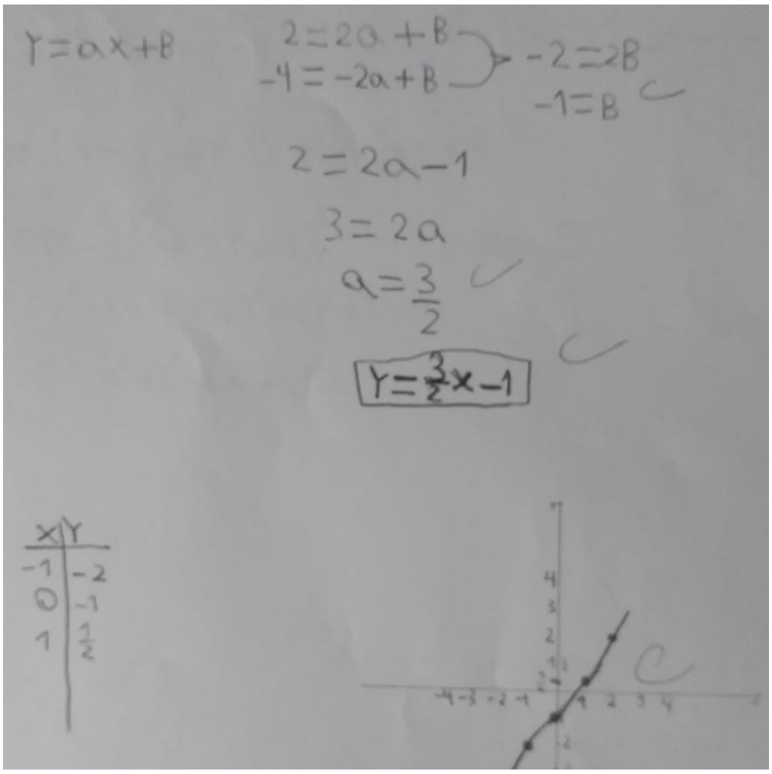
Figura 6.2.2: Resposta à questão 1 do estudante M3EF.



Fonte: arquivo pessoal.

Já na terceira imagem, o estudante montou um sistema de equações, encontrando os valores dos coeficientes da equação da reta e chegando na resposta obtida.

Figura 6.2.3: Resposta à questão 1 do estudante M3EG.



Fonte: arquivo pessoal.

Depreende-se que esse conteúdo foi bem assimilado pelos estudantes, não sendo encontradas dificuldades, na teoria e no desenvolvimento da resolução. Além disso, as representações gráficas da reta foram feitas corretamente, sendo colocados os principais pontos de corte.

Tabela 6.2.1: Grade de respostas referente à Equação de Reta

	Determinante	Método dos coeficientes	Sistema de Equações	TOTAL
Corretas	1	1	13	15
Incorretas	0	0	0	0

Fonte: arquivo pessoal.

6.3. Geometria Analítica

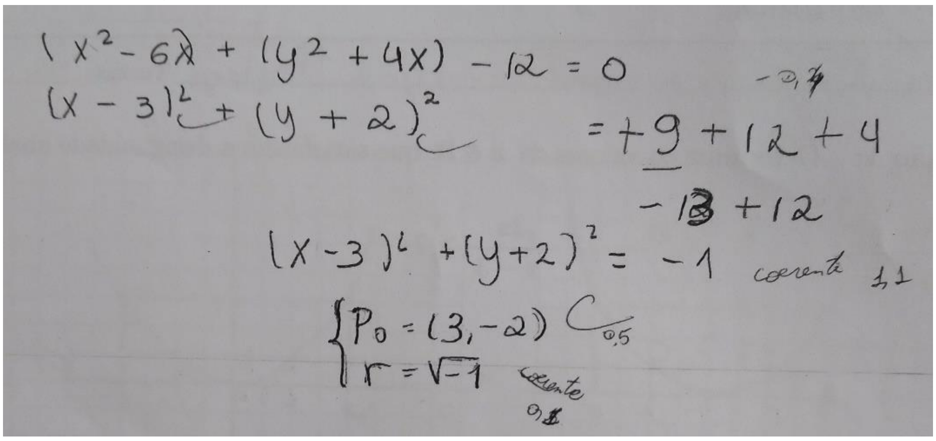
Espera-se que o estudante domine os assuntos relacionados à Geometria Analítica, em especial, o completamento de quadrados de equações quadráticas, além de saber extrair informações importantes relacionadas a círculos. As questões de 2018 e 2019 são análogas, com a diferença de que a de 2018 solicita se determinado ponto se encontra dentro, fora ou sobre o círculo. Foi colocado aqui a questão de 2019.

<u>Questão</u>: A equação dada ao lado é de um círculo: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. Usando completamento de quadrados, determine o centro e o raio do círculo.

Para essa questão, espera-se que o estudante domine a técnica de completamento de quadrados, a fim de encontrar a equação do círculo, as coordenadas de centro e o valor do raio deste. Dos 70 testes analisados, 43 obtiveram a resposta correta.

Um estudante não apresentou cálculos, chegando diretamente nas respostas.

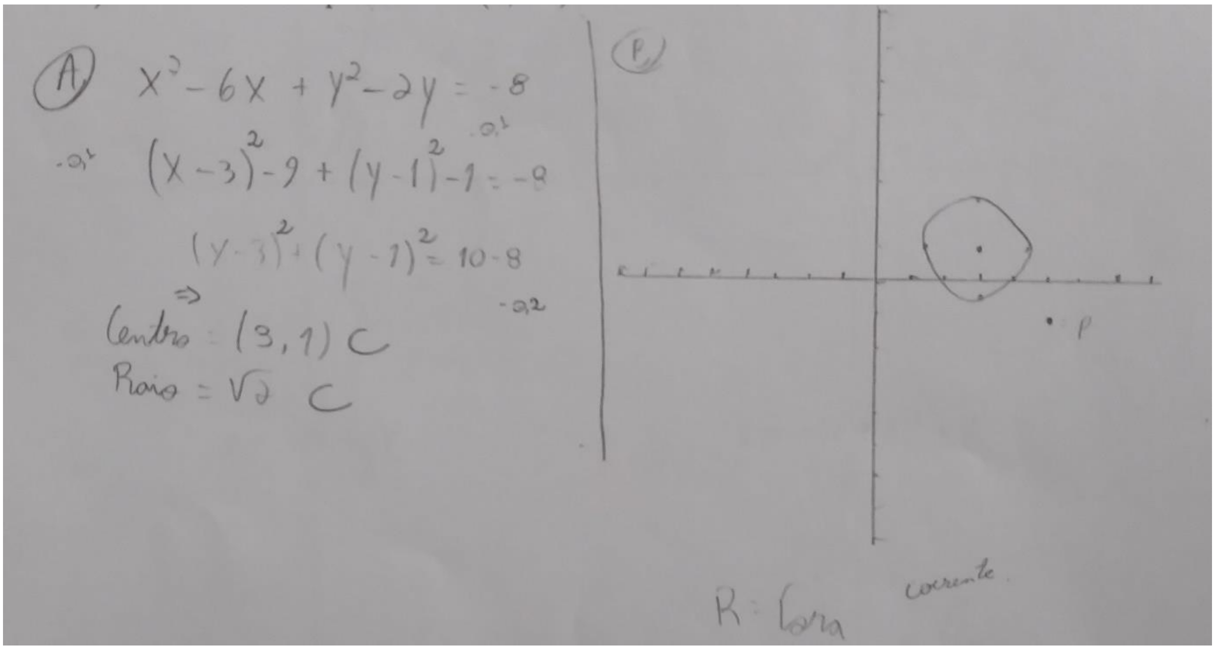
Figura 6.3.1: Não resolução do estudante M1BC.



Fonte: arquivo pessoal.

Em dois testes aconteceu um erro de interpretação. Como comentado acima, na turma de 2018 era solicitado a verificação da pertinência de um ponto em um círculo. A resposta dada foi através de desenho. Mesmo dando coerência, foi descontada nota.

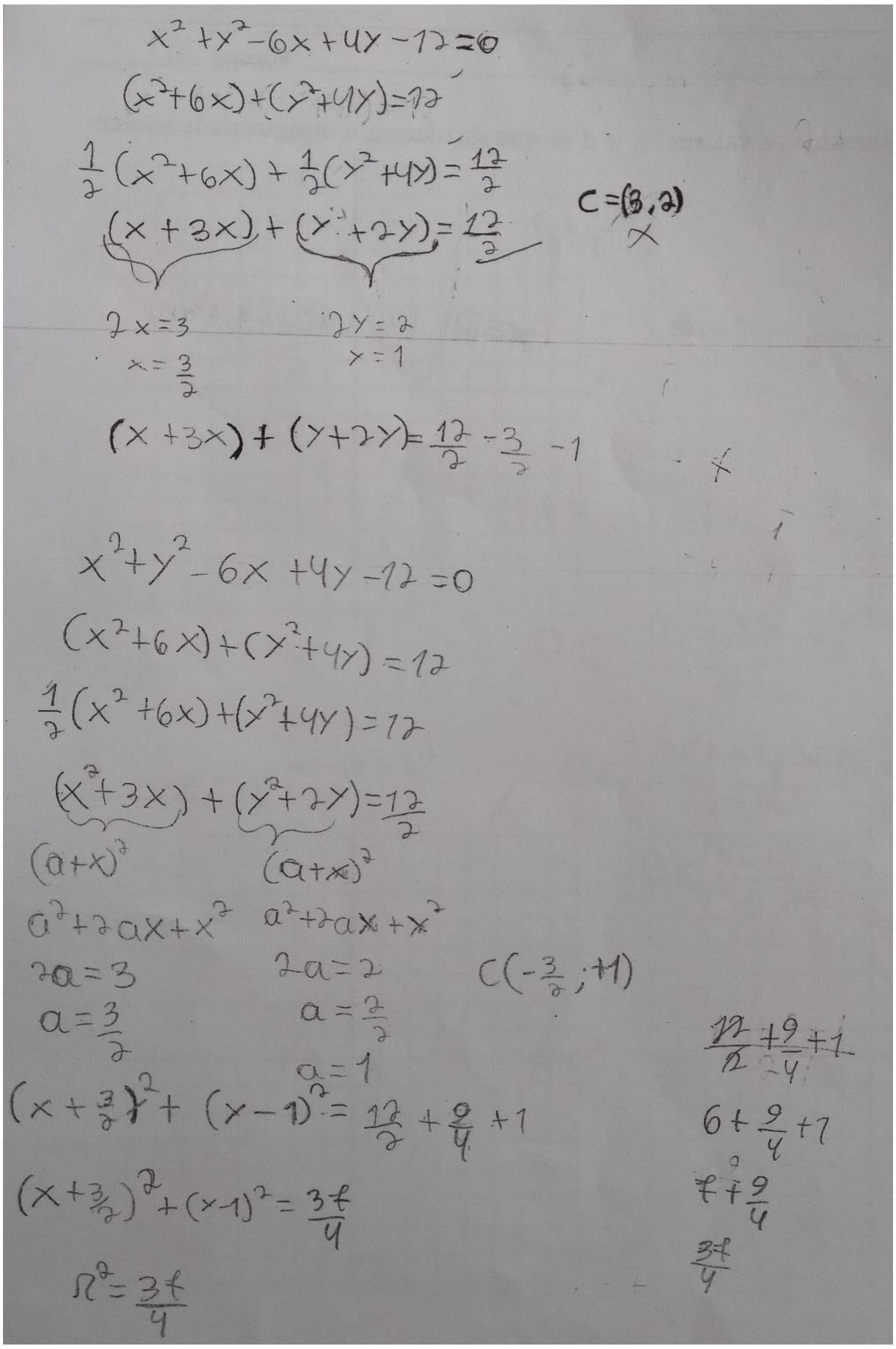
Figura 6.3.2: Má interpretação do que foi solicitado ao estudante M3ED.



Fonte: arquivo pessoal.

Em 4 testes foi detectada falta de destreza matemática. No caso da figura a seguir, o procedimento para o completamento foi executado até a reunião das mesmas variáveis. Após, dividiu-se toda a equação por 2 e os quadrados de x e y desapareceram.

Figura 6.3.3: Falta de destreza matemática do estudante M1BE



$x^2+y^2-6x+4y-12=0$

$(x^2+6x)+(y^2+4y)=12$

$\frac{1}{2}(x^2+6x)+\frac{1}{2}(y^2+4y)=\frac{12}{2}$

$\underbrace{(x+3x)}+\underbrace{(y+2y)}=\frac{12}{2}$

$C=(3,2)$

$2x=3 \quad 2y=2$

$x=\frac{3}{2} \quad y=1$

$(x+3x)+(y+2y)=\frac{12}{2}-\frac{3}{2}-1$

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$

$(x^2+6x)+(y^2+4y)=12$

$\frac{1}{2}(x^2+6x)+(y^2+4y)=12$

$\underbrace{(x^2+3x)}+\underbrace{(y^2+2y)}=\frac{12}{2}$

$(a+x)^2 \quad (a+x)^2$

$a^2+2ax+x^2 \quad a^2+2ax+x^2$

$2a=3 \quad 2a=2 \quad C(-\frac{3}{2};+1)$

$a=\frac{3}{2} \quad a=\frac{2}{2}$

$a=1$

$\frac{12}{2}+\frac{9}{4}+1$

$(x+\frac{3}{2})^2+(x-1)^2=\frac{12}{2}+\frac{9}{4}+1$

$6+\frac{9}{4}+1$

$7+\frac{9}{4}$

$(x+\frac{3}{2})^2+(x-1)^2=\frac{37}{4}$

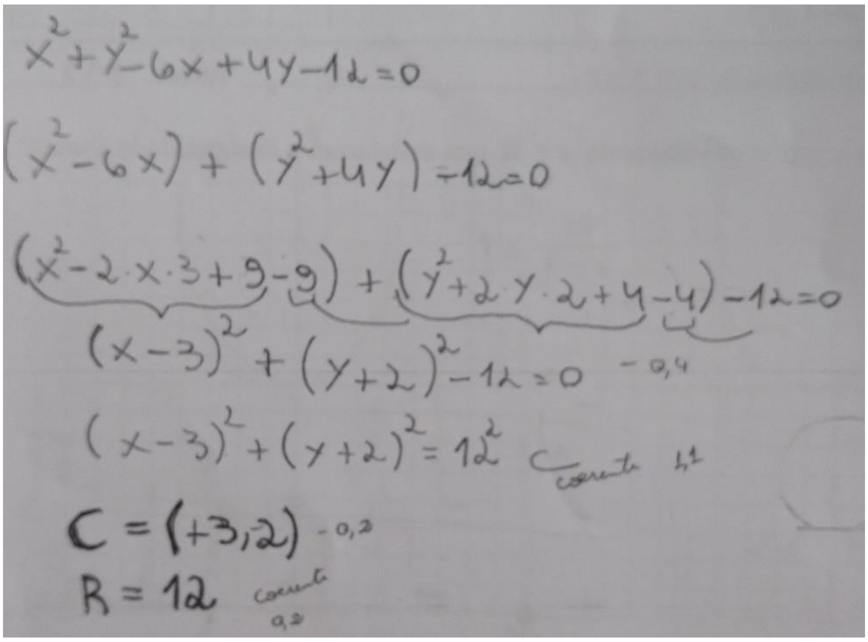
$\frac{37}{4}$

$R^2=\frac{37}{4}$

Fonte: arquivo pessoal.

Em 3 testes foram detectados erros de contas numéricas, afetando a resposta final.

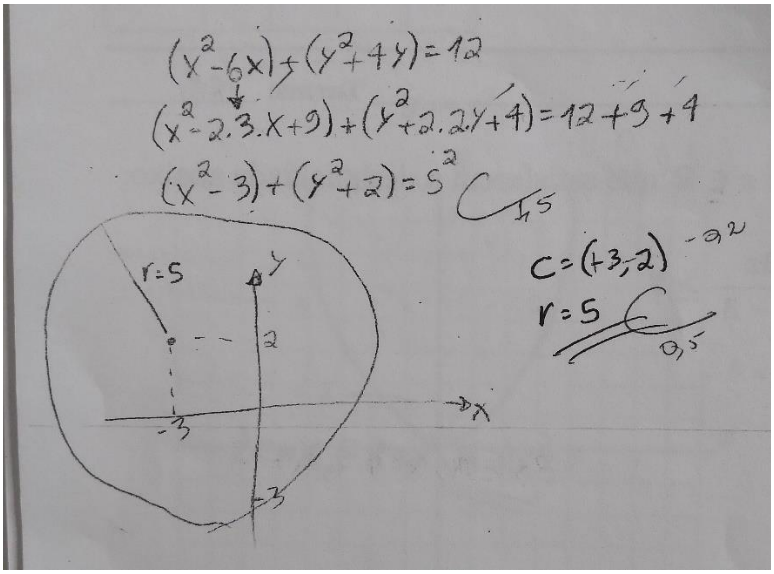
Figura 6.3.4: Exemplo de erro de conta cometido pelo estudante M1BO



Fonte: arquivo pessoal.

4 testes apresentaram erros na resposta final, seja por troca de sinais para as coordenadas do centro ou falta da escrita do raio.

Figura 6.3.5: Erro de sinal da resposta do estudante M1BL



Fonte: arquivo pessoal.

Percebe-se que os estudantes aprenderam a realizar a técnica do completamento. Uma das possíveis causas, para a grande quantidade de acertos, é que ele não é visto no Ensino Médio (na maioria das escolas) e durante os encontros, enfatiza-se o seu uso na disciplina de Cálculo. Com relação aos erros citados, é importante frisar a questão do desenho como medida auxiliar à compreensão do exercício, mas não como resposta. Além disso, há uma diversidade de técnica utilizadas, pessoas que preferem ser mais cuidadosas e fazer passo por passo e pessoas que já realizam o completamento direto.

Tabela 6.3.1: Grade de respostas referente à Geometria Analítica

	Exemplo de erros encontrados						
	Não apresentação da resolução	Má-interpretação	Destreza	Conta numérica	Erro na resposta	Outros tipos ou zeradas	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	-	43
Incorretas	1	2	4	3	4	13	27
Total							70

Fonte: arquivo pessoal.

