UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

O ENSINO E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: UMA INTERVENÇÃO CONSTRUTIVISTA

NEILA TONIN AGRANIONIH

DISSERTAÇÃO APRESENTADA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM EDUCAÇÃO

PORTO ALEGRE, ABRIL DE 1991

CIP - Catalogação na Publicação

A277e Agranionih, Neila Tonin
O ensino e a aprendizagem matemática : uma intervenção construtivista / Neila Tonin Agranionih. - Porto Alegre: UFRGS, 1991.
173p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação.

CDU: 372.47
372.47.013.77(PIAGET)
372.47.013.42(FREIRE)
159.953.5:51
37:51

INDÍCES ALFABÉTICOS PARA CATÁLOGO SISTEMÁTICO

Matemática: Ensino de primeiro grau
372.47

Matemática: Ensino de primeiro grau: Educação construtivista: Piaget, Jean
372.47.013.77(PIAGET)

Matemática: Ensino de matemática: Freire, Paulo
372.47.013.42(Freire)

Aprendizagem: Matemática
159.953.5:51

Educação matemática
37:51

Bibliotecárias Responsáveis:

Maria Hedy Lubisco Pandolfi - CRB-10/130
Neliana Schirmer Antunes Menezes - CRB-10/939

Professor Orientador:

Fernando Becker

- Doutor em Psicologia Escolar
  pela Universidade de São Paulo - USP.
- Professor Adjunto do Departamento de
  Estudos Básicos - Faculdade de Educação - UFRGS

SUMÁRIO

RESUMO

No presente trabalho propusemo-nos investigar a forma como o atual ensino da Matemática contribui para a não aprendizagem da disciplina, e buscar alternativas para uma Educação Matemática voltada para a construção de conhecimentos.

Com base nas teorias de Jean Piaget e Paulo Freire, efetuamos uma análise crítica do ensino da Matemática nas nossas escolas, através da realização de uma prática pedagógica junto a uma turma de 6ª série do 1º grau e da observação em turmas de 1ª a 5ª série do 1º grau, durante um semestre letivo.

O fazer contas e resolver problemas e exercícios-tipo, característicos do ensino de Matemática "que se tem" - baseados na reprodução de modelos - impedem que os alunos raciocinem logicamente e compreendam os conceitos matemáticos trabalhados na sala de **aula**. A desvinculação existente entre os problemas matemáticos da escola e os problemas da vida, assim como a inadequação dos conteúdos ao desenvolvimento cognitivo da criança, fazem com que os problemas e os conteúdos não sejam "assimilados", o que os torna sem significado para o aluno.

A visão empirista de aprendizagem atrela o aprender Matemática a um "fazer" (exercícios de fixação e treino de habilidades) que conduz à mecanização e à memorização, distanciando-se da real aprendizagem (s. lat.) que permite a compreensão dos conceitos.

O ensino "que se tem", além de não oportunizar a construção de conhecimento matemático, contribui para a obstrução do processo natural de construção das estruturas lógicas do sujeito. A dinâmica do fazer e do compreender, ou seja, da ação e conceituação próprias do desenvolvimento cognitivo do sujeito é obstruída pela escola.

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous nous sommes proposée de rechercher la forme comme l'actuel enseignement de la Mathématique contribue au non apprentissage de la discipline, et de chercher des alternatives pour une Éducation Mathématique tournée vers la construction de connaissances.

Embasée sur des théories de Jean Piaget et Paulo Freire, nous avons effectué une analyse critique de l'enseignement de la Mathématique dans nos écoles à travers la réalisation d'une pratique pédagogique auprès d'un groupe de 6e série du 1er Degré, pendant un semestre scolaire.

Le faire comptes et résoudre des problèmes et des exercices-type, caractéristiques de l'enseignement de Mathématique "qu'on a" - basés sur la reproduction de modèles empêchent que les élèves raisonnent logiquement et comprennent les concepts mathématiques travaillés dans la salle de classe. Le déliement existant entre les problèmes mathématiques de l'école et les problèmes de la vie, ainsi que l'inadéquation des contenus au développement cognitif de l'enfant, font que les problèmes et les contenus ne soient pas "assimilés", ce qui les rend sans signification pour l'élève.

La vision empiriste de l'apprentissage mène en laisse l'apprendre Mathématique à un "faire" (des exercices de fixation et de l'entraînement d'habiletés) qui conduit à la mécanisation et à la mémorisation, en s'éloignant du réel apprentissage (s. lat.) qui permet la compréhension des concepts.

L'enseignement "qu'on a", outre ne pas opportuniser la construction de connaissance mathématique, contribue, malheureusement, à l'obstruction du procès naturel de construction des structures logiques du sujet. La dynamique du faire et du comprendre, soit de l'action et conception propres du développement cognitif du sujet, est obstruée par l'école.

AGRADECIMENTOS

Cada nome que surge em nossa mente, neste momento, traz consigo uma emoção. Por esta razão queremos expressar nosso carinho e agradecimento a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

- Ao Moacir, à Vilma, à Marisa, à Naura, à Eliane, e à Magda: pela presença significativa nos momentos mais difíceis, e pelo amor e amizade que caracterizam nosso relacionamento.

- Em especial, ao Prof. Fernando Becker: pela confiança, apoio e desafio constante que nos impeliu à reflexão, ao aprofundamento e à "reconstrução" constante do já conhecido.

- À Direção, Coordenação Pedagógica e colegas da Escola Estadual de 1º Grau Incompleto Irmão Roberto Teódulo: pelo "espaço" e apoio concedidos à realização da pesquisa empírica.

- À Delegada de Educação, Profª Carlinda Poletto Farina, e a todos os colegas da 15ª DE: pela acolhida carinhosa e pela valorização do trabalho por nós realizado, bem como pelo "tempo" e incentivo concedidos sempre que necessários.

- À FAPES - Fundação Alto Uruguai para a Pesquisa e o Ensino Superior: pela concessão de licença e bolsa (PICD - CAPES), o que possibilitou a realização deste trabalho.

- Aos professores Fábio e Laura Chiamenti: pela revisão e datilografia do trabalho.

INTRODUÇÃO

A preocupação em relação ao ensino da Matemática é geral por parte de educadores, pais e alunos. Considerada uma disciplina muito difícil de aprender, senão a mais difícil, passou a ser responsável pelo horror que muitas pessoas sentem em relação à escola e por altos índices de reprovação escolar.

É comum ouvirmos pais e professores atribuírem "o caos" deste ensino ao suposto fato de que "a cada ano que passa as crianças possuem menos raciocínio lógico", como se viessem perdendo a capacidade de raciocinar de geração em geração. É comum ouvirmos, também, as expressões: -"Quem gosta de Matemática é louco!" e -"Quem sabe Matemática é gênio!"

Ao observarmos, porém, a vivacidade, a esperteza e a criatividade das crianças, de qualquer contexto social, ao enfrentarem novas situações e ao encontrarem para elas diferentes superações, fora da escola, podemos perceber que este é um argumento falho. Mesmo porque admitir uma gradual redução da capacidade de raciocínio das crianças seria o mesmo que admitir uma mutação na espécie humana.

A Matemática é uma ciência construída a partir da capacidade humana de abstrair, estabelecer relações e representá-las simbolicamente. Seria, pois, privilégio de alguns bem dotados? Por serem estas, características da nossa espécie, poderíamos pensar que todos os indivíduos possuem as condições necessárias ao aprendizado da Matemática.

Questões como estas perpassavam constantemente nosso pensamento a cada prova corrigida ou a cada "explicação" frustrada, enquanto professora de Matemática. Incomodavam-nos as constantes "notas baixas" que caracterizavam a maioria dos nossos alunos, apesar dos constantes esforços que despendíamos em "re-explicar" o conteúdo e intensificar os "exercícios", o que nos levou a questionar os métodos de ensino que utilizávamos.

Passamos a freqüentar cursos que propunham novas formas de ensinar, cursos promovidos por órgãos estaduais e municipais de ensino e pelas Universidades, na expectativa de encontrar "respostas" para os tantos "problemas" que enfrentávamos ao ensinar Matemática. Entre eles, em especial, a não aprendizagem dos alunos.

Propunham estes cursos o uso do material concreto como a "salvação" para os problemas do ensino da Matemática. Neles aprendíamos "receitas" de como ensinar determinados conteúdos, através de novas "estratégias" metodológicas, nem sempre "aplicáveis" à realidade em que nos inseríamos. Propunham, também, ensinar usando situações da vida da criança, diante da necessidade de "trazer a vida da criança para dentro da escola". Inexistiam, no entanto, reflexões maiores sobre estes aspectos e sobre tantos outros que se fazia necessário refletir, o que permitia o surgimento da idéia de que estes fatores seriam suficientes para propiciar a aprendizagem dos alunos e de que as inovações necessárias à melhoria do ensino da Matemática devam ser apenas metodológicas.

Atualmente, ainda existem "cursos" como estes e que perpassam as mesmas concepções. Não há dúvida de que esta é uma das razões pelas quais se observa atualmente um "ecletismo metodológico" nas aulas de Matemática: ensina-se da forma tradicional, mas com material concreto. O professor explica o conteúdo, "demonstrando" com material concreto.

A ausência de respostas para questões como: - Por que e para que usar material concreto? - O que é concreto para a criança? - Por que e para que trazer a vida da criança para dentro da escola? - Por que os alunos não aprendem Matemática? - Por que a Matemática é uma disciplina tão difícil? e muitas outras que se faz necessário colocar; essa ausência de respostas contribui para que a problemática que envolve o ensino desta disciplina se agrave cada vez mais. É preciso considerar que, para solucioná-la, torna-se imprescindível deslocar o eixo das análises para um leque mais amplo de questões, que garanta a visão holística necessária à sua análise. Inovações metodológicas são necessárias desde que acompanhadas de reflexões sobre a sua própria natureza. Esta visão, no entanto, somente será obtida no momento em que forem consideradas a importância e a influência que aspectos sociais, políticos, ideológicos e culturais exercem sobre a ação pedagógica desta disciplina, aliados à Filosofia e à Psicologia.

Existem, atualmente, várias pesquisas em Educação Matemática que a isto se propõem. São poucas, porém, diante da complexidade do problema, o que nos torna "carentes de respostas". Foi esta "carência", reafirmada no dia-a-dia de oito anos de sala de aula, que nos conduziu ao curso de Mestrado e nos motivou para a pesquisa. Nossas preocupações, relativas à aprendizagem matemática e ao desenvolvimento do raciocínio lógico, nos conduziram à Epistemologia e à Psicologia, embora entendendo que estes aspectos constituem-se parte de um todo indissociável.

Este estudo surge a partir de dois pressupostos fundamentais. O primeiro é de que a concepção relativa à natureza do conhecimento matemático é um fator determinante da forma de "ensinar" Matemática. As possíveis respostas para questões como: - O que é a Matemática? - Como o sujeito adquire o conhecimento matemático? buscadas durante a evolução desta ciência, suscitaram diferentes métodos de ensino, aliadas às diferentes concepções concernentes à origem do próprio conhecimento.

O segundo pressuposto é o de que o ensino da Matemática "que se tem" atualmente nas escolas, ao invés de propiciar a aprendizagem matemática, contribui para que ela não ocorra. Carregado de "empirismos", atrela o aluno a um "fazer" mecânico (contas, exercícios...) que impede a compreensão dos conceitos matemáticos e avaliza a concepção de que a Matemática só é acessível a uns poucos "bem dotados".

O ensino de Matemática, atualmente "ministrado" nas escolas, caracteriza-se pela relação autoritária professor-aluno.

Subjacente a ela encontra-se a concepção empirista do conhecimento, para a qual o aluno é considerado uma *tabula rasa* na qual os conhecimentos, já prontos e acabados, devem ser "gravados" e pela concepção bancária de educação (Freire, 1988) para a qual o aluno é considerado um "receptor passivo", um "depositário" de informações.

Entendemos por ensino um processo que, para além do transmitir, esteja comprometido com a reconstrução do já conhecido, ... *pois o conhecido é o passado daquilo que em um certo momento foi o ato de conhecer* (Bicudo, p. 51).

Por aprendizagem entendemos o ato de conhecer, inserido num processo funcional de conjunto que engloba todos os tipos de aquisições devidas às experiências físicas e lógico-matemáticas do sujeito e se confunde com o próprio processo de desenvolvimento.

A educação matemática "que se quer" identifica-se com a concepção construtivista do conhecimento (Piaget) e a concepção problematizadora da educação (Freire, 1988) para as quais o conhecimento não é mais imposto ao sujeito, mas construído a partir da interação com o meio físico e social, e se "re-faz constantemente na práxis".

O presente estudo, embasado nas teorias de Jean Piaget e Paulo Freire, pretende proceder a uma análise crítica do ensino de Matemática "que se tem" e da aprendizagem matemática.

No primeiro capítulo nos propomos a revisar a literatura no sentido de buscar as relações existentes entre as formas de conceber a origem do conhecimento matemático e as formas de ensinar Matemática, bem como a revisar a teoria piagetiana no que se refere à construção do conhecimento lógico-matemático.

No segundo capítulo descrevemos brevemente o local da pesquisa e os procedimentos de coleta e análise dos dados.

No terceiro capítulo relatamos alguns "momentos" da prática pedagógica que nos permitiram, de um lado, caracterizar o ensino "que se tem" em Matemática e, de outro, verificar que que este ensino adquire significado e oportuniza a aprendizagem, quando inserido no contexto do aluno: social, político e econômico.

No quarto capítulo analisamos o ensino e a aprendizagem da Matemática, tendo em vista o processo construtivo do conhecimento e as relações que se estabelecem entre a escola e o "mundo-vida" do aluno.

Para finalizar, procuramos realizar uma síntese das idéias desenvolvidas neste estudo, com a esperança de que possam contribuir significativamente para a Educação Matemática "que se quer".

1 - A NATUREZA DO CONHECIMENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Na História e na Filosofia da Matemática encontramos elementos indicativos de que as formas de ensinar esta disciplina estão vinculadas, embora não exclusivamente, às formas de conceber a natureza do conhecimento matemático.

A preocupação acerca da natureza deste conhecimento remonta a séculos e persiste no século XX, quando se observa o surgimento de novas concepções que, de certa forma, revolucionam a forma de pensar não só de filósofos e matemáticos, mas ainda de psicólogos e educadores.

Neste capítulo revisaremos a literatura, no sentido de buscar as relações existentes entre as diferentes concepções relativas à origem do conhecimento matemático e ao ensino de Matemática.

1.1 - Matemática: dedução ou indução?

Desde os primeiros séculos da Grécia Clássica a Matemática e a Lógica constituíam-se nas únicas disciplinas que possuíam o estatuto de autêntica ciência, pois, segundo a concepção vigente, eram as únicas que detinham um tipo de conhecimento absolutamente certo.

Para os gregos, a Matemática era considerada predominantemente Geometria e *Os Elementos* de Euclides foram considerados, da Idade Média ao século XIX, *a expressão mais elevada da razão humana, o modelo em que deveria inspirar-se qualquer exposição que se pretende isentar de dúvidas* (Geymonat, op. cit., p. 10).

A Geometria passou a ser ensinada desde a Idade Média com a forma axiomatizada que lhe havia dado Euclides, ou seja, através de demonstrações das leis geométricas. Estas demonstrações constituem-se em cadeias de raciocínios que permitem asseverar uma conclusão, mostrando que ela decorre logicamente de certas premissas verdadeiras. Euclides não solicita que se efetuem medidas de ângulos de triângulos, a fim de verificar que a soma é igual a dois ângulos retos; em vez disto apresenta demonstrações de caráter dedutivo, por meio das quais procura estabelecer conclusões com o rigor da necessidade lógica. Isto 300 anos a.C. E esta é, ainda hoje, a abordagem dada à Geometria na maioria das escolas brasileiras.

Em Barker (1976) encontramos indicações da forma como estudiosos recentes encaram a Geometria:

- a Geometria pura, que deve ser encarada como o estudo que envolve o conhecimento analítico puro, uma vez que considera apenas questões de lógica pura: o que decorre do quê.

- a Geometria aplicada, que deve ser vista como interessada em hipóteses acerca da natureza; estas seriam hipóteses empíricas acerca do mundo, sendo que a única maneira de decidir da sua verdade ou falsidade seria agindo indutivamente, ou seja, através da observação e da experimentação.

