UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

Estudo dos Espaços Coerentes do Ponto de Vista da Teoria dos Topos

por

SIMONE ANDRÉ DA COSTA

Dissertação submetida à avaliação,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa
Orientador

Porto Alegre, janeiro de 2001.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Costa, Simone André da

Estudo dos Espaços Coerentes do Ponto de Vista da Teoria dos Topos / por Simone André da Costa. — Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2001.
113 p.: il.

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR–RS, 2001. Orientador: Costa, Antônio Carlos da Rocha.

1.Teoria das Categorias. 2. Espaços Coerentes. 3. Teoria dos Topos. 4. Teoria dos Domínios I. Costa, Antônio Carlos da Rocha. II. Título.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com a colaboração de muitas pessoas, as quais registro meu agradecimento. Em particular, ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa, pela dedicação e orientação dispensados e por todo apoio e confiança que me foi oferecido.

De uma forma muito especial, gostaria de destacar, pela amizade e apoio em diversos momentos, os professores Dr. Alfio Ricardo Martini, Dr. Daltro José Nunes, Dra. Graçaliz Pereira Dimuro, Dr. Paulo Fernando Blauth Menezes e Dr. Tiarajú Asmuz Diverio.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro durante o tempo de estudo no PPGC.

Agradeço também a todos os meus amigos, especialmente ao André, à Betina, à Christiane, à Daniela, à Juliana, ao Júlio, ao Marilton, à Mônica e à Silvana e aos colegas de mestrado em especial aos 'Semânticos' pelo carinho e amizade. De maneira especial, ao meu amigo e namorado Sandro pelo carinho, paciência, estímulo e força dedicados.

Finalmente, agradeço especialmente aos meus avós, Rubens e Noely, aos meus pais, Fernando e Maria Luiza e aos meus irmãos, Cristiano e Júnior, pelo carinho, apoio, ajuda, confiança, paciência, incentivo e compreensão proporcionados durante a realização do curso e sem os quais não teria sido possível a realização deste sonho.

Sumário

Lista de Símbolos

$COSP$	categoria dos espaços coerentes com funções contínuas
$STAB$	categoria dos espaços coerentes com funções estáveis
LIN	categoria dos espaços coerentes com funções lineares
C^{op}	categoria dual de C
$Mor_C(a,b)$	coleção de morfismos $a \to b$ em C
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números Inteiros
$\mathbb{N}$	conjunto dos números Naturais
$Cod\ f$	contra-domínio de f
$a+b$	coproduto de objetos
$Domf$	domínio de f
$\mathbf{1} \to a$	elemento do objeto a
$\twoheadrightarrow$	epimorfismo
$\mathcal{A}$	espaço coerente constituído pela coleção de subconjuntos coerentes de uma teia $\mathbf{A}$ parcialmente ordenados pela inclusão
$[\mathcal{A} \to^{st} \mathcal{B}]$	espaço coerente dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, ordenados pela inclusão
$[\mathcal{A} \to^{lin} \mathcal{B}]$	espaço coerente dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, ordenados pela inclusão
$(\mathcal{A} \to^{st} \mathcal{B})$	espaço das funções estáveis
$(\mathcal{A} \to^{lin} \mathcal{B})$	espaço das funções lineares
$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$	espaço funcional de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$
id	função identidade
1_C	funtor identidade da categoria C
Imf	imagem de f
$\hookrightarrow$	inclusão
$f \subseteq g$	inclusão entre subobjetos
$\leftrightarrow$	isomorfismo
$\rightarrowtail$	monomorfismo

$f : a \to b$	morfismo
Mor_C	morfismos da categoria C
$ev; eval$	morfismo de avaliação
$C[a, b]$	morfismos em C de a para b
b^a	objeto exponencial
Ob_C	objetos da categoria C
$\sqsubseteq$	ordem de informação
$\prod$	produto direto
$a \times b$	produto de objetos
$a \times_c b$	produto fibrado
$\approx_A$	relação de equivalência em A
ι_a	seta identidade do objeto a
$b +_a c$	soma amalgamada
$Coh(\mathbf{A})$	subconjuntos coerentes da teia $\mathbf{A}$
$f \simeq g$	subobjetos isomórficos
$\mathbf{A} \equiv (A, \approx_A)$	teia gerada a partir de um conjunto básico
$\cup^{\uparrow}$	união dirigida relativamente à inclusão
$\uplus$	união disjuntiva

Lista de Figuras

Resumo

Este trabalho propõe o estudo dos espaços coerentes do ponto de vista da teoria dos topos, ou seja, consiste em uma análise, em termos de topos, das principais categorias de espaços coerentes. Os espaços coerentes constituem um tipo de domínio que apresenta algumas particularidades que o distinguem dos demais, por exemplo, considera admissíveis no conjunto de funções somente aquelas que, além de contínuas no sentido de Scott - preservam supremos de conjuntos dirigidos, também são estáveis e lineares. Um topos é uma categoria Cartesiana fechada com classificador de subobjetos. Isso faz com que todo topos se comporte como **Set** (conjuntos como objetos e funções como morfismos), ou seja, uma categoria na qual as interpretações de suas construções básicas seguem a Teoria dos Conjuntos. Entre as categorias de Espaços Coerentes, tem-se a categoria **STAB**, cujos objetos são os espaços coerentes e os morfismos são funções estáveis entre esses espaços, que é uma categoria cartesiana fechada. Isto significa que **STAB** é uma categoria especial no sentido computacional: além de possuir o produto binário para todos os seus objetos, **STAB** apresenta objeto exponencial e morfismo de avaliação, garantindo significado para processos computacionais. A subcategoria **LIN** da categoria **STAB**, cujos morfismos são as funções lineares, não é uma categoria cartesiana fechada. Entretanto, **LIN** é uma categoria monoidal simétrica que é fechada. Esta condição é suficiente para que em **LIN** também se tenha a garantia de se obter significado para processos computacionais. Apresenta-se então, uma interpretação computacional da estrutura destas categorias e uma análise das mesmas do ponto de vista de topos, isto é, da existência ou não de classificador de subobjetos.

Palavras-Chave: Espaços Coerentes, Topos e Teoria das Categorias.

TITLE: "A STUDY OF COHERENT SPACES FROM THE POINT OF VIEW OF THE THEORY OF TOPOS"

Abstract

This work proposes the study of coherent spaces from the point of view of the Topos Theory, that is, it consists of an analysis of the main categories of coherent spaces in terms of topos. The coherent spaces make up a kind of domain which presents some peculiarities that separate it from the rest, for example, in the complex whole of the functions it only considers permissible those which, apart from being continuous in the sense of Scott - preserving supremo of directed sets, it is also stable and linear. A topos is a Cartesian closed with subobject classifier. This makes topos behaves like **Set** (sets as objects and functions as morphisms), that is, a category in which the interpretations of its basic constructions follow the Theory of Sets. Among the categories of Coherent Spaces, there is the **STAB** category, a closed Cartesian category, the objects of which are the coherent spaces, having morphisms as stable functions among these spaces. This means that **STAB** is a special category in the computational sense: apart from having a binary product for all its objects, **STAB** presents an exponential object and a morphism of evaluation, ensuring meaning for computational processes. The subcategory **LIN** of the **STAB** category, the morphisms of which are linear functions, is not a closed Cartesian category. However, **LIN** is a symmetrical monoidal category which is closed. This condition is sufficient to also have in **LIN** the guarantee of obtaining meaning for computational processes. Thus, a computational interpretation of the structure of these categories will be presented, as well as an analysis of them from the point of view of the Topos Theory, that is, if subobject classifier exists or not.

Keywords: Coherence Space, Topos Theory and Category Theory.

1 Introdução

1.1 A Teoria dos Domínios

A Teoria dos Domínios é atualmente a área da Matemática da Computação consolidada como uma das mais empregada pela Informática Teórica [STO 94]. Um domínio é uma estrutura que modela a noção de aproximação e sobre a qual se podem definir modelos apropriados de computação. A idéia básica é representar tipos de dados por certos conjuntos parcialmente ordenados, denominados domínios, e computações por certas funções de um domínio em outro, denominadas funções contínuas. Uma função contínua é aquela que preserva a ordem de informação (quanto maior a informação dos dados de entrada, maior será a informação dos dados de saída) e os limites de computações infinitas no domínio (a informação total disponível como saída de uma seqüência infinita de elementos de entrada com informação refinada é o somatório total de toda a informação obtida de cada elemento de entrada).

Procurando maior precisão técnica, pode-se definir um domínio como uma estrutura onde é definida uma relação binária $\sqsubseteq$, uma ordem parcial denominada de ordem de informação, com o significado que $x \sqsubseteq y$ se e somente se x é uma aproximação de y ou y contém pelo menos a informação de x. Também é necessário que um domínio possua um menor elemento $\perp$, modelando a ausência de informação. A presença deste menor elemento não seria necessária, mas é útil na determinação da existência de pontos fixos. Ainda, para modelar computações infinitas, exige-se que um domínio seja completo no sentido em que cada seqüência crescente de aproximações seja representada por um elemento no domínio, ou seja, deve possuir um supremo. Estes requisitos são suficientes para a obtenção de pontos fixos de funções contínuas e também para a construção de espaços funcionais. Obtêm-se assim os domínios denominados de ordens parciais completas (cpo's).

Uma computação é executada sobre objetos concretos, por exemplo, uma computação sobre os números reais ou intervalos reais consiste de computações sobre aproximações concretas dos números reais ou, respectivamente, intervalos de reais, dadas com freqüência pelos números racionais ou cadeias de intervalos racionais encaixados. O resultado da computação também é dado por uma seqüência de elementos concretos. Então, para modelar computações, é necessário abstrair a noção de 'ser um elemento concreto'. Esta abstração é denominada de elemento finito ou compacto. Assim, exige-se que cada elemento de um domínio seja representado por todas as suas aproximações finitas ou compactas, ou seja, que cada elemento do domínio seja o supremo do conjunto dirigido de suas aproximações compactas. Quando isto ocorre, tem-se os chamados cpo's algébricos.

A classe dos cpo's algébricos parece possuir as propriedades de computabilidade desejadas. Entretanto, observa-se a não existência de uma propriedade importante para a ciência da computação e também para partes da teoria da computabilidade: esta classe não é fechada para a construção do espaço funcional. Então, uma subclasse de cpo's algébricos é freqüentemente considerada, a dos que são consistentemente completos, ou seja, quando todo subconjunto consistente do domínio possui um supremo. Estas estruturas, ou seja, os cpo's consistentemente completos são finalmente denominadas de Domínios de Scott, ou simplesmente domínios algébricos. Os espaços coerentes, estrutura que se quer abordar neste trabalho, constituem um tipo especial de domínio algébrico.

1.2 Os Espaços Coerentes

Girard introduziu o estudo de espaços coerentes, que é um tipo especial de domínio de Scott, onde os objetos são conjuntos construídos segundo uma relação reflexiva e simétrica, denominada de relação de coerência, e a ordem de informação é a relação de inclusão entre conjuntos.

A idéia principal da Teoria dos Espaços Coerentes, também chamados de domínios de Girard, é interpretar um tipo de dado de um cálculo formal tipado através de um espaço coerente, e um termo do cálculo que tenha esse tipo por um ponto deste espaço, isto é, um subconjunto coerente do espaço ou um estado de uma computação. Por outro lado, as computações são representadas por funções entre espaços coerentes que devem possuir propriedades interessantes como a estabilidade e linearidade.

Portanto, a Teoria dos Espaços Coerentes [GIR 89] [TRO 92] considera admissíveis no conjunto de funções somente aquelas que, além de contínuas no sentido de Scott (preservam supremos de conjuntos dirigidos), também são estáveis e lineares. A propriedade da estabilidade caracteriza-se pela preservação dos pullbacks, isto é, dos ínfimos de conjuntos consistentes. A propriedade da linearidade caracteriza-se pela preservação de uniões arbitrárias de conjuntos finitamente consistentes, pelas funções estáveis.

Conforme [DIM 96], os Espaços Coerentes surgem como uma alternativa no sentido de se obter uma fundamentação computacional simples e intuitiva para a Matemática Intervalar e Computação Científica, tendo em vista outras teorias, por exemplo, a Teoria dos Domínios Contínuos ([ESC 93], [EDA 97], [ACI 91], [DIM 91]).

1.3 A Teoria dos Topos

A Teoria dos Topos tem sua origem em duas linhas distintas do desenvolvimento matemático: Geometria Algébrica e Teoria das Categorias. Topos surgiu inicialmente com Grothendieck nos anos 1960's. O conceito de topos elementar foi formulado por F. Lawvere's e M. Tierney, a partir do estudo de categorias com um tipo especial de morfismo, chamado 'classificador de subobjetos'. Lawvere foi a primeira pessoa a considerar topos como um universo de conjuntos construtivo e a explorar isto [PHO 94]. Mas topos pode ser visto de diversas maneiras distintas. Dependendo da circunstância, um topos pode ser considerado:

- um modelo da teoria dos conjuntos construtiva;

- uma (forma especial de) teoria de primeira ordem;
- um espaço topológico (generalizado);
- uma categoria de espaços generalizados.

A abordagem aqui considerada será a primeira interpretação: topos como um universo de conjuntos. Nesse sentido, um topos é uma categoria de estrutura e comportamento semelhante à **Set**, que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos. Ou seja, é um tipo especial de categoria definida por axiomas, os quais especificam que algumas construções realizadas para conjuntos, também podem ser realizadas para essa categoria.

Conforme [MEN 2000] existem diversas características da Teoria das Categorias que motivam seu uso em Ciência da Computação. Essa teoria pode ser considerada uma formalização adequada para tratar propriedades abstratas independentes de estruturas. Ou seja, permite tratar propriedades independentemente de implementação. A noção categorial de dualidade divide o trabalho pela metade, tanto em termos de construções como de resultados. Além disso, permite a herança de resultados e comparação de expressividade de formalismos, ou seja, é possível construir categorias a partir de categorias existentes, bem como passar de um tipo de estrutura matemática para outra. A notação gráfica, ou seja, a expressão de equações na forma de diagramas (semelhantes as linguagens gráficas comuns em Ciência da Computação), facilita a identificação e a compreensão de suas componentes e de seus relacionamentos. Outra grande vantagem é a expressividade das suas construções as quais, freqüentemente não possuem paralelo na Teoria dos Conjuntos. Esta expressividade propicia um novo ou melhor entendimento das questões relacionadas com a Ciência da Computação.

Diz-se que um topos apresenta uma estrutura semelhante a **Set** porque as condições necessárias para que uma categoria seja um topos recupera muitos conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos. Um topos [BAR 85] [GOL 84] [JOH 77] é uma categoria Cartesiana fechada com classificador de subobjetos. Intuitivamente, uma interpretação para estas condições é a seguinte:

- Em uma categoria cartesiana fechada (categoria finitamente completa com exponenciação) em que se nomeiam elementos (através do objeto terminal), é possível determinar a ação de cada morfismo sobre cada elemento de qualquer objeto, seguindo assim a estrutura de **Set**, pois uma função é definida para cada elemento de seu domínio;
- Classificador de Subobjetos é um morfismo especial que, intuitivamente, permite a prova de proposições lógicas na categoria. Em **Set**, o conjunto $2 = \{0, 1\}$ juntamente com a função $true : \mathbf{1} \hookrightarrow 2$ permite que para cada inclusão de conjuntos seja possível determinar a sua função característica. Reciprocamente, possibilita determinar qual é o subconjunto representado por uma função característica qualquer. De maneira análoga, em um topos, especificam-se subobjetos por propriedades de seus elementos, representadas através de diagramas envolvendo esses subobjetos.

Com a Teoria das Categorias, através do estudo de topos, foi possível axiomatizar a Teoria dos Conjuntos, resultando numa fundamentação categorial da matemática. A noção de topos tem um importante poder de unificação. Ela encerra **Set** como uma categoria sheaf de Grothendieck e relaciona os domínios da Teoria dos Conjuntos com a Geometria Algébrica. Uma ramificação para outra área seria a Lógica, podendo dizer-se que cada topos contém seu próprio cálculo lógico, sabendo-se que os princípios lógicos em um topos são os da lógica intuicionísta e não os da lógica clássica.

1.4 O Problema Proposto

1.4.1 Motivação

Em [TRO 92], são apresentadas as principais categorias de Espaços Coerentes. A categoria **STAB**, cujos objetos são os espaços coerentes e os morfismos são funções estáveis entre esses espaços é uma categoria cartesiana fechada. Isto significa que **STAB** é uma categoria especial no sentido computacional: além de possuir o produto binário para todos os seus objetos, **STAB** apresenta objeto exponencial e morfismo de avaliação, garantindo significado para processos computacionais. A subcategoria **LIN** da categoria **STAB**, cujos morfismos são as funções lineares, não é uma categoria cartesiana fechada. Entretanto, **LIN** é uma categoria monoidal simétrica que é fechada. Esta condição é suficiente para que em **LIN** também se tenha a garantia de se poder obter significado para processos computacionais, conforme mostrado inicialmente em [DIM 96] e explicitado mais detalhadamente no presente trabalho.

Por outro lado, não se conhece uma análise em termos de topos, das categorias de espaços coerentes. Essa análise possibilitaria refinar uma interpretação computacional da estrutura destas categorias (pela inclusão da noção de operação computável sobre subobjetos), e possibilitaria futuramente, a extração da lógica interna dos espaços coerentes e sua comparação com a Lógica Linear.

1.4.2 Objetivos

O objetivo geral do trabalho consiste em uma análise, em termos de topos, das principais categorias de espaços coerentes. Como objetivos específicos podem ser destacados:

- Estudar as mônadas e as categorias monoidais simétricas, detalhando uma interpretação computacional para as mesmas e relacionando essa interpretação com a interpretação correspondente para as categorias cartesianas fechadas;
- Explicitar as principais construções monoidais nas categorias de espaços coerentes;
- Reconhecer e analisar estruturas de topos ou similares nas categorias dos espaços coerentes.

1.4.3 Trabalhos Relacionados

Os Espaços Coerentes foram introduzidos por Girard ([GIR 89], [TRO 92]) para dar semântica à Lógica Linear ([GIR 87], [GIR 89]). Zhang, ([ZHA 89]) na sua tese de doutorado relaciona categorias de espaços coerentes com outras categorias de domínios. Bethke ([BET 91]) mostra que os espaços coerentes, com exceção dos planos, não podem ser equipados com uma topologia, tal que as noções de estabilidade e continuidade coincidam. Dimuro em ([DIM 96]) apresenta uma construção dos Reais computáveis utilizando espaços coerentes de intervalos. Phoa em [PHO 94] construiu, através da teoria dos topos, uma categoria de domínios a partir de um modelo particular de computação.

Zhang em [ZHA 96] mostra que a categoria de dI-domínios é a maior categoria Cartesiana fechada de domínios estáveis e ainda em [ZHA 93] introduz o produto tensorial, o espaço de funções lineares e o exponencial como novas construções em domínios estáveis e estruturas de evento, e apresenta a categoria monoidal fechada de dI-domínios. A introdução de um dI-domínio efetivo, através da teoria dos topos, encontra-se em [GRU 96].

Métodos categoriais são de usual interesse para a descrição e análise de sistemas de computação. Em particular, categoria Cartesiana fechada é estudada como um sistema de computação, em [LAM 86] e [TAY 2000] apresenta sua correspondência com o Cálculo Lambda.

O estudo das mônadas tem sido aplicado em semântica de linguagens de programação ([MUR 98]). Moggi ([MOG 91]) com cálculo-λ e mônadas provê uma base correta para provar a equivalência de programas, independente de qualquer modelo computacional específico. As mônadas também têm sido extensivamente utilizadas para estruturar a programação funcional, conforme [PEY 93], [KIN 92], [WAD 92], [WAD 92a], [WAD 92b], [WAD 93].

A Teoria dos Topos tem sido bastante referenciada como a melhor ligação entre teoria das categorias e intuicionismo. Lambek em [LAM 86] apresenta topos do ponto de vista da lógica intuicionista de alta ordem. Rosolini em [ROS 86] afirma que no tratamento de funções parciais e convergência de computações, é conveniente ter um pensamento intuicionista e portanto modela computações aplicando métodos *topos-theoréticos*.

McLarty em [MCL 92] apresenta o Topos Efetivo, descrito originalmente por Hyland (usando sugestões de Dana Scott). Topos efetivo ([PHO 92]) é considerado o universo categorial da matemática recursiva. Este topos [ROS 87] é um desenvolvimento categorial que possui a efetividade como uma característica interna de todo universo. Para isso, consideram-se conjuntos em um universo intuicionista onde a propriedade (entre outras): 'todas funções sobre o conjunto dos números naturais são recursivas (Tese de Church)' , deve ser válida. Vickers em [VIC 2000] apresenta a noção intuitiva de topos como espaço generalizado e a relaciona com a noção de universo de conjuntos generalizado.

1.4.4 Organização do Texto

No capítulo 2 são abordados alguns conceitos categoriais fundamentais - funtores, transformações naturais e adjunções - com o objetivo de fornecer um embasamento teórico para o estudo das categorias monoidais e dos demais tópicos abordados neste trabalho. No capítulo 3 apresentam-se as categorias Cartesianas fechadas e monoidais fechadas, atribuindo a elas uma interpretação do ponto de vista computacional. No capítulo 4 descreve-se uma introdução ao estudo de topos e a seguir, no capítulo 5 são apresentados os espaços coerentes, ou domínios de Girard, buscando-se ressaltar uma interpretação computacional e categorial de alguns conceitos fundamentais para a compreensão do estudo proposto. No capítulo 6 são estudadas as categorias que têm como objetos espaços coerentes: categoria **COSP** (cujos morfismos são as funções contínuas), categoria **STAB** (cujos morfismos são as funções estáveis) e categoria **LIN** (cujos morfismos são as funções lineares), juntamente com as principais construções da estrutura destas categorias. Finalmente, no capítulo 7 são descritas algumas tentativas de encontrar o classificador para categoria **STAB** e para categoria **LIN**. No Anexo A, são introduzidos os principais conceitos e os resultados básicos da Teoria das Categorias, com o objetivo de permitir uma rápida consulta e uma normalização da nomenclatura utilizada.

2 Tópicos Básicos em Categorias

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos categoriais fundamentais - funtores, transformações naturais e adjunções - com o objetivo de fornecer um embasamento teórico para o estudo das categorias monoidais e dos demais tópicos abordados neste trabalho. As principais construções são exemplificadas dentro de um contexto da Ciência da Computação. No Anexo A, são introduzidos os principais conceitos e os resultados básicos da Teoria das Categorias, com o objetivo de permitir uma rápida consulta e uma normalização da nomenclatura utilizada. O presente capítulo tem como principais referências [ASP 91] [BAR 95] [GOL 84] [MEN 2000] [RYD 88].

2.1 Introdução

Funtores são mapeamentos entre categorias que preservam a estrutura categorial. Transformações naturais são mapeamentos entre funtores, podendo considerá-las como a passagem de uma construção (realizada a partir de um funtor) em outra. Uma adjunção, constituída de um par de funtores e uma transformação natural, é um poderoso mecanismo descritivo, pois é uma ferramenta simples que permite a especificação da maioria dos conceitos categoriais universais. Uma das principais aplicações de Teoria das Categorias é a unificação de estruturas matemáticas. Funtores, transformações naturais e adjunções são de fundamental importância para descrever a passagem de uma estrutura matemática para outra. Outra vantagem, é a herança de propriedades que pode ser obtida a partir do uso destas construções.

2.2 Funtores

Se uma transformação F entre duas categorias C e D deve mapear a estrutura categorial de C em D, ela deve levar objetos e morfismos de C para objetos e morfismos de D e, além disso, deve preservar origens, destinos, identidades e composições. Tal transformação $F : C \to D$ é denominada funtor.

Definição 2.2.1 (Funtor)
Um funtor covariante ou simplesmente funtor $F : C \to D$ de uma categoria C para uma categoria D é um par de operações

$$F = \langle F_{ob}, F_{mor} \rangle$$

onde $F_{ob} : Ob_C \to Ob_D$ e $F_{mor} : Mor_C \to Mor_D$ são tais que para todos os morfismos $f : a \to b$ e $g : b \to c$ de Mor_C, tem-se:

1. $F_{mor}(f) : F_{ob}(a) \to F_{ob}(b)$;
2. $F_{mor}(g \circ f) = F_{mor}(g) \circ F_{mor}(f)$;
3. $F_{mor}(\imath_a) = \imath_{F_{ob}(a)}$.

Então, funtores são mapeamentos entre categorias que preservam domínios, contra-domínios, identidades e composições.

Funtor Identidade: Seja C uma categoria. O funtor identidade $id_C : C \to C$ é tal que, para todo C-objeto a e todo C-morfismo h, tem-se que:

$$id_C(a) = a \text{ e } id_C(h) = h.$$

Funtor Inclusão: Sejam C e S categorias. O funtor inclusão $inc : S \to C$ é tal que, para todo S-objeto a e todo S-morfismo h, tem-se que:

$$inc(a) = a \text{ e } inc(h) = h.$$

Funtor Esquecimento: Este é um funtor especial e de grande importância o qual 'esquece' determinada estrutura dos objetos de uma categoria. Além disso, a eventual preservação destas estruturas pelos morfismos da categoria origem, também deve ser esquecida.

Seja a categoria $C = Mon$. O funtor esquecimento $u : Mon \to Set$ esquece a estrutura monoidal, ou seja, o elemento neutro e a operação. Portanto, para todo C-objeto $\langle a, \oplus, e\rangle$ e todo C-morfismo (homomorfismo de monóides) $h : \langle a, \oplus_a, e_a\rangle \to \langle b, \oplus_b, e_b\rangle$, tem-se que:

$$u(\langle a, \oplus, e\rangle) = a \text{ e } u(h) = h : a \to b.$$

Funtor Diagonal: Seja C uma categoria e seja o produto de categorias $C \times C$. O funtor diagonal $\Delta : C \to C \times C$ é tal que, para todo C-objeto a e todo C-morfismo $h : a \to b$, tem-se que:

$$\Delta(a) = \langle a, a\rangle \text{ e } \Delta(h) = \langle h, h\rangle : \langle a, a\rangle \to \langle b, b\rangle.$$

<u>Exemplo</u>: Construção de Listas

Dado um conjunto A, é possível fomar o conjunto $Lista(A)$ de listas finitas com elementos de A. Ou seja, considera-se $Lista : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ como um funtor da categoria dos conjuntos para ela mesma. Por exemplo, $Lista$ pega o conjunto de inteiros e retorna o conjunto de listas de inteiros. Como funtor, $Lista$ atua não somente sobre conjuntos mas também sobre funções, logo dada uma função $f : A \to A'$ é formada uma nova função $Lista(f) : Lista(A) \to Lista(A')$. Observa-se que a ação de $Lista$ sobre funções é uma função de alta ordem, ou seja, uma função que toma funções como argumentos. Tomando-se a função $quadrado : Inteiros \to Inteiros$, definida por, $quadrado(x) = x^2$ então, $Lista(quadrado) : Lista(Inteiros) \to Lista(Inteiros)$ mapeia cada lista de inteiros para a lista dos quadrados dos seus elementos. Por exemplo, $Lista(quadrado)([1, -2, -3]) = [1, 4, 9]$.

Definição 2.2.2 (Categorias Isomorfas) *Duas categorias C e D são isomorfas se, e somente se, existem funtores $F : C \to D$ e $G : D \to C$ tais que:*

$$G \circ F = \imath_C \text{ e } F \circ G = \imath_D.$$

Definição 2.2.3 (Funtor Contravariante) *Um funtor contravariante $F : C \to D$ de uma categoria C para uma categoria D é um par de operações*

$$F = \langle F_{ob}, F_{mor} \rangle$$

onde $F_{ob} : Ob_C \to Ob_D$ e $F_{mor} : Mor_C \to Mor_D$ são tais que para todos os morfismos $f : a \to b$ e $g : b \to c$ de Mor_C, tem-se:

1. $F_{mor}(f) : F_{ob}(b) \to F_{ob}(a)$;
2. $F_{mor}(g \circ f) = F_{mor}(f) \circ F_{mor}(g)$;
3. $F_{mor}(\imath_a) = \imath_{F_{ob}(a)}$.

2.3 Transformação Natural

Dados dois funtores $F : C \to D$, $G : C \to D$ e considerando-os como mapeamentos de um diagrama de C em D, intuitivamente transformação natural é o 'deslizamento' da figura definida por F sobre a figura definida por G. Para cada C-objeto a e cada seta $f : a \to b$, define-se uma seta τ_a da F-imagem de a e f para a G-imagem de a e f. Para garantir que a estrutura da F-imagem seja preservada por esta transformação, deve-se solicitar que para cada seta $f : a \to b$ em C , as transformações τ_a e τ_b mapeiem os pontos finais da F-imagem de f nos pontos finais da G-imagem de f.

Definição 2.3.1 (Transformação Natural) *Sejam duas categorias C e D e dois funtores $F, G : C \to D$. Então, τ é uma transformação natural de F para G se, e somente se:*

1. *para qualquer objeto a de C, τ_a será um morfismo em D, com origem em $F(a)$ e destino em $G(a)$;*
2. *para qualquer seta $f : a \to b \in Mor_C$ com origem em a e destino em b, o diagrama ilustrado abaixo comuta, isto é, $\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$.*

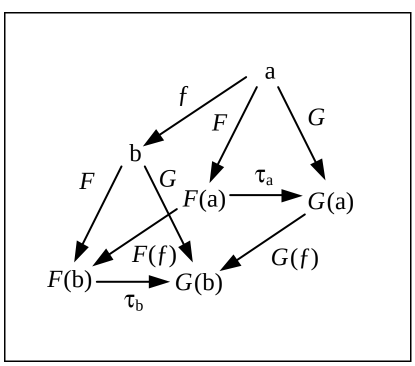

FIGURA 2.1: Transformação Natural

Exemplo: Inversão de Listas

Seja inv a função que inverte listas, isto é, $inv_A : Lista(A) \rightarrow Lista(A)$ mapeia qualquer lista de elementos de A para sua inversa. Por exemplo, $inv_{\mathbb{N}}[1,2,3] = [3,2,1]$. Este é um exemplo de função polimórfica, ou seja, opera exatamente da mesma maneira, não importando os elementos da lista fornecida como argumento da função. Então, ao substituir os elementos da lista fornecida por outros distintos, $inv_{\mathbb{N}}$ retorna uma nova lista com os substitutos, na mesma configuração anterior. Por exemplo, $inv_{\mathbb{N}}[7,8,9] = [9,8,7]$.

Definição 2.3.2 (Isomorfismo Natural) *Sejam $F, G : C \rightarrow D$ funtores e $\tau : F \rightarrow G$ uma transformação natural de F para G. Considerando que para cada $a \in Ob_C$, $\tau_a \in [F(a), G(a)]$ seja um isomorfismo, então τ é um isomorfismo natural.*

Definição 2.3.3 (Categoria de Funtores) *A categoria dos funtores de C para D é aquela cujos objetos são funtores da categoria C para a categoria D e os morfismos são transformações naturais entre tais funtores.*

Definição 2.3.4 (Funtores Equivalentes) *Dois funtores são equivalentes (isomórficos naturalmente), se e somente se, eles são isomórficos como objetos da categoria de funtores.*

Definição 2.3.5 (Composição Vertical) *Sejam $F, G, H : C \rightarrow D$ funtores de C para D e sejam as transformações naturais $\alpha : F \rightarrow G$ e $\beta : G \rightarrow H$. A composição vertical $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$ é definida por:*

$$(\beta \circ \alpha)_a = \beta_a \circ \alpha_a$$

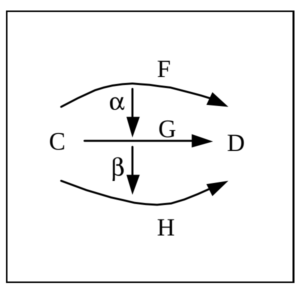

FIGURA 2.2: Composição Vertical

A prova que de fato, a composição de duas transformações naturais é uma transformação natural está em [BAR95, p.91].

