

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DE TRÊS MODELOS HIPERELÁSTICOS  
MICROMECAÑICOS

por

Eduardo Rocha Fernandes

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, outubro de 2022

### CIP - Catalogação na Publicação

Fernandes, Eduardo Rocha  
IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DE TRÊS MODELOS  
HIPERELÁSTICOS MICROMECAÑICOS / Eduardo Rocha  
Fernandes. -- 2022.  
15 f.  
Orientador: Rogério José Marczak.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto  
Alegre, BR-RS, 2022.

1. hiperelasticidade. 2. modelos constitutivos. 3.  
ajuste de curvas. 4. modelos micromecânicos. 5.  
implementação numérica. I. Marczak, Rogério José,  
orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Eduardo Rocha Fernandes

IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DE TRÊS MODELOS HIPERELÁSTICOS  
MICROME CÂNICOS

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Seppi Bresolin  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Rogério José Marczak

Prof. Felipe Tempel Stumpf

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Porto Alegre, outubro de 2022

Fernandes, Eduardo. **Implementação e Análise de Três Modelos Hiperelásticos Micromecânicos**. 2022. 15. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

## RESUMO

O correto modelamento do comportamento de materiais hiperelásticos é essencial para que a análise de elastômeros possa ser realizada de forma numérica. A escolha de um modelo constitutivo em particular para caracterizar um dado material não é um processo simples. O *software* HyperFit facilita esse processo, possibilitando o ajuste de curvas de 42 modelos hiperelásticos simultaneamente para um determinado ensaio de dados experimental. Entretanto, dos 42 modelos disponíveis no *software*, apenas 7 modelos são considerados modelos micromecânicos, sendo os demais fenomenológicos. Os modelos micromecânicos são modelos estatísticos desenvolvidos a partir de informações sobre as ligações químicas do material. Este trabalho tem como objetivo a implementação numérica e avaliação de 3 modelos hiperelásticos micromecânicos particularizados para elastômeros incompressíveis: o modelo de Bechir-Chevalier, o modelo de Heinrich-Kaliske (Tubo) e o modelo de Xiang-Zhong (SpT). Como resultado, este trabalho apresenta a implementação numérica dos modelos no *software* HyperFit a partir das relações constitutivas particularizadas e analisa as previsões resultantes dos modelos para os ajustes para grandes deformações dos dados experimentais de uma borracha natural e de um silicone.

**PALAVRAS-CHAVE:** hiperelasticidade, modelos constitutivos, implementação numérica, modelos micromecânicos, ajuste de curvas.

Fernandes, Eduardo. **Implementation and Analysis of Three Micromechanical Hyperelastic Models**. 2022. 15. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

## ABSTRACT

The correct modeling of the mechanical behavior of hyperelastic materials is essential for the analysis of elastomers to be performed numerically. The choice of a particular constitutive model to characterize a material is not a simple process. The HyperFit software makes this process easier by providing the possibility of fitting curves of 42 hyperelastic models simultaneously for a experimental data. However, only 7 of the 42 models available in the software are considered micromechanical models, the others are phenomenological. Micromechanical models are statistical models developed from information about the chemical bonds in the material. This work has as objective the numerical implementation and evaluation of 3 micromechanical hyperelastic models particularized for incompressible elastomers: the Bechir-Chavelier model, the Heinrich-Kaliske (Tube) model and the Xiang-Zhong (SpT) model. This work presents the numerical implementation of the models in HyperFit software from the particularized constitutive relations and analyzes the resulting predictions of the models for the fits to large deformations of experimental data of a natural rubber and a silicone.

**KEYWORDS:** hyperelasticity, constitutive models, numerical implementation, micromechanical models, curve fitting.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres Romanos

$b_i$	Força de corpo na direção $i$ .
$\mathbf{B}$	Tensor de Cauchy-Green.
$B$	Ensaio de tração biaxial.
$c$	Constante.
$e$	Deformação.
$G_c$	Constante constitutiva.
$G_e$	Constante constitutiva.
$K$	Constante constitutiva.
$\mathbf{I}$	Matriz identidade.
$I_1$	1º invariante de deformações.
$I_2$	2º invariante de deformações.
$N$	Constante constitutiva.
$N_3$	Constante constitutiva.
$N_8$	Constante constitutiva.
$p$	Pressão hidrostática.
$P$	Ensaio de cisalhamento puro
$R^2$	Coefficiente de correlação.
$t$	Tensão nominal.
$t_T$	Tensão nominal para o ensaio de tração uniaxial.
$t_P$	Tensão nominal para o ensaio de cisalhamento puro.
$t_B$	Tensão nominal para o ensaio de tração biaxial.
$T$	Ensaio de tração uniaxial.
$W$	Energia de deformação absorvida pelo corpo por unidade de volume.

### Caracteres Gregos

$\beta$	Constante constitutiva.
$\eta$	Constante constitutiva.

$n_c$	Constante constitutiva.	
$n_f$	Constante constitutiva.	
$\lambda$	Alongamento particularizado.	
$\lambda_i$	Alongamentos nas direções principais.	
$\lambda_r$	Alongamento relativo da cadeia	
$\mu_0$	Constante constitutiva.	
$\rho$	Densidade do material.	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{i,j}$	Tensor de Cauchy-Green.	[MPa]

### Índices

$i, j$  Índices variam de 1 a 3.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação .....	1
1.2 Revisão Bibliográfica .....	1
1.3 Objetivos.....	2
2. REVISÃO DE HIPERELASTICIDADE .....	2
2.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	2
2.1.1. Equação Constitutiva Não-Linear - Material Isotrópico Elástico Incompressível ...	2
2.2.1. Soluções Analíticas para Sólidos Incompressíveis.....	3
3. MODELOS HIPERELÁSTICOS ESTUDADOS .....	5
3.1. BECHIR-CHEVALIER .....	5
3.1.1. Tração Uniaxial .....	5
3.1.2. Cisalhamento Puro.....	5
3.1.3. Tração Biaxial.....	5
3.2. HEINRICH-KALISKE – TUBO.....	6
3.2.1. Tração Uniaxial .....	6
3.2.2. Cisalhamento Puro.....	6
3.2.3. Tração Biaxial.....	6
3.3. XIANG-ZHONG - SpT.....	6
3.3.1. Tração Uniaxial .....	7
3.3.2. Cisalhamento Puro.....	7
3.3.3. Tração Biaxial.....	7
4. IMPLEMENTAÇÃO E METODOLOGIA DE ANÁLISE .....	7
5. CASOS DE ESTUDO .....	9
5.1. BORRACHA NATURAL – TRELOAR .....	9
5.1.1. Ajuste para Ensaio de tração .....	9
5.1.2. Ajuste para Ensaio de cisalhamento puro.....	9
5.1.3. Ajuste para Ensaio de tração biaxial.....	10
5.1.4. Ajuste Multicritério .....	11
5.2. SILICONE – MED4930 .....	12
5.2.1. Ajuste para Ensaio de tração .....	12
5.2.2. Ajuste para Ensaio de tração biaxial.....	13
5.2.3. Ajuste Multicritério .....	14
6. CONCLUSÕES .....	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	16



APÊNDICE A .....	18
A.    Fórmulas para ajuste do modelo de Heinrich-Kaliske – Tubo .....	18
A.1 Tração Uniaxial .....	18
A.2 Cisalhamento Puro.....	18
A.3 Tração Biaxial.....	19
APÊNDICE B.....	19
B.    Constantes constitutivas - Borracha Natural.....	19
APÊNDICE C.....	20
C.    Constantes constitutivas – Silicone.....	20

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivação

O comportamento de materiais hiperelásticos como borrachas, esponjas e alguns tecidos biológicos é complexo de ser modelado devido ao seu caráter elástico não linear. O correto modelamento desse comportamento é essencial para que a análise de elastômeros possa ser realizada de forma numérica, como no método dos elementos finitos. Para isso, utiliza-se de ensaios mecânicos como tração uniaxial, compressão uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial. Utiliza-se, também, as relações tensão deformação teóricas que são derivadas de uma função de energia de deformação, função dada por um modelo constitutivo hiperelástico. Cada forma da função de energia de deformação depende de uma série de constantes, obtidas com um ajuste de curvas utilizando os resultados dos dados experimentais. Entretanto, devido ao grande número de modelos hiperelásticos disponíveis na literatura, a escolha de um modelo constitutivo em particular para caracterizar um dado material não é um processo simples. O HyperFit, *software* de calibração de modelos constitutivos para materiais hiperelásticos, desenvolvido pelo Grupo de Mecânica Aplicada da UFRGS (GMAp), facilita esse processo, possibilitando o ajuste de curvas de 42 modelos hiperelásticos simultaneamente para um determinado ensaio experimental. Contudo, dos 42 modelos disponíveis no *software*, apenas 7 modelos pertencem à classe dos modelos micromecânicos, sendo os demais fenomenológicos. Aumentar o número de modelos pertencentes a essa classe, com contribuições mais recentes, torna-se imprescindível para o desenvolvimento contínuo do *software* como uma plataforma de pesquisa de elastômeros.

### 1.2 Revisão Bibliográfica

Há um razoável número de modelos hiperelásticos disponíveis na literatura, entretanto, todos podem ser agrupados em duas categorias principais: fenomenológicos e micromecânicos (Marczak, *et al.*, 2006).