6.4. Modelagem de Funções

Para esta competência é solicitado o domínio e a interpretação dos textos que definem um problema de Modelagem Matemática. Em específico, a extração correta de dados que auxiliem a formulação de funções. Analogamente ao item anterior, as questões de 2018 e 2019 são, de certo modo análogas e serão tratadas como iguais.

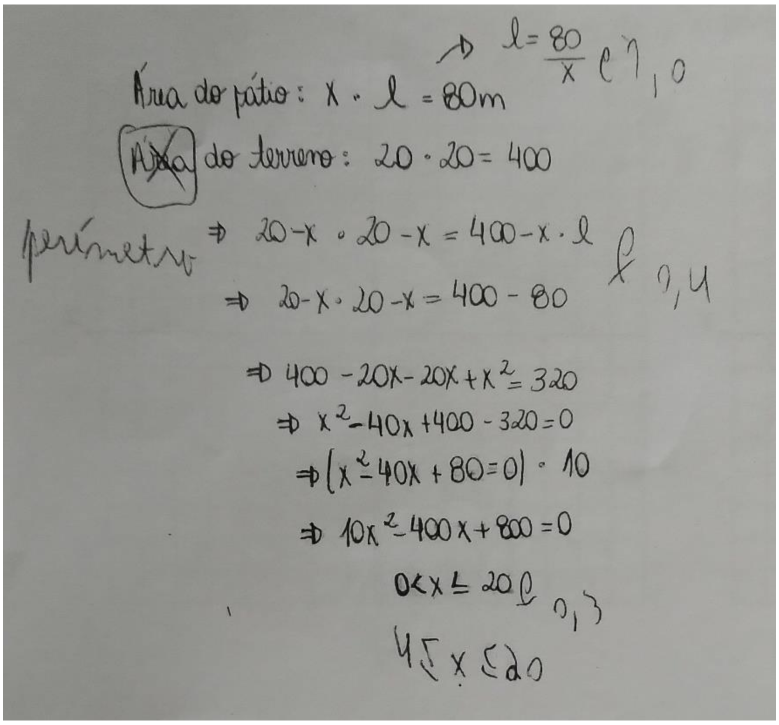
Questão 2018: Uma gráfica deseja imprimir um texto na forma retangular que ocupa uma área de 1500 cm^2 de um cartaz também retangular. Sabendo que as margens laterais do cartaz devem medir 5 cm, a margem superior 4 cm e a inferior 3 cm, escreva a área total do cartaz em função de x, que é a medida do comprimento máximo da linha expressa.

<u>Questão 2019</u>: O custo para a construção de uma cerca em torno de um pátio retangular com $80m^2$ de área, localizado em um terreno quadrado com lados medindo 20 metros, é de R$10,00 por metro na frente e no fundo do pátio, e de R$8,00 por metro nas duas laterais do pátio. Expresse o custo para a construção da cerca em função de x, que é a medida da frente do pátio.

Espera-se que o estudante saiba encontrar uma relação entre a área interna e o perímetro (ou o custo) da região retangular, a fim de obter uma relação que seja dependente só de uma variável. Também é solicitado o domínio da função obtida. Dos 70 testes analisados, foram detectados somente 18 com a resposta correta.

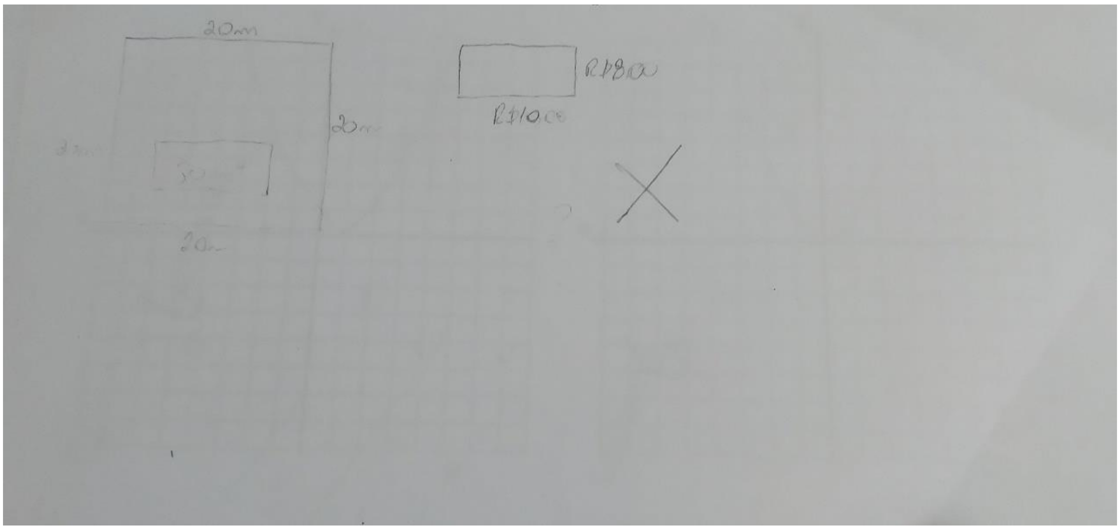
Dezenove estudantes apresentaram má-formulação ou não souberam montar a função custo. Aqui serão mostradas quatro situações que ocorreram.

Figura 6.4.1: Exemplo de uso da fórmula da área pelo estudante M1AC.



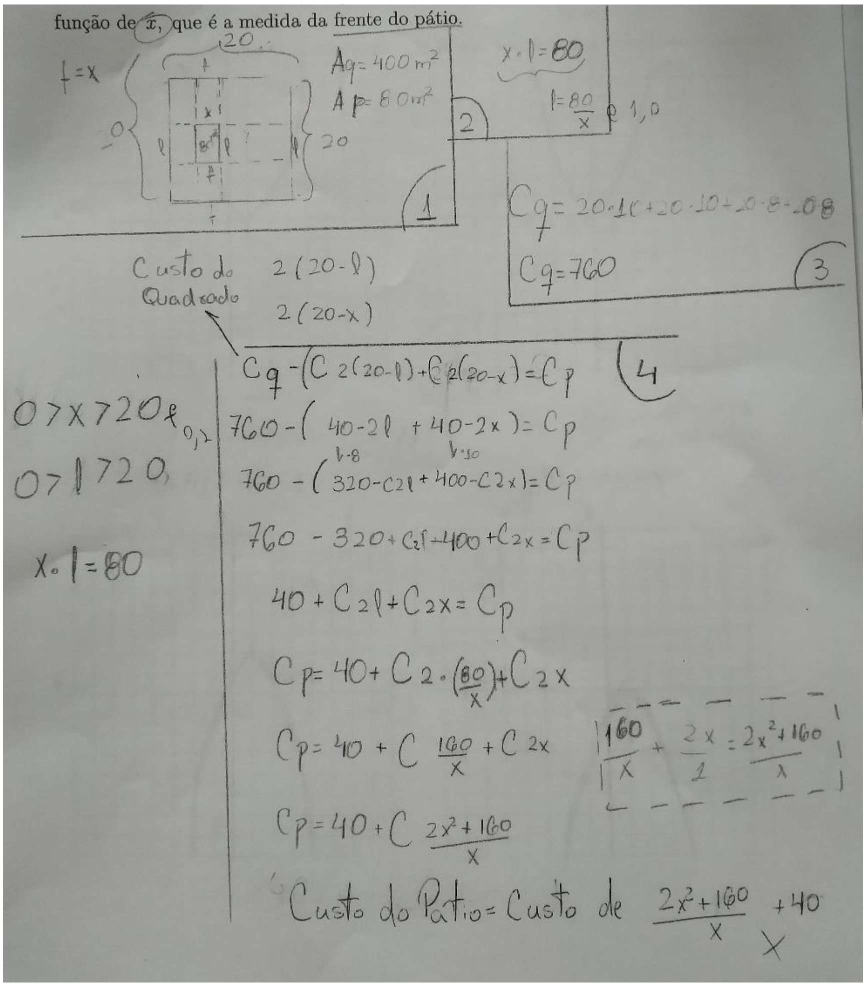
Fonte: arquivo pessoal.

Figura 6.4.2: Exemplo de não encontro de uma formulação por M2CY.



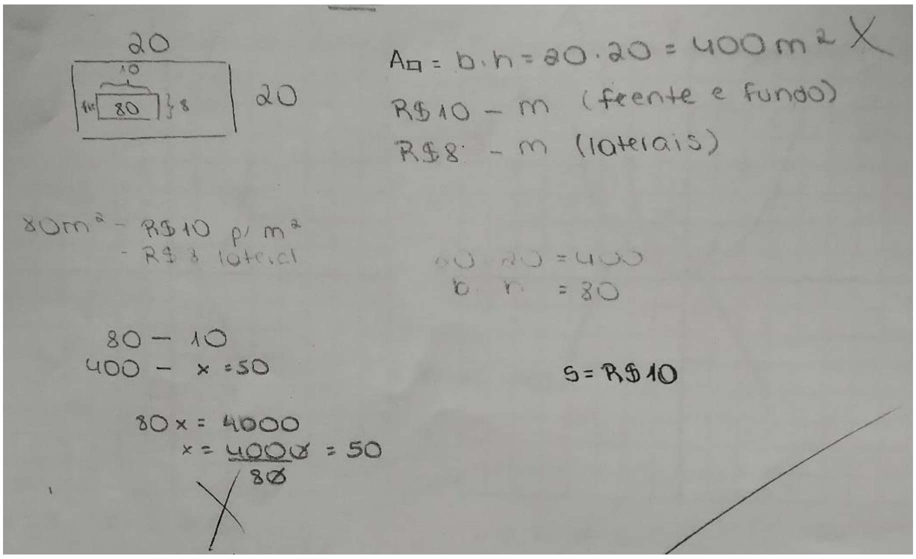
Fonte: arquivo pessoal.

Figura 6.4.3: Exemplo de fórmula não conhecida pelo estudante M1AJ.



Fonte: arquivo pessoal.

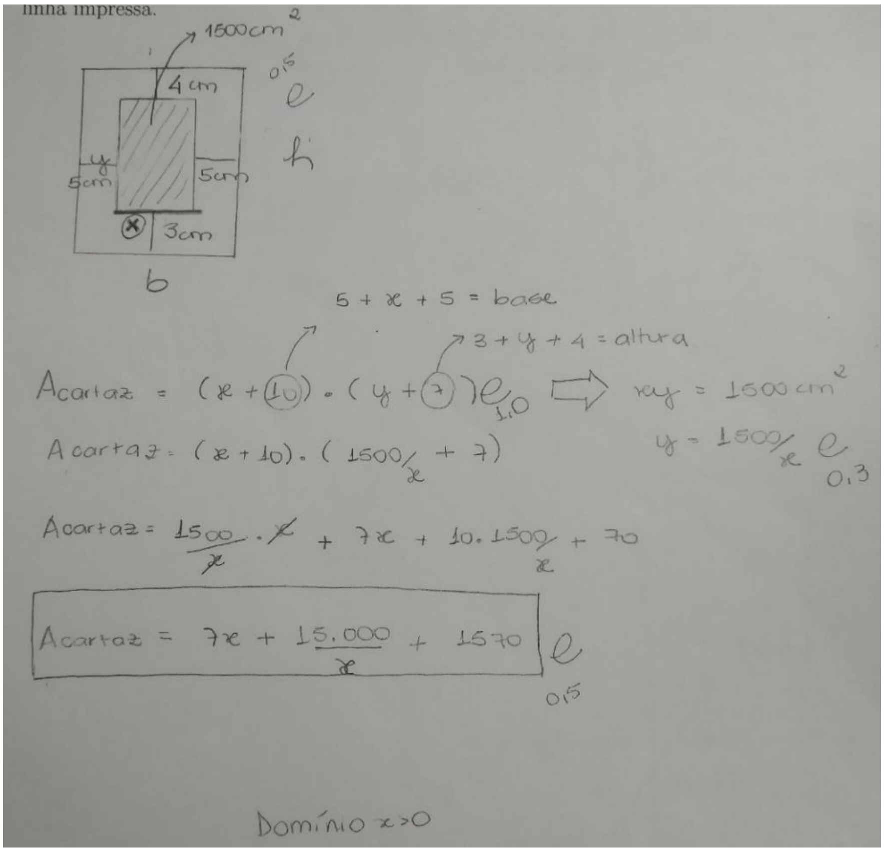
Figura 6.4.4: Exemplo de não compreensão pelo estudante M1AO.



Fonte: arquivo pessoal.

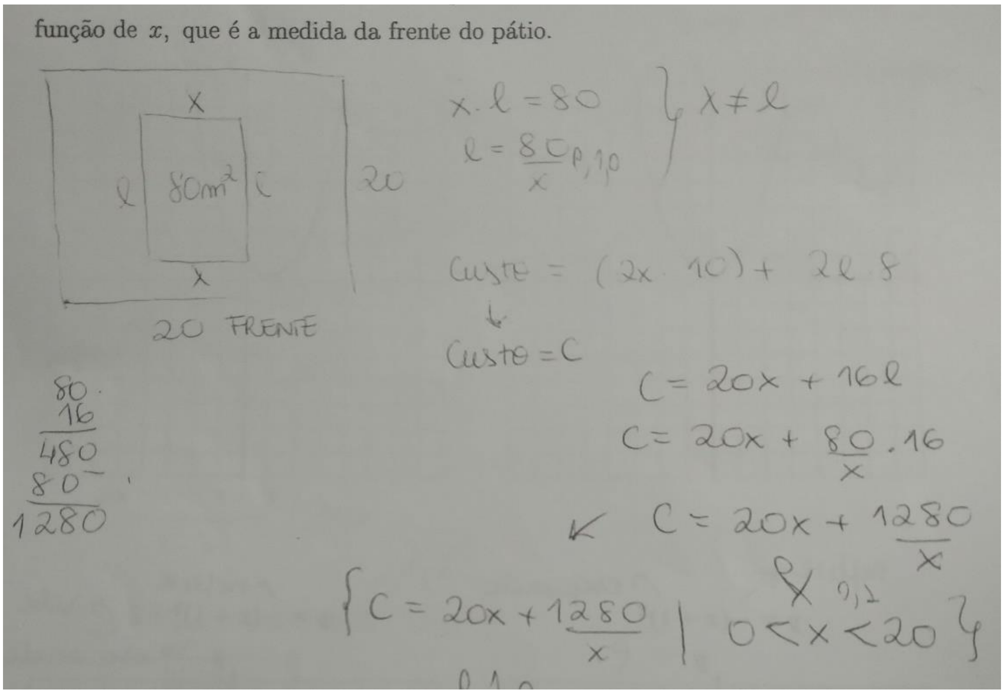
Dezoito estudantes apresentaram domínio errado da função.

Figura 6.4.5: Domínio errado apresentado por M3EE.



Fonte: arquivo pessoal.

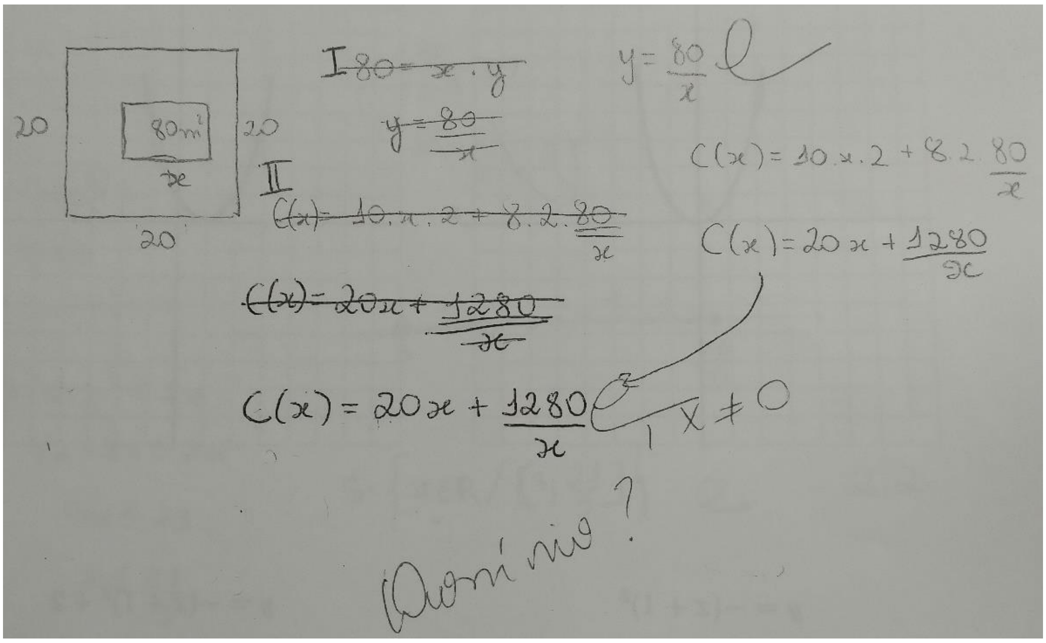
Figura 6.4.6: Domínio errado apresentado por M1AQ.



Fonte: arquivo pessoal.

Seis estudantes não apresentaram o domínio da função.

