Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SOLUÇÕES DE VISCOSIDADE ESTACIONÁRIAS DA EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI

Dissertação de Mestrado

Tadeu Zavistanovicz de Almeida

Porto Alegre - RS - Brasil, 13 de julho de 2010

Dissertação submetida por Tadeu Zavistanovicz de Almeida *, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Elismar R. Oliveira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Artur O. Lopes (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Diogo Aguiar Gomes (IST- Lisboa)

Prof. Dr. Elismar R. Oliveira (IMAT-UFRGS, Orientador)

Prof. Dr. Rafael Rigão Souza (IMAT-UFRGS)

*Bolsista do CNPq

ao meu pai,

José Clóvis de Almeida,

em memória

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Artur Lopes, por ter orientado meus estudos durante o primeiro ano de mestrado e por ter me mostrado várias possibilidades para prosseguir meus estudos em matemática. Agradeço ao Professor Rafael Rigão Souza, pelo apoio. Agradeço ao meu orientador, Professor Elismar Oliveira, por ter me orientado na realização desta dissertação e por ter me aconselhado sobre coisas relacionadas ao mestrado e ao prosseguimento dos meus estudos. Agradeço a todos familiares que me incentivaram a estudar e que manifestaram preocupação comigo. Agradeço a minha mãe, Zenaide, por ter sempre confiado em mim e por ter me dado liberdade para que eu pudesse escolher meu próprio caminho. Agradeço a meus amigos da Casa do Estudante Universitário - CEU, que foram minha família em Porto Alegre.

Resumo

Neste trabalho estudamos soluções de viscosidade estacionárias da Equação de Hamilton-Jacobi, suas propriedades, e indicamos sua conexão com o problema de Mather estacionário. Para tal, estabelecemos alguns conceitos como a ação estacionária, funções estacionárias, Lagrangianos e Hamiltonianos estacionários, etc. No final deste trabalho utilizamos o Princípio da Programação Dinâmica para provar a existência de solução de viscosidade estacionária da Equação de Hamilton-Jacobi com desconto.

Abstract

In this work we study stationary viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi Equation, its properties, and we indicate its conexion with the Mather problem in the stationary setting. In order to do this, we establish some concepts like the stationary action, stationary functions, stationary Lagrangians and Hamiltonians, etc. In the ending of this work we use the Dynamic Programming Principle to establish the existence of stationary viscosity solution of the discounted Hamilton-Jacobi Equation.

Índice

Introdução

Neste trabalho, nosso objetivo é entender o conceito ***solução de viscosidade estacionária*** da equação de Hamilton-Jacobi e sua conexão com o problema de Mather estacionário estudado em [GO09].

No Capítulo 1, introduzimos a noção geral de ***ação estacionária*** que é um conceito central da teoria. Ali são demonstradas as propriedades básicas das funções estacionárias tais como convoluções e diferenciação.

No Capítulo 2, são apresentados os pré-requisitos da Dinâmica Lagrangiana, bem como sua adaptação ao caso de ***Lagrangianos estacionários***, em particular estabelecemos a relação entre o fluxo associado à equação de Euler-Lagrange e o ***fluxo estacionário induzido***.

O terceiro e quarto capítulos são devotados ao tema central ***soluções de viscosidade estacionárias*** da equação de Hamilton-Jacobi

$$H(x, D_x u(x,\omega), \omega) = \lambda.$$

Ali são introduzidos os conceitos de ***solução de viscosidade em*** x e de ***solução de viscosidade em*** ω e estudamos as conexões entre estes dois conceitos bem como suas propriedades básicas tais como a equivalência entre os dois tipos de solução, levando-nos a impor condições adicionais sobre a estrutura local da ação (ver Proposição 3.10). É importante notar que eventualmente a equação de Hamilton-Jacobi estacionária pode não ter soluções (ver Exemplo 3.14), então o problema com desconto é utilizado para abordar soluções do problema original.

O Problema de Mather Estacionário é um problema de programação linear em dimensão infinita e consiste em minimizar

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} L(0,v,\omega)d\mu(v,\omega),$$

sobre todas medidas de probabilidade que satisfazem a condição de holonomia

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} v\cdot D_x\varphi(0,\omega)d\mu(v,\omega)=0,$$

$\forall\varphi\in C_s^1(\mathbb{R}^n\times\Omega)$.

A caracterização de tais medidas é feita via equação de Hamilton-Jacobi, que é originada por dualidade através do Teorema de dualidade de Legendre-Rockafellar-Fenchel (ver [BG08], [Vil03]).

Teorema (Legendre-Fenchel-Rockafellar). Seja E um espaço vetorial topológico localmente Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ com dual E^*. Suponha que $h:E\to(-\infty,+\infty]$ é convexa e semi-contínua inferiormente e $g:E\to[-\infty,+\infty)$ é côncava e semi-contínua superiormente. Então

$$\min_{E^*}(h^*-g^*)=\sup_E(g-h),$$

sempre que h ou g é contínua em algum ponto onde ambas funções são finitas (o que garante o mínimo no lado esquerdo).

Aplicando este teorema convenientemente obtém-se

$$\min_{\text{Prob. holonômicas}}\int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} L(0,v,\omega)d\mu(v,\omega)=-\inf_{\varphi\in C_s^1}\sup_{\omega\in\Omega}\mathcal{H}(\varphi,0,\omega),$$

onde $\mathcal{H}(\varphi,x,\omega)=H(x,D_x\varphi(x,\omega),\omega)$.

Em [GO09] obtém-se três resultados principais:

1. As medidas de Mather estacionárias com desconto são suportadas em gráficos parcialmente Lipschitz da forma $\{(v = v(\omega), \omega) | \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n \times \Omega$.

2. Tais medidas podem ser escolhidas holonômicas com e sem desconto;

3. Existe medida de Mather estacionária invariante pelo fluxo da equação de Euler-Lagrange, obtida como limite fraco das medidas anteriores.

Estes resultados não serão analisados aqui por estarem fora do escopo deste trabalho, apenas nos limitamos a enfatizar que a ferramenta principal para a solução destes problemas é o conceito de solução de viscosidade estacionária, assim, é fundamental o seu entendimento, isto é, existência e propriedades que permitam provar resultados sobre a sua regularidade. Para mais detalhes sobre esta abordagem ver o *preprint* [GO09].

Ainda no capítulo 4, temos o fechamento do trabalho com a prova da existência de soluções de viscosidade estacionárias para a equação de Hamilton-Jacobi com desconto via controle ótimo (ver [Gom09] para mais detalhes da aplicação de técnicas de controle para soluções da equação de Hamilton-Jacobi), e Princípio da programação dinâmica para estas soluções.

Capítulo 1

Estacionariedade, Ação Estacionária

Assumimos a existência de uma *ação estacionária* (para diferir da ação usual sobre curvas) ou simplesmente *ação* $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega,$ onde Ω é um espaço métrico compacto. A ação é *contínua* e satisfaz a propriedade de *semi-grupo*:

$$\tau_{x+y}\omega = \tau_x \tau_y \omega,$$

$$\tau_0(\cdot) = Id.$$

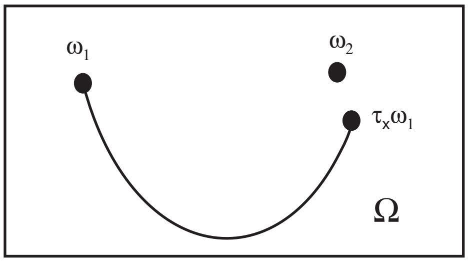
Assumimos também que a ação τ é transitiva, conforme a definição a seguir.

Definição 1.1. Dizemos que a ação τ é *transitiva* se

$$\forall\ \varepsilon > 0, \forall\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } d(\tau_x\omega_1, \omega_2) < \varepsilon.$$

Dizemos que a ação τ é *uniformemente transitiva* se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $\forall\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega$ existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| < M$ e $d(\tau_x\omega_1, \omega_2) < \varepsilon$.

A figura a seguir ilustra a definição de transitividade.



Transitividade

Lema 1.2. Seja $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$ uma ação transitiva. Como Ω é compacto, então τ será uniformemente transitiva.