Os modelos fenomenológicos envolvem formulações macroscópicas contínuas baseados em invariantes principais ou alongamentos, geralmente com estruturas polinomiais. O modelo Mooney-Rivlin, que foi originalmente proposto por Mooney (1940), pode ser considerado como uma das formas mais simples dos modelos de base invariável. A sua forma mais generalizada foi introduzida por Rivlin e Saunders (1950). O modelo de Ogden proposto por Ogden (1972, 1984) é provavelmente o exemplo mais conhecido para as principais formulações constitutivas baseadas em alongamentos com a hipótese de Valanis-Landel.

Além destes modelos puramente fenomenológicos, foram propostos na literatura modelos micromecânicos, tais como o modelo de três cadeias de James e Guth (1943) e Wang e Guth (1952) que assume que a rede de polímeros pode ser representada por três conjuntos de cadeias orientadas nas principais direções de deformação. A energia macroscópica livre da rede é determinada pela multiplicação do número de cadeias na rede com a média aritmética das energias livres da cadeia de tipo Langevin consistentemente calculadas com a hipótese de afinidade nas direções principais. O modelo de oito cadeias, desenvolvido por Arruda e Boyce (1993) define uma única rede não-fina que assume ser representativa para todas as cadeias que constituem a rede. Boyce (1996) comparou o modelo de oito cadeias com o modelo de primeira invariante de Gent proposto em Gent (1996) e demonstrou a quase equivalência destes dois modelos no sentido ensaio des suas construções e qualidades dos resultados dos testes.

A partir desses e outros trabalhos, uma longa lista de contribuições tem sido publicada, alguns bastante genéricos e outros de aplicação restrita. Modelos micromecânicos têm dificuldade em capturar os efeitos de enrijecimento de elastômeros devido à hipótese de distribuição gaussiana das cadeias, e por isso se adiciona uma extensibilidade finita a elas,

através das distribuições não-gaussianas. Como esses modelos se tornam muito complexos quando aplicados a distribuições atômicas realistas, os modelos fenomenológicos acabam sendo preferidos em Engenharia (Stumpf e Marczak, 2021). No entanto, algumas contribuições mais recentes de modelos micromecânicos parecem promissoras.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo a implementação numérica e avaliação de 3 modelos constitutivos micromecânicos para elastômeros incompressíveis disponíveis na literatura, sendo considerados modelos de contribuições mais recentes. Como resultado deste trabalho, espera-se analisar e comparar as previsões resultantes dos modelos implementados para os ajustes dos dados experimentais da Borracha Natural (Treloar) e de um Silicone (MED4930).

## 2. REVISÃO DE HIPERELASTICIDADE

O comportamento de componentes feitos de materiais hiperelásticos como borrachas, não segue uma relação linear entre tensão e deformação. Por ser um material de comportamento não-linear, o entendimento das relações constitutivas desses materiais é fundamental para a correta utilização de programas de simulação na solução de problemas práticos.

Este capítulo revisa brevemente as relações constitutivas para materiais hiperelásticos incompressíveis. A teoria básica pode ser encontrada em livros sobre mecânica do contínuo (Green e Adkins, 1960; Malvern, 1969; Atkin e Fox, 1980; Lai e Krempl, 1993). O objetivo é revisar relações que serão utilizadas nas seções seguintes. Para isso, assume-se o conhecimento básico da teoria da elasticidade.

### 2.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Na análise estrutural, relações constitutivas compreendem as equações que relacionam tensão com deformação. Desta forma, a obtenção de uma permite o cálculo da outra e vice-versa. Esta seção apresenta um resumo de hiperelasticidade aplicada a materiais isotrópicos incompressíveis, com vistas à sua utilização em borrachas. O interesse está na apresentação de relações gerais que não imponham limites sobre a magnitude das deformações. As relações apresentadas a seguir foram deduzidas em Marczak, *et al.*, (2006).

#### 2.1.1. Equação Constitutiva Não-Linear - Material Isotrópico Elástico Incompressível

Boa parte das borrachas pode ser considerada incompressível. Isto simplifica as equações constitutivas, mas tem a desvantagem de as tensões não poderem ser determinadas univocamente a partir das deformações devido ao aparecimento de uma pressão hidrostática  $p$  indeterminada:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^{-1} \quad (1)$$

As funções  $b_i$  podem ser derivadas de uma função potencial  $W$  dos invariantes  $I_1$  e  $I_2$  do tensor deformação de Cauchy-Green  $\mathbf{B}$  tal que:  $b_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}$ ;  $b_2 = -2\frac{\partial W}{\partial I_2}$ . Logo, a Eq.(1) fica:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} \quad (2)$$

A Eq.(2) é uma relação constitutiva para um material sólido hiperelástico isotrópico. A partir dessa relação, o desafio é estabelecer uma função  $W$  apropriada para cada material.

### 2.2.1. Soluções Analíticas para Sólidos Incompressíveis

A determinação completa da função  $W$  na Eq.(2) implica na realização de ensaios experimentais característicos. Por serem simples, estes ensaios correspondem a uma classe de problemas que possuem solução analítica porque trata-se de problemas submetidos a deformações homogêneas. O Campo de tensões verdadeiras não-nulas é dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p_0 + 2\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_1^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \sigma_{22} &= -p_0 + 2\lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \sigma_{33} &= -p_0 + \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\end{aligned}\quad (3)$$

Com as Eqs.(3), pode-se explorar soluções analíticas para casos simples de geometria e carregamento.

#### 2.2.1.1. Tração Uniaxial de uma Lâmina Fina Incompressível

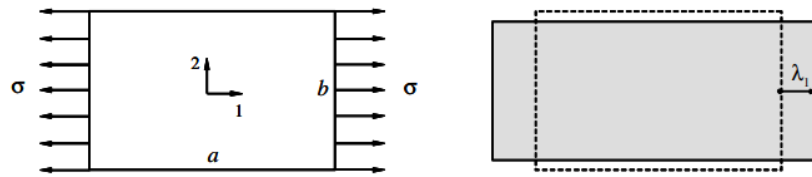


Figura 1 – Tração uniaxial de uma lâmina incompressível (Marczak, *et al.*, 2006).

Este caso pode ser obtido particularizando-se as Eqs.(3) com  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ . O campo de alongamentos da Figura 1 resulta em:  $\lambda_1 = \lambda$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  e, conseqüentemente, nas seguintes expressões para os invariantes:  $I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$ ;  $I_2 = 2\lambda + \frac{2}{\lambda^2}$ . Com isso, as Eqs.(3) resultam em:

$$\sigma_{11} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4)$$

Por se tratar de elastômeros, o diagrama tensão de engenharia deformação ( $t \times \lambda$ ) é usualmente mais empregado do que o diagrama tensão nominal deformação ( $\sigma \times \lambda$ ). A relação teórica entre  $t$  e  $\sigma$ , para materiais incompressíveis, pode ser obtida diretamente por:

$$t = \frac{\sigma}{\lambda} \quad (5)$$

Substituindo a Eq.(4) na Eq.(5) temos:

$$t_T = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (6)$$

### 2.2.1.2. Cisalhamento Puro de uma Lâmina Fina Incompressível

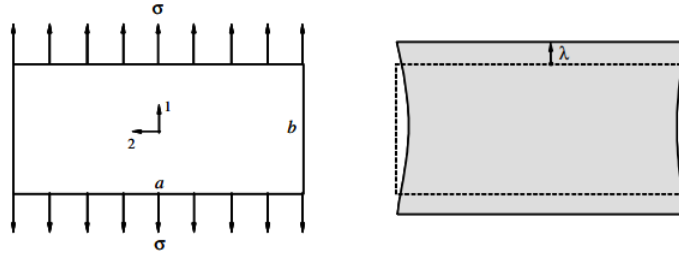


Figura 2 – Cisalhamento puro de uma lâmina fina incompressível (Marczak, *et al.*, 2006).

Neste caso, se a largura  $a$  da fita é suficientemente grande comparada com o comprimento  $b$ , a não-uniformidade na deformação resultante das arestas livres (efeito de bordo) pode ser desprezada. Desta forma:  $\lambda_1 = \lambda$ ;  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$ ;  $\lambda_3 = 1$  e, conseqüentemente:  $I_1 = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1$ ;  $I_2 = I_1$ . Com isso, as Eqs.(3) resultam em:

$$\sigma_{11} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right); \quad \sigma_{22} = 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (7)$$

Como monitora-se apenas a tensão na direção de aplicação da carga, a relação relevante entre  $\sigma$  e  $\lambda$  para este modo de deformação é  $\sigma_{11}$ . Substituindo  $\sigma_{11}$  da Eq.(7) na Eq.(5) temos:

$$t_P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (8)$$

### 2.2.1.3. Extensão Biaxial de uma Lâmina Fina Incompressível

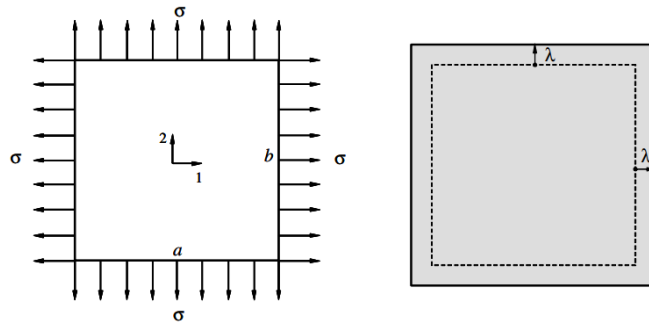


Figura 3 – Extensão biaxial de uma lâmina fina incompressível (Marczak, *et al.*, 2006).