Proposição 2.3.1 (Transformações Naturais Derivadas) *Sejam $H : A \rightarrow B$, $F : B \rightarrow C$, $G : B \rightarrow C$, $K : C \rightarrow D$ funtores, e seja $\tau : F \rightarrow G$ uma transformação natural de F para G, como ilustrado na figura 2.3. Então, τ induz duas transformações naturais $K\tau : KF \rightarrow KG$ e $\tau H : FH \rightarrow GH$, respectivamente definidas por:*

$(K\tau)_b = K(\tau_b) : KF(b) \rightarrow KG(b)$

$(\tau H)_a = \tau_{H(a)} : FH(a) \rightarrow GH(a)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] & B \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, shift right=2, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & C \arrow[r, "K"] & D \end{tikzcd}$$

FIGURA 2.3: Transformações Naturais Derivadas

Prova: De fato, para todo $f \in B[b, b']$ e todo $g \in A[a, a']$, a naturalidade de $K\tau$ e τH são dadas por:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] \\ b' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(b) \arrow[r, "\tau_b"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(b) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(b') \arrow[r, "\tau_{b'}"] & G(b') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} KF(b) \arrow[r, "K\tau_b"] \arrow[d, "KF(f)"'] & KG(b) \arrow[d, "KG(f)"] \\ KF(b') \arrow[r, "K\tau_{b'}"] & KG(b') \end{tikzcd}$$

(em B) *(em C)* *(em D)*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "g"'] \\ a' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H(a) \arrow[d, "H(g)"'] \\ H(a') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FH(a) \arrow[r, "\tau_{H(a)}"] \arrow[d, "FH(g)"'] & GH(a) \arrow[d, "GH(g)"] \\ FH(a') \arrow[r, "\tau_{H(a')}"] & GH(a') \end{tikzcd}$$

(em A) *(em B)* *(em C)*

FIGURA 2.4: Naturalidade das Transformações Naturais Derivadas $K\tau$ e τH

(i) $(K\tau)_{b'} \circ KF(f) = K(\tau_{b'}) \circ K(F(f)) = K(\tau_{b'} \circ F(f)) = K(G(f) \circ \tau_b) = KG(f) \circ K\tau_b = KG(f) \circ (K\tau)_b$.

(ii) $(\tau H)_{a'} \circ FH(g) = \tau_{H(a')} \circ F(H(g)) = G(H(g)) \circ \tau_{H(a)} = GH(g) \circ (\tau H)_a$.

Definição 2.3.6 (Composição Horizontal) *Sejam os funtores e as transformações naturais representados no diagrama da figura 2.5:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, shift right=2, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & C \arrow[r, shift left=2, "H"] \arrow[r, shift right=2, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & D \end{tikzcd}$$

FIGURA 2.5: Composição Horizontal

Então, pela naturalidade de σ com respeito à seta τ_b, o seguinte diagrama comuta para todo $b \in Ob_B$.

$$\begin{tikzcd}
HF(b) \arrow[r, "H(\tau_b)"] \arrow[d, "\sigma_{F(b)}"'] \arrow[dr, "\sigma\tau_b"] & HG(b) \arrow[d, "\sigma_{G(b)}"] \\
KF(b) \arrow[r, "K(\tau_b)"] & KG(b)
\end{tikzcd}$$

(em D)

FIGURA 2.6: Naturalidade de σ com Relação à τ_b

A composição horizontal de τ e σ é a transformação natural $\sigma\tau : HF \to KG$ definida por:

$$\sigma\tau_b = \sigma_{G(b)} \circ H(\tau_b) = K(\tau_b) \circ \sigma_{F(b)}, \forall\, b \in B.$$

De fato, para todo $f \in B[b, b']$, a naturalidade de $\sigma\tau$ é dada por:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] \\
b'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
HF(b) \arrow[r, "\sigma\tau_b"] \arrow[d, "HF(f)"'] & KG(b) \arrow[d, "KG(f)"] \\
HF(b') \arrow[r, "\sigma\tau_{b'}"] & KG(b')
\end{tikzcd}$$

(em B) *(em D)*

FIGURA 2.7: Naturalidade de $\sigma\tau$

$$\begin{aligned}
\sigma\tau_{b'} \circ HF(f) &= \sigma_{G(b')} \circ H(\tau_{b'}) \circ HF(f) && \textit{por definição de } \sigma\tau \\
&= \sigma_{G(b')} \circ H(\tau_{b'} \circ F(f)) \\
&= \sigma_{G(b)} \circ H(G(f) \circ \tau_b) && \textit{pela naturalidade de } \tau \\
&= K(G(f) \circ \tau_b) \circ \sigma_{F(b)} && \textit{pelo diagrama da definição de } \sigma\tau \\
&= KG(f) \circ K(\tau_b) \circ \sigma_{F(b)} \\
&= KG(f) \circ \sigma\tau_b && \textit{por definição de } \sigma\tau.
\end{aligned}$$

2.4 Adjunções

A noção de adjunção, segundo Mac Lane, é um dos grandes triunfos da Teoria das Categorias. Adjunção é considerada por Rydeheard como uma ferramenta descritiva de grande generalidade, por ocorrer amplamente tanto na matemática quanto na programação. Tal ferramenta, formalizada por Daniel Kan em 1958, constituída de dois funtores e uma transrformação natural, descreve de uma maneira simples muitas construções categoriais universais.

Definição 2.4.1 (Adjunção) *Sejam $F : C \to D$ e $G : D \to C$ funtores. Então uma adjunção de C para D é uma tripla $< F, G, \theta >$ tal que $\theta : D[F_-,_-] \cong C[_-, G_-]$, é um isomorfismo natural. F é chamado adjunto esquerdo de G e G é chamado adjunto direito de F.*

Dado um C-objeto a e um D-objeto b obtém-se $G(b)$ em C e $F(a)$ em D. A adjunção ocorre quando existe uma correspondência exata de setas entre esses objetos nas direções indicadas pela figura 2.8.

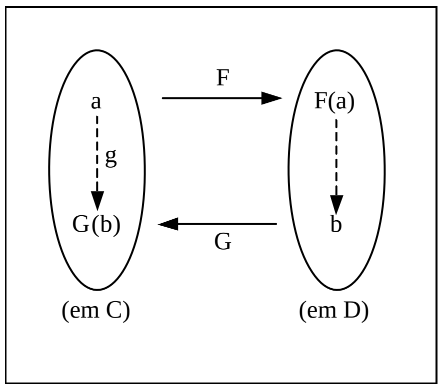

FIGURA 2.8: Adjunção

Ou seja, qualquer passagem de a para $G(b)$ em C corresponde unicamente com uma passagem de $F(a)$ para b em D, representado pelo esquema:

$$\frac{a \to G(b)}{F(a) \to b}$$

Em outras palavras, para cada C-objeto a e D-objeto b existe uma bijeção,

$$\theta_{ab} : D[F(a), b] \cong C[a, G(b)]$$

entre o conjunto dos D-morfismos da forma $F(a) \to b$ e os C-morfismos da forma $a \to G(b)$. Além disso, a designação de bijeções θ_{ab} é natural em a e b, ou seja, preserva a estrutura categorial com a variação de a e b. Assim, cada par $< a, b >$ define um componente θ_{ab} da transformação natural θ entre os dois seguintes funtores:

$F_1 : C^{op} \times D \to \mathbf{Set}$, tal que, $F_1(< a, b >) = D[F(a), b]$;

$F_2 : C^{op} \times D \to \mathbf{Set}$, tal que, $F_2(< a, b >) = C[a, G(b)]$.

A naturalidade do isomorfismo θ é mostrada a seguir. Para qualquer $f \in D[F(a), b]$, $k \in D[b, b']$, $h \in C[a', a]$ e $g \in C[a, G(b)]$ tem-se:

(i) $\theta_{ab'}(k \circ f) = G(k) \circ \theta_{ab}(f)$

$$
\begin{tikzcd}
\langle a, b \rangle \arrow[d, "\langle \iota_a, k \rangle"'] \\
\langle a, b' \rangle
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D[F(a),b] \arrow[r, "\theta_{ab}"] \arrow[d, "K \circ \_"'] & C[a,G(b)] \arrow[d, "G(k) \circ \_"] \\
D[F(a),b'] \arrow[r, "\theta_{ab'}"] & C[a,G(b')]
\end{tikzcd}
$$

(em $C^{op} \times D$) *(em Set)*

FIGURA 2.9: Naturalidade de θ com Respeito à k

(ii) $\theta_{a'b}(f \circ F(h)) = \theta_{ab}(f) \circ h$

$$
\begin{tikzcd}
\langle a, b \rangle \arrow[d, "\langle h^{op}, \iota_b \rangle"'] \\
\langle a', b \rangle
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D[F(a),b] \arrow[r, "\theta_{ab}"] \arrow[d, "\_ \circ F(h)"'] & C[a,G(b)] \arrow[d, "\_ \circ h"] \\
D[F(a'),b] \arrow[r, "\theta_{a'b}"] & C[a',G(b)]
\end{tikzcd}
$$

(em $C^{op} \times D$) *(em Set)*

FIGURA 2.10: Naturalidade de θ com Respeito à h^{op}

Agora, seja a um particular C-objeto, considerando $b = F(a)$ em (i) tem-se:

(i') $\theta_{ab}(\iota_{F(a)} \circ f) = G(f) \circ \theta_{aF(a)}(\iota_F(a))$

$$
\begin{tikzcd}
\langle a, F(a) \rangle \arrow[d, "\langle \iota_a, f \rangle"'] \\
\langle a, b \rangle
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D[F(a),F(a)] \arrow[r, "\theta_{aF(a)}"] \arrow[d, "f \circ \_"'] & C[a,G(F(a))] \arrow[d, "G(f) \circ \_"] \\
D[F(a),b] \arrow[r, "\theta_{ab}"] & C[a,G(b)]
\end{tikzcd}
$$

(em $C^{op} \times D$) *(em Set)*

FIGURA 2.11: Naturalidade de θ com Respeito à f

Aplicando $\theta_{aF(a)}$ a seta identidade de $F(a)$ é obtida a C-seta $\theta_{aF(a)}(\iota_F(a)) = \eta_a$, que será chamada unidade de a. Ou seja, o diagrama acima é correspondente ao diagrama:

(i”) $\theta_{ab}(\iota_{F(a)} \circ f) = G(f) \circ \theta_{aF(a)}(\iota_{F(a)}) \Leftrightarrow \theta_{ab}(f) = G(f) \circ \eta_a$

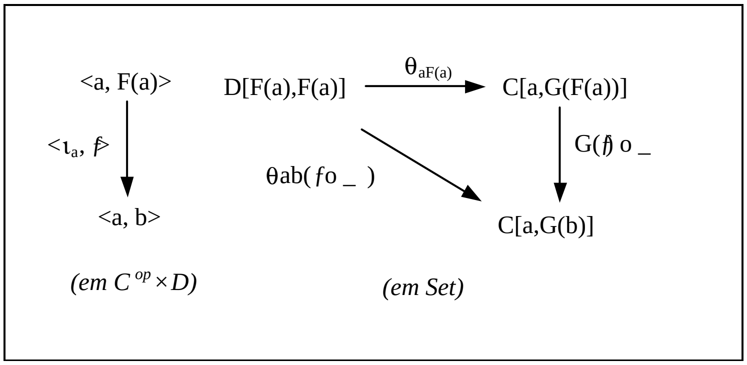

FIGURA 2.12: Diagrama Equivalente da Naturalidade de θ com Respeito à f

Logo, usando a naturalidade de θ em a e b, é observado que η_a apresenta uma propriedade universal, isto é, para cada C-objeto a e C-morfismo $g : a \to G(b)$ existe exatamente um D-morfismo $f : F(a) \to b$ tal que o diagrama da figura 2.13 comuta.

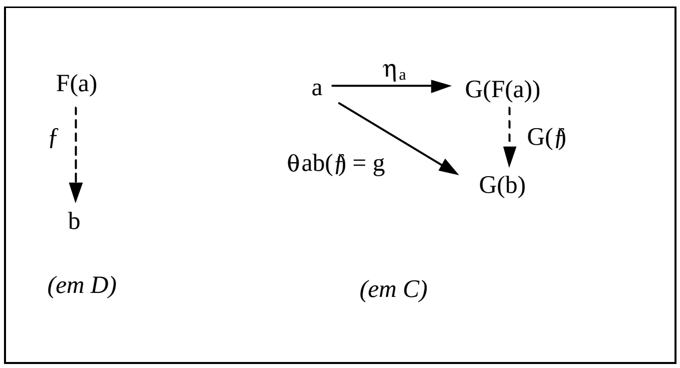

FIGURA 2.13: Propriedade Co-Universal da Adjunção

A naturalidade de θ também implica que o diagrama da figura 2.14 comuta para toda C-seta h. Portanto, os η_a’s formam os componentes da transformação natural $\eta : 1_C \to (G \circ F)$, chamada de unidade da adjunção.

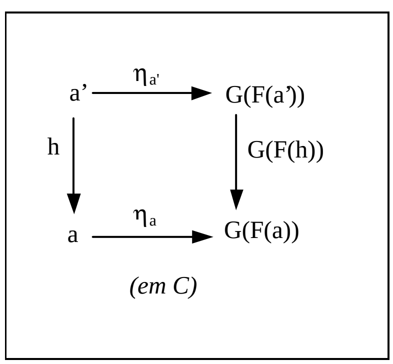

FIGURA 2.14: Unidade da Adjunção

Uma adjunção é usualmente representada pela tripla $< F, G, \eta >$, onde $F : C \to D$ e $G : D \to C$ são funtores e $\eta : 1_C \to (G \circ F)$ é a unidade da adjunção.

Dualmente, seja b um particular D-objeto, considerando $a = G(b)$ e $\varepsilon_b = \theta^{-1}_{G(b)b}(\iota_{G(b)})$, então é observado que ε_b (co-unidade de b) apresenta uma propriedade co-universal. Isto é, para cada D-objeto b e D-morfismo $f : F(a) \to b$ existe exatamente um C-morfismo $g : a \to G(b)$ tal que o diagrama da figura 2.15 comuta.

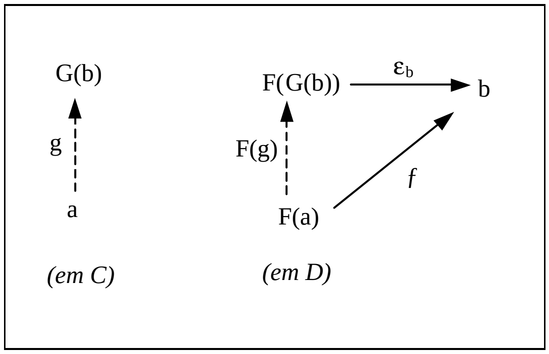

FIGURA 2.15: Propriedade Universal da Adjunção

A naturalidade de θ também implica que o diagrama da figura 2.16 comuta para toda D-seta k. Portanto, os ε_b's formam os componentes da transformação natural $\varepsilon : 1_D \to (F \circ G)$, chamada de co-unidade da adjunção.

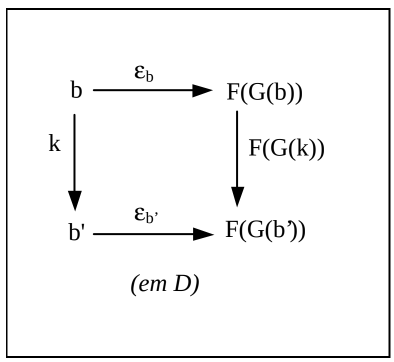

FIGURA 2.16: Co-Unidade da Adjunção

Exemplo: Tamanho de Listas

A definição da função tamanho de listas é induzida por uma situação de adjunção. Seja $Lista$: **Set** $\to$ **Mon** o funtor que associa cada conjunto A ao monóide $(Lista(A), \circ, [\ ])$ e $Esquece$: **Mon** $\to$ **Set** o funtor que esquece a estrutura monoidal. A adjunção de **Set** para **Mon** é definida por $< Lista, Esquece, \eta >$, com $\eta : 1_{Set} \to Esquece \circ Lista$. O diagrama particular nessa adjunção, determinado pelo monóide $(\mathbb{N}, +, 0)$ e representado pelas figuras 2.17 e 2.18, induz a definição da função tamanho.

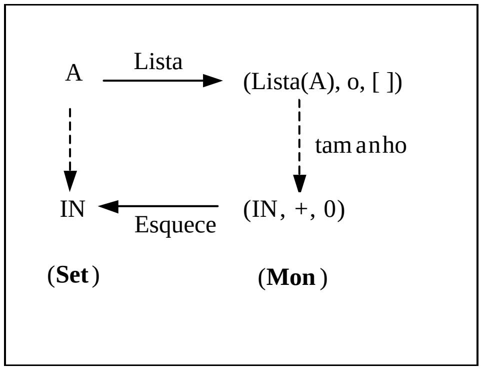

FIGURA 2.17: Tamanho de Listas Representado pela Adjunção

A função $tam : Lista(A) \rightarrow \mathbb{N}$, que indica o tamanho de cada lista de elementos A, é o suporte do morfismo $tamanho : (Lista(A), \circ, [\ ]) \rightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$, que é um homomorfismo de monóides, para o qual valem:

(i) $tamanho([\,]) = 0$;

(ii) $tamanho(L \circ L') = tamanho\ L + tamanho\ L'$.

Além disso, pela situação de adjunção tem-se que o diagrama 2.18 comuta.

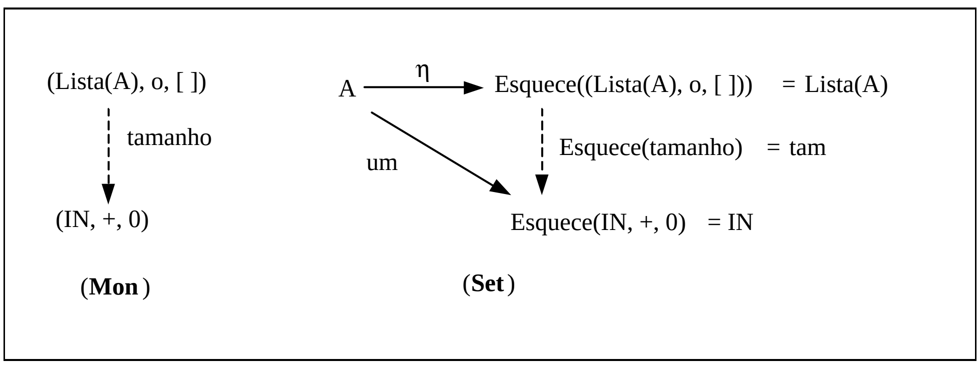

FIGURA 2.18: Tamanho de Listas Representado pela Propriedade Co-Universal da Adjunção

A transformação natural η é a família de funções $unidade_A : A \rightarrow Lista(A)$, que mapeia cada elemento x de A para a lista unitária $[x]$. A função $um : A \rightarrow Esquece(\mathbb{N}, +, 0)$ mapeia cada elemento de A no natural 1. Pela comutatividade do diagrama pode-se afirmar que:

(iii) $tamanho(unidade(x)) = 1$.

completando a definição recursiva de tam, a qual é definida como:

$$tam = Esquece(tamanho).$$

3 Categorias Cartesianas Fechadas e Categorias Monoidais (Simétricas) Fechadas

Neste capítulo apresentam-se as categorias Cartesianas fechadas e monoidais fechadas, atribuindo a elas uma interpretação do ponto de vista computacional. Categorias Cartesianas fechadas é uma das mais referenciadas conexões entre Teoria das Categorias e Ciência da Computação devido à sua relação com modelos semânticos de linguagens de programação e, em especial com o Cálculo-λ Tipado [GUN 93]. Categorias monoidais fechadas são categorias com propriedades típicas de monóides e consideradas como uma generalização das Cartesianas fechadas.

3.1 Categorias Cartesianas Fechadas

Categorias Cartesianas fechadas são categorias onde objetos representando produtos $a \times b$ estão definidos (por ser Cartesiana) com uma propriedade adicional de fechamento, a qual fornece a noção de morfismos que apresentam morfismos como argumentos. Assim, uma relação entre Teoria das Categorias e Ciência da Computação surge como 'teoria de funções de alta ordem', aspecto fundamental quando se tem o interesse em computações com procedimentos como argumentos. O fechamento é caracterizado pela existência de um objeto exponencial b^a que genericamente representa o conjunto de morfismos de a para b e provê uma interpretação para uma construção comum em programação, a interpretação de tipos como $c \times a \to b$ e $c \to (a \to b)$.

Definição 3.1.1 (Exponencial) *Sejam C uma categoria e a, $b \in Ob_C$. Um exponencial é:*

a)um C-objeto b^a (objeto exponencial)

b)juntamente com um C-morfismo $ev : b^a \times a \to b$ (chamado seta de avaliação)

tais que para qualquer C-objeto c e C-morfismo $g : c \times a \to b$, existe uma única seta $Curry(g) : c \to b^a$ fazendo o diagrama da figura 3.1 comutar, isto é, um único $Curry(g)$ tal que $ev \circ (Curry(g) \times \iota_a) = g$.

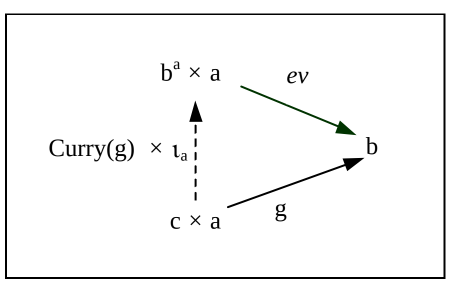

FIGURA 3.1: Exponencial

Duas setas (g e $Curry(g)$) que se correspondem sob esta 'bijeção' são ditas adjuntas exponenciais. A existência da seta única que satisfaz as propriedades especificadas é freqüentemente referida como a Propriedade Universal da Exponenciação.

Uma Interpretação Computacional

A importância de se garantir a existência do objeto exponencial em uma categoria está relacionada com a idéia do que consiste uma computação. Observando novamente o diagrama do objeto exponencial dado pela figura 3.1 pode-se entender intuitivamente o objeto exponencial como o conjunto de funções que aplicado a uma entrada de dados a resulta em uma saída de dados b. Sendo o objeto c uma linguagem de programação qualquer, o objeto a a coleção de dados de entrada e a seta g uma máquina qualquer, pelo diagrama segue-se que: a máquina g interpreta um programa de c para uma entrada de a e resulta em uma saída de b. Portanto, a função $Curry(g)$ nada mais é do que a semântica denotacional, isto é, mapeia cada programa de c em uma única função e o morfismo g representa a semântica operacional, ou seja, é a semântica da linguagem descrita em termos da operação de uma máquina. Em outras palavras, o diagrama da figura 3.2 comuta.

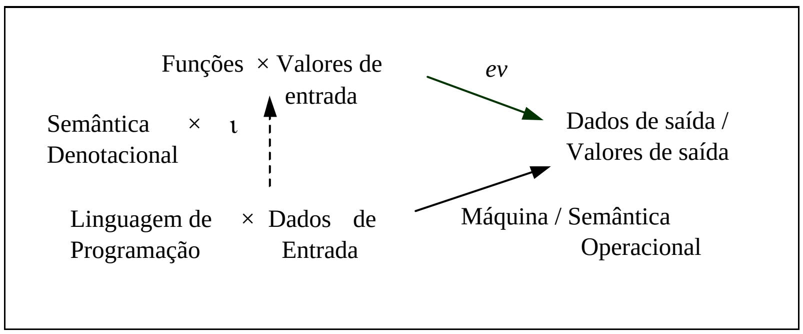

FIGURA 3.2: Interpretação Computacional do Exponencial

Ou seja, para cada programa ou algoritmo, e para cada modo de interpretar esse programa (isto é, para cada modo de executar esse programa sobre os dados de entrada) a função semântica (que também é um morfismo da categoria) associa este programa ao seu significado matemático, como elemento do objeto exponencial, interpretado como uma função, que é aplicada através da ação do morfismo eval, ao valor semântico do dado de entrada para obter o valor semântico do dado de saída.

Definição 3.1.2 (Categoria com Exponenciação) *Uma categoria C é dita com exponenciação se possui produtos binários e, para quaisquer C-objetos a e b existe um objeto b^a e uma seta $ev : b^a \times a \to b$, que satisfaz a Propriedade Universal da Exponenciação.*

A designação de $Curry(g)$ em g estabelece uma 'bijeção' (pois $Mor_C(c \times a, b)$ e $Mor_C(c, b^a)$ podem não ser conjuntos):

$$C[c \times a, b] \cong C[c, b^a]$$

entre a coleção de setas de $c \times a$ para b, e a coleção de setas de c para b^a. Se $Curry(g) = Curry(h)$, então $ev \circ (Curry(g) \times \iota_a) = ev \circ (Curry(h) \times \iota_a)$, isto é, $g = h$ e assim tem-se a 'injeção'. Para verificar a 'sobrejeção', considere $h : c \to b^a$ e defina $g = ev \circ (h \times \iota_a)$. Pela unicidade de $Curry(g)$ deve-se ter $h = Curry(g)$.

Proposição 3.1.1 (Categoria com Exponenciação) *Uma categoria C possui exponenciação, se e somente se, o funtor $- \times a$ tem um adjunto direito para cada C-objeto a.*

Sejam a, b e c objetos da categoria. Se C tem exponenciação, então existe uma bijeção

$$C[c \times a, b] \cong C[c, b^a]$$

indicando a presença da adjunção. A situação de adjunção é a seguinte:

$$\frac{c \to b^a}{c \times a \to b}$$

Representada pela figura 3.3:

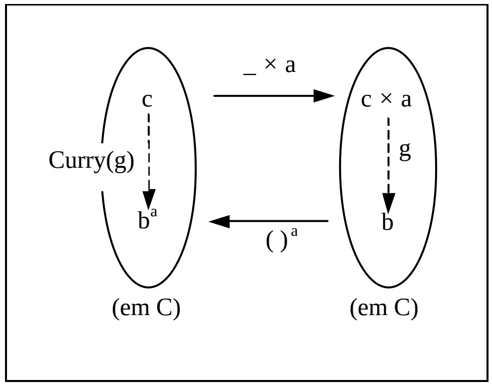

FIGURA 3.3: Adjunto Direito $(\ )^a$

Agora representa-se a co-unidade da adjunção. Isto é, para cada C-objeto c e C-morfismo $g : c \times a \to b$ existe exatamente um C-morfismo $Curry(g) : c \to b^a$ tal que o diagrama 3.4 comuta.

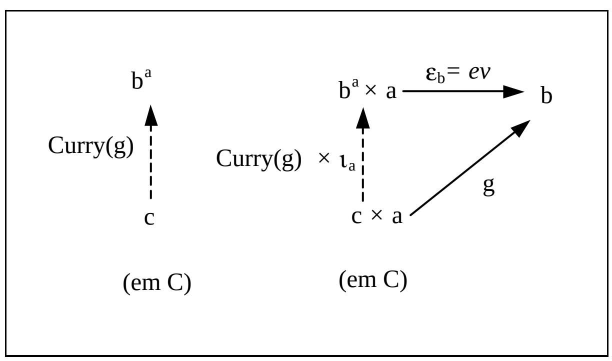

FIGURA 3.4: Categoria com Exponenciação

Definição 3.1.3 (Categoria Cartesiana Fechada) *Uma categoria C é chamada Cartesiana fechada (Cartesian closed category - CCC) se satisfaz as seguintes considerações:*

*a) Possui um Objeto Terminal **1**;*

b) Possui todos os produtos binários (ou seja, possui todos os produtos finitos);

c) C é uma categoria com exponenciação;

Uma Interpretação Computacional

Uma interpretação para as Categorias Cartesianas Fechadas é descrita a seguir.

Seja B^A a coleção de morfismos de uma categoria com origem em um objeto A e destino em um objeto B e seja ev a aplicação de um morfismo de B^A ao objeto origem, obtendo-se o seu objeto destino. Em uma categoria com objeto terminal, cada morfismo a partir do objeto terminal nomeia elementos de um objeto. Assim, o morfismo $\mathbf{1} \rightarrow B^A$ nomeia uma seta de A para B, o morfismo $\mathbf{1} \rightarrow A$ nomeia cada elemento do objeto A e o morfismo $\mathbf{1} \rightarrow B$ nomeia cada elemento do objeto B. Então, se o diagrama abaixo comuta, tem-se que $f(a) = b$.

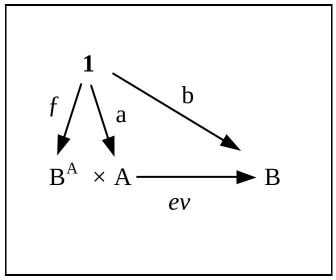

FIGURA 3.5: Categoria Cartesiana Fechada

Isto é, se a categoria é cartesiana fechada é possível determinar a ação de cada morfismo sobre cada elemento de cada objeto.

Do ponto de vista computacional esta é uma propriedade fundamental, pois ela permite determinar o significado da ação de cada máquina sobre cada programa de cada linguagem e cada dado de entrada.

3.2 Mônadas

Um monóide pode ser descrito como um conjunto suporte juntamente com um par de funções, uma representa a operação interna do monóide enquanto a outra seleciona o elemento neutro. A associatividade da operação e as propriedades da identidade podem ser representadas por diagramas comutativos.

Uma mônada é uma generalização desta especificação abstrata de monóides, ou melhor, uma mônada sobre uma categoria C é uma tripla onde endofuntores são considerados como suporte ao invés de conjuntos e transformações naturais fornecem a operação interna e a unidade.

Mônadas são utilizadas como modelos para computação [MOG 91]. A intuição geralmente leva a considerar tipos de dados como objetos e morfismos como funções ou programas. Mas, para uma melhor representação dos aspectos intensionais da computação é necessário uma unificação entre os conceitos de valores e computações. Neste sentido, programas podem ser vistos como transformações de valores (ou programas) para programas, ao invés de transformações de valores para valores. Através das mônadas programas são considerados como 'funções de valores para computações'. A abordagem considerada ainda fornece uma visão denotacional da semântica de programas, sugerindo uma alternativa para preencher o *gap* existente entre a semântica intensional (operacional) e a semântica extensional (denotacional) de linguagens de programação. Mônadas enfatiza a eficiência e a natureza intensional das computações, sem perder a elegância e a clareza da aproximação extensional. Ou melhor, preserva a unidade conceitual de uma visão matemática (através de categorias e estruturas relacionadas), sem perder a taxonomia e detalhes da descrição operacional.

3.2.1 Especificação Abstrata de Monóides

Seja um monóide $< A, \oplus, e >$ onde A é o conjunto suporte, $\oplus : A \times A \to A$ é uma operação binária total associativa e $e \in A$ é o elemento neutro especificado para a operação.

O monóide pode ser descrito como o conjunto A juntamente com o par de funções:

- $\mu : A \times A \to A$;

- $\eta : \mathbf{1} \to A$, onde $\mathbf{1}$ é o conjunto unitário (terminal em **Set**).

A função μ representa a operação interna $\oplus$ enquanto η seleciona a identidade em A. A associatividade da operação e as propriedades da identidade são representadas pelos seguintes diagramas comutativos:

Associatividade

$$\begin{tikzcd}
A^3 = A \times A \times A \arrow[r, "id \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times id"'] & A^2 = A \times A \arrow[d, "\mu"] \\
A^2 = A \times A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

FIGURA 3.6: Associatividade em Monóide

Sejam a_1, a_2 e a_3 elementos do conjunto suporte A, pelo diagrama tem-se:

$\mu \circ (id \times \mu)(a_1, a_2, a_3) = \mu(id \times \mu(a_1, a_2, a_3)) = \mu(id(a_1), \mu(a_2, a_3)) = \mu(a_1, a_2 \oplus a_3) = a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3)$.

$\mu \circ (\mu \times id)(a_1, a_2, a_3) = \mu(\mu \times id(a_1, a_2, a_3)) = \mu(\mu(a_1, a_2), id(a_3)) = \mu(a_1 \oplus a_2, a_3) = (a_1 \oplus a_2) \oplus a_3$.

Assim, como o diagrama comuta:

$$a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3) = (a_1 \oplus a_2) \oplus a_3,$$

representando a associatividade da operação do monóide.

Propriedades da Identidade

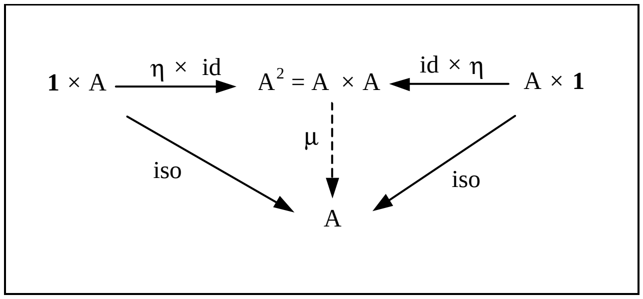

FIGURA 3.7: Identidade em Monóide

De forma análoga à associatividade, como o diagrama comuta segue-se que

$$e \oplus a = a = a \oplus e$$

representando a propriedade fundamental da identidade, onde $e = \eta(1)$.

3.2.2 Generalização da Especificação Abstrata de Monóides

Generalizando esta especificação abstrata de monóides, endofuntores são considerados como suporte, ao invés de conjuntos e a composição de funtores substitui o produto de conjuntos. Recorda-se que cada endofuntor $T : C \to C$ tem composição definida por $T^{n+1} = T^n \circ T : C \to C$, com $T^0 = 1_C$

Assim, o monóide é descrito como o endofuntor $T : C \to C$ juntamente com o par de transformações naturais:

- $\mu : T \circ T \to T$;

- $\eta : 1_C \to T$, onde 1_C é o funtor identidade.

Agora, os produtos de funções são as transformações naturais derivadas. Ou seja, se $\mu : T^2 \to T$ é uma transformação natural cujos componentes são $\mu_c : T^2(c) \to T(c)$ para todo $c \in Ob_C$, então $T\mu : T^3 \to T^2$ e $\mu T : T^3 \to T^2$ são as transformações naturais derivadas obtidas pela composição horizontal. Seus componentes são $(T\mu)_c = T(\mu_c) : T^3(c) \to T^2(c)$ e $(\mu T)_c = \mu_{T(c)} : T^3(c) \to T^2(c)$, respectivamente.