Demonstração: Vamos demonstrar a afirmação em um contexto mais geral e obteremos o resultado como consequência. Sejam $\mathbb{X}$ um espaço normado e $(\mathbb{Y}, d)$ um espaço métrico. Seja $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ uma função contínua. Como definido acima, dizemos que F é transitiva se

$$\forall\ \varepsilon > 0, \forall\ y_1, y_2 \in \mathbb{Y} \text{ existe } z \in \mathbb{X} \text{ tal que } d(F(z, y_1), y_2) < \varepsilon,$$

e dizemos que F é uniformemente transitiva se

$$\begin{aligned} &\forall\ \varepsilon > 0, \text{ existe } M > 0 \text{ tal que } \forall\ y_1, y_2 \in \mathbb{Y} \text{ existe } z \in \mathbb{X} \\ &\text{tal que } |z| < M \text{ e } d(F(z, y_1), y_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que se $(\mathbb{Y}, d)$ é um espaço métrico *compacto* e se F é transitiva, então F é também uniformemente transitiva. De fato, sejam $\Gamma^\varepsilon := \{(z, y_1, y_2) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \ \ | \ \ d(F(z, y_1), y_2) < \varepsilon\}$ e $\Gamma_k^\varepsilon := \{(z, y_1, y_2) \in \Gamma^\varepsilon \ \ | \ \ |z| < k\}$. Então Γ^ε e Γ_k^ε são abertos. Para ver isto, definimos $G : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$, por $G(z, y_1, y_2) = (F(z, y_1), y_2)$, que é contínua. Então

$$\Gamma^\varepsilon = (d \circ G)^{-1}((-\infty, \varepsilon)).$$

Logo Γ^ε é aberto por ser imagem inversa de aberto por função contínua. O conjunto Γ_k^ε é aberto por ser intersecção de Γ^ε com outro aberto. Por outro lado,

$$\Gamma^\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^\varepsilon$$

é o conjunto de todas as "órbitas"de y_1 por z que são ε próximas de y_2. Observamos que a transitividade de F implica que $\pi_2 \times \pi_3(\Gamma^\varepsilon) = \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$, que é compacto por ser produto de dois compactos, portanto admite uma subcobertura finita

$$\Gamma_{k_i}^\varepsilon, i = 1, ..., n,$$

isto é, $\bigcup_{i=1}^n \pi_2 \times \pi_3(\Gamma_{k_i}^\varepsilon) \supset \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$. Seja $M = \max\{k_1, ..., k_n\}$. Então obtemos que para quaisquer $(y_1, y_2) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$, existe i_0 tal que $(y_1, y_2) \in \pi_2 \times \pi_3(\Gamma_{k_{i_0}}^\varepsilon)$, ou seja, existe $z \in \mathbb{X}$ tal que $|z| < k_{i_0} \leq M$ e $d(F(z, y_1), y_2) < \varepsilon$, o que implica que F é uniformemente transitiva.

Para concluir, basta aplicar a demonstração acima para o caso particular $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n, \mathbb{Y} = \Omega$ e $F : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$, definida por $F(x, \omega) = \tau_x \omega$, que é contínua por hipótese.

□

Observação 1.3. A hipótese de que τ é transitiva é realmente necessária no lema acima. Por exemplo, a ação

$$\tau_x \omega = \omega, \forall\ x \in \mathbb{R}^n,$$

não é sequer transitiva, embora Ω possa ser compacto.

Exemplo 1.4. Um exemplo de ação estacionária é a seguinte, $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $n \leq d$, onde identificamos o toro $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d \mod \mathbb{Z}^d$, e consideramos A uma matriz $d \times n$ de coeficientes constantes. Assumimos que o conjunto $\{Ax \quad | \quad x \in \mathbb{R}^n\}$ é denso em $\mathbb{T}^d$. Então como τ definida por

$$\tau_x \omega = \omega + Ax \mod \mathbb{Z}^d,$$

é uma aplicação afim em $\mathbb{R}^d$, é imediato que ela é contínua e verifica a propriedade de semi-grupo. Para ver que ela é transitiva, sejam $\varepsilon > 0$ e ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{T}^d$. Pela hipótese de $\{Ax \quad | \quad x \in \mathbb{R}^n\}$ ser denso em $\mathbb{T}^d$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|(\omega_2 - \omega_1) - Ax\| < \varepsilon$, ou equivalentemente, $\|\tau_x\omega_1 - \omega_2\| < \varepsilon$.

Mais especificamente, podemos tomar $\tau : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e considerarmos a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Então para $\omega = (\omega_1, \omega_2), x = (x_1, x_2)$ temos que

$$\tau_x\omega = \omega + Ax = (\omega_1, \omega_2) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\omega_1 + x_1, \omega_2 + \sqrt{2}x_2) \mod \mathbb{Z}^2.$$

Do mesmo modo, tomando $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, temos

$$\tau_x\omega = \omega + Ax = (\omega_1 + x, \omega_2 + \sqrt{2}x) \mod \mathbb{Z}^2.$$

Esta última ação será utilizada posteriormente no Exemplo 3.14, onde já teremos em mente que esta ação é transitiva, contínua e satisfaz a propriedade de semi-grupo.

Definição 1.5. Uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é dita *estacionária* se

$$\varphi(x + y, \omega) = \varphi(x, \tau_y\omega), \forall\ \omega \in \Omega, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos denotar por C_s^1 a seguinte classe de funções:

$$\begin{aligned} C_s^1(\mathbb{R}^n \times \Omega) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}, &\text{ estacionária, } C^1 \text{ na primeira variável,} \\ &\text{contínua em } \omega \text{ e tal que } D_x\varphi(0, \omega) \text{ é contínua em } \omega\}. \end{aligned}$$

Vamos denotar por C_s o conjunto das funções apenas estacionárias.

Usaremos definições análogas para uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ estacionária e para o conjunto $C_s^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega)$.

Lema 1.6. Se uma função $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é estacionária e existe $D_x u$, então $D_x u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ é também estacionária, isto é,

$$D_x u(x+y,\omega) = D_x u(x,\tau_y\omega), \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Sejam $x, y, h \in \mathbb{R}^n$ e $\omega \in \Omega$. Então temos a seguinte igualdade, que define $D_x u$ no ponto $(x+y,\omega)$:

$$u(x+y+h,\omega) - u(x+y,\omega) = D_x u(x+y,\omega)\cdot h + r_1(h), \text{ com } \lim_{|h|\to 0} \frac{r_1(h)}{|h|} \to 0.$$

Como u é estacionária, esta igualdade é a mesma que

$$u(x+h,\tau_y\omega) - u(x,\tau_y\omega) = D_x u(x+y,\omega)\cdot h + r_1(h).$$

Por outro lado, $D_x u$ no ponto $(x,\tau_y\omega)$ satisfaz

$$u(x+h,\tau_y\omega) - u(x,\tau_y\omega) = D_x u(x,\tau_y\omega)\cdot h + r_2(h), \text{ com } \lim_{|h|\to 0} \frac{r_2(h)}{|h|} \to 0,$$

ou seja, $D_x u(x+y,\omega) = D_x u(x,\tau_y\omega)$. Portanto $D_x u$ é estacionária.

□

No estudo de soluções de viscosidade será necessário aproximar uma função estacionária $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ por funções estacionárias suaves. Para isto, vamos considerar a *convolução estacionária* de u com um *mollifier* padrão η (ver [Eva98], páginas 629-631). Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definido por

$$\eta(x) = \begin{cases} C\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right), & \text{se} \quad \|x\| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde C é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$.

Para cada $\varepsilon > 0$, seja $\eta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\eta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. As funções $\eta^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(x)dx = 1, \text{supp}(\eta^\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon).$$

Definição 1.7. Denotamos a convolução estacionária, ou simplesmente a convolução entre u e η^ε por

$$u^\varepsilon(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)dy.$$

Lema 1.8. A convolução u^ε entre u e η^ε definida acima é também estacionária, C^1 em x, e satisfaz

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x,\omega)\cdot v = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_y\omega)D_y\eta^\varepsilon(y)\cdot v\; dy. \tag{1.1}$$

Observe que a convolução é tão suave quanto η.

Demonstração: Decorre imediatamente da hipótese de u ser estacionária que u^ε também é estacionária. Vamos calcular $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$:

$$u^\varepsilon(x+v,\omega) - u^\varepsilon(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+v,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_z\omega)\eta^\varepsilon(z-v)dz - \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)d(y),$$

onde $z = y+v$ foi a substituição utilizada na primeira integral.
Como $\eta^\varepsilon(z-v) = \eta^\varepsilon(z) - D_z\eta^\varepsilon(z)\cdot v + r(v)$, onde $\lim\limits_{|v|\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|} = 0$, temos que

$$u^\varepsilon(x+v,\omega) - u^\varepsilon(x,\omega) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_z\omega)\left[\eta^\varepsilon(z) - D_z\eta^\varepsilon(z)\cdot v + r(v)\right]dz - \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)dy =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_z\omega)D_z\eta^\varepsilon(z)\cdot v dz + \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_z\omega)r(v)dz.$$

Dado que u é estacionária, contínua em ω e Ω é compacto, então u é limitada (ver Exemplo 3.14). Além disso, como $\lim\limits_{|v|\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|} = 0$ a última integral vai a zero com v.

Portanto

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x,\omega)\cdot v = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\tau_y\omega)D_y\eta^\varepsilon(y)\cdot v\; dy.$$

$\square$

Observação 1.9. Se $u(x,\omega)$ é uma função estacionária, Lipschitz em x então a afirmação no Lema 1.8 pode ser melhorada da seguinte maneira: uma vez que $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\omega)$ existe Lebesgue q.t.p. (x,ω) no produto $\Omega \times \mathbb{R}^n$, pelo Teorema de Rademacher [He04], [Eva98]

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)dy.$$

Esta igualdade pode ser reescrita como $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} * \eta^\varepsilon$.