Há, nos últimos anos, uma tendência de resgatar o aspecto indutivo da Geometria em Educação Matemática, uma vez que já está mais do que evidente que a forma axiomatizada e, portanto, dedutiva com que vem sendo ensinada é um dos fatores determinantes dos altos índices de reprovação e do total desconhecimento, por parte dos alunos, de questões relativas à Geometria. Por outro lado, a Geometria ensinada nas escolas de 1º e 2º graus restringe-se apenas (e ainda quando sobra tempo, no final do ano letivo) à "plana". Mas seria plano o espaço, o mundo, a natureza? Há um século Riemann e Lobachevski mostraram que mesmo a Matemática não o é.

Há, aliás, uma tendência de resgatar o aspecto indutivo da Matemática.

> *É um lugar comum e um preconceito trivial considerar que a matemática seja uma ciência puramente dedutiva. Pelo contrário, a dedução é um aspecto; a matemática é também uma ciência indutiva, não apenas no sentido de passagem de uma série completa ou incompleta a afirmações de caráter geral (...), mas ainda no sentido do "salto qualitativo" de uma verdade (proposição válida) a outra verdade* (Manno, op.cit., p. 274).

E acrescenta:

> *(...) a matemática não é uma ciência puramente dedutiva, mas igualmente construtiva e inventiva. Considerar que ela pode ser circunscrita por um sistema de axiomas iniciais significa pretender haver exaurido nos conhecimentos actuais o futuro desta ciência* (Ibidem).

Portanto, dedução e indução, teoria e prática, abstração e experimentação são aspectos imanentes à própria Matemática, intrínsecos ao seu processo de construção. Isolá-los implica em perder a possibilidade de compreensão da totalidade que a envolve.

A priorização de alguns destes aspectos em determinados momentos históricos e em determinadas civilizações é devida às diferenças nas suas estruturas sociais.

Ao lado dos princípios geométricos desenvolvidos pelos gregos, por exemplo, a Matemática dos números foi desenvolvida pelos babilônios, hindus e árabes. Estes introduziram gradualmente símbolos e regras de cálculo que tornaram possível tratar das questões numéricas de um modo mais eficiente e abstrato do que era viável aos gregos: a álgebra. Não se preocupavam com demonstrações nem com a organização dos seus conhecimentos numéricos de forma a tratá-los axiomaticamente.

O fato de a Álgebra ter iniciado com os hindus e não com os gregos (cf. Machado, 1987) é atribuído às diferenças sociais vigentes. Na sociedade grega, o trabalho escravo, fácil de obter e cujo rendimento não importava melhorar por meio de aperfeiçoamentos técnicos, permitia à elite dirigente um alheamento da sociedade concreta. Na sociedade hindu, a atividade pastoril (nômade por excelência), as invasões constantes por povos migrantes, as freqüentes alterações político-sociais, as necessidades de adaptação imediata a novas situações associavam à

Matemática a necessidade de comunicação escrita e não permitiam preocupações lógicas ou estéticas.

Na sociedade grega, os escravos não necessitavam, para a realização de suas tarefas, dos conhecimentos geométricos produzidos por Euclides. Isto demonstra que a separação entre trabalho manual e trabalho intelectual não tinha, naquela época, as mesmas características da sociedade capitalista moderna, não havendo, portanto, a distinção Matemática Pura X Matemática Aplicada ou, em outras palavras, uma Matemática destinada à elite cultural e uma Matemática voltada para aplicações práticas.

Esta fragmentação da Matemática, segundo Machado (1987), é característica da sociedade capitalista moderna, e está associada à dicotomia entre trabalho manual e trabalho intelectual, que embasa toda a estrutura social vigente. Visa a estabelecer uma autonomia do trabalho intelectual, conduzindo à sua caracterização como produtor do saber. Desta forma, os trabalhadores manuais, reduzidos a executores de tarefas insignificantes, perderiam cada vez mais a visão de totalidade do processo de produção em que se inserem, passando a depender dos trabalhadores intelectuais, dos planejadores, para tomarem as mais simples decisões.

> *Quanto à produção do saber matemático, há um interesse em que se divulgue aos quatro ventos que as características intrínsecas da matéria tornam-na um assunto para indivíduos "eleitos" com especial talento ou tendências inatas. Isto contribui decisivamente para um distanciamento cada vez maior entre os que pretensamente "produzem" e os que aparentemente "utilizam" a Matemática, sendo, na realidade, tão utilizados quanto ela, assemelhando-se aos acessórios das máquinas que manipulam.*
>
> (Machado, 1987: 95)

Não há dúvidas de que a forma como a Matemática vem sendo ensinada nas escolas contribui para este processo. Por um lado, excessivamente abstrata e axiomatizada, só consegue ser aprendida por alguns eleitos, tidos como os mais inteligentes. Por outro lado, privilegiando o treino de habilidades através de exercícios que exigem simples aplicações de fórmulas e algoritmos, prepara os indivíduos para desempenharem funções definidas em determinadas situações também definidas. Nesta última perspectiva *não é necessário que produzam matemática, mas é fundamental que saibam utilizá-la eficientemente* (Machado, 1987: 94).

Vimos, portanto, que a fragmentação da Matemática em "pura" e "aplicada" não é inerente à sua própria estrutura, enquanto Ciência. Nela, teoria e prática, dedução e indução encontram-se imbricadas de forma consistente, fazendo parte do seu processo construtivo.

O resgate do aspecto indutivo da Matemática se faz necessário, tendo em vista o privilégio do dedutivo nas instituições escolares pelas razões já mencionadas. Este resgate, no entanto, tem que estar voltado para a produção do conhecimento matemático e não exclusivamente para a aproximação da Matemática da realidade concreta, no sentido de "aplicar" conhecimentos matemáticos no dia-a-dia.

1.2 - Conhecimento Matemático: empirismo ou apriorismo?

Até o século XIX uma das questões principais da Filosofia da Matemática era saber se o conhecimento matemático era empírico (baseado na experiência) ou *a priori* (passível de se obter antes da experiência). As diferentes formas de tratar a Geometria pelos egípcios, babilônios e gregos muito contribuíram para esta discussão. No entanto, devido ao fato de a Geometria Euclidiana ser considerada, durante mais de dois milênios, a suprema conquista da Matemática, argumentavam que o conhecimento geométrico (e, portanto, matemático) possuía um caráter *a priori*.

Para Descartes (1596-1650), Leibnitz (1646-1716) e Spinosa (1632-1677) a faculdade da razão era a responsável pelo conhecimento e pela existência de objetos matemáticos em um reino de idéias independentes da mente humana. Aceitavam a existência de uma "Mente Divina" e consideravam a Razão como um traço inato da mente humana, pela qual as verdades podiam ser percebidas "a priori", independentemente da observação.

Já os empiristas, como Locke e Hobbes, afirmavam que todo o conhecimento, exceto o matemático, provinha da observação. Não tentavam explicar o conhecimento matemático, uma vez que, como a Matemática contém, sem dúvida, conhecimento independente da observação e dos sentidos, tornava-se um contra-exemplo embaraçoso que tinha que ser ignorado ou explicado de alguma maneira (Davis e Hersh, 1986).

Kant, no final do século XVIII, influencia significativamente a Filosofia da Matemática, sustentando a crença no caráter "a priori" da Geometria e, conseqüentemente, do conhecimento matemático.

Para Kant, as verdades da Geometria e da Aritmética são impostas pela maneira como funciona a mente humana, sendo universalmente válidas para todas as mentes humanas e independentes da experiência (ibidem).

Tanto para Platão quanto para Kant, os objetos do conhecimento geométrico possuíam existência real e eram "sintéticos a priori", ou seja, necessitavam de um "terceiro elemento" para justificá-los, pois não eram justificáveis pela experiência sensorial (Barker, 1976).

Para Platão, este "terceiro elemento" estava fora da mente humana. A capacidade de conhecer as leis geométricas resultaria da preexistência das almas, ou seja, de o espírito humano ter existido antes, em um estado metafísico, onde havia oportunidade de contemplar pontos, retas, figuras perfeitas. O geômetra, desta forma, recorda os conhecimentos adquiridos em outras vidas e que não estão esquecidos. O conhecimento das verdades geométricas não pode ter apoio na evidência colhida pelos sentidos, uma vez que o homem não pode ver, ouvir, enfim, entrar em contato com os pontos, retas e planos através dos sentidos. A evidência sensorial não existe e, por esta razão, o conhecimento matemático não pode estar assentado nela, devendo ser, portanto, "a priori" e não empírico (Barker, 1976).

Para Kant, entretanto, este "terceiro elemento" estava no interior da mente humana. O conhecimento da Geometria não dependeria de algo exterior ao espírito, mas da própria mente, uma vez que esta é capaz de compreender que tudo aquilo que sente possui um caráter espacial que deve acomodar-se às leis euclidianas. As coisas exteriores não possuem caráter espacial. Este é apenas aparência introduzida pelo espírito.

Para Kant, também os teoremas e postulados de Euclides e o próprio conhecimento matemático não possuem caráter empírico, pois diferem grandemente das generalizações empíricas. Por exemplo, se fossem consideradas as observações empíricas, dever-se-ia dizer que *a maioria dos triângulos manifesta a propriedade de que a soma dos ângulos internos difere um pouco da soma de dois ângulos retos*, ao invés de *a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à soma de dois ângulos retos* (Barker, 1976).

Barker chama a atenção para o fato de que as idéias de Platão e Kant a respeito do conhecimento matemático levantam duas questões que continuarão pendentes no século XX e, portanto, alvo de importantes considerações:

- Platão sustenta uma posição realista, ou seja, que os objetos do conhecimento geométrico têm existência real fora da mente humana, embora inacessíveis à experiência sensorial;

- Kant sustenta uma posição conceptualista, ou seja, que os objetos do conhecimento geométrico são reais, mas têm uma realidade no interior da mente humana.

As concepções existentes nos séculos XVIII e XIX concernentes à natureza do conhecimento matemático evidenciam a idéia de um conhecimento previamente elaborado por "forças divinas" e, de uma certa forma, "dado" ao ser humano. Constituem-se os primórdios das concepções acerca do conhecimento, que determinaram as teorias da aprendizagem no século XX e que, conseqüentemente, influenciaram o ensino da Matemática de forma significativa.

Quanto à matemática dos números, foram muitos os que com eles trabalhavam sem questionar o seu significado e a sua existência. No entanto, devido à importância e à amplitude que a teoria dos números passou a ter, tanto na ciência quanto na vida comum, não foi mais possível fugir a estas questões.

As respostas dadas pelos pensadores modernos às indagações acerca dos números podem ser agrupadas em três correntes de pensamento (cf. Manno, op.cit., p.232): o nominalismo, o realismo e o conceptualismo. Estas correntes são oriundas da Idade Média, uma vez que os números representavam, na época, questões análogas às suscitadas pelo problema dos universais: qual é a natureza dos conceitos, como homem, cavalo, triângulo, etc.?

Os nominalistas defendem os números como realidades empíricas e rejeitam a idéia de que sejam entidades abstratas. Seriam fruto de abstrações operadas sobre a realidade empírica, tendo a função de índice, representação ou imagem desta realidade.

Os conceptualistas defendem que os números são construções mentais, invenções da mente, existentes só em pensamento, dotados de um valor, de uma estrutura, de um conteúdo inteligível.

Os realistas sustentam que os números existem, em sentido literal, como entidades abstratas, mas independentes do pensamento humano.

Estas concepções relativas aos números assumem um papel determinante, no fim do século XIX, nas crises enfrentadas na busca dos fundamentos da Matemática.

Segundo Davis e Hersh (1986), vários "desastres" ocorreram no século XIX. Entre eles, a descoberta das Geometrias não Euclidianas que mostrou haver mais de uma Geometria imaginável e o desenvolvimento da análise matemática que ultrapassa a idéia de "intuição geométrica", sobre a qual até então repousava a Matemática.

Até o século XX era unânime, entre os pensadores, a opinião da existência de uma única Geometria; a Euclidiana, cujas leis seriam necessárias e imutáveis. Justificam-se, diante disto, as polêmicas e o desconcerto que passaram a existir no momento em que começaram a surgir críticas e percebeu-se que o trabalho de Euclides, embora admirável, era defeituoso do ponto de vista lógico. Apresentava falhas de rigor e estas possibilitaram o surgimento das geometrias de Lobachevski e Riemann, que passaram a ser denominadas "não-Euclidianas" e que detinham, sem dúvida, um caráter revolucionário.

As Geometrias não-Euclidianas mostraram-se tão consistentes quanto as Euclidianas. Isso colocava por terra a crença de que nas leis de Euclides estaria a explicação para o conhecimento matemático. *A perda da certeza na Geometria foi filosoficamente intolerável, pois implicou na perda de toda a certeza no conhecimento humano* (Davis & Hersh, 1986: 372).

Estes "desastres" contribuíram para que a busca de explicações sobre o conhecimento matemático recaísse na Teoria dos Conjuntos de Cantor.

Os matemáticos passam a considerar que a idéia de conjunto apregoada por Cantor poderia ser o tijolo com o qual seria possível construir toda a Matemática.

No final do século XIX, no entanto, o paradoxo de Russel, como será exposto nas páginas que seguem, e outras antinomias ocasionam uma nova "crise" nos fundamentos da Matemática: a Teoria dos Conjuntos possuía contradições intrínsecas e não mais servia como explicação para o conhecimento matemático, uma vez que baseava a Matemática na Lógica Formal e esta não admitia contradições.

A descoberta das antinomias dá início a uma longa série de debates em busca dos fundamentos da Matemática. Os diferentes caminhos percorridos por filósofos e matemáticos podem ser agrupados em três grandes escolas: o logicismo, o construtivismo e o formalismo.

1.2.1 - O Logicismo

O programa desta escola, representada pelos matemáticos Frege e Russel, tinha como objetivo encontrar uma reformulação na Teoria dos Conjuntos que pudesse evitar o paradoxo de Russel, baseado na crença de que toda a Matemática poderia estar alicerçada na Lógica.

> *O logicismo sustenta que as leis da matemática são derriváveis da lógica ou são "redutíveis" às leis lógicas; o desenvolvimento da matemática tem, por conseguinte, uma explanação rigorosamente lógica; da lógica vir-lhe-ia o fascínio, o rigor e a exatidão* (Manno, p.242).

Os logicistas, especialmente Frege (cf. Manno, p.242-57), defendem a idéia de que a Matemática se deduz de condições gerais e não de fatos particulares. A experiência desempenha função de estímulo e de controle e não possibilita a fundamentação da Matemática, uma vez que esta ultrapassa os fatos observados e concerne aos fatos não observados. As verdades matemáticas fundamentam-se nas leis mais gerais do pensamento, ou seja, sobre as leis lógicas. a Aritmética constituir-se-ia numa lei lógica, numa lei deduzida. As suas aplicações às ciências da natureza apresentar-se-iam como puras e simples elaborações lógicas de fatos de observação; realizar cálculos equivaleria a extrair conclusões. As leis aritméticas possuiriam um caráter "a priori".

A tese logicista possui suas bases nas idéias realistas acerca dos números. O realismo ou platonismo representa uma corrente de idéias que consideram os conceitos e as leis matemáticas estruturas objetivas condicionantes do pensamento e não criações, construções arbitrárias deste, Os objetos matemáticos são reais e sua existência é um fato objetivo, totalmente independente do nosso conhecimento sobre eles. Ao matemático caberia apenas a tarefa de descobri-los e descrevê-los, uma vez que já existem em si e por si e não se constituem em construções da mente.

O intento de Frege de reduzir as leis da Aritmética à Lógica e o de Russel e Whitehead de reduzir toda a Matemática à Lógica foi um fracasso devido às contradições intrínsecas que passam a ser constatadas. Acaba tornando-se evidente a necessidade de a Matemática desenvolver-se por si própria, prescindindo dos andaimes da Lógica.

1.2.2 - O Construtivismo ou Intuicionismo

Esta escola defendia a posição de que o ponto de partida de toda a Matemática seriam os números naturais e toda a Matemática deveria estar baseada construtivamente nos números naturais (Davis e Hersh, 1986: 375).

Diante disto, para resolver a crise dos fundamentos da Matemática, seu intuito não era tanto resolver as antinomias, mas construir uma nova Matemática que, pela própria forma com que é construída, se revelaria isenta delas (Geymonat, p.17).