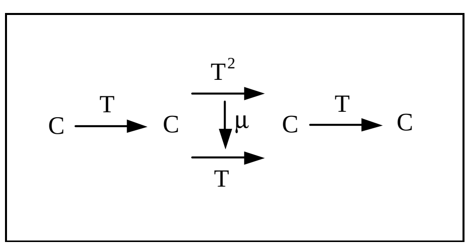

FIGURA 3.8: Transformação Natural Derivada μ

Analogamente se $\eta : 1_C \to T$ é uma transformação natural cujos componentes são $\eta_c : 1_C(c) \to T(c)$ para todo $c \in Ob_C$, então $T\eta : T \to T^2$ e $\eta T : T \to T^2$ são as transformações naturais derivadas obtidas pela composição horizontal. Seus componentes são $(T\eta)_c = T(\eta_c) : T(c) \to T^2(c)$ e $(\eta T)_c = \eta_{T(c)} : T(c) \to T^2(c)$, respectivamente.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "T"] & C \arrow[r, shift left=2, "1_C"] \arrow[r, shift right=2, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & C \arrow[r, "T"] & C \end{tikzcd}$$

FIGURA 3.9: Transformação Natural Derivada η

Definição 3.2.1 (Mônada) *Uma mônada em uma categoria C é uma tripla (T, μ, η), onde $T : C \to C$ é um funtor, $\mu : T^2 \to T$ e $\eta : 1_C \to T$, são transformações naturais, e os diagramas representados a seguir comutam.*

Como nos monóides, μ e η fornecem a operação interna e a identidade respectivamente. Os diagramas descrevem a associatividade e a propriedade da identidade.

$$\begin{tikzcd} T^3 = T \circ T \circ T \arrow[r, "\mu_T"] \arrow[d, "T_\mu"'] & T^2 = T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 = T \circ T \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 = T \circ T \arrow[d, dashed, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

FIGURA 3.10: Associatividade e Propriedade da Identidade em uma Mônada

Uma Interpretação Computacional

O trabalho de Moggi [MOG 91] a respeito de mônadas considera o endofuntor T como uma aplicação de todos objetos Ob_C da categoria C, os quais são vistos como valores do tipo τ, para o correspondente conjunto de objetos $T(Ob_C)$ que são interpretados como o conjunto de computações do tipo τ.

A transformação natural η pode ser interpretada como um operador que inclui valores dentro de uma computação; a transformação natural μ é a operação denominada achatamento, a qual especifica como a aplicação de duas computações sucessivas é instanciada em uma única computação.

3.3 Adjunções e Mônadas

Cada adjunção define uma mônada e reciprocamente, cada mônada define uma adjunção a qual induz a referida mônada [ASP 91].

3.4 Categorias Monoidais (Simétricas) Fechadas

Categorias monoidais são uma formalização explícita das propriedades implícitas em uma mônada, incluindo o comportamento do objeto terminal como uma unidade esquerda e direita, para permitir nestas categorias a definição de monóides e noções derivadas.

Similarmente à construção de categorias Cartesianas fechadas a partir de categorias Cartesianas, pode-se estender uma aproximação abstrata ou 'equacional' para categorias monoidais e obter a noção de categorias monoidais fechadas, sendo necessário para isso a propriedade adicional da simetria.

Definição 3.4.1 (Categoria Monoidal) *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla* $< C, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho >$ *constituída por:*

- *uma categoria* C*;*
- *um bifuntor* $\otimes : C \times C \to C$*, chamado produto tensorial (escreve-se* $a \otimes b$ *para a imagem por* $\otimes$ *do par* (a, b)*);*
- *um objeto* $e \in C$*, chamado de identidade (unidade);*
- *um isomorfismo 'associatividade', para cada tripla* a, b, c *de objetos:*

$$\alpha_{abc} : (a \otimes b) \otimes c \to a \otimes (b \otimes c);$$

- *um isomorfismo 'identidade esquerda', para cada objeto* a*:*

$$\lambda_a : e \otimes a \to a;$$

- *um isomorfismo 'identidade direita', para cada objeto* a*:*

$$\rho_a : a \otimes e \to a;$$

Além disso, $\alpha_{abc}, \lambda_a,$ *e* ρ_a *são isomorfismos naturais e os diagramas da fig 3.11 comutam:*

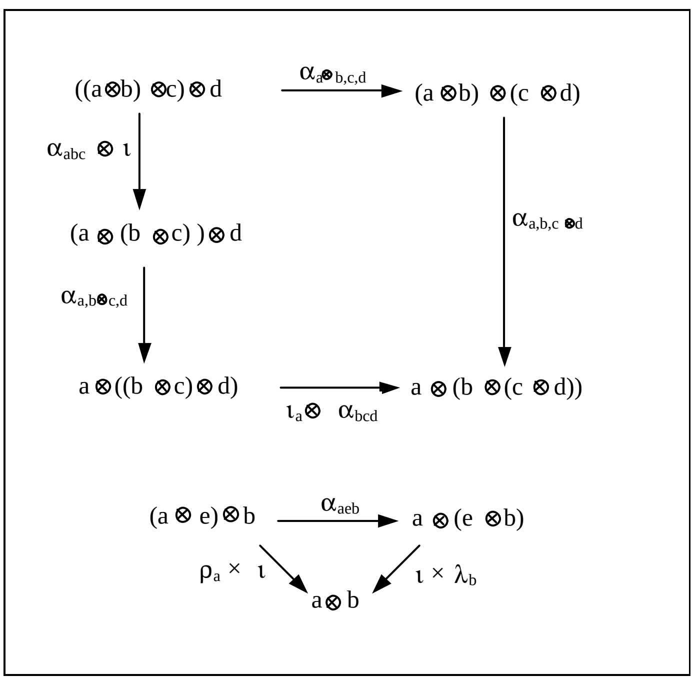

FIGURA 3.11: Categoria Monoidal

Definição 3.4.2 (Categoria Monoidal Simétrica) *Uma categoria monoidal simétrica é uma categoria monoidal tal que para cada par de objetos a, b existe um isomorfismo natural $\gamma_{ab} : a \otimes b \to b \otimes a$ e os diagramas da figura 3.12 comutam:*

- $\gamma_{ba} \circ \gamma_{ab} = \iota_{ab}$;

- $\rho_b = \lambda_b \circ \gamma_{be} : b \otimes e \to b$;

- $(\iota \otimes \gamma_{ac}) \circ \alpha_{bac} \circ (\gamma_{ab} \otimes \iota) = \alpha_{bca} \circ \gamma_{a,b\otimes c} \circ \alpha_{abc}$.

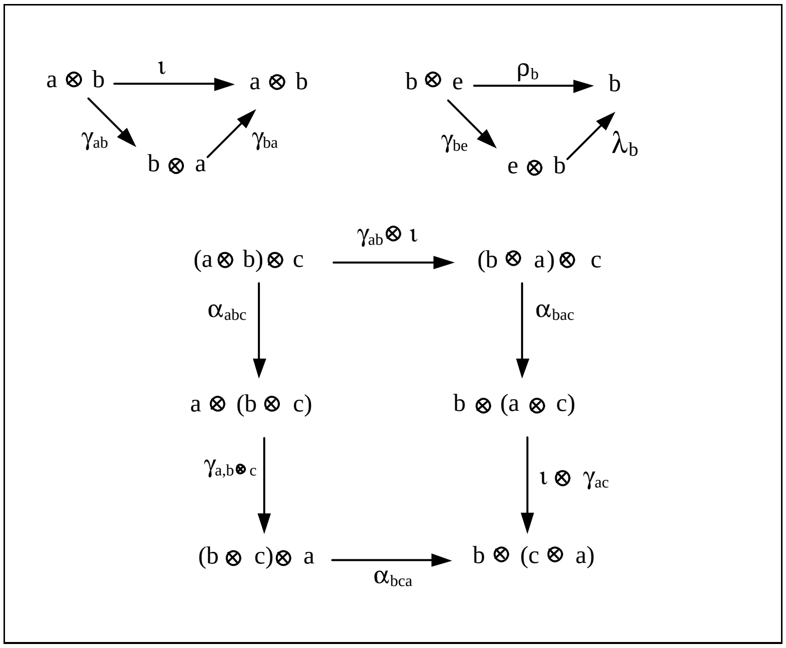

FIGURA 3.12: Categoria Monoidal Simétrica

Definição 3.4.3 (Categoria Monoidal Fechada) *Seja C uma categoria monoidal simétrica, com respeito ao bifuntor $\otimes$. Então C é monoidal fechada se existe um bifuntor $\Rightarrow: C \times C \to C$ tal que, para cada objeto b existe um isomorfismo Λ : $C[a \otimes b, c] \cong C[a, b \Rightarrow c]$ que é natural em a e c.*

Definição 3.4.4 (Fecho em uma Categoria Monoidal Fechada) *Seja C uma categoria monoidal fechada. O fecho, relativamente a $\otimes$, é o objeto $b \Rightarrow c$ da categoria, que juntamente com o morfismo eval : $(b \Rightarrow c) \otimes b \to c$, faz o diagrama abaixo comutar.*

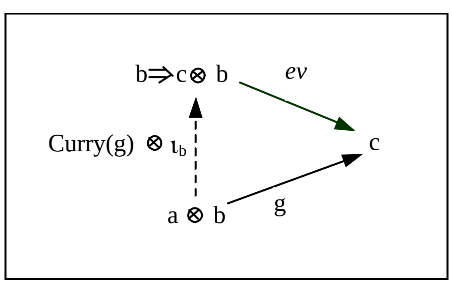

FIGURA 3.13: Fecho em uma Categoria Monoidal

Ou seja, para qualquer objeto b e morfismo $g : a \otimes b \to c$, existe uma única seta $Curry(g) : a \to (b \Rightarrow c)$ tal que $ev \circ (Curry(g) \otimes \iota_b) = g$. Em resumo, a obtenção do fecho $b \Rightarrow c$ em C, relativamente a $\otimes$, garante que para cada objeto b e para cada morfismo $g : a \otimes b \to c$, existe uma única seta $Curry(g) : a \to b \Rightarrow c$, e vice-versa, o que caracteriza a existência de um isomorfismo $\Lambda : C[a \otimes b, c] \cong C[a, b \Rightarrow c]$ que é natural em a e c.

Uma Interpretação Computacional

A importância intuitiva do fecho é análoga a do objeto exponencial. A existência do fecho, com relação à $\otimes$, em uma categoria fornece um significado matemático para processos computacionais. Observando novamente o diagrama do fecho dado pela figura 3.13, pode-se entender intuitivamente que para cada programa a e para cada morfismo $g : a \otimes b \to c$, que representa a execução deste programa a partir de dados de entrada b, obtendo resultados em c, existe uma única função semântica $Curry(g) : a \to (b \Rightarrow c)$ que associa este programa ao seu significado matemático, no fecho $b \Rightarrow c$, que é aplicado através do morfismo $eval$, a um argumento em b para obter um valor em c.

Proposição 3.4.1 (Categoria com Fecho) *Uma categoria C possui fecho, se e somente se, o funtor $- \otimes b$ possui um adjunto direito para cada C-objeto b.*

O isomorfismo entre conjuntos de morfismos $\Lambda : C[a \otimes b, c] \cong C[a, b \Rightarrow c]$ é uma transformação natural em a e c, que sendo uma bijeção para todo a e c preserva a estrutura enquanto seus argumentos a e c variam. Isto caracteriza a seguinte adjunção

$$\frac{a \to (b \Rightarrow c)}{a \otimes b \to c}$$

Representada por

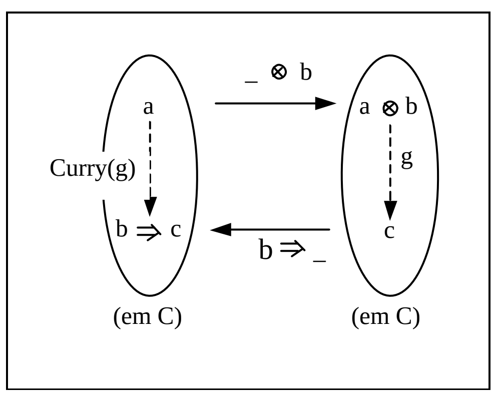

FIGURA 3.14: Adjunto Direito $b \Rightarrow -$

Agora representa-se a co-unidade da adjunção. Isto é, para cada C-objeto a e C-morfismo $g : a \otimes b \to c$ existe exatamente um C-morfismo $Curry(g) : a \to (b \Rightarrow c)$, tal que o diagrama a seguir comuta.

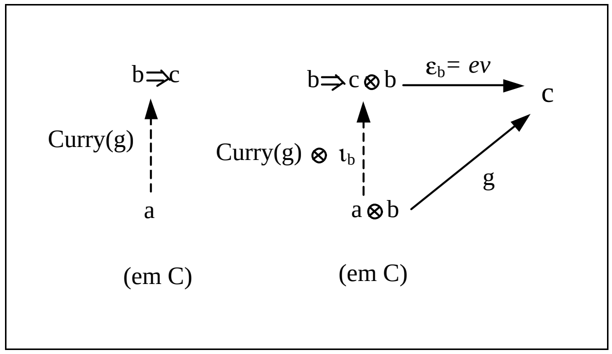

FIGURA 3.15: Categoria com Fecho

4 Topos

Este capítulo apresenta uma introdução ao estudo de topos. Inicialmente são apresentados alguns itens fundamentais: completeza, subobjeto e classificador de subobjetos, para posterior definição de um topos. Procurou-se dar uma interpretação computacional para os tópicos abordados assim como exemplificar as principais construções.

4.1 Introdução

A Teoria dos Topos [BAR 85] [BEL 88] [MCL 92], tem sua origem em duas linhas distintas do desenvolvimento matemático: Geometria Algébrica e Teoria das Categorias. A primeira iniciou com A. Grothendieck e sua escola de Geometria Algébrica na busca de um tratamento axiomático para a teoria dos feixes (*sheaf theory*). Neste caso, topos é considerado uma abstração das propriedades das categorias de feixes de conjuntos sobre espaços topológicos. O ponto de partida da segunda linha é atribuído a F. Lawvere's, em 1964, ao publicar um artigo com respeito à teoria elementar da categoria dos conjuntos, onde buscou uma maneira natural de fundamentar a matemática através de noções básicas de morfismos e composições de morfismos. Ele considerou conjuntos e funções como os conceitos primitivos da Teoria dos Conjuntos e a operação básica de composição como a relação fundamental. O conceito de topos elementar foi formulado por F. Lawvere's e M. Tierney, a partir do estudo de categorias com um tipo especial de morfismo, chamado 'classificador de subobjetos'. Eles desenvolveram a idéia de que uma teoria no sentido da lógica matemática pode ser considerada como um topos, possivelmente após um processo de reconstrução.

Um dos universos mais gerais dos estudos matemáticos correntes é a categoria conhecida como **Set**, que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos. Nessa categoria é dada uma descrição formal para os conceitos matemáticos fundamentais (número, função, relação) e são especificados axiomas legislando a respeito das propriedades de conjuntos.

Um topos é uma categoria de estrutura e comportamento semelhante à **Set**. Ou seja, é um tipo especial de categoria definida por axiomas, os quais especificam que algumas construções realizadas para conjuntos, também podem ser realizadas para essa categoria. Um topos não é simplesmente uma generalização da teoria dos conjuntos, mas suas construções elementares são melhor compreendidas, pelo menos em um primeiro momento, quando verificando o que elas significam em **Set**.

Alguns conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos são recuperados categorialmente:

- A noção de elemento é recuperada em categorias como um morfismo a partir do objeto terminal;
- Subobjeto recupera a noção de subconjunto embora, categorialmente seja definido como um monomorfismo. Intuitivamente, um subobjeto é uma parte de

um objeto;

Diz-se que um topos apresenta uma estrutura semelhante a **Set** porque as condições necessárias para que uma categoria seja um topos recupera muitos conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos. Um topos é uma categoria Cartesiana fechada com classificador de subobjetos. Intuitivamente, uma interpretação para estas condições é a seguinte:

- Em uma categoria cartesiana fechada (categoria finitamente completa com exponenciação) em que se nomeiam elementos, é possível determinar a ação de cada morfismo sobre cada elemento de qualquer objeto (item 3.1.3), seguindo assim a estrutura de **Set**, pois uma função é definida para cada elemento de seu domínio;

- Classificador de Subobjetos é um morfismo especial que, intuitivamente, permite a prova de proposições lógicas na categoria. Em **Set**, o conjunto $2 = \{0, 1\}$ juntamente com a função $true : \mathbf{1} \to 2$ permite que para cada inclusão de conjuntos seja possível determinar a sua função característica. Reciprocamente, possibilita determinar qual é o subconjunto representado por uma função característica qualquer. De maneira análoga, em um topos, especificam-se subobjetos por propriedades de seus elementos, representadas através de diagramas envolvendo esses subobjetos.

Com a Teoria das Categorias [GOL 84], através do estudo de topos, foi possível axiomatizar a Teoria dos Conjuntos, resultando numa fundamentação categorial da matemática. A noção de topos tem um importante poder de unificação. Ela encerra **Set** como uma categoria sheaf de Grothendieck e relaciona os domínios da Teoria dos Conjuntos com a Geometria Algébrica. Uma ramificação para outra área seria a Lógica, podendo dizer-se que cada topos contém seu próprio cálculo lógico, sabendo que os princípios lógicos em um topos são os da lógica intuicionista e não os da lógica clássica.

A Teoria dos Topos [JOH 77] prevê a rejeição da idéia da existência de um universo fixo de conjuntos constantes no qual a matemática pode e deve ser desenvolvida, e o reconhecimento de que uma 'estrutura variável' pode ser mais convenientemente considerada, dentro de um universo de conjuntos variantes (variando continuamente), do que aquela do método tradicional. Segundo Johnstone, a generalização da idéia de conjuntos constantes para variantes constitui o 'coração' da teoria dos topos.

4.2 Completeza

A seguir são apresentados os conceitos de categoria completa (categoria co-completa por dualidade) e categoria finitamente completa.

Definição 4.2.1 (Categoria Completa, Co-completa e Bi-completa) *Uma categoria C é completa se todo diagrama D em C tem um limite. Por dualidade, C é co-completa quando cada diagrama de C tem um co-limite. Uma categoria completa e co-completa é dita bi-completa.*

Definição 4.2.2 (Categoria Finitamente Completa) *Uma categoria é finitamente completa se possui um limite para cada diagrama finito.*

Exemplo 1:

A categoria 1 (com somente um objeto e um morfismo) e a categoria 2 (com dois objetos e três morfismos) são bi-completas. Enquanto a categoria $1+1$ (com dois objetos e dois morfismos), não é completa nem co-completa.

Teorema 4.2.1 (Categoria Finitamente Completa) *Se C possui um objeto terminal, e um produto fibrado para cada par de setas com contra-domínio comum, então C é finitamente completa.*

Exemplo 2:

Set e **Poset** são finitamente completas, já que possuem objeto terminal e produto fibrado para cada par de setas com contra-domínio comum.

Exemplo 3:

FinSet é finitamente (co-)completa mas não é (co-)completa (por exemplo, o coproduto de infinitos conjuntos finitos não pertence à categoria).

Definição 4.2.3 (Categoria Cartesiana Fechada) *Uma categoria finitamente completa com exponenciação é Cartesiana fechada.*

4.3 Subobjeto

Em categorias, a noção de subobjeto é a generalização de subconjunto da Teoria dos Conjuntos. A idéia principal é considerar um subobjeto A de um objeto dado B como um monomorfismo $f : C \rightarrowtail B$ (intuitivamente, um monomorfismo f tal que $f(C) = A$).

Ora, se A é subconjunto de B, então a função de inclusão $A \hookrightarrow B$ é injetora (mono). Por outro lado, qualquer função mono $f : C \rightarrowtail B$ determina um subconjunto de B pois, $Im(f) = \{f(x)|x \in C\}$. Assim, f induz uma bijeção entre C e $Im(f)$, ou seja, $C \cong Im(f)$. Pode-se dizer que o domínio de uma função mono é isomórfico a um subconjunto do contra-domínio, ou ainda, que o domínio é um subconjunto do contra-domínio a menos de isomorfismo.

Definição 4.3.1 (Subobjeto (definição prelimiar)) *Um subobjeto de um objeto d é uma seta mono $f : a \rightarrow d$ com contra-domínio em d.*

Uma Interpretação Computacional

De maneira intuitiva, um subobjeto pode ser visto como uma parte de um objeto.

Considerando o conjunto parcialmente ordenado $(P(D), \subseteq)$ como uma categoria, onde $P(D)$ é o conjunto das partes do conjunto D e $\subseteq$ é a relação de inclusão, a seta $A \rightarrowtail B$ ocorre na categoria, se e somente se, $A \subseteq B$, com $A, B \in P(D)$. E, quando existe esse morfismo, o diagrama 4.1 comuta.

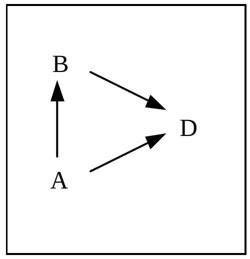

FIGURA 4.1: Inclusão em **Set**

Seguindo a mesma idéia define-se a relação de inclusão entre subobjetos.

Definição 4.3.2 (Inclusão entre Subobjetos (definição preliminar)) *Dados dois subobjetos $f : a \to d$ e $g : b \to d$ do objeto d, diz-se que $f \subseteq g$, f é fatorado através de g (ou que g fatora f), se e somente se existe uma seta $h : a \to b$ (única) tal que o diagrama 4.2 comute, ou seja, $f = g \circ h$.*

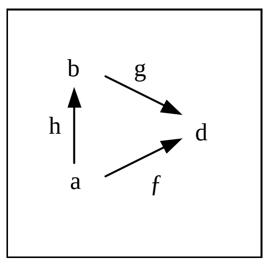

FIGURA 4.2: Inclusão entre Subobjetos

Como f é mono h também deve ser mono, pois se $h \circ k = h \circ k'$ (com $k, k' : c \to a$) $\Rightarrow g \circ h \circ k = g \circ h \circ k' \Rightarrow f \circ k = f \circ k' \Rightarrow k = k'$.

A relação de inclusão em subobjetos é reflexiva, $f \subseteq f$, já que $f = f \circ \iota_a$.

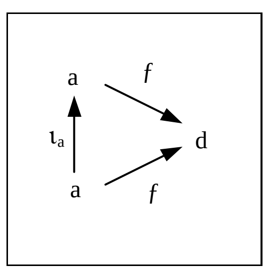

FIGURA 4.3: Reflexividade na Inclusão entre Subobjetos

É também transitiva, pois se $f \subseteq g$ e $g \subseteq k$ então $f \subseteq k$, já que, se $f = g \circ h$ e $g = k \circ i$ então $f = k \circ (i \circ h)$.

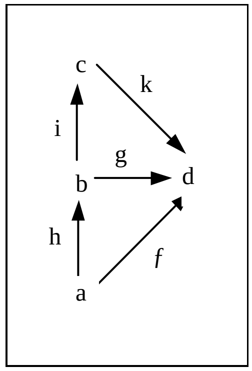

FIGURA 4.4: Transitividade na Inclusão entre Subobjetos

Definição 4.3.3 (Subobjetos Isomórficos)*Sejam $f : a \to d$ e $g : b \to d$ monomorfismos em uma categoria. Quando $f \subseteq g$ (g fatora f) e $g \subseteq f$ (f fatora g), eles possuem domínios isomórficos, e são chamados subobjetos isomórficos, isto é, $f \simeq g$.*

Proposição 4.3.1 (Relação de Equivalência entre Subobjetos Isomórficos)*Sejam $f : a \to d$ e $g : b \to d$ monomorfismos em uma categoria e seja $f \simeq g$. Então os fatores resultantes da definição de $\simeq$ são únicos e são isomorfismos inversos. Além disso, a relação é uma relação de equivalência na coleção de setas com contra-domínio d.*

Prova:

Se $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, por definição, existem as setas $h : a \to b$ e $i : b \to a$ tais que $f = g \circ h$ e $g = f \circ i$.

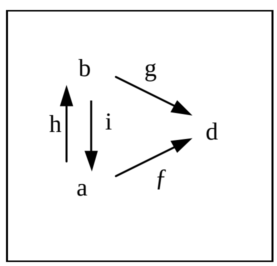

FIGURA 4.5: Equivalência entre Subobjetos Isomórficos

As setas h e i são únicas porque f e g são monomorfismos. Além disso, $f \circ i \circ h = g \circ h = f = f \circ \iota_a$. Já que f é um monomorfismo, conclui-se que $i \circ h = \iota_a$. Similarmente, $h \circ i = \iota_b$.

A relação $\simeq$ é uma relação de equivalência:

(i) reflexiva; $f \simeq f$ pois, $f \subseteq f$.

(ii) transitiva; se $f \simeq g$ e $g \simeq h$, então $f \simeq h$, já que,

- se $f \simeq g$ então $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$;
- se $g \simeq h$ então $g \subseteq h$ e $h \subseteq g$;

e como a relação de inclusão entre subobjetos é transitiva, segue-se que $f \subseteq h$ e $h \subseteq f$, logo, $f \simeq h$.

(iii) simétrica; se $f \simeq g$ então $g \simeq f$ pois, se $f \simeq g$ então $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, logo, $g \simeq f$.

Observação:

Esta relação de inclusão não é anti-simétrica pois, para isso, quando $f \simeq g$ deveria resultar em $f = g$, o que nem sempre ocorre porque, geralmente, $a \neq b$.

Agora, cada monomorfismo $f : a \to d$ determina uma classe de equivalência:

$$[f] = \{g | f \simeq g\}.$$

E, as classes de equivalência desta relação de equivalência são os subobjetos de d.

$$Sub(d) = \{[f] | f \text{ é mono com } cod\ f = d\}.$$

Definição 4.3.4 (Subobjeto/ Subobjeto Próprio) *Seja d um objeto de uma categoria C. Um subobjeto $[f]$ de d é uma classe de equivalência do monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$, com respeito à relação de equivalência $\simeq$ definida na proposição acima. O subobjeto é um subobjeto próprio se ele não contém ι_d.*

Definição 4.3.5 (Inclusão entre Subobjetos) *A inclusão entre estas classes é dada por:*

$$[f] \subseteq [g] \ sse \ f \subseteq g.$$

Observação:

No texto que segue diz-se subobjeto f para subobjeto $[f]$ e $f \subseteq g$ para $[f] \subseteq [g]$.

Proposição 4.3.2 (Inclusão das Classes de Equivalência é Independente da Escolha dos Representantes da Classe) *Se $[f] = [f']$ e $[g] = [g']$ então, $f \subseteq g$ sse $f' \subseteq g'$.*

Prova:

Supondo que $f \subseteq g$, pela hipótese $f' \simeq f$ (isto é, $f' \subseteq f$ e $f \subseteq f'$) e, como a relação de inclusão é transitiva então $f' \subseteq g$. Da mesma forma, pela hipótese $g \simeq g'$, logo, $f' \subseteq g'$. A volta é similar.

Desta forma, a relação de inclusão é anti-simétrica. Quando $[f] \subseteq [g]$ e $[g] \subseteq [f]$, por definição, $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, assim $f \simeq g$ e portanto, $[f] = [g]$. Logo, os subobjetos de d como foram definidos formam um $\mathbf{Poset}(Sub(d), \subseteq)$.

Exemplo: Em **Set**, $Sub(D) \cong P(D)$.

Por definição, $Sub(D) = \{[f] | f$ é mono com $cod\ f = D\}$. Seja $F : Sub(D) \rightarrow P(D)$, a função que associa cada monomorfismo f à sua imagem Imf.

F é mono - Supondo $Imf = Img$ onde $f : A \rightarrowtail D$ e $g : B \rightarrowtail D$ são monos. Pela hipótese $A \cong Imf$ e $B \cong Img$, então, $A \cong B$. Portanto, existe $h : A \rightarrow B$ isomorfismo, tal que o diagrama 4.6 comuta.

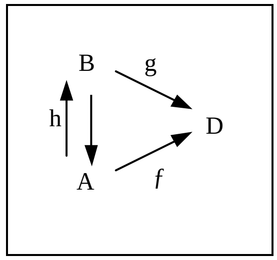

FIGURA 4.6: Inclusão entre Subobjetos em **Set**

Assim, $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$ e portanto, $f \simeq g$.

F é epi - Seja $B \subseteq D$. Considera-se $i : B \hookrightarrow D$ (mono), com $cod\ i = D$. Então $i \in Sub(D)$ e $F(i) = B$.

Logo, como F é mono e epi em **Set**, $Sub(D) \cong P(D)$.

4.4 Elemento

Em Teoria dos Conjuntos, um elemento x de A ($x \in A$) pode ser identificado como o subconjunto unitário $\{x\}$ de A; e portanto como a seta $x \hookrightarrow A$ do objeto terminal $\{x\}$ para A. Uma função $f : \mathbf{1} \rightarrow A$ em **Set** determina um elemento de A. Ou seja, fixado um objeto terminal é recuperada a noção de elemento.

Definição 4.4.1 (Elemento)*Seja C uma categoria com objeto terminal* $\mathbf{1}$. *Então um elemento do objeto $a \in Ob_C$ é definido como um morfismo $x : \mathbf{1} \rightarrow a$.*

<u>Uma Interpretação Computacional</u>

A partir do objeto terminal partem morfismos que selecionam cada elemento de cada objeto.

4.5 Classificador de Subobjetos

O classificador de subobjetos ilustra uma maneira de escolher qualquer elemento ou figura d em D e determinar se este elemento ou figura selecionado também está incluido em uma parte A de D ($A \hookrightarrow D$), pela comutativdidade do diagrama ilustrado na figura 4.7.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "d"] & \\
A \arrow[r, hook, "inc"] \arrow[d, "!"] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

FIGURA 4.7: Classificador de Subobjetos

A injetividade de $inc : A \hookrightarrow D$ implica que deve existir no máximo um morfismo f que prove que d é uma parte de A. A seta $\chi_A : D \to 2$ é o morfismo característico da parte A desde que χ_A caracteriza os pontos de D que estão na parte A. Ou seja, a propriedade fundamental do morfismo característico χ_A é que para qualquer figura $d : T \to D$, d está incluido em uma parte A de D, se e somente se, $\chi_A \circ d = true \circ ! \circ f$. Além disso, para cada figura $d : T \to D$ de D o morfismo $\chi_A d : T \to \Omega$ indicará 'o grau de verdade' de que d está incluído em uma parte A de D.

Agora, se D é um conjunto e $A \hookrightarrow D$ é qualquer subconjunto de D, existe exatamente uma função $\chi_A : D \to 2 = \{0, 1\}$ tal que:

$$\forall\, d,\ d \text{ está incluido em } A \text{ se e somente se } \chi_A(d) = 1$$

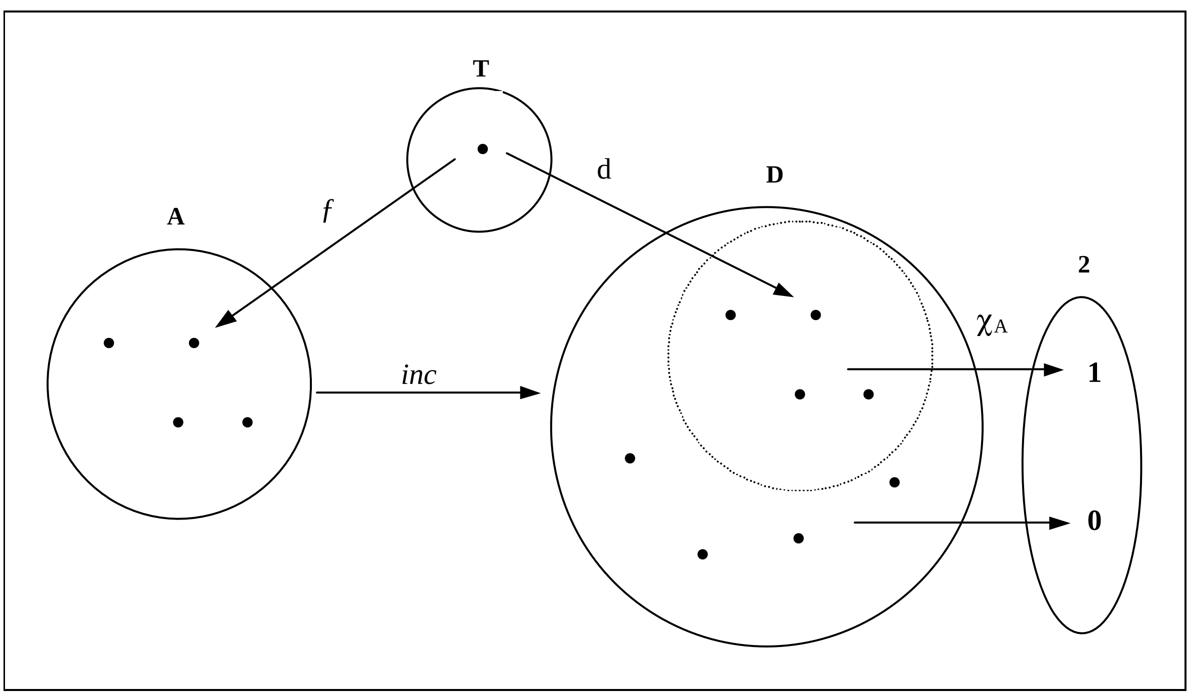

FIGURA 4.8: Classificador de Subobjetos em **Set**

Ou seja, em **Set** existe uma bijeção entre os subconjuntos de um conjunto D (isto é, o conjunto das partes $P(D)$ de um conjunto D) e a coleção de todas as funções com domínio em D e contra-domínio em $2 = \{0, 1\}$.