Neste caso, obtém-se a extensão homogênea de uma lâmina. Logo:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ;  $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2}$  e, conseqüentemente:  $I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}$ ;  $I_2 = \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2}$ . Com isso, as Eqs.(3) resultam em:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (9)$$

Substituindo a Eq.(9) na Eq.(5) temos:

$$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (10)$$

### 3. MODELOS HIPERELÁSTICOS ESTUDADOS

Para este trabalho, foi proposta a implementação e a análise de três modelos constitutivos hiperelásticos micromecânicos. Os modelos micromecânicos são modelos estatísticos desenvolvidos a partir de informações sobre as ligações químicas do material. Comprimento de cadeias moleculares, número e/ou tipo de ligações químicas e variáveis termodinâmicas são dados tipicamente empregados na construção destes modelos. A palavra micromecânica empregada aqui, não deve ser confundida com o contexto de sólidos multifásicos

Neste capítulo, são apresentadas as expressões para a energia de deformação destes modelos, escritas em sua forma mais geral, e as expressões dos modelos particularizadas para materiais incompressíveis, prontas para serem ajustadas aos dados experimentais.

#### 3.1. BECHIR-CHEVALIER

O modelo de Bechir e Chevalier (2010) combina os conceitos dos modelos micromecânicos propostos por Flory e Erman (1982) e Boyce e Arruda (2000) e a abordagem fenomenológica de Zúñiga et al. (2002). O modelo é uma adaptação para descrever a resposta elástica multiaxial da borracha vulcanizada em grandes deformações com seis parâmetros ( $\mu_0, \eta, \rho, N_8, N_3$  e  $K$ ). A função energia de deformação  $W$  é dada pela seguinte equação:

$$W = n_f N_8 kT \left[ \lambda_r \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] + \frac{n_c}{3} N_3 kT \sum_{j=1}^{j=3} \left[ \bar{\beta}_j \lambda_{jr} + \ln \left( \frac{\bar{\beta}_j}{\sinh \bar{\beta}_j} \right) \right] - c \quad (11)$$

Particularizando a Eq.(11) para materiais incompressíveis, Bechir e Chevalier (2010) apresentam as relações constitutivas para os ensaios experimentais de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial.

##### 3.1.1. Tração Uniaxial

Para o ensaio de tração uniaxial tem-se a seguinte relação constitutiva, onde a Eq.(5) já foi empregada:

$$t_T = \frac{\rho \frac{\mu_0}{3} \lambda_r \left( \frac{3 - \lambda_r^2}{1 - \lambda_r^2} \right) (\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}) + \left( 1 - \frac{\eta K \lambda}{\sqrt{N_3}} \right) \frac{\mu_0}{3} \left[ (K \lambda)^2 \left( \frac{3 - (K \lambda)^2 / N_3}{1 - (K \lambda)^2 / N_3} \right) - \frac{1}{K \lambda} \left( \frac{3 - 1 / K \lambda N_3}{1 - 1 / K \lambda N_3} \right) \right]}{\lambda} \quad (12)$$

$$\text{Onde } \lambda_r = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 2/\lambda}{3N_8}}.$$

##### 3.1.2. Cisalhamento Puro

Para o ensaio de cisalhamento puro tem-se a seguinte relação constitutiva, onde a Eq.(5) já foi empregada:

$$t_p = \frac{\rho \frac{\mu_0}{3} \lambda_r \left( \frac{3 - \lambda_r^2}{1 - \lambda_r^2} \right) (\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}) + \left( 1 - \frac{\eta K \lambda}{\sqrt{N_3}} \right) \frac{\mu_0}{3} \left[ (K \lambda)^2 \left( \frac{3 - (K \lambda)^2 / N_3}{1 - (K \lambda)^2 / N_3} \right) - \frac{1}{(K \lambda)^2} \left( \frac{3 - 1 / (K \lambda)^2 N_3}{1 - 1 / (K \lambda)^2 N_3} \right) \right]}{\lambda} \quad (13)$$

$$\text{Onde } \lambda_r = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 1 + 1/\lambda^2}{3N_8}}.$$

##### 3.1.3. Tração Biaxial

Para o ensaio de tração biaxial tem-se a seguinte relação constitutiva:

$$t_B = \frac{\rho \frac{\mu_0}{3} \lambda_r \left( \frac{3 - \lambda_r^2}{1 - \lambda_r^2} \right) \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) + \left( 1 - \frac{\eta K \lambda}{\sqrt{N_3}} \right) \frac{\mu_0}{3} \left[ (K \lambda)^2 \left( \frac{3 - (K \lambda)^2 / N_3}{1 - (K \lambda)^2 / N_3} \right) - \frac{1}{(K \lambda)^4} \left( \frac{3 - 1 / (K \lambda)^4 N_3}{1 - 1 / (K \lambda)^4 N_3} \right) \right]}{\lambda} \quad (14)$$

$$\text{Onde } \lambda_r = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 2/\lambda}{3N_3}}.$$

### 3.2. HEINRICH-KALISKE – TUBO

O modelo de Tubo proposto por Heinrich e Kaliske (1997) é baseado em uma hipótese de ligações de rede entre sucessivos nós. A forma matemática da deformação do tubo é capaz de determinar o comportamento do material para grandes deformações numa formulação mecânica contínua com três parâmetros ( $G_c$ ,  $G_e$  e  $\beta$ ), adequada para uma implementação eficiente num método de elementos finitos. A função energia de deformação  $W$  é dada pela seguinte equação:

$$W = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{G_c}{2} (\lambda_i^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2} (\lambda_i^{-\beta} - 1) \right] \quad (15)$$

A literatura do modelo não apresenta as particularizações necessárias para o ajuste de curvas. Sendo assim, as relações constitutivas para os ensaios experimentais foram obtidas no Apêndice A e apresentadas na sua forma final nesta seção.

#### 3.2.1. Tração Uniaxial

Para o ensaio de tração uniaxial tem-se a seguinte relação constitutiva:

$$t_T = 2 \left( G_c \lambda - \frac{2G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{G_c}{\lambda^2} + \frac{2G_e \lambda^{0,5\beta-1}}{\beta} \right) \quad (16)$$

#### 3.2.2. Cisalhamento Puro

Para o ensaio de cisalhamento puro tem-se a seguinte relação constitutiva:

$$t_P = 2 \left( G_c \lambda - \frac{2G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{G_c}{\lambda^3} + \frac{2G_e \lambda^{\beta-1}}{\beta} \right) \quad (17)$$

#### 3.2.3. Tração Biaxial

Para o ensaio de tração biaxial tem-se a seguinte relação constitutiva:

$$t_B = 2G_c \lambda - \frac{4G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{2G_c}{\lambda^5} + \frac{4G_e \lambda^{2\beta-1}}{\beta} \quad (18)$$

### 3.3. XIANG-ZHONG - SpT

O modelo SpT proposto por Xiang et al. (2018) adota a distribuição de Langevin para descrever o enrijecimento material. Além disso, utiliza uma nova rede molecular para preencher a lacuna entre as grandezas microscópicas e macroscópicas, possibilitando caracterizar com precisão a dependência do estado de amolecimento, enrijecimento e deformação com apenas três parâmetros ( $G_c$ ,  $G_e$  e  $N$ ). A função energia de deformação  $W$  é dada pela seguinte equação:

$$W = G_c N \ln \left( \frac{3N + \frac{1}{2} I_1}{3N - I_1} \right) + G_e \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \quad (19)$$

Particularizando a Eq.(19) para materiais incompressíveis, Xiang et al. (2018) obteve as relações constitutivas para os ensaios experimentais.

### 3.3.1. Tração Uniaxial

Para o ensaio de tração uniaxial tem-se a seguinte relação constitutiva, onde a Eq.(5) já foi empregada:

$$t_T = \left[ G_c \frac{(\lambda^2 - \lambda^{-1})}{\left(1 - \frac{I_1}{3N}\right) \left(1 + 0.5 \frac{I_1}{3N}\right)} + G_e (\lambda^{1/2} - \lambda^{-1}) \right] \lambda^{-1} \quad (20)$$

### 3.3.2. Cisalhamento Puro

Para o ensaio de cisalhamento puro tem-se a seguinte relação constitutiva, onde a Eq.(5) já foi empregada:

$$t_P = \left[ G_c \frac{(\lambda^2 - \lambda^{-2})}{\left(1 - \frac{I_1}{3N}\right) \left(1 + 0.5 \frac{I_1}{3N}\right)} + G_e (\lambda - \lambda^{-1}) \right] \lambda^{-1} \quad (21)$$

### 3.3.3. Tração Biaxial

Para o ensaio de tração biaxial tem-se a seguinte relação constitutiva, onde a Eq.(5) já foi empregada:

$$t_B = \left[ G_c \frac{(\lambda^2 - \lambda^{-4})}{\left(1 - \frac{I_1}{3N}\right) \left(1 + 0.5 \frac{I_1}{3N}\right)} + G_e (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \right] \lambda^{-1} \quad (22)$$

## 4. IMPLEMENTAÇÃO E METODOLOGIA DE ANÁLISE

Com as relações constitutivas de cada modelo definidas, implementou-se os modelos no *software* HyperFit. O *software* foi desenvolvido no MATLAB e utiliza o método dos mínimos quadrados não lineares para realizar os ajustes de curvas. A Tabela 1 apresenta os modelos implementados e as constantes a serem determinadas pelos ajustes de curvas com os pontos dos dados experimentais de cada material.