Os construtivistas também são chamados de "intuicionistas" devido ao fato de se referirem a Kant para justificar a "intuição pura" espaço-temporal como fundamento das matemáticas, embora tenham desenvolvido suas teses no efetivo labor matemático. Segundo eles (Brouwer, Heyting, Borel, Weyl e Griss), todo o conceito matemático mergulha as suas raízes em evidências elementares (intuições). Partindo delas, a Matemática deve seguir um "processo construtivo", ou seja, apoiar-se em afirmações das quais seja possível fazer demonstrações. Antes de afirmar com certeza que uma proposição é falsa, é necessário dispor de uma refutação construtiva (Manno, p. 234-5).

O construtivismo tem suas origens nas idéias conceptualistas que consideram os números "construções mentais" ou "invenções" da mente, existentes só em pensamento, dotados, no entanto, de um valor, de uma estrutura, de um conteúdo inteligível. Esta questão, porém, na opinião de outras escolas fundamentistas, restringe demasiadamente a Matemática, uma vez que estaria restrita ao âmbito das construções lógicas e coerentes efetuadas pelo intelecto, limitando-se, desta forma, ao âmbito das operações finitas.

Para os construtivistas, somente são válidas as demonstrações que admitem um caráter construtivo, invalidando muitos teoremas da Matemática clássica. O construtivismo acaba sendo marginalizado pelos matemáticos, permanecendo, em meados do século XX, como uma "heresia de poucos adeptos" (Davis e Hersh, 1986: 380).

1.2.3 - O Formalismo

Para a escola formalista, a Matemática consiste em um sistema rigoroso que parte de axiomas e de termos iniciais, desenvolve-se numa cadeia ordenada de fórmulas mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma, até as conquistas mais ousadas de seu edifício formal (Manno, p. 258). Em outras palavras, a Matemática seria a ciência das deduções formais, das demonstrações rigorosas, cujos termos primitivos e enunciados dispensam definições e conteúdos, até que se lhes atribuam interpretações.

Para os formalistas, o objeto da Matemática constitui-se em sistemas formais que utilizam leis lógicas. Fazer matemática consiste em enunciar algumas hipóteses, realizar demonstrações e chegar a conclusões. Qualquer aproximação com a realidade não se constitui num problema matemático.

O formalismo contemporâneo (cf. Davis e Hersh, 1986:380) descende do formalismo de Hilbert (1862-1943). Para este autor a Matemática é somente um jogo de deduções lógicas, enquanto para o formalista contemporâneo ela é a ciência das demonstrações rigorosas; tanto que desconsidera a Geometria como uma ciência descritiva, aceitando somente como Matemática a Geometria como estrutura dedutiva. As figuras, diagramas ou imagens mentais usadas em matemática são considerados não-matemáticos.

O formalismo fecha a Matemática em uma "torre de marfim", ou seja, no formulário matemático, excluindo como não pertinentes os problemas do "significado", do "valor", e da natureza das leis matemáticas, e exclui também a relação da Matemática com o mundo físico. Atribui a esta ciência uma natureza ideal, autônoma, fechada em si mesma (Manno, p. 275).

As três escolas atrás referidas buscam os fundamentos da Matemática na própria Matemática, ou seja, ora na Lógica, ora nos números naturais, ora nos sistemas formais. Atribuem a ela um caráter "a priori" *onde o trabalho matemático oscila entre desvelador de segredos de um mundo dado a priori e o de criador mesmo deste próprio universo* (Machado, 1987: 49).

Acreditam que os objetos matemáticos existem por si sós, ora independentes da mente humana (platonismo), ora no interior da mente humana (construtivismo). O formalismo, por sua vez, argumenta a não existência de objetos matemáticos, não havendo problemas, portanto, quanto a sua natureza.

A atitude dos matemáticos, em meados do século XX, era predominantemente formalista. O tratamento dado à Matemática era o de uma ciência completamente autônoma, sem qualquer relação com o pensamento humano e com a realidade do mundo. O verdadeiro matemático seria aquele que passasse os dias envolto em demonstrações, cálculos, fórmulas, abstrações, completamente alheio aos problemas do mundo. Estes não se constituiriam em problemas matemáticos.

Davis e Hersh atribuem a dominância do formalismo no cenário matemático do século XX à sua ligação com o positivismo lógico (tendência dominante na filosofia nos anos 40 e 50). Os adeptos da Escola de Viena defendiam uma ciência unificada, codificada em um cálculo lógico e formal e com um único método: o dedutivo. A Matemática não era vista como uma ciência, uma vez que não possui dados experimentais observáveis aos quais se podem aplicar regras de interpretação (já que não possui objeto de estudo). Pelas categorias filosóficas positivistas só poderia ser considerada como uma linguagem para outras ciências.

As influências do formalismo no ensino da Matemática foram significativas e são evidentes até nossos dias. Pode-se inclusive dizer que são responsáveis pelo agravamento da problemática que o envolve. Medeiros (1985) a elas se refere lembrando alguns momentos das aulas de Matemática. Nelas, professores e alunos agiam sem uma clara percepção dos significados de suas ações, pois jamais se afastavam do discurso matemático sombólico e jamais conseguiam contemplá-lo em sua totalidade. Os alunos eram convidados a pensar, de certo modo, mas não a refletir sobre este pensar. O professor falava de números e enfatizava a necessidade de rigor nas demonstrações e de rigor lógico. Falava muito pouco, limitando-se a escrever no quadro-de-giz o simbolismo da Matemática. Os alunos deveriam preocupar-se apenas com a representação de idéias e reciocínios. Adquiriam o formalismo, mas faltava-lhes o conjunto de idéias que assumiam tais formas.

Um dos exemplos mais significativos do formalismo no ensino da Matemática é a "matemática moderna". Idealizada pelo grupo denominado "Nicolas Bourbaki", aos poucos invadiu todo o mundo, em todos os níveis de ensino, com textos sobre teoria dos conjuntos. Este movimento surge nos Estados Unidos, como uma tentativa de "reformar" o ensino da Matemática, uma vez que haviam ficado claras as deficiências neste setor, na Segunda Guerra Mundial. Este fato, aliado ao sentimento de incompetência diante do lançamento do Sputinik pelos russos, leva os norte-americanos a buscarem avanços na área tecnológica.

Tanto no Brasil como no resto do mundo a "matemática moderna", com seu estilo formalizado, fracassa como método de ensino. Kline (1976) atribui este fracasso ao caráter dedutivo que detém. Segundo ele, a abordagem lógica dada à "nova matemática" engana o estudante. Isto porque o leva a acreditar que a Matemática foi criada por gênios que começam a raciocinar diretamente dos axiomas para chegar aos teoremas. Diante disto o aluno sente-se humilhado e confundido, pois não é capaz de "funcionar" desta maneira.

De acordo com Davis e Hersh (1987), tem crescido, nos últimos anos, uma reação contra o formalismo, e a pesquisa matemática recente busca um retorno em direção ao concreto e ao aplicável.

O caráter "a priori" atribuído à natureza da Matemática pelos fundamentistas é bastante discutível. Não há como negar que se trata de uma ciência em que as abstrações podem ser tratadas como algo em si, desvinculadas do substrato empírico que as originaram. No entanto, o seu caráter histórico denuncia, a cada momento, a sua origem na realidade física e na experiência sensível, *independentemente de terem os que a manipulam, clara consciência disto* (Machado, 1987: 52).

Caraça (1989) comenta que a Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra de um gabinete fechado onde não entram influências do mundo exterior e das necessidades dos homens. Reage contra esta atitude, enfatizando a necessidade de olhar-se para a ciência (e para a Matemática), procurando acompanhar o seu desenvolvimento progressivo, a maneira como foi sendo elaborada. Desta forma cairia por terra a idéia de que a Ciência basta-se a si própria, onde a formação de conceitos e teorias obedecem somente a necessidades interiores e passar-se-ia a considerar a influência toda que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

E acrescenta:

> *Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os problemas da vida social. Mas não há dúvida de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre - (p. XIV).*

Nos dias de hoje não há mais espaço para pensarmos numa matemática dogmática, fechada em si mesma e tampouco num ensino voltado para estes aspectos. As necessidades humanas e sociais exigem uma Matemática voltada para a realidade.

Não tínhamos a pretensão, com este estudo, de tentar concluir se o conhecimento matemático é empírico ou "a priori", conscientes da árdua tarefa que esta questão impõe, devido à sua complexidade filosófica, mas de chamar a atenção para as influências que as diferentes maneiras de pensá-lo ocasionaram ao ensino da Matemática, e para a predominância da dedução e da formalização neste ensino. No entanto, a nosso ver, as discussões relativas a esta questão deveriam considerar o pensamento de Manno (p.289):

> *Podemos dizer que a Matemática, pela sua natureza ambivalente, é uma ciência mediadora entre o "lógico" e o "ôntico", entre o ideal e o sensível: pela sua natureza a priori, liga-se à lógica e ao campo do puro pensar em geral; pela sua aplicabilidade à realidade sensível, revela sua descida do "lógico" ao "ôntico", do ideal ao experimental. A Matemática constitui um verdadeiro "nó ontológico".*

É nesta perspectiva que consideramos as pesquisas desenvolvidas por Jean Piaget uma grande contribuição na busca dos fundamentos matemáticos e ao próprio ensino desta ciência.

Zélia Chiarottino, estudiosa da obra de Piaget, num dos seus trabalhos (1972) coloca que o objetivo deste autor, no início da sua obra, foi o de resolver o problema do conhecimento, *não à maneira clássica dos filósofos mas como um homem que faz ciência, isto é, através de criação de um modelo abstrato daquilo que outros chamaram razão e que ele chama inteligência.* Para tanto, buscou na Biologia elementos que lhe permitiram elucidar esta questão, construindo uma epistemologia genética. E é através desta que contribui de forma significativa na busca dos fundamentos da Matemática.

Piaget, de uma certa forma, revoluciona as formas de pensar o conhecimento matemático. Apoiado na Biologia e na Psicologia, acrescenta a esta discussão elementos até então não considerados por filósofos e matemáticos.

Na perspectiva piagetiana, na origem do conhecimento matemático não mais encontraremos elementos isolados, passivos, predeterminados, mas um processo ativo, essencialmente construtivo. Isto confere à Matemática, enquanto Ciência, e ao seu ensino um caráter dinâmico, muito diferente do formalismo e do dogmatismo aos quais sempre estiveram atrelados.

Pode-se dizer que o pensamento de Piaget determina uma grande revolução nas formas de ensinar Matemática. E para que possamos mostrar em que consistem estas inovações é necessário revisar alguns aspectos da sua teoria.

1.3 - Matemática: um processo construtivo, inventivo, criativo

A concepção comum acerca da Matemática é a de que constitui-se em uma linguagem descritiva do real, ou seja, que expressaria de maneira exata conteúdos e constatações perceptivas.

Piaget não concorda com esta forma de pensar, que ele atribui ao "positivismo lógico" e ao empirismo. Para ele, a Matemática, longe de constituir-se apenas em uma linguagem descritiva do real, constitui-se numa teoria de todas as transformações possíveis e não somente das reais, uma vez que ultrapassa o real por todos os lados com diversas formas de infinitos, de espaços, de funções, etc. (Piaget, 1973).

Ao referir-se à Matemática como uma teoria de todas as transformações possíveis, afasta ainda mais a idéia de que consistiria em uma simples descrição lingüística da realidade,pois, a seu ver, quem diz "transformações" diz ações ou operações e quem diz "possíveis" diz assimilação do real a tais ações, reais ou virtuais. A Matemática é, na visão de Piaget, o instrumento de estruturação que coordena as ações e as transformações dos objetos e as prolonga em seguida em teorias dedutivas e explicativas (ibidem).

Em outro momento, Piaget (1980: 55) define a Matemática como *uma lógica que prolonga de forma natural a lógica do organismo, constituindo-se na lógica de todas as formas mais evoluídas do pensamento cien-*
tífico

Ora, a seu ver, a Lógica também não se reduz a um sistema de notações inerentes ao discurso ou a qualquer tipo de linguagem, mas consiste em um sistema de operações (classificar, ordenar, pôr em correspondência, utilizar uma combinatória...) cuja origem deve ser buscada também muito aquém da linguagem, nas coordenações gerais da ação (Piaget, 1973).

A posição que Piaget ocupa na Epistemologia da Matemática, fundamentando-a nas coordenações gerais das ações do sujeito sobre o meio, difere das concepções clássicas que a fundamentavam ou sobre a teoria dos números naturais (intuicionismo), ou sobre a teoria dos conjuntos (formalismo), ou sobre a lógica (logicismo). Difere também das duas concepções relativas à existência ou não de entes matemáticos entre as quais a Epistemologia desta ciência sempre oscilou: as que conferem à Matemática uma existência exterior ao espírito humano (como o empirismo, que a une à realidade física, e o platonismo, que lhe atribui uma existência ideal) e as que conferem sua existência ao espírito humano (na forma de estruturas inatas ou "a priori" preconizada por Kant, ou como convenções ou linguagem preconizadas pelo empirismo lógico).

Estas diferentes concepções colocam na base do edifício matemático elementos isolados, como o número inteiro, o ponto, a linha e outros cuja existência era sempre anterior às operações que a eles se aplicavam: geralmente "dados por Deus".

A posição de Piaget assemelha-se à concepção das matemáticas contemporâneas que atribuem aos "entes matemáticos" um caráter construtivo contínuo e que consideram que na ordem de sua construção e filiação se dá, desde o começo, um princípio de totalidade caracterizado pelas relações operatórias que existem entre os elementos em função do sistema. Desta forma, na base do edifício matemático estariam "estruturas", ou seja, sistemas que apresentam leis próprias de totalidade (Piaget, 1974). Para Piaget, portanto, as matemáticas podem traduzir-se em termos de construção indefinidamente abertas de estruturas.

Nesta perspectiva os "entes matemáticos" deixam de ser considerados "objetos ideais" pré-existentes e passam a ser considerados "seres" em constante estruturação, podendo tornar-se um "ser" conforme o estágio em que se encontra, pois uma operação que recaia sobre ele pode fazê-lo passar de uma forma estruturada para uma estruturante, sendo, portanto, ora forma, ora conteúdo (Piaget, 1983).

Os matemáticos atribuem as novidades incessantes engendradas pelo trabalho das matemáticas à possibilidade de introduzir indefinidamente operações sobre operações. Piaget observa, na criança, esta mesma possibilidade. Segundo ele, existe um parentesco entre a contínua construção intencional e refletida de operações sobre operações dos matemáticos e as primeiras sínteses ou coordenações inconscientes que permitem a construção dos números ou das medidas, das adições ou multiplicações, proporções, etc. Por exemplo, o número inteiro é síntese da inclusão das classes e da ordem serial; a multiplicação é uma adição de adições; as proporções são equivalências a duas relações multiplicativas.

A própria abstração reflexiva constitui-se em indícios deste parentesco, pois por estar presente na criança mesmo antes da constituição dos primeiros seres matemáticos, estando em ação constante na formação das operações de partida e no decorrer do processo, consiste em introduzir novas coordenações sobre o que é sacado das formas anteriores, o que já é um modo de operar sobre operações (Piaget, 1983).

Na tentativa de mostrar que para Piaget a Matemática adquire um sentido mais abrangente do que o de uma linguagem axiomatizada é importante salientar que, a seu ver, o pensamento matemático pode ser considerado como um prolongamento das construções espontâneas da inteligência:

> *A inteligência se orienta espontaneamente para a organização de certas estruturas operatórias que são isomorfas àquelas, ou de algumas partes daquelas que os matemáticos colocam no princípio de sua construção ou daquelas que os lógicos encontram nos sistemas que elaboram* (Piaget, 1968: 25).

Na realidade, diz Piaget, *o edifício das matemáticas repousa sobre estruturas, que correspondem, por outro lado, às estruturas da inteligência* (1968: 27).

Piaget chega a estas conclusões ao estabelecer um paralelo entre as estruturas que observou no desenvolvimento da criança e as "estruturas-mãe" de toda a Matemática, pesquisadas pelo grupo de matemáticos denominado Bourbaki. Estas "estruturas-mãe"

> *... correspondem, de forma geral e abstrata, ao que são, sob uma forma particular e limitada somente a certas instituições concretas, as três estruturas fundamentais que caracterizam as operações lógico - matemáticas na criança* (1974: 52).