O isomorfismo de $P(D)$ para 2^D, $P(D) \cong 2^D$, é estabelecido da seguinte maneira: para qualquer subconjunto $A \subseteq D$, é definida uma função $\chi_A : P(D) \to 2^D$, chamada função característica de A, pela regra:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \in A \\ 0 \; se \; x \notin A. \end{cases}$$

Se $\chi_A = \chi_B$ então $A = B$, caracterizando a injeção. Agora, para qualquer $f \in 2^D$ então $f = \chi_{Af}$, onde,

$$A_f = \{x | x \in D \text{ e } f(x) = 1\}$$

sendo estabelecida assim a sobrejeção.

Observe que A_f é a imagem inversa de f sobre o subconjunto $\{1\}$ de 2 , ou seja,

$$A_f = f^{-1}(\{1\}).$$

Esse isomorfismo entre subconjunto e função característica pode ser representado categorialmente pelo diagrama 4.9 (onde $1 = \{0\}$ e a função de inclusão de 1 em 2 é a função $true$ tal que $true(0) = 1$).

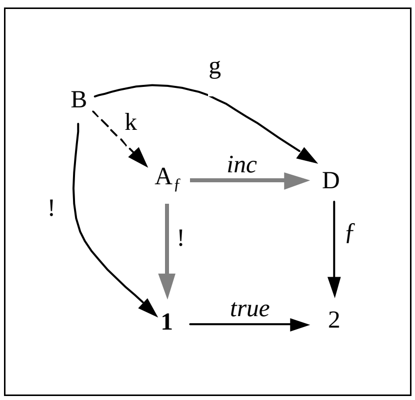

FIGURA 4.9: Isomorfismo entre Subconjunto e Função Característica

Esse é um diagrama de produto fibrado pois, supondo qualquer outro cone $< B, !, g >$ existe uma seta única $k : B \to A_f$. Ora, se $b \in B$, $f(g(b)) = true(!(b))$, então $g(b) \in A_f$. Portanto, $k : B \to A_f$ pode ser definido pela regra $k(b) = g(b)$. Claramente, este k é a única seta que faz o diagrama comutar. Assim, se $A \subseteq D$, então o diagrama 4.10 é um produto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
A_f \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\
& A \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "!"] & D \arrow[d, "f"] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "true"] & 2
\end{tikzcd}$$

FIGURA 4.10: Produto Fibrado do Isomorfismo entre Subconjunto e Função Característica

Além disso, χ_A pode ser identificada como a única função de D para 2 que faz do diagrama 4.10 um produto fibrado. Se, para algum f, o quadrado interno é um produto fibrado, então, para $x \in A$, $f(x) = 1$, logo $x \in A_f$. Assim $A \subseteq A_f$. Mas o quadrado exterior também comuta - na verdade é um produto fibrado como visto acima - portanto existe um único k com $inc \circ k = j$. Desde que inc e j são inclusões, k também deve ser. Então, $A_f \subseteq A$ e $A_f = A$. Mas, f é a função característica de A_f, assim, $f = \chi_A$.

Então em **Set**, o conjunto 2 juntamente com a função $true : 1 \to 2$ permite que para cada inclusão de um conjunto D seja possível determinar a sua função característica. Reciprocamente, para cada seta $f : D \to 2$ com domínio em D e contra-domínio em 2 é possível determinar qual é o subconjunto de D representado por essa função característica.

Em outras palavras, considerando o morfismo $p : D \to 2$, é possível determinar os elementos de um conjunto $A \subseteq D$ por compreensão, ou seja, os elementos de A serão aqueles para os quais $p(a)$ vale, isto é, $A = \{a | p(a) = 1, \forall\, a \in D\}$ (representado no diagrama 4.11).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "!"] & D \arrow[d, "p"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "true"] & 2
\end{tikzcd}$$

FIGURA 4.11: Elementos de um Conjunto por Compreensão

Definição 4.5.1 (Classificador de Subobjetos) *Se C é uma categoria com objeto terminal $\mathbf{1}$, então um classificador de subobjetos para C é um objeto Ω junto com uma seta $true : \mathbf{1} \to \Omega$ que satisfaz o seguinte axioma:*

Ω-axioma: *Para cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ existe uma única seta $\chi_f : d \to \Omega$ tal que o diagrama 4.12 represente um produto fibrado.*

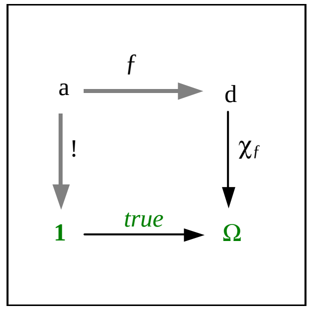

FIGURA 4.12: Ω-Axioma

Uma Interpretação Computacional

Intuitivamente, se uma categoria possui classificador de subobjetos então é possível representar proposições na categoria. Além disso, para cada proposição χ_f é possível determinar qual parte do objeto d que satisfaz esta proposição.

A seta χ_f é chamada de seta característica, ou caracter, do monomorfismo f (subobjeto de d).

Um classificador de subobjetos, quando existe em uma categoria, é único a menos de isomorfismo.

Exemplo: Classificador de Subobjetos na Categoria dos Grafos (**Gr**)

Seja um subgrafo S de um grafo G.

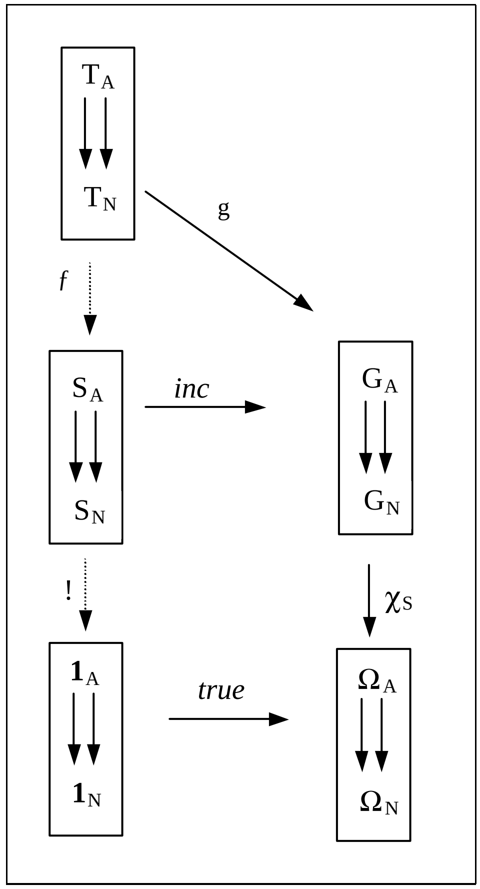

FIGURA 4.13: Subgrafo S de G

Define-se um grafo Ω, juntamente com um ponto específico $true : \mathbf{1} \to \Omega$ que satisfaz a seguinte propriedade: 'os morfismos de qualquer grafo G para Ω correspondem-se com as partes de G'.

$$\frac{S \hookrightarrow G}{G \to \Omega}$$

Ou seja, para qualquer figura $g : T \to G$ de G, $\chi_S \circ g = true \circ ! \circ f$, se e somente se, g é uma parte de S.

E, para cada figura $g : T \to G$ o morfismo $\chi_S g : T \to \Omega$ indicará o 'grau de verdade' de que g está incluído em uma parte S de G.

O classificador de subobjetos na categoria **Gr** é representado por $true : \mathbf{1} \to \Omega$:

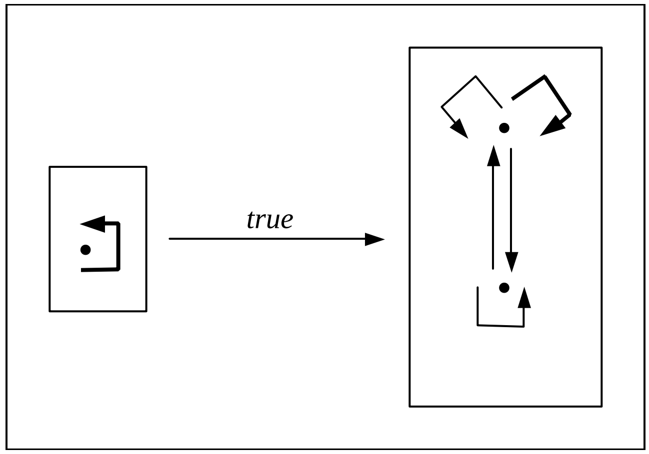

FIGURA 4.14: Classificador de Subobjetos em **Gr**

As cinco setas e os dois nodos de Ω representam os vários graus de verdade de que uma figura $g : T \to G$ está incluída em uma parte S de G. Isto é, os sete elementos representam as possíveis relações nas quais um elemento de G (seta ou nodo) pode apresentar com respeito a um dado subgrafo de G (existem cinco possibilidades para setas e duas para nodos). São elas:

Para Setas

1. A seta está incluída no subgrafo.
2. A seta não está incluída no subgrafo mas sua origem e destino estão incluídos.
3. A seta não está incluída no subgrafo nem sua origem, mas seu destino está incluído.
4. A seta não está incluída no subgrafo nem seu destino, mas sua origem está incluída.
5. A seta não está incluída no subgrafo (nem sua origem e destino).

Para Nodos

1. O nodo está no subgrafo.
2. O nodo não está no subgrafo.

Para S e G específicos, conforme diagrama 4.15, a função característica identifica a relação dos elementos de G com o subgrafo S:

$\chi_S(a) = \chi_S(b) = p$, isto é, a e b estão no subgrafo;

$\chi_S(c) = \chi_S(d) = q$, isto é, c e d não estão no subgrafo;

$\chi_S(x) = t$, isto é, o morfismo x está no subgrafo;

$\chi_S(y) = f$, isto é, o morfismo y não está no subgrafo mas sua origem e seu destino estão no subgrafo;

$\chi_S(r) = h$, isto é, o morfismo r não está no subgrafo mas seu destino está no subgrafo;

$\chi_S(v) = j$, isto é, o morfismo v não está no subgrafo mas sua origem está no subgrafo;

$\chi_S(s) = g$, isto é, o morfismo s não está no subgrafo;

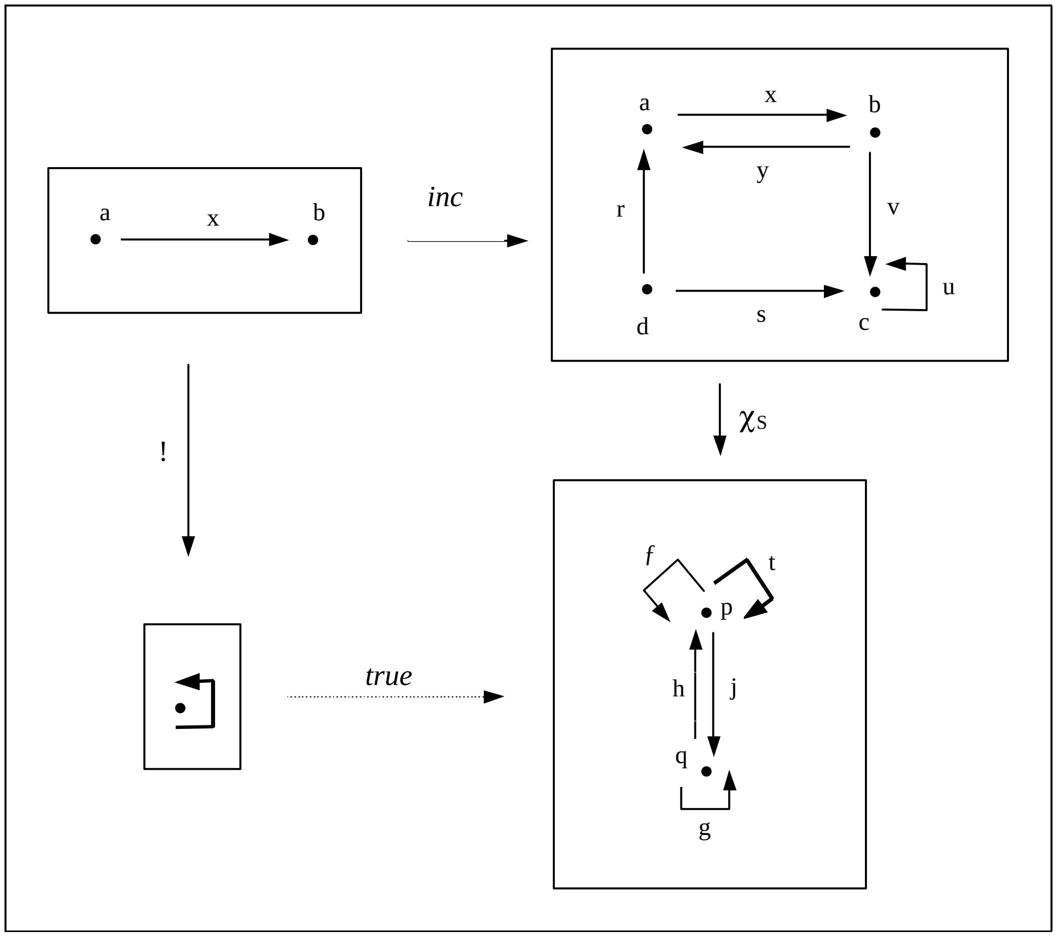

FIGURA 4.15: Exemplo de Classificador em **Gr**

Teorema 4.5.1 (Subobjetos Isomórficos têm o mesmo Morfismo Característico)
Para $f : a \rightarrowtail d$ e $g : b \rightarrowtail d$ monomorfismos, $f \simeq g$ se e somente se $\chi_f = \chi_g$.

<u>Prova:</u>

Supondo que $\chi_f = \chi_g$, considera-se o diagrama 4.16.

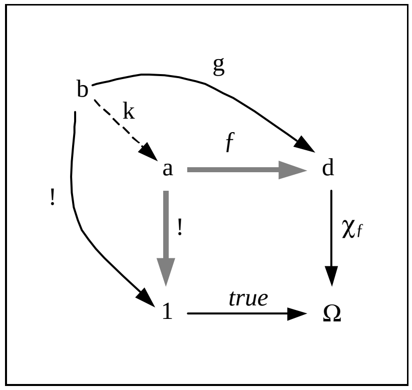

FIGURA 4.16: Morfismo Característico para Subobjetos Isomórficos

Desde que, $\chi_f = \chi_g$, o quadrado externo comuta (na verdade é um produto fibrado) e portanto o quadrado interno representa um produto fibrado, assim, $g \subseteq f$. Trocando f e g no diagrama, resulta que $f \subseteq g$ e portanto, $f \simeq g$.

Reciprocamente, se $f \simeq g$, então a seta k no diagrama acima existe e é iso com inversa $k^{-1} : a \cong b$. Através disso, pode-se mostrar que o quadrado externo representa um produto fibrado, o qual, só pode ser se χ_f é o único caracter de g, logo, $\chi_f = \chi_g$.

Ou seja, cada subobjeto (classe de equivalência) identifica um único morfismo característico.

Como conseqüência imediata deste teorema, a designação de χ_f para f estabelece uma 'bijeção':

$$Sub(d) \cong Mor_C(d, \Omega).$$

4.6 Topos

A seguir é introduzido o conceito de topos elementar e são apresentadas algumas categorias que são um topos.

Definição 4.6.1 (Topos Elementar) *Um topos elementar é uma categoria ξ tal que,*

- *ξ é finitamente completa,*

- *ξ é finitamente co-completa,*

- *ξ tem exponenciação,*

- *ξ possui um classificador de subobjetos.*

Como a segunda condição é uma conseqüência das demais (Juul Mikkelsen), pode-se dizer que um topos é uma categoria Cartesiana fechada com classificador de subobjetos.

Uma Interpretação Computacional

Um topos é uma categoria que funciona como **Set** (possui elementos para cada objeto, é possível considerar partes de objetos e também se verificam propriedades para estas partes). Ou seja, em um topos é possível saber as ações de cada morfismo para cada elemento de cada objeto (por ser uma CCC) e é possível determinar subobjetos por propriedades (funções características) de seus elementos.

Exemplo 1:

Set é um topos. **FinSet** é um topos, com limites, exponenciais, e $true : \mathbf{1} \to \Omega$ conforme **Set**.

Exemplo 2:

$\mathbf{Set}^2$, a categoria dos pares de conjuntos é um topos. Todas construções são obtidas 'duplicando' as correspondentes construções em **Set**. Por exemplo, o classificador de subobjetos é $< true, true >:< 0, 0 >\to< 2, 2 >$.

Exemplo 3:

$\mathbf{Set}^{\to}$ (ou a categoria das setas, $id_{Set} \downarrow id_{Set}$) é um topos. $\mathbf{Set}^{\to}$ é a categoria que possui funções $f : A \to B$ como objetos e pares de funções como setas. Um morfismo em $\mathbf{Set}^{\to}$ de um objeto $f : A \to B$ para um objeto $g : C \to D$ é um par de funções $< h, k >$ tal que o diagrama da figura 4.17 comute, isto é, $g \circ h = k \circ f$. Para a composição tem-se: $< j, l > \circ < h, k >=< j \circ h, l \circ k >$. O morfismo identidade para o objeto $f : A \to B$ é o par de funções $< id_A, id_B >$.

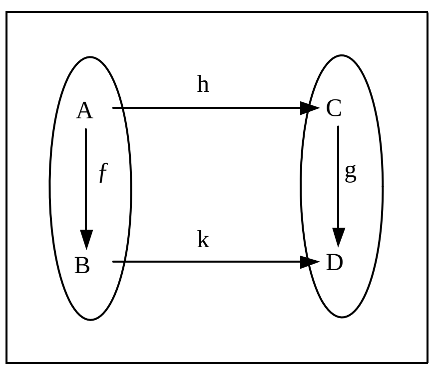

FIGURA 4.17: Morfismo em $\mathbf{Set}^{\to}$

Observação:

Uma observação importante é que, se ξ_1 e ξ_2 são quaisquer topoi, então o produto $\xi_1 \times \xi_2$ é um topos (ou seja, a categoria dos topos é fechada para o produto).

5 Espaços Coerentes

Neste capítulo são apresentados os espaços coerentes, ou domínios de Girard, buscando-se ressaltar uma interpretação computacional e categorial de alguns conceitos fundamentais para a compreensão do estudo proposto. Girard [GIR 87] [GIR 89] introduziu os espaços coerentes, que é um tipo especial de domínio de Scott, a fim de dar semântica para a lógica linear.

5.1 Introdução

Um espaço coerente [TRO 92] [GIR 89] pode ser considerado como um tipo especial de domínio de Scott, onde os objetos são conjuntos construídos segundo uma relação reflexiva e simétrica, denominada de relação de coerência, e a ordem de informação é a relação de inclusão entre conjuntos.

O principal objetivo da teoria dos espaços coerentes é interpretar tipos de dados através de um espaço coerente, e as computações por funções entre espaços coerentes, que serão definidas de modo único por suas aproximações e portanto contínuas. Neste sentido a monotonicidade caracteriza-se por preservar aproximações, enquanto a continuidade por preservar limites. Quando o resultado de uma computação é modelado como o supremo de conjuntos dirigidos, é natural que a continuidade seja compatível com a formação de tais supremos. Assim, a teoria dos espaços coerentes caracteriza-se pela preservação de supremos dirigidos.

Contudo, as funções entre espaços coerentes além de serem contínuas no sentido de Scott - preservam supremos de conjuntos dirigidos - são estáveis e lineares. A estabilidade é a propriedade que se caracteriza pela preservação dos *pullbacks*, ou seja, garante a existência de uma menor aproximação para o argumento que determina uma dada imagem da função. Enquanto a linearidade é a propriedade que se caracteriza pela preservação de uniões arbitrárias de conjuntos finitamente consistentes pelas funções estáveis, o que implica a existência de uma menor aproximação do argumento, dada por um elemento finito e atômico do espaço.

5.2 Conceitos Básicos

Definição 5.2.1 (Teia) *Uma teia* $\boldsymbol{A} \equiv (A, \approx_A)$ *é um par formado por um conjunto* A *sobre o qual é definido uma relação reflexiva e simétrica, denotada por* $\approx_A$*, denominada relação de coerência em* A*.*

Definição 5.2.2 (Conjunto Coerente) *Um subconjunto* x *de uma teia* $\mathbf{A}$ *é coerente se e somente se para todo* $\alpha, \beta \in x, \alpha \approx_A \beta$*. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de* $\mathbf{A}$ *é denotado por* $Coh(\mathbf{A})$*. Assim tem-se:*

$$Coh(\mathbf{A}) = Coh(A, \approx_A) = \{x \subseteq A | \forall\ \alpha, \beta \in x, \alpha \approx_A \beta\}.$$

O conjunto dos subconjuntos coerentes finitos de $\mathbf{A}$ é denotado $FinCoh(\mathbf{A})$.

Definição 5.2.3 (Espaço Coerente) *Um espaço coerente* $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ *é a coleção de subconjuntos coerentes da teia* **A** *parcialmente ordenados pela inclusão.*

Interpretação Computacional [TRO92]

Os elementos de uma teia são denominados de unidades ou tokens. Os tokens de uma teia representam bits de informação sobre entidades de um universo, não especificado. Coerência entre tokens significa que estas unidades podem ser vistas como pedaços de informação com relação à mesma entidade. Assim, um conjunto coerente é uma quantidade coerente de informação sobre uma mesma entidade. A ordem de informação é dada pela relação de inclusão: $x \subseteq y$ significa que y representa no mínimo tanta informação quanto x.

Proposição 5.2.1 (Principais Propriedades de um Espaço Coerente) *Para qualquer espaço coerente* $\mathcal{A}$*:*

(i) $\mathcal{A}$ *contém todos os conjuntos unitários* $\{\alpha\} \subseteq \mathcal{A}$*;*

(ii) $a \in \mathcal{A}, b \subseteq a \Rightarrow b \in \mathcal{A}$ *(propriedade do fecho inferior, que garante que qualquer subconjunto de um conjunto coerente é também um conjunto coerente);*

(iii) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \forall\ c, c' \in \mathcal{B}, (c \cup c') \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup\mathcal{B} \in \mathcal{A}$ *(completeza binária, onde para qualquer subfamília de conjuntos coerentes, se todo conjunto formado por dois conjuntos coerentes quaisquer, tem como supremo um conjunto coerente, então o supremo de toda subfamília é também um conjunto coerente) ;*

(iv) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *(isto é, os espaços coerentes não são vazios);*

(v) $\mathcal{A}$ *é fechado em relação a uniões dirigidas (isto é, dirigida com relação à* $\subseteq$*), ou seja:*

$$a_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup^{\uparrow}\{a_i | i \in I\} \in \mathcal{A};$$

ou se X *é dirigido com relação a* $\subseteq$ *em* $\mathcal{A}$*, então* $\cup X \in \mathcal{A}$*;*

(vi) $\mathcal{A}$ *é fechado em relação as interseções arbitrárias, isto é, para todo* $i \in I$*,* I *arbitrário,*

$$a_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap\{a_i | i \in I\} \in \mathcal{A}.$$

Proposição 5.2.2 (Conjuntos Coerentes) *Se* $X \subseteq P(A)$ *e satisfaz as condições de (i) a (iii) de 5.2.1, então existe uma relação reflexiva e simétrica* $\approx$ *sobre* A *tal que* $X = Coh(A, \approx)$*.*

Observações:

- Conforme [GIR89], para mostrar que $\mathcal{A}$ é um espaço coerente, é suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ é uma coleção de conjuntos que satisfaz as condições (ii), (iii) e (iv) da proposição 5.2.1;
- A partir de um espaço coerente $\mathcal{A}$ é possível recuperar sua teia por,

$$\mathbf{A} \equiv |\mathcal{A}| = \cup\mathcal{A} = \{\alpha | \{\alpha\} \in \mathcal{A}\}.$$

A relação de coerência $\approx_{|\mathcal{A}|}$ entre tokens é definida por,

$$\alpha \approx_{|\mathcal{A}|} \alpha' \Leftrightarrow \{\alpha, \alpha'\} \in \mathcal{A},$$

que é uma relação reflexiva e simétrica. Então, a teia de $\mathcal{A}$ é dada por,

$$\mathbf{A} \equiv (|\mathcal{A}|, \approx_{|\mathcal{A}|}).$$

Reciprocamente, da teia pode-se recuperar o espaço coerente por,

$$a \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a \subseteq |\mathcal{A}| \wedge \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in a, \alpha_1 \approx_{|\mathcal{A}|} \alpha_2.$$

Exemplo 1:

Os domínios planos, $\mathcal{A} = (\{\emptyset\} \cup \{\{a\} | a \in A\}, \subseteq)$ são espaços coerentes. Então, os números inteiros e os booleanos são espaços coerentes.

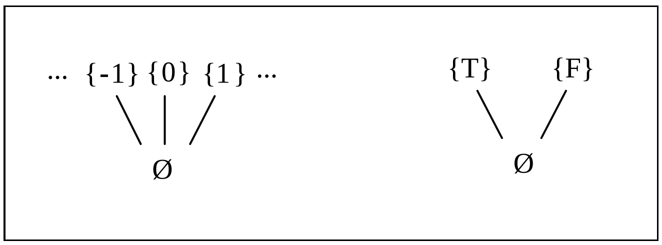

FIGURA 5.1: Espaços Coerentes Planos

Exemplo 2:

São também espaços coerentes:

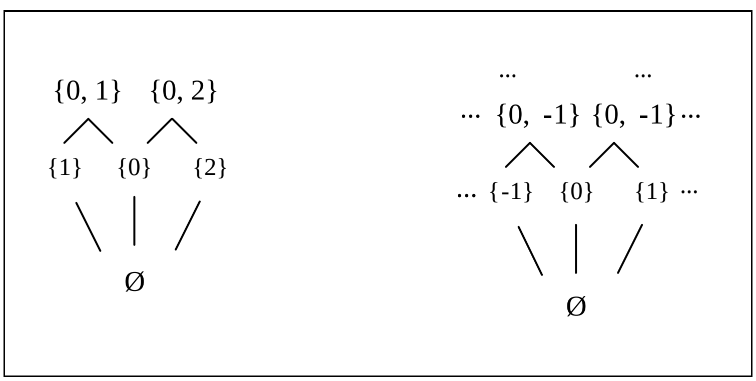

FIGURA 5.2: Exemplos de Espaços Coerentes

O segundo é o espaço coerente das partes dos Inteiros, ou seja, $P(Z) = (\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, ..., \{0,1\}, \{0,-1\}, ...\}, \subseteq)$.

Exemplo 3: Não são espaços coerentes:

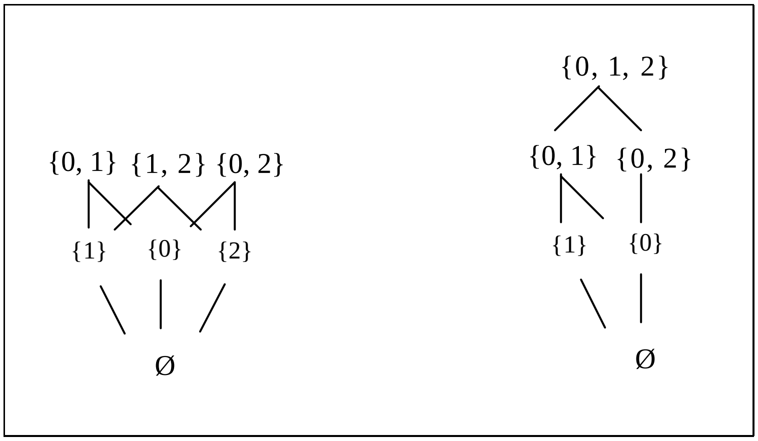

FIGURA 5.3: Exemplos de Espaços Não Coerentes

O primeiro não cumpre a propriedade da completeza binária enquanto o segundo não cumpre a propriedade do fecho inferior.

Definição 5.2.4 (Objeto Total) *Um ponto ou objeto total x de um espaço coerente $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ é um objeto maximal de $\mathcal{A}$, ou seja, x é um subconjunto coerente da teia* **A**, *tal que sempre que existe $\beta \in A$ com $\beta \approx_A \alpha$, para todo $\alpha \in x$, então $\beta \in x$. A família dos objetos totais de $\mathcal{A}$ é denotado por $tot(\mathcal{A})$.*

Então, se x é um objeto total, quaisquer dois elementos de x estão relacionados por $\approx$ e não existe nenhum outro elemento de A que se relacione com todos os elementos de x e que não pertença a x.

Definição 5.2.5 (Objeto Parcial) *Um ponto ou objeto parcial x de um espaço coerente $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ é qualquer subconjunto coerente da teia* **A**. *Os objetos totais são casos particulares dos objetos parciais. O conjunto dos objetos finitos é denotado por $\mathcal{A}_{fin}$.*

Definição 5.2.6 (Produto Direto) *Sejam $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ espaços coerentes. O produto direto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A} \prod \mathcal{B}$, é o espaço coerente $\mathcal{A} \prod \mathcal{B} = (Coh(A \uplus B, \approx), \subseteq)$, onde:*

$A \uplus B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$,

$(0, \alpha) \approx (0, \alpha')$ *se e somente se* $\alpha \approx_A \alpha'$,

$(1, \beta) \approx (1, \beta')$ *se e somente se* $\beta \approx_B \beta'$,

$(0, \alpha) \approx (1, \beta)$ *se e somente se* $\alpha \in A, \beta \in B$.

Duas funções projeções, $\pi_1 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e $\pi_2 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, são associadas ao produto direto, definidas respectivamente por:

$x \mapsto \{\alpha | (0, \alpha) \in x\}$,

$x \mapsto \{\beta | (1, \beta) \in x\}$.

Observação:

O produto cartesiano de espaços coerentes não constitui um espaço coerente. Entretanto, a família dos conjuntos coerentes do produto direto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $Coh(\mathcal{A}\prod\mathcal{B})$, e o produto cartesiano da família dos conjuntos coerentes de $\mathcal{A}$, $Coh(\mathcal{A})$, pela família dos conjuntos coerentes de $\mathcal{B}$,$Coh(\mathcal{B})$, são isomorfos, ou seja,

$$Coh(\mathcal{A}\prod\mathcal{B}) \cong Coh(\mathcal{A}) \times Coh(\mathcal{B}).$$

Assim, qualquer $x \in Coh(\mathcal{A}\prod\mathcal{B})$ pode ser unicamente decomposto como $(\{0\} \times a) \cup (\{1\} \times b)$, e representado simplesmente pelo par (a, b), com $a \in Coh(\mathcal{A})$ e $b \in Coh(\mathcal{B})$.

Definição 5.2.7 (Produto Tensorial) *O produto tensorial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é o espaço coerente $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (Coh(A \times B, \approx), \subseteq)$, onde $\times$ é o produto cartesiano e $(\alpha_1, \beta_1) \approx (\alpha_2, \beta_2)$, se e somente se, $\alpha_1 \approx_A \alpha_2$ e $\beta_1 \approx_B \beta_2$.*

Definição 5.2.8 (Exponencial) *O exponencial de $\mathcal{A}$ é o espaço coerente $!\mathcal{A} = (Coh(FinCoh(\mathbf{A}), \approx), \subseteq)$, onde $a \approx b$ se e somente se $a \cup b \in FinCoh(\mathbf{A})$, sendo $FinCoh(\mathbf{A})$ a família dos subconjuntos coerentes finitos da teia $\mathbf{A} \equiv (A, \approx_A)$.*

Uma Interpretação Computacional [SEL 96]

Intuitivamente, dado um espaço coerente $\mathcal{A}$, os objetos do espaço coerente $!\mathcal{A}$ são conjuntos que representam os 'passos de computação' para computar os objetos de $\mathcal{A}$. Ou melhor, considerando $!\mathcal{A}$ como uma estrutura com a inclusão como ordem, é possível interpretá-la como o conjunto constituído com todas as estratégias de computação de $\mathcal{A}$.

5.3 Funções em Espaços Coerentes

Sejam $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ espaços coerentes. Uma função entre espaços coerentes é uma função entre os conjuntos coerentes das respectivas teias.

Definição 5.3.1 (Função Monotônica) *Uma função $F : \mathcal{A} \to B$ é monotônica, se e somente se, para todo $a, a' \in \mathcal{A}$ tem-se que*

$$a \subseteq a' \Rightarrow F(a) \subseteq F(a').$$

Interpretação Computacional

Uma função monotônica é aquela que preserva a relação de aproximação, ou seja, se é fornecida mais informação de entrada em um processo que calcula F (a' ao invés de a) então se obtém maior retorno final.