Capítulo 2

Pré-requisitos para Dinâmica Estacionária

Definição 2.1. Um *Lagrangiano* (autônomo) é uma função suave $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

a) *Convexidade*: A Hessiana $\frac{\partial^2 L(x,v)}{\partial v_i \partial v_j}$ é positiva definida $\forall (x, v) \in \mathbb{R}^{2n}$;

b) *Superlinearidade* (ou coercividade): $\lim\limits_{|v| \to +\infty} \dfrac{L(x, v)}{|v|} = +\infty$;

c) $L(x, v) \geq 0, \forall (x, v) \in \mathbb{R}^{2n}$ (adicionando uma constante se necessário).

Definição 2.2. Dado um Lagrangiano $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos o *momento generalizado* ou simplesmente *momento* por

$$p = -D_v L(x, v) = (-\frac{\partial L}{\partial v_1}, -\frac{\partial L}{\partial v_2}, ..., -\frac{\partial L}{\partial v_n}) = (-L_{v_1}, -L_{v_2}, ..., -L_{v_n}).$$

Definição 2.3. A *função energia* é a função $E : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(x, v) = -D_v(x, v) \cdot v - L(x, v).$$

Vamos agora definir o Hamiltoniano associado ao Lagrangiano.

Definição 2.4. Dado um Lagrangiano $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos o Hamiltoniano associado como a *Transformada de Fenchel* do Lagrangiano (mantendo-se x fixo):

$$H(x, p) = \max_{v \in \mathbb{R}^n}[-pv - L(x, v)].$$

Observamos que a mudança de coordenadas (x, v) para (x, p) definida por $\mathcal{L}(x, v) = (x, L_v(x, v)) = (x, p)$, chamada de *transformada de Legendre* de L é tal que $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}$, isto é, o Hamiltoniano nada mais é do que a energia nas coordenadas (x, p).

Conforme [CI99], verifica-se que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, a Transformada de Fenchel de f definida por

$$f^*(p) = \max_{x \in \mathbb{R}^n}[-px - f(x)]$$

satisfaz:

a) se f é superlinear, então o máximo é atingido em algum ponto $x \in \mathbb{R}^n$;

b) se f é convexa e superlinear então f^* também é. Neste caso $f^{**} = f$.

Como consequência das nossas hipóteses de convexidade e superlinearidade do Lagrangiano, e mantendo $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, temos que $L^* = H$ e $H^* = L$.

Nosso estudo será feito para *Lagrangianos estacionários* definidos sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega$, onde Ω é um espaço métrico compacto, no qual $\mathbb{R}^n$ age através da ação τ. Dado um Lagrangiano $L : \mathbb{R}^{2n} \times \Omega \to \mathbb{R}$, diremos que L é um Lagrangiano estacionário, conforme visto no primeiro capítulo, se

$$L(x+y, v, \omega) = L(x, v, \tau_y \omega).$$

Tudo o que foi feito anteriormente segue valendo para Lagrangianos $L(x, v, \omega)$, com $\omega \in \Omega$.

Para cada ω fixado, poderíamos considerar a equação de *Euler-Lagrange*, que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem dada por

$$D_x L(x(t), v(t)) - \frac{d}{dt}(D_v L(x(t), v(t))) = 0.$$

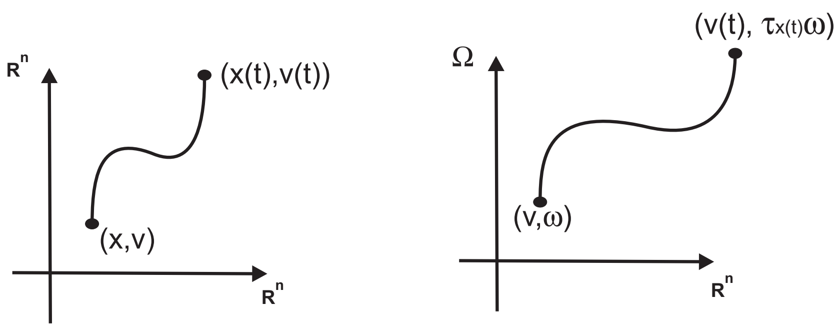
Esta equação define um fluxo ϕ_t^ω:

$$\omega \to \phi_t^\omega(x_0, v_0) = (x(t), v(t)),$$

que é nada mais do que a solução $(x(t), v(t))$ da equação de Euler-Lagrange com condição inicial $(x(0), v(0)) = (x_0, v_0)$.

Em vez disso, podemos olhar para $L(0, v, \tau_x \omega)$ e para o *fluxo induzido* ψ_t

$$(v, \omega) \overset{\psi_t}{\longmapsto} (v(t), \tau_{x(t)} \omega).$$



Fluxo induzido

Um caso que pode ser analisado é quando o conjunto Ω tem estrutura diferenciável (de dimensão n). Neste caso podemos exigir que a ação $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$

seja suave, assim podemos definir também um campo induzido W^L, conforme faremos abaixo.

Lembramos que dado o Lagrangiano $L(x, v, \omega)$, a equação de Euler-Lagrange $L_x = \frac{d}{dt}L_v$ implica que o campo lagrangiano X^L é dado por

$$X^L(x, v, \omega) = (\dot{x}, \dot{v}) = (v, L_{vv}^{-1}(L_x - vL_{xv})).$$

Por outro lado o fluxo $(v, \omega) \overset{\psi_t}{\longmapsto} (v(t), \tau_{x(t)}\omega)$ define para cada $x = x(0)$ um campo W^L em $\mathbb{R}^n \times \Omega$, dado por

$$\begin{aligned} W^L(x, v, \omega) &= \frac{d}{dt}(v(t), \tau_{x(t)}\omega) \\ &= (\dot{v}(t), \frac{\partial \tau}{\partial x}\dot{x}(t) + 0) \\ &= (L_{vv}^{-1}(L_x - vL_{xv}), \frac{\partial \tau}{\partial x}v) \\ &= X^L(x, v, \omega) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ Id & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Isto mostra como a ação estacionária altera o campo Lagrangiano, fazendo um *twist* nas coordenadas e uma distorção $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ na velocidade do campo original.

Exemplo 2.5. (Lagrangiano Mecânico Estacionário) Consideremos o campo gradiente $F(x) = -\nabla V(x)$, então a lei de Newton para um corpo de massa unitária é escrita como

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)),$$

que é a equação de Euler-Lagrange, $L_x = \frac{d}{dt}L_v$, associada ao Lagrangiano

$$L(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - V(x).$$

Agora suponha $\Omega = \mathbb{T}^1$ e o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ definido por $\varphi(t, w) = w(t)$

onde

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \text{sen}(2\pi\omega(t)) \\ \omega(0) = \omega \end{cases}$$

Note que esta ação não é transitiva pois o campo tem um ponto crítico (veja Observação 3.11).

Podemos definir um Lagrangiano Mecânico Estacionário $L(x, v, \omega)$ como:

$$L(x, v, \omega) = \frac{1}{2}v^2 - \cos(2\pi\varphi(x, \omega)),$$

que é estacionário para a ação

$$\tau_x\omega = \varphi(x, \omega).$$

Para cada ω_0 fixo, temos um Lagrangiano mecânico $L(x, v, \omega_0)$ onde $V(x, \omega_0) = \cos(2\pi\varphi(x, \omega_0))$, cujas curvas integrais são soluções da EDO

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\nabla\cos(2\pi\varphi(x, \omega_0)) \\ &= \text{sen}(2\pi\varphi(x, \omega_0))2\pi\frac{d}{dx}\varphi(x, \omega_0) \\ &= \text{sen}(2\pi\varphi(x, \omega_0))2\pi\dot{\omega}(x) \\ &= \text{sen}(2\pi\varphi(x, \omega_0))2\pi\text{sen}(2\pi\omega(x)) \\ &= 2\pi\text{sen}^2(2\pi\varphi(x, \omega_0)). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Soluções de Viscosidade para a Equação de Hamilton-Jacobi

Começamos este capítulo definindo a Equação de Hamilton-Jacobi. A primeira definição a seguir é usual ao passo que a segunda é a adaptação para o caso estacionário. Denotamos aqui $D_x u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = (u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n})$. Temos um Lagrangiano L que assumimos, daqui em diante, que é estacionário:

$$L(x+y, v, \omega) = L(x, v, \tau_y \omega),$$

e o Hamiltoniano associado $H : \mathbb{R}^{2n} \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Observação 3.1. Como o Lagrangiano é uma função estacionária, então o Hamiltoniano associado também será estacionário. De fato:

$$H(x+y, p, \omega) = \max_{v \in \mathbb{R}^n}[-pv - L(x+y, v, \omega)] = \max_{v \in \mathbb{R}^n}[-pv - L(x, v, \tau_y \omega)] = H(x, p, \tau_y \omega).$$

Definição 3.2. A *Equação de Hamilton-Jacobi* é a EDP (de primeira ordem)

$$H(x, D_x u(x, \omega), \omega) = \lambda$$

onde λ é uma constante e $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Definição 3.3. A Equação de *Hamilton-Jacobi Estacionária* é a EDP

$$H(0, D_x u(0, \omega), \omega) = \lambda$$

onde λ é uma constante e $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Lema 3.4. Se $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função C_s, então as definições 3.2 e 3.3 da Equação de Hamilton-Jacobi são equivalentes.