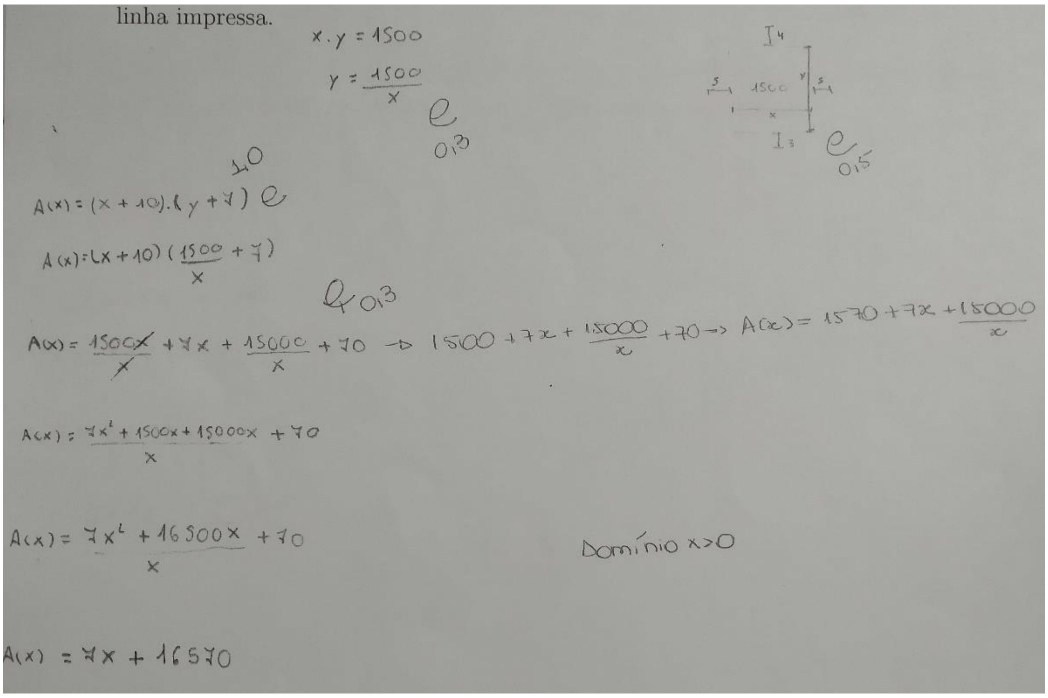
Figura 6.4.7: Exemplo de falta de domínio do exercício de M2DC.



Fonte: arquivo pessoal.

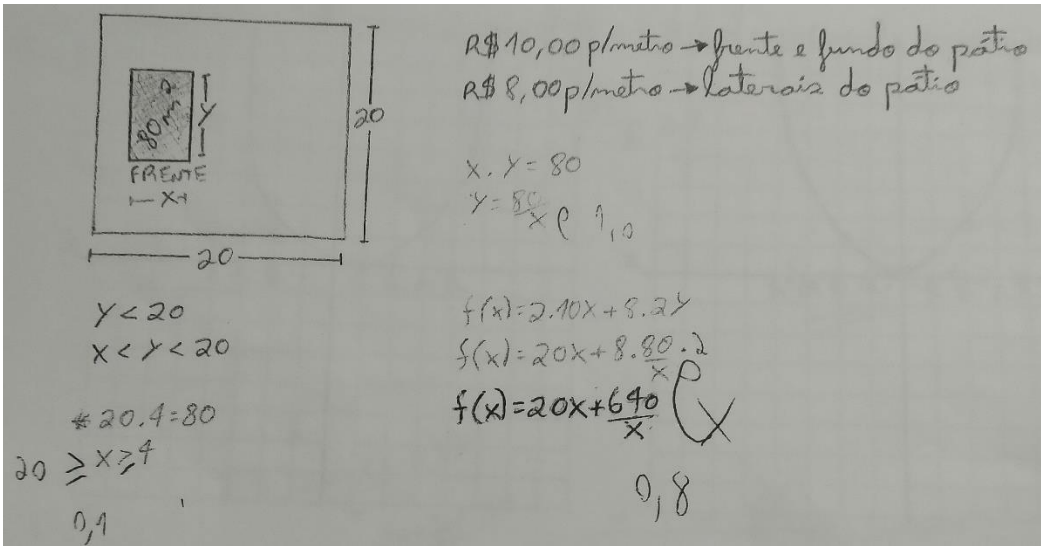
Cinco estudantes realizaram algum erro de multiplicação, numérico ou algébrico.

Figura 6.4.8: Exemplo de multiplicação algébrica do estudante M3EF.



Fonte: arquivo pessoal.

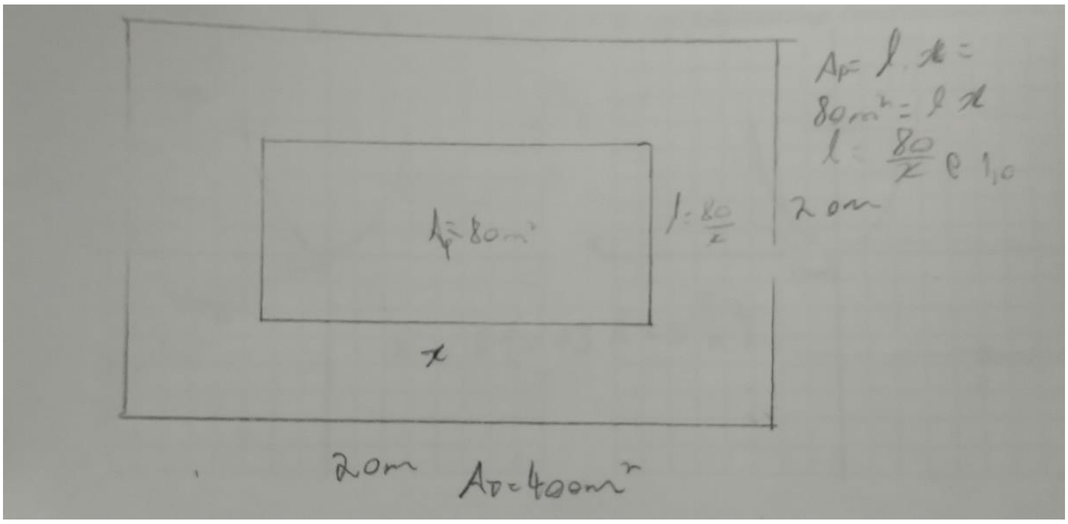
Figura 6.4.9: Exemplo de multiplicação numérica do estudante M1BL.



Fonte: arquivo pessoal.

Três estudantes iniciaram a questão mas pararam em determinado ponto.

Figura 6.4.10: Exemplo de questão iniciada por M1AG.



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante não fez a questão. Ao analisar as respostas dadas pelos estudantes, percebe-se que muitos têm dificuldade, não de interpretação do que está sendo pedido, mas de tomar os dados e formular a função desejada. Além disso, passa-se despercebido, ou não se atenta a todos os detalhes para a construção do domínio da função.

Tabela 6.4.1: Grade de respostas referente à Modelagem de Funções

	Exemplo de erros encontrados						
	Formulação errada	Domínio errado	Não apresentou domínio	Erro de multiplicação	Iniciou mas parou	Não fez	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	-	18
Incorretas	19	18	6	5	3	1	52
Total							70

Fonte: arquivo pessoal.

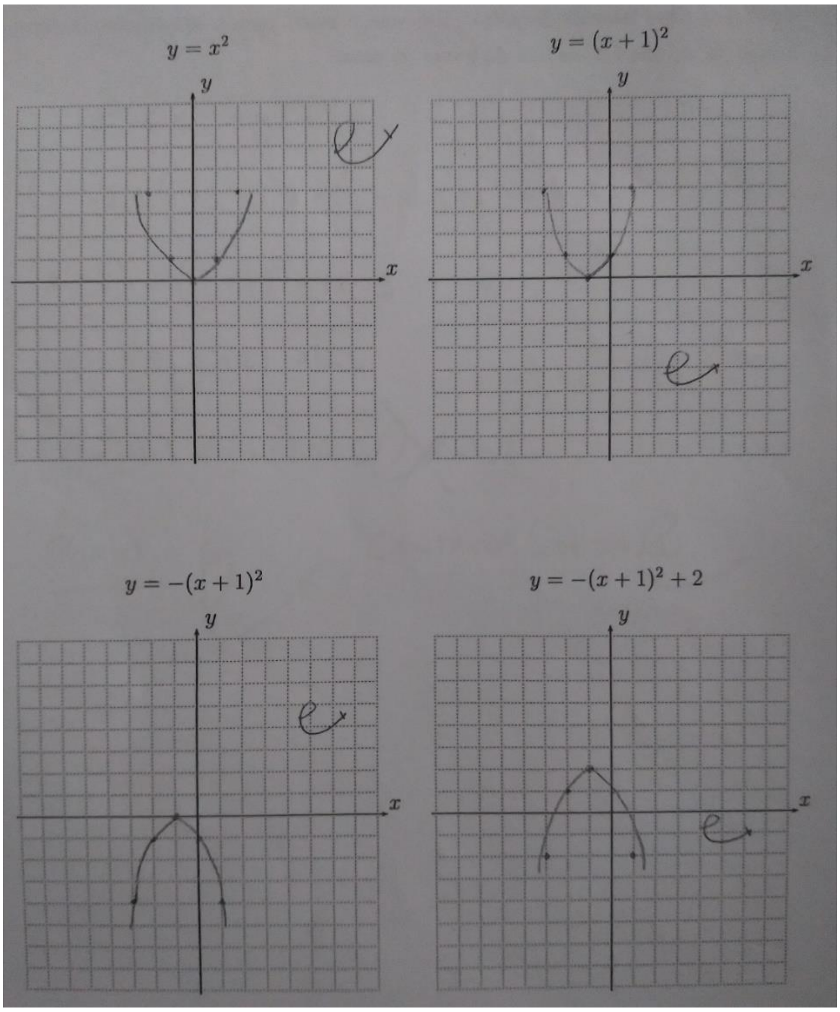
6.5. Representações Gráficas de Funções Polinomiais

É solicitado o domínio de construção gráfica de funções polinomiais, em especial, de um polinômio quadrático, com translações horizontais e verticais, reflexões por um eixo e compressões/alongamentos. Nas duas edições, 2018 e 2019, a função escolhida foi a mesma e a turma de 2018 não produziu nenhum erro. Espera-se que o estudante saiba esboçar as representações gráficas em cada item solicitado, no plano cartesiano dado, colocando os pontos de corte nos eixos coordenados e mantendo uma escala condizente.

Questão: Esboce o gráfico da função $f(x) = -(x+1)^2 + 2$, seguindo as etapas abaixo: $y = x^2,\ y = (x+1)^2,\ y = -(x+1)^2,\ y = -(x+1)^2 + 2$.

O primeiro erro relatado foi justamente a não-indicação dos pontos de cortes dos eixos. Foram selecionados 8 testes, pois outros serão colocados em outras classificações.

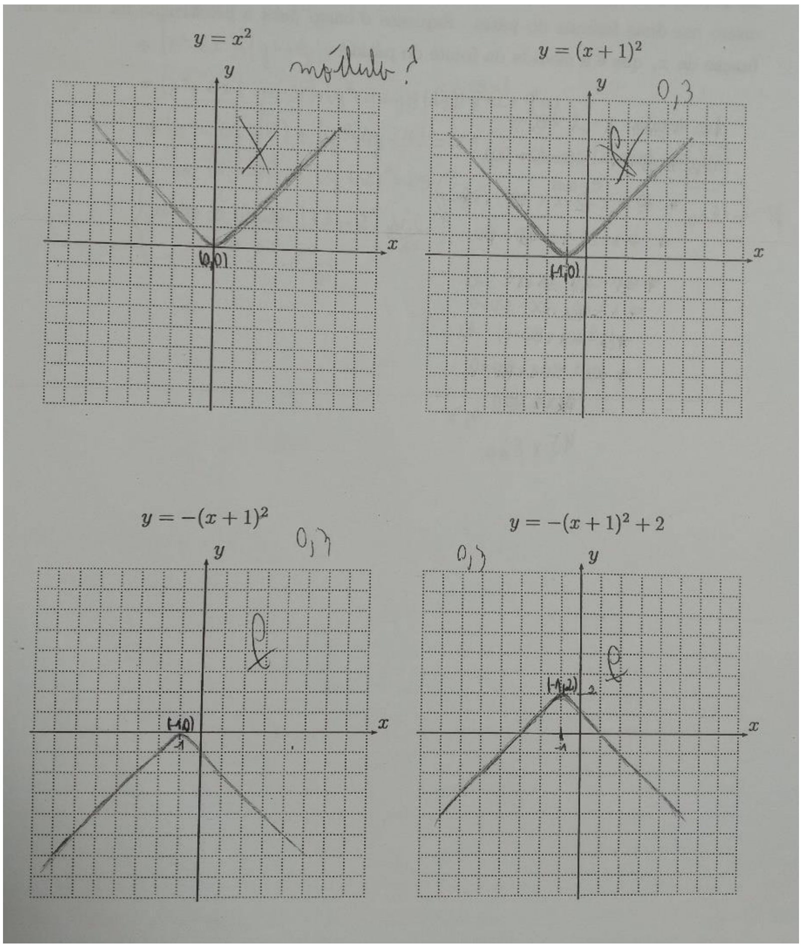
Figura 6.5.1: Representações gráficas do estudante M2CV



Fonte: arquivo pessoal.

A segunda falha observada é em questão à suavidade das representações. Conforme comentado, na maioria não há indicação de pontos de corte. Presente em 6 testes.

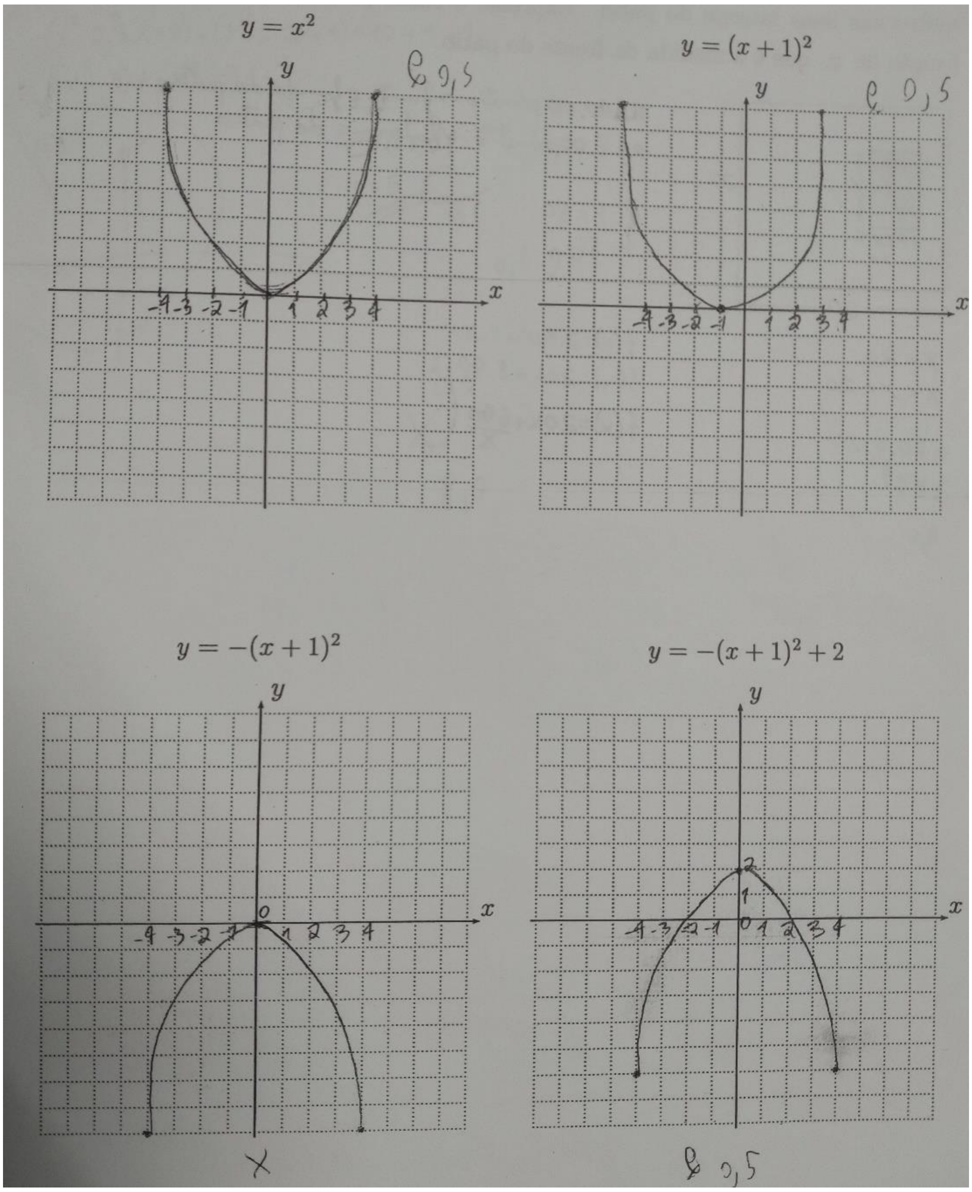
Figura 6.5.2: Má-representação gráfica do estudante M1AC.



Fonte: arquivo pessoal.

O próximo erro encontrado foi a não-translação contínua das representações. Detectada em 3 testes, percebe-se que nos 3 o estudante soube fazer a reflexão e alguma translação. Mas não soube seguir os passos na nova configuração.