Interpretação Categorial

Considerando os conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como categorias, cujos morfismos são inclusões, então a monotonicidade estabelece que a função F constitui um funtor.

Definição 5.3.2 (Função Contínua) *Uma função $F : \mathcal{A} \rightarrow B$ é contínua, se e somente se, para todo subconjunto dirigido com relação à inclusão X de $\mathcal{A}$, então $F(X)$ é dirigido e,*

$$F(\cup X) = \cup\{F(b)|b \in X\}, \textit{ isto é, } F(\cup X) = \cup F(X).$$

De maneira análoga, diz-se que uma função é contínua se preserva as uniões dirigidas com relação à inclusão, ou seja,

$$F(\cup^{\uparrow}_{i \in I}(a_i)) = \cup^{\uparrow}_{i \in I} F(a_i).$$

Ou ainda, F é contínua, se e somente se,

$$F(a) = \cup^{\uparrow}\{F(a_0)|a_0 \subseteq a, a_0 finito\}.$$

<u>Interpretação Computacional</u>

Uma função contínua é aquela que preserva o supremo de conjuntos dirigidos. Todo conjunto coerente a é a união de suas aproximações finitas e o conjunto das aproximações de a é dirigido. Uma função contínua é aquela que preserva uniões dirigidas de partes finitas de objetos.

<u>Interpretação Categorial</u>

Considerando os conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como categorias, cujos morfismos são inclusões, então a continuidade estabelece que a função F preserva colimites dirigidos.

Definição 5.3.3 (Função Estável) *Uma função $F : \mathcal{A} \rightarrow B$ é estável, se e somente se, é contínua e satisfaz a condição da estabilidade, ou seja,*

$$\forall\, a_1, a_2 \in \mathcal{A}, a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow F(a_1 \cap a_2) = F(a_1) \cap F(a_2)$$

<u>Interpretação Computacional</u>

Uma função estável é aquela que preserva a transformação das partes que são comuns a objetos coerentes entre si, frente à transformação dos próprios objetos.

<u>Interpretação Categorial</u>

Considerando os conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como categorias, cujos morfismos são inclusões, então a estabilidade estabelece que a função F preserva 'pullbacks'.

Definição 5.3.4 (Função Linear) *Uma função $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é linear, se e somente se, é estável e satisfaz a condição da linearidade, ou seja,*

$$\textit{se } X \subseteq \mathcal{A}, \textit{ e } \forall\, b, c \in X \Rightarrow b \cup c \in \mathcal{A}, \textit{ então } F(\cup X) = \cup\{F(b)|b \in X\}$$

Interpretação Computacional

Uma função linear é aquela que comuta com uniões arbitrárias. Isto é, uma transformação de objetos é linear se pode ser realizada como uma transformação de partes de objetos.

Interpretação Categorial

Considerando os conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como categorias, cujos morfismos são inclusões, então a linearidade estabelece que a função F preserva colimites arbitrários.

Observação:

- Se $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma função contínua, estável ou linear, então F é monotônica;
- Continuidade e estabilidade, individualmente, implicam em monotonicidade. Estabilidade não implica em continuidade e linearidade não implica em estabilidade, embora toda função estável seja contínua e toda função linear seja estável, por definição.

Proposição 5.3.1 *Uma função $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é:*

(i) Contínua, se e somente se, sempre que $\beta \in F(a)$ existe um subconjunto finito $a_0 \subseteq a$ tal que $\beta \in F(a_0)$;

(ii) Estável, se e somente se, sempre que $\beta \in F(a)$ existe um menor subconjunto finito $a_0 \in a$ tal que $\beta \in F(a_0)$;

(iii) Linear, se e somente se, sempre que $\beta \in F(a)$ existe um $\alpha \in a$, tal que $\beta \in F(\{\alpha\})$;

Interpretação Computacional

Em uma transformação contínua de um objeto, todo átomo do resultado pode ser obtido pela transformação de uma parte finita do objeto.

Em uma transformação estável de um objeto, todo átomo do resultado pode ser obtido pela transformação de uma parte finita minimal (ou seja, menor que todas as outras possíveis) do objeto.

Em uma transformação linear de um objeto, todo átomo do resultado pode ser obtido pela transformação de um átomo do objeto.

5.4 O Espaço de Funções

A família das funções estáveis, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, de um espaço coerente $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ assim como a família das funções lineares não constituem um espaço coerente [TRO 92]. Então, buscou-se uma representação particular onde o conjunto de funções estáveis (respecivamente lineares) é representado pelo conjunto dos traços destas funções (respectivamente pelo conjunto dos traços lineares de funções lineares), a qual constitue-se em um espaço coerente.

5.4.1 O Espaço de Funções Contínuas

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ espaços coerentes e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma função contínua.

Definição 5.4.1 (Grafo de uma Função Contínua) *O grafo de uma função contínua $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$ dado por*

$$gr(F) := \{(a, \beta)|a \in \mathcal{A} \wedge \beta \in F(a)\}.$$

Proposição 5.4.1 (Propriedades dos Elementos do Grafo) *Seja $gr(F)$ o grafo de $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Então:*

(i) $(a, \beta) \in gr(F), a \subseteq a' \Rightarrow (a', \beta) \in gr(F)$;

(ii) $(a, \beta), (a, \beta') \in gr(F) \Rightarrow \beta \approx \beta' em \mathcal{B}$.

Proposição 5.4.2 (Função Contínua Determinada por um Conjunto)
Todo conjunto $X \subseteq \mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$ tal que valem,

(i) $(a, \beta) \in X, a \subseteq a' \Rightarrow (a', \beta) \in X$;

(ii) $(a, \beta), (a, \beta') \in X \Rightarrow \beta \approx \beta' em \mathcal{B}$.

determina uma função contínua $F_X : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por

$$F_X(a) := \{\beta \mid \exists\, a_0 \subseteq a, (a_0, \beta) \in X\}.$$

Corolário 5.4.1 (Função Contínua Determinada pelo Grafo) *O grafo $gr(F)$ determina unicamente uma função contínua $F_{gr} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dada por*

$$F_{gr}(a) := \{\beta \mid \exists\, a_0 \subseteq a, (a_0, \beta) \in gr(F)\}.$$

5.4.2 O Espaço de Funções Estáveis

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ espaços coerentes e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma função estável.

Definição 5.4.2 (Traço de uma Função Estável) *O traço de uma função estável $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$ dado por*

$$tr(F) := \{(a, \beta)|a \in \mathcal{A} \text{ é o menor conjunto coerente tal que } \beta \in F(a)\}.$$

Ou seja, a é o ponto minimal para F assumir o valor β.

Proposição 5.4.3 (Propriedades dos Elementos do Traço) *Seja $tr(F)$ o traço de $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Então:*

(i) $(a_1, \beta_1), (a_2, \beta_2) \in tr(F), a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ *em* $\mathcal{B}$;

(ii) $(a_1, \beta_1), (a_2, \beta_2) \in tr(F), a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$ *em* $\mathcal{B}$;

Proposição 5.4.4 (Função Estável Determinada por um Conjunto)
Todo conjunto $X \subseteq \mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$ tal que valem,

(i) $(a_1, \beta_1), (a_2, \beta_2) \in X, a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ *em* $\mathcal{B}$;

(ii) $(a_1, \beta_1), (a_2, \beta_2) \in X, a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$ *em* $\mathcal{B}$*;*

determina uma função estável $F_{st}(X) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *por* $F_{st}(X)(a) = \{\beta \mid \exists\, a_0 \subseteq a, (a_0, \beta) \in X\}$.

Corolário 5.4.2 (Função Estável Determinada pelo Traço) *O traço* $tr(F)$ *determina unicamente uma função estável* $F_{st} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *dada por*

$$F_{st}(a) := \{\beta \mid \exists\, a_0 \subseteq a, (a_0, \beta) \in tr(F)\}.$$

Proposição 5.4.5 (Traços das Funções Estáveis como Espaço Coerente) *Seja* $\mathcal{A}_{fin}$ *o conjunto dos pontos finitos de* $\mathcal{A}$ *. Seja* $\mathcal{S}$ *o espaço coerente cuja teia é formada pelos átomos de* $|\mathcal{S}| = \mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$*, com a relação de coerência* $\approx_{st}$*, definida por* $(a_1, \beta_1) \approx_{st} (a_2, \beta_2)$ *se e somente se:*

(i) $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ *em* $\mathcal{B}$*;*

(ii) $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$ *em* $\mathcal{B}$*;*

Então $\mathcal{S}$ *é o espaço coerente dos traços das funções estáveis de* $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$*, ordenados pela inclusão, denotado por* $[\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}]$*, isto é,*

$$[\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}] \equiv ((Coh(\mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|), \approx_{st}), \subseteq).$$

Prova: [GIR89, p.64]

Proposição 5.4.6 (Bijeção entre Funções Estáveis e Traço) *A função que associa cada função estável ao seu traço,* $F \mapsto tr(F)$*, é bijetiva.*

Definição 5.4.3 (Ordem de Berry) *Sejam* F *e* G *funções estáveis de* $\mathcal{A}$ *em* $\mathcal{B}$*. Então a ordem de Berry* $\leq_B$ *é dada por,* $F \leq_B G$*, se e somente se,*

$$\forall\, a', a \in \mathcal{A}, a' \subseteq a \Rightarrow F(a') = F(a) \cap G(a').$$

Definição 5.4.4 (Espaço de Funções Estáveis) *O espaço de funções estáveis de* $\mathcal{A}$ *em* $\mathcal{B}$*, denotado por* $(\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B})$*, é constituído pelo conjunto das funções estáveis de* $\mathcal{A}$ *em* $\mathcal{B}$*, ordenado pela ordem de Berry, isto é,*

$$(\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}) = (\{F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} | F \text{ é estável }\}, \leq_B).$$

Proposição 5.4.7 (Correspondência entre a Ordem de Inclusão e a Ordem de Berry)

A Ordem de Inclusão em $[\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}]$ *corresponde a Ordem de Berry em* $(\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B})$*, isto é,* $F \leq_B G$*, se e somente se,* $tr(F) \subseteq tr(G)$*.*

Prova: [GIR89, p.65]

Corolário 5.4.3 (O Espaço dos Traços das Funções Estáveis representa o Espaço de Funções Estáveis)

O conjunto $\{F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} | F \text{ é estável }\}$ *das funções estáveis de* $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$*, é ordem-isomorfo ao conjunto* $\{tr(F) | F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ é estável }\}$*, ou seja,*

$$(\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}) \equiv [\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}].$$

5.4.3 O Espaço de Funções Lineares

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ espaços coerentes e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma função linear.

Definição 5.4.5 (Traço Linear de uma Função Linear) *O traço linear de uma função linear $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um subconjunto de $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$ dado por*

$$ltr(F) := \{(\alpha, \beta) | \beta \in F(\{\alpha\})\}.$$

Proposição 5.4.8 (Propriedades dos Elementos do Traço Linear) *Seja $ltr(F)$ o traço de $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Então:*

(i) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in ltr(F), \alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$;

(ii) $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta) \in ltr(F), \alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Proposição 5.4.9 (Função Linear Determinada por um Conjunto) *Todo conjunto $X \subseteq |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$ tal que valem,*

(i) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in X, \alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$;

(ii) $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta) \in X, \alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

determina uma função linear $F_{lin}(X) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por $F_{lin}(X)(a) = \{\beta \mid \exists\ \alpha \in a \text{ tal que } (\alpha, \beta) \in X\}$.

Corolário 5.4.4 (Função Linear Determinada pelo Traço Linear) *O traço $ltr(F)$ determina unicamente uma função linear $F_{lin(X)} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dada por*

$$F_{lin(X)}(a) := \{\beta | \ \exists\ \alpha \in a \text{ tal que } (\alpha, \beta) \in ltr(F)\}.$$

Proposição 5.4.10 (Conjunto dos Traços Lineares das Funções Lineares é um Espaço Coerente) *Seja $\mathcal{L}$ o espaço coerente cuja teia é formada pelos átomos de $|\mathcal{L}| = |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$, com a relação de coerência $\approx_{lin}$, definida por $(\alpha_1, \beta_1) \approx_{lin} (\alpha_2, \beta_2)$ se e somente se:*

(i) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in X, \alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$;

(ii) $(\alpha_1, \beta), (\alpha 2, \beta) \in X, \alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Então $\mathcal{L}$ é o espaço coerente dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, ordenados pela inclusão, denotado por $[\mathcal{A} \to^{lin} \mathcal{B}]$, isto é,

$$[\mathcal{A} \to^{lin} \mathcal{B}] \equiv ((Coh(|\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|), \approx_{lin}), \subseteq).$$

Proposição 5.4.11 (Bijeção entre Funções Lineares e Traços Lineares) *A função que associa cada função linear ao seu traço linear, $F \mapsto ltr(F)$, é bijetiva.*

Definição 5.4.6 (Espaço de Funções Lineares) *O espaço de funções lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, denotado por $(\mathcal{A} \to^{lin} \mathcal{B})$, é constituído pelo conjunto das funções lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, ordenado pela ordem de Berry, restrita às funções lineares, isto é,*

$$(\mathcal{A} \to^{lin} \mathcal{B}) = (\{F : \mathcal{A} \to \mathcal{B} | F \text{ é linear}\}, \leq_B).$$

Proposição 5.4.12 (Correspondência entre a Ordem de Inclusão e a Ordem de Berry) *A Ordem de Inclusão em* $[\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ *corresponde a Ordem de Berry em* $(\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B})$*, isto é,* $F \leq_B G$*, se e somente se,* $ltr(F) \subseteq ltr(G)$*.*

Corolário 5.4.5 (O Espaço Coerente dos Traços das Funções Lineares representa o Espaço de Funções Lineares)

O conjunto $\{F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} |\ F \text{ é linear } \}$ *das funções lineares de* $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$*, é ordem-isomorfo ao conjunto* $\{ltr(F) | F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ é linear } \}$ *dos traços lineares de tais funções, ou seja,*

$$(\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}) \cong [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}].$$

6 Principais Construções nas Categorias de Espaços Coerentes

Neste capítulo são apresentadas categorias que têm como objetos espaços coerentes: categoria **COSP** (cujos morfismos são as funções contínuas), categoria **STAB** (cujos morfismos são as funções estáveis) e categoria **LIN** (cujos morfismos são as funções lineares). Estas categorias são estudadas detalhadamente no que concerne a suas estruturas serem, ou não, Cartesianas fechadas ou monoidal simétrica fechada.

6.1 Introdução

Entre as categorias de espaços coerentes com funções contínuas, **COSP** não é Cartesiana fechada [TRO 92]. Entretanto, a categoria **STAB** é especial no sentido computacional por ser Cartesiana fechada. Isto é, em **STAB** para cada execução de um programa a partir de dados de entrada existe uma função semântica que o associa ao seu significado matemático (semântica denotacional) e, além disso, é possível saber a ação de cada programa sobre cada dado de entrada (items 3.1.1 e 3.1.3). A subcategoria **LIN** de **STAB** não é Cartesiana fechada, mas **LIN** é monoidal (simétrica) fechada garantindo da mesma maneira significado para processos computacionais (item 3.4.4).

6.2 Categorias COSP, STAB e LIN

Lema 6.2.1 (Funções Contínuas) *Sejam* $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$, $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ *e* $\mathcal{C} = (Coh(C, \approx_C), \subseteq)$ *espaços coerentes. Então:*

(i) Toda função constante de $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$ *é contínua;*

(ii) A função identidade $id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *dada por* $id(x) = x$ *é contínua;*

(iii) Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, *e* $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *são contínuas, então a composta* $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *é contínua.*

Definição 6.2.1 (Categoria COSP)

1. Ob_{COSP} *é a coleção de todos os espaços coerentes.*

2. Mor_{COSP} *é a coleção de todas as funções contínuas entre espaços coerentes.*

3. $\partial_0, \partial_1 : Mor_{COSP} \to Ob_{COSP}$ *são tais que para qualquer morfismo* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, *tem-se que* $\partial_0(f) = \mathcal{A}$ *e* $\partial_1(f) = \mathcal{B}$.

4. $\circ : (Mor_{COSP})^2 \to Mor_{COSP}$ *é a operação parcial de composição de setas que é definida como segue. Sejam* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *e* $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *contínuas, então tem-se* $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, *contínua pelo lema 6.2.1. Além disso, sabe-se que a composição de funções é associativa, isto é, para quaisquer* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *e* $h : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *contínuas tem-se:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

5. $\iota : Ob_{COSP} \rightarrow Mor_{COSP}$ *é tal que cada objeto* $\mathcal{A}$ *é associado ao morfismo identidade* $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. *Pelo lema 6.2.1* $id_{\mathcal{A}}$ *é um morfismo da categoria. A propriedade da identidade é satisfeita, pois para qualquer função contínua* $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ *tem-se:*

$$f \circ id_{\mathcal{A}} = f = id_{\mathcal{A}} \circ f.$$

Lema 6.2.2 (Funções Estáveis) *Sejam* $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A),\ \subseteq), \mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ *e* $\mathcal{C} = (Coh(C, \approx_C), \subseteq)$ *espaços coerentes. Então:*

(i) Toda função constante de $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$ *é estável;*

(ii) A função identidade $id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ *dada por* $id(x) = x$ *é estável;*

(iii) Se $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, *e* $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ *são estáveis, então a composta* $g \circ f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ *é estável.*

Definição 6.2.2 (Categoria STAB)

1. Ob_{STAB} *é a coleção de todos os espaços coerentes.*

2. Mor_{STAB} *é a coleção de todas as funções estáveis entre espaços coerentes.*

3. $\partial_0, \partial_1 : Mor_{STAB} \rightarrow Ob_{STAB}$ *são tais que para qualquer morfismo* $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, *tem-se que* $\partial_0(f) = \mathcal{A}$ *e* $\partial_1(f) = \mathcal{B}$.

4. $\circ : (Mor_{STAB})^2 \rightarrow Mor_{STAB}$ *é a operação parcial de composição de setas que é definida como segue. Sejam* $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *e* $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ *estáveis, então tem-se* $g \circ f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, *estável pelo lema 6.2.2. Além disso, sabe-se que a composição de funções é associativa, isto é, para quaisquer* $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ *e* $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ *estáveis tem-se:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

5. $\iota : Ob_{STAB} \rightarrow Mor_{STAB}$ *é tal que cada objeto* $\mathcal{A}$ *é associado ao morfismo identidade* $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. *Pelo lema 6.2.2* $id_{\mathcal{A}}$ *é um morfismo da categoria. A propriedade da identidade é satisfeita, pois para qualquer função estável* $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ *tem-se:*

$$f \circ id_{\mathcal{A}} = f = id_{\mathcal{A}} \circ f.$$

Lema 6.2.3 (Funções Lineares) *Sejam* $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A),\ \subseteq), \mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ *e* $\mathcal{C} = (Coh(C, \approx_C), \subseteq)$ *espaços coerentes. Então:*

(i) Toda função constante de $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$ *é linear;*

(ii) A função identidade $id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ *dada por* $id(x) = x$ *é linear;*

(iii) Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ são lineares, então a composta $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é linear.

Definição 6.2.3 (Categoria LIN)

1. *Ob_{LIN} é a coleção de todos os espaços coerentes.*

2. *Mor_{LIN} é a coleção de todas as funções lineares entre espaços coerentes.*

3. *$\partial_0, \partial_1 : Mor_{LIN} \to Ob_{LIN}$ são tais que para qualquer morfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tem-se que $\partial_0(f) = \mathcal{A}$ e $\partial_1(f) = \mathcal{B}$.*

4. *$\circ : (Mor_{LIN})^2 \to Mor_{LIN}$ é a operação parcial de composição de setas que é definida como segue. Sejam $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ lineares, então tem-se $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, linear pelo lema 6.2.3. Além disso, sabe-se que a composição de funções é associativa, isto é, para quaisquer $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $h : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lineares tem-se:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

5. *$\iota : Ob_{LIN} \to Mor_{LIN}$ é tal que cada objeto $\mathcal{A}$ é associado ao morfismo identidade $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Pelo lema 6.2.3 $id_{\mathcal{A}}$ é um morfismo da categoria. A propriedade da identidade é satisfeita, pois para qualquer função linear $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tem-se:*

$$f \circ id_{\mathcal{A}} = f = id_{\mathcal{A}} \circ f.$$

6.3 Objeto Terminal em COSP, STAB e LIN

O objeto terminal em **COSP**, **STAB** e **LIN** é $\underline{0} = \underline{\emptyset} = (Coh(\emptyset, =), \subseteq)$, ou seja, é o espaço coerente sem átomos $\underline{\emptyset}$, com relação a coerência trivial '='. A família dos conjuntos coerentes de $\underline{0}$ é dada por $Coh(0) = \{\emptyset\}$, logo, $\emptyset$ é o único objeto em $\underline{0}$. De fato, $\underline{0}$ é objeto terminal da categoria pois, para todo espaço coerente $\mathcal{A}$ existe um único morfismo de $\mathcal{A}$ para $\underline{0}$. Ou melhor, para todo espaço coerente $\mathcal{A}$ existe uma única função de $Coh(\mathcal{A})$ para $Coh(0) = \{\emptyset\}$, a qual mapeia todo conjunto coerente de $\mathcal{A}$ para o único conjunto coerente de $\underline{0}$. E, além disso, essa é a única função contínua de $\mathcal{A}$ para $\underline{0}$. É também a única função estável e linear.

Interpretação Computacional

Intuitivamente, o objeto terminal é capaz de representar a informação que é contida em todos os demais objetos.

6.4 Produto Categorial em COSP, STAB e LIN

Teorema 6.4.1 (Projeções Associadas ao Produto Direto) *$\pi_0 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e $\pi_1 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ são contínuas, estáveis e lineares.*

Prova: [DIM 96].

Teorema 6.4.2 (Composição Múltipla de Funções Contínuas (Estáveis, Lineares)) *Seja* $g : \mathcal{D}_0 \prod \mathcal{D}_1 \to \mathcal{E}$ *uma função contínua (estável, linear). Se* $h_0 : \mathcal{F} \to \mathcal{D}_0$ *e* $h_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{D}_1$*, são contínuas (estáveis, lineares), então a função* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$*, definida por* $f(x) = g((\{0\} \times h_0(x)) \cup (\{1\} \times h_1(x)))$*, é contínua (estável, linear).*

Prova: [DIM 96].

Teorema 6.4.3 (Unicidade da Função Produto) *Sejam* $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ *e* $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ *espaços coerentes e* $\mathcal{A} \prod \mathcal{B} = (Coh(A \biguplus B, \approx), \subseteq)$ *o produto direto de* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$*, com projeções,* $\pi_0 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *e* $\pi_1 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{B}$*, definidas respectivamente por*

$$x \mapsto \{\alpha | (0, \alpha) \in x\}$$

$$x \mapsto \{\beta | (1, \beta) \in x\}$$

Sejam $f : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *e* $g : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *funções contínuas (estáveis, lineares). Então existe uma única função contínua (estável, linear),* $< f, g >: \mathcal{C} \to \mathcal{A} \prod \mathcal{B}$*, tal que o diagrama a seguir comuta, isto é, tal que* $\pi_0 \circ < f, g > = f$ *e* $\pi_1 \circ < f, g > = g$.

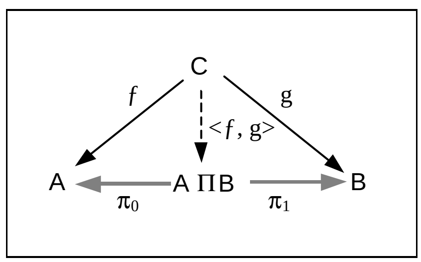

FIGURA 6.1: Unicidade da Função Produto

Prova: De fato, se $a \in C$, então existe a função de pareamento $< -, - >: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, definida por

$$< f, g > (a) = \{(0, \alpha) | \alpha \in f(a)\} \cup \{(1, \beta) | \beta \in g(a)\}.$$

Como $< f, g >$ é completamente definida por f e g, então é única. Além disso, o diagrama comuta, pois

$$\begin{aligned}
(\pi_0 \circ < f, g >)(a) &= \pi_0(< f, g > (a)) \\
&= \pi_0\{(0, \alpha) | \alpha \in f(a)\} \cup \{(1, \beta) | \beta \in g(a)\} \\
&= \{\alpha | (0, \alpha) \in (< f, g > (a))\} \\
&= \{\alpha | \alpha \in f(a)\} \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ < f, g >)(a) &= \pi_1(< f, g > (a))\\ &= \pi_1\{(0,\alpha)|\alpha \in f(a)\} \cup \{(1,\beta)|\beta \in g(a)\}\\ &= \{\beta|(0,\beta) \in (< f, g > (a))\}\\ &= \{\beta|\beta \in g(a)\}\\ &= g(a).\end{aligned}$$

Além disso, pelo teorema anterior, $< f, g >: \mathcal{C} \to \mathcal{A} \prod \mathcal{B}$ é contínua (estável, linear).

Corolário 6.4.1 (Produto Categorial) *O produto direto de* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$*, dado por* $\mathcal{A} \prod \mathcal{B} = (Coh(A \biguplus B, \approx), \subseteq)$*, é o produto categorial de* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *nas categorias* ***COSP****,* ***STAB*** *e* ***LIN*** *com projeções* $\pi_0 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *e* $\pi_1 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \to \mathcal{B}$*, definidas respectivamente por*

$x \mapsto \{\alpha|(0,\alpha) \in x\}$

$x \mapsto \{\beta|(1,\beta) \in x\}.$

Interpretação Computacional

Intuitivamente, o produto possui a informação mínima necessária para conter através de seus morfismos, as informações contidas nos dois objetos dados. Além disso, qualquer outro que contenha, através de morfismos, informações sobre esses dois objetos, está contido, através de morfismos, no objeto produto.

6.5 STAB é Categoria Cartesiana Fechada

A categoria **STAB** é Cartesiana fechada pois é uma categoria Cartesiana com exponenciação. Esta propriedade permite que seja descrita a noção de computação sobre elementos, como será detalhado a seguir.

6.5.1 Categoria Cartesiana

STAB é uma categoria Cartesiana pois possui objeto terminal e todos os produtos binários.

6.5.2 Categoria com Exponenciação

STAB é uma categoria com exponenciação pois possui produtos binários (descrito no item anterior) e, para quaisquer par de objetos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, existe um objeto exponencial, uma seta de aplicação (eval) e uma seta de denotação (Curry), que satisfazem a Propriedade Universal da Exponenciação, detalhados a seguir.

Observação: Espaço de Funções Estáveis e Lineares

Como para espaços coerentes a família das funções estáveis assim como a família das funções lineares não constituem um espaço coerente, então o conjunto dos morfismos em **STAB** (**LIN**) é representado pelo conjunto dos traços destas funções estáveis (lineares), que constituem um espaço coerente, conforme os corolários 5.4.3 e 5.4.5.

Definição 6.5.1 (Espaço Funcional, Seta de Aplicação) *O espaço funcional de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, é o espaço coerente $[\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}]$ dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ introduzido no corolário 5.4.5, ou seja,*

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \equiv [\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}].$$

A seta de aplicação (função de avaliação) associada $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é definida por
$eval(X, a) = F_{st(X)}(a)$, com $F_{st(X)}$ definida em 5.4.4.

Observação:

A ordem de Berry diz que a aplicação preserva o *pullback* da figura abaixo, para $a \subseteq a'$ em $(\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}) \prod \mathcal{A}$. Portanto, a ordem de Berry é exatamente a relação de ordem que é necessária em $(\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B})$ para tornar a seta de aplicação estável.

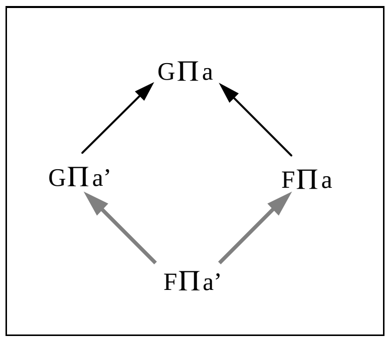

FIGURA 6.2: Pullback Preservado pela Ordem de Berry

Teorema 6.5.1 (A Seta de Aplicação é Estável) *A função $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é estável.*

Prova:
De fato, como $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é definida por $eval(X, a) = F_{st(X)}(a)$, e como $X \in [\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}]$, então $X = Tr(F)$, para $F \in (\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B})$, portanto, pelas proposições 5.4.3 e 5.4.4, $F_{st(X)}$ é uma função estável.

Teorema 6.5.2 (STAB é Categoria Cartesiana Fechada) *O objeto exponencial $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ da categoria **STAB** é o espaço coerente $[\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}]$ dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ introduzido na proposição 5.4.5, ou seja,*

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \equiv [\mathcal{A} \rightarrow^{st} \mathcal{B}].$$

A seta de avaliação (função de avaliação) associada $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é definida por:

$$eval(X, a) = F_{st(X)}(a),$$

com $F_{st(X)}$ definida em 5.4.4. Além disso, para toda função estável $F : \mathcal{C} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, a seta de denotação $Curry(F)$ é definida por:

$$Curry(F)(c) = \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c \prod a)\}.$$

Prova:

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ espaços coerentes e seja $F : \mathcal{C} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ uma função estável. Então, existe uma única função estável $Curry(F) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ tal que o diagrama a seguir comuta.

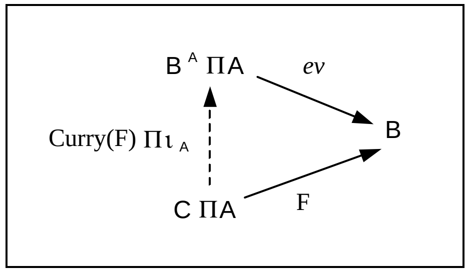

FIGURA 6.3: Exponenciação em **STAB**

A seta de denotação $Curry(F) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ é bem definida pois, para todo $c \in \mathcal{C}$, $Curry(F)(c) = \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c \prod a)\}$. E ainda, se $c_1 \neq c_2 \in \mathcal{C}$ então $F(c_1 \prod a) \neq F(c_2 \prod a)$, já que F é bem definida, e portanto, $Curry(F)(c_1) = \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c_1 \prod a)\} \neq Curry(F)(c_2) = \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c_2 \prod a)\}$. Além disso, $Currry(F)$ é única porque é completamente definida por F.

$Curry(F)$ é uma função estável. De fato, sejam $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ tal que $c_1 \cup c_2 \in \mathcal{C}$. Segue-se que:

$$
\begin{aligned}
Curry(F)(c_1 \cap c_2) &= \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F((c_1 \cap c_2) \textstyle\prod a)\} \\
&= \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c_1 \textstyle\prod a) \cap F(c_2 \textstyle\prod a)\} \text{ (já que } F \text{ é estável)} \\
&= \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c_1 \textstyle\prod a)\} \cap \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c_2 \textstyle\prod a)\} \\
&= Curry(F)(c_1) \cap Curry(F)(c_2).
\end{aligned}
$$

Finalmente, o diagrama comuta. Tem-se que:

$$
\begin{aligned}
eval \circ (Curry(F) \textstyle\prod \iota_{\mathcal{A}})(c \textstyle\prod a) &= eval((Curry(F) \textstyle\prod \iota_{\mathcal{A}})(c \textstyle\prod a)) \\
&= eval(Curry(F)(c) \textstyle\prod \iota_{\mathcal{A}}(a)) \\
&= eval(\{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c \textstyle\prod a)\} \textstyle\prod a) \\
&= F_{st(X)}(a), \text{ onde } X = \{(a, \gamma) | a \in \mathcal{A} \wedge \gamma \in F(c \textstyle\prod a)\} \\
&= \{\beta | \exists\, a_0 \subseteq a, (a_0, \beta) \in X\} \\
&= \{\gamma | \gamma \in F(c \textstyle\prod a)\} \\
&= F(c \textstyle\prod a).
\end{aligned}
$$

Logo, **STAB** é uma categoria Cartesiana fechada.

6.6 LIN Não é Categoria Cartesiana Fechada

A categoria **LIN** não é Cartesiana fechada pois apesar de ser Cartesiana não é uma categoria com exponenciação.

6.6.1 Categoria Cartesiana

LIN é uma categoria Cartesiana pois possui objeto terminal e todos os produtos binários.

6.6.2 LIN Não é Categoria Cartesiana Fechada

Definição 6.6.1 (Espaço Funcional, Seta de Aplicação) *O espaço funcional linear de* $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$*, denotado por* $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$*, é o espaço coerente* $[\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ *dos traços lineares das funções lineares de* $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$ *introduzido em 5.4.10, ou seja,*

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \equiv [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}].$$

A seta de aplicação (função de avaliação) associada $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *é definida por*

$eval(X, a) = F_{lin(X)}(a)$*, com* $F_{lin(X)}$ *definida em 5.4.9.*

Teorema 6.6.1 (A Seta de Aplicação é Linear) *A função* $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *é linear.*

Prova:
De fato, como $eval : \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é definida por $eval(X, a) = F_{lin(X)}(a)$, e como $X \in [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$, então $X = ltr(F)$, para $F \in (\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B})$, portanto, por 5.4.8 e 5.4.9, $F_{lin(X)}$ é uma função linear.