Tabela 1 – Modelos hiperelásticos implementados no HyperFit e suas respectivas constantes.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0, \eta, \rho, N_8, N_3, K$
Tubo	$G_c, G_e, \beta$
SpT	$G_c, G_e, N$

O método dos mínimos quadrados é uma abordagem padrão em análise de regressão para aproximar a solução de conjuntos de equações em que há mais equações do que incógnitas minimizando a soma dos quadrados dos resíduos (diferença entre um valor observado e o valor ajustado fornecido por um modelo) feito nos resultados de cada equação individual. Os problemas de mínimos quadrados se dividem em duas categorias: mínimos quadrados lineares



e mínimos quadrados não lineares, dependendo se os resíduos são ou não lineares em todas as incógnitas. Para as equações particularizadas de cada modelo hiperelástico os resíduos são não lineares. Desta forma, o método dos mínimos quadrados não lineares é utilizado pelo software resolvendo a seguinte expressão:  $\min(\sum ||F(x_i) - y_i||^2)$ , onde  $F(x_i)$  é uma função não linear e  $y_i$  são dados. Neste trabalho para  $F(x_i)$  aplicam-se as funções  $t_T$ ,  $t_P$  e  $t_B$  de cada modelo e para  $y_i$  aplicam-se os dados experimentais de tensão obtidos dos ensaios experimentais de cada material.

Ao realizar um ajuste para um dado ensaio, o HyperFit obtém previsões teóricas para os demais modos de deformação. Para a grande maioria dos elastômeros existentes, deve-se esperar um comportamento similar ao ilustrado na Figura 4.

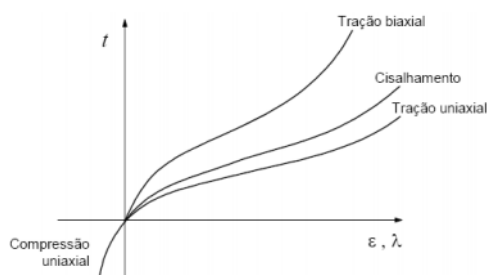


Figura 4 – Forma típica das curvas  $t \times \lambda$  obtidas em ensaios experimentais de borracha (Muhr, 2005).

Quando plotados na mesma escala, os ensaios de cisalhamento e tração biaxial produzem tensões maiores que as obtidas para o ensaio de tração uniaxial. É comum a curva de cisalhamento diferir pouco da curva de tração uniaxial para pequenas deformações, aumentando sua diferença para deformações maiores, mas a curva de tração biaxial produz tensões notadamente maiores (Marczak, *et al.*, 2006).

Os modelos de Bechir-Chevalier e SpT foram validados de acordo com os ajustes de tração uniaxial disponíveis na literatura de cada modelo para o conjunto de dados Treloar (Jones *et al.*, 1975). A literatura do modelo de Tubo não possui nenhum tipo de ajuste, não sendo possível validar a implementação da mesma forma. Entretanto, as equações particularizadas deste modelo foram obtidas conforme os cálculos apresentados no Apêndice A.

Para avaliar os modelos implementados, será realizado um ajuste com 15 pontos para cada um dos ensaios disponíveis nos dados experimentais do material utilizado. A partir dos resultados para cada ensaio, serão verificadas as previsões para o ensaio de calibração e para os ensaios diferentes do ensaio de calibração, previsões geradas a partir das constantes obtidas para o ensaio de calibração. Além disso, será realizado o ajuste multicritério, ajuste para todos os dados experimentais disponíveis simultaneamente, diferentemente dos ajustes para cada ensaio de calibração que são ajustes apenas para a curva de um único dado experimental.

Os gráficos de resultados seguem a convenção de cores padrão do HyperFit: preto para ensaio de tração uniaxial ( $T$ ), azul para ensaio de cisalhamento puro ( $P$ ) e vermelho para ensaio de tração biaxial ( $B$ ), sendo linhas contínuas para previsões teóricas e símbolos para dados experimentais. As legendas contidas nos gráficos são apresentadas em inglês pois o *software* não possui a opção em português.

Com o objetivo de padronizar e tornar mais objetiva a avaliação e comparação dos resultados, é apresentado, juntamente com os gráficos de ajustes, as classificações dos modelos para cada tipo de ensaio. Classificações estas obtidas diretamente no *software* HyperFit, a partir do cálculo do coeficiente de correlação entre as soluções numérica e experimental. Este método proposto por Hoss (2009) é baseado no conceito do  $R^2$  linear e na teoria geral para ajustes não lineares de curvas.

## 5. CASOS DE ESTUDO

### 5.1. BORRACHA NATURAL – TRELOAR

A borracha natural é um dos elastômeros mais empregados em engenharia, e pode ser manufaturada em inúmeras combinações de composição química e aditivos. Para fins de validação dos modelos utilizou-se o conjunto de dados de Treloar (Jones *et al.*, 1975). As constantes obtidas para cada modelo em todos os ajustes são apresentadas no Apêndice B.

#### 5.1.1. Ajuste para Ensaio de tração

Primeiramente, analisou-se como os modelos hiperelásticos se ajustam ao ensaio *T*. As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ , verificando-se as previsões para *P* e *B* na mesma faixa de deformações. A Figura 5 apresenta os resultados para os modelos estudados.

Para o ensaio de calibração *T* todos os modelos apresentaram uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$ , capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e com os coeficientes de correlação próximos a 1. Já para os ensaios diferentes do ensaio de calibração, apenas o modelo SpT forneceu boas previsões.

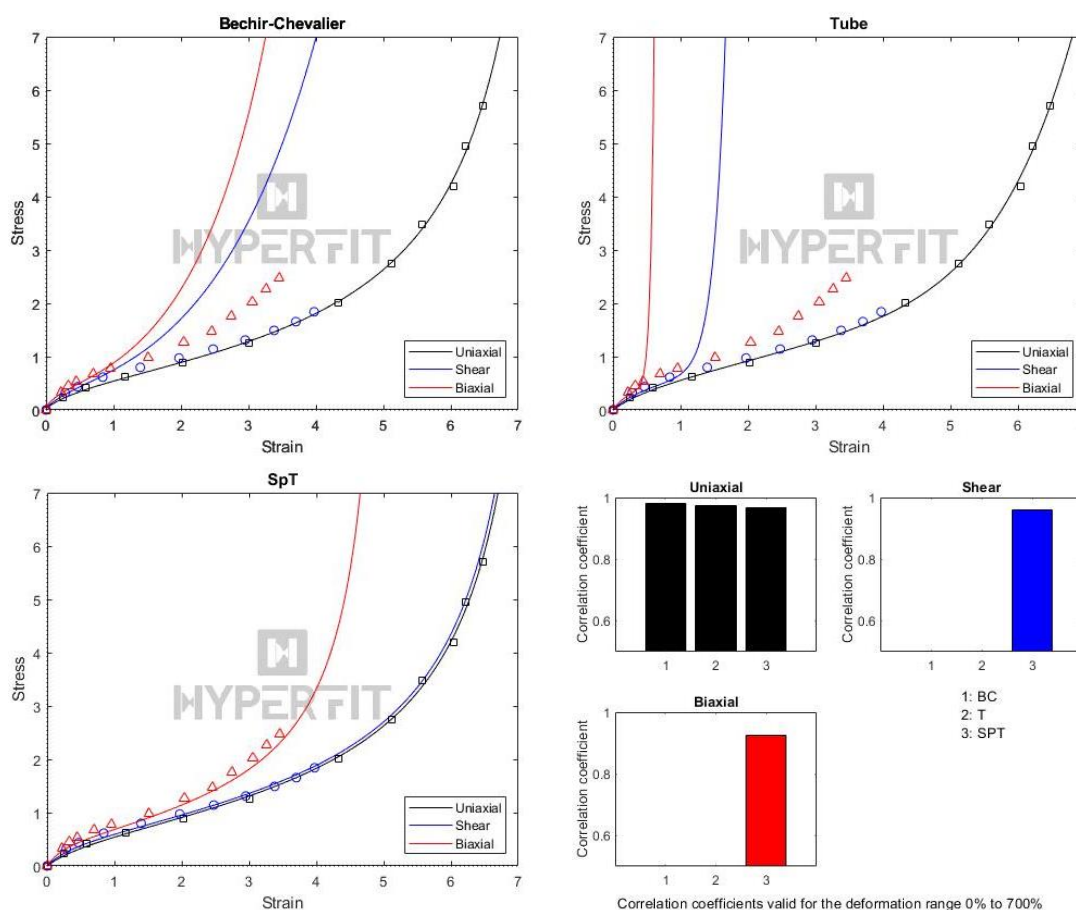


Figura 5 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para T na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ .

#### 5.1.2. Ajuste para Ensaio de cisalhamento puro

Analisou-se como os modelos hiperelásticos se ajustam ao ensaio *P*. As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ . A Figura 6 apresenta os resultados para os modelos estudados.

Para o ensaio de calibração  $P$  todos os modelos apresentaram uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$ , capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e com os coeficientes de correlação próximos a 1. Já para os ensaios diferentes do ensaio de calibração, o modelo de Bechir-Chevalier resultou em boa representatividade para os ensaios  $T$  e  $B$  até 200%, a partir de 200% não captura com fidelidade o efeito de enrijecimento do material. Neste caso vale uma observação importante sobre os coeficientes de correlação obtidos para o ajuste do modelo de Bechir-Chevalier. Como pode-se observar os valores estão próximos a 1, ou seja, se olharmos apenas para os coeficientes de correlação poderíamos constatar que o modelo fornece boas previsões para os ensaios  $T$  e  $B$  ao longo de toda a faixa de deformação, entretanto, ao analisar o gráfico do ajuste percebe-se que essa afirmação não é verdadeira. Isso ocorre devido a formulação matemática do coeficiente de correlação que tem um peso maior no cálculo para os pontos do início do ajuste. Os modelos de Tubo e Spt resultaram previsões razoáveis para o ensaio  $T$ , mas previsões ruins para o ensaio  $B$ .