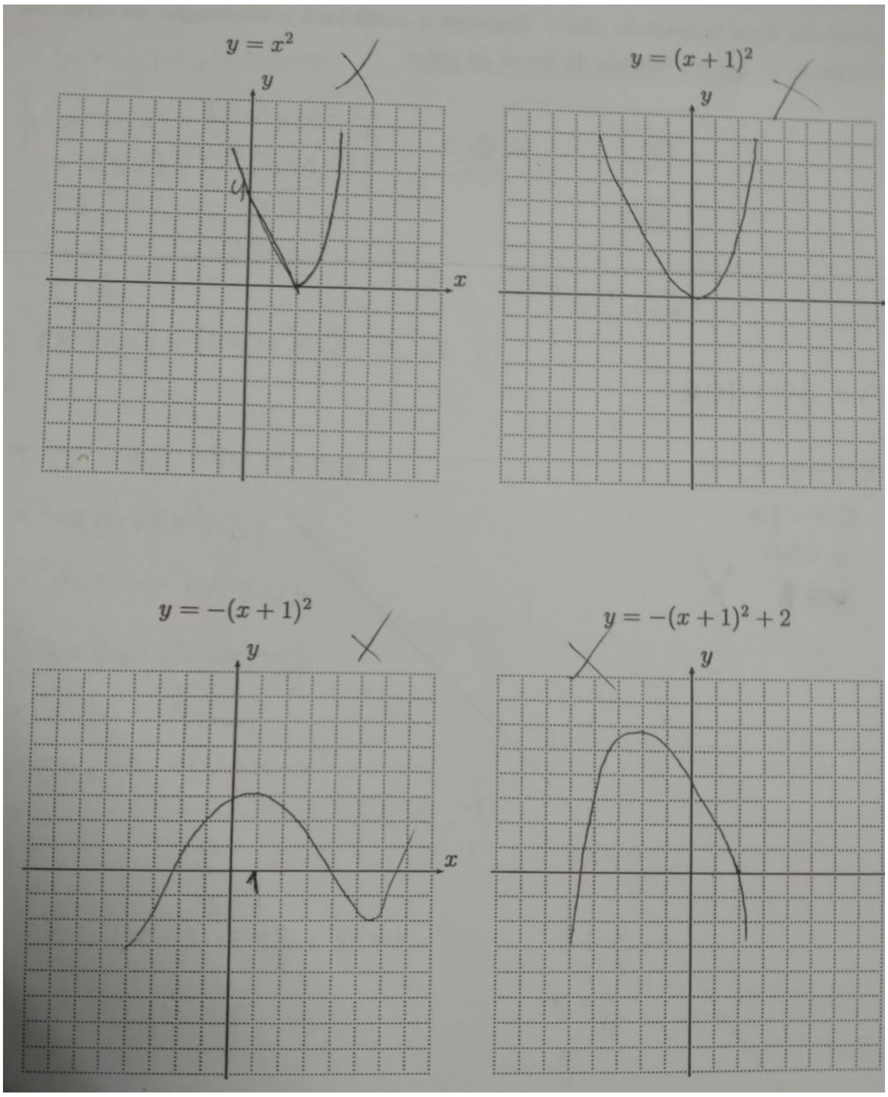
Figura 6.5.3: Configurações das representações erradas do estudante M1BL.



Fonte: arquivo pessoal.

Dois testes apresentaram falha de interpretação matemática. Não souberam construir as representações.

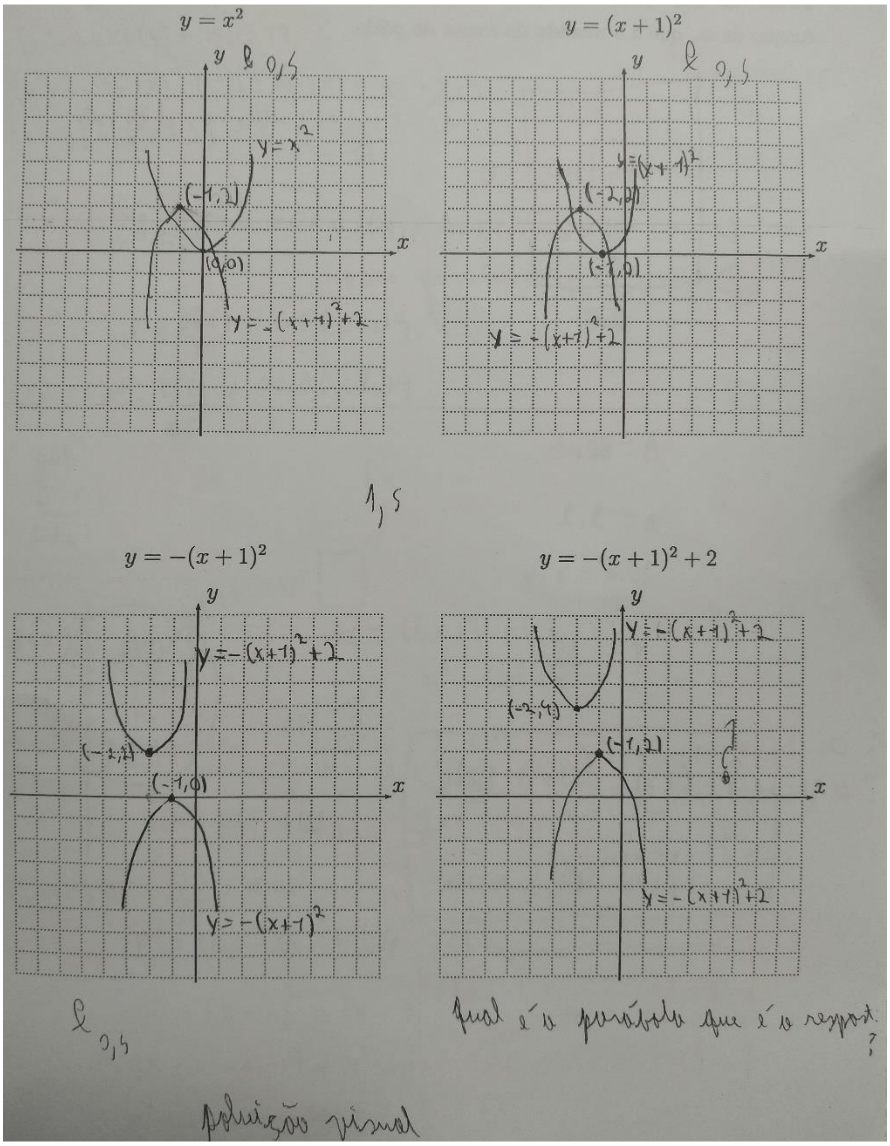
Figura 6.5.4: Falta de interpretação do estudante M1BE.



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante teve penalização do seu exercício por ter feito poluição visual. Pode parecer que os corretores foram rígidos quanto à questão, mas foi necessário, visto que a resposta final acabou sendo colocada em todos os planos cartesianos.

Figura 6.5.5: Penalização por poluição visual cometida pelo estudante M1BI.



Fonte: arquivo pessoal.

Olhando para os resultados obtidos, é possível inferir que os estudantes conseguiram compreender como funciona o processo de translações, reflexões e compressões/alongamentos de funções polinomiais. Os erros cometidos foram pontuais. Em sua maioria a não-colocação de legenda dos pontos, principalmente aqueles que são intersecção da representação com os eixos coordenados.

Visto que uma boa execução das representações gráficas auxilia em um entendimento melhor de certos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, as constatações acima demonstram a importância de enfatizar os pontos de corte com os eixos coordenados. Uma sugestão, para as próximas edições do curso, seria solicitar algum problema em que se deseja obter gráficos muito semelhantes, no qual a diferença entre eles estaria nos pontos de corte. Soma-se a esta constatação a continuidade de utilização da mesma escala, em cada item, bem como uma discussão sobre a não diferenciação aparente das curvas alongadas, ou comprimidas.

Tabela 6.5.1: Grade de respostas referente à Representação Gráfica de Funções Polinomiais

	Exemplo de erros encontrados					
	Não-indicação dos pontos de corte com os eixos	Má-representação	Não-translações	Interpretação	Penalização	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	50
Incorretas	8	6	3	2	1	20
Total						70

Fonte: arquivo pessoal.

6.6. Fatoração de polinômios

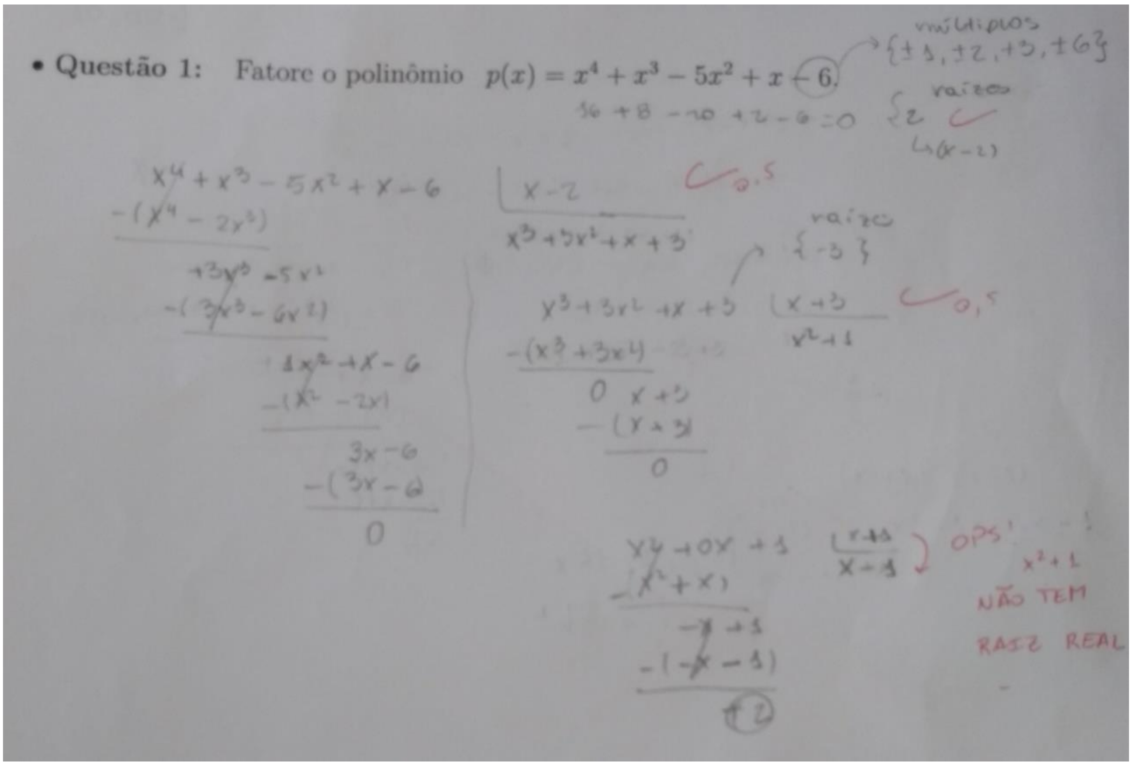
Adentrando ao segundo teste, nesta competência é solicitado ao estudante que saiba encontrar raízes de um polinômio e que consiga realizar a divisão a fim de fatorá-lo inteiramente, no campo do conjunto real. O exercício referente a este conteúdo, dos testes da turma de 2018, foi separado em dois, pois no mesmo exercício foi solicitado a fatoração e o estudo de sinais.

<u>Questão</u> (2018): Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$. Fatore $p(x)$.

Questão (2019): Fatore o polinômio $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.

Espera-se que o estudante domine a divisão de polinômios, encontrando candidatos para raiz, nas primeiras divisões, e chegue ao final com a fatoração completa, no campo do conjunto dos números reais. Sabe-se que alguns aprenderam o método de Briot-Ruffini para testagem de raízes, e poucos testes foram encontrados com tal método. 40 estudantes realizaram corretamente os cálculos e acertaram a questão. 8 estudantes tiveram um erro conceitual. Fizeram todas as divisões corretamente até chegar no fator $x^2 + 1$. Muitos realizaram a divisão como se os fatores fossem números reais.

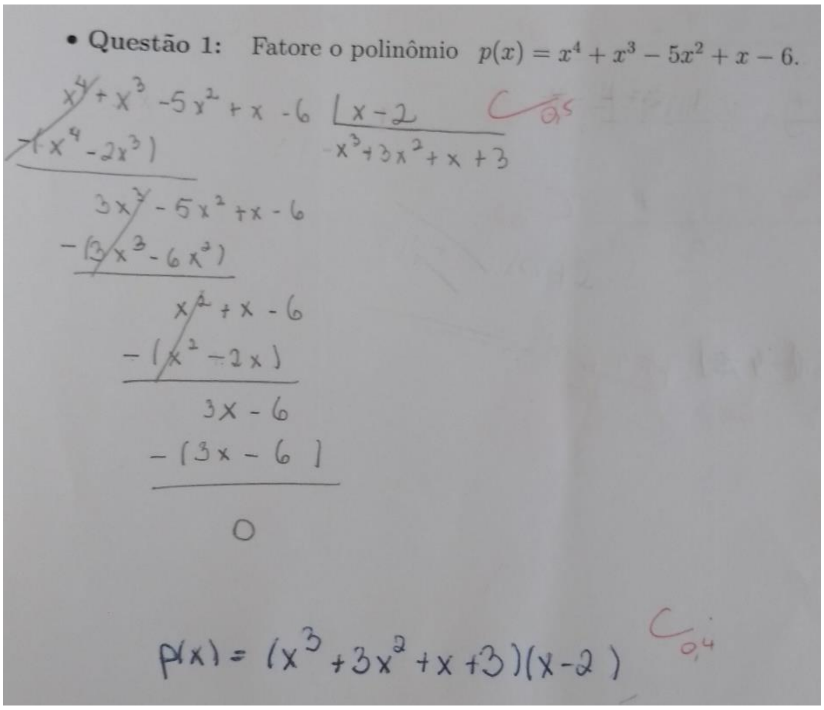
Figura 6.6.1: Exemplo de erro conceitual cometido pelo estudante M1BP.



Fonte: arquivo pessoal.

Já 12 estudantes iniciaram o desenvolvimento mas não continuaram a resolução.

Figura 6.6.2: Não término do exercício do estudante M1AD.



• **Questão 1:** Fatore o polinômio $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.

$\cancel{x^4} + x^3 - 5x^2 + x - 6 \quad \underline{|\,x-2}$

$-(\cancel{x^4} - 2x^3) \qquad x^3 + 3x^2 + x + 3$

$3\cancel{x^3} - 5x^2 + x - 6$

$-(\cancel{3x^3} - 6x^2)$

$\cancel{x^2} + x - 6$

$-(\cancel{x^2} - 2x)$

$3x - 6$

$-(3x - 6)$

0

$p(x) = (x^3 + 3x^2 + x + 3)(x - 2)$

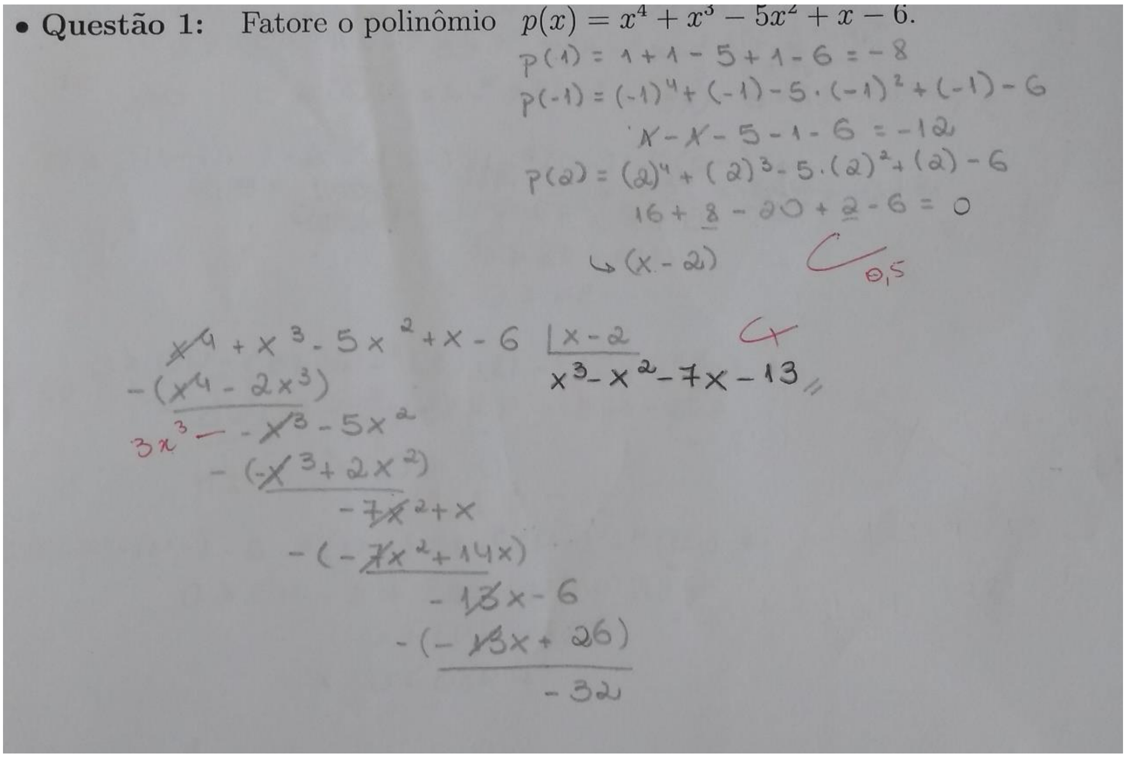
C 0,5

C 0,4

Fonte: arquivo pessoal.

Dois estudantes fizeram erro de sinal ou conta.

Figura 6.6.3: Erro de conta do estudante M1AO.



• **Questão 1:** Fatore o polinômio $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.

$p(1) = 1 + 1 - 5 + 1 - 6 = -8$

$p(-1) = (-1)^4 + (-1) - 5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6$

$\cancel{1} - \cancel{1} - 5 - 1 - 6 = -12$

$p(2) = (2)^4 + (2)^3 - 5 \cdot (2)^2 + (2) - 6$

$16 + \underline{8} - 20 + \underline{2} - 6 = 0$

$\hookrightarrow (x - 2)$

C 0,5

$\cancel{x^4} + x^3 - 5x^2 + x - 6 \quad \underline{|\,x-2}$

$-(\cancel{x^4} - 2x^3) \qquad x^3 - x^2 - 7x - 13$

$3x^3 - \quad -\cancel{x^3} - 5x^2$

$-(-\cancel{x^3} + 2x^2)$

$-\cancel{7x^2} + x$

$-(-\cancel{7x^2} + 14x)$

$-\cancel{13}x - 6$

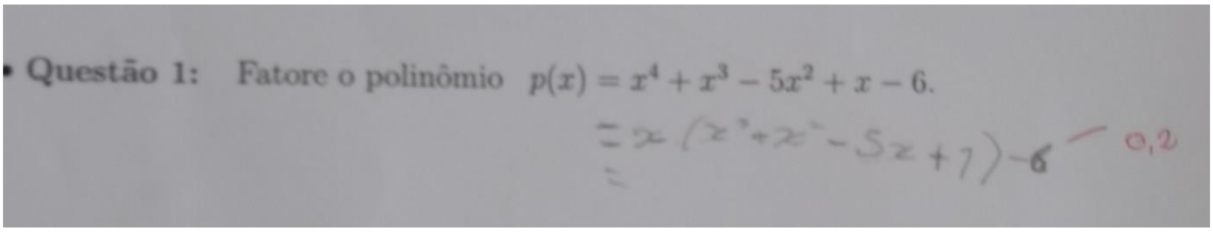
$-(-\cancel{13}x + 26)$

-32

Fonte: arquivo pessoal.