Teorema 6.6.2 (LIN Não é uma Categoria Cartesiana Fechada [TRO 92]) *Sejam* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *espaços coerentes e seja* $F : \mathcal{C} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *uma função linear. Então, não existe uma única função linear* $Curry(F) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ *tal que o diagrama a seguir comuta.*

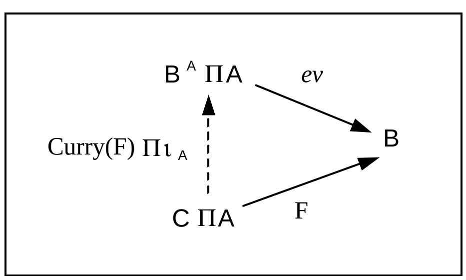

FIGURA 6.4: Exponenciação em **LIN**

6.7 LIN é Categoria Monoidal (Simétrica) Fechada

A categoria **LIN** não é Cartesiana fechada, mas é Monoidal (Simétrica) Fechada. Esta propriedade também permite que seja descrita a noção de computação sobre elementos, como será detalhado a seguir.

6.7.1 Categoria Monoidal Simétrica

LIN é uma Categoria Monoidal Simétrica com relação ao produto tensorial $\otimes$ definido em 5.2.7. De fato, o produto tensorial é associativo e simétrico uma vez que é definido a partir do produto cartesiano. Além disso, existe o elemento identidade à direita e à esquerda para $\otimes$, dado pelo espaço coerente $\underline{1} = (Coh(\{1\}, =), \subseteq)$.

6.7.2 Fecho

O fecho da categoria **LIN** relativamente a $\otimes$, é o espaço coerente $[\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ dos traços das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ introduzido em 5.4.10, onde a seta de aplicação (função de avaliação) associada $eval : [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é tal que

$\beta \in eval(t, a)$, se e somente se, $((\alpha, \beta), \alpha) \in (t, a)$ para algum $(t, a) \in [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A}$.

E, para toda a função linear $F : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, o traço linear da seta de denotação $Curry(F) : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ é dado por

$(\gamma, (\alpha, \beta)) \in ltr(Curry(F))$, se e somente se, $((\gamma, \alpha), \beta) \in ltr(F)$.

6.7.3 Categoria com Fechamento

LIN é uma Categoria Monoidal Simétrica com Fechamento, pois possui fecho com relação ao produto tensorial (item 5.2.7) uma seta de aplicação (eval) e uma seta de denotação (Curry), que satisfazem a Propriedade de Fechamento. Veja teorema a seguir.

Teorema 6.7.1 (LIN é Monoidal Fechada) *Em **LIN** o espaço coerente $[- \rightarrow^{lin} -]$ dos traços das funções lineares é realmente um fecho para a categoria **LIN**, relativamente ao produto tensorial $\otimes$, isto é, $(- \otimes \mathcal{A}, -)$ é adjunto esquerdo de $[\mathcal{A} \rightarrow^{lin} -]$. Ou então, para todo espaço coerente $\mathcal{C}$ e para toda função linear $F : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, existe uma única função linear $Curry(F) : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ tal que para um $eval_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ fixo, o diagrama abaixo comuta, isto é, $eval \circ (Curry(F) \otimes \iota_{\mathcal{A}}) = F$.*

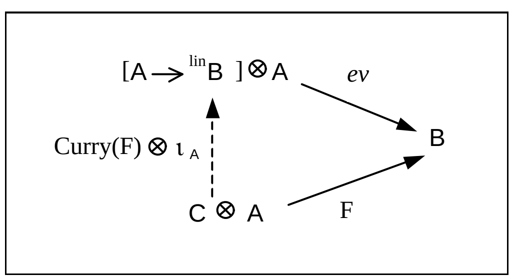

FIGURA 6.5: Fecho em **LIN**

<u>Prova:</u>

Para uma função linear $F : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ qualquer, o traço linear de F consiste em triplas $((\gamma, \alpha), \beta)$ e é relacionada ao traço linear de $Curry(F)$ por:

$((\gamma, \alpha), \beta) \in ltr(F)$, se e somente se, $(\gamma, (\alpha, \beta)) \in ltr(Curry(F))$.

E, $eval_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é tal que:

$\beta \in eval(t, a)$, se e somente se, $((\alpha, \beta), \alpha) \in (t, a)$ para algum $(t, a) \in [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A}$.

Então, $ltr_{ev\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{(((\alpha, \beta), \alpha), \beta) | \alpha \in \mathcal{A}\ e\ \beta \in \mathcal{B}\}$.

Agora, para $g \in [\mathcal{B} \rightarrow^{lin} \mathcal{C}]$ e para $h \in [\mathcal{C} \rightarrow^{lin} \mathcal{D}]$ tem-se:

$(\beta, \delta) \in ltr_{h \circ g}$, se e somente se, $\exists\ \gamma \in \mathcal{C}$ tal que, $(\beta, \gamma) \in ltr_g$ e $(\gamma, \delta) \in ltr_h$.

Assim, $((\gamma, \alpha), \beta) \in ltr_{ev \circ (Curry(F) \otimes \iota_{\mathcal{A}})}$, se e somente se, $\exists ((\alpha, \beta), \alpha) \in (t, a)$ para algum $(t, a) \in [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A}$, tal que:

$((\gamma, \alpha), ((\alpha, \beta), \alpha)) \in ltr_{(Curry(F) \otimes \iota)}$, ou seja, se $(\gamma, (\alpha, \beta)) \in ltr_{Curry(F)}$ e, $(((\alpha, \beta), \alpha), \beta) \in ltr_{ev}$.

Condição que é verificada já que os traços lineares são iguais. Portanto, $ev \circ (Curry(F) \otimes \iota) = F$, como se queria demonstrar.

Logo, existe um bifuntor $[- \rightarrow^{lin} -] : LIN \times LIN \rightarrow LIN$ tal que, para cada objeto $\mathcal{A}$ existe um isomorfismo $\Lambda : \mathbf{LIN}[\mathcal{C} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B}] \cong \mathbf{LIN}[\mathcal{C}, [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]]$ que é natural em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$.

Observação:

Para mostrar que Λ é um isomorfismo, basta verificar que a função $Curry(F)$ é bijetiva. De fato, sejam $F, G : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funções lineares tais que, $Curry(F) = Curry(G)$, então $F = ev \circ (Curry(F) \otimes \iota_{\mathcal{A}}) = ev \circ (Curry(G) \otimes \iota_{\mathcal{A}}) = G$, isto é, $F = G$ e assim tem-se a injetividade de $Curry(F)$. Para verificar a sobrejeção, considere $H : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ e defina $F = ev \circ (H \otimes \iota_{\mathcal{A}})$. Pela unicidade de $Curry(F)$ deve-se ter $H = Curry(F)$. Portanto, $Curry(F)$ é bijetiva.

Isto caracteriza a seguinte adjunção

$$\frac{\mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]}{\mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}$$

Representada pela figura 6.6:

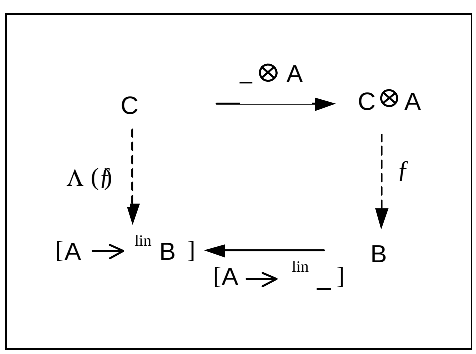

FIGURA 6.6: Adjunto Direito $[\mathcal{A} \rightarrow^{lin} -]$

O funtor $F \equiv (- \otimes \mathcal{A}) : \mathbf{LIN} \rightarrow \mathbf{LIN}$, que mapeia cada objeto $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C} \otimes \mathcal{A}$ e cada morfismo $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, no morfismo $F(g) : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$, tal que $F(g) = g \otimes id_{\mathcal{A}}$ (representado na figura 6.7), é o adjunto à esquerda do funtor $G \equiv [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} -] : \mathbf{LIN} \rightarrow \mathbf{LIN}$ que associa cada objeto $\mathcal{B}$ para $[\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ e cada morfismo $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$, no morfismo $G(h) : [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}] \rightarrow [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{D}]$, tal que $G(h)(X) = ltr(h \circ F_{lin(X)})$, para $X \in [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$ (representado na figura 6.7).

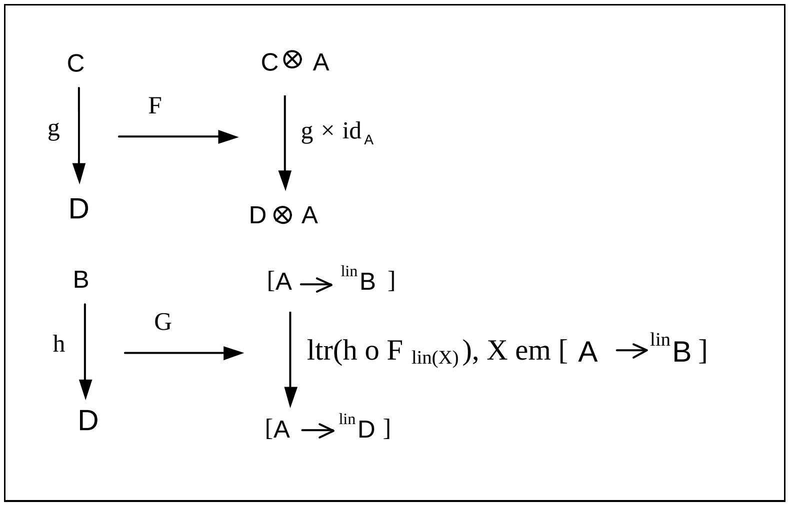

FIGURA 6.7: Adjuntos $F \equiv (- \otimes \mathcal{A})$ e $G \equiv [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} -]$

Agora representa-se a co-unidade da adjunção. Isto é, para cada objeto $\mathcal{C}$ e morfismo $f : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ existe exatamente um morfismo $Curry(f) : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \rightarrow^{lin} \mathcal{B}]$, tal que o diagrama 6.8 comuta.

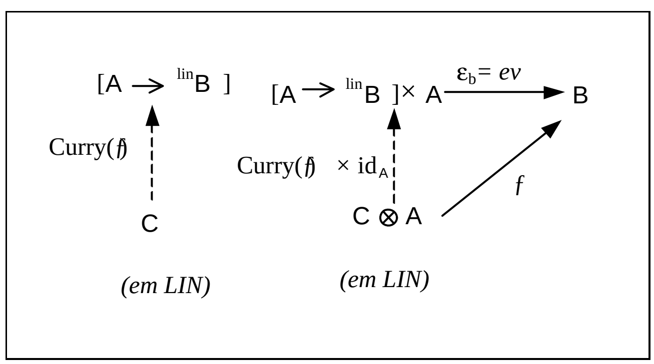

FIGURA 6.8: Co-Unidade da Adjunção em **LIN**

7 Classificador de Subobjetos nas Categorias STAB e LIN

Neste capítulo são descritas algumas tentativas de encontrar o classificador para categoria **STAB** e a justificativa de que não é possível defini-lo. Portanto, a categoria **STAB** embora sendo Cartesiana fechada, não é um topos. A seguir é feita uma análise com respeito a um classificador para categoria **LIN**, mesmo sabendo que a categoria não é um topos (pois não é Cartesiana fechada).

7.1 Introdução

A primeira tentativa de classificar os elementos de espaços coerentes, para cada monomorfismo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, seria o espaço coerente que caracteriza os conjuntos coerentes de $\mathcal{D}$ que estão na parte $\mathcal{A}$ considerada, conforme acontece em **Set**. A segunda alternativa foi procurar uma analogia com a categoria dos grafos, uma vez que espaços coerentes são construídos a partir de teias e que toda teia é um grafo reflexivo. A seguir, considerou-se o classificador como o conjunto das partes dos Inteiros ($P(\mathbb{Z})$). Ainda buscou-se a possibilidade de classificar os espaços coerentes que formassem uma topologia, mas falhou pela propriedade da estabilidade. E finalmente, apresenta-se a justificativa de que **STAB** não é um topos. Na última seção, é feita uma análise de um classificador para a categoria **LIN**.

7.2 Considerações Iniciais

Algumas definições e teoremas, utilizados neste capítulo, são apresentados a seguir.

Definição 7.2.1 (Subteia)*Seja $\boldsymbol{A} \equiv (A, \approx_A)$ uma teia, ou seja, um par formado por um conjunto A sobre o qual é definido uma relação reflexiva e simétrica, denotada por $\approx_A$, denominada relação de coerência em A. Uma subteia $\mathbf{B} \equiv (B, \approx_B)$ da teia $\boldsymbol{A}$ é formada pelo subconjunto $B \subseteq A$ tal que a relação de coerência é preservada em B. Isto é, $\approx_B$ é a relação reflexiva e simétrica sobre A, restrita aos elementos de B.*

Definição 7.2.2 (Subespaço Coerente) *Um subespaço coerente $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ é o espaço coerente $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ tal que $\mathbf{B} \equiv (B, \approx_B)$ é uma subteia de $\mathbf{A} \equiv (A, \approx_A)$.*

Teorema 7.2.1 (Monomorfismo em STAB) *Todo monomorfismo em **STAB** é uma função estável, tal que a função entre conjuntos coerentes é injetora.*

<u>Prova:</u>
($\Rightarrow$) Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma função estável, tal que $F : Coh(A, \approx_A) \to Coh(B, \approx_B)$ é injetora. Suponha $G, H : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, funções estáveis quaisquer. Então:

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, F \circ G(x) = F \circ H(x) \Rightarrow$$

$\forall\, x \in \mathcal{X}, F(G(x)) = F(H(x)) \Rightarrow$ pela definição de função injetora

$\forall\, x \in \mathcal{X}, G(x) = H(x) \Rightarrow$

$G = H$

Assim, F é um monomorfismo em **STAB**.

($\Leftarrow$) Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um monomorfismo em **STAB**. Seja $\underline{0} = (Coh(\emptyset, =), \subseteq)$, o espaço coerente sem átomos $\underline{\emptyset}$, com relação a coerência trivial '='. Então:

$\forall\, a, a' \in \mathcal{A}, \exists\, c_a, c_{a'} : \underline{0} \rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow$ pela definição de monomorfismo

se $F \circ c_a = F \circ c_{a'}$, então $c_a = c_{a'} \Rightarrow$

$a = a'$.

Assim, $F : Coh(A, \approx_A) \rightarrow Coh(B, \approx_B)$ é uma função injetora.

Logo, todo monomorfismo em **STAB** é uma função estável, tal que a função entre conjuntos coerentes é injetora. Desde então, um monomorfismo em **STAB** será denominado função injetora estável.

Teorema 7.2.2 (Monomorfismo em LIN) *Todo monomorfismo em **LIN** é uma função linear, tal que a função entre conjuntos coerentes é injetora.*

<u>Prova:</u> Análoga ao teorema 7.2.1.

De forma similar, um monomorfismo em **LIN** será denominado função injetora linear.

7.3 Classificador Análogo ao Classificador de Set

A primeira intuição de classificador para **STAB** tentado neste trabalho, para cada monomorfismo $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$, foi considerar Ω o espaço coerente que caracteriza os conjuntos coerentes de $\mathcal{D}$ que estão na parte $\mathcal{A}$ considerada. Ou seja, conforme **Set**, o classificador seria a função $true : \underline{0} \rightarrow \Omega$, tal que $\underline{0}$ é o objeto terminal da categoria e os números booleanos constituem o espaço coerente plano Ω, definida por $true(\emptyset) = \{T\}$, onde T representa o valor verdadeiro.

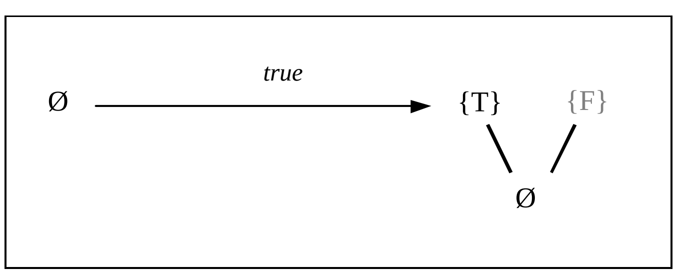

FIGURA 7.1: Tentativa de Classificador para **STAB**

Então para cada monomorfismo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ em **STAB** deveria existir uma única seta $\chi_F : \mathcal{D} \to \Omega$ estável, que satisfizesse o Ω-axioma (definição 4.5.1).

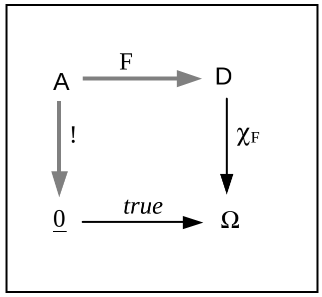

FIGURA 7.2: Diagrama do Classificador de Subobjetos em **STAB**

O objeto terminal na categoria é o espaço coerente $\underline{0} = (Coh(\emptyset, =), \subseteq)$ portanto, a função *true* mapeia o conjunto coerente $\emptyset$ para um único conjunto coerente. Ora, se $true(\emptyset) = \{T\}$, para que o diagrama 7.2 comute, χ_F deveria mapear a imagem de F em $\{T\}$. Assim, com o objetivo de classificar os conjuntos coerentes $d \in \mathcal{D}$, χ_F poderia ser definido por:

$$\chi_F(d) = \begin{cases} \{T\} \; se \; d = F(a), a \in \mathcal{A} \\ \{F\} \; se \; d \notin Im(F). \end{cases}$$

Entretanto, ao considerar o classificador de subobjetos descrito, a propriedade da monotonicidade e da estabilidade não são sempre preservadas por χ_F.

<u>Contra-Exemplo</u>:

Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, representada no diagrama 7.3, mono e estável definida por:

$F(\{0\}) = \{0, 1\}$

$F(\{1\}) = \{0, 2\}$

$F(\emptyset) = \emptyset$

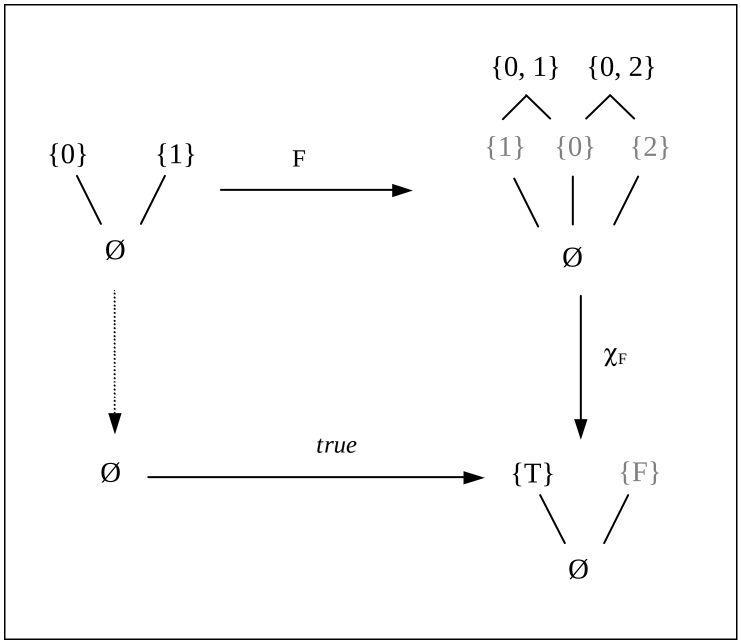

FIGURA 7.3: Contra-Exemplo de Classificador em **STAB** conforme **Set**

Segue-se que:

(1) $\emptyset \in F(\mathcal{A}) \Rightarrow \chi_F(\emptyset) = \{T\}$. Além disso, $\emptyset \subseteq x, \forall\, x \in \mathcal{D} \Rightarrow$ (pela monotonicidade de χ_F) $\chi_F(\emptyset) \subseteq \chi_F(x) \Rightarrow \{T\} \subseteq \chi_F(x), \forall\, x \in \mathcal{D} \Rightarrow \{T\} \subseteq \{F\}$.

(2) $\{0\} \subseteq \{0,1\} \Rightarrow$ (pela monotonicidade de χ_F) $\chi_F(\{0\}) \subseteq \chi_F(\{0,1\}) \Rightarrow \{F\} \subseteq \{T\}$.

De (1) e (2), conclui-se que {T} = {F}, contrariando a hipótese. Portanto, os números booleanos não são um objeto classificador para **STAB**.

Logo, nenhum classificador para **STAB** com apenas dois valores verdade (ou seja, somente indicando se um conjunto coerente está ou não está na parte) é um classificador para **STAB** porque, neste caso, a propriedade da monotonicidade não será sempre satisfeita por χ_F.

Verificou-se também, a possibilidade de restringir a classificação para todas as setas mono, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tal que $\mathcal{A}$ seja um subespaço coerente (definição 7.2.2) de $\mathcal{B}$.

Contra-Exemplo:

Seja $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}$, representada no diagrama 7.4, mono e estável definida por:

$F(\{0,1\}) = \{0,1\}$

$F(\{0\}) = \{0\}$

$F(\{1\}) = \{1\}$

$F(\emptyset) = \emptyset$

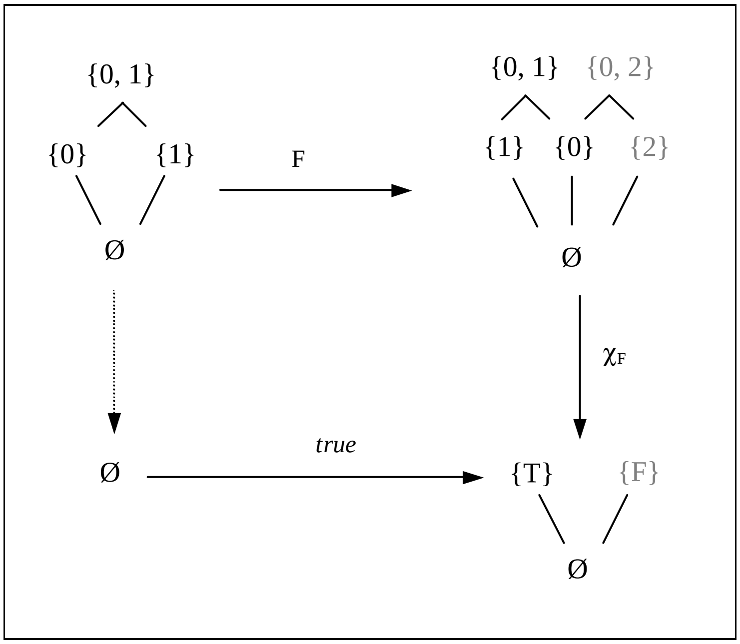

FIGURA 7.4: Classificador em **STAB** conforme **Set** Restrita a Subespaço Coerente

De maneira similar ao exemplo anterior, a monotonicidade exigida pela função caracterísitica leva a um absurdo:

$\emptyset \subseteq \{2\} \Rightarrow$ (pela monotonicidade de χ_F) $\chi_F(\emptyset) \subseteq \chi_F(\{2\}) \Rightarrow \{T\} \subseteq \{F\}$.

Ainda foi observado que no caso da inclusão, mesmo considerando $true : \underline{0} \to \Omega$ definida por $true(\emptyset) = \emptyset$ para que a monotonicidade seja verificada, a estabilidade pode não ser preservada pela função característica.

Contra-Exemplo:

Seja $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}$, representada no diagrama 7.5, mono e estável definida por:

$F(\{0,1\}) = \{0,1\}$

$F(\{0\}) = \{0\}$

$F(\{1\}) = \{1\}$

$F(\emptyset) = \emptyset$

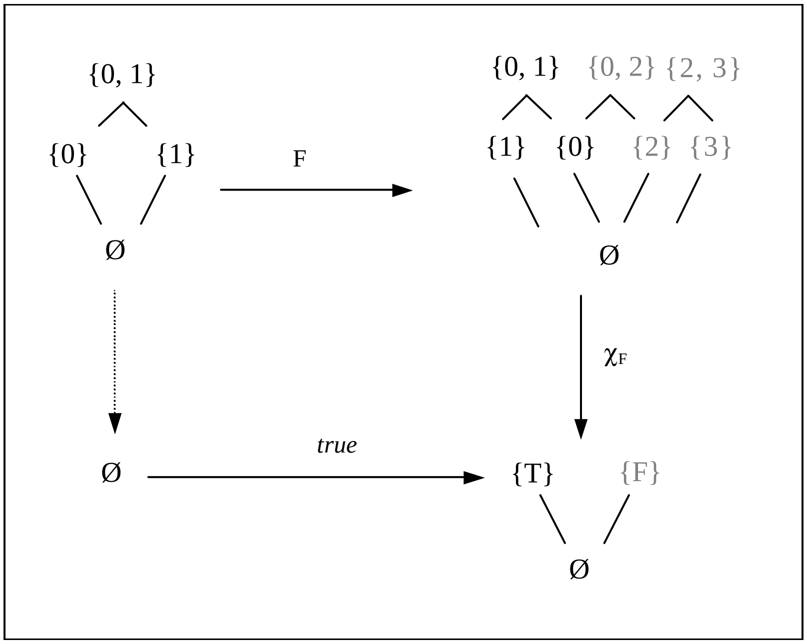

FIGURA 7.5: Classificador em **STAB** conforme **Set** Restrita a Subespaço Coerente

A estabilidade exigida pela função caracterísitica leva a um absurdo:

$$\chi_F(\{2\} \cap \{3\}) = \chi_F(\{2\}) \cap \chi_F(\{3\}) \Rightarrow \chi_F(\emptyset) = \{F\} \cap \{F\} \Rightarrow \emptyset = \{F\}.$$

7.4 Classificador de Subobjetos para Categoria das Teias

Uma teia é um par formado por um conjunto e uma relação reflexiva e simétrica portanto, é um grafo reflexivo. Uma vez que toda teia define um espaço coerente, buscou-se um classificador de subobjetos para categoria das **Teias**, subcategoria de **RGr** - onde objetos são grafos reflexivos e morfismos são homomorfismo de grafos reflexivos - para a seguir analisar o classificador nas categorias de espaços coerentes.

O classificador de subobjetos de **Teias** seria análogo ao do exemplo de grafos da seção 4.5. Ou seja, será o grafo reflexivo da figura 7.6, onde as quatro setas e os dois nodos representam os varios graus de verdade nos quais um elemento da teia (seta ou nodo) pode apresentar com respeito a uma dada subteia descritos a seguir.

Para Setas

1. A seta está incluída na subteia.
2. A seta não está incluída na subteia nem sua origem, mas seu destino está incluído.
3. A seta não está incluída na subteia nem seu destino, mas sua origem está incluída.
4. A seta não está incluída na subteia (nem sua origem e destino).

Para Nodos

1. O nodo está na subteia.
2. O nodo não está na subteia.

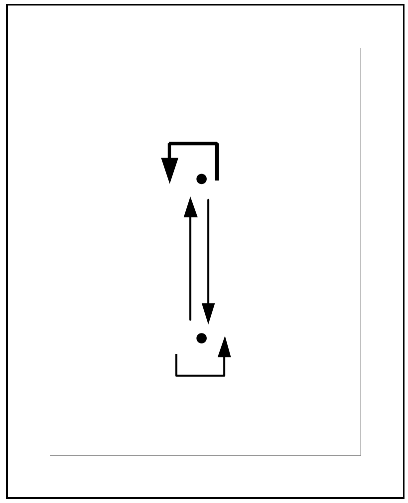

FIGURA 7.6: Objeto Classificador em **Teias**

Observa-se que para **Teias** não existe a possibilidade de uma seta não estar na subteia mas sua origem e destino estarem. Neste caso, a parte considerada não seria uma teia.

Exemplo:
Para teias específicas conforme diagrama 7.7, a função característica identifica a relação dos elementos da teia com a subteia considerada:

$\chi_S(0) = \chi_S(1) = p$, isto é, 0 e 1 estão na subteia;

$\chi_S(2) = \chi_S(3) = q$, isto é, 2 e 3 não estão na subteia;

$\chi_S(u) = t$, isto é, o morfismo u está na subteia;

$\chi_S(x) = h$, isto é, o morfismo x não está na subteia mas seu destino está na subteia;

$\chi_S(y) = j$, isto é, o morfismo y não está na subteia mas sua origem está na subteia;

$\chi_S(s) = g$, isto é, o morfismo s não está na subteia;

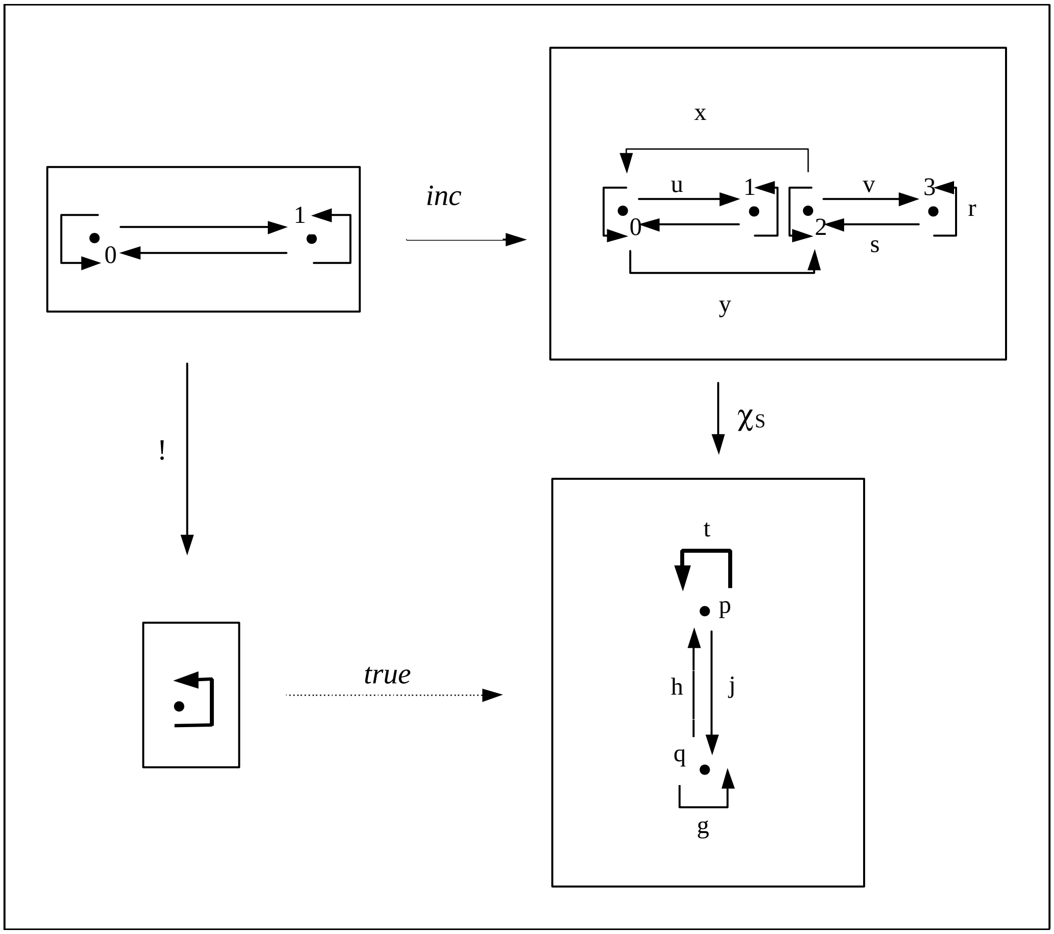

FIGURA 7.7: Exemplo de Classificador em **Teias**

Porém, ao considerar os espaços coerentes determinados pelas respectivas teias (figura 7.8), chega-se que a estabilidade não é preservada pelo morfismo característico.

Tem-se, de acordo com a categoria das teias que:

$true(\emptyset) = \{T\}$

$\chi_i(\emptyset) = \chi_i(\{0\}) = \chi_i(\{1\}) = \chi_i(\{0,1\}) = \{T\}$

$\chi_i(\{2\}) = \chi_i(\{3\}) = \{F\}$

$\chi_i(\{0,2\}) = \chi_i(\{2,3\}) = \{T, F\}$

Então segue-se que,

$$\chi_i(\{0,2\} \cap \{2,3\}) = \chi_i(\{2\}) = \{F\} \neq \chi_i(\{0,2\}) \cap \chi_i(\{2,3\}) = \{T,F\} \cap \{T,F\} = \{T,F\}$$

ou seja, conforme afirmado, a estabilidade não foi preservada por χ_i.