A seu ver, portanto, existe um parentesco entre as "estruturas-mãe" de Bourbaki e as estruturas mais elementares que são elaboradas durante o desenvolvimento das operações lógico-matemáticas na criança.

De acordo com Chiarottino (1972), os matemáticos reunidos sob o nome de Bourbaki tentaram descobrir as estruturas que fundamentariam toda a Matemática a partir da comparação indutiva sistemática entre as teorias existentes com o objetivo de descobrir as suas semelhanças estruturais. Resultaram três estruturas fundamentais irredutíveis entre si: as estruturas algébricas, cujo protótipo é o grupo, as estruturas de ordem, cujo protótipo é a "rede" ou matriz, e as estruturas topológicas.

Caracterizaremos, a seguir, estas estruturas e procuraremos a forma como Piaget justifica o seu parentesco com as estruturas da inteligência. É interessante observar, no entanto, que Piaget chama a atenção para a necessidade de realizar-se um trabalho de equipe entre matemáticos e psicólogos para que estas questões sejam atentamente analisadas (Piaget, 1974).

a) **As estruturas algébricas** (cf. Piaget, 1968 e 1974)

Estas estruturas matemáticas e principalmente as estruturas de grupo expressam alguns dos mecanismos mais característicos da inteligência, quais sejam, a possibilidade de uma coordenação das ações, a possibilidade dos retornos e dos giros e a conservação.

As quatro propriedades elementares do grupo são:

1) o produto de dois elementos do grupo resulta num terceiro elemento do grupo;

2) toda operação direta corresponde a somente uma operação inversa;

3) existe apenas uma operação idêntica;

4) as composições sucessivas são associativas.

Estas propriedades correspondem, ao nível dos mecanismos operatórios da inteligência, às seguintes ações, respectivamente:

1) à coordenação de dois esquemas de ação que resulta em um novo esquema do mesmo sistema de ações;

2) à reversibilidade das ações (quando operatórias) e à conduta de "retorno" (no plano prático);

3) à possibilidade de reencontrar o ponto de partida sem nenhuma mudança, depois de uma conduta de retorno;

4) à possibilidade de alcançar um mesmo ponto de chegada por caminhos diferentes, o que corresponde, no plano prático, à conduta das "voltas".

A partir destas propriedades Piaget observa que as estruturas de grupo correspondem às primeiras formas de reversibilidade que regem os mecanismos operatórios da inteligência: a inversão ou negação, ou seja, o fato de o produto de uma operação com sua inversa resultar numa operação idêntica ou nula.

A principal característica que aproxima as estruturas algébricas de grupo com as estruturas da inteligência é, no entanto, a constituição de invariantes. A constituição de um grupo matemático está em correspondência com a construção de invariantes que a ele se relacionam. Desta forma, as transformações próprias do grupo são sempre solidárias a estas invariantes. O mesmo ocorre na organização espontânea que se observa no desenvolvimento da inteligência. Inicialmente, a irreversibilidade das ações corresponde a uma ausência de conseração. Posteriormente, as construções progressivas de estruturas reversíveis correspondem à elaboração das noções de conservação. Da mesma forma, a centralização inicial da criança sobre o próprio corpo corresponde a uma prefiguração prática do que posteriormente serão as operações, com a progressiva descentralização em relação ao próprio corpo.

Ainda é possível observar no sensório motor um "grupo prático de deslocamentos" que posteriormente se constituirá, pela intervenção de uma estrutura reversível, numa estrutura de grupo propriamente dito. Este "grupo prático de deslocamentos" diz respeito à estruturação do espaço pela criança ou, mais especificamente, à capacidade de um bebê reencontrar o ponto de partida num plano prático, através de voltas e retornos. Neste período, a aproximação com a estrutura de grupo é impossível por falta de trajetórias independentes da ação da criança e da noção de objeto permanente. A aquisição progressiva destas noções juntamente com o descentramento em relação ao próprio corpo e a constituição da reversibilidade é que permitirá realizar as mesmas ações ao nível das representações, ou seja, operar.

É interessante observar que Poincaré já havia observado este grupo de deslocamentos nas condutas da criança, mas considerava-o inato, enquanto Piaget o considera a forma de equilíbrio final de um processo de desenvolvimento (o de descentramento do próprio corpo).

As primeiras operações da criança exigem a presença de certas estruturas algébricas que se assemelham ao grupo. Constituem-se estas nos "agrupamentos elementares".

b) **As estruturas de ordem** (cf. Piaget, 1968)

A principal representante destas estruturas matemáticas é a rede ou matriz. Esta comporta uma lei de dualidade que consiste em permutar os (x) e os (+) assim como as relações precede (--->) e sucede (<---) :

1) AB ---> A e AB ---> B; A ---> (A + B) e B ---> (A + B)

Então:

2) AB ---> (A + B)

Por dualidade se tem, neste caso:

3) (A + B) <--- AB

Observe que a lei de dualidade própria da rede não conduz a uma inversão ou negação como nas estruturas algébricas, mas em transformações embasadas na reciprocidade, ou seja, na permutação da ordem. Enquanto a inversão nega a operação independentemente das relações de ordem, a reciprocidade transforma a ordem sem negar as operações em jogo. Portanto, a forma própria de reversibilidade das estruturas de ordem é a reciprocidade, e estas estruturas se estabelecem a partir de um sistema de relações (seriação, correspondências seriais, etc.).

Estruturas de ordem podem ser observadas no desenvolvimento da inteligência desde o comportamento sensório-motor: uma criança de um ano e meio a dois anos constrói uma torre em ordem decrescente empiricamente, através de ensaio e erro, preparando, num plano prático, o que será a seriação operatória característica do período das operações concretas.

A elaboração destas estruturas se efetua a partir dos sistemas de relações, paralelamente e em perfeita sincronização com as estruturas algébricas (que, por sua vez, se constituem a partir dos sistemas de classes) e atinge seu equilíbrio no estágio das operações interproposicionais. São responsáveis pela compreensão e pela extensão dos conceitos, respectivamente.

c) **As estruturas topológicas** (cf. Piaget, 1968 e 1974)

À ordem de construção das noções espaciais na criança corresponde a ordem axiomática da construção da Geometria.

Axiomaticamente, a topologia situa-se no ponto de partida da construção geométrica e dela podem derivar a geometria métrica euclidiana e a geometria projetiva.

As intuições espaciais mais elementares da criança no plano da representação das imagens e do desenho são de natureza topológica. Por esta razão as primeiras representações figurativas da criança só levam em consideração propriedades de contigüidade e separação, de continuidade e descontinuidade, de clausura e abertura, interioridade e exterioridade em relação a uma fronteira, etc., e não as propriedades das retas, dos ângulos e das paralelas, como o ensino nas escolas considera.

Esta tendência de inicar os estudos das relações espaciais pelas relações métricas euclidianas decorre do fato de que, historicamente, esta geometria precedeu de muitos séculos a geometria projetiva. A topologia, apesar do seu caráter primitivo e formador, encontra-se no final da ordem de construção das etapas da Geometria.

Piaget explica o fato de as geometrias euclidianas precederam as projetivas e, desta forma, haver uma inversão histórica em relação à gênese das estruturas espaciais na criança, por não ter sido descoberto o mecanismo das operações que as caracterizam, ou seja, pela ausência de uma tomada de consciência histórica das operações. Isto faz com que haja uma aproximação com o princípio de Aristóteles: a ordem da análise inverte, às vezes, a ordem da gênese.

Portanto, a ordem de construção das noções geométricas no desenvolvimento espontâneo da criança é inversa à ordem historica das etapas da Geometria, mas se aproxima da ordem axiomática da construção geométrica.

Assim, partindo das intuições topológicas fundamentais, a criança se orienta em seguida e simultaneamente em direção das estruturas projetivas e das estruturas métricas.

O isomoformismo entre as estruturas da inteligência e as estruturas da Matemática, apontado por Piaget, e os elementos já considerados em relação às estruturas lógico-matemáticas do sujeito, permitem concluir que estas se constituem nas estruturas da própria inteligência.

1.3.1 - Piaget e a Natureza do conhecimento Lógico-Matemático (cf. Piaget, 1987)

Se as estruturas da inteligência correspondem às estruturas lógico-matemáticas do sujeito e estas às estruturas da Matemática, buscar as origens do conhecimento matemático implica em buscar as origens da inteligência.

Piaget dedica-se a esta tarefa na obra **La Naissance de l'Intelligence chez l'Enfant** publicada em 1966. Nela discute as diferentes concepções existentes em relação à gênese dos conhecimentos e detalha os estudos e observações realizadas que lhe permitiram elaborar a sua **Teoria da Assimilação.**

Como vimos anteriormente, Piaget considera que as estruturas lógico-matemáticas não são fruto de categorias "a priori", (como versa o apriorismo) e tampouco são adquiridas pela experiência (como busca o empirismo), mas resultam de um contínuo processo de construção, que prolonga a organização biológica do sujeito. A inteligência, a seu ver, da mesma forma, consiste no *desenvolvimento de uma atividade assimiladora cujas leis funcionais são dadas a partir da vida orgânica e cujas sucessivas estruturas que lhe servem de órgão são elaboradas por interação dela própria com o meio exterior* (Piaget, 1987: 336).

O empirismo explica o funcionamento da inteligência *por uma pressão que o meio exterior físico ou social exerce sobre o organismo e que, paulatinamente, é gravada na mente ou no espírito do sujeito, independentemente de sua atividade* (Becker, 1983: 7). O conhecimento seria o resultado de hábitos adquiridos sem nenhuma atividade interna do sujeito.

O apriorismo explica o desenvolvimento da inteligência por uma série de estruturas pré-formadas na constituição biofisiológica do sujeito, que se impõem de dentro para fora, à medida que necessidades sejam provocadas pelo meio.

Piaget, na obra acima referida, discute estas concepções e aponta, embora admita algumas aproximações, os pontos que lhe permitem considerar que tanto uma quanto outra não explicam suficientemente a gênese da inteligência. Faremos uma breve referência a alguns.

A **Gestaltteorie** representa o apriorismo no campo da psicologia. Considera a inteligência uma estruturação renovada e endógena do campo da percepção ou do sistema de conceitos e relações. Desta estruturação resultariam estruturas, ou seja, totalidades ou "formas", originárias das estruturas pré-formadas do organismo.

Considera Piaget que estas "formas", por constituírem-se em estruturas e totalidades, aproximam-se dos "esquemas". Na verdade, considera o esquema uma "Gestalt dinamizada". No entanto, aponta divergências fundamentais, entre elas:

- uma Gestalt não considera as experiências anteriores do sujeito, não possuindo, portanto, "história", ao passo que um esquema resume em si o passado e consiste sempre na organização efetiva da experiência vivida. Para Piaget, o esquema constitui-se numa "Gestalt que tem história";

- a "história" que caracteriza o esquema constui-se numa generalização contínua, ou seja, evidencia que toda a estruturação é capaz de reproduzir-se ou reestruturar-se em função de novos acontecimentos ou objetivos. Isto mostra que uma "forma" não é uma entidade rígida, pré-formada e vinculada à percepção, como defendem os aprioristas, mas é estruturada pela própria atividade estruturante. É o que permite ao esquema combinar generalização com diferenciação, ou seja, possuir uma atividade real;

- as Gestalten não resultam de nenhum dinamismo anterior a ela e não possuem, intrinsecamente, nenhum tipo de atividade. Surgem no momento em que se reorganiza o campo da percepção e impõem-se como tais, acompanhados ou não de uma maturação interna dirigida pela estrutura pré-formada. É neste ponto que as sucessivas fases de desenvolvimento mostram haver diferenças entre o esquema e a Gestalt. Os esquemas são frutos de uma atividade organizadora contínua que lhes é imanente. Esta consiste na atividade assimiladora sem a qual a organização - face interna da adaptação que equivale ao esquema - não seria possível. Essa atividade, inicialmente voltada para a satisfação de necessidades, o que evidencia que as condutas são, logo de início, função da organização geral do corpo vivo, prolonga-se em assimilação reprodutora e recognitiva. Os esquemas assim constituídos acomodam-se à realidade exterior, à medida que procuram assimilá-la, diferenciando-se progressivamente.

- a teoria da forma negligencia o papel da correção ao considerar que as "boas formas" eliminam as menos boas, quando insatisfatórias e quando inadequadas ao conjunto de uma dada situação. Já os esquemas possuem uma reorganização que consiste na reorganização dos esquemas anteriores por diferenciação progressiva, evidenciando, portanto, um equilíbrio entre as exigências da acomodação e a tendência assimiladora, num exercício controlado.

A quinta e última divergência apontada por Piaget resulta e, de uma certa forma, resume as anteriores:

- *as "formas" existem em si mesmas, ao passo que os esquemas nada mais são do que sistemas de relações cujos progressos permanecem sempre independentes* (Piaget, 1987: 367).

Na verdade, a teoria da forma não explica a gênese dessas estruturas; ora considera-as "entidades" à moda platônica, ora as atribui à estrutura psicológica inata no organismo, ora considera-as "condição de toda experiência possível". O mesmo não ocorre com a teoria da assimilaçao que, fundamentada nas fases do desenvolvimento, relata e explica a "história" dos esquemas, da gênese às diferenciações mais complexas.

O empirismo é representado pelo associacionismo no campo da Psicologia. Para o associacionismo *o conhecimento resulta de hábitos adquiridos sem que nenhuma atividade interna - a qual constitui a inteligência como tal - condicione essas cquisições* (Piaget, 1987: 337). O meio exterior é, portanto, quem determina a inteligência.

Piaget concorda com o empirismo em relação à importância do meio no desenvolvimento da inteligência, mas diverge da explicação empirista sobre a forma como o meio exerce sua ação e como o sujeito registra os dados da experiência.

O empirismo considera a experiência como *algo que se impõe por si mesmo, sem que o sujeito tenha necessidade de organizá-la, isto é, como se fosse impressa diretamente no organismo sem que uma atividade do sujeito fosse necessária à sua constituição* (ibidem, p. 339). Por outro lado, encara a experiência *como existente em si mesma, quer ela deva o seu valor a um sistema de "coisas exteriores" (empirismo metafísico), quer consista num sistema de hábitos ou de associações auto-suficientes (fe-*

Piaget apresenta três razões pelas quais diverge deste ponto de vista:

- no decorrer das fases do desenvolvimento, o papel da experiência aumenta ao invés de diminuir. *O espírito da criança avança, com efeito, à conquista das coisas, como se os progressos da experiência supusessem uma atividade inteligente que a organiza, em vez de resultar dela* (Piaget, 1987: 341). Ou, em outras palavras, avança do fenomenismo puro até a experimentação ativa, através de "acomodações" sucessivas que permitem ao sujeito adaptar-se às solicitações do meio. Experiência não é, portanto, pressão do meio exterior, como versa o empirismo, mas ação e construção progressivas;

- a experiência não pode ser concebida como independente, auto-suficiente, uma vez que depende da atividade assimiladora do sujeito; "uma acomodação" pela qual definimos o contato com a experiência, é sempre indissociável de uma "assimilação" dos dados à atividade do próprio sujeito (p. 342). A experiência se objetiva à medida que o sujeito age e só progride à medida que é animada e estruturada pela própria inteligência;

- o contato entre o espírito e as coisas não consiste em percepções ou associações, como versa o empirismo, mas em apreensões de complexos mais ou menos estruturados.

Em síntese, as concepções aprioristas e empiristas não são suficientes para explicar a gênese da inteligência, uma vez que estabelecem a unidirecionalidade da influência do sujeito sobre o objeto e do objeto sobre o sujeito, respectivamente. Esta é fruto das constantes interações sujeito-meio através de sucessivas assimilações e acomodações que permitem considerar a inteligência como uma atividade real, organizadora, cujo funcionamento prolonga o da organização biológica e o supera, graças à elaboração de novas estruturas.

A inteligência é, portanto, fruto de um contínuo processo de construção, processo este que torna possível ao sujeito, através de sucessivas reequilibrações, atingir o mundo da razão, onde experiência e dedução encontram-se imbricadas. Piaget, ao definir a Matemática como a ciência de todas as transformações possíveis e imagináveis e conferir à inteligência humana o mesmo caráter, considera que aquele é também o mundo da Matemática.