Seis estudantes colocaram algo mas não souberam fazer. Percebeu-se que alguns evidenciaram o x, como na figura, e não continuaram. Dois estudantes não fizeram nada.

Figura 6.6.4: Exemplo do estudante M1AG.



Fonte: arquivo pessoal.

A resposta à essa questão foi bem positiva. Entendeu-se que os estudantes souberam realizar a fatoração, expressando, ao final, o polinômio desejado. Quanto aos erros cometidos, o não entendimento de números complexos ficou evidente, bem como a restrição das raízes ao campo dos números reais.

Tabela 6.6.1: Grade de respostas referente à Fatoração de Polinômios.

	Exemplo de erros encontrados					
	Erro conceitual	Fez um pedaço e não continuou	Erro de conta/sinal	Não soube fazer	Não fez	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	40
Incorretas	8	12	2	6	2	30
Total						70

Fonte: arquivo pessoal.

6.7. Estudo de sinais de um polinômio

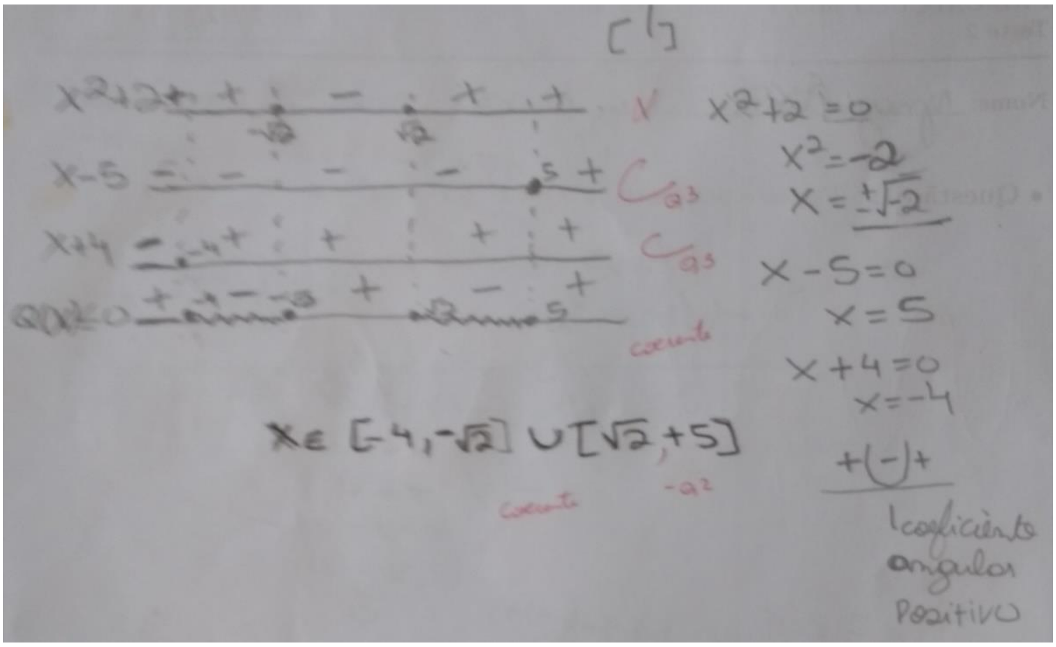
Pede-se, como ocorria com o estudo de sinais de uma inequação, que o estudante demonstre o domínio do estudo de sinal de cada fator de um polinômio e, consequentemente, do polinômio em si. Conforme dito na seção anterior, o exercício referente a este conteúdo, da turma de 2018, foi fragmentado para que as competências das turmas ficassem pareadas. Não foram consideradas questões diferentes (pois na de 2019 é mais específica quanto ao que se quer), pois é necessário realizar o estudo de sinal para chegar na resposta.

Questão (2018): Faça o estudo do sinal do polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 2$.

Questão (2019): Considere o polinômio $q(x) = 3(x^2 + 2)(x - 5)(x + 4)$. Determine os valores reais de x tais que $q(x) \leq 0$.

Nesse exercício, os estudantes devem dominar, como em estudo de sinais de inequações, o comportamento dos polinômios dados. 25 estudantes acertaram sem problemas. O primeiro problema encontrado foi com o estudo de $x^2 + 2$. 10 estudantes não souberam interpretar o significado.

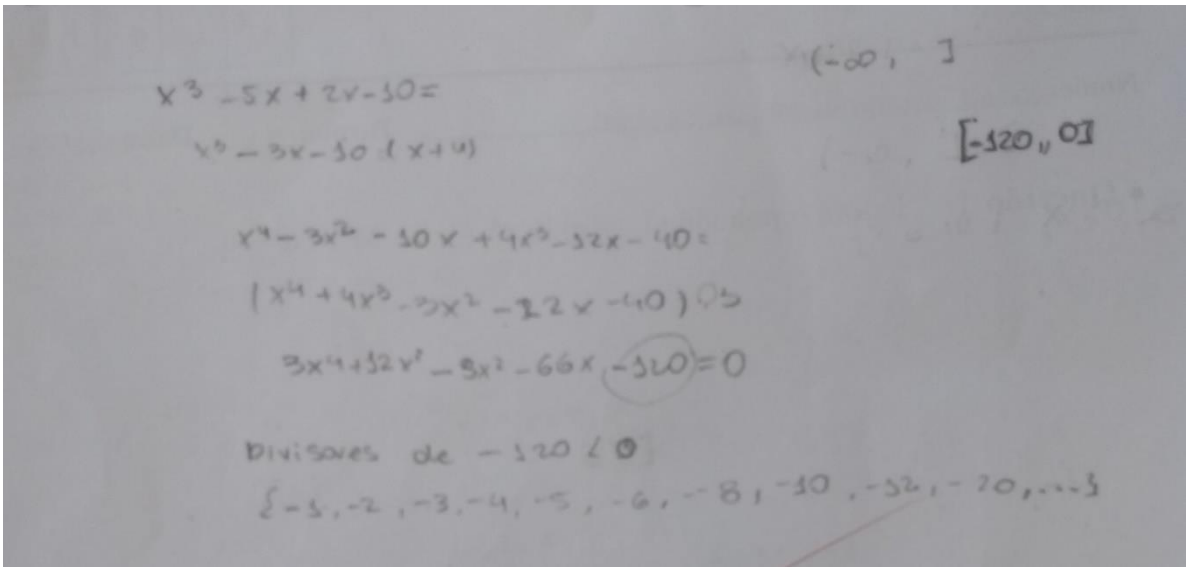
Figura 6.7.1: Exemplo do estudo de $x^2 + 2$ do estudante M1AH.



Fonte: arquivo pessoal.

O segundo erro mais observado foi a expansão do polinômio em 10 testes.

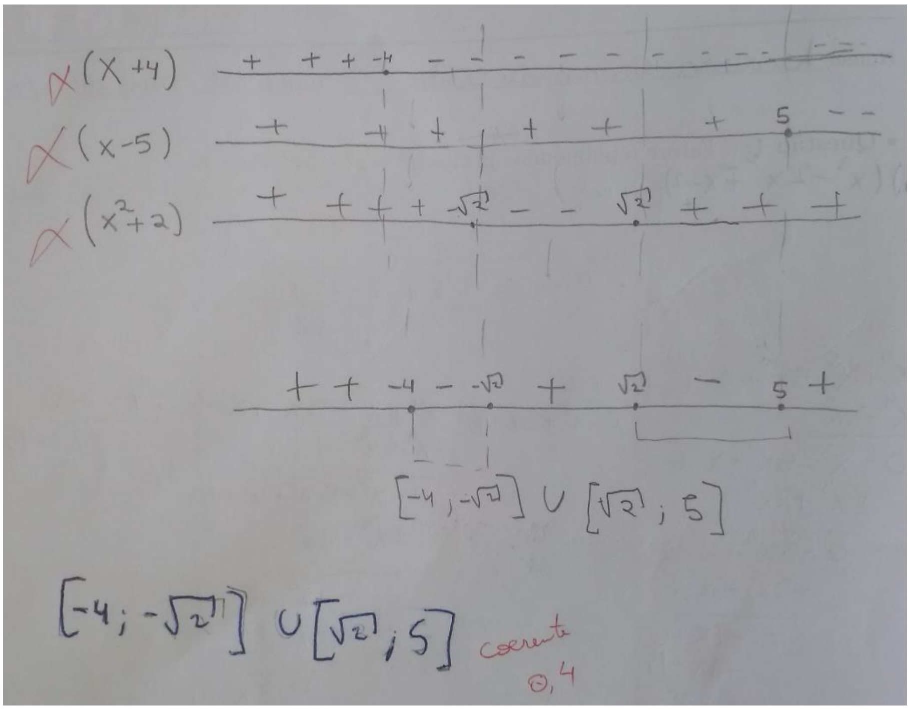
Figura 6.7.2: Expansão do polinômio pelo estudante M2BP.



Fonte: arquivo pessoal.

Também foram detectados estudos de sinais errados dos outros fatores em 6 testes.

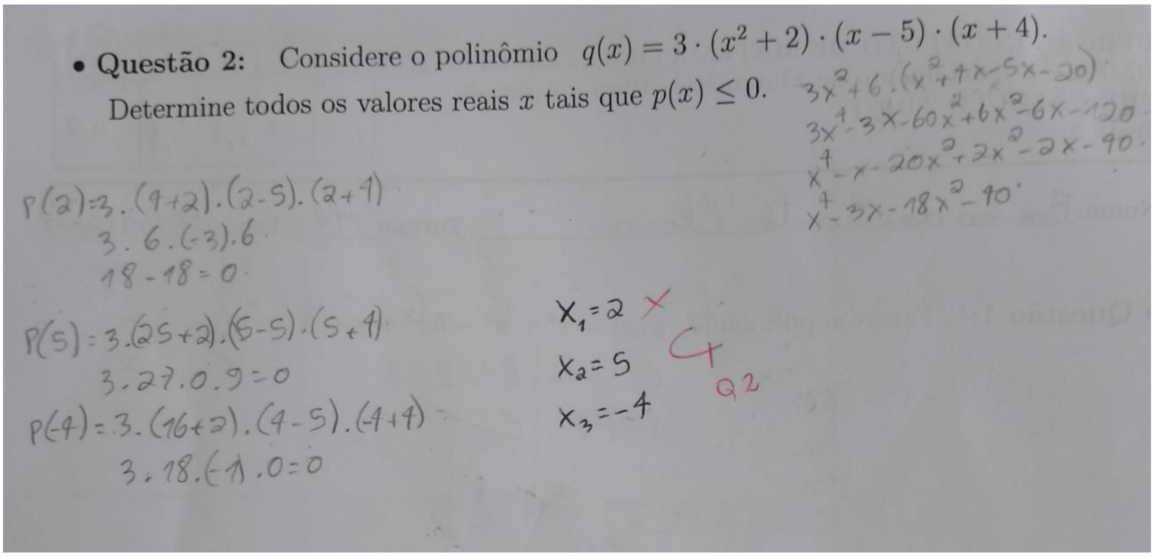
Figura 6.7.3: Exemplo de estudo de sinal errado do estudante M1AP.



Fonte: arquivo pessoal.

5 estudantes testaram pontos ao longo da reta real.

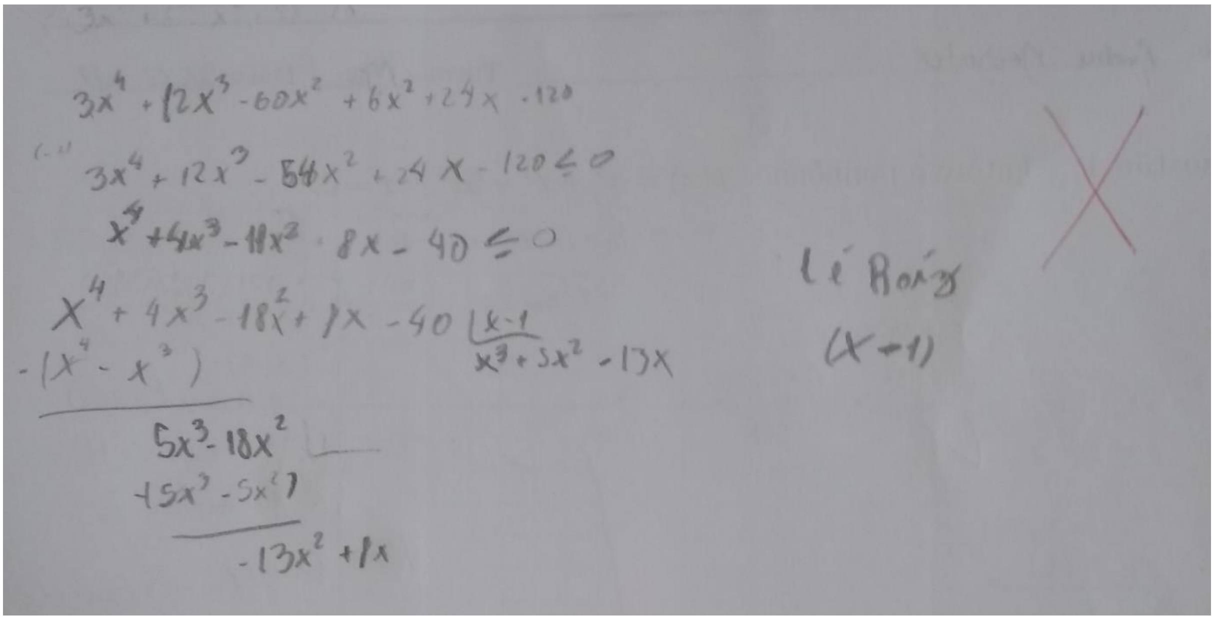
Figura 6.7.4: Exemplo de testagem de pontos do estudante M1BL.



Fonte: arquivo pessoal.

Dois estudantes cometeram um erro de conceito. Não realizaram o que foi solicitado.

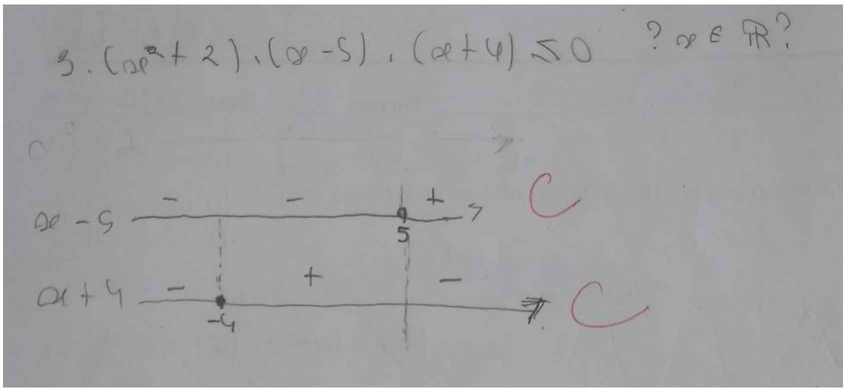
Figura 6.7.5: Erro de conceito apresentado por M2CP.



Fonte: arquivo pessoal.

Três estudantes iniciaram o exercício mas pararam, sem explicação.

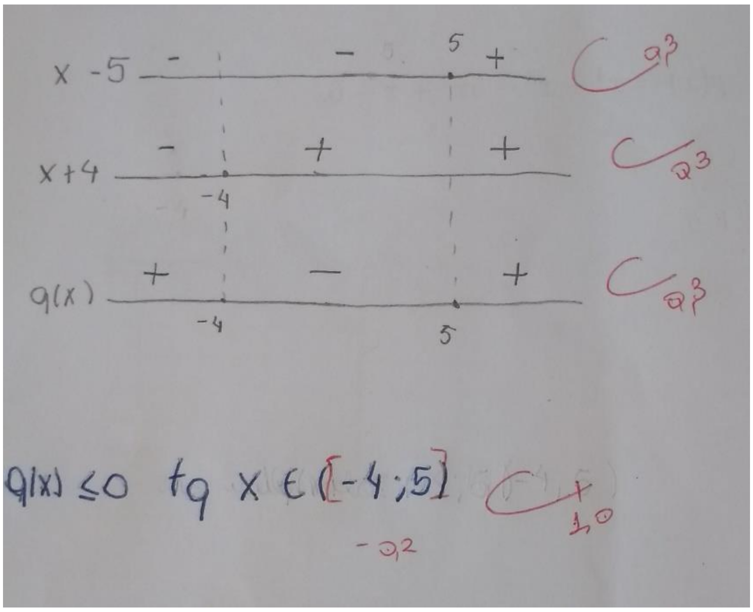
Figura 6.7.6: Exercício parado do estudante M1AE.



Fonte: arquivo pessoal.

Um único estudante cometeu o erro de não inclusão das raízes do polinômio na solução.

Figura 6.7.7: Erro de inclusão cometido pelo estudante M1AD.



Fonte: arquivo pessoal.

Por fim, 8 estudantes não fizeram o exercício. De um modo geral, os conceitos foram bem compreendidos e o método de resolução bem utilizado. O problema mais evidente foi o não conhecimento do que acontece com fatores que não tem raízes reais.

Tabela 6.7.1: Grade de respostas referente ao estudo de sinais de um polinômio

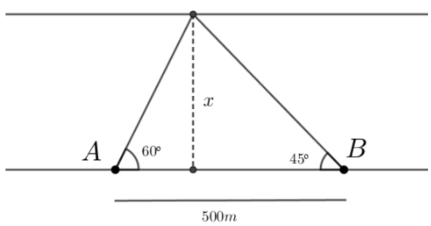
	Exemplo de erros encontrados								
	Estudo de $x^2 + 2$	Expansão do polinômio	Estudo de algum fator	Testou pontos	Erro de conceito	Iniciou e parou	Sinal	Não o fez	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-			-	25
Incorretas	10	10	6	5	2	3	1	8	45
Total									70

Fonte: arquivo pessoal.

6.8. Trigonometria I

Esse subcapítulo foi destinado para a turma de 2018, devido à dificuldade da questão. Nesta competência o estudante deve saber resolver problemas que envolvem trigonometria.