Demonstração: Vemos que 3.2 implica 3.3 trivialmente, basta tomar $x = 0$ em 3.2. Reciprocamente, suponhamos que $\forall\ \omega \in \Omega$,

$$H(0, D_x u(0, \omega), \omega) = \lambda.$$

Em particular para $\omega = \tau_{x_0}\omega_0$ temos

$$H(0, D_x u(0, \tau_{x_0}\omega_0), \tau_{x_0}\omega_0) = \lambda.$$

Pela estacionariedade de u, segue pelo Lema 1.6 que $D_x u$ é estacionária. Por hipótese H é estacionário (ver Observação 3.1). Então a última equação é equivalente a

$$H(x_0, D_x u(x_0, \omega_0), \omega_0) = \lambda,$$

que é a equação 3.2 no ponto $\omega = \tau_{x_0}\omega_0$, que pode ser escolhido arbitrariamente. Isto completa a equivalência.

$\square$

Podemos escrever a Equação de Hamilton-Jacobi (H-J) simplesmente como

$$\mathcal{H}(u, x, \omega) = \lambda, \text{ ou, no caso estacionário } \mathcal{H}(u, 0, \omega) = \mathcal{H}(u, \omega) = \lambda.$$

Neste contexto, a noção correta de solução fraca é ***solução de viscosidade***. Vamos definir dois tipos de soluções de viscosidade, um em x e outro em ω. O segundo tipo é uma adaptação do primeiro para o contexto de estacionariedade.

Definição 3.5. Uma função $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$, contínua em x (não necessariamente C^1) para cada $\omega \in \Omega$, é ***uma solução de viscosidade em*** x de $\mathcal{H}(u, x, \omega) = \lambda$, se para cada $\omega_0 \in \Omega$, qualquer função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x, \omega_0) - \psi(x)$ tem um mínimo (resp. máximo) local estrito em x_0 com $u(x_0, \omega_0) - \psi(x_0) = 0$, valer que

$$\mathcal{H}(\psi, x_0, \omega_0) \geq \lambda \text{ (resp. } \leq \lambda).$$

Definição 3.6. Uma função $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$, estacionária (não necessariamente C^1), contínua em Ω, é ***uma solução de viscosidade em*** ω de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$, se para qualquer $\varphi \in C_s^1(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ e qualquer ponto $\omega_0 \in \Omega$ tal que $u(0, \omega) - \varphi(0, \omega)$ tem um mínimo (resp. máximo) local em ω_0 com $u(0, \omega_0) - \varphi(0, \omega_0) = 0$, valer que

$$\mathcal{H}(\varphi, 0, \omega_0) \geq \lambda \text{ (resp. } \leq \lambda).$$

Observação 3.7. As funções ψ e φ nas definições acima podem ser chamadas de *funções teste*.

Lema 3.8. Se uma função $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução clássica da Equação de Hamilton-Jacobi, então u será também solução de viscosidade em x de $\mathcal{H}(u, x, \omega) = \lambda$.

Demonstração: Seja u uma solução clássica de $\mathcal{H}(u, x, \omega) = \lambda$. Fixamos então $\omega_0 \in \Omega$ e uma função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $u(x, \omega_0) - \psi(x)$ tem um mínimo (resp. máximo) local estrito em x_0 com $u(x_0, \omega_0) - \psi(x_0) = 0$. Precisamos mostrar que

$$\mathcal{H}(\psi, x_0, \omega_0) \geq \lambda \text{ (resp. } \leq \lambda).$$

Sabemos que ψ é de classe C^1, u é diferenciável (é solução clássica), e como $u(x, \omega_0) - \psi(x)$ tem um mínimo (resp. máximo) em x_0 segue que

$$\frac{\partial}{\partial x}(u(x, \omega_0) - \psi(x))|_{(x=x_0)} = 0,$$

que é equivalente a

$$D_x u(x_0, \omega_0) = D_x \psi(x_0).$$

Portanto temos:

$$\mathcal{H}(\psi, x_0, \omega_0) = H(x_0, D_x\psi(x_0), \omega_0) = H(x_0, D_x u(x_0, \omega_0), \omega_0).$$

Mas $H(x_0, D_x u(x_0, \omega_0), \omega_0) = \lambda$, pois u é solução clássica. Olhando então para os extremos destas igualdades temos que

$$\mathcal{H}(\psi, x_0, \omega_0) = \lambda,$$

que implica $\mathcal{H}(\psi, x_0, \omega_0) \geq \lambda$ (resp. $\leq \lambda$).

□

Proposição 3.9. Suponha que $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução de viscosidade em x de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$ e u é estacionária e contínua em Ω. Então u é também uma solução de viscosidade em ω de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$.

Demonstração: Seja $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ uma solução de viscosidade em x de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$. Sejam $\varphi \in C^1_s(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ e um ponto $\omega_0 \in \Omega$ tais que $u(0, \omega) -$

$\varphi(0,\omega)$ tem um mínimo local (resp. máximo) em ω_0 e $u(0,\omega_0)-\varphi(0,\omega_0)=0$. Precisamos mostrar que $\mathcal{H}(\varphi,0,\omega_0)\geq\lambda$ (resp. $\leq\lambda$).
Para tal, definimos a função $\psi(x)=\varphi(x,\omega_0)$. Temos então $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^1 em x já que $\varphi\in C^1_s$. Além disso, $u(0,\omega_0)-\psi(0)=u(0,\omega_0)-\varphi(0,\omega_0)=0$. Se mostrarmos que $u(x,\omega_0)-\psi(x)$ tem um mínimo (resp. máximo) em $x_0=0$, então como u é solução de viscosidade em x segue que

$$\mathcal{H}(\psi,0,\omega_0)\geq\lambda \text{ (resp. } \leq\lambda).$$

O cálculo seguinte mostra que de fato $u(x,\omega_0)-\psi(x)$ tem um mínimo (resp. máximo) em $x_0=0$:

$$\begin{aligned}
u(x,\omega_0)-\psi(x) &= u(x,\omega_0)-\varphi(x,\omega_0) && \text{(pela definição da } u)\\
&= u(0,\tau_x\omega_0)-\varphi(0,\tau_x\omega_0) && (u \text{ e } \varphi \text{ são estacionárias})\\
&\geq u(0,\omega_0)-\varphi(0,\omega_0) && ((0,\omega_0) \text{ é ponto de mínimo (resp. } \leq \text{, máximo))}\\
&= u(0,\omega_0)-\psi(0).
\end{aligned}$$

Portanto temos

$$\mathcal{H}(\varphi(0,\omega_0),0,\omega_0)=\mathcal{H}(\psi(0),0,\omega_0)\geq\lambda \text{ (resp. } \leq\lambda).$$

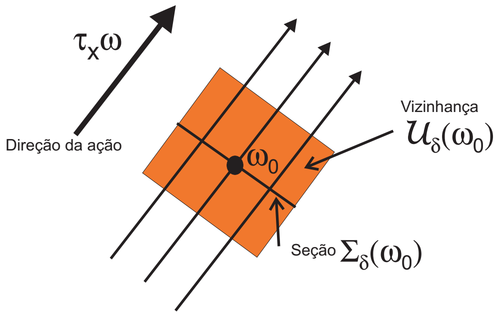
□

A recíproca não é verdadeira para o caso geral. Iremos provar a recíproca sob hipóteses adicionais para a *estrutura local* ação τ, que são naturais para os exemplos relevantes. São elas:

i) existe $\delta>0$ tal que $\forall\ x\neq 0$ com $|x|<\delta, \tau_x(\cdot):\Omega\to\Omega$ não tem pontos fixos;

ii) para cada $\omega_0\in\Omega$ existe $\delta>0$ e um conjunto $\Sigma_\delta(\omega_0)\ni\omega_0$ tal que $\forall\ x$ com $|x|<\delta$ e $\omega_1,\omega_2\in\Sigma_\delta(\omega_0)$, se $\tau_x(\omega_1)=\omega_2$ então $\omega_1=\omega_2$;

iii) O conjunto $\mathcal{U}_\delta(\omega_0) = \{\tau_x(\omega) |\ \omega \in \Sigma_\delta(\omega_0), |x| < \frac{\delta}{2}\}$ é uma vizinhança aberta de ω_0.