Na verdade, a ciência Matemática foi e é incessantemente construída devido à possibilidade humana de abstrair, ou seja, de, partindo do real, extrapolá-lo infinitamente, transbordando o mundo dos possíveis e atingindo o mundo dos imagináveis; em outras palavras, partindo da ação, atingir a conceituação.

Tentar compreender a forma como o ser humano atinge tal capacidade é o objetivo das considerações que seguem.

1.3.2 - **Conhecimento físico X Conhecimento lógico--matemático** (cf. Piaget, 1973)

Piaget, opondo-se ao empirismo, defende que o conhecimento do objeto, de qualquer natureza que seja, *não é jamais uma "cópia" do real, mas necessariamente a assimilação a esquemas de ação de complexidade crescente* (1973: 380).

Segundo ele, o sujeito realiza ações para detectar as propriedades dos objetos e dos fenômenos. Estas ações não são isoladas, mas coordenadas entre si. As coordenações das ações, por sua vez, possibilitam o surgimento das "operações" lógico--matemáticas que são solidárias a uma estrutura lógico- matemática e biológica do sujeito; por exemplo: as ações necessárias à medida se prolongam em operações de medidas e estas operações são imediatamente solidárias com a "métrica geral" que constitui a estrutura lógico-matemática.

Para Piaget, não há possibilidade de um conhecimento físico ou experimental constituir-se sem um quadro estruturante lógico-matemático.

Para compreender melhor isto é importante observar que Piaget distingue três tipos de conhecimento: físico, lógico-matemático e social.

Estes conhecimentos são adquiridos através de ações. *Não se conhece, realmente, um objeto senão agindo sobre ele e transformando-o...* (Piaget, 1978: 73). E aponta duas maneiras de transformar o objeto a conhecer: através de ações físicas, que consistem em modificar as posições, os movimentos e as propriedades para explorar-lhe a natureza, e através de ações lógico-matemáticas as quais consistem em enriquecer o objeto de propriedades ou relações novas que conservam as propriedades ou relações anteriores, completando-as, porém, por sistemas de classificações, de ordenações, de colocações em correspondência, de enumerações, de medidas, etc.

Estas ações caracterizam duas espécies de experiências e duas espécies de abstrações (cf. Piaget, 1978: 76):

a) a experiência física, que consiste em agir sobre os objetos para extrair um conhecimento por abstração a partir dos próprios objetos. Exemplo: ao erguer sólidos a criança apercebe a diversidade dos pesos, a sua relação com o volume em densidade igual, a variedade das densidades, etc.

b) a experiência lógico-matemática, que consiste em agir sobre os objetos com abstração dos conhecimentos a partir da ação e não mais sobre os próprios objetos. Exemplo: ao enumerar pedrinhas a criança estabelece relações entre a soma e ordem das pedrinhas. Estas relações não são propriedades físicas das pedrinhas, mas resultam das ações de reunir e ordenar realizadas pela criança ao enumerar.

A experiência física é uma apropriação das propriedades das coisas que supõem ações. Já a experiência lógico-matemática é a apropriação de relações entre as propriedades dos objetos que supõem, além das ações, a coordenação entre estas ações. Por exemplo, a criança que conta 10 pedrinhas e compreende que são sempre 10, mesmo que se mude a ordem, faz uma experiência de natureza completamente diferente: experimenta sobre as próprias ações de contar e não nas pedrinhas, que lhe servem só de instrumento.

A experiência ocupa, pois, papel importante na construção do conhecimento, mas, como vimos, opõe-se à concepção empirista, que a reduz à percepção das propriedades dos objetos. Na concepção piagetiana, num conhecimento físico a percepção jamais age sozinha: embora a abstração das propriedades dos objetos seja feita a partir dos objetos em si, *é necessário acrescentar à percepção um conjunto de quadros lógico-matemáticos que tornam possíveis as leituras perceptivas* (p. 78). Exemplo disto é a Física:

> ... *enquanto ciência da experiência mais evoluída, é uma perpétua assimilação do dado experimental a estruturas lógico-matemáticas, porque o próprio requinte da experiência é função dos instrumentos lógico-matemáticos utilizados a título de intermediários necessários entre o sujeito e os objetos a atingir* (p. 79).

O conhecimento físico, portanto, não é uma "cópia", mas é necessariamente a assimilação a esquemas de ação de complexidade crescente.

Esta assimilação é também de natureza lógico-matemática, uma vez que as ações necessárias à detectação das propriedades dos objetos acabam coordenando-se entre si, por mais diferenciadas que sejam pela acomodação à diversidade e aos detalhes das situações.

Em suma, o conhecimento físico e o conhecimento lógico-matemático, embora não redutíveis entre si, estão intimamente ligados, não sendo possível um sem o outro, e desempenham papel fundamental no desenvolvimento cognoscitivo do homem.

> *Ora, do ponto de vista biológico esta incapacidade do conhecimento adquirido ou experimental constituir-se sem um quadro estruturante lógico-matemático tem vivo interesse, porque mostra que o conhecimento do meio e dos objetos (...) só é de fato possível pela extensão das estruturas de organização do universo inteiro* (Piaget, 1973: 381-2).

As estruturas lógico-matemáticas são, portanto, frutos das ações e operações lógico-matemáticas, possíveis devido à experiência lógico-matemática sobre os objetos e, por outro lado, as ações, as operações e as experiências lógico-matemáticas tornam-se possíveis devido a esta possibilidade de estruturação. Constituem-se em um processo *cujas origens devem ser buscadas no funcionamento organizador geral, comum a todas as estruturas vivas* e cuja construção *obedece a um desenrolar endógeno que procede por etapas* através de sucessivas abstrações reflexivas (ibidem, p. 360). Procuraremos compreender melhor este processo.

1.3.3 - Construção das estruturas lógico-matemáticas

Uma das principais questões que envolveu Piaget no início de sua obra foi discernir se o conhecimento matemático é alcançado através de categorias "a priori" (como versa o apriorismo) ou aprendizagens (como versa o empirismo).

No desenrolar de suas pesquisas, conclui que as estruturas lógico-matemáticas não se reduzem nem a combinações hereditárias à maneira do instinto (embora resultem de uma progressiva reequilibração por auto-regulação), nem em aprendizagens (embora se constituam na condição necessária da organização e - do registro da experiência), mas num "desenrolar endógeno que procede por etapas", ou seja, num processo de construção contínua. No entanto, para compreender a natureza deste processo construtivo é necessário considerar as condições que a tornam possível: uma de natureza formal ou lógica, outra de natureza psicológica (cf. Piaget, 1973: 361-2).

1. O formalista Goedel demonstrou desde 1930, através de teoremas, que um sistema (embora bastante rico para satisfazer suas necessidades) não pode chegar por seus próprios meios, ou por meios mais fracos, a verificar sua própria não-contradição. Para isto é necessário ultrapassar o limite do sistema e integrá-lo em um sistema mais forte; ou seja, o desenvolvimento de uma estrutura não pode ser feito exclusivamente em seu próprio patamar, por simples extensão das operações dadas e combinação de elementos conhecidos. O progresso consiste em construir uma estrutura mais ampla que abranja a precedente, mas introduzindo novas operações. Exemplo disto seria a forma como Cantor obteve a aritmética transfinita. Fazendo corresponder duas séries tais como 1, 2, 3, 4... e 2, 4, 6, 8... biunívoca e reciproca-

mente, obteve um novo número (a potência do enumerável) que não pertence nem a uma nem a outra. Ou seja, a aritmética transfinita, obtida da elementar, abstraindo dos resultados desta última uma operação que permite construir nova estrutura que a engloba. Num processo sucessivo esta estrutura , por sua vez, não pode por seus próprios meios garantir sua própria não-contradição. Para isso será preciso construir uma estrutura mais forte. E assim sucessivamente.

2. Do ponto de vista psicológico, o processo de abstração acima descrito é possível devido à capacidade de o sujeito estabelecer relações e extrair propriedades das ações e operações que realiza. Piaget chama isto de abstração lógico-matemática. Esta consiste, em primeiro lugar, em tomar consciência da existência destas ações ou operações. Em seguida, trata-se de "refletir" (no sentido físico da palavra) as ações notadas, projetando-as sobre um novo plano, como, por exemplo, o do pensamento, por oposição à ação prática, ou o da sistematização abstrata relativamente ao pensamento concreto (como a álgebra em relação à aritmética). E, finalmente, trata-se de integrá-las a uma nova estrutura, ou seja, construir uma nova estrutura. No entanto, a construção de uma nova estrutura só é possível sob duas condições: a) a nova estrutura deve primeiramente ser uma reconstrução da precedente; do contrário não há nem coerência nem continuidade; a nova estrutura será, portanto, o produto da precedente sobre o novo plano escolhido; b) a nova estrutura deve também ampliar a precedente, generalizando-a por combinação com os elementos próprios do novo plano de reflexão, do contrário não haveria qualquer novidade. O pensamento realiza, portanto, um novo arranjo da matéria anteriormente fornecida em estado bruto ou imediato. Em outras palavras, uma "reflexão" , no sentido psicológico da palavra.

Piaget denomina este processo de reconstrução com novas combinações que permite a integração de uma estrutura operatória de etapa ou nível anteriores em uma estrutura mais rica, de nível superior, de "abstração reflexiva".

Justifica-se desta forma por que a construção lógico-matemática não é nem invenção, nem descoberta, mas sim uma construção propriamente dita, produtora de combinações novas.

Para Piaget, as estruturas lógico-matemáticas não são devidas à hereditariedade e também não são adquiridas pela experiência, embora sejam necessárias a elas.

> *Os conhecimentos lógico-matemáticos não são hereditários, porque são adquiridos, por vezes mesmo com dificuldade, e dão assim lugar a uma espécie de aprendizagem freqüentemente confundida com as aprendizagens autênticas. Não se reduzem, todavia, a estas últimas no sentido de serem tirados da experiência exterior e distinguem-se desta por uma série de caracteres endógenos* (Piaget, 1973: 347).

Piaget considera que o mecanismo das abstrações reflexivas pode ser observado no curso de toda a história da Lógica e da Matemárica e é convergente com o processo psicogenético da elaboração das estruturas operatórias na criança, observado na passagem dos níveis sensório-motores aos níveis sucessivos, ou seja, da ação às operações concretas e depois proporcionais ou formais. Considera também que, para compreender melhor estas questões e a natureza biológica das estruturas lógico-matemáticas é necessário *partir desse processo sui generis de construção, constituído pela abstração reflexiva, seguir-lhe retrospectivamente o curso, para remontar às origens* (ibidem, p. 364).

Realizando esta retrospectiva, percebemos que para compreender o processo de construção lógico-matemática é necessário percorrermos o caminho da ação à operação.

Para Piaget (1973), todo o conhecimento está ligado a uma ação. Conhecer um objeto consiste em agir sobre ele, transformando-o de maneira a compreendê-lo. Em outras palavras, conhecer significa agir sobre o objeto inserindo-o num sistema de significações, isto é, "assimilando-o" a estruturas anteriores previamente construídas pelo sujeito.

O ato de conhecer torna-se possível a partir dos primeiros dias de vida, pois a criança, agindo sobre o seu meio (sugando, agarrando...) constrói "esquemas de ação".

Piaget (1973) denomina "esquemas de ação" o que numa ação pode ser transponível ou generalizável a uma situação seguinte, ou seja, o que há de comum nas diversa repetições ou aplicações da mesma ação.

A construção dos esquemas de ação, por sua vez, só é possível devido ao ato assimilador. No entanto, há que se observar que a assimilação pressupõe esquemas. Não há como determinar quem surge primeiro: a condição da assimilação ("esquema" inato) ou o esquema. Mas não há esquema sem assimilação. Como já nos referimos, assimilar consiste em inserir o objeto de conhecimento num sistema de relações (estrutura), conferindo-lhe um significado. Quando não há possibilidade de encaixe do objeto a uma estrutura anterior (assimilação), o organismo modifica-se para que a assimilação seja possível, ou seja, "acomoda-se" às pressões do meio.

Inicialmente as ações do sujeito constituem-se no exercício dos reflexos necessários à formação dos esquemas de assimilação; olhar, pegar, sugar, puxar, e à coordenação destes esquemas: olhar e pegar, pegar e sugar, etc. Estes esquemas são passíveis de modificação, caso não possam ser aplicados a determinados objetos, ou seja, podem "acomodar-se" aos objetos. Assim, os esquemas assimilam os objetos ou se acomodam a eles, o que quer dizer que se reequilibram por ocasião de cada variação do meio.

Para Piaget, os esquemas de ação constituem a origem do comportamento lógico. Isto porque, quando apresentamos à criança um objeto novo, esta passará por um espécie de classificação (que ele denomina *classement*), uma vez que será sucessivamente apanhado, chupado, balançado, esfregado, etc., como se, para conhecê-lo, a criança tentasse verificar em que esquemas se encaixa. A criança descobre aos poucos que tudo o que pode ser pego pode ser olhado e que nem tudo o que pode ser olhado pode ser pego. Descobre também que há objetos que podemos pegar e ouvir, enquanto há outros que só é possível pegar. Estes esquemas classificatórios elementares constituir-se-ão nos níveis seguintes em *classements* diferenciados, pois possibilitarão às crianças dividir os objetos em coleções no espaço, com encaixe, intersecções, etc., até chegarem às classificações operatórias (Chiarottino, 1972).

Há indícios de comportamento lógico também nos empilhamentos de blocos de tamanho decrescente, ou seja, nas "seriações" elementares que a criança realiza neste período. Estas também evoluirão para a fase operatória, passando por uma fase intermediária que consiste em conseguir seriar bastões segundo tamanho crescente ou decrescente, desenhando-os.

Ao lado destes esquemas que constituem a origem do pensamento lógico há outros que permitem o conhecimento dos próprios objetos e que dão origem às noções de espaço, tempo, velocidade, causalidade, etc. Há também o aparecimento da primeira noção de conservação que é o esquema da permanência do objeto, condição necessária para a aquisição das noções de conservação da substância - primeiro sinal da capacidade de operar com uma determinada lógica no nível dos brinquedos e dos jogos (... Chiarottino, 1972).

É importante observar que neste período as ações que levam as crianças a detectar as propriedades dos objetos não são isoladas, mas, pelo contrário, são coordenadas num todo através de sistemas de esquemas. Estes sistemas, de acordo com as constatações de Piaget, organizam-se progressivamente sob a forma de estruturas de conjunto, com determinadas leis, independentes da natureza dos objetos aos quais se aplicam. Piaget assim define "estrutura":

> ... *há estrutura quando os elementos estão reunidos em uma totalidade apresentando certas propriedades enquanto totalidade e quando as propriedades dos elementos dependem inteira ou parcialmente das características da totalidade* (apud Chiarottino, 1972: 14).

Essa estruturação evolui no sentido de conquistar a reversibilidade completa que caracteriza as estruturas de conjunto próprias da inteligência: ... *a inteligência se orienta desde o princípio para uma reversibilidade que aumenta sem cessar em importância no curso do desenvolvimento* (Piaget, 1968: 8).

No período da formação dos primeiros esquemas, que Piaget denomina sensório-motor, as ações são irreversíveis, pois se dirigem em um sentido único para o fim prático que se trata de conseguir. No entanto, à medida que os esquemas sensório-motores se coordenam, a inteligência passa a ser capaz de uma certa mobilidade, quais sejam, as ações de ida e volta, que se constituem em um começo de reversibilidade.

Posteriormente, com a ajuda da função simbólica, em particular das imagens mentais e da linguagem, as ações se interiorizam progressivamente. É o período que Piaget denomina de pré-operatório. Nesta fase o pensamento da criança está centrado nas configurações em detrimento das transformações. As ações interiorizadas não atingem ainda o nível das operações reversíveis e, por esta razão, a criança deste nível não chega a compreender a conservação dos conjuntos e das quantidades contínuas. Não conseguem realizar também ligações lógicas elementares como, por exemplo, a transitividade e a comutatividade.