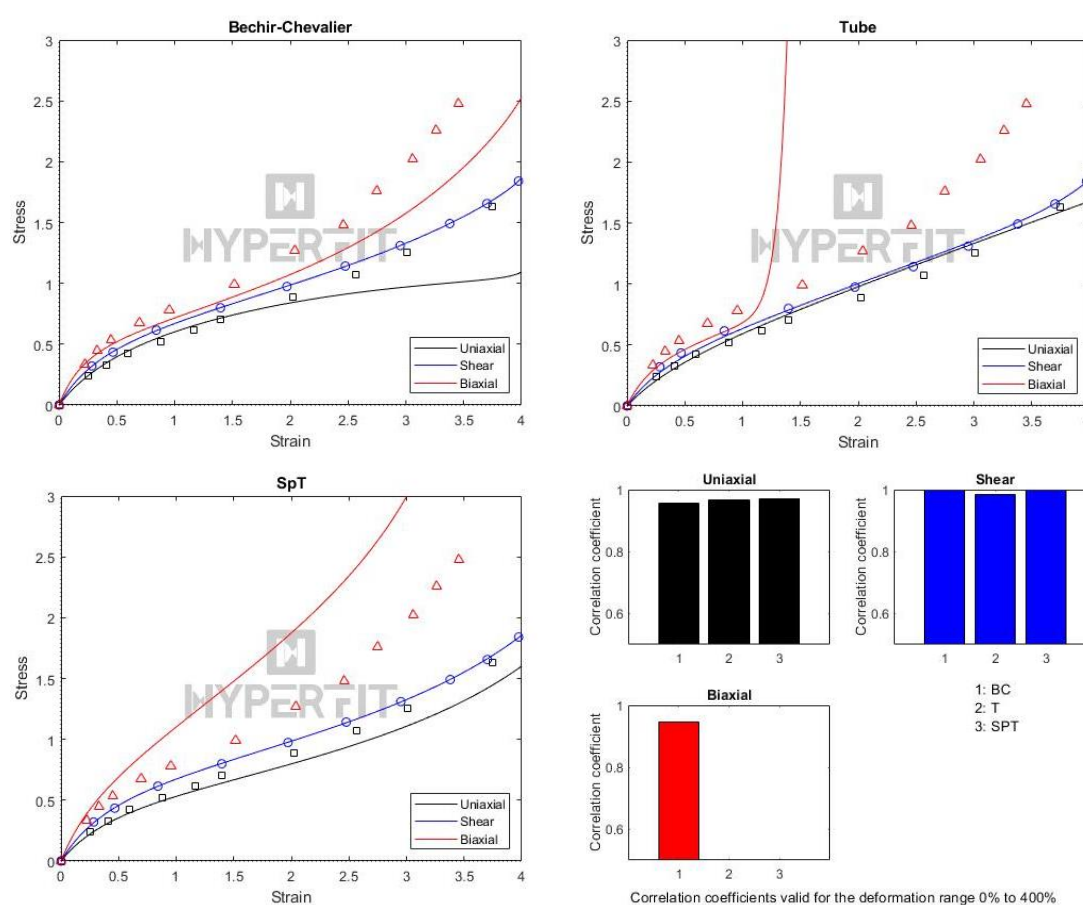


Figura 6 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para P na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ .

### 5.1.3. Ajuste para Ensaio de tração biaxial

Analisou-se como os modelos hiperelásticos se ajustam ao ensaio  $B$ . As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ . A Figura 7 apresenta os resultados para os modelos estudados.

Para o ensaio de calibração  $B$  todos os modelos apresentaram uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$ , capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e com os coeficientes de correlação próximos a 1. Já para os ensaios diferentes do ensaio de calibração, o modelo de Bechir-Chevalier resultou em boa representatividade para o

ensaio  $P$ , e para o ensaio  $T$  resultou em um problema semelhante ao que o modelo apresentou para a predição  $T$  no ensaio de calibração  $P$  da seção 5.1.2. Os modelos de Tubo e SpT resultaram em predições ruins para ambos os ensaios diferentes do ensaio de calibração.

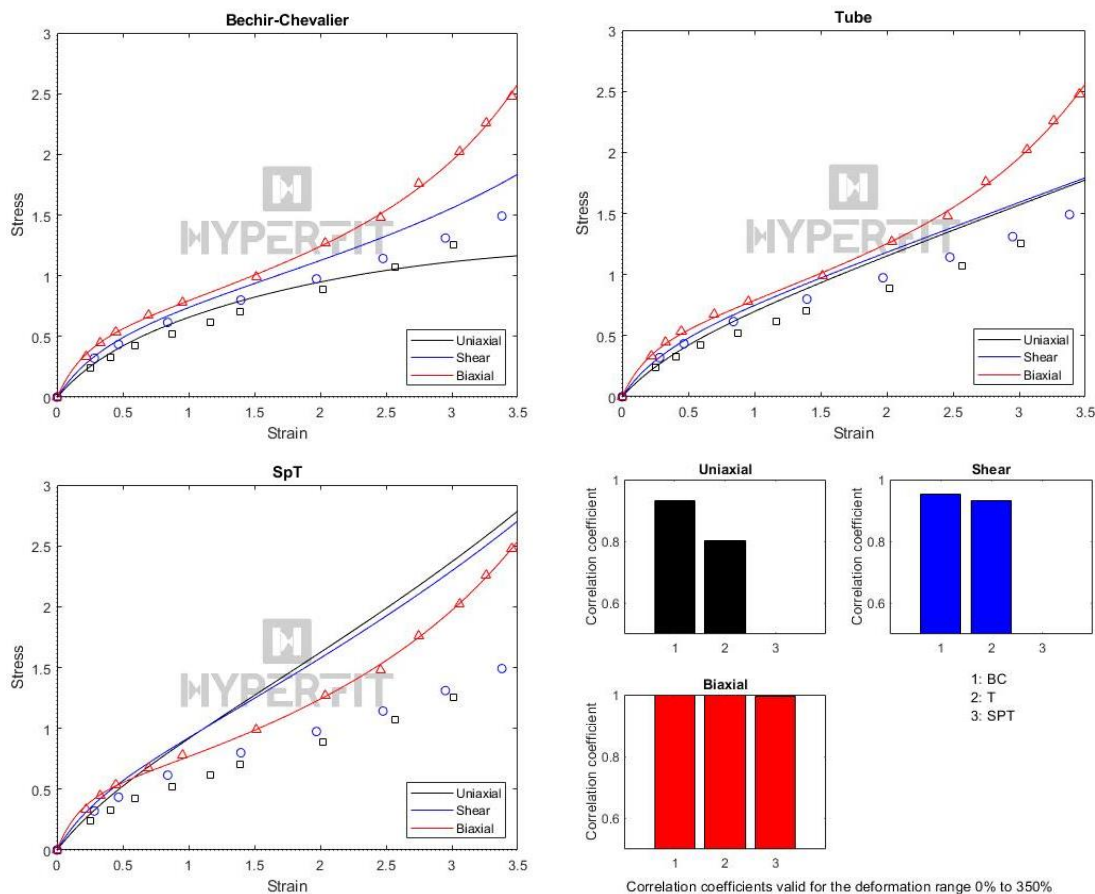


Figura 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para B na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ .

#### 5.1.4. Ajuste Multicritério

As constantes aqui foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ , visto que essa é a menor faixa de deformação entre os três ensaios disponíveis. A Figura 8 apresenta os resultados para os modelos estudados.

No ajuste considerando todos os dados experimentais para obtenção das constantes, os modelos de Tubo e SpT apresentaram uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$  para todos os ensaios, capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e com o coeficiente de correlação próximo a 1. O modelo de Bechir-Chevalier representou bem os ensaios  $P$  e  $B$ , mas para o ensaio  $T$  não conseguiu capturar fidelidade os efeitos de enrijecimento, mesmo apresentando o coeficiente de correlação próxima a 1.