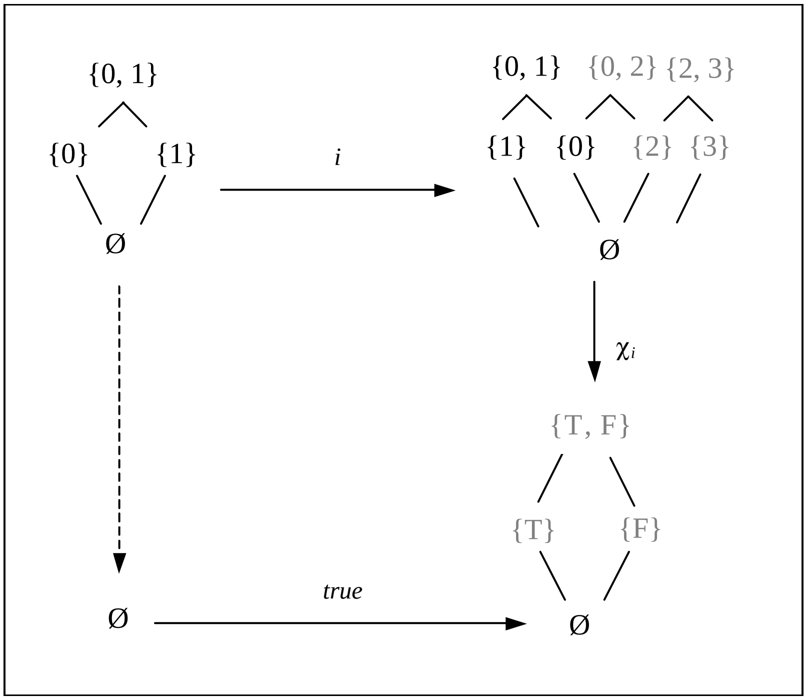

FIGURA 7.8: Exemplo de Classificador em **STAB** a partir de **Teias**

7.5 $P(\mathbb{Z})$ como Classificador em STAB

Com a finalidade de preservar a estabilidade, restringe-se a classificação aos monomorfismos em **STAB** que especificam um subespaço coerente e considera-se o objeto classificador como o conjunto das partes dos Inteiros.

Sejam $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{D} = (Coh(D, \approx_D), \subseteq)$ espaços coerentes.

Definição 7.5.1 (Subespaços Determinados por um Monomorfismo) *Um monomorfismo $F : \mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{D}$ determina um subespaço coerente $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ no contra-domínio, quando a imagem de F aplicada ao espaço coerente $\mathcal{A}$ é um subespaço de $\mathcal{D}$, isto é, $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$.*

Seja $F : \mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{D}$ um monomorfismo que especifica um subespaço $F(\mathcal{A})$ de um espaço coerente $\mathcal{D}$, isto é, tal que $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$. Define-se um espaço coerente Ω, junto com um ponto específico $true : \underline{0} \rightarrow \Omega$, que satisfaz a seguinte propriedade:

'os morfismos de qualquer espaço coerente $\mathcal{D}$ para Ω correspondem-se com os monomorfismos que especificam um subespaço em $\mathcal{D}$'.

$$\frac{\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}}{\mathcal{D} \rightarrow \Omega}$$

Ou seja, para qualquer 'figura (espaço)' $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$, $\chi_{\mathcal{A}} d = true_{\mathcal{B}}$, se e somente se, d é uma parte de A.

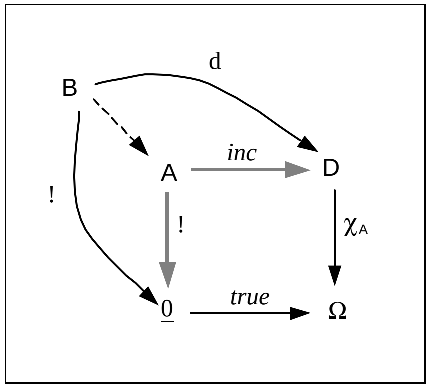

FIGURA 7.9: Classificador em **STAB** Restrito a Monomorfismos que Especificam Subespaços

Para cada figura $d : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ o morfismo $\chi_{\mathcal{A}} d : \mathcal{B} \to \Omega$ vai indicar o 'grau de verdade' com que d está incluído em uma parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$.

O classificador de subobjetos para **STAB**, restrito aos monomorfismos que especificam um subespaço, consiste em:

- um objeto $\Omega \equiv (P(\mathbb{Z}), \subseteq)$, isto é, o espaço coerente

$$\underline{P(\mathbb{Z})} = (\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, ..., \{0,1\}, \{0,-1\}, ...\}, \subseteq)$$

representado no diagrama 7.10.

- juntamente com uma função $true : \underline{0} \to \Omega$, onde $\underline{0} \equiv (Coh(\emptyset, =), \subseteq)$, tal que, $true(\emptyset) = \emptyset$.

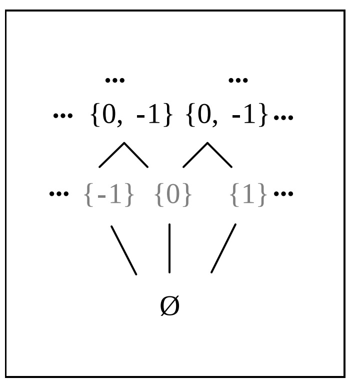

FIGURA 7.10: Objeto Classificador $P(\mathbb{Z})$

Satisfazendo o Ω-axioma, isto é, para cada monomorfismo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, com $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$, existe uma única seta $\chi_F : \mathcal{D} \to \Omega$ tal que o diagrama 7.11 represente um produto fibrado.

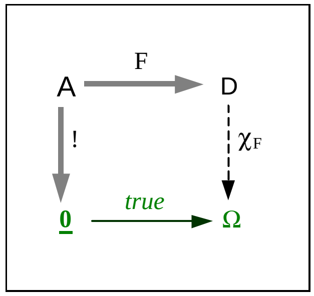

FIGURA 7.11: Ω-Axioma em **STAB**

Os conjuntos de $P(\mathbb{Z})$ representam os vários graus de verdade com que uma informação $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ está incluída em uma parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$. Isto é, os conjuntos representam as possíveis relações nas quais um elemento de $\mathcal{B}$ pode apresentar com respeito a um dado subespaço $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ (existem infinitas possibilidades). Seguem algumas possibilidades:

1. Um conjunto coerente de $\mathcal{B}$ (isto é, uma quantidade coerente de informação com respeito a uma mesma entidade) está na parte considerada $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$.

2. Um conjunto coerente de $\mathcal{B}$ não está na parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$, mas bits de informação deste conjunto estão na parte considerada.

3. Um conjunto coerente de $\mathcal{B}$ não está na parte considerada $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$.

A cardinalidade do conjunto de Ω no qual o conjunto coerente foi mapeado dá uma medida intuitiva da relação da inclusão do conjunto coerente na parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$. Ou seja, ao considerar um conjunto coerente e ao questionar se o mesmo está contido na parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$, a resposta pode ser: possui uma cardinalidade y de bits que estão em $\mathcal{A}$, e uma cardinalidade x de bits que não estão nesta parte.

O isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ para Ω^D, $\mathcal{S}(\mathcal{D}) \cong \Omega^D$, é estabelecido da seguinte maneira: para qualquer subespaço $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$, é definida uma função $\chi_{\mathcal{A}} : \mathcal{S}(\mathcal{D}) \rightarrow \Omega^D$, chamada função característica de $\mathcal{A}$, pela regra a seguir.

Seja j uma função parcial injetora, $j : Coh(\mathbf{D}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$, definida apenas para conjuntos unitários, tal que, associa cada unitário $u \in \mathcal{D}$ a um conjunto unitário distinto de $P(\mathbb{Z})$ da seguinte maneira:

$j(u) = \{-n\}$, se $u = \{n\} \notin F(\mathcal{A})$

$j(u) = \{n\}$, se $u \in F(\mathcal{A})$.

Define-se a função característica por:

$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \emptyset$ se $x \in F(\mathcal{A})$

$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \cup_{i=1}^{n} j(u_i), \forall\, u_1, u_2, ..., u_n \subseteq x$, se $x \notin F(\mathcal{A})$

onde $u_1, u_2, ..., u_n$ são conjuntos unitários.

Se $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{B}}$ então $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, caracterizando a 'injeção'. Agora, para qualquer $f \in \Omega^D$, em **STAB**, então $f = \chi_{\mathcal{A}f}$, onde

$$\mathcal{A}_f = (\{a | a \in \mathcal{D} \text{ e } f(a) = \emptyset\}, \subseteq)$$

sendo estabelecida assim a 'sobrejeção'.

Observa-se que $\mathcal{A}_f$ é a imagem inversa de f sobre o subconjunto $\emptyset$ de Ω , ou seja,

$$\mathcal{A}_f = (f^{-1}(\emptyset), \subseteq).$$

Esse isomorfismo entre subespaço e função característica pode ser representado categorialmente pelo diagrama 7.12.

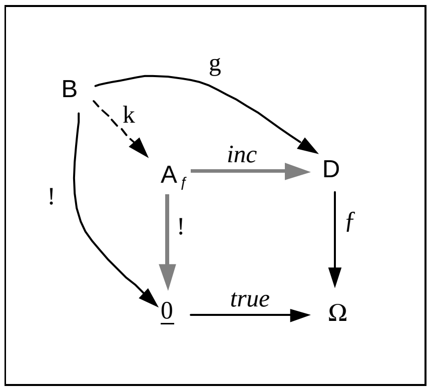

FIGURA 7.12: Isomorfismo entre Subespaço e Função Característica em **STAB**

Esse é um diagrama de produto fibrado pois, supondo qualquer outro cone $< \mathcal{B}, !, g >$ existe uma seta única $k : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_f$. Ora, se $b \in \mathcal{B}$, $f(g(b)) = true(!(b))$, então $g(b) \in \mathcal{A}_f$. Portanto, $k : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_f$ pode ser definido pela regra $k(b) = g(b)$. Claramente, este k é a única seta que faz o diagrama comutar. Assim, se $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$, então o diagrama 7.13 é um produto fibrado.

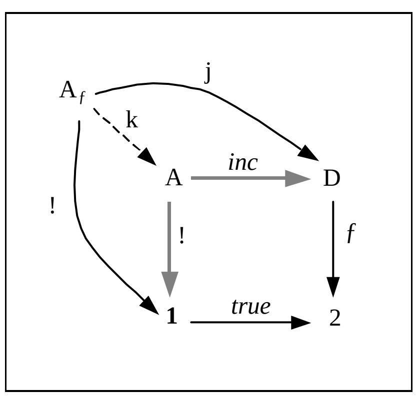

FIGURA 7.13: Produto Fibrado Exigido pelo Ω-Axioma em **STAB**

Além disso, χ_F pode ser identificada como a única função estável de $\mathcal{D}$ para Ω que faz do diagrama acima um produto fibrado. Se, para algum f (função característica de $\mathcal{A}_f$), o quadrado interno é um produto fibrado, então, para $x \in \mathcal{A}$,

$f(x) = \emptyset$, logo $x \in \mathcal{A}_f$. Assim $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_f$. Mas o quadrado exterior também comuta - na verdade é um produto fibrado como visto acima - portanto existe um único k com $inc \circ k = j$. Desde que inc e j são inclusões, k também deve ser. Então, $\mathcal{A}_f \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}$. Mas, f é a função característica de $\mathcal{A}_f$, assim, $f = \chi_A$.

Então em **STAB**, o espaço $\underline{P(\mathbb{Z})} \equiv \Omega$ juntamente com a função $true : \underline{0} \to \Omega$, $true(\emptyset) = \emptyset$, permite que para cada subespaço determinado por uma seta F em um espaço $\mathcal{D}$ seja possível determinar a sua função característica. Reciprocamente, para cada seta $F : \mathcal{D} \to \Omega$ com domínio em $\mathcal{D}$ e contra-domínio em Ω é possível determinar qual é o subespaço de $\mathcal{D}$ representado por essa função característica.

Exemplo:

Seja $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$, representada no diagrama 7.14, injetora estável definida por:

$F(\{0,1\}) = \{0,1\}$

$F(\{0\}) = \{0\}$

$F(\{1\}) = \{1\}$

$F(\emptyset) = \emptyset$

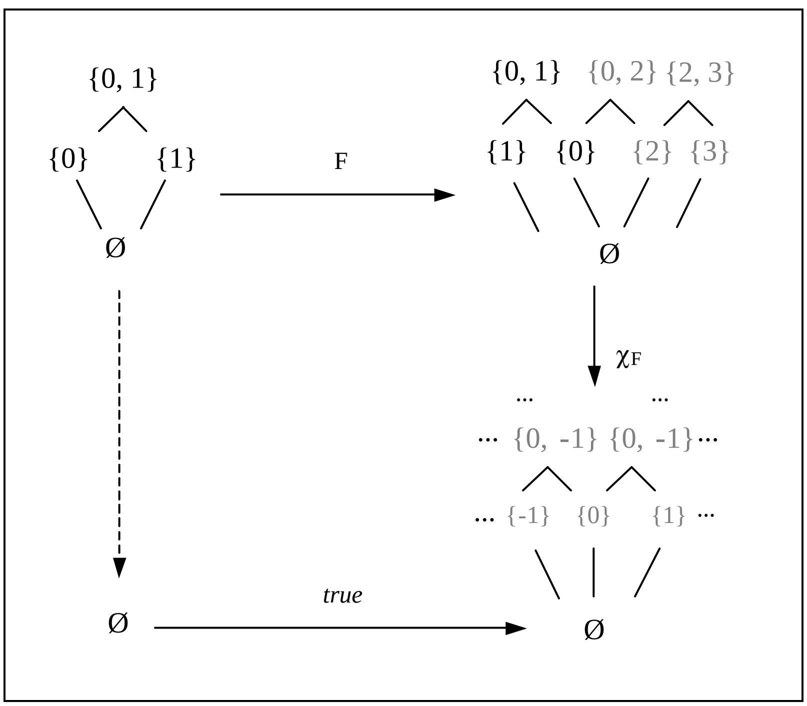

FIGURA 7.14: $P(\mathbb{Z})$ como Classificador em **STAB**

Tem-se que:

$j(\{0\}) = \{0\}$

$j(\{1\}) = \{1\}$

$j(\{2\}) = \{-2\}$

$j(\{3\}) = \{-3\}$

E, portanto, χ_F é definida por:

$\chi_F(\emptyset) = \chi_F(\{0\}) = \chi_F(\{1\}) = \chi_F(\{0,1\}) = \emptyset$

$\chi_F(\{2\}) = j(\{2\}) = \{-2\}$

$\chi_F(\{3\}) = j(\{3\}) = \{-3\}$

$\chi_F(\{0,2\}) = j(\{0\}) \cup j(\{2\}) = \{0,-2\}$

$\chi_F(\{2,3\}) = j(\{2\}) \cup j(\{3\}) = \{-2,-3\}$

Entretanto, $P(\mathbb{Z})$ não é um classificador de subobjetos para **STAB** porque quando o monomorfismo não define um subespaço, nem sempre a monotonicidade e/ou a estabilidade da função característica pode ser preservada (ver exemplo a seguir).

Contra-Exemplo:

Seja $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}$, representada no diagrama 7.15, mono e estável definida por:

$F(\{0,1\}) = \{0,1,2,3\}$

$F(\{0\}) = \{1,2\}$

$F(\{1\}) = \{0,3\}$

$F(\emptyset) = \emptyset$

Claramente a função característica associada à F, conforme definida, não é uma função monotônica nem estável.

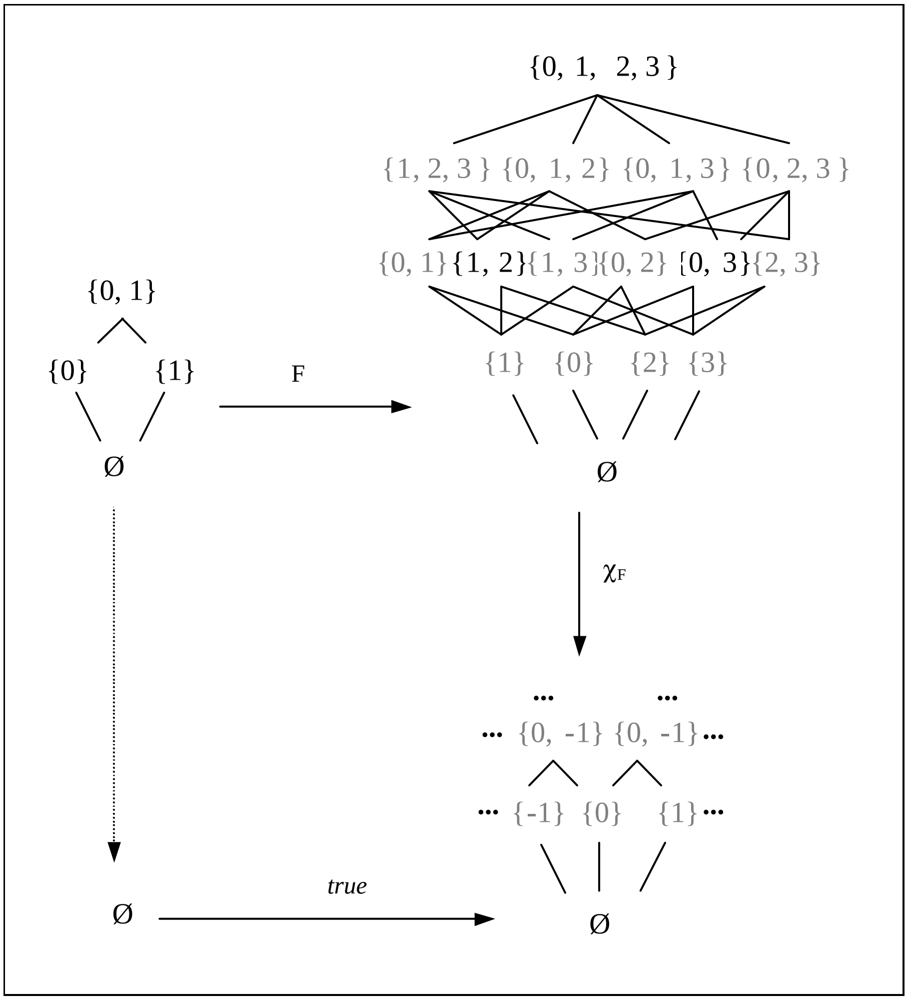

FIGURA 7.15: Contra-Exemplo de $P(\mathbb{Z})$ como Classificador em **STAB**

Observação:

Embora toda função injetora estável que determina um subespaço no contra-domínio seja linear, $P(\mathbb{Z})$ não é um classificador em **STAB** para funções lineares (a função F do contra-exemplo anterior representada no diagrama 7.15 é também linear).

Proposição 7.5.1 *Toda função injetora estável que determina um subespaço no contra-domínio é linear.*

Prova:

Sejam $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ espaços coerentes e seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ uma função injetora estável que determina um subespaço no contra-domínio, ou seja, tal que $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$.

O subespaço de $\mathcal{B}$ determinado por F apresenta uma teia formada por um subconjunto B' de B, isto é, $B' \subseteq B$ e a relação de coerência em $\mathbf{B} \equiv (B, \approx_B)$ é a mesma de $\mathbf{A} \equiv (A, \approx_A)$ restrita aos elementos de B'.

Assim, para todo $\beta \in F(a)$, sendo a um conjunto coerente de $\mathcal{A}$ e β um token de B, tem-se que $\{\beta\}$ é imagem de F.

Supõe-se que $F(\overline{a}) = \{\beta\}$, sendo $\overline{a}$ um conjunto formado por mais de um token. Pela monotonicidade, segue-se que:

$$\forall\, a' \in \mathcal{A}(a' \neq \emptyset),\ tal\ que\ a' \subset \overline{a} \Rightarrow F(a') \subset F(\overline{a}).$$

Portanto, tem-se duas hipóteses:

1. $F(a') = \emptyset$, mas nesse caso $F(\emptyset) = \emptyset$ (também pela monotonicidade). Então, como F é injetora $a' = \emptyset$ (contrariando a hipótese);
2. $F(a') = \{\beta\}$, mas $F(\overline{a}) = \{\beta\}$ pela hipótese. Então, pela injetividade de F, $\overline{a} = a'$. (absurdo).

Portanto, $\overline{a}$ é um conjunto unitário tal que $F(\overline{a}) = \{\beta\}$. Além disso, $\overline{a} \subseteq a$ pois $\beta \in F(a)$ e pela monotonicidade $F(\overline{a}) \subseteq F(a)$.

Logo, sempre que $\beta \in F(a)$ existe um $\alpha \in a$ tal que $\beta \in F(\{\alpha\})$, isto é, F é linear.

7.6 Uma Visão Topológica

A categoria [GOL 84] **Top(I)** de feixes (*sheaves*) sobre I é um topos, conhecido como topos espacial. Um feixe sobre I é um par formado por um espaço topológico com um homeomorfismo local (aplicação contínua). Então, procurou-se uma maneira de classificar uma subcategoria de **STAB** tal que os espaços coerentes formassem uma topologia.

Entretanto, conforme a nota de Inge Bethke ([BET 91]), tem-se que a estabilidade não é uma propriedade topológica, isto é, que os espaços coerentes - excetuando-se os planos - não podem ser equipados com uma topologia tal que as noções de continuidade e estabilidade coincidam. Logo, a idéia de classificar espaços coerentes equipados com uma topologia, mais uma vez falharia na propriedade da estabilidade.

7.7 Não Existe um Classificador para STAB

Não é possível definir um classificador em **STAB** [STR 2000] porque nesta categoria, todo endomorfismo possui um ponto fixo. E em um topos não existe o ponto fixo da negação.

Definição 7.7.1 (W-CPO) *Uma estrutura $D = (D; \sqsubseteq, \perp)$ é um w-cpo se D é um conjunto e $\sqsubseteq$ é uma ordem parcial sob D com um menor elemento $\perp$, tal que cada w-cadeia em D tem um supremo em D.*

Teorema 7.7.1 (Ponto Fixo em W-CPO) *Seja $D = (D; \sqsubseteq, \perp)$ um w-cpo e seja $F : D \to D$ w-contínua. Então F tem um menor ponto fixo em D, isto é, existe um $x \in D$ tal que $F(x) = x$, e tal que se $F(y) = y$ então $x \sqsubseteq y$.*

Prova: [STO 94].

Definição 7.7.2 (Conjunto Dirigido)*Seja $D = (D; \sqsubseteq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um conjunto $A \subseteq D$ é dirigido se $A \neq \emptyset$ e quando $x, y \in A$ então existe um $z \in A$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $y \sqsubseteq z$.*

Definição 7.7.3 (CPO - Ordem Parcial Completa)*Seja $D = (D; \sqsubseteq, \perp)$ um conjunto parcialmente ordenado com um menor elemento $\perp$. Então D é uma ordem parcial completa (CPO) se quando $A \subseteq D$ é dirigido então o supremo de A existe em D.*

Os espaços coerentes são cpo's. Num cpo todo conjunto dirigido tem supremo. Em particular, toda w-cadeia é um conjunto dirigido e, portanto, tem supremo em um cpo. Logo, todo cpo é também um w-cpo; o inverso não é verdade. Assim sendo, o teorema vale para espaços coerentes. Toda função contínua em um espaço coerente tem um ponto fixo. Como toda função estável é contínua, toda função estável tem ponto fixo. O mesmo vale para as lineares.

Assim como a álgebra Booleana modela a lógica clássica proposicional, existe uma classe de reticulados, a álgebra Heyting, que modela a lógica construtiva proposicional. Em certo sentido, a teoria dos topos generaliza isto para fornecer uma interpretação para a lógica construtiva de alta ordem. Em um topos, cada classe de subobjetos é uma álgebra Heyting; assim, pensando em subobjetos de um objeto X como predicados sobre X, é possível apresentar uma interpretação da lógica construtiva proposicional. Ou seja, todo topos tem uma álgebra de Heyting (completa) como álgebra dos subobjetos do objeto classificador Ω, ou do terminal $\mathbf{1}$. Em um álgebra Heyting, a negação $(\neg)$ não possui ponto fixo. Portanto, como **STAB** possui ponto fixo para todos os endomorfismos não há chance de ter algo semelhante a um classificador de subobjeto.

7.8 Classificador na Categoria LIN

Como toda função linear é estável por definição, então o classificador análogo ao classificador de **Set** e o classificador construído a partir da categoria das teias, não servem para a categoria **LIN** (nos contra-exemplos das seções 7.3 e 7.4 as funções são também lineares).

$P(\mathbb{Z})$ conforme definido em 7.5, não classifica os elementos de **LIN** porque, nesse caso, a seta característica pode não ser linear.

Contra-Exemplo:

Seja $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$, representada no diagrama 7.16, injetora linear definida por:

$F(\{0,1\}) = \{0,1\}$

$F(\{0\}) = \{0\}$

$F(\{1\}) = \{1\}$

$F(\emptyset) = \emptyset$

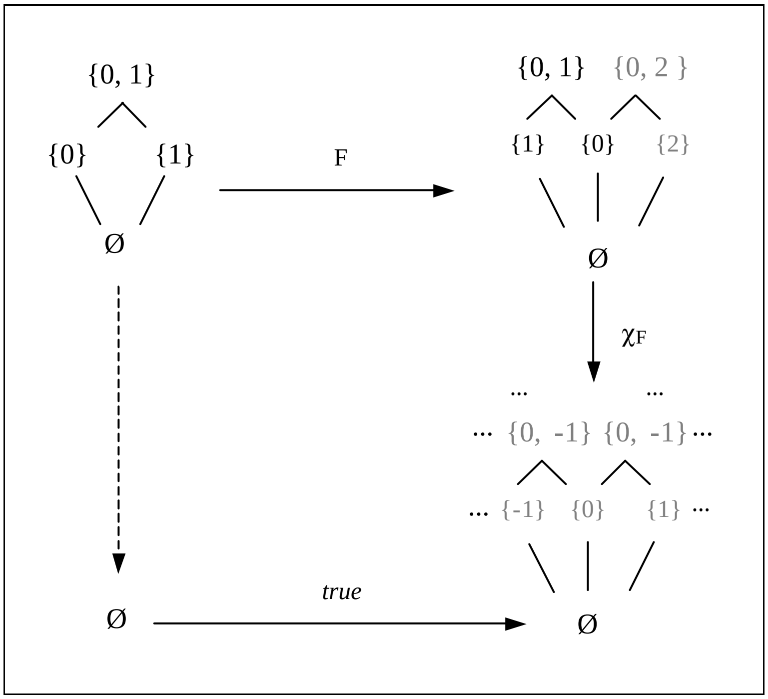

FIGURA 7.16: $P(\mathbb{Z})$ como Classificador em **LIN**

Tem-se que:

$j(\{0\}) = \{0\}$

$j(\{1\}) = \{1\}$

$j(\{2\}) = \{-2\}$

E, portanto, χ_F é definida por:

$\chi_F(\emptyset) = \chi_F(\{0\}) = \chi_F(\{1\}) = \chi_F(\{0,1\}) = \emptyset$

$\chi_F(\{2\}) = j(\{2\}) = \{-2\}$

$\chi_F(\{0,2\}) = j(\{0\}) \cup j(\{2\}) = \{0,-2\}$

Observa-se que $0 \in \chi_F(\{0,2\}) = \{0,-2\}$, mas não existe um $\beta \in B$ tal que $0 \in F(\beta)$. Logo, χ_F não é linear.

8 Conclusões

Os espaços coerentes analisados do ponto de vista da teoria dos topos forneceram um significado computacional para as categorias **STAB** (espaços coerentes e funções estáveis) e **LIN** (espaços coerentes e funções lineares).

Na primeira parte deste trabalho, capítulo 2, foram introduzidos alguns conceitos categoriais fundamentais: funtores, transformações naturais e adjunções, que são importantes na descrição da passagem de uma estrutura matemática para outra e na herança de propriedades. Para um melhor entendimento, procurou-se relacionar estes conceitos com construções comuns em computação, abordando: construções de listas, inversão de listas e o cálculo do tamanho de listas. As definições básicas omitidas podem ser encontradas no Anexo A.

No Capítulo 3, foram detalhadas as categorias Cartesianas fechadas e as categorias monoidais (simétricas) fechadas, associando a elas uma interpretação do ponto de vista computacional. A importância de se garantir a existência do objeto exponencial em uma categoria está relacionada com a idéia do que consiste uma computação. Ou seja, para cada programa ou algoritmo, e para cada execução deste programa a partir de dados de entrada, obtendo dados de saída (semântica operacional), existe uma única função (semântica denotacional) que associa este programa ao seu significado matemático. Do ponto de vista computacional, em uma categoria Cartesiana fechada é possível determinar a ação de cada máquina sobre cada programa de cada linguagem e cada dado de entrada. Mônadas é a generalização de uma especificação abstrata de monóides e são utilizadas como modelos de computação, onde programas são considerados como funções de valores para computações. Categorias monoidais são uma formalização das propriedades implícitas em uma mônada. A construção de categorias monoidais fechadas é feita a partir de categorias monoidais, e atribui-se ao fecho uma interpretação computacional análoga a do objeto exponencial.

No capítulo 4 foi apresentada a estrutura de um topos (categoria Cartesiana fechada com classificador de subobjetos) e sua interpretação. Na verdade, como visto pelas propriedades da definição, todo topos apresenta um comportamento semelhante à categoria **Set**. Nessa estrutura, é possível considerar partes de objetos e também se verificam propriedades para estas partes. Em um topos, no qual nomeiam-se elementos, sabem-se as ações de cada morfismo para cada elemento de cada objeto (por ser uma categoria Cartesiana fechada) e especificam-se subobjetos por propriedades de seus elementos. O classificador de subobjetos indica o grau de verdade em que uma 'figura' está incluída em uma parte de um objeto.

A seguir, no capítulo 5, apresentaram-se os espaços coerentes, buscando sempre relacionar os principais conceitos com interpretações computacionais e categoriais. As definições e construções fundamentais deste domínio necessárias para a continuidade da dissertação são descritas neste capítulo.

No capítulo 6 foram estudadas as categorias **STAB** e **LIN** de espaços coerentes com suas principais construções e interpretações, garantindo a elas significados para processos computacionais, uma vez que **STAB** é uma categoria Cartesiana fechada e **LIN** é uma categoria monoidal fechada.

Finalmente, no capítulo 7 foram descritas algumas tentativas de encontrar o classificador para categoria **STAB** e a justificativa de que não é possível definí-lo. Portanto, a categoria **STAB** embora sendo Cartesiana fechada, não é um topos. Entretanto, restringindo-se a classificação aos monomorfismos em **STAB** que especificam um subespaço coerente, é possível definir o classificador como o conjunto das partes dos Inteiros. Então, neste caso (ou seja, quando o resultado da execução de um programa a um conjunto de dados de entrada resultar numa quantidade coerente de informação no conjunto de saída), é possível descrever a noção de computação para subobjetos. Por último, foi feita uma análise com respeito a um classificador para categoria **LIN**, mesmo sabendo que a categoria não é um topos (pois não é Cartesiana fechada).

8.1 Trabalhos Futuros

A partir de então, são destacados os seguintes trabalhos futuros:

- Procurar as categorias (subcategorias) de espaços coerentes que constituem um topos (ou uma estrutura próxima de um topos) e fazer uma análise de tal resultado, especificando a noção de computação para estas estruturas;

- Apresentar uma análise categorial da lógica das categorias (ou subcategorias) determinadas, onde os princípios lógicos são os da lógica intuicionista e não os da lógica clássica. Se ξ é um topos e X é um objeto da categoria, então $Sub(X)$ é uma álgebra Heyting e portanto, ao pensar nos subobjetos de X como predicados sobre X, permite fornecer uma interpretação da lógica proposicional intuicionista [GOL 84] [LAM 86] [MCL 92] [PHO 92];

- Com as categorias (subcategorias) determinadas de espaços coerentes que apresentam a noção de computação, detalhar um isomorfismo (se possível) com o topos efetivo de McLarty (onde a característica da efetividade assume como base a Teoria das Funções Recursivas de Kleene) [MCL 92] [PHO 92] [ROS 87] [ROS 86].

Anexo 1 Conceitos Categoriais Fundamentais

Este anexo introduz os principais conceitos e os resultados básicos da Teoria das Categorias, com o objetivo de permitir uma rápida consulta e uma normalização das nomenclaturas utilizadas. Portanto, não são apresentadas introduções e explicações didáticas e, nas demonstrações das proposições, somente são indicadas as referências e as correspondentes páginas. Uma interpretação computacional é apresentada para algumas definições, método também utilizado na descrição de todo trabalho.

A.1 Categoria

Definição A.1.1 (Categoria) *Uma categoria C é uma quíntupla $C =< Ob_C, Mor_C, \partial_0, \partial_1, \iota, \circ >$, constituída por:*

- *Uma coleção Ob_C de objetos;*

- *Uma coleção Mor_C de morfismos (setas);*

- *Duas operações ∂_0, ∂_1 designando para cada morfismo f um objeto $\partial_0(f)$, seu domínio ou origem e um objeto $\partial_1(f)$, seu contra-domínio ou destino. Um morfismo f tal que $\partial_0(f) = a$ e $\partial_1(f) = b$ é usualmente denotado por $f : a \to b$;*

- *Uma operação ι designando para cada objeto a um morfismo ι_a (identidade de a) tal que $\partial_0(\iota_a) = \partial_1(\iota_a) = a$. A operação identidade deve satisfazer à propriedade da identidade onde, para qualquer morfismo $f : a \to b$ em Mor_C, tem-se que: $f \circ \iota_a = \iota_b \circ f = f$;*

- *Uma operação parcial $\circ$ denominada composição tal que para cada par f, g de morfismos com $\partial_0(g) = \partial_1(f)$ é associado um morfismo $g \circ f$ com $\partial_0(g \circ f) = \partial_0(f)$ e $\partial_1(g \circ f) = \partial_1(g)$. A operação de composição deve satisfazer a propriedade associativa onde, para quaisquer morfismos $f : a \to b, g : b \to c$ e $h : c \to d$ em Mor_C, tem-se que: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Observação:

A coleção de todos os morfismos da categoria C com origem no objeto a e destino no objeto b é denotada por $Mor_C(a, b)$.