As coordenações sensório-motoras e as regulações representativas pré-operatórias preparam o surgimento das primeiras operações. Estas assinalam o início de uma lógica e de estruturas operatórias que Piaget denomina "concretas". As operações são ações propriamente ditas que prolongam as ações materiais anteriores, porém interiorizadas mentalmente, graças à função simbólica. São essencialmente reversíveis, ou seja, são ações que podem desenrolar-se nos dois sentidos (ida e volta) e a compreensão de uma implica necessariamente a compreensão da outra (Piaget, 1968).

As operações são, desde o princípio, solidárias de um sistema: *não existe operação isolada, porque uma ação isolada é de sentido único e, portanto, não é uma operação* (ibidem, p. 9); e constituem-se na forma típica das estruturas de conjunto, características da inteligência.

> *Há, por conseguinte, estrutura operatória desde que haja operação, e a estrutura de conjunto não é um produto que resulte de composições entre operações prévias, já que a ação só se converte em operatória e reversível no interior de uma estrutura e sob o efeito de sua organização* (ibidem, p. 9).

No período operatório concreto, as operações ainda repousam na ação sobre os objetos: classificar, seriar, colocar em correspondência, etc., enfim recorrer à manipulação efetiva ou mentalizada. Mas já se organizam em estruturas reversíveis, que

Piaget cita como exemplo disto o fato de, no nível de representação operatória, as crianças pensarem que as quantidades não são mais iguais, caso esvaziarem um dos copos com igual número de contas (azuis e vermelhas que haviam sido colocadas simultaneamente em cada copo) em um copo mais estreito ou mais largo. Neste nível a quantidade de contas não se conserva no decorrer dos transvazamentos. No entanto, assim que as primeiras estruturas operatórias concretas se formam, a criança admitirá que a quantidade se conserva necessariamente, porque as contas foram apenas deslocadas e pode-se recolocá-las como estavam antes (reversibilidade) (Piaget, 1971).

A função das estruturas operatórias elementares é "organizar", um após outro, os diversos domínios da experiência, mas sem que haja ainda diferenciação completa entre o conteúdo e a matéria, pois as mesmas operações se aplicam inicialmente à quantidade da matéria, um ou dois anos depois, ao peso e, ainda, a um, a dois anos depois, ao volume (ibidem, p. 116).

Assim é, tal que posteriormente aparecem novas operações pela generalização progressiva a partir das precedentes, que se desligam totalmente dos objetos e constituem-se a nível de simples hipóteses (proposições), não mais necessitando das ações. Constitui-se uma lógica "formal", ou seja, aplicável a qualquer conteúdo devida à possibilidade do raciocínio hipotético - dedutivo. Duas novas estruturas de conjunto se constituem: a "rede" da lógica das proposições e o "grupo" INRC.

A "rede" é observada através do aparecimento das operações combinatórias. Por esta razão um adolescente, mesmo sem freqüentar a escola, consegue encontrar métodos sistemáticos para agrupar objetos de acordo com todas as combinações n a n.

O grupo "INRC" comporta a possibilidade de o adolescente realizar transformações a nível formal, a partir de raciocínios experimentais. Por exemplo, quando se trata de raciocinar sobre um sistema de equilíbrio mecânico ou hidrostático, tem-se a ação = I; sua negação = N; a reação = R e a sua negação = C. - Ou, ainda, quando diante de uma operação proporcional como $p \vee q$ (ou p é verdadeiro, ou q é verdadeiro, ou p e q são verdadeiros), podemos chamar de I a operação idêntica que deixa $p \vee q$ imutável. Mas podemos negar esta operação, o que dá: N $(p \vee q) = p.q$ ("nem p nem q"). Podemos estabelecer a recíproca R de $p \vee q$, seja $p \vee q$ ("ou não -p ou não -q") e sua correlativa C que é $p.q$ ("ao mesmo tempo p e q"). Ou, então, o grupo comutativo NR = C; NC = R; CR = N e NRC = I.

Em síntese, no processo construtivo do conhecimento encontramos as seguintes estruturas (cf. Dolle, 1983: 55):

a) **Estruturas ou "grupos" sensório-motores"**: aparecem por volta de um ano e meio. O período anterior é preparatório, o posterior é de acabamento e de equilíbrio. É caracterizado pelos movimentos sucessivos realizados pela criança: fazer desvios, voltar sobre os próprios passos, coordenar uma às outras translações e rotações, etc., enfim, efetuar o que Poincaré denominou de um "grupo de deslocamentos". Não há representação neste período, mas só ação.

b) **Estruturas ou "agrupamentos" de operações concretas**: aparecem por volta dos 7 anos. O período anterior é preparatório e o seguinte é de acabamento. Esta estrutura possibilita à criança realizar deslocamentos simultâneos (e não mais sucessivos) ou uma transformação e seu inverso. Por exemplo, ao transformar uma bola de massa de modelar em forma de salsicha ou de biscoito, ela pode, a partir dos 7 anos, anular de alguma maneira esta transformação por seu raciocínio e pode conceber, por essa anulação, a conservação da quantidade da matéria. Observa-se, através deste exemplo, que a criança apresenta a reversibilidade lógica própria das operações. Posteriormente, na fase de acabamento da estrutura, a reversibilidade apresentará duas formas: a inversão (que corresponde à lógica das classes e à aritmética) e a reciprocidade (que aparece nas operações de relações). No entanto, estas formas de reversibilidade não são coordenadas entre si num sistema único, o que torna o pensamento concreto limitado.

c) **As estruturas formais**: estas estruturas correspondem aos grupos e às redes (ou lattice). Constituem uma lógica formal onde os raciocínios hipotético-dedutivos são fundados nas operações interproposicionais (p > q; p . q; p / q; p = q, etc.). A rede é reconhecida pela aparição de uma combinatória por ocasião de combinações de objetos ou de fatores experimentais. O grupo INRC (inversões, reciprocidades, correlatividades e identidades), que marca a síntese num sistema único das duas formas de reversibilidades até então separadas - as inversões e as reciprocidades, é observado numa série de esquemas operatórios que aparecem simultaneamente: as proporções, os duplos sistemas de referências, as probabilidades, as compensações multiplicativas etc.

1.4 - O Fazer e o Compreender (cf. Piaget, 1978)

Ao observar as condutas de crianças do período pré - operatório ao operatório em vários experimentos relatados nas obras **La Prise de Conscience** (1974) e **Réussir et Comprendre** (1974), Piaget detecta *um considerável avanço inicial do êxito prático sobre a compreensão conceitual e a posterior inversão desta situação* (1978 : 176). Em outras palavras, observa que inicialmente as ações da criança revelam um êxito prático que se abstém da conceituação, mas que gradualmente a conceituação vai se impondo às ações até o ponto de ultrapassá-las e tornar-se totalmente independente. E Piaget considera esta inversão a passagem do "fazer" ao "compreender".

O êxito prático que caracteriza as ações iniciais da criança constitui-se em um "fazer" que consiste em utilizar as coisas com sucesso. O saber que em um determinado período do desenvolvimento passa a preceder a ação e posteriormente pode abster-se totalmente dela constitui-se no "compreender" que, por sua vez, consiste em isolar as razões das coisas a ponto de abster-se de todo objeto. "Compreender", portanto, consiste em um saber que ultrapassa indefinidamente o "fazer" e que possibilita ao ser humano extrapolar o real e entrar para o mundo da operações interproposicionais (p > q; p . q; p / q; p = q, etc.). A rede é reconhecida pela aparição de uma combinatória por ocasião de combinações de objetos ou de fatores experimentais. O grupo INRC (inversões, reciprocidades, correlatividades e identidades), que marca a síntese num sistema único das duas formas de reversibilidades até então separadas - as inversões e as reciprocidades, é observado numa série de esquemas operatórios que aparecem simultaneamente: as proporções, os duplos sistemas de referências, as probabilidades, as compensações multiplicativas etc.

1.4 - O Fazer e o Compreender (cf. Piaget, 1978)

Ao observar as condutas de crianças do período pré - operatório ao operatório em vários experimentos relatados nas obras **La Prise de Conscience** (1974) e **Réussir et Comprendre** (1974), Piaget detecta *um considerável avanço inicial do êxito prático sobre a compreensão conceitual e a posterior inversão desta situação* (1978 : 176). Em outras palavras, observa que inicialmente as ações da criança revelam um êxito prático que se abstém da conceituação, mas que gradualmente a conceituação vai se impondo às ações até o ponto de ultrapassá-las e tornar-se totalmente independente. E Piaget considera esta inversão a passagem do "fazer" ao "compreender".

O êxito prático que caracteriza as ações iniciais da criança constitui-se em um "fazer" que consiste em utilizar as coisas com sucesso. O saber que em um determinado período do desenvolvimento passa a preceder a ação e posteriormente pode abster-se totalmente dela constitui-se no "compreender" que, por sua vez, consiste em isolar as razões das coisas a ponto de abster-se de todo objeto. "Compreender", portanto, consiste em um saber que ultrapassa indefinidamente o "fazer" e que possibilita ao ser humano extrapolar o real e entrar para o mundo da fases médias da técnica adulta, quando a prática se apóia em teorias.

Vejamos alguns exemplos e algumas considerações necessárias para compreender este processo.

No caso das construções por meio de cartas (Piaget,1978: 13-21) observa-se, no Nível IA várias tentativas de equilibrar as cartas verticalmente e posterior abandono desta conduta para manter as combinações com inclinações. Porém, não há nem sequer resquícios de consciência do papel das inclinações, uma vez que as crianças não chegam sequer a mencioná-las. Já no Nível IB a inclinação passa a ser notada e torna-se explicativa, sem que, no entanto, o indivíduo possa indicar como e sem que alcance a idéia de reciprocidade e de equilíbrio.

No Nível IIA a criança atinge a reciprocidade nas situações simétricas, mas a construção em T demonstra que a significação causal está longe de ser esclarecida. Há a tomada de consciência das ações particulares, mas esta não basta para torná-las inteligíveis. Para isto é preciso elaborar uma coordenação inferencial e isto ocorre no Nível IIB, em que os sujeitos compreendem, afinal, o papel das inclinações, uma vez que passam a coordenar o peso aos fatores espaciais: conservação do peso em caso de mudanças de forma, verticalidade das quedas, horizontalidade dos níveis da água, princípio de intuições do "momento", etc. Na fase III estas coordenações inferenciais desenvolvem-se, permitindo à criança compreender: composições vetoriais, densidade, pressão, momento, trabalho.

Enfim, neste caso foi necessário, para chegar à compreensão, uma coordenação inferencial das ações. Em outras palavras, para compreender, foi necessário coordenar as observáveis fornecidas pelas ações particulares e para que isso ocorra é necessário apelar para ligações que as ultrapassam e que não são observáveis, pois dependem da capacidade dedutiva.

No caso da "queda sucessiva dos dominós enfileirados" (. Piaget, 1978: 22-31) observa-se no Nível IA uma total ausência de tomada de consciência da inclinação - condição necessária para que haja a queda dos dominós. No Nível IB observa-se uma situação paradoxal: de um lado um grande progresso e de outro total incapacidade de explorá-la. Assim é que a criança compreende a inclinação dos dominós e determina o intervalo a partir do qual não se apóiam mais sobre os seguintes. Compreende também o mecanismo da queda entre dois dominós vizinhos, mas não generaliza esta descoberta até o ponto de estendê-la, por transitividade, à seqüência das relações entre dominós sucessivos. Da mesma forma, não entende a reciprocidade existente entre dois dominós que se apóiam um contra o outro.

É somente no Nível IIA que a transitividade e a recorrência se impõem por necessidade lógica. Neste nível os resultados da ação são generalizados sob a forma de reciprocidade e transitividade. As crianças passam a compreender a natureza transitiva da ação.

Observamos, até então, que duas condições são necessárias para a compreensão dos processos de apoio ou pressão com quedas ou sustentações:

a) Coordenar as ações de apoiar entre elas ao invés de considerá-las isoladamente. (É importante lembrar que as coordenações são fonte de racionalidade, ao passo que a conceituação limitada às ações particulares dá lugar a toda sorte de deformações).

b) Religar cada processo de pressão e de apoio a um contexto espacial preciso de posições e direções (fora deste contexto o processo perde sua significação e só dá lugar a contradições).

Estas duas condições devem ser preenchidas simultaneamente e em estreita ligação uma com a outra. Como vimos no caso das cartas e dos dominós, essas condições são preenchidas gradualmente por evoluções regulares que se constituem nas passagens dos níveis. Assim é que a passagem do Nível IA para o IB é marcada pelo progresso espacial da tomada de consciência das inclinações (cartas) e dos intervalos necessários à queda resultante das inclinações (dominós). A passagem do Nível IB para o IIA caracteriza-se pelas coordenações lógico - dinâmicas que se constituem nas transitividades e reciprocidades. Finalmente, à passagem do Nível IIA para o IIB constitui-se numa nova elaboração espacial (agora sob a influência das coordenações lógico-dinâmicas) tanto nas sustentações como na produção das quedas.

Uma questão ainda requer esclarecimentos: o que leva os indivíduos a tomarem consciência do papel das inclinações e dos intervalos característicos da passagem da fase I para a II?

A resposta desta questão constitui-se nas "regras mais ativas da ação". Estas fazem com que os indivíduos percebam, em suas ações, os fatores necessários ao sucesso. Fazem também com que haja uma "religação" entre estes fatores distintos, o que conduz a novas coordenações que causam a transitividade e a reciprocidade. Posteriormente, os efeitos que determinaram estas novas coordenações serão limitados por outras variáveis, o que determinará um novo refinamento das regras ativas, o que levará à tomada de consciência destas variáveis - descobertas a partir dos encadeamentos e das interações possíveis, devido às transitividades e reciprocidades.

Toda a tomada de consciência consiste *no traço de união entre as condutas práticas, com seus fracassos e sucessos no plano de ação como tal, e a compreensão das ligações constatadas*, ou, ainda, consistem em *uma conceituação que conduz assim da ação (desempenhos materiais) à explicação (relações julgadas verdadeiras)* (Piaget, 1974: 42).

No estudo sobre a utilização do movimento Piaget (1978: 32-49) observa que um novo fator favorece a formação da transitividade, uma vez que esta consiste em substituições ordenadas: a ordem. A ordem é uma noção operatória fundamental que se impõe à conceituação, mesmo nos casos em que as ações a serem descritas ainda não as utilizam. Resulta de reflexões abstratas sobre a ordem inerente à coordenação das ações. Isto denuncia que pode haver mais elementos envolvidos na passagem da ação à conceituação, cuja análise é necessária. Os casos dos contrapesos e do equilíbrio da balança tornam-se mais esclarecedores.

Na tentativa de construir uma ponte utilizando contrapesos (Piaget, 1978: 50-67), as crianças do Nível IA conseguem regular o equilíbrio das pranchas inclinadas sobre as caixas, através do comprimento das saliências em relação às partes sustentadas por estas caixas, embora não tenham consciência do "como" dessas regras. Em certas situações se dão conta dos pesos e, às vezes, até utilizam contrapesos, mas surge freqüentemente confusão na ação como tal e necessariamente na conceituação. O que falta ainda é a relação entre dois pesos, quando um sobrepuja o outro devido ao seu peso maior, ou quando o sustenta, se forem pesos iguais.

É no Nível IB que a relação entre pesos começa a se impor às ações. No plano da ação isto se evidencia pelo fato de a criança conseguir equilibrar as pranchas que ultrapassam as caixas e utilizar espontaneamente os contrapesos. É neste Nível que iniciam as relações "mais pesado do que" em oposição ao nível anterior (IA) em que existiam apenas as observações "muito leve" ou "muito pesado".

O fato de os indivíduos estabelecerem a relação "mais pesado do que" mostra que passam de um estado de poder absoluto para um sistema de dependências. Os relacionamentos que permitem alcançar este sistema surgem necessariamente de uma atividade coordenadora que ultrapassa aos poucos as ações particulares e supõe reflexões abstratas a partir das ligações internas próprias à coordenação geral das ações.

É através das ações sobre os objetos - experiências - que o indivíduo passa a ter idéia das dependências e interligações entre os objetos observáveis. Estas, por sua vez, são devidas às relações lógico-matemáticas (ordem, correspondência, relações, etc.) que se constituem nas formas mais gerais de coordenação das ações.

Nesta fase, delineia-se claramente uma dialética: as observáveis sobre o objeto corrigem as deformações devidas à polivalência da ação específica de apoiar, características do Nível IA, mas são as coordenações entre ações que dão início a estas observáveis. No entanto, as ações que começam a se coordenar não chegam senão a uma coordenação insuficiente que se estende ao Nível IIA.