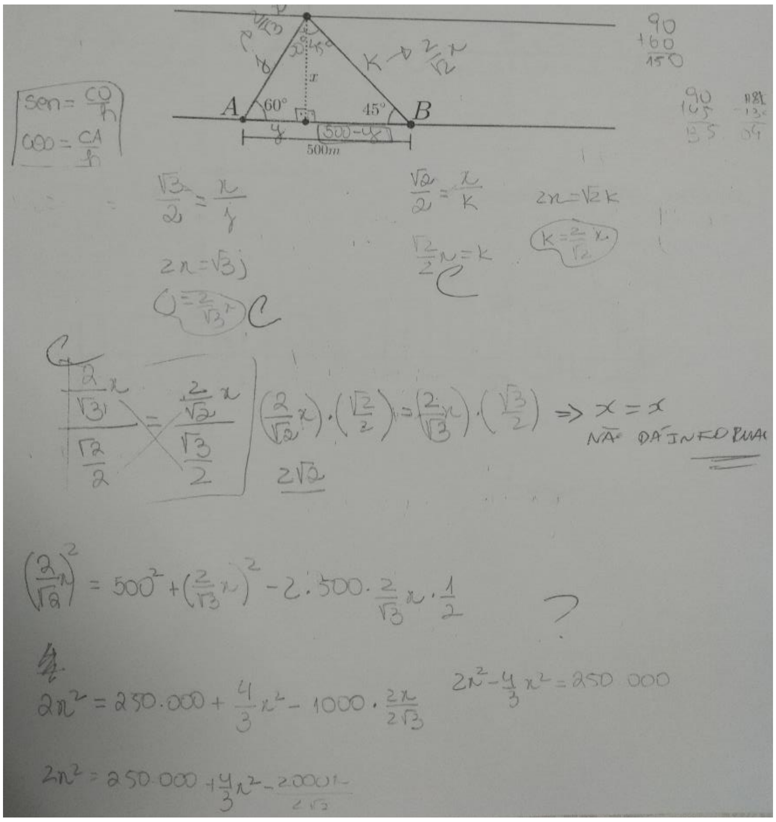
<u>Questão</u>: Um observador, querendo calcular a largura x de um rio como na figura abaixo, fez o seguinte procedimento. A partir de um ponto A, ele observou uma árvore na outra margem do rio e calculou que o ângulo realizado entre o segmento ligando A a árvore e a sua margem do rio era de 60º. A seguir, ele andou 500m até um ponto B como na figura e repetiu a medição, obtendo 45º. Usando que $sen(60º) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos(60º) = \frac{1}{2}$, $sen(45º) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos(45º) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule essa distância x.



Há diversas formas de resolução. Entre os 5 estudantes que acertaram a questão, há soluções utilizando Lei dos Senos, seno da soma ou por tangentes.

Em 5 testes não há finalização da questão. Utilizando diversos métodos, como lei dos cossenos, tangentes para cada caso ou estudando cada triângulo, esses estudantes chegaram a um ponto de não ir adiante em seus cálculos.

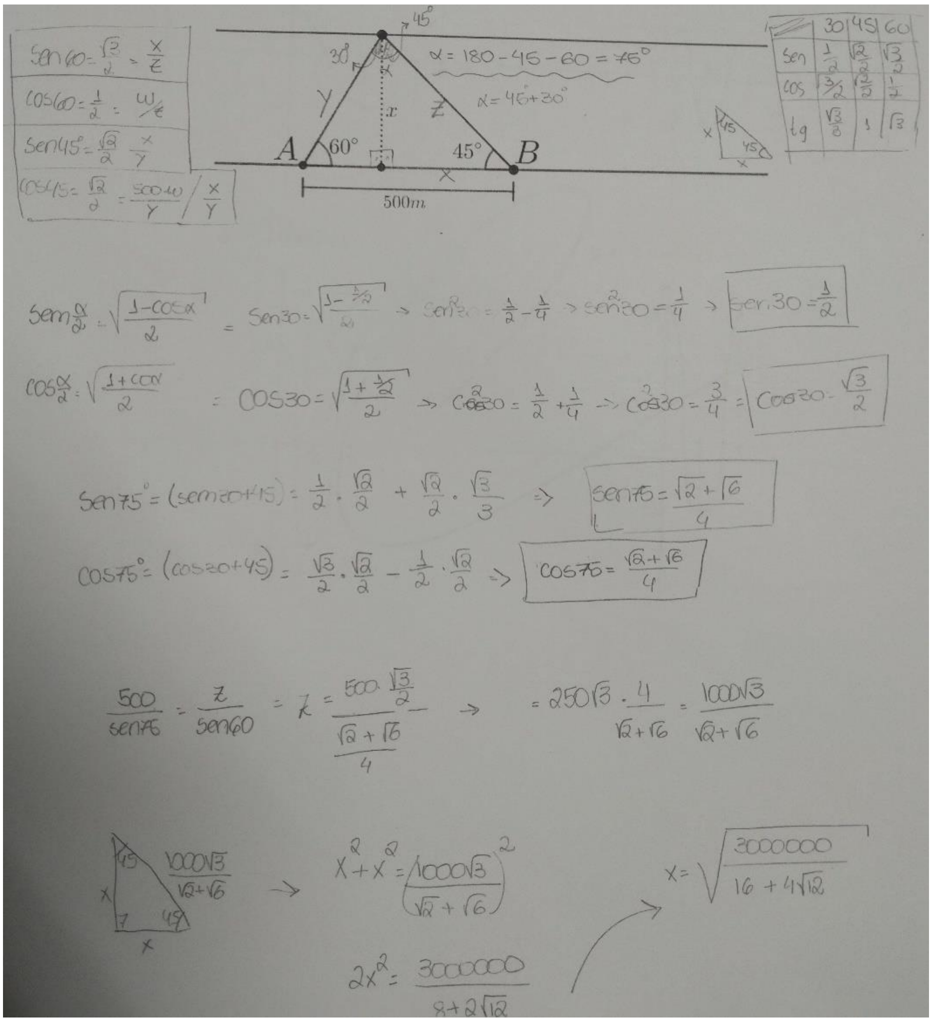
Figura 6.8.1: Exemplo de não seguimento do estudante M3EM.



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante errou o sinal do cosseno da soma, afetando sua resposta.

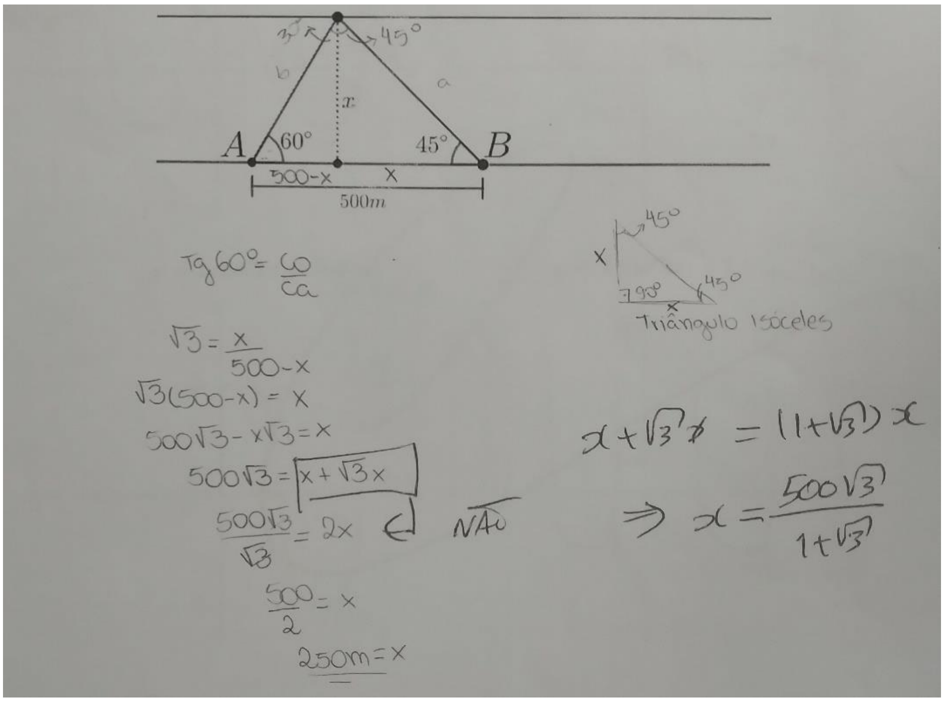
Figura 6.8.2: Erro de sinal do estudante M3EB



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante realizou um erro técnico, afetando a resposta.

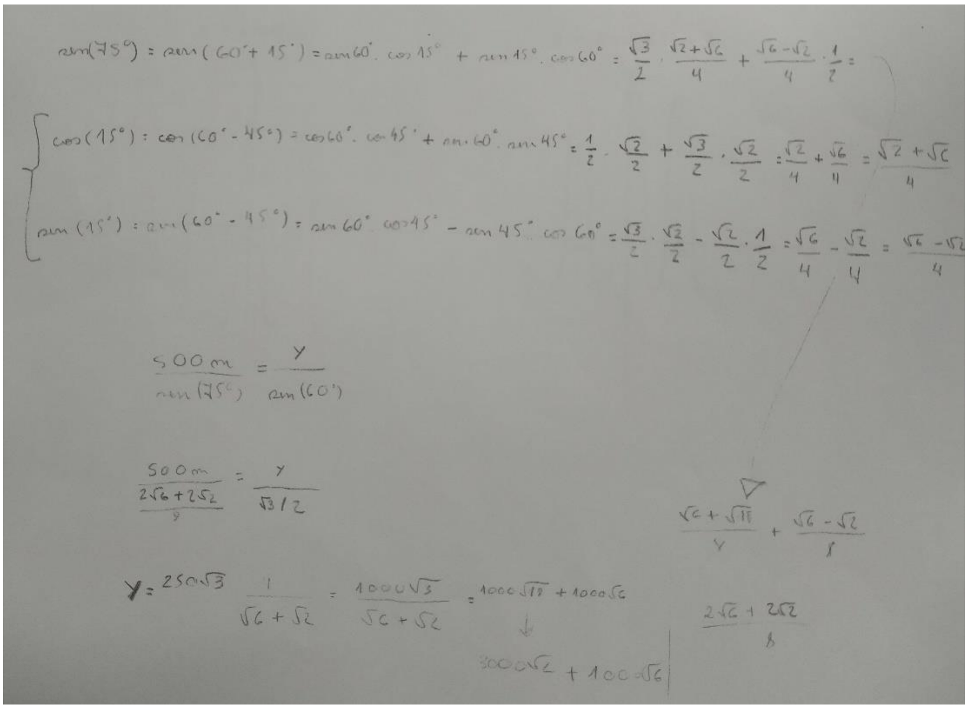
Figura 6.8.3: Erro técnico feito pelo estudante M3EC



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante fez simplificações a mais ao utilizar a Lei dos Senos.

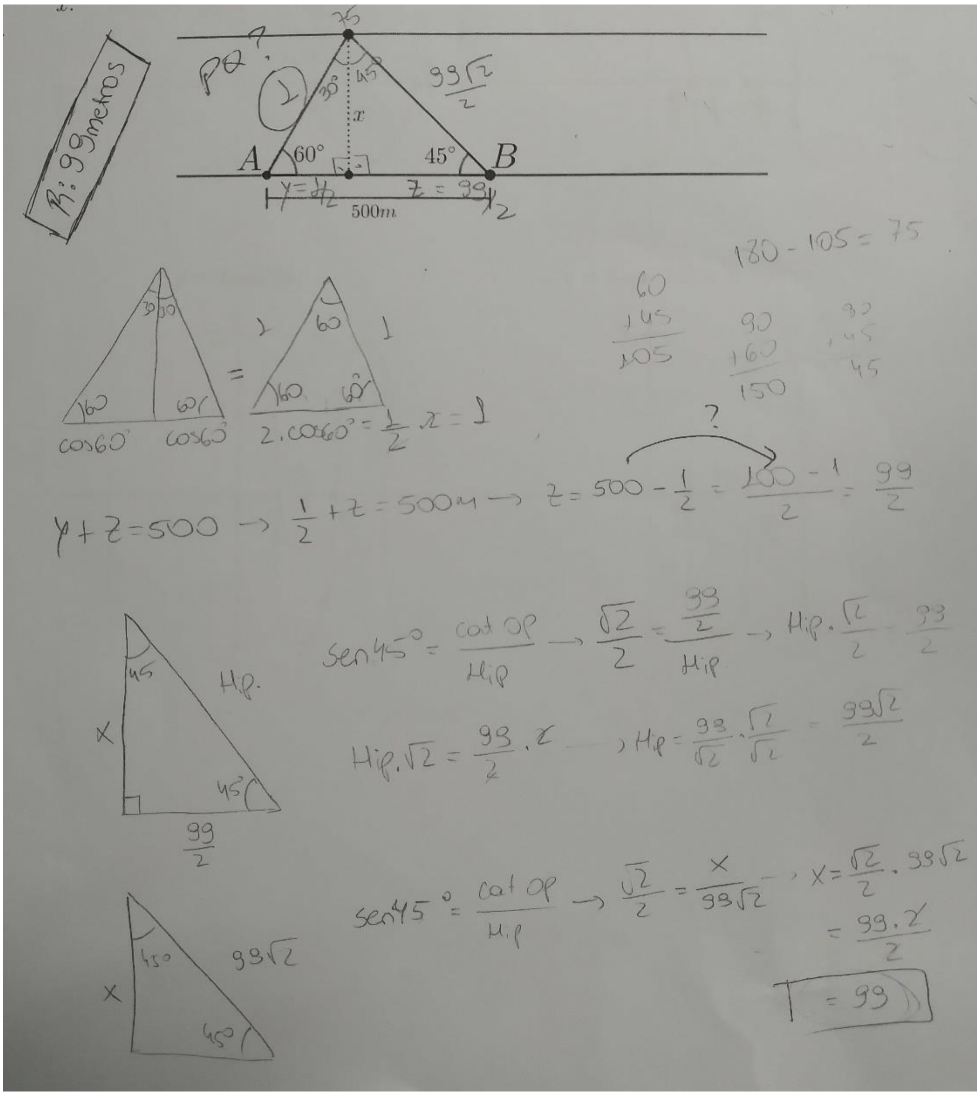
Figura 6.8.4: Figura das simplificações do estudante M3EF



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante fez suposições que não estavam no enunciado e realizando erros no seu desenvolvimento.

Figura 6.8.5: Exemplo de erro conceitual do estudante M3EL



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante não soube resolver.

Tabela 6.8.1: Grade de respostas referente à Trigonometria I

	Exemplo de erros encontrados						
	Não-seguimento por complexi-	Erro de sinal	Técnica	Simplificações a mais	Erro conceitual	Não soube resolver	TOTAL

	dade						
Corretas	-	-	-	-	-	-	5
Incorretas	5	1	1	1	1	1	10
Total							15

Fonte: arquivo pessoal.

Depreende-se que esta questão teve um nível difícil e que muito alunos não souberam iniciar a questão, chegando a tal ponto de complexidade que possibilitou o erro.

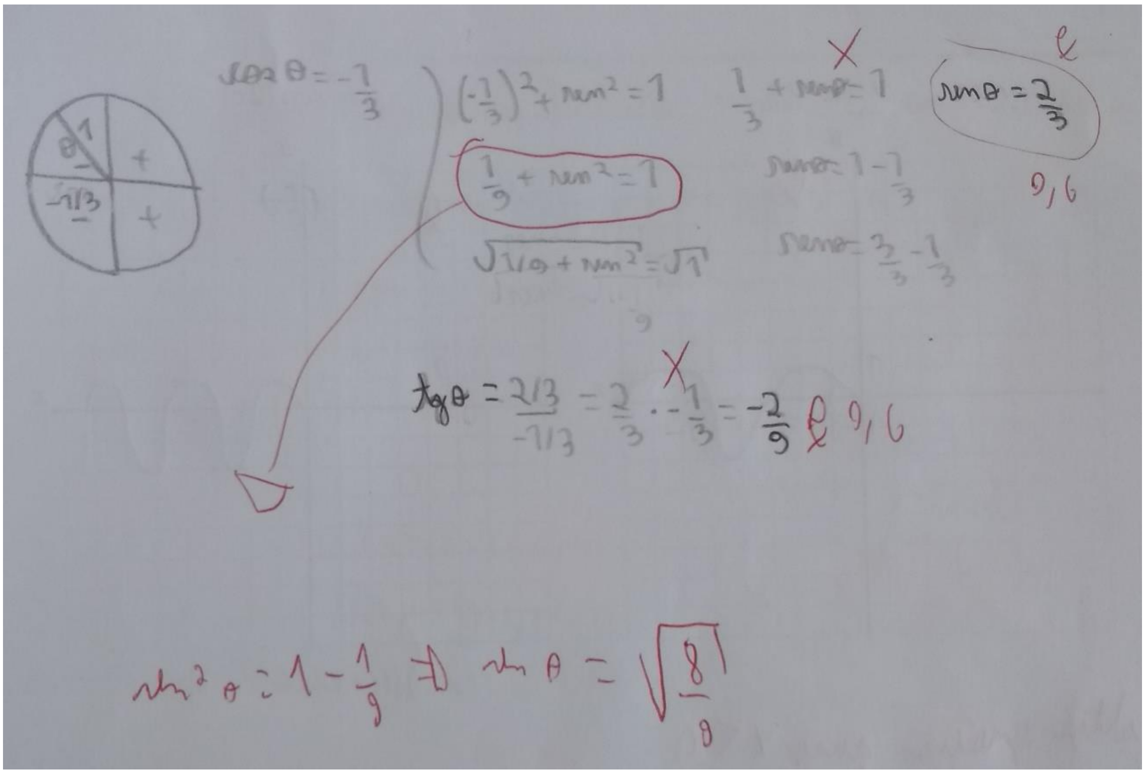
6.9. Trigonometria II

Para as turmas de 2019, o exercício de Trigonometria foi mais fácil. Espera-se que o estudante seja capaz de compreender as noções do círculo trigonométrico, juntamente na identificação dos valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo.