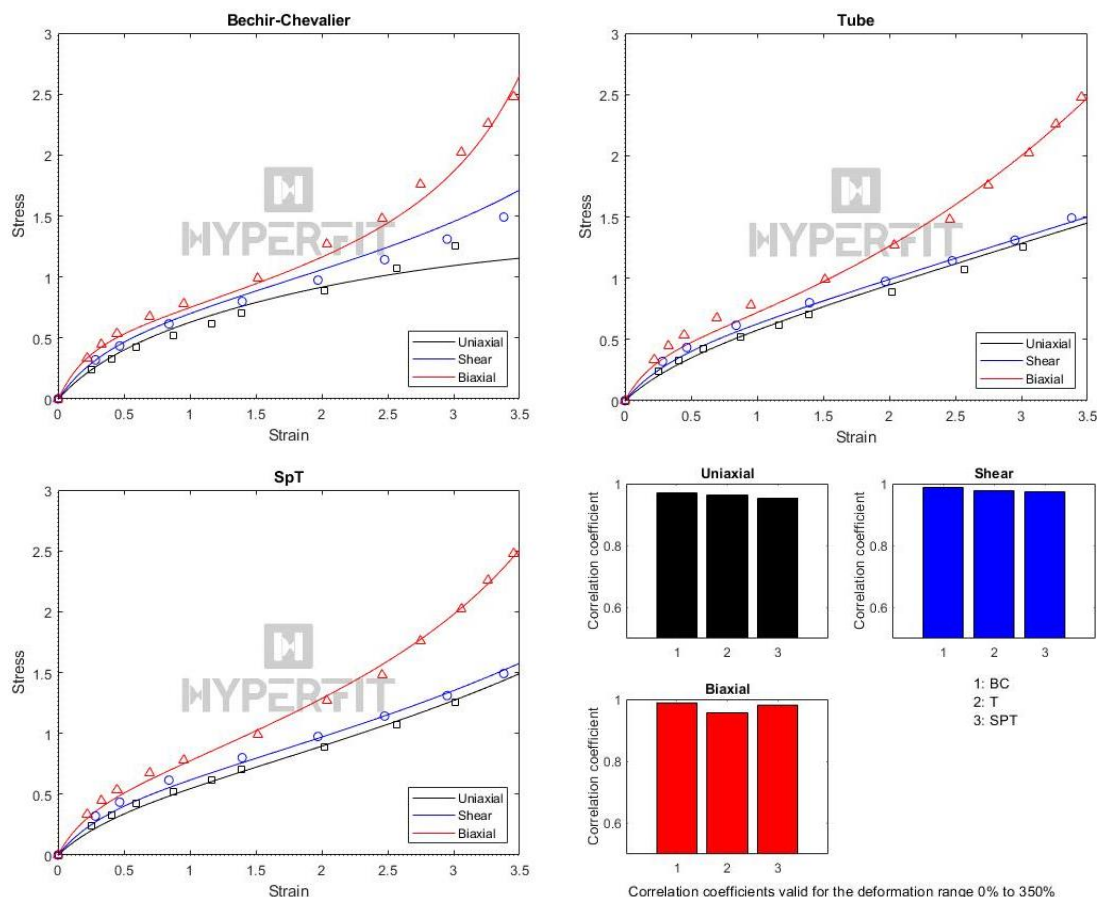


Figura 8 - Borracha natural (Treloar). Ajuste Multicritério na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ .

## 5.2. SILICONE – MED4930

Com o intuito de avaliar o comportamento dos modelos frente a outro tipo de borracha, será analisada nesta seção, uma amostra de silicone. Para a amostra de silicone escolhida, não se dispõem dos dados do ensaio de cisalhamento. As constantes obtidas para cada modelo em todos os ajustes são apresentadas no Apêndice C.

### 5.2.1. Ajuste para Ensaio de tração

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ , verificando-se as predições correspondentes na mesma faixa de deformações. A Figura 9 apresenta os resultados para os modelos estudados.

Para o ensaio de calibração T apenas o modelo de Tubo apresentou uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$  capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material com o coeficiente de correlação próximo a 1. O modelo SpT apresentou um comportamento incomum ao não iniciar a curva teórica no ponto [0,0] do gráfico, contudo, apresentou um bom ajuste a partir de 200% de deformação. O modelo de Bechir-Chevalier não conseguiu capturar com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e apresentou erros moderados no valor das tensões em toda a faixa de deformação. Já para o ensaio B, diferente do ensaio de calibração, todos os modelos apresentaram predições ruins ou com inconsistências

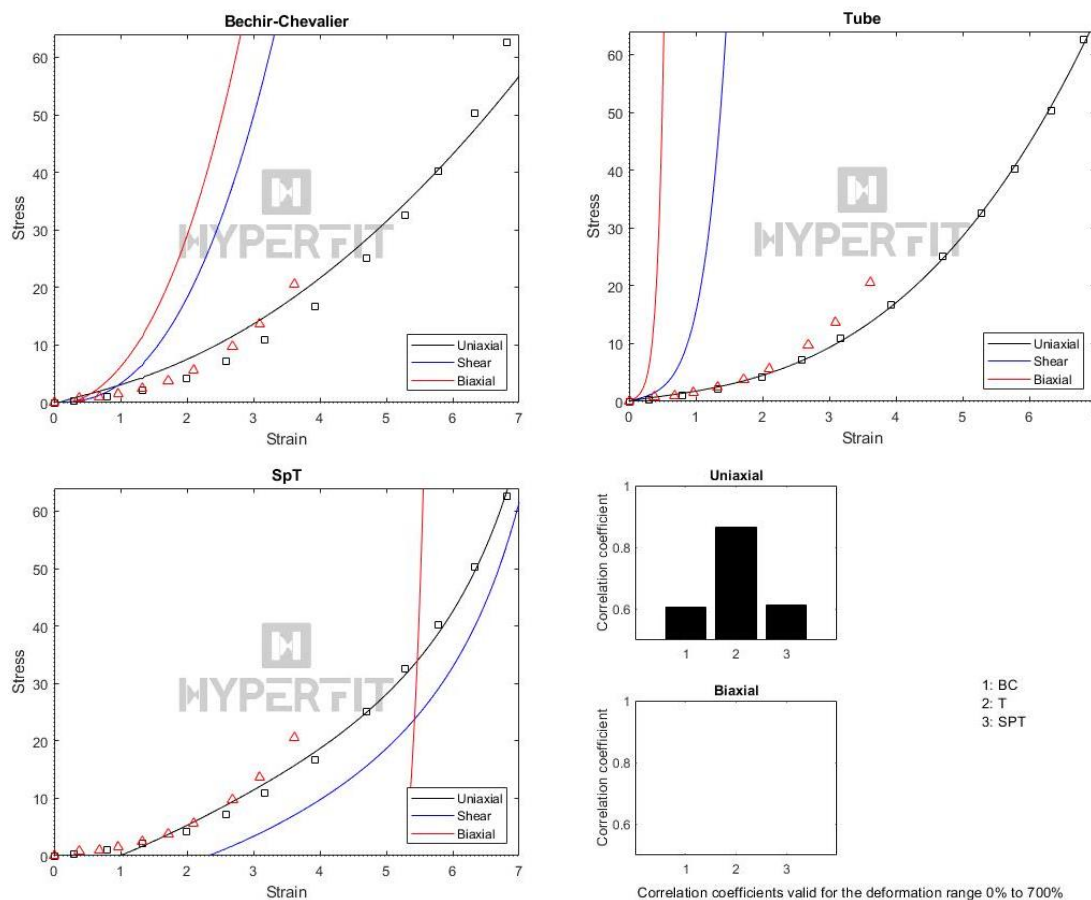


Figura 9 - Silicone (MED4930). Ajuste para T na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ .

### 5.2.2. Ajuste para Ensaio de tração biaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ , verificando-se as previsões correspondentes na mesma faixa de deformações. A Figura 10 ilustra os resultados para os modelos estudados.

Para o ensaio de calibração *B* os modelos de Tubo e Bechir-Chevalier apresentaram uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$  para todos os ensaios, capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e com o coeficiente de correlação próximo a 1. O modelo SpT apresentou um bom ajuste apenas a partir de 150% de deformação. Já para o ensaio *T*, diferente do ensaio de calibração, todos os modelos apresentaram previsões ruins ou com inconsistências.

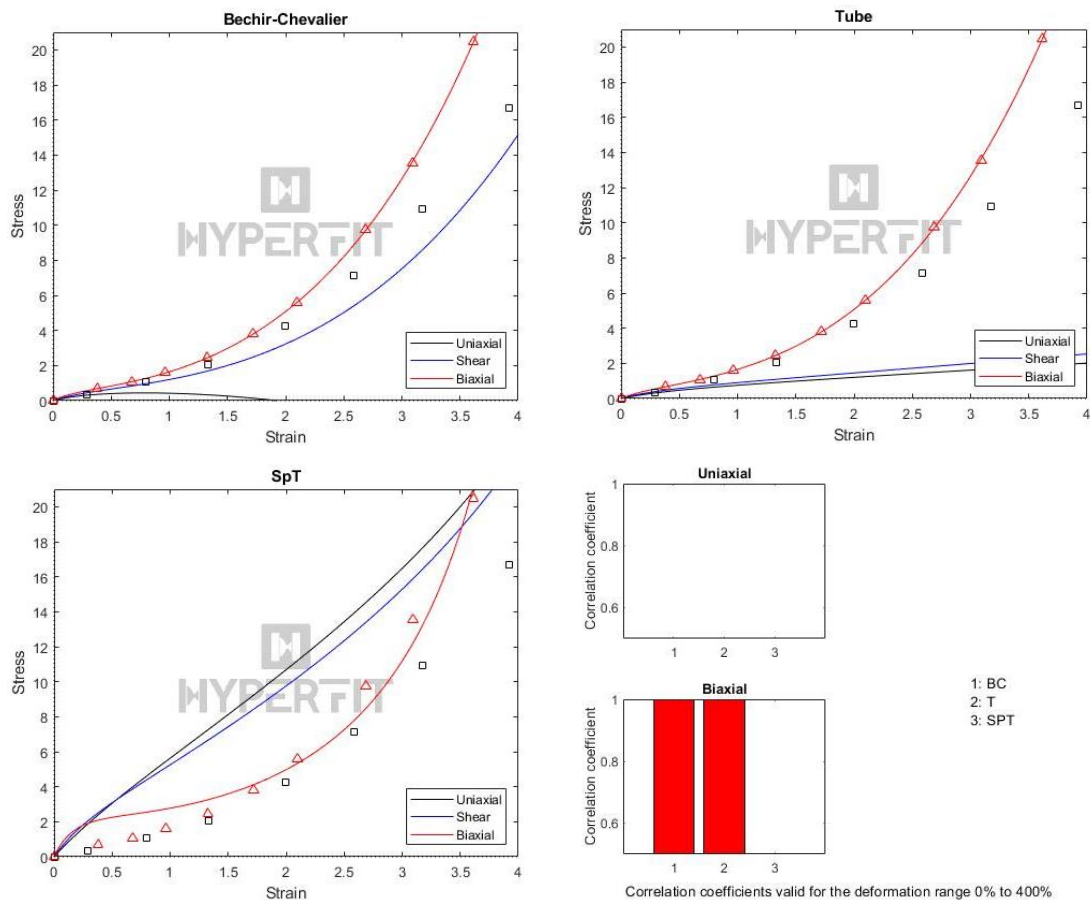


Figura 10 - Silicone (MED4930). Ajuste para B na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ .

### 5.2.3. Ajuste Multicritério

As constantes aqui foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ , visto que essa é a menor faixa de deformação entre os dois ensaios disponíveis. A Figura 11 apresenta os resultados para os modelos estudados e um comparativo do coeficiente de correlação para cada predição.

No ajuste considerando todos os dados experimentais disponíveis ( $T$  e  $B$ ) para obtenção das constantes, o modelo Bechir-Chevalier apresentou uma excelente representatividade da curva  $t \times \lambda$  para os dois ensaios, capturando com fidelidade os efeitos de enrijecimento do material e com o coeficiente de correlação próximo a 1. O modelo SpT representou bem o ensaio  $B$  apenas a partir de 150%, mas para o ensaio  $T$  apresentou um resultado ruim. Já o modelo de Tubo representou bem ambos os ensaios até 200%.

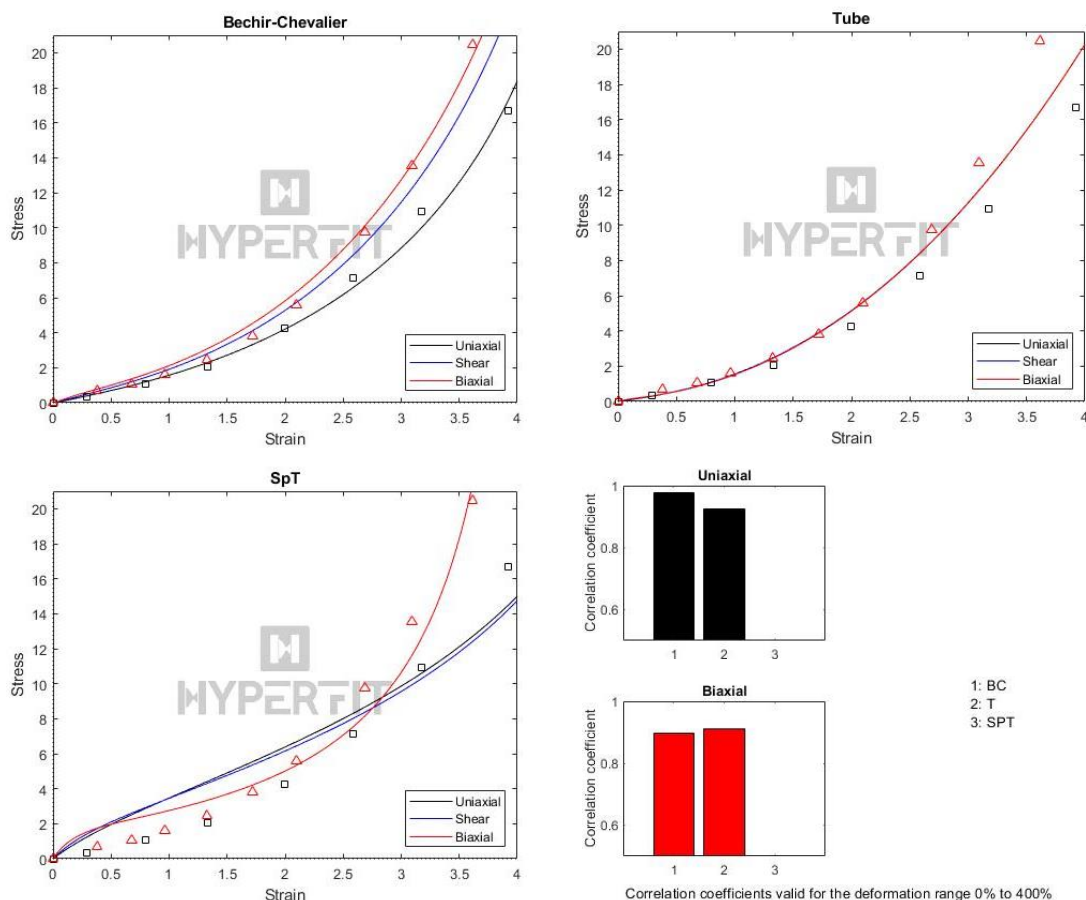


Figura 11 - Silicone (MED4930). Ajuste Multicritério na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ .

## 6. CONCLUSÕES

A implementação numérica dos 3 modelos estudados neste trabalho foi realizada no *software* HyperFit, disponibilizando-os na interface gráfica do *software*, juntamente com os demais 42 modelos hiperelásticos disponíveis. Com isso, o HyperFit conta agora com 45 modelos hiperelásticos, tendo seu número de modelos micromecânicos aumentado de 7 para 10.

Analizando os resultados dos ajustes específicos de cada ensaio de calibração, conclui-se que todos os modelos se ajustam bem a todos os dados experimentais dos dois tipos de borracha avaliados (Borracha Natural e Silicone), capturando com fidelidade o comportamento da curva  $t \times \lambda$  para grandes deformações. Além disso, pode-se concluir que é de extrema importância realizar ajustes para todos os ensaios disponíveis, pois apenas com um único tipo de ensaio não é possível fornecer de forma adequada as previsões teóricas para os ensaios diferentes do ensaio de calibração. Os ajustes multicritérios de todos os modelos fornecem boas previsões para os materiais avaliados. Este tipo de ajuste é muito importante e útil para obter constantes adequadas para aplicações onde o material sofre mais de um tipo de carregamento.

Para um melhor entendimento dos modelos aqui estudados, recomenda-se realizar ajustes para outras faixas de deformações e ajustes para outros tipos de materiais hiperelásticos. As conclusões aqui apresentadas podem não servir para os modelos estudados se forem aplicados a outros materiais ou faixas de deformação. Além disso, visando o desenvolvimento contínuo do HyperFit, outros modelos hiperelásticos devem ser estudados e implementados. A grande maioria dos modelos implementados no *software* foram estabelecidos até os anos 2000, publicações de modelos hiperelásticos mais recentes devem ser avaliadas.



**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ARRUDA, E.M., BOYCE, M.C., 1993. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the mechanics and physics of solids**, vol. 41, pp. 389-412.

ATKIN, R., FOX, N., 1980 **An Introduction to the Theory of Elasticity**. Longman.

BECHIR, H., CHEVALIER, L., IDJERI, M., 2010. A three-dimensional network model for rubber elasticity: the effect of local entanglements constraints, **Int. J. Eng. Sci**, vol. 48, n. 3, pp. 265-274.

BOYCE, M.C., 1996. Direct comparison of the Gent and the Arruda–Boyce constitutive models of rubber elasticity. **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 69, pp. 781-785.

BOYCE, M.C., ARRUDA, E.M., 2000. Constitutive models of rubber elasticity: a review. **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 73, n. 3, pp. 504-523.

FLORY, P.J., ERMAN, B., 1982. Theory of elasticity of polymer networks. **Macromolecules**, vol. 15, n. 3, pp. 800-806.

GENT, A.N., 1996. A new constitutive relation for rubber. **Rubber chemistry and technology**, vol. 69, pp. 59-61.

GREEN, A., ADKINS, J., 1960. **Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics**. Clarendon Press

HOSS, L., 2009. Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis: ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo. Dissertação (Mestrado) - **Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul**. 315p.

JAMES, H.M., GUTH, E., 1943. Theory of elastic properties of rubber. **J. Chem. Phys**, vol. 11, pp. 455-481.

JONES, D., TRELOAR, L., 1975. The properties of rubber in pure homogeneous strain. **J. Phys. D: Appl. Phys**, vol. 8, pp. 1285-1304.

HEINRICH, G., KALISKE, M., 1997. Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity, **Comput. Theor. Polym. Sci**, vol. 7, n. 3, pp. 227-241

LAI, W., RUBIN, D., KREMPL, E., 1993. **Introduction to Continuum Mechanics**. Pergamon Press

MALVERN, L.E., 1969. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall

MARCZAK, R., HOSS, L. GHELLER, J.J., 2006. **Caracterização de Elastômeros para Simulação Numérica**. Centro Tecnológico de Polímeros SENAI, São Leopoldo-RS.

MOONEY, M., 1940. A theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, vol. 11, pp. 582-592.

MUHR, A. H., 2005. Modeling the stress-strain behavior of rubber. **Rubber Chemistry and Technology**, vol.78, pp. 391-425.

OGDEN, R.W., 1972. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. **Proc. R. Soc. London**, Ser. A 326, pp. 565-584.

OGDEN, R., 1984. **Non-Linear Elastic Deformations**. Dover Publications.

RIVLIN, R.S., SAUNDERS, D.W., 1950. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. **Philos. Trans. R. Soc. London**, Ser. A 243, pp. 251-288.

STUMPF, F.T., MARCZAK, R.J., 2021. Constitutive framework of a new hyperelastic model for isotropic rubber-like materials for finite element implementation, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 18, n. 1. e346.