No Nível IIA as observáveis sobre os objetos permitem constatar que os pesos dos blocos e das pranchas agem em sentido inverso um do outro, ou seja, sugerem relações de oposição, corrigindo a conceituação das ações específicas do nível anterior. Estas observáveis se coordenam através de instrumentos operatórios de quantificação, de reversibilidade e de transitividade. Apesar destes progressos, que são devidos à coordenação geral das ações, a conceituação das ações particulares continua a ser insuficiente para compreender a transmissão do poder de sustentar. É no Nível IIB que isto vai ocorrer.

No Nível IIB a criança se certifica da transmissão do poder de sustentação graças a um processo de natureza dedutiva que consiste nas coordenações inferenciais. Através destas é possível corrigir as conceituações iniciais, deformadas em função das tomadas de consciência elementares, próprias da ação.

Nos experimentos realizados com a balança (Piaget, 1974: 73-85), o autor novamente questiona-se a respeito da passagem da fase I, caracterizada pela ação, à conceituação, característica das fases II e III.

No Nível IA as condutas consistem numa seqüência desordenada de manobras locais para destacar o lado da balança que se abaixa. Não há interação entre os pesos separados, pelo contrário, há a crença de que os pesos ajam cada um por si. Não há nem indícios de compreensão prática de um equilíbrio por igualdade dos pesos.

No Nível IB os indivíduos chegam à idéia de que é preciso um peso de cada lado para assegurar o equilíbrio. A consideração do outro lado é progressivamente imposta por um fator de simetria que é de natureza perceptiva e sensório-motora, mas que não comporta em si nenhuma transmissão.

Do ponto de vista da sua compreensão prática, o indivíduo considera os dois lados ao mesmo tempo (ao colocar o peso "no meio" de uma prancha a fim de mantê-la em equilíbrio), mas, do ponto de vista de suas noções causais ou operatórias, não atinge a idéia de uma influência recíproca entre as extremidades, ou seja, de uma transmissão mediata por intermédio da prancha. Há ainda indecisão quanto à natureza das ações do peso, que tanto podem consistir em arrastar como em sustentar. O fato de colocar o peso no meio afasta o problema de transmissões e de ações de sentido inverso e mantém apenas a idéia de sustentar o conjunto.

É no Nível II que surgem as transmissões mediatas e de sentidos contrários. Estas supõem a transitividade operatória (P1 age sobre a prancha que age sobre P2), a reversibilidade (P2 agindo sobre P1 da mesma maneira) e a anulação por compensação dos inversos (se P1 = P2).

É o progresso da compreensão prática (a coordenação das duas ações distintas, que consistem em intervir de um lado e do outro) que oportuniza a formação das transmissões mediatas. Sem as ações particulares do indivíduo que se preocupa com os dois lados da balança ao mesmo tempo, ele não seria conduzido a admitir influências mútuas, de sentidos contrários, que implicam nas transmissões. No entanto, a ação prática do indivíduo, embora necessária, não é suficiente para explicar a defasagem observada entre o nível IB em que principiam os progressos práticos e a fase II em que a compreensão é adquirida.

Ora, de um lado, no seio da inteligência, há ações específicas que consistem em colocar um peso, retirá-lo, escolher posições, etc. De outro, há as coordenações progressivas que permitem interligar ações diferentes em um sistema mais eficaz. Essas coordenações consistem em colocar as ações particulares em conexão e não se originam delas, uma vez que essas ações já existiam anteriormente e sob as mesmas formas, sem poderem coordenar-se por si mesmas.

A conexão entre as ações supõe o emprego das "coordenações gerais da ação": a reunião, a ordenação, a correspondência etc., cuja origem é biológica e que utiliza a inteligência prática em suas correções e regulagens graduais.

A inteligência prática, portanto, desempenha papel funcional de motor na solução de problemas, como o da balança, mas a descoberta das transmissões (transitividades, reciprocidades, etc.) à qual ela conduz, supõe, além disto, uma reflexão abstrata a partir dessas coordenações gerais.

É importante lembrar que as ações referem-se aos objetos e comportam sempre um aspecto físico, enquanto as "coordenações gerais" são de natureza lógico-matemática. Logo, para coordenar ações físicas, é necessário recorrer a instrumentos lógico-matemáticos por mais elementares que sejam.

A diferença entre as ações particulares, de conteúdo físico, e as coordenações de natureza lógico-matemática em suas origens, ou causais em suas atribuições aos objetos, é estabelecida pelas tomadas de consciência e conceituações próprias a cada uma.

As ações particulares, na ausência de coordenações suficientes, dão lugar a apenas uma tomada de consciência incompleta e deformadora. É o que se revela nos Níveis IA e IB. Por outro lado, as correções e as regulagens da ação originam, através de reflexões abstratas, coordenações progressivas que permitem novas formas de correção e regulagens, quando as ações sucessivas são reunidas em um todo representativo. Daí uma conceituação adequada que se traduz pela formação das primeiras operações concretas: a reversibilidade, a transitividade, a adição, etc., próprias do Nível IIA.

No estudo *O enrolamento das correntes em torno de diversas plaquinhas* (Piaget, 1974: 124-34) o autor propõe-se a difícil tarefa de traçar uma fronteira entre as abstrações empíricas e reflexivas nas condutas das crianças. Segundo ele, esta tarefa é isomorfa: tem a tarefa de distinguir a geometria dos objetos e a geometria dos indivíduos.

Os objetos possuem características próprias, como comprimento, espessura, forma e outras determináveis por abstrações empíricas. Por outro lado, possuem também a possibilidade de serem mensuráveis, comparáveis, igualáveis, etc., antes de sofrerem qualquer ação. Estas propriedades, é necessário deixar claro, não procedem dos objetos como tais, mas das ações ou operações possíveis, mesmo que se limitem a compor os dados que já constituem uma propriedade espacial desses objetos. Em outras palavras, os objetos possuem uma geometria própria, que pode ser reconstruída ou ultrapassada devido à geometria do indivíduo (conjunto de composições que acrescentam a um dado conteúdo uma forma que o ultrapasse). Daí o papel das abstrações reflexivas destinadas a fornecer os instumentos para essas reconstruções e ultrapassagens. Isto é observado no decorrer dos níveis relatados no citado estudo.

No Nível IA a atividade do indivíduo limita-se aos relacionamentos em termos de maior, menor ou igual e a considerar somente um fator entre os demais possíveis.

No Nível IB o indivíduo chega a indicar situações de igualdades (formas, tamanhos e comprimentos), o que confirma a existência de relações entre relações (= x) <--> (= y) ou funções retiradas por abstrações reflexivas das relações simples = x ou = y, mas não retém os efeitos da compensação aos quais poderia ter chegado através de sugestões.

No Nível IIA ele atinge generalizações por forma de compensações e retém apenas o que compreendeu ou antecipou nas situações de desigualdades, o que supõe coordenações inferenciais com abstrações reflexivas, mas não chega a conceituar o que só constatou ao utilizar unicamente abstrações empíricas.

No Nível IIB surge um novo progresso na abstração reflexiva, o que possibilita estabelecer relações entre variáveis (distinguir o perímetro =P da superfície +s, a partir do tamanho global das plaquinhas, por exemplo). É na fase III que surgem as deduções que marcam um princípio de autonomia na Geometria do indivíduo. Em outras palavras, são as abstrações reflexivas próprias desta fase, destinadas a fornecer instrumentos para reconstruções e ultrapassagens que permitem ao indivíduo reconstruir e ultrapassar a Geometria dos objetos.

Como vimos, as abstrações reflexivas procedem por etapas e reconstruções progressivas. A estas etapas correspondem os momentos sucessivos de tomada de consciência e compreensão.

Como nos referimos anteriormente, a ultrapassagem do "fazer" para o "compreender" consiste na passagem do plano da ação para o da conceituação. Os estudos realizados por Piaget, antes mencionados, evidenciam que esta ultrapassagem ocorre através de regulações e coordenações progressivas cuja origem é biológica. Disto decorrem algumas considerações:

a) A ação constitui-se inicialmente num conhecimento autônomo cuja conceituação somente se efetua por tomadas de consciência posteriores, chegando ao ponto de ultrapassá-la.

As tomadas de consciência consistem num *processo de conceituação que reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação* (Piaget, 1974b: 204). Ocorrem através de um processo que tem origem na periferia (P = utilização do objeto pelo sujeito, segundo um objetivo, e o registro desta utilização - seja êxito ou fracasso -) e dirige-se gradativamente para o centro (C = coordenações gerais do sujeito e C' = coordenações do objeto: causa, efeito, força, etc.).

No Nível I observam-se atrasos na conceituação em relação ao êxito prático das ações. Gradativamente estas passam a ser influenciadas pela conceituação, através de um processo que parte dos resultados exteriores da ação e que se engaja na análise dos meios empregados até atingir, finalmente, os mecanismos mais centrais da ação, que são as coordenações gerais; ou seja, à medida que se dirigem gradativamente da periferia para o centro. Constitui-se então em uma fase em que a ação e conceituação são aproximadamente do mesmo nível e em que se efetuam trocas constantes entre ambas (Nível II). Nesta fase a conceituação somente fornece à ação planos restritos e provisórios que serão revistos e ajustados durante a execução. No Nível III há uma inversão total desta situação. A conceituação passa a predominar sobre a ação. Fornecerá a esta, a partir de agora, um reforço de suas capacidades de previsão e a possibilidade de dar, em presença de uma dada situação, um plano de execução imediata, ou seja, uma programação de conjunto semelhante às observadas nos adultos, quando a prática se apóia em teorias.

b) O pensamento dirige-se, desde as tomadas de consciência elementares, até as conceituações superiores, às coordenações das ações, sejam estas materiais e causais, sejam de natureza implicativa.

As coordenações do tipo material ou causal dizem respeito à coordenação dos movimentos. São anteriores e autônomas com relação à conceituação, mas são limitadas, uma vez que não fazem inferências relativas ao futuro, ao espaço longínquo e ao possível, devido ao fato de procederem sistematicamente de um em um - o que garante uma acomodação contínua no presente. Precisam, portanto, ser completadas, depois dirigidas e finalmente substituídas pelas do pensamento.

As coordenações de natureza implicativa dizem respeito às ligações entre as significações e não apenas entre proposições. Reúnem múltiplos e sucessivos dados em quadros simultâneos de conjunto, o que amplia muito seus poderes em extensão espaço-temporal, velocidade e deduções sobre o possível.

Estes dois tipos de coordenações são encontrados em todos os experimentos relatados por Piaget. As coordenações materiais e causais são características do Nível I. A partir do Nível II passam a surgir, progressivamente, as coordenações inferenciais, até atingir o auge, no Nível III.

c) As coordenações materiais e causais, mesmo limitando-se a um "saber fazer" sem atingir a conceituação nem a compreensão, elaboram conhecimentos: os esquemas de ordem, encaixes, correspondências, etc.

Como isto é possível? Piaget atribui esta possibilidade à causalidade própria destas coordenações, Trata-se de uma "causalidade orgânica ou biológica". Ele assim explica:

> *... os movimentos que constituem a ação não se sucedem linearmente, mas se encadeiam sob a forma de ciclos relativamente fechados em que consistem os esquemas, e estes correspondem a uma teleonomia (satisfação das necessidades). Esses esquemas se conservam por seu próprio exercício e sua utilização dos objetos volta a integrá-los nesses ciclos, o que é um processo de assimilação cognitiva* (1974: 177).

Esta questão, na verdade, faz parte do conjunto de relações entre a biologia e as atividades cognitivas, objetos de estudo da obra **Biologie et Connaissance** (1967) de Piaget.

d) Há um isomorfismo entre as estruturas causais das ações e de seus objetos e as estruturas implicativas do pensamento.

Mostra disto é a operação. O núcleo funcional das coordenações, que no plano da ação permanece de natureza causal, encontra seu equivalente, no plano do pensamento, no sistema de coordenações operacionais. Este transforma os objetos do pensamento da mesma forma que a ação transforma os objetos materiais.

Por esta razão não se pode dizer que a operação é a representação de uma ação. Ela é uma ação, "significante", construtora de novidades e de natureza implicativa, pois os meios que utiliza não são mais causais. Constitui-se no ponto da união entre a ação e o pensamento: trata-se de uma ação interiorizada.

A combinação de produção e de conservação, que caracteriza a operação, encontra um equivalente na causalidade, havendo, portanto, isomorfismo entre causalidade e implicação.

e) A passagem da ação para a conceituação consiste em uma espécie de tradução da causalidade em termos de implicação.

A implicação, sendo uma conexão entre significações, confere ao pensamento um progresso notável, uma vez que possibilita a determinação das razões, sem as quais os sucessos representam fatos sem significado (ou seja, possibilitam o compreender). Além disso, exprimir significações e reuni-las na forma de implicação consiste na característica mais geral dos estados de consciência, desde os mais elementares até a dos mais elevados níveis de conceituação. É o que Piaget denomina "implicação significante". Desta forma, tudo o que concerne à ação e ao seu contexto pode ser expresso por representações significativas através da língua escrita, imagens, etc., ou seja, dos instrumenros semióticos correntes.

As determinações das razões, fornecidas pelo sistema das implicações significantes, caracterizam o compreender. A compreensão é um saber que, em determinado momento, ultrapassa o fazer, precedendo a ação e podendo até abster-se dela, mas que dele prescinde, como condição preliminar de realização.

Piaget explica o fato de as razões tornarem-se autônomas a ponto de abster-se de todo o objeto através de duas idéias complementares. A primeira é a de que, se o sujeito busca a razão de um fenômeno físico, terá que situar, necessariamente, em um mundo de relações possíveis, as relações reais observadas, tendo necessidade, para compreender o processo, de construir em pensamento séries indefinidas com recorrência, transitividade ou alternâncias regulares, etc., ou seja, de ultrapassar a ação e inserir a pesquisa das razões ao mundo infinito dos possíveis. A segunda é a de que o indivíduo conquista, no momento em que a conceituação torna as ações implicativas, um poder operacional que se prolonga indefinidamente pela construção de novas operações sobre as precedentes; estas operações de segunda, e depois de enésima potência, enquadram-se também no mundo dos possíveis que ultrapassa a ação. E conclui:

> *... a compreensão ou a procura da razão só pode ultrapassar os sucessos práticos e enriquecer o pensamento à medida que, pelos dois motivos precedentes e conjuntos, o mundo das "razões" se amplia sobre os possíveis e transborda, assim, o real* (Piaget, 1974: 179).

2. A PESQUISA

Realizar uma prática pedagógica construtivista constitui um desafio para a maioria dos professores, uma vez que implica em romper com os "empirismos" que caracterizam a rotina da sala de aula, a qual estamos habituados a reproduzir.

Realizar uma prática pedagógica construtivista constitui um desafio também para nós que, como professora de Matemática, não mais acreditávamos na "eficiência" do nosso "ensinar", tendo em vista as constantes e crescentes dificuldades encontradas pelos alunos na "aprendizagem" da disciplina.

A presente pesquisa constitui-se na concretização do que antes era apenas uma idéia desafiante: realizar uma prática pedagógica construtivista que permitisse, de um lado, investigar a não aprendizagem matemática e, de outro, propor novas perspectivas à Educação Matemática.

2.1 - Espaço e tempo da pesquisa

Realizamos nossa investigação na Escola Estadual de 1º Grau Incompleto Irmão Roberto Teódulo, localizada no Bairro Três Vendas da cidade de Erexim, RS.

Localiza-se esta escola num ponto de convergência com outros dois bairros da periferia da cidade: Jabuticabal e Presidente Vargas.

Caracteriza-se Três Vendas por ser um bairro de operários, pois nele encontram-se o Frigorífico e o Abatedouro de Aves da COTREL - Cooperativa Tritícola de Erexim. Já no Jabuticabal e no Presidente Vargas moram trabalhadores de baixa renda e sem emprego fixo. São bairros sem recursos e com infra-estrutura precária.

A maioria dos alunos do "Teódulo", como é conhecida a escola, é oriunda destes últimos bairros. Trazem consigo, portanto, diversos problemas: carência de alimentos, de afeto , de atenção, de recursos materiais de ordem geral.