Questão: Sabendo que θ é um ângulo do segundo quadrante e que $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$, determine $sen(\theta)$ e $tg(\theta)$.

23 estudantes acertaram toda a questão. 5 estudantes fizeram erros de conta, isto é, erraram algum cálculo numérico. O principal foi realizar o quadrado de 1/3 e a subtração subsequente por 1.

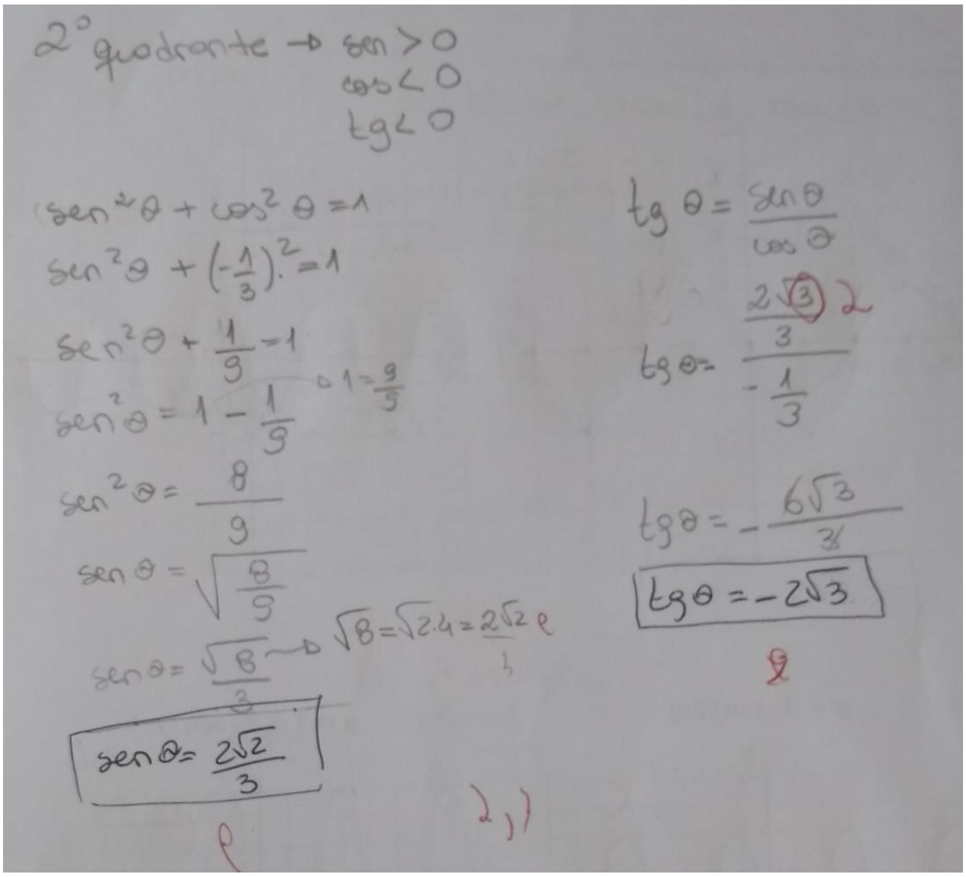
Figura 6.9.1: Erro de conta do estudante M1BJ.



Fonte: arquivo pessoal.

O próximo erro encontrado, em 3 testes, foi o de troca de números.

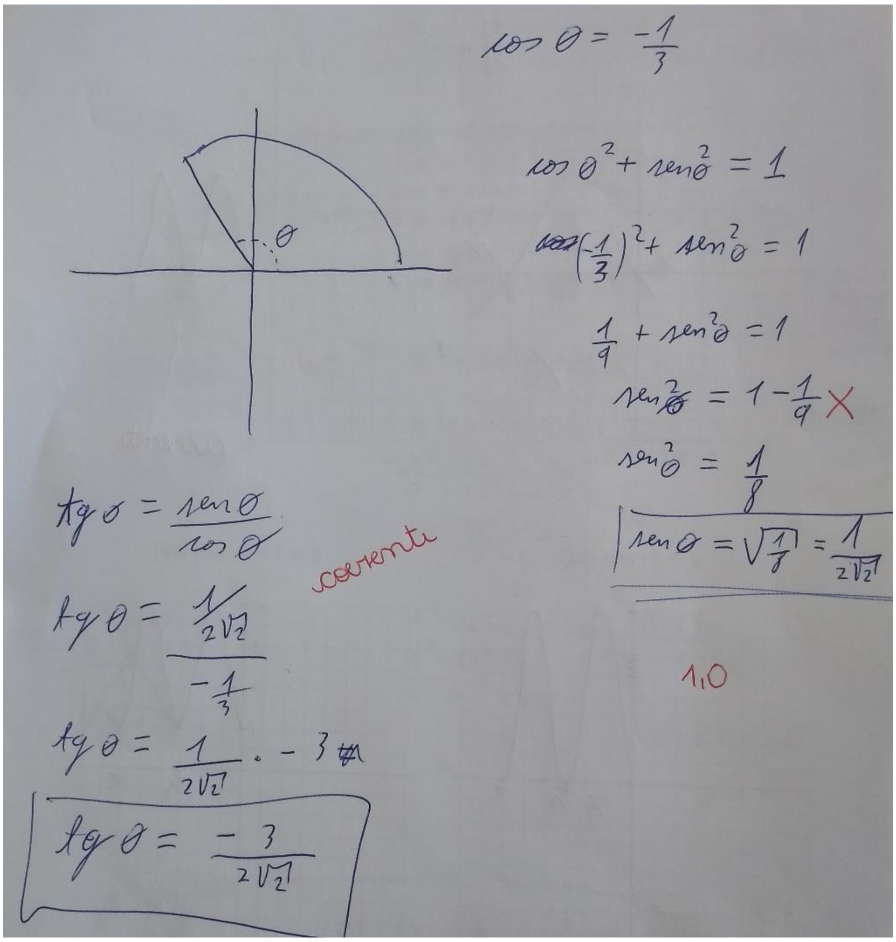
Figura 6.9.2: Erro de troca de números do estudante M1AA.



Fonte: arquivo pessoal.

Um estudante apresentou erro de conceito, confundindo o ângulo com o valor do seu cosseno e a subtração de frações com troca de números.

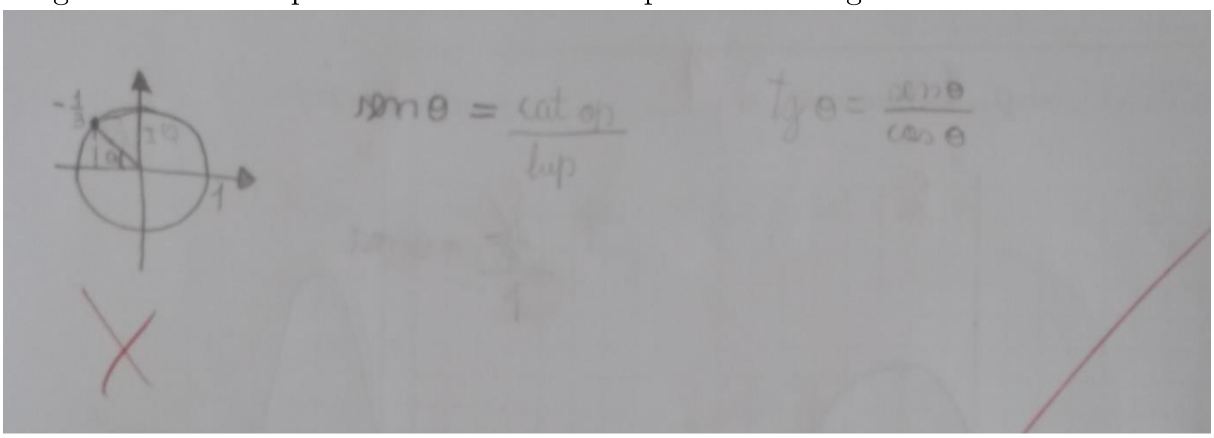
Figura 6.9.3: Erro cometido pelo estudante M2CB.



Fonte: arquivo pessoal.

8 estudantes não fizeram o exercício e 14 estudantes chegaram a escrever alguma coisa, mas não souberam desenvolver o seu raciocínio.

Figura 6.9.4: Exemplo do estudante M1BE que escreveu algo mas não desenvolveu.



Fonte: arquivo pessoal.

Observando os testes, a maioria dos estudantes soube extrair as informações necessárias. Os erros cometidos e apresentados acabaram sendo pontuais, muitos como erros de conta básicos, e tenho um alto índice de respostas incorretas porque esses estudantes não souberam desenvolver o seu raciocínio para o exercício.

Tabela 6.9.1: Grade de respostas referente à Trigonometria II

	Exemplo de erros encontrados					
	Erro de conta	Erro de troca de número	Erro de conceito	Não fez	Não soube resolver	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	24
Incorretas	5	3	1	8	14	31
Total						55

Fonte: arquivo pessoal.

6.10. Representações Gráficas de Funções Trigonométricas

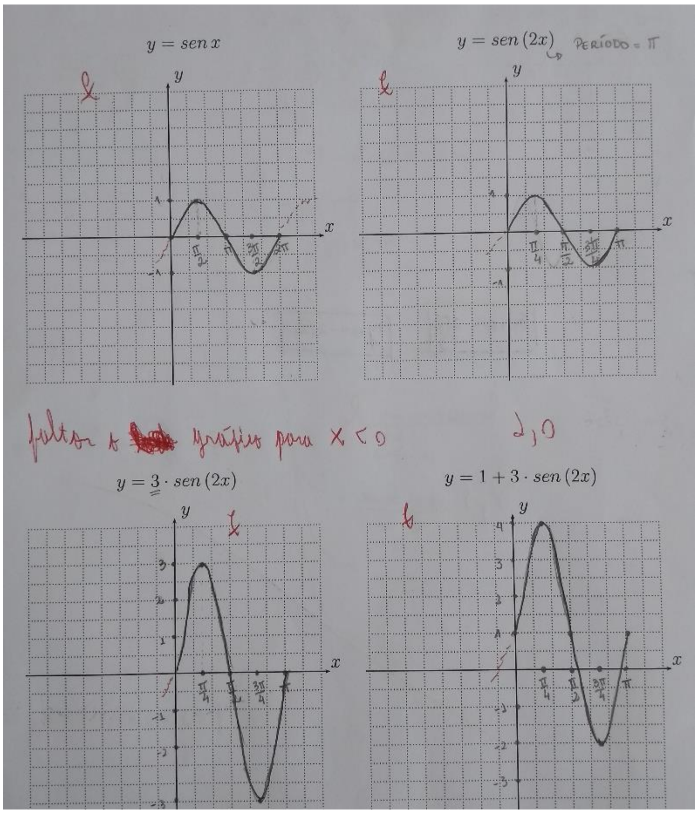
Analogamente ao estudo das representações gráficas de funções polinomiais, aqui pede-se o domínio de representações gráficas de funções trigonométricas. É esperado que os estudantes consigam desenhar a representação, junto com os pontos de corte nos eixos, bem como os pontos relacionados ao período da função, e consigam compreender quando ocorre compressão/alongamento horizontal e vertical. As questões de 2018 e 2019 são diferentes, mas podem ser comparadas.

<u>Questão</u> (2018): Esboce o gráfico da função $f(x) = 2\cos(2x) + 1$, seguindo as etapas $y = \cos(x)$, $y = \cos(2x)$, $y = 2\cos(2x)$, $y = 2\cos(2x) + 1$.

<u>Questão</u> (2019): Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 + 3\text{sen}(2x)$, seguindo as etapas $y = \text{sen}(x)$, $y = \text{sen}(2x)$, $y = 3\,\text{sen}(2x)$, $y = 1 + 3\,\text{sen}(2x)$.

33 estudantes acertaram a questão e 3 não fizeram. O erro mais detectado foi o de indicação das representações só no eixo x positivo, em 13 testes.

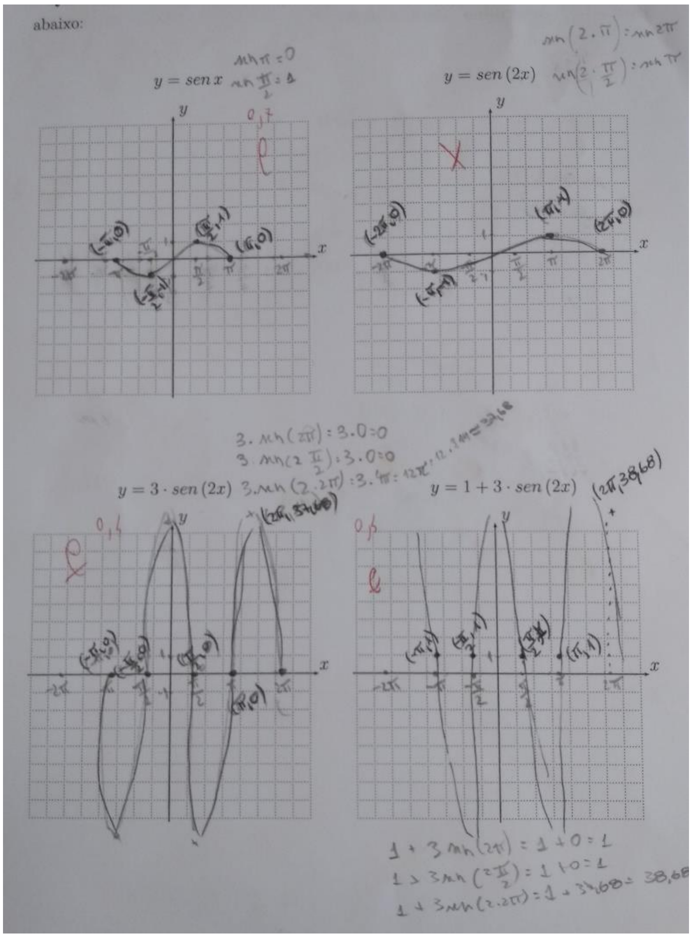
Figura 6.10.1: Exemplo de representação positiva do estudante M1AV.



Fonte: arquivo pessoal.

7 estudantes não compreenderam o período das funções em cada parte.

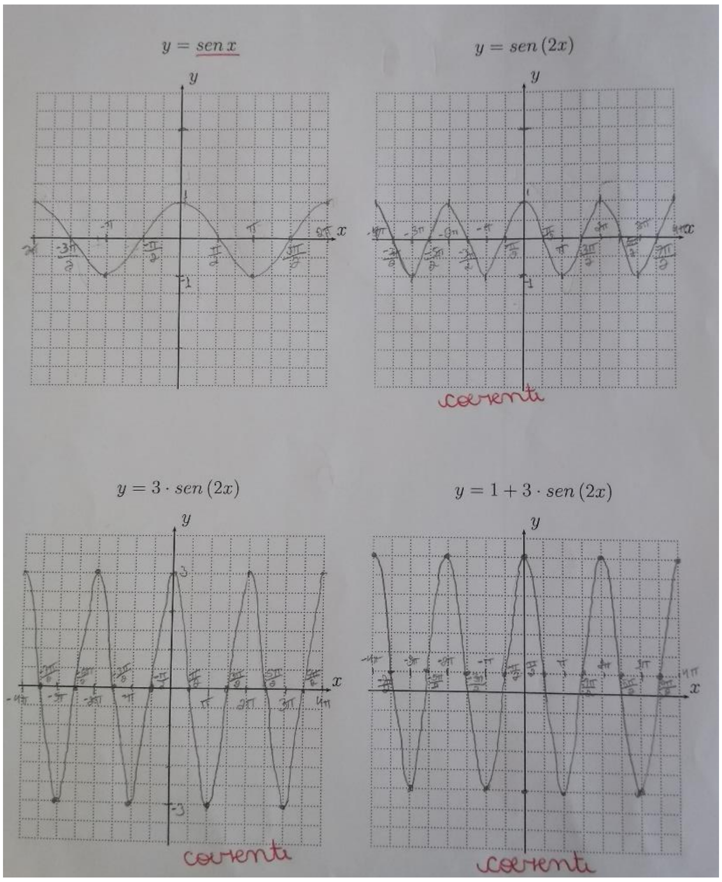
Figura 6.10.2: Erro de período de função do estudante M1AX.



Fonte: arquivo pessoal.

3 estudantes fizeram uma troca da representação gráfica do seno pelo cosseno.

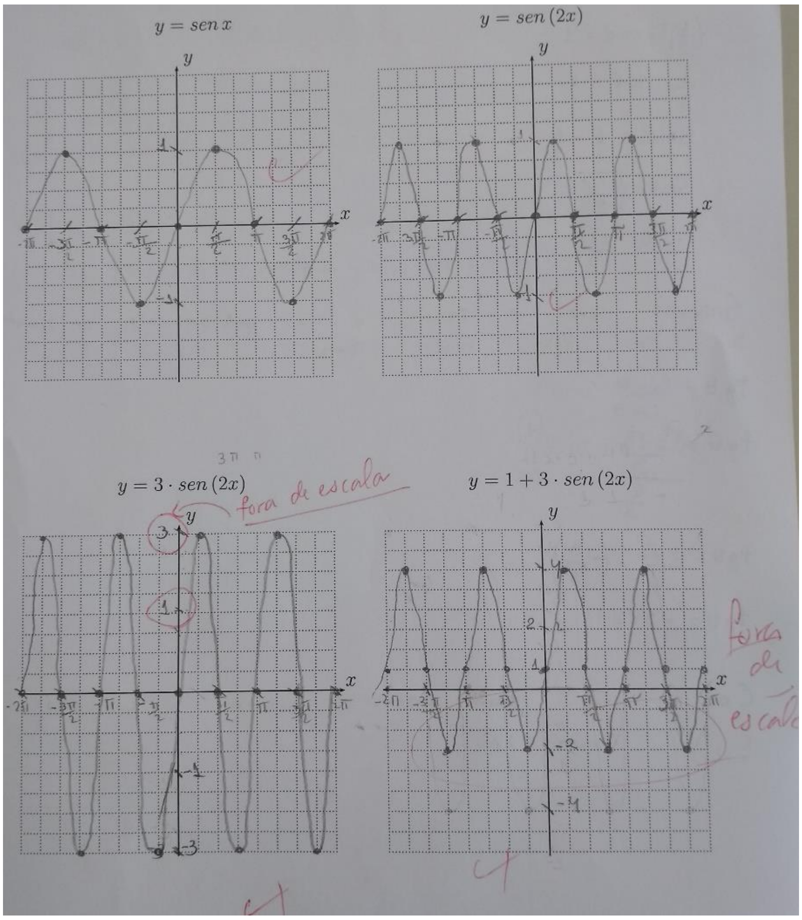
Figura 6.10.3: Troca da representação gráfica do estudante M2CY.