TRELOAR, L.R.G., 1954. The photoelastic properties of short-chain molecular networks. **Trans. Faraday Soc**, vol. 50, pp. 881-896.

WANG, M.C., GUTH, E., 1952. Statistical theory of networks of non-Gaussian: extensible chains. **J. Chem. Phys**, vol. 20, pp. 1144-1157.

XIANG, Y., ZHONG, D., WANG, P., MAO, G., YU, H., QU, S., 2018. A general constitutive model of soft elastomers, **J. Mech. Phys. Solid**, vol. 117, pp. 110-122

ZÚÑIGA A. E., BEATTY, M.F., 2002. Constitutive equations for amended non-Gaussian network models of rubber elasticity, **Int. J. Eng. Sci**, vol. 40, n. 20, pp. 2265-2294

## APÊNDICE A

### A. Fórmulas para ajuste do modelo de Heinrich-Kaliske – Tubo

A Eq.(15), no caso incompressível, pode ser particularizada resultando a seguinte expressão:

$$W = \frac{G_c}{2}(\lambda_1^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2}(\lambda_1^{-\beta} - 1) + \frac{G_c}{2}(\lambda_2^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2}(\lambda_2^{-\beta} - 1) + \frac{G_c}{2}(\lambda_3^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2}(\lambda_3^{-\beta} - 1) \quad (\text{A.1})$$

Como este modelo depende diretamente dos alongamentos, as derivadas de W devem ser obtidas através da regra da cadeia:  $\frac{dW}{dI_1} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_1}$ ;  $\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_2}$  e, portanto, resultam expressões diferentes para cada modo de deformação.

#### A.1 Tração Uniaxial

Para o ensaio de tração uniaxial a Eq.(A.1) pode ser escrita de acordo com os seguintes alongamentos:  $\lambda_1 = \lambda$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ .

$$W = \frac{G_c}{2}(\lambda^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2}(\lambda^{-\beta} - 1) + 2 \left[ \frac{G_c}{2} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 - 1 \right) + \frac{2G_e}{\beta^2} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^{-\beta} - 1 \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a regra da cadeia na Eq.(A.2) temos:

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} \left( G_c \lambda - \frac{2G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{G_c}{\lambda^2} + \frac{2G_e \lambda^{0,5\beta-1}}{\beta} \right); \quad \frac{dW}{dI_2} = \lambda \frac{dW}{dI_1} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo as Eqs.(A.3) na Eq.(6) temos a seguinte relação constitutiva:

$$t_T = 2 \left( G_c \lambda - \frac{2G_e(\lambda)^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{G_c}{\lambda^2} + \frac{2G_e \lambda^{0,5\beta-1}}{\beta} \right) \quad (\text{A.4})$$

#### A.2 Cisalhamento Puro

Para o ensaio de cisalhamento puro a Eq.(A.1) pode ser escrita de acordo com os seguintes alongamentos:  $\lambda_1 = \lambda$ ;  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$ ;  $\lambda_3 = 1$ .

$$W = \frac{G_c}{2}(\lambda^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2}(\lambda^{-\beta} - 1) + \frac{G_c}{2} \left( \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) + \frac{2G_e}{\beta^2} \left( \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{-\beta} - 1 \right) + \frac{G_c}{2}(1^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2}(1^{-\beta} - 1) \quad (\text{A.5})$$

Aplicando a regra da cadeia na Eq.(A.5) temos:

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} \left( G_c \lambda - \frac{2G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{G_c}{\lambda^3} + \frac{2G_e \lambda^{\beta-1}}{\beta} \right); \quad \frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo as Eqs.(A.6) na Eq.(8) temos a seguinte relação constitutiva:

$$t_P = 2 \left( G_c \lambda - \frac{2G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{G_c}{\lambda^3} + \frac{2G_e \lambda^{\beta-1}}{\beta} \right) \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Tração Biaxial

Para o ensaio de tração biaxial a Eq.(A.1) pode ser escrita de acordo com os seguintes alongamentos  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ;  $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2}$ .

$$W = 2 \left[ \frac{G_c}{2} (\lambda^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2} (\lambda^{-\beta} - 1) \right] + \frac{G_c}{2} \left( \left( \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 - 1 \right) + \frac{2G_e}{\beta^2} \left( \left( \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-\beta} - 1 \right) \quad (\text{A.8})$$

Aplicando a regra da cadeia na Eq.(A.8) temos:

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{4} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right)^{-1} \left( 2G_c \lambda - \frac{4G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{2G_c}{\lambda^5} + \frac{4G_e \lambda^{2\beta-1}}{\beta} \right); \quad \frac{dW}{dI_2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dW}{dI_1} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo as Eqs.(A.9) na Eq.(10) temos a seguinte relação constitutiva:

$$t_B = 2G_c \lambda - \frac{4G_e \lambda^{-\beta-1}}{\beta} - \frac{2G_c}{\lambda^5} + \frac{4G_e \lambda^{2\beta-1}}{\beta} \quad (\text{A.10})$$

## APÊNDICE B

### B. Constantes constitutivas - Borracha Natural

Tabela B.1 – Constantes obtidas para os ajustes de Tração Uniaxial da Borracha Natural.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 2,84\text{E-}01$ ; $K = 1,04\text{E+}00$ ; $\eta = 9,99\text{E-}01$ ; $\rho = 1,20\text{E+}00$ ; $N_8 = 2,68\text{E+}01$ ; $N_3 = 3,08\text{E+}01$
Tubo	$G_c = 1,58\text{E-}01$ ; $G_e = 7,37\text{E-}06$ ; $\beta = 1,63\text{E+}01$
SpT	$G_c = 2,84\text{E-}01$ ; $G_e = 5,01\text{E-}02$ ; $N = 2,56\text{E+}01$

Tabela B.2 – Constantes obtidas para os ajustes de Cisalhamento Puro da Borracha Natural.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 4,72\text{E-}01$ ; $K = 1,00\text{E+}00$ ; $\eta = 9,96\text{E-}01$ ; $\rho = 1,55\text{E-}01$ ; $N_8 = 4,29\text{E+}01$ ; $N_3 = 2,67\text{E+}01$
Tubo	$G_c = 1,69\text{E-}01$ ; $G_e = 2,54\text{E-}10$ ; $\beta = 1,44\text{E+}01$
SpT	$G_c = 1,90\text{E-}01$ ; $G_e = 3,95\text{E-}01$ ; $N = 1,80\text{E+}01$

Tabela B.3 – Constantes obtidas para os ajustes de Tração Biaxial da Borracha Natural.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 4,72\text{E-}01$ ; $K = 9,96\text{E-}01$ ; $\eta = 8,87\text{E+}00$ ; $\rho = 1,38\text{E-}01$ ; $N_8 = 2,66\text{E+}01$ ; $N_3 = 5,61\text{E+}03$
Tubo	$G_c = 1,99\text{E-}01$ ; $G_e = 4,80\text{E-}05$ ; $\beta = 3,69\text{E+}00$
SpT	$G_c = 5,67\text{E-}01$ ; $G_e = -2,28\text{E-}01$ ; $N = 3,35\text{E+}01$

Tabela B.4 – Constantes obtidas para os ajustes multicritério da Borracha Natural.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 4,48E-01$ ; $K = 9,95E-01$ ; $\eta = 2,39E+00$ ; $\rho = 9,72E-02$ ; $N_8 = 2,05E+01$ ; $N_3 = 4,46E+02$
Tubo	$G_c = 1,61E-01$ ; $G_e = 5,02E-03$ ; $\beta = 2,04E+00$
SpT	$G_c = 2,70E-01$ ; $G_e = 1,19E-01$ ; $N = 2,64E+01$

## APÊNDICE C

### C. Constantes constitutivas – Silicone

Tabela C.1 – Constantes obtidas para os ajustes de Tração Uniaxial do Silicone.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 6,50E-03$ ; $K = 1,06E+01$ ; $\eta = 1,03E+00$ ; $\rho = 7,99E+02$ ; $N_8 = 3,40E+01$ ; $N_3 = 3,99E+03$
Tubo	$G_c = 2,68E-01$ ; $G_e = 1,99E-01$ ; $\beta = 8,20E+00$
SpT	$G_c = 4,28E+00$ ; $G_e = -1,67E+01$ ; $N = 3,22E+01$

Tabela C.2 – Constantes obtidas para os ajustes de Tração Biaxial do Silicone.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 6,29E-01$ ; $K = 1,00E+00$ ; $\eta = 5,96E+00$ ; $\rho = 4,10E+00$ ; $N_8 = 7,90E+01$ ; $N_3 = 9,75E+01$
Tubo	$G_c = 1,93E-01$ ; $G_e = 4,21E-02$ ; $\beta = 2,31E+00$
SpT	$G_c = 3,86E+00$ ; $G_e = -3,06E+00$ ; $N = 2,32E+01$

Tabela C.3 – Constantes obtidas para os ajustes multicritério do Silicone.

Modelo	Constantes
Bechir-Chevalier	$\mu_0 = 4,10E-06$ ; $K = 9,80E-01$ ; $\eta = -6,22E+05$ ; $\rho = 1,70E+09$ ; $N_8 = 6,22E+09$ ; $N_3 = 4,25E+01$
Tubo	$G_c = -2,26E-01$ ; $G_e = 3,83E-01$ ; $\beta = -3,43E+00$
SpT	$G_c = 2,15E+00$ ; $G_e = -1,05E+00$ ; $N = 1,96E+01$