Estrutura local da ação

Proposição 3.10. Sob as hipóteses adicionais i), ii) e iii) para a ação, se $u : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução de viscosidade em ω de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$, então u é também uma solução de viscosidade em x de $\mathcal{H}(u, x, \omega) = \lambda$.

Demonstração: Começamos observando que por Ω ser um espaço métrico compacto, e a função $u(0, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ ser contínua, então será uniformemente contínua. Podemos então assumir que $u(0, \cdot)$ possui um *módulo de continuidade* K, isto é, existe uma função contínua $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ tal que $|u(0, \omega_1) - u(0, \omega_2)| \leq K(\omega_1, \omega_2)$, $K(\omega, \omega) = 0$ e $\lim\limits_{d(\omega_1,\omega_2)\to 0} K(\omega_1, \omega_2) = 0$.

Seja então u uma solução de viscosidade em ω, de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$. Considere uma função C^1 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e suponha que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é tal que $u(x, \omega_0) - \psi(x)$ tem um mínimo local estrito (resp. máximo) e que $u(x_0, \omega_0) - \psi(x_0) = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_0 = 0$, pois se não fosse assim, poderíamos trocar ψ por $\psi(x + x_0)$. Portanto temos que $u(x, \omega_0) - \psi(x) \geq u(0, \omega_0) - \psi(0) = 0$.

Seja $\delta > 0$ tal que existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}_\delta(\omega_0)$ de ω_0, conforme a hipótese iii). Definimos $\chi : \mathcal{U}_\delta(\omega_0) \to \mathbb{R}^n$ por $\chi(\omega) = x$ para todo ω tal que existem $\omega' \in \Sigma_\delta(\omega_0)$ e x, tais que $|x| \leq \frac{\delta}{2}$, e $\tau_x\omega' = \omega$. Afirmamos que χ está bem definida. De fato, se $\tau_y(\omega') = \omega = \tau_z(\omega'')$, com $\omega', \omega'' \in \Sigma_\delta(\omega_0)$, temos que $\tau_{y-z}(\omega') = \omega''$ e então $\omega' = \omega''$ pois $|y - z| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$, utilizando o hipótese ii). Portanto, $\tau_{y-z}(\omega') = \omega'$. Mas pela hipótese i) τ não tem pontos fixos, então segue que $y = z$. Definimos $S : \mathcal{U}_\delta(\omega_0) \to \mathbb{R}$ por

$$S(\omega) = \psi(\chi(\omega)) - K(\omega', \omega_0).$$

Precisamos extender S para todo o espaço Ω. Para isto, considere $U \subset \mathcal{U}_\delta(\omega_0)$ um aberto contendo ω_0, tal que $\overline{U} \subset \mathcal{U}_\delta(\omega_0)$. Seja $b : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função *bump* com suporte compacto em $\mathcal{U}_\delta(\omega_0)$, que vale 1 em $\overline{U}$.

Considere $\varphi(x, \omega) = S(\tau_x\omega)b(\tau_x\omega)$, que é estacionária. De fato

$$\begin{aligned} \varphi(x + y, \omega) &= S(\tau_{x+y}\omega)b(\tau_{x+y}\omega) \\ &= S(\tau_x(\tau_y\omega))b(\tau_x(\tau_y\omega)) \\ &= \varphi(x, \tau_y\omega). \end{aligned}$$

Observe que,

$$\varphi(x, \omega_0) = \psi(x)$$

se $|x| < \delta/2$. De fato, isto é uma consequência da unicidade da expressão $\tau_x\omega_0$ em $\mathcal{U}_\delta(\omega_0)$ quando $|x| < \delta/2$. Assim $\varphi(x, \omega_0)$ é diferenciável em $x = 0$ e $D_x\varphi(0, \omega_0) = D_x\psi(0)$.

Afirmamos que $\varphi(0, \omega)$ é contínua. Para provar isto, considere a sequência $\omega_n \to \omega \in U$ onde $\omega_n = \tau_{y_n}(\omega'_n)$, com $\omega'_n \in \Sigma_\delta(\omega_0)$ e $|y_n| < \delta/2$, então $\varphi(x, \omega_n) = \psi(y_n) - K(\omega'_n, \omega_0)$. Tome $\omega = \tau_x(\omega')$, com $\omega' \in \Sigma_\delta(\omega_0)$. Observe que $\omega'_n \to \omega'$. Se não fosse assim, existiria uma subsequência $\omega'_{n_k} \to \bar{\omega} \neq \omega'$. Usando a continuidade de $\tau_{-x}(\cdot) : \Omega \to \Omega$ temos

$$d(\tau_{-x}\omega, \tau_{-x}\omega'_{n_k}) = d(\tau_{-x}\tau_x(\omega'), \tau_{-x}\tau_{y_{n_k}}(\omega'_{n_k})) = d(\omega', \tau_{y_{n_k}-x}(\omega'_{n_k})) \to 0.$$

Como $|y_{n_k}| < \delta/2$, podemos assumir que $y_{n_k} \to y_0$ and $|y_0 - x| < \delta$, então $\omega' = \tau_{y_0-x}\bar{\omega}$. Dado que $|y_0 - x| < \delta$, obtemos $\omega' = \bar{\omega}$, uma contradição.

É fácil perceber que $y_n \to x$ porque se não fosse assim, então existiria uma subsequência $y_{n_k} \to y_0 \neq x$, então a convergência de $\omega'_n \to \omega'$ implica que $\omega' = \tau_{y_0-x}\omega'$, contradizendo a hipótese de que τ não tem pontos fixos, ou seja, a hipótese i).

Como ψ e K são contínuas, obtemos a continuidade de $\varphi(0,\omega)$, e então a continuidade de $\varphi(x,\omega)$ em ω.

Observe que $u(0,\omega) - \varphi(0,\omega)$ tem um mínimo local em ω_0. De fato, se $\omega \in U$, então $\omega = \tau_x\omega'$ e $|x| < \delta/2$. Portanto

$$\begin{aligned} u(0,\tau_x\omega') - \varphi(0,\tau_x\omega') &= u(x,\omega') - \psi(x) + K(\omega',\omega_0) = \\ &= u(x,\omega') - u(x,\omega_0) + u(x,\omega_0) - \psi(x) + K(\omega',\omega_0) = \\ &= \left[u(x,\omega') - u(x,\omega_0) + K(\omega',\omega_0)\right] + \left[u(x,\omega_0) - \psi(x)\right]. \end{aligned}$$

Neste ponto, precisamos escolher o módulo de continuidade de K como sendo

$$K(\omega',\omega'') = \sup_{|x|<\delta/2} \left[u(x,\omega') - u(x,\omega'')\right].$$

Dado $u(x,\omega') - u(x,\omega_0) + K(\omega',\omega_0) \geq 0$ and $u(x,\omega_0) - \psi(x) \geq u(0,\omega_0) - \psi(0)$, obtemos

$$u(0,\omega) - \varphi(0,\omega) \geq u(0,\omega_0) - \psi(0) = u(0,\omega_0) - \varphi(0,\omega_0).$$

Observe que $\varphi(x,\omega)$ não é necessariamente uma função $C^1_s(\mathbb{R}^n \times \Omega)$, assim nós não podemos utilizar a propriedade de viscosidade da Definição 3.6. Porém, fazendo uma convolução, conforme Definição 1.7 e Lema 1.8,

$$\varphi^\varepsilon(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,\tau_y\omega)\eta^\varepsilon(y)dy,$$

com um η^ε apropriado, obtemos $\varphi^\varepsilon \in C^1_s(\mathbb{R}^n \times \Omega)$. Uma vez que $\varphi^\varepsilon \to \varphi$ uniformemente e o mínimo é estrito, $u(0,\omega) - \varphi^\varepsilon(0,\omega)$ tem um mínimo local em $\omega_0^\varepsilon \to \omega_0$, que nós podemos supor sendo 0, adicionando uma constante $c^\varepsilon \to 0$, a φ^ε. Além disso, observamos que existe uma vizinhança V de ω_0, com

$\bar{V} \subset U$, tal que a função φ é diferenciável em x em $(0, \omega)$ para todo $\omega \in V$. Então, pelo Lema 1.8, nós obtemos que $D_x\varphi^\varepsilon(0, \omega_0^\varepsilon) \to D_x\varphi(0, \omega_0) = D_x\psi(0)$. Observe que esta convergência é obtida da diferenciabilidade de $\varphi(0, \omega_0^\varepsilon)$. De fato, para ε suficientemente suave, temos que $\omega_0^\varepsilon = \tau_y\omega_0'$ com $\omega_0' \in \Sigma_\delta(\omega_0)$. Logo, pela definição de φ temos,

$$\varphi(x, \omega_0^\varepsilon) = \psi(x + y) + K(\omega_0', \omega_0),$$

para todo x em uma vizinhança pequena de 0, e portanto, é diferenciável em $x = 0$. Além disso, $D_x\varphi(0, \omega_0^\varepsilon) = D_x\psi(y)$. Sendo u uma solução de viscosidade em ω, de $\mathcal{H}(u, 0, \omega) = \lambda$ obtemos,

$$H(0, D_x\varphi^\varepsilon(0, \omega_0^\varepsilon), \omega_0^\varepsilon) \geq \lambda.$$

Para completar a prova, tomamos o limite $\varepsilon \to 0$.