Exemplos de categorias:

A tabela lista algumas categorias comuns, especificando seus objetos e setas.

Categoria	Objetos	Morfismos
FinOrd	ordinais finitos	funções finitas
FinSet	conjuntos finitos	funções finitas
Gr	grafos	homomorfismos de grafos
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Mon	monóides	homomorfismos de monóides
Ord	números ordinais	inclusões
Pfn	conjuntos	funções parciais
Poset	conjuntos parcialmente ordenados	funções monotônicas
RGr	grafos reflexivos	homomorfismos de grafos reflexivos
Set	conjuntos	funções

A.2 Diagrama

Definição A.2.1 (Diagrama) *Informalmente, um diagrama em uma categoria C é uma coleção de objetos e morfismos onde todo o morfismo $f : a \to b$ é representado como uma seta de a para b etiquetada por f.*

Definição A.2.2 (Diagrama Finito) *Um diagrama em C é finito se possui um número finito de objetos e um número finito de setas entre os mesmos.*

Definição A.2.3 (Diagrama Comutativo) *Um diagrama em uma categoria C é comutativo se, para quaisquer pares de objetos x e y, os diversos caminhos alternativos de um objeto para o outro resultam em igualdade, no sentido de que cada caminho no diagrama determina um morfismo e estes morfismos são iguais em C. Por exemplo, dizer que o diagrama A.1 comuta é exatamente o mesmo que dizer que $f \circ g' = g \circ f'$.*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & z \arrow[d, "g"] \\ w \arrow[r, "f"'] & y \end{tikzcd}$$

FIGURA A.1: Diagrama Comutativo

A.3 Subcategoria

Definição A.3.1 (Subcategoria) *Uma categoria S é uma subcategoria de uma categoria C, se:*

a) cada objeto de S é um objeto de C ($Ob_S \subseteq Ob_C$);

b) para todo a, b em Ob_S, $Mor_S(a, b) \subseteq Mor_C(a, b)$;

c) as operações de origem, destino, composição e identidade em S coincidem com as em C, restritas aos objetos e morfismos de S.

Definição A.3.2 (Subcategoria Plena/Cheia e Larga/Ampla) *Uma subcategoria S de C é dita uma subcategoria plena ou cheia de C se, para quaisquer objetos a e b em Ob_S, tem-se que $Mor_S(a, b) = Mor_C(a, b)$; uma subcategoria S de C é dita uma subcategoria larga ou ampla de C se $Ob_S = Ob_C$.*

A.4 Categoria Dual

Definição A.4.1 (Categoria Dual) *A categoria dual C^{op} de uma categoria C possui os mesmos objetos de C e os morfismos opostos dos morfismos em C, isto é, se $f : a \to b$ é um morfismo de C então $f : b \to a$ é um morfismo de C^{op}. As identidades são as mesmas e se, em C tem-se que $h = g \circ f$, então em C^{op} tem-se que $h = f \circ g$.*

Observação:

Em Teoria das Categorias, as principais idéias ocorrem aos pares, analogamente à noção de categoria dual. Ou seja, cada construção que a partir de agora será definida possui sua correspondente construção dual, definida a partir da inversão das setas na construção (mas na mesma categoria).

A.5 Morfismos Especiais

Definição A.5.1 (Monomorfismo) *Um morfismo $f : b \to c$ em uma categoria C é um mononomorfismo (ou simplesmente mono) se, para cada objeto a e para cada par de C-setas $g : a \to b$ e $h : a \to b$, a igualdade $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$. Ou seja, se o diagrama A.2 comuta, então $g = h$.*

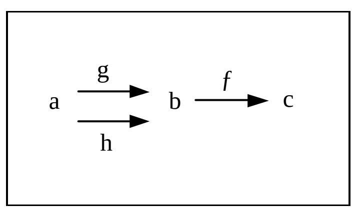

FIGURA A.2: Monomorfismo

Utiliza-se a notação $f : b \rightarrowtail c$ para dizer que f é um monomorfismo. O conceito dual de monomorfismo é epimorfismo.

Uma Interpretação Computacional

Intuitivamente, uma função f é mono quando ao realizar duas computações consecutivas, g seguida de f e h seguida de f, a partir de dados de entrada a, resultar nos mesmos dados de saída c, isso implica que a computação g coincide com a computação h.

Proposição A.5.1 *Uma função é injetora se e somente se é um monomorfismo em* ***Set****.*

Prova: [BAR 95, p. 44].

Definição A.5.2 (Epimorfismo) *Um morfismo $f : a \to b$ em uma categoria C é um epimorfismo (ou simplesmente epi) se, para cada par de C-setas $g : b \to c$ e $h : b \to c$, a igualdade $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$. Ou seja, se o diagrama A.3 comuta, então $g = h$.*

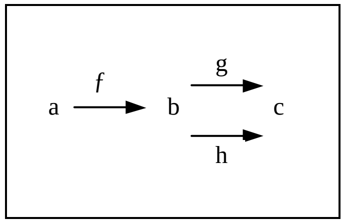

FIGURA A.3: Epimorfismo

Utiliza-se a notação $f : b \twoheadrightarrow c$ para dizer que f é um epimorfismo.

Proposição A.5.2 *Uma função é sobrejetora se e somente se é um epimorfismo em* ***Set****.*

Prova: [BAR 95, p. 49].

Definição A.5.3 (Isomorfismo) *Uma seta $f : a \to b$ é um isomorfismo (ou simplesmente iso) se existe uma seta $f^{-1} : b \to a$, chamada inversa de f, tal que $f^{-1} \circ f = \iota_a$ e $f \circ f^{-1} = \iota_b$.*

Utiliza-se a notação $f : b \leftrightarrow c$ para dizer que f é um isomorfismo.

Observação:

É importante destacar que nem todo morfismo mono e epi é iso, embora o inverso seja verdadeiro, ou seja, todo isomorfismo é mono e epi.

Proposição A.5.3 *Uma função é bijetora se e somente se é um isomorfismo em* ***Set****.*

Prova: [BAR 95, p. 39].

Definição A.5.4 (Endomorfismo/Automorfismo) *Um morfismo $f : a \to a$ em uma categoria com mesmo objeto origem e destino é chamado de endomorfismo. Se esta seta possui inversa é dita automorfismo.*

Definição A.5.5 (Objetos Isomorfos) *Os objetos $a, b \in Ob_C$ são objetos isomorfos em uma categoria C se existe um isomorfismo $f : a \leftrightarrow b$.*

A.6 Objeto Inicial, Terminal e Zero

Definição A.6.1 (Objeto Inicial) *Um objeto* $0 \in Ob_C$ *é chamado um objeto inicial de uma categoria* C *se, para qualquer objeto* a *em* C*, existe um único morfismo de* 0 *para* a*, denotado por* $!_0 : 0 \to a$.

O conceito dual de objeto inicial é objeto terminal.

Observação:

A notação de morfismo ! usada, objetiva destacar a unicidade da seta.

Uma Interpretação Computacional

A partir do objeto inicial chega-se a cada um dos outros objetos de forma única. Intuitivamente, o objeto inicial é aquele que contém uma informação que também é contida, através de morfismos, em todos os demais objetos.

Definição A.6.2 (Objeto Terminal) *Um objeto* $1 \in Ob_C$ *é chamado um objeto terminal de uma categoria* C *se, para qualquer objeto* a *em* C*, existe um único morfismo de* a *para* 1*, denotado por* $!_1 : a \to 1$.

Uma Interpretação Computacional

Intuitivamente, o objeto terminal é aquele cuja informação contém, através dos morfismos, todas as informações contidas nos demais objetos.

Definição A.6.3 (Objeto Zero) *Um objeto zero em* C *é um objeto que é simultaneamente inicial e terminal em* C.

Uma Interpretação Computacional

Em uma categoria com objeto zero, todos os objetos contém, através dos morfismos, as informações contidas em todos os demais.

Proposição A.6.1 *Seja* C *uma categoria. Então:*

a) se 0 *e* $0'$ *são objetos iniciais em* C*, então eles são objetos isomorfos;*

b) se 1 *e* $1'$ *são objetos terminais em* C*, então eles são objetos isomorfos.*

Prova: [ASP 91, p. 10].

A.7 Produtos e Coprodutos

Definição A.7.1 (Produto) *Um produto em uma categoria* C *de dois objetos* a *e* b *é um* C*-objeto* $a \times b$ *juntamente com um par de* C*-morfismos* $pr_a : a \times b \to a$ *e* $pr_b : a \times b \to b$ *tais que para todo* C*-objeto* c *e para todos os* C*-morfismos* $f : c \to a$ *e* $g : c \to b$ *existe um único morfismo* $< f, g >: c \to a \times b$ *tal que o diagrama A.4 comuta.*

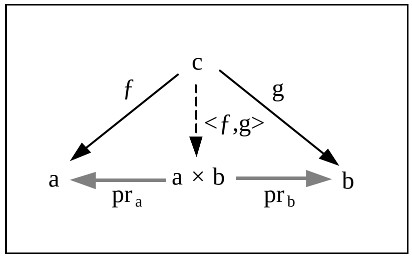

FIGURA A.4: Produto

Isto é, $pr_a \circ < f, g >= f$ *e* $pr_b \circ < f, g >= g$*. E* $< f, g >$ *é a seta univocamente induzida pelo produto de* f *e* g *com respeito às projeções* pr_a, pr_b.

Uma Interpretação Computacional

O produto de dois objetos é o objeto com a informação mínima necessária para conter, através de seus morfismos, as informações contidas nos dois objetos dados. Além disso, qualquer outro que contenha esses objetos, está contido, através de morfismos, no objeto produto (objeto terminal entre os pré-produtos).

Proposição A.7.1*Em uma categoria, o produto, se existe, é único a menos de isomorfismos.*

Prova: [ASP 91, p. 13]

Definição A.7.2 (Categoria com Todos os Produtos Binários)*Uma categoria* C *é dita uma categoria com todos os produtos binários se existe um produto para quaisquer dois objetos.*

Definição A.7.3 (Coproduto)*O conceito dual de produto é o coproduto ou soma, de objetos, o qual por dualidade é definido como segue. Um coproduto em uma categoria* C *de dois objetos* a *e* b *é um* C*-objeto* $a + b$ *juntamente com um par de* C*-morfismos* $q_a : a \to a+b$ *e* $q_b : b \to a+b$ *tais que para todo* C*-objeto* c *e para todos os* C*-morfismos* $f : a \to c$ *e* $g : b \to c$ *existe um único morfismo* $[f, g] : a + b \to c$ *tal que o diagrama A.5 comuta.*

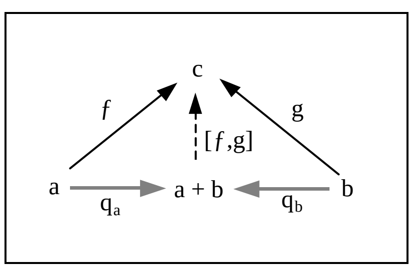

FIGURA A.5: Coproduto

Isto é, $[f, g] \circ q_a = f$ *e* $[f, g] \circ q_b = g$*. E* $[f, g]$ *é a seta univocamente induzida pelo coproduto de* f *e* g *com respeito as injeções* q_a, q_b.

Uma Interpretação Computacional

O coproduto de dois objetos é o objeto que contém, através de morfismos, a informação contida nesses dois objetos e tal que, qualquer outro objeto que tenha tal informação, contém também, através de morfismos, esse objeto coproduto (objeto inicial entre os pré-coprodutos).

Por dualidade, em uma categoria o coproduto, se existe, é único a menos de isomorifismos.

Definição A.7.4 (Produto/ Coproduto Finito) *Sejam C uma categoria, I um conjunto finito de índices e $\{a_i|i \in I\}$ um conjunto finito e indexado de objetos (não necessariamente distintos). Um produto de $\{a_i|i \in I\}$ é um objeto denotado por $X_{i\in I}a_i$ juntamente com um conjunto finito e indexado de morfismos $\{pr_k : X_{i\in I}a_i \to a_k|k \in I\}$, tal que, para todo objeto c e para todo conjunto finito e indexado de morfismos $\{f_k : c \to a_k|k \in I\}$ existe um único morfismo $h : c \to X_{i\in I}a_i$ que comuta o diagrama A.6.*

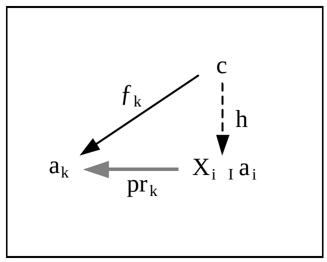

FIGURA A.6: Produto Finito

Coproduto finito é o conceito dual.

Definição A.7.5 (Categoria Cartesiana) *Uma categoria C é Cartesiana (C é CC) ou categoria com todos os produtos finitos se qualquer conjunto indexado de objetos $\{a_i|i \in I\}$, sendo I um conjunto finito de índices, possui um produto finito.*

Proposição A.7.2 *Uma categoria é Cartesiana se e somente se possui todos os produtos binários e possui objeto terminal.*

A.8 Limites e Colimites

Definição A.8.1 (Cone/Cocone) *Seja C uma categoria e D um diagrama em C. Um cone do diagrama D é um objeto c, juntamente com uma coleção de morfismos $c_i : c \to a_i$, para todo objeto a_i de D; tais que, para todos os objetos a_u e a_v e todos os morfismos $d : a_u \to a_v$ do diagrama D, tem-se que o diagrama A.7 comuta.*

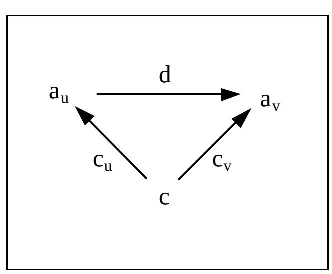

FIGURA A.7: Cone

Cocone é o conceito dual de cone.

Utiliza-se a notação $< c, \{c_i : c \to a_i | i \in I\} >$ para cones.

Definição A.8.2 (Limite/ Colimite) *Um limite para um diagrama D é um cone $< p, \{p_i : p \to a_i | i \in I\} >$ onde, para qualquer outro cone $< c, \{c_i : c \to a_i | i \in I\} >$ de D existe um único morfismo $h : c \to p$ tal que o diagrama A.8 comuta.*

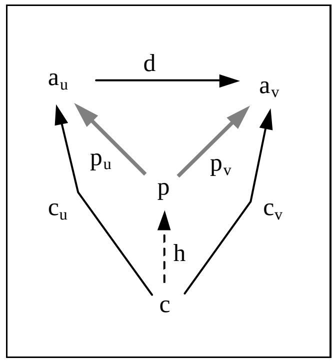

FIGURA A.8: Limite

Colimite é o conceito dual de limite.

<u>Uma Interpretação Computacional</u>

O limite de um diagrama é o objeto capaz de conter, através de morfismos, a informação contida em cada objeto do diagrama, e tal que qualquer outro objeto que contenha a informação do diagrama está contido, através de morfismos, neste objeto limite (objeto terminal entre os pré-limites).

O colimite é o objeto que contém, através de morfismos, a informação de cada objeto do diagrama, e tal que qualquer outro que tenha tal informação contém a informação do objeto coproduto (objeto inicial entre os pré-colimites).

Objeto Terminal como Limite

O objeto terminal é o limite para um diagrama vazio, pois um cone para um diagrama D vazio é qualquer par ordenado $< c, \emptyset >$, ou seja, um objeto c sem qualquer morfismo associado. Um limite $< p, \emptyset >$ do diagrama D é um objeto terminal. De fato, para qualquer outro cone $< c, \emptyset >$ existe um único morfismo $h : c \to p$ tal que o diagrama A.9 comuta.

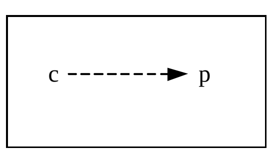

FIGURA A.9: Objeto Terminal como Limite

Por dualidade, o objeto inicial é o colimite para um diagrama vazio.

Definição A.8.3 (Equalizador) *Um objeto x e um morfismo $e : x \to a$ é um equalizador de um diagrama D, constituído por um par de setas paralelas $f, g : a \to b$, em uma categoria C se:*

a) $f \circ e = g \circ e$

b) para qualquer outro morfismo $e' : x' \to a$ tal que $f \circ e' = g \circ e'$, existe uma seta única $h : x' \to x$, tal que, $e \circ h = e'$.

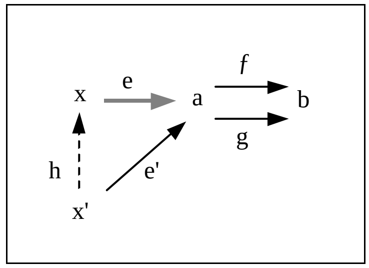

FIGURA A.10: Equalizador

Ou seja, um equalizador do diagrama D é um cone $< x, e : x \to a >$ o qual é um limite.

Proposição A.8.1 *Todo equalizador é um monomorfismo.*

Prova:[BAR 95, p. 229]

Definição A.8.4 (Co-Equalizador) *Um objeto x e um morfismo $q : b \to x$ é um co-equalizador de um diagrama D, constituído por um par de setas paralelas $f, g : a \to b$, em uma categoria C se:*

a) $q \circ f = q \circ g$;

b)para qualquer outro morfismo $q' : b \to x'$ tal que $q' \circ f = q' o g$, existe uma seta única $h : x \to x'$, tal que, $h \circ q = q'$.

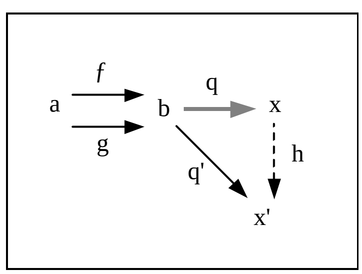

FIGURA A.11: Co-Equalizador

Ou seja, um coequalizador do diagrama D é um cocone $< x, q : b \to x >$ o qual é um colimite.

Proposição A.8.2 *Todo co-equalizador é um epimorfismo.*

Definição A.8.5 (Produto Fibrado - *Pullback*) *Seja C uma categoria e D um diagrama em C constituído por um par de morfismos $f : a \to c$ e $g : b \to c$ com um mesmo objeto destino. Um produto fibrado do diagrama D é um cone de $D :< a \times_c b, p : a \times_c b \to a, q : a \times_c b \to b >$ o qual é um limite.*

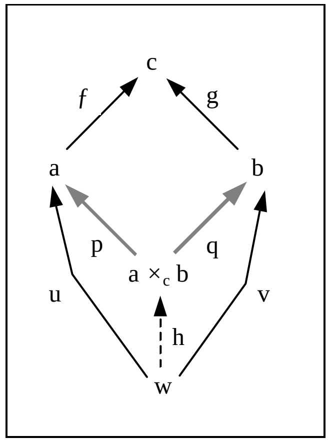

FIGURA A.12: Produto Fibrado

Portanto, para qualquer outro cone $< w, u : w \to a, v : w \to b >$ de D existe um único morfismo $h : w \to a \times_c b$ tal que o diagrama A.12 comuta.

Definição A.8.6 (Soma Amalgamada - *Pushout*) *Soma amalgamada é o conceito dual de produto fibrado. Seja C uma categoria e D um diagrama em C constituído por um par de morfismos $f : a \to b$ e $g : a \to c$ com um mesmo objeto origem. Uma soma amalgamada do diagrama D é um cocone de D: $< b +_a c, p : b \to b +_a c, q : c \to b +_a c >$ o qual é um colimite.*

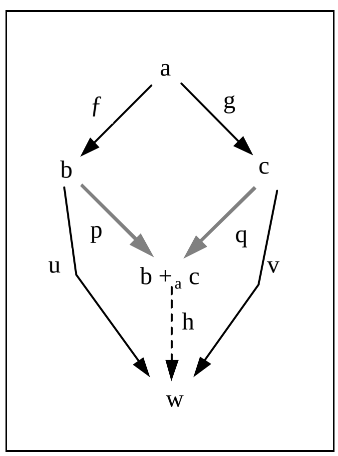

FIGURA A.13: Soma Amalgamada

Portanto, para qualquer outro cocone $< w, u : b \to w, v : c \to w >$ de D existe um único morfismo $h : b +_a c \to w$, tal que o diagrama A.13 comuta.

Bibliografia

[ABR 92] ABRAMSKY, Samson. **Handbook of Logic in Computer Science.** Oxford: Clarendon, 1992. 3v.

[ACI 91] ACIÓLI, B. M. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 253p.

[ADA 90] ADAMEK, Jiri.; ROSICKY, Jiri. **Locally Presentable and Accessible Categories**. Cambridge: Cambridge University, 1990. 316p.

[ADA 90] ADAMEK, Jiri.; HERRLICH, Horst; STRECKER, George. **Abstract and Concrete Categories.** New York: John Wiley, 1990. 482p.

[ASP 91] ASPERTI, Andrea; LONGO, Giuseppe. **Categories, Types and Structures - An Introduction to the Working Computer Science, Foundations of Computing.** Cambridge: MIT Press, 1991. 306p.

[BAN 95] BANCEREK, Grzegorz. **Continuous, Stable, and Linear Maps of Coherence Spaces**. 1995. Disponível em: <http://mizar.org/JFM/Vol7/cohsp-1.html>. Acesso em: set. 2000.

[BAR 85] BARR, Michael; WELLS, Charles. **Toposes, Triples and Theories**. New York: Springer-Verlag, 1985. 345p.

[BAR 95] BARR, Michael; WELLS, Charles. **Category Theory for Computing Science.** London: Prentice Hall, 1995. 326p.

[BAU 91] BAUM, Marian. **Elements of Point Set Topology.** New York: Dover Publications, 1991. 150p.

[BEL 88] BELL, John Lane. **Topos and Local Set Theories.** New York: Oxford University Press, 1988. 265p.

[BET 91] BETHKE, Inge. Coherence Spaces are Untopological. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v.85, n.2, p.333-951, 1991.

[BIR 99] BIRKEDAL, Lars. **Developing Theories of Types and Computability via Realizability**. 1999. Disponível em: <http://citeseer.nj.nec.com/context/196988/34859>. Acesso em: nov. 2000.

[BOR 94] BORCEUX, Francis. **Handbook of Categorial Algebra.** Cambridge: Cambridge University, 1994. 2v.

[BRA 94] BRAUNER, Torben. **A Model of Intuitionistic Affine Logic from Stable Domain Theory**. 1994. Disponível em: <http://www.brics.dk/RS/94/Abs/BRICS-RS-94-Abs/>. Acesso em: set. 2000.

[COS 2000] COSTA, Simone A. **Uma Introdução ao Estudo de Topos.** Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2000. 54p. (TI - 949)

[DIM 91] DIMURO, G. P. **Domínios Intervalares da Matemática Computacional.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 321p.

[DIM 96] DIMURO, G. P. **Uma Construção dos Reais Computáveis Utilizando Espaços Coerentes de Intervalos.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 150p. (E.Q. - 05).

[EDA 97] EDALAT, A. **Domains for Computation in Mathematics, Physics and Exact Real Arithmetic.** London: Department of Computing/Imperial College of Science, Technology and Medicine. Trabalho apresentado em Summer School on New Paradigms for Computation on Classical Spaces/ Workshop on Computation and Aproximation, 1997.

[ESC 93] ESCARDÓ, M. H.; CLAUDIO, D. M. **Scott Domain Theory as a Foundation for Interval Analysis.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1993. 41p. (RP - 218).

[ESC 2000] ESCARDÓ, Martín. **Semantic Domains, Injective Spaces and Monads.** Disponível em: <http://www.dcs.st-and.ac.uk/ mhe/newpapers.html>. Acesso em: maio 2000.

[FOU 86] FOURMAN, Michael; VIECKERS, Steve. **Theories as categories.** Edinburgh: Springer-Verlag, 1986. p.434-448. (Lectures Notes in Computer Science, v.240).

[GEM 90] GEMIGNANI, Michael C. **Elementary Topology.** New York: Dover Publications, 1990. 270p.

[GIA 96] GIANANTONIO, Pietro Di. Real Number Computability and Domain Theory. **Information and Computation**, Cambridge, v.127, p.11-25, 1996.

[GIR 87] GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v.50, p.1-102, 1987.

[GIR 89] GIRARD, Jean-Yves; LAFONT, Y.; TAYLOR, P. **Proofs and Types.** Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 176p.

[GOL 84] GOLDBLATT, Robert. **Topoi - The Categorical Analysis of Logic.** New York: Elsevier Science Publishers, 1984. 551p.

[GRU 96] GRUCHALSKI, Andreas. Computability on dI-Domains. **Information and Computation**, Cambridge, v.124, n.2, p.7-19, Jan. 1996.

[GUN 93] GUNTER, Carl A. **Semantics of Programming Languages**: Structures and Techniques. Cambridge: Mit Press. 1993. 419p.

[JOH 77] JOHNSTONE, Peter. **Topos Theory.** London: Academic Press, 1977. 367p.

[HILL 2000] HILL, Jonathan; CLARKE, Keith. **An Introduction to Category Theory, Category Theory Monads, and their Relationship to Functional.** Disponível em: <http://www.geocities.com/Athens/Academy/9081/category-theory-2.html>. Acesso em: maio 2000.

[KIN 92] KING, David; WADLER, Philip. **Combining Monads.** 1992. Disponível em: <http://www.cs.bell-

labs.com/who/wadler/topics/monads.html>. Acesso em: maio 2000.

[LAM 86] LAMBEK, J. William; SCOTT, P. J. **Introduction to Higher Order Categorical Logic.** Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 293p.

[LAW 97] LAWVERE, F. William; SCHANUEL, Stephen. **Conceptual Mathematics.** Cambridge: Cambridge University, 1997. 357p.

[LIP 71] LIPSCHUTZ, Seymor. **Topologia Geral.** São Paulo: McGraw-Hill, 1971. 301p.

[MAC 71] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician.**New York: Springer-Verlag, 1971. 262p.

[MAR 2000] MARTIN, Keye. **A principle of induction.** 2000. Disponível em: <http://www.math.tulane.edu/ martin/>. Acesso em: out. 2000.

[MAR 94] MARTINI, Alfio. **Uma Introdução a Teoria das Categorias e sua Aplicação em Ciência da Computação.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994.

[MCL 92] MCLARTY, Colin. **Elementary Categories, Elementary Toposes.** New York: Oxford University Press, 1992. 265p.

[MEN 2000] MENEZES, Paulo. **Teoria das Categorias e Ciência da Computação.** Disponível em: <ftp.inf.ufrgs.br/pub/blauth/categorias/livro texto>. Acesso em: abr. 2000.

[MOG 89] MOGGI, Eugenio. **An Abstract View of Programming Languages.** 1989. Disponível em: <http://www.disi.unige.it/person/MoggiE/publications.html>. Acesso em: abr. 2000.

[MOG 89a] MOGGI, Eugenio. **Computational Lambda-Calculus and Monads.** 1989. Disponível em: <http://citeseer.nj.nec.com/moggi89computational.html>. Acesso em: abr. 2000.

[MOG 91] MOGGI, Eugenio. **Notions of Computation and Monads.** 1991. Disponível em: <http://citeseer.nj.nec.com/moggi89computational.html>. Acesso em: abr. 2000.

[MUR 98] MURLY, Philip. **Monads in Semantics.** 1998. Disponível em: <http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume14.html>. Acesso em: mar. 2000.

[PEY 93] PEYTON, Simon L.; WADLER, Philip. **Imperative functional programming.** 1993. Disponível em: <http://www.cs.bell-labs.com/who/wadler/topics/monads.html>. Acesso em: maio 2000.

[PHO 92] PHOA, Wesley. **An Introduction to Fibrations, Topos Theory, The Effective Topos and Modest Sets.** 1992. Disponível em:

<http://www.dcs.ed.ac.uk/lfcsreps/allrev.html>. Acesso em: fev. 2000.

[PHO 94] PHOA, Wesley. From Term Models to Domains. **Information and Computation**, Cambridge, v.109, p.211-255, 1994.

[PIE 93] PIERCE, Benjamin. **Basic Category Theory for Computer Scientists.** Cambridge: MIT, 1993. 100p.

[PIT 85] PITT, David; ABRAMSKY, Samson; POIGNÉ, Axel; RYDEHEARD, David. **Category Theory and Computer Programming.** Guildford: Springer-Verlag, 1985. p.1-75. (Lectures Notes in Computer Science, v.240).

[PIT 95] PITT, David; RYDEHEARD, David; JOHNSTONE, Peter. **Category Theory and Computer Science.** Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[REU 98] REUS, B.; STREICHER, Th. **General Synthetic Domain Theory - A Logical Approach.** 1998. Disponível em: <http://www.cogs.susx.ac.uk/users/bernhard/papers.html>. Acesso em: jun. 2000.

[ROS 86] ROSOLINI, G. **Continuity and Effectiveness in Topoi.** Oxford: University of Oxford, 1986. 108p. PhD Thesis.

[ROS 87] ROSOLINI, G. **Categories and Effective Computations.**Edinburgh: Springer-Verlag, 1987. p.1-11. (Lectures Notes in Computer Science, v.283).

[RYD 88] RYDEHEARD, David; BURSTALL, R. M. **Computational Category Theory.** London: Prentice Hall, 1988.

[SEL 96] SELLANES, R. G. **Estratégias de Computação Sequenciais e Paralelas sobre Espaços Coerentes.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 144p.

[STO 94] STOLTENBERG-HANSEN, V.; LINDSTRÖM, I.; GRIFFOR, E. R. **Mathematical Theory of Domains.** Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 349p.

[STR 2000] STREICHER, Thomas. **Request Info on Topos.** Disponível por e-mail em streicher@mathematik.tu-darmstadt.de. Acesso em: 31 out. 2000.

[TAY 2000] TAYLOR, Paul. **Practical Foundations on Mathematics.** Disponível em: <http://www.dcs.qmw.ac.uk/ pt/Practical-Foundations/html/s.47.html>. Acesso em: maio 2000.

[TAY 89] TAYLOR, Paul. **Quantitative Domains, Grupoids and Linear Logic.** 1989. Disponível em: <http://www.dcs.qmw.ac.uk/ pt/research/>. Acesso em: ago. 2000.

[TRO 92] TROELSTRA, A. S. **Lectures on Linear Logic.** Stanford: CSLI/Leland Stanford Junior University, 1992. 200p.

[VIC 98] VIECKERS, Steve. **Topical Categories of Domains.** 1998. Disponível em: <http://mcs.open.ac.uk/sjv22/>. Acesso em: maio 2000.

[VIC 2000] VIECKERS, Steve. **Toposes Pour les Nuls.** Disponível em: <http://mcs.open.ac.uk/sjv22/>. Acesso em: maio 2000.

[WAD 92] WADLER, Philip. **Comprehending Monads.** 1992. Disponível em: <http://citeseer.nj.nec.com/wadler92comprehending.html>. Acesso em: maio 2000.

[WAD 92a] WADLER, Philip. **The Essence of Functional Programming.** 1992. Disponível em: <http://www.cs.bell-labs.com/who/wadler/topics/monads.html>. Acesso em: maio 2000.

[WAD 92b] WADLER, Philip. THIEMANN, Peter. **The Marriage of Effects and Monads.** 1992. Disponível em: <http://www.cs.bell-labs.com/who/wadler/topics/monads.html>. Acesso em: maio 2000.

[WAD 93] WADLER, Philip. **Imperative Functional Programming.** 1993. Disponível em: <http://www.cs.bell-labs.com/who/wadler/topics/monads.html>. Acesso em: maio 2000.

[WAL 91] WALTERS, R. F. C. **Category and Computer Science.** Cambridge: University Press, 1991.

[ZHA 89] ZHANG, G. Q. **Logics of Domains.** Cambridge: University Press, 1989. 250p.

[ZHA 92] ZHANG, G. Q. dI-Domains as Prime Information Systems. **Information and Computation**, Cambridge, v.116, n.1, p.10-25, Jan. 1995.

[ZHA 92a] ZHANG, G. Q. **Stable neighbourhoods.** 1992. Disponível em: <http://www.toc.lcs.mit.edu/ dmjones/hbp/tcs/Authors/zhangguoqiang.html 1996:203.html>. Acesso em: mar. 2000.

[ZHA 93] ZHANG, G. Q. **Some Monoidal Closed Categories of Stable Domains and Event Structures.** 1993. Disponível em: <http://www.toc.lcs.mit.edu/ dmjones/hbp/tcs/References/zhang 1996:203.html>. Acesso em: mar. 2000.

[ZHA 96] ZHANG, G. Q. The Largest Cartesian Closed Category of Stable Domains. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v.166, n.1, p.203-219, oct. 1996.