Fonte: arquivo pessoal.

2 estudantes realizaram um erro de escala.

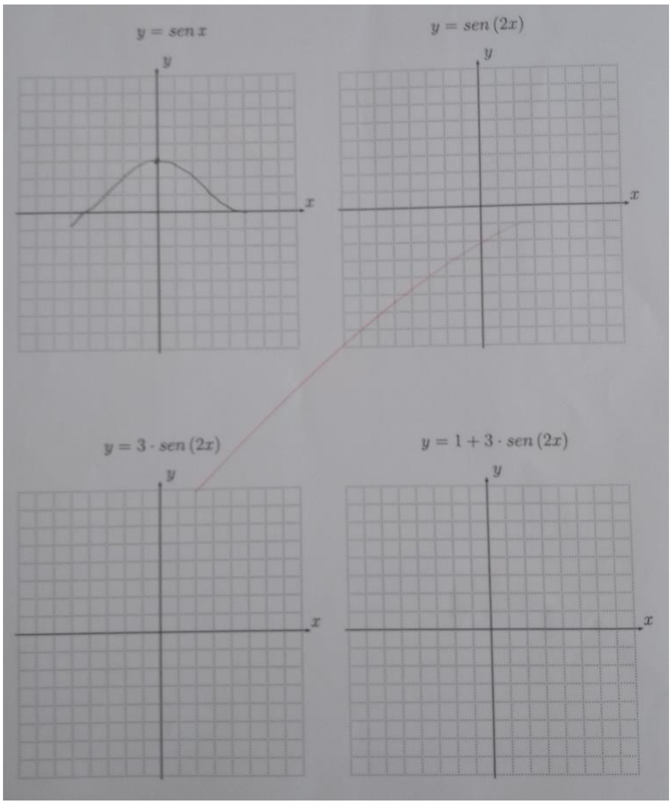
Figura 6.10.4: Erro de escala do estudante M2DB.



Fonte: arquivo pessoal.

6 estudantes não compreenderam como proceder.

Figura 6.10.5: Exemplo de não compreensão do estudante M1BN.



Fonte: arquivo pessoal.

De um modo geral, os estudantes souberam resolver o exercícios. Para a turma M1 os corretores foram mais rigorosos quanto à utilização do eixo x negativo da função. Muitos ainda tiveram dificuldades de diferenciar a função seno da função cosseno. Dessa vez poucos estudantes não colocaram pontos de corte.

Tabela 6.10.1: Grade de respostas referente à Representação Gráfica de Funções Trigonométricas

	Exemplo de erros encontrados						
	Representação no eixo x positivo	Erro no período da função	Troca de seno por cosseno	Erro de escala	Não compreendeu	Não fez	TOTAL
Corretas	-	-	-	-	-	-	36
Incorretas	13	7	3	2	6	3	34
Total							70

Fonte: arquivo pessoal.

7. Considerações Finais

Ao longo da vida acadêmica, o estudante de Matemática aprende o seu ofício, revendo os ensinamentos que matemáticas e matemáticos desenvolveram ao longo dos anos e moldando o seu conhecimento para aplicar na sua profissão. No campo da Educação Matemática, o professor utiliza esses saberes para comunicá-los a novos indivíduos que precisarão usar no seu trabalho.

Por diversos motivos, ocorre uma aproximação daqueles conhecimentos, ou áreas, que se tem maior familiaridade. O curso de Pré-Cálculo é um lugar de transição, da Escola Básica para o Ensino Superior, e fez com que autor voltasse o seu olhar para esse momento, na vida do estudante, que é crucial para o futuro acadêmico. Estudar e entender as causas que levaram à sua concepção foi de extrema importância, pois foi possível compreender que, ao mesmo tempo em que o alto índice de reprovações em Cálculo é um fenômeno mundial, na UFRGS o problema não foi deixado de lado, sendo encarado de frente pelos professores. Trazer à luz o desejo de unificar as disciplinas permitiu dar uma dinamicidade e organização, por parte dos docentes e dos alunos, visto que uma dificuldade que surgisse passava ser pontual.

Ao entrevistar os organizadores do Pré-Cálculo foi possível chegar à conclusão de que esse curso obteve muito apoio da universidade e rendeu frutos. Porém, nos últimos semestres, acabou perdendo espaço, seja pelas mudanças de datas do Vestibular, seja pelo não engajamento em cuidar dessa transição Escola Básica – Ensino Superior, ou pela crescente desunificação das próprias disciplinas de Matemática.

Conhecer um pouco mais sobre da formação dos licenciandos em Matemática também auxiliou a entender o cuidado que o professor deve ter ao ensinar o conhecimento matemático. É saber o que dizer, como se expressar, tirar possíveis *gatilhos* que possam interferir na aprendizagem.

Para empreender o objetivo deste trabalho, analisar e classificar as respostas obtidas pelos estudantes, foi feita uma retomada histórica, mais recente, da tendência de Análise de Erros. Foi interessante saber que ela está ligada à Psicologia e à Didática da Matemática e que é possível relacionar o erro como algo passível, não de exclusão do estudante, mas de oportunidade para aprendizagem, proporcionando uma retomada dos conteúdos que não foram bem assimilados.

A apropriação da Análise de Conteúdo por essa tendência tornou o processo de analisar, e classificar, respostas mais técnico e padronizado. Técnico pois a parte de classificação exigiu um refinamento de qual grupo cada resposta se encaixa. Padronizado pois se criou uma rotina de como seguir e o que fazer com o material que se está lidando.

A análise propriamente dita se mostrou algo enriquecedor. Retomar problemas e observar o que foi respondido permitiu a visualização, não só de uma gama de respostas corretas, mas de quais as dificuldades mais comuns, com relação à compreensão do conteúdo abordado.

Para a primeira competência, envolvendo números reais e inequações, a principal falha cometida foi o da inclusão de valores que não estão definidos na expressão. Isso pode ser um descuido, por parte do estudante, devido ao tempo dado para realização do teste. Depois, o não seguimento, ou o estudo de sinais feito de forma errada, mostram que é necessário dar um enfoque maior no que é fazer o estudo de sinais, traçando uma analogia com o comportamento da equação ao longo da reta real. Além disso, apesar de se dizer que não se deve fazer a multiplicação cruzada, muitos persistem em tal método, abordando o problema como se fossem grandezas diretamente proporcionais. Talvez seja interessante colocar a mais problemas relacionados às inequações, seja para treinar o saber aprendido ou, até mesmo, questionar se as respostas obtidas abrangem a solução completa.

Para a segunda questão, de Geometria Analítica, o assunto mais crítico encontrado foi a falta de destreza algébrica. Nas experiências de monitoria do Pré-Cálculo, sempre foi reforçado, e explicado com mais atenção, de como proceder com o completamento de quadrados. Também, que realizar desenhos é sempre bom para compreender o que está acontecendo com o problema em questão, mas que o desenho em si não prova a atividade requerida.

Já para a terceira questão, de modelagem de funções, num primeiro momento foi difícil de classificar as respostas, devido ao alto índice de erros cometidos e a não organização, por parte dos estudantes, na redação matemática. Considerando que o grau de dificuldade das duas questões apresentadas era alto, a confusão gerada entre: saber se utiliza a fórmula da área ou a fórmula do perímetro, foi grande. Outro aspecto que sempre ocorre é a má formulação do domínio da função ou a não inclusão. Não é solicitado no enunciado, mas subentende-se que ele deve ser incluído na resposta final (por se tratar de uma medida finita). Devido a importância que tal conteúdo tem, para as disciplinas de Cálculo, e de outras áreas de conhecimento, poderia ser dado um enfoque maior a ele, desembaraçando os enunciados e propondo uma listagem dos dados lá contidos.

Em representações gráficas de funções polinomiais, o que gera mais trabalho para os professores e monitores é fazer com que os estudantes saibam desenhar as representações de maneira mais agradável. A robustez observada nas respostas dos testes traz um certo espanto, pois é comentado em todas os encontros que é necessária a colocação de pontos de corte com os eixos e que a escala entre cada eixo deve ser mantida. Um modo de sanar esse problema é construir uma tabela com valores do eixo x próximos da origem, e solicitar os valores obtidos pela função, junto com os pares ordenados correspondentes.

Quanto a fatoração de polinômios, não foram encontrados grandes problemas. Ao contrário de outras edições vivenciadas, nos testes observados somente uma pessoa resolveu pelo algoritmo de Briot-Ruffini. O que causou estranhamento foi a divisão de um binômio, que não tem raízes reais, como se tivesse raízes reais. Junto a fatoração, é viável falar do estudo de sinais de polinômios. Justamente essa parte de não saber como lidar com números complexos se apresentou como um problema a ser observado mais de perto. Esse conteúdo não é ensinado no Pré-Cálculo, mas pode ser trazido de modo a auxiliar na compreensão. Nesta competência também se apresentou o problema da inclusão, ou não, das raízes dos fatores.

Se a modelagem de funções se apresentou como algo difícil, a trigonometria foi além. A linha de raciocínio apresentada por alguns tomou uma complexidade que causou a parada do problema, no caso da turma de 2018, podendo ter acontecido pela dificuldade do enunciado. Nas turmas de 2019 foi mais tranquilo de se analisar. O erro mais encontrado foi o de conta, evidenciando a atenção dispendida, por parte do estudante.

Para a última competência, o que mais chamou atenção foi a não compreensão de que é necessário expandir a representação gráfica para o eixo x negativo, bem como o entendimento de período, amplitude e compressão/alongamento da função. A destreza de desenho foi melhor utilizada nessa questão. Como foi comentado nas representações de funções polinomiais, a construção de uma tabela com valores do eixo x, da função aplicada nesses valores e do par ordenado obtidos é de grande valia.

Esse trabalho foi um aprendizado, de que se deve olhar mais atentamente as produções que os estudantes estão dando à problemas propostos, ao se testar o conhecimento aprendido, e não só para os aspectos como: se o aluno vem à aula ou se ele está participando ativamente dos encontros. Mas o modo como o docente expressa e comunica o conhecimento, principalmente o matemático, influencia também no bom desempenho de seus alunos. Principalmente em um curso de transição como o Pré-Cálculo, que insere o formalismo da vida universitária, mas ao mesmo tempo tem um contato mais humanizado com o ingressante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Tradução de Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 316 p.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. 4. ed. Lisboa: Edições 70, 1977. 229 p. Edição de 2021.

BORASI, R. **Reconceiving Mathematics Instruction**: A Focus on Errors (Issues in Curriculum Theory, Policy and Research). Norwood: Ablex Publishing Corporation, 1996. 320 p.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília: [s.n.], 2016. 120 p. Edição administrativa do Senado Federal.

BRASIL. Lei nº 5.540, de 28 de novembro de 1968. Fixa normas de organização e funcionamento do ensino superior e sua articulação com a escola média, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF. Disponivel em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5540-28-novembro-1968-359201-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 02 abr. 2022.

CHAMIE, L. M. S. A Relação Aluno-Matemática: alguns de seus significados. **Bolema**, Rio Claro, v. 6, n. 7, p. 1-7, 1991. Disponivel em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10705>. Acesso em: 21 abr. 2021.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2007. 112 p.

CURY, H. N. Pesquisas em ensino de Ciências e Matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 237-256, 2012. Disponivel em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/8751>. Acesso em: 30 jan. 2022.

DOERING, C. I.; DOERING, L. R.; NACUL, L. B. C. O Programa Pró-Cálculo da UFRGS. In: CURY, H. N. Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores. 1. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, v. 1, 2003. Cap. 8, p. 201-223.

DOERING, C. I.; DOERING, L. R.; NÁCUL, L. B. C. Pré-Cálculo. 3. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. 140 p.

ESTELEY, C.; VILLAREAL, M. Análisis y categorización de errores en matemática. Revista de Educación Matemática, v. 11, n. 1, p. 16-35, 1996. Disponivel em: <http://funes.uniandes.edu.co/20507/1/Esteley1996Analisis.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2022.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, v. 1, 2012. 228 p.

GARCIA, V. C. V. Laboratório de prática de ensino-aprendizagem de matemática III - MAT 1072. mat.ufrgs.br/~vclotilde/, 2008. Disponivel em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/laboratorio/laboratorio.htm>. Acesso em: 07 abr. 2022.

GINSBURG, H. Children's arithmetic: how they learn it and how you teach it. [S.l.]: Litton Educational Publishing, INC., 1977. 266 p.

HADAMARD, J. An essay on The Psychology of Invention in the Mathematical Field. New York: Dover Publication, INC., 1954. 145 p.

IGLIORI, S. B. C. Obstáculo epistemológico e Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. Didática da Matemática: Uma Introdução. 1. ed. São Paulo: EDUC, v. 1, 2010. p. 89-113.

LA TAILLE, I. D. O erro na perspectiva piagetiana. In: AQUINO, J. G. Erro e Fracasso na Escola: Alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997. p. 25-44.

LAKATOS, I. Mathematics, science and epistemology. Cambridge: Cambridge University Press, v. 2, 1978. 285 p.

LOPES, A. O. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n. 26/27, p. 123-146, junho/dezembro 1999. Disponivel em: <http://mat.ufrgs.br/~alopes/pub3/algumasreflexoes.pdf>. Acesso em: 21 abr 2021.

MACEDO, L. D. Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar. USP. São Paulo. 1990.

MALTA, I. Linguagem, leitura e Matemática. In: CURY, H. N. Disciplinas Matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 41-62.

MASOLA, W. D. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de Aprendizagem Matemática de Alunos Ingressantes na Educação Superior. REBES - Revista Brasileira de Ensino Superior, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 64-74, jun. 2016. Disponivel em: <https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267>. Acesso em: 25 abr. 2021.

MIGUEL, A. Contribuição crítica à discussão acerca da participação da História e da Epistemologia da Matemática na Investigação em Educação Matemática. Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 71-107, jan./jun. 2004. Disponivel em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_antonio_miguel.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2022.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, v. 18, n. 1, p. 3-14, jan. 1987. Disponivel em: <http:/links.jstor.org/sici?sici=0021-8251%28198701%2918%3A1%3C3%3AAECMFE%3E2.0.CO%3B2-G>. Acesso em: 22 mar. 2022.

NEWELL, A.; SIMON, H. A. Human Problem Solving. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1972. 920 p.

OLIVEIRA, E. et al. Análise de Conteúdo e Pesquisa na área da Educação. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 4, n. 9, p. 11-27, 2003. Disponivel em: <https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/6479>. Acesso em: 25 abr. 2021.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018. 136 p.

PINTO, N. B. O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar. Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 174. 1998.

POINCARÉ, H. Mathematical Creation. Resonance, p. 85-94, fev. 2000. Disponivel em: <http://vigeland.caltech.edu/ist4/lectures/Poincare%20Reflections.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2022. Republicação da revista Science et méthode de 1908.

POPPER, K. R. A Lógica da Pesquisa Científica. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira Da Mota. São Paulo: Cultrix, 2001. 567 p.

RADATZ, H. Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, v. 10, n. 3, p. 163-172, maio 1979. Acesso em: 02 mar. 2022.

RADATZ, H. Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics, v. 1, n. 1, p. 16-20, 1980. Disponivel em: <https://flm-journal.org/Articles/flm_1-1_Radatz.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2022.

RICO, L. Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. In: KILPATRIK, J.; GÓMEZ, P.; RICO, L. Educación Matemática. [S.l.]: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. Cap. 3, p. 69-108. Disponivel em: <http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF>. Acesso em: 22 mar. 2022.

SIEGEL, M.; CAREY, R. F. Critical Thinking: A Semiotic Perspective. Monographs on Teaching Critical Thinking. Washington: [s.n.], 1989. 64 p. Disponivel em: <https://eric.ed.gov/?id=ED303802>. Acesso em: 14 mar. 2022.

THORNDIKE, E. L. A nova metodologia da Aritmética. Tradução de Anadyr Coelho. 584. ed. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1936. 298 p. Disponivel em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134890>. Acesso em: 10 mar. 2022.

ANEXOS

7.1. ANEXO I – Termo de Consentimento Informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ___________________________, R.G. _________, aluno do curso de extensão Pré-Cálculo, da turma ___ do ano ______, declaro, por meio deste termo, que participarei da pesquisa intitulada Reflexões sobre o ensino do curso de Pré-Cálculo da UFRGS, desenvolvida pelo pesquisador Ramiro Michelon. Fui informado que a pesquisa é coordenada/orientada pelo Professor Alvino Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail alvino@mat.ufrgs.br. Tenho ciência de que esta participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação à contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que são, em linhas gerais, analisar as dificuldades quanto aos conteúdos abordados no curso, oriundas, muitas vezes, da escola básica, e a introdução de uma linguagem matemática avançada, presente nas disciplinas de matemática da universidade, além de outros aspectos que contemplam a pesquisa norteadora. Fui também esclarecido de que os usos das informações obtidas pela pesquisa serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), nos quais será feita identificação apenas pelo curso a ser feito na universidade. A colaboração do aluno se fará por meio da análise das questões presentes nos testes aplicados em aula, onde serão observadas as dificuldades conceituais de matemática e sua produção analisada. No caso de fotos, obtidas durante a participação do aluno, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação do aluno. Por fotos sem identificação, compreendo que nomes serão omitidos e rostos serão desfocados. A colaboração do aluno se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado, poderei contatar o pesquisador responsável no e-mail ramiro.mat9@gmail.com. Fui ainda informado de que o aluno pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, __ de __________________ de ____.

Assinatura do Responsável:________________________________

Assinatura do pesquisador:________________________________

Assinatura do Orientador da pesquisa:_________________________