□

Observação 3.11. Quando o espaço métrico compacto Ω possuir estrutura diferenciável, podemos utilizar o fluxo para obter uma ação, a partir da EDO autônoma de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d\omega(t)}{dt} = F(\omega) & \qquad\qquad (*) \\ \omega(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Sendo a EDO (*) autônoma, temos que o fluxo ϕ satisfaz a propriedade de semi-grupo

$$\begin{cases} \phi_{t+s}\omega = \phi_t \circ \phi_s\omega, & \forall\ t, s \in \mathbb{R} \\ \phi_0\omega = \omega, \qquad \forall\ \omega. \end{cases}$$

Tomando o parâmetro $x \in \mathbb{R}$, podemos obter uma ação $\tau : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$, definida por $\tau_x\omega = \phi_x\omega$. Note que quando F tem pontos de equilíbrio o fluxo e a ação têm pontos fixos e portanto a ação não é transitiva.

O exemplo a seguir ilustra o conceito de soluções de viscosidade para este caso.

Exemplo 3.12. Começamos definindo um Lagrangiano, para $\Omega = \mathbb{T}^1$, $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$

$$L(x, v, \omega) = \frac{1}{2}v^2 + 1 + \cos(2\pi\phi_x\omega),$$

onde ϕ é o fluxo como em (*), para o campo $F(\omega) = \mathrm{sen}(2\pi\omega)$. Como veremos no Capítulo 4, Definição 4.2, a função u_α dada por

$$u_\alpha(x, \omega) = \inf_{x(0)=x} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt$$

é solução de viscosidade em ω (ver Proposição 4.4) da Equação de H-J com desconto, conforme definido no Capítulo 4, para $\lambda = 0$. Vamos calcular $u_\alpha(x, 0)$. No ponto $\omega = 0$ o fluxo ϕ_x é constante e igual a 0 pois $F(0) = 0$ (ele é um ponto de equilíbrio). Escolhemos $x(t) = x$ qualquer tal que $\dot{x} = 0$. Então $L(x, \dot{x}, 0) = 2$ e

$$u_\alpha(x, 0) = \inf_{x(0)=x} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + 1 + 1)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} 2dt = \frac{2}{\alpha}.$$

Iremos verificar se $u_\alpha(x, 0)$ é solução de viscosidade em x da Equação de H-J com desconto

$$H(x, D_x u, \omega) + \alpha u = 0.$$

Vemos que as exigências da definição de solução de viscosidade em x são satisfeitas pelas seguintes funções teste

$$\psi_1(x) = \frac{2}{\alpha} + (x - x_0)^2 \text{ e}$$

$$\psi_2(x) = \frac{2}{\alpha} - (x - x_0)^2,$$

onde x_0 é um ponto fixado. De fato, ambas são funções C^1 tais que $u_\alpha(x, 0) - \psi_1(x) = -(x - x_0)^2$ tem um máximo estrito em x_0, $u_\alpha(x, 0) - \psi_2(x) = +(x - x_0)^2$

tem um mínimo estrito em x_0. Além disso tem-se que $u_\alpha(x_0,0)-\psi_1(x_0)=0$ e $u_\alpha(x_0,0)-\psi_2(x_0)=0$. Vamos calcular $\mathcal{H}(\psi_1,x_0,0)$ e $\mathcal{H}(\psi_2,x_0,0)$. Temos que $D_x\psi_1|_{x=x_0}$ e $D_x\psi_2|_{x=x_0}$ valem 0. Temos então, para $i=1,2$

$$H(x_0,D_x\psi_i,0)+\alpha\psi_i=\frac{1}{2}0^2-1-\cos 0+\alpha\psi_i(x_0).$$

Temos então

$$\mathcal{H}(\psi_1,x_0,0)=\mathcal{H}(\psi_2,x_0,0)=0;$$

Portanto vemos que a condição necessária para ser solução de viscosidade em x é satisfeita para ψ_1 e para ψ_2. Observe que $\omega=0$ é um ponto fixo para a ação estacionária, de modo que esta ação não satisfaz a hipótese i) na Proposição 3.10.

Vamos mostrar no exemplo a seguir que a Equação de Hamilton-Jacobi (sem desconto) pode não ter solução de viscosidade em ω. Antes de começar o exemplo vamos precisar de um pequeno resultado.

Lema 3.13. Dizemos que uma função $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é *semi-côncava* se existir uma constante C tal que

$$g(x+z)-2g(x)+g(x-z)\le C|z|^2, \forall\ x,z\in\mathbb{R}.$$

Se g é semi-côncava então $\frac{dg}{dx}^+\le\frac{dg}{dx}^-$.

Demonstração: Se u é semi-côncava, então para $x,z\in\mathbb{R}$

$$\frac{g(x+z)-g(x)}{z}-(\frac{g(x)-g(x-z)}{z})=\frac{g(x+z)-2g(x)+g(x-z)}{z}\le\frac{C|z|^2}{z}.$$

Fazendo $z\to 0$, temos

$$\frac{dg}{dx}^+-\frac{dg}{dx}^-\le 0.$$

□

Exemplo 3.14. Iremos verificar neste exemplo que pode ocorrer que $\mathcal{H}(u,0,\omega)=\lambda$ não admita solução de viscosidade em ω, como observado em [LS03]. Considere $\Omega = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 = \{(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}^2\}/\sim$, onde a relação $\sim$ está definida por $(\omega_1,\omega_2)\sim(\overline{\omega_1},\overline{\omega_2}) \Leftrightarrow \omega_i-\overline{\omega_i}=2k_i\pi, k_i\in\mathbb{Z},$ para $i=1,2$. Seja $L=L(x,v,\omega):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2$ um Lagrangiano dado por

$$L(x,v,\omega)=\frac{1}{2}v^2+\cos(\omega_1+x)+\cos(\omega_2+\sqrt{2}x).$$

O momento generalizado é então

$$p=-D_vL=-D_v(\frac{1}{2}v^2+\cos(\omega_1+x)+\cos(\omega_2+\sqrt{2}x))=-v,$$

e o Hamiltoniano associado é

$$H(x,p,\omega)=-pv(x,p)-L(x,v(x,p),\omega)$$

$$=p^2-L(x,v(x,p),\omega)=\frac{1}{2}p^2-\cos(\omega_1+x)-\cos(\omega_2+\sqrt{2}x).$$

Precisamos de uma ação τ para a qual o Lagrangiano seja estacionário, isto é,

$$L(x+y,v,\omega)=L(x,v,\tau_y(\omega))$$

que é equivalente, neste exemplo, a

$$\frac{1}{2}v^2+\cos(\omega_1+x+y)+\cos(\omega_2+\sqrt{2}(x+y))=\frac{1}{2}v^2+\cos(\tau_y(\omega_1)+x)+\cos(\tau_y(\omega_2)+\sqrt{2}x).$$

A partir desta igualdade podemos ver que a ação

$$\tau_x(\omega)=\tau_x(\omega_1,\omega_2)=(\omega_1+x,\omega_2+\sqrt{2}x)$$

satisfaz a propriedade desejada.

Vamos verificar que $\mathcal{H}(u,0,\omega)=\lambda$ não possui soluções de viscosidade em ω. Suponha então, por absurdo, que u é uma solução de viscosidade em ω. Então pela Proposição 3.10, u é também uma solução de viscosidade em x. Sendo

u uma função estacionária e contínua em Ω, a hipótese de Ω ser compacto implica que u é limitada. De fato, sejam $x \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega$, então $|u(x,\omega)| = |u(0,\tau_x\omega)| \leq \max_{\omega\in\Omega}|u(0,\omega)| = M \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar para este exemplo, que qualquer solução de viscosidade em x é ilimitada, obtendo assim uma contradição.

Toda solução clássica de $\mathcal{H}(u,x,\omega) = \lambda$, isto é, de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \cos(\omega_1 + x) - \cos(\omega_2 + \sqrt{2}x) = \lambda \tag{3.1}$$

é também uma solução de viscosidade em x pelo Lema 3.8. Vamos mostrar agora que qualquer solução para esta equação é ilimitada. Claramente 3.1 só admite soluções para $\lambda \geq 2$ ($\frac{\partial u}{\partial x}^2 \geq 0$).

Para o caso em que $\lambda > 2$ obtemos

$$u_{\pm}(x,\omega) = \pm\sqrt{2}\int_0^x \sqrt{\lambda + \cos(\omega_1 + x) + \cos(\omega_2 + \sqrt{2}x)}dx.$$

Se $\frac{\partial u}{\partial x}$ é contínua em x então

$$|\frac{\partial u}{\partial x}| = \sqrt{2}\sqrt{\lambda + \cos(\omega_1 + x) + \cos(\omega_2 + \sqrt{2}x)},$$

e como $\lambda > 2$, então $\lambda + \cos(\omega_1 + x) + \cos(\omega_2 + \sqrt{2}x) > 0$, e temos que $|\frac{\partial u}{\partial x}| > \delta > 0$, portanto a solução é ilimitada.

Caso $\frac{\partial u}{\partial x}$ tenha descontinuidades, então sendo u semi-côncava (ver [CP04]), pelo Lema 3.13 elas serão tais que $\frac{\partial u}{\partial x}^+ < \frac{\partial u}{\partial x}^-$ (a descontinuidade implica que não vale a igualdade das derivadas laterais). Portanto o sinal da derivada não pode mudar novamente, ou seja, u é ilimitada.

Se $\lambda = 2$, então vale a expressão

$$u_{\pm}(x,\omega) = \pm\sqrt{2}\int_0^x \sqrt{2 + \cos(\omega_1 + x) + \cos(\omega_2 + \sqrt{2}x)}dx. \tag{3.2}$$

Mas pode acontecer que $\frac{\partial u}{\partial x}$ seja 0 em algum ponto. Vamos mostrar que isso ocorre para no máximo um único ponto. De fato, supondo que existam x e $\overline{x}$

que anulem a derivada, então ambos cossenos em 3.2 valem -1, o que implica:

$$(2k+1)\pi = \omega_1 + x, k \in \mathbb{Z};$$

$$(2m+1)\pi = \omega_2 + x\sqrt{2}, m \in \mathbb{Z};$$

$$(2\overline{k}+1)\pi = \omega_1 + \overline{x}, \overline{k} \in \mathbb{Z};$$

$$(2\overline{m}+1)\pi = \omega_2 + \overline{x}\sqrt{2}, \overline{m} \in \mathbb{Z}.$$

Isolando ω_1 na primeira e na terceira equação, obtemos

$$x - \overline{x} = 2\pi(k - \overline{k}). \tag{3.3}$$

Isolando ω_2 na segunda e na quarta equação, obtemos

$$(2m+1)\pi - x\sqrt{2} = (2\overline{m}+1)\pi - \overline{x}\sqrt{2}$$

$$2\pi(m - \overline{m}) = \sqrt{2}(x - \overline{x})$$

$$x - \overline{x} = \sqrt{2}\pi(m - \overline{m}). \tag{3.4}$$

Juntando 3.3 e 3.4 obtemos:

$$2(k - \overline{k}) = \sqrt{2}(\overline{m} - m),$$

que só é válida para números inteiros $k = \overline{k}$ e $m = \overline{m}$, o que implica $x = \overline{x}$. Portanto $\frac{\partial u}{\partial x}$ se anula para no máximo um ponto. Portanto deste ponto até $+\infty$ a derivada não muda de sinal. Vamos verificar agora que a integral em 3.2 diverge. Considere o fluxo $\phi_x(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + x, \omega_2 + \sqrt{2}x), x \in \mathbb{R}$, que é irracional no toro $\mathbb{T}^2$, e portanto ergódico. Segue pelo Teorema Ergódico de Birkhoff que para q.t.p. (ω_1, ω_2)

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\phi_x(\omega_1, \omega_2))dx \to \int_{\mathbb{T}^2} f d\lambda,$$

onde $T > 0$ e λ é a medida de Lebesgue no toro. Se tomarmos a função mensurável $f(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{2 + \cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)} \in C^0(\mathbb{T}^2)$, temos

$$\int_0^T \sqrt{2 + \cos(\omega_1 + x) + \cos(\omega_2 + \sqrt{2}x)}dx \approx T \int_{\mathbb{T}^2} f d\lambda.$$

O lado direito desta equação é positivo e tente a $+\infty$ se $T \to +\infty$, logo a integral do lado esquerdo diverge.

Com isso obtemos a contradição desejada que implica que a Equação de Hamilton-Jacobi não tem solução de viscosidade em ω.

Capítulo 4

Existência e Princípio da Programação Dinâmica

Como visto no Exemplo 3.14, pode ocorrer que a Equação de Hamilton-Jacobi não possua solução de viscosidade. Para contornar este problema definimos a Equação de Hamilton-Jacobi *com desconto*.

Definição 4.1. Chamamos de *Equação de Hamilton-Jacobi com desconto* a equação diferencial

$$\mathcal{H}^\alpha(u,x) = H(x, D_x u(x)) + \alpha u(x) = 0,$$

onde α é um número real positivo. Chamamos de *Equação de Hamilton-Jacobi com desconto estacionária* a equação diferencial

$$\mathcal{H}^\alpha(u,\omega) = H(0, D_x u(0,\omega), \omega) + \alpha u(0,\omega) = 0.$$

Definição 4.2. Considere o problema de controle ótimo de horizonte infinito

$$u_\alpha(x,\omega) = \inf_{x(0)=x} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as trajetórias globalmente Lipschitz com condição inicial $x(0) = x$.

Proposição 4.3. Seja $u_\alpha : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ como definido acima. Então u_α satisfaz o *Princípio da Programação Dinâmica*

$$u_\alpha(x,\omega) = \inf_{x(0)=x} \left(\int_0^T e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt + e^{-\alpha T} u_\alpha(x(T), \omega) \right)$$

sobre todas trajetórias globalmente Lipschitz com condição inicial $x(0) = x$.

Demonstração: Observe que, para qualquer trajetória globalmente Lipschitz com condição inicial $x(0) = x$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt =$$

$$= \int_0^T e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt + e^{-\alpha T} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(y(t), \dot{y}(t), \omega) dt$$

onde $y(t) = x(t+T)$. Uma vez que o conjunto de todas trajetórias globalmente Lipschitz com condição inicial $y(0) = x(T)$ é maior que o conjunto de todas com $y(t) = x(t+T)$, nós temos

$$e^{-\alpha T} u_\alpha(x(T), \omega) \leq \inf_{y(t)=x(t+T)} e^{-\alpha T} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(y(t), \dot{y}(t), \omega) dt \leq$$

$$\leq e^{-\alpha T} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(y(t), \dot{y}(t), \omega) dt,$$

para qualquer trajetória globalmente Lipschitz com condição inicial $x(0) = x$. Adicionando $\int_0^T e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt$ a igualdade acima e usando a observação inicial, obtemos

$$\int_0^T e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt + e^{-\alpha T} u_\alpha(x(T), \omega) \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt.$$

Tomando o ínfimo em ambos os lados, temos

$$\inf_{x(0)=x} \left(\int_0^T e^{-\alpha t} L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt + e^{-\alpha T} u_\alpha(x(T), \omega) \right) \leq u_\alpha(x, \omega).$$

Para obter a outra desigualdade, considere $\varepsilon > 0$ e tome $x_\varepsilon(t)$ a trajetória Lipschitz tal que

$$\inf_{x(0)=x}\left(\int_0^T e^{-\alpha t}L(x(t),\dot{x}(t),\omega)dt + e^{-\alpha T}u_\alpha(x(T),\omega)\right) + \varepsilon \geq$$

$$\geq \left(\int_0^T e^{-\alpha t}L(x_\varepsilon(t),\dot{x}_\varepsilon(t),\omega)dt + e^{-\alpha T}u_\alpha(x_\varepsilon(T),\omega)\right). \qquad (1)$$

Considere então a trajetória Lipschitz $y_\varepsilon(t)$ tal que $y(0) = x_\varepsilon(T)$ e

$$u_\alpha(x,\omega) \geq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}L(y_\varepsilon(t),\dot{y}_\varepsilon(t),\omega)dt - \varepsilon. \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtemos

$$\inf_{x(0)=x}\left(\int_0^T e^{-\alpha t}L(x(t),\dot{x}(t),\omega)dt + e^{-\alpha T}u_\alpha(x(T),\omega)\right) \geq$$

$$\geq \int_0^T e^{-\alpha t}L(x_\varepsilon(t),\dot{x}_\varepsilon(t),\omega)dt + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(t+T)}L(y_\varepsilon(t),\dot{y}_\varepsilon(t),\omega)dt - 2\varepsilon e^{-\alpha T}. \qquad (3)$$

Tome z_ε a função definida a partir de x_ε e y_ε, dada por

$$z_\varepsilon(t) = \begin{cases} x_\varepsilon(t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq T \\ y_\varepsilon(t-T) & \text{se} \quad T < t. \end{cases}$$

Então podemos reescrever (3) como

$$\inf_{x(0)=x}\left(\int_0^T e^{-\alpha t}L(x(t),\dot{x}(t),\omega)dt + e^{-\alpha T}u_\alpha(x(T),\omega)\right) \geq$$

$$\geq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(t)}L(z_\varepsilon(t),\dot{z}_\varepsilon(t),\omega)dt - 2\varepsilon e^{-\alpha T} \geq u_\alpha(x,\omega) - 2\varepsilon e^{-\alpha T}. \qquad (4)$$

Logo, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (4), obtemos a desigualdade desejada, que completa a prova.

$\square$

É padrão que a função u_α é solução de viscosidade em x de $\mathcal{H}^\alpha(u,\omega) = 0$, veja Teorema 11 de [BG08]. Para concluir, nosso último resultado utiliza o Princípio da Programação Dinâmica para mostrar que u_α é solução de viscosidade em ω, implicando na existência de soluções deste tipo, da Equação de H-J com desconto.

Proposição 4.4. Considere $u_\alpha : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$, como na Definição 4.2, então u_α é solução de viscosidade em ω de $\mathcal{H}^\alpha(u,\omega) = 0$.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que a função u_α é estacionária. Uma vez que $L \geq 0$, u_α está bem definida como um ínfimo. A estacionariedade é uma consequência da correspondência entre o conjunto de todas trajetórias globalmente Lipschitz com condição inicial $x(0) = x$ e o conjunto de todas trajetórias globalmente Lipschitz com condição inicial $y(0) = 0$, dada por $\{x(t)\} \to \{y(t) = x(t) - x\}$. De fato,

$$\begin{aligned} u_\alpha(0,\tau_x\omega) &= \inf_{y(0)=0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L(y(t),\dot{y}(t),\tau_x\omega)dt \\ &= \inf_{x(0)=x} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} L((x(t)-x)+x,\dot{x}(t),\omega)dt = u_\alpha(x,\omega). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que u_α é uma solução de viscosidade em ω. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$, uma função estacionária tal que $u_\alpha(0,\omega) - \varphi(0,\omega)$ tem um mínimo local (resp. máximo) em $\omega_\varphi \in \Omega$ e $u_\alpha(0,\omega_\varphi) - \varphi(0,\omega_\varphi) = 0$. Considere uma trajetória satisfazendo $x(0) = 0$ tal que $x(t)$ é uma trajetória globalmente Lipschitz, e um minimizante a tempo finito para o Princípio da programação dinâmica na Proposição 4.3, isto é,

$$u_\alpha(0,\omega_\varphi) = \int_0^T e^{-\alpha t} L(x(t),\dot{x}(t),\omega_\varphi)dt + e^{-\alpha T} u_\alpha(x(T),\omega_\varphi), \tag{4.1}$$

para T suficientemente pequeno.

Suponha que $\mathcal{H}^\alpha(\varphi,\omega_\varphi) < 0$. Por continuidade existe uma vizinhança B de

ω_φ em Ω e $\delta > 0$ tal que $\mathcal{H}^\alpha(\varphi, \omega) < -\delta$ para todo $\omega \in B$. Como $\mathcal{H}^\alpha(\varphi, \omega) = H(0, D_x\varphi(0,\omega),\omega) + \alpha\varphi(0,\omega)$, temos que $-vD_x\varphi(0,\omega) - L(0,v,\omega) + \alpha\varphi(0,\omega) < -\delta$, para todo $\omega \in B$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Se escolhermos $v = \dot{x}(t)$ e $\omega = \tau_{x(t)}\omega_\varphi$ então

$$\dot{x}(t)D_x\varphi(0, \tau_{x(t)}\omega_\varphi) + L(x(t), \dot{x}(t), \omega_\varphi) - \alpha\varphi(x(t), \omega_\varphi) > \delta,$$

para $0 < t < T$.

Integrando esta expressão e usando que $\frac{d}{dt}\varphi(x(t), \omega) = \dot{x}(t)D_x\varphi(0, \tau_{x(t)}\omega)$, obtemos

$$\varphi(0, \tau_{x(T)}\omega_\varphi) - \varphi(0, \omega_\varphi) + \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t), \omega_\varphi)dt - \alpha \int_0^T \varphi(x(t), \omega_\varphi)dt > \delta T.$$

Como $u_\alpha(0,\omega) \geq \varphi(0,\omega)$ em B e $u_\alpha(0,\omega_\varphi) = \varphi(0,\omega_\varphi)$, obtemos

$$u_\alpha(0, \tau_{x(T)}\omega_\varphi) - u_\alpha(0, \omega_\varphi) + \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t), \omega_\varphi)dt - \alpha \int_0^T \varphi(x(t), \omega_\varphi)dt > \delta T.$$

Utilizando (4.1) na desigualdade acima, segue que

$$(1-e^{-\alpha T})u_\alpha(0, \tau_{x(T)}\omega_\varphi) + \int_0^T (1-e^{-\alpha t})L(x(t), \dot{x}(t), \omega_\varphi)dt - \alpha \int_0^T \varphi(x(t), \omega_\varphi)dt > \delta T.$$

Escrevendo

$$u_\alpha(0, \tau_{x(T)}\omega_\varphi) + \frac{T}{(1-e^{-\alpha T})}\frac{1}{T}\int_0^T (1-e^{-\alpha t})L(x(t), \dot{x}(t), \omega_\varphi)dt -$$

$$\alpha\frac{T}{(1-e^{-\alpha T})}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x(t), \omega_\varphi)dt > \delta\frac{T}{1-e^{-\alpha T}}$$

e usando $\lim\limits_{T\to 0} \dfrac{T}{1-e^{-\alpha T}} = \dfrac{1}{\alpha}$, obtemos o seguinte

$$u_\alpha(0, \omega_\varphi) - \varphi(0, \omega_\varphi) > \frac{\delta}{\alpha},$$

que contradiz $u_\alpha(0,\omega_\varphi) = \varphi(0,\omega_\varphi)$.

A prova para o caso do máximo é análoga e preferimos omití-la.

$\square$

A unicidade pode ser obtida, conforme Teorema 48 em [Gom09], mediante hipóteses adicionais sobre o Hamiltoniano.

Referências Bibliográficas

[BCD97] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *"Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations"*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.

[BG08] A. Biryuk and D. Gomes. *"An introduction to the Aubry-Mather theory"*. *Preptint*, 2008.

[CP04] Piermarco Cannarsa and Carlo Sinestrari. *"Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control"*. Birkhauser, Boston, 2004.

[CI99] G. Contreras, R. Iturriaga. *"Global Minimizers of Autonomous Lagrangians"*. *To appear*. URL: http://www.cimat.mx/ gonzalo/.

[Eva98] Lawrence C. Evans. *"Partial differential equations, volume19 of Graduate Studies in Mathematics"*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[EG01] L. C. Evans and D. Gomes. *"Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics. I"*. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 157(1):1-33, 2001.

[FCG08] Italo Capuzzo Dolcetta, Fabio Camilli and Diogo A. Gomes. *"Error estimates for the approximation of the effective Hamiltonian". Applied Mathematics and Optimization*, 57(1):30-57, 2008.

[FM07] Albert Fathi and Ezequiel Maderna. *"Weak KAM theorem on non compact manifolds". NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 14(1-2):1-27, 2007.

[FS04] A. Fathi and A. Siconolfi. *"Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation". Invent. Math.*, 155(2):363-388, 2004.

[Gom08] D. Gomes. *"Generalized Mather problem and selection principles for viscosity solutions and Mather measures". preprint*, 2008.

[Gom09] D. Gomes. *"Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations". Publicações Matemáticas do IMPA*, 27^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009. ii+210 pp. ISBN: 978-85-244-0306-4.

[GO09] D. Gomes and Elismar R. Oliveira. *"Mather problem and viscosity solutions in the stationary setting". preprint*, 2009.

[GV07] D. Gomes and E. Valdinoci. *"Generalized Mather problem and homogenization of Hamilton-Jacobi equations". in preparation*, 2007.

[He04] Heinonen, Juha. *"Lectures on Lipschitz analysis."*. Report. University of Jyvasxkyla Department of Mathematics and Statistics, 100. University of Jyvaskyla, Jyvaskyla, 2005. ii+77 pp. ISBN: 951-39-2318-5.

[Lop06] Artur O. Lopes. *"Introdução à Mecânica Clássica"*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

[LS03] Pierre-Louis Lions and Panagiotis E. Souganidis. *"Correctors for the homogenization of Hamilton-Jacobi equations in the stationary ergodic setting"*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56 (2003), no. 10, 1501-1524.

[Mad06] E. Maderna. *"On weak kam theory for n-body problems"*. *preprint*, 2006.

[Mat91] J. N. Mather. *"Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems"*. *Math. Z.*, 207(2):169-207, 1991.

[Mn96] Ricardo Mañé. *"Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems"*. *Nonlinearity*, 9(2):273-310, 1996.

[Vil03] Cédric Villani. *"Topics in optimal transportation, volume 58 of Graduate Studies in Mathematics"*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

Índice remissivo