No ano de 1990 havia um total de 220 alunos matriculados, sendo que apenas 22 freqüentavam a 5ª série e 17 a 6ª série. Os demais dividiam-se e, turmas únicas de Pré a 4ª série. O corpo docente da escola era formado por 22 professores, entre os quais um coordenador pedagógico, um orientador educacional, um auxiliar na secretaria da escola, a diretora e a vice-diretora.

O prédio da escola, além de velho, não possuía espaço suficiente para abrigar a demanda de alunos, que era grande, em função de ser a única escola estadual próxima aos três bairros já mencionados. Três Vendas possuía uma escola particular, dirigida por religiosas, as Irmãs da Consolata, mas esta era freqüentada pela minoria dos moradores do bairro que podiam pagar as mensalidades cobradas.

Havia apenas 5 salas de aula, uma pequena sala onde funcionava a direção, uma sala onde funcionavam a biblioteca (na qual cabiam apenas as estantes com os livros e duas "carteiras" com suas respectivas cadeiras), o serviço de orientação educacional e servia ainda como "sala dos professores". Além dessas peças havia os banheiros, a cozinha e uma pequena área coberta onde se formavam as "filas" e se realizavam as aulas de educação física. O espaço físico, portanto, era precário, insuficiente, o que impossibilatava, muitas vezes, o bom andamento das atividades escolares.

A escola havia sido interditada pela 15ª Delegacia de Educação, dois anos antes da realização de nossa pesquisa; para reformas, devido à falta de segurança do prédio e à precariedade das instalações sanitárias, o que colocava em risco a vida e a saúde dos alunos. A partir daí, houve, além das melhorias no aspecto físico da escola, uma preocupação por parte da Delegacia de Educação em renovar o corpo docente e a direção da escola, tendo em vista, também, melhorias na qualidade do ensino ali ministrado.

A atual direção da escola, eleita pelos professores, é muito dinâmica, aberta ao diálogo e a inovações na prática pedagógica de seus professores, uma vez que se preocupa, juntamente com a Coordenação Pedagógica, com o alto índice da evasão, característico da escola, bem como com uma educação que atenda às expectativas e necessidades das crianças que ali ingressam. Esta expectativa, no entanto, não é comum a todos os professores, em sua maioria "acomodados" à sua habitual "forma" de "dar" aulas.

Optamos pela realização da pesquisa nesta escola devido a dois fatores: a aproximação da forma pela qual fomos conduzidos até ela com a realidade comum a todos os professores recém-nomeados no magistério público estadual: a designação de professores e a aproximação da referida escola com a realidade que pretendíamos investigar (alunos como tantos outros que pertencem à maioria freqüentadora das escolas estaduais da periferia da cidade).

A data de nossa nomeação na rede pública estadual coincidiu com o período de realização da presente pesquisa. Na ocasião fomos designados pela 15ª DE para esta escola, uma vez que estavam necessitando de professores de Matemática.

A idéia de realizar uma prática pedagógica construtivista, inovadora em relação à tradicional, foi bem recebida pela direção e coordenação pedagógica da escola, que deram todo apoio necessário à sua concretização. O índice de repetência em Matemática na escola era bastante elevado, bem como as reclamações constantes dos professores com a "falta de base" dos alunos e com as "dificuldades de raciocínio", o que os motivou a estender a possibilidade de inovações a toda escola. Fomos convidada a falar para os professores sobre o construtivismo e a prática pedagógica que nos propúnhamos a realizar, bem como a orientar um possível processo de reestruturação pedagógica na escola. Esta proposta, no entanto, não foi bem aceita pelos professores, que não demonstaram maior interesse em inovações, embora conscientes da necessidade de alterações na forma de ensinar Matemática. A "falta de raciocínio dos alunos" continuou sendo o "bode expiatório" para justificar os problemas que se somavam ao ensino da Matemática. Mesmo assim, como fazíamos parte do corpo docente da escola, continuamos a difundir o construtivismo nas reuniões pedagógicas, sempre nos colocando à disposição dos professores e mantendo uma postura "aberta ao diálogo", longe de pretender impor nosso ponto de vista ao grupo.

A intenção inicial de discutir os resultados com o grupo foi preterida, várias vezes, tendo em vista assuntos de "maior urgência", e acabou não se realizando. Portanto, o que pretendíamos que fosse uma pesquisa participante não se configurou como tal, embora a "semente" tenha sido lançada, principalmente junto à Direção e à Coordenação Pedagógica.

A pesquisa teve início no dia 05 de março de 1990 e foi concluída no dia 10 de julho do mesmo ano. Durante este período houve greve do Magistério. Os professores da escola optaram por não apoiar o movimento e continuar trabalhando, o que permitiu a continuidade da pesquisa.

2.2 - A Investigação

A pesquisa foi realizada numa turma de 6ª série do 1º grau, composta por 17 alunos no início do ano letivo e por 15 no final de junho, devido à desistência de 3 (NEU, ELA e MAR) e o ingresso de 1 (GER). A primeira afastou-se da escola por ter-se envolvido com um rapaz viciado em drogas. Os pais, temendo maiores conseqüências e diante do desinteresse total da filha pelos estudos, optaram por mantê-la "em casa" até o ano seguinte. Na época NEU estava com 14 anos. A segunda deixou os estudos para trabalhar numa firma do bairro. Também estava com 14 anos. E o terceiro transferiu-se para outra cidade juntamente com a família.. GER havia sido expulso da escola em que estudava por ter sido acusado de "roubo" e por indisciplina, razão de sua transferência. Durante o restante do ano letivo, no entanto, não causou nenhuma espécie de problema para a escola ou para os professores. Estes, após alguns diálogos com a Orientadora Educacional, que acompanhou o caso, optaram por acolher o menino, sem considerar o seu passado, "investindo" (termo usado pelo corpo docente da escola) nele como pessoa e aluno.

As razões que nos levaram a optar pela 6ª série foram diversas. No projeto de pesquisa elaborado havíamos optado pela 5ª série devido a dois fatores: a faixa etária dos alunos e a organização do currículo por disciplina. O primeiro por corresponder ao período em que o próprio currículo (da forma tradicional como é organizado e entendido pelo "ensino que se tem"; conteúdos pré-fixados para as séries do 1º grau) exige maiores abstrações do aluno. Ex.: a Álgebra, pressupondo, portanto, a compreensão dos conceitos matemáticos elementares. Como a Aritmética. O segundo por oportunizar a permanência com os alunos durante 5 períodos de aula semanais, como professora de Matemática da turma.

Por ocasião da nossa designação para a escola, recebemos duas turmas: 5ª série, com 28 alunos, e 6ª série, com 17. Consideramos inviável a realização da pesquisa na turma de 5ª série devido ao grande número de alunos, o que poderia prejudicar as observações que nos propúnhamos a realizar. Como a opção pela 6ª série não invalidava as razões que haviam conduzido anteriormente à 5ª série, a pesquisa foi realizada nessa turma.

O instrumento de investigação usado na pesquisa foi a observação. Como professora da turma, aproximamo-nos do papel de "participante total" (Junker, apud Lüdke e André, 1986) da pesquisa por nos tornarmos membro do grupo a ser investigado, embora nossa identidade, enquanto pesquisadora, não tenha sido ocultada aos alunos, direção e demais professores da escola.

A intenção inicial da pesquisa era realizar uma prática pedagógica construtivista que, além de investigar a não aprendizagem matemática e propor alternativas para a superação da problemática que envolve o ensino da Matemática, permitisse refletir o cotidiano escolar, ou seja, as relações que se estabelecem entre os membros da comunidade educativa e o currículo escolar. No entanto, à medida que a pesquisa foi-se realizando, dois fatores nos levaram a redefinir o que havíamos proposto investigar no projeto de pesquisa já elaborado: a necessidade de limitar a abrangência das análises, tendo em vista a amplitude que envolveriam e o surgimento, logo de início, de dois elementos preponderantes, característicos da turma investigada: a não aprendizagem de conteúdos matemáticos já "vistos" em séries anteriores e a dificuldade em resolver problemas matemáticos. Estas eram tão evidentes entre os alunos participantes que reafirmaram nossas preocupações iniciais em relação à aprendizagem matemática, o que nos levou a delimitar as questões a serem investigadas:

- Como são produzidas a não aprendizagem matemática e as dificuldades de raciocínio no ensino de Matemática "que se tem"?

e

- Como é possível, à Educação Matemática "que se quer", produzir conhecimento matemático e, conseqüentemente, proporcionar a aprendizagem matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico?

Estas questões tornaram necessário estender as observações às demais turmas de alunos da escola. Realizamos vinte observações, distribuídas igualmente entre as turmas de 1ª a 4ª série do 1º grau.

Em cada observação, bem como durante as aulas com a turma de 6ª série, anotávamos os dados, registrando os acontecimentos e as nossas "reflexões" sobre eles, no momento. Em algumas ocasiões utilizávamos o gravador.

Durante as observações nas turmas de 1ª a 4ª série, foram raras as ocasiões em que fomos solicitada a participar das atividades. Normalmente ficávamos apenas "assistindo" às aulas.

Realizamos também entrevistas com as professoras das respectivas turmas. Ao todo foram apenas quatro entrevistas, uma vez que não sentimos por parte delas receptividade aos nossos propósitos de discutir os problemas que envolvem o "ensinar" Matemática e tampouco novas abordagens metodológicas ou concepções teóricas relativas a este ensino. Colocamo-nos à disposição, no entanto, para conversarmos nos recreios, nas reuniões pedagógicas, nos momentos de folga, enfim, quando tivessem interesse. Estas conversas não ocorreram, apesar de estarmos sempre presente às atividades da escola, uma vez que pertencíamos ao seu corpo docente.

Repetidas leituras das observações e entrevistas realizadas, bem como constantes revisões do nosso referencial teórico possibilitaram o surgimento das categorias de análise e a interpretação dos dados obtidos. As técnicas e procedimentos adotados respeitaram os princípios da pesquisa qualitativa, bem como o critério de validade dos resultados.

3. A PRÁTICA PEDAGÓGICA

Abordaremos neste capítulo os aspectos que nos permitiram caracterizar a prática de ensino "que se tem" em Matemática e verificar que esta não conduz à compreensão dos conceitos matemáticos pelo aluno. São eles: a abordagem dada às contas e aos problemas, o apego excessivo a regras e a modelos, a falta de lógica dos resultados, as dificuldades trazidas de séries anteriores e a falta de espaço à criatividade do aluno.

Relataremos também alguns "momentos" da prática pedagógica realizada que permitiram trabalhar o conteúdo matemático dentro de contextos significativos para os alunos e verificar que, diante destes, sentiam-se desafiados a "buscar" a solução para os problemas matemáticos, demonstrando neste processo, raciocínios criativos e espontâneos, independentes da Matemática anteriormente aprendida na escola. Permitiram também "reconstruir" conceitos matemáticos não compreendidos pelos alunos, embora já trabalhados, em séries anteriores. Trata-se do "caso dos contracheques"

3.1 - O Ensino de Matemática "que se tem"

A "Aula de Matemática" é o que procuraremos retratar a seguir.

Estas observações são fruto do dia-a-dia com os alunos da turma de 6ª série junto à qual realizamos a presente pesquisa, bem como das entrevistas e visitas junto às professoras e turmas de 1ª a 4ª série.

3.1.1 - As contas e os problemas

Havia, entre os alunos, a concepção de que Matemática era conta.

Profª - Você gosta de Matemática?
SIL. - Ah... eu não gosto muito, profe.
Profª - Por quê?
AIL. - Ah... eu nunca sei fazê aquelas conta lá...

Profª - Você gosta de Matemática?
ADE. - Eu gosto, profe.
Profª - Por quê?
ADE. - Ah, porque eu gosto de fazer conta. Eu sei fazê.

Profª - O que é Matemática para você?
ODI. - Matemática é a aula que a gente faz conta.
Profª - Faz conta pra quê?
ODI. - Ah... sei lá... faz porque tem que fazê. A gente tem que sabê fazê conta.
Profª - Por quê?
ODI. - Pra vida... a gente ocupa as conta na vida.

No momento em que a Matemática deixava de ser "contas" e passava a ser "problemas", ficava evidente que se para eles ocupavam-se as contas na vida, a relação existente entre uma situação de vida e a conta a fazer diante dela não existia quando trabalhada na forma de um "problema" dentro da escola.

O problema "passado" no quadro pelo professor não era identificado pelo aluno como uma situação de vida, mas como mais uma situação - como tantas outras na sala de aula - em que teriam que fazer contas. Com uma diferença: havia diante dos problemas a preocupação em descobrir qual a conta a fazer.

ELA. - Tá certo assim, profe, ou falta mais conta?
LOU. - É de vezes ou de dividir?

ROS. - Este problema é de duas ou três contas, profe?

O fato de não saber que conta fazer fazia com que resolvessem os problemas por "tentativas":

JUR. - Tá certo, profe? Não? Ah, então é de dividir...
(Volta e faz de novo.)
- Agora tá certo, né, profe?

Outras vezes, resolviam por "afinidade" com outros problemas já resolvidos, mesmo que não envolvessem as mesmas operações. Por exemplo, diante do problema: *Comprei uma calça e paguei em três prestações de Cr$ 1.800,00. Quanto custou a calça?* SIL. comenta:

- É de prestação, então é de dividir...

O ensino de Matemática "que se tem" prioriza as contas. As observações realizadas foram suficientes para perceber que a aula de Matemática, na maioria das vezes, consiste em exercícios intermináveis de "arme e efetue". As contas são trabalhadas sem nenhuma relação com uma situação-problema que lhe confira um significado. Trabalha-se a "conta pela conta".

Alguns professores comentam que é importante que os alunos saibam fazer contas, pois vão ocupá-las em diversas situações da vida. Ocorre, no entanto, que as situações de vida geralmente não são solucionadas usando as "contas" da escola e sim por raciocínios próprios e lógicos quando, por um processo de construção pessoal, chegam ao resultado por cálculos mentais[1]. Ocorre, também, que não relacionam a conta da escola com a conta da situação de vida. Por exemplo: ROS, ao tentar resolver um problema em que teria que encontrar o preço de 2,5 kg de carne, apresentou (na 6ª série!) a seguinte dificuldade:

---

[1] Ver a este respeito o estudo de CARRAHER, Teresinha e David & SCHLIEMANN, Ana Lúcia: **Na Vida Dez na Escola Zero.** São Paulo, Cortez, 1988.

ROS. – Profe, de dois quilos eu já sei, fiz de vezes, mas e agora o meio? Eu sei que dá 120, mas como?

Profª– Você pega os 240 e divide por dois. Assim: 240 |2____

Fizemos a conta, no caderno dela, certa de que a dificuldade que estava encontrando estava no algoritmo da divisão. Qual não foi a nossa surpresa quando ROS exclamou:

– Ah! então para achar meio quilo tem que dividir por dois?

Com certeza ROS já havia achado vários meios quilos nos problemas da escola e também vários meios quilos nos problemas da vida, da mesma forma que já havia feito inúmeras divisões por dois. O que não havia feito era relacionar as situações, assimilando-as, e, por isto mesmo, identificando-as como análogas.

A forma como a escola trabalha o problema e a conta não permite que a criança encontre neles qualquer significação. As observações realizadas permitiram alguns "retratos" das aulas de Matemática:

1- Inicialmente o professor ensina um determinado algoritmo. Por exemplo, a multiplicação com dois algarismos no multiplicador. "Explica" como se faz, tantas vezes quantas forem necessárias para o aluno "entender". Depois de todos terem entendido a explicação, "passa" várias contas similares para o aluno fazer. Caso alguém não consiga (o que normalmente ocorre com a maioria dos alunos), explica novamente (fazendo a conta para o aluno ver). Após vários exercícios "passa" alguns problemas que são resolvidos (os alunos já sabem), através de multiplicações. A rotina é a mesma para outros algoritmos. Os livros didáticos seguem a mesma rotina. Se o capítulo é sobre adições de frações, por exemplo, a lista de problemas, que encerra o capítulo, refere-se a este algoritmo.

O problema passa a ser uma nova forma de o aluno treinar como se faz a conta, uma vez que não apresenta nenhuma espécie de desafio.

2- O professor "passa" no quadro uma lista de problemas. Os alunos, após copiá-los, terão que resolvê-los, fazendo no caderno os cálculos e a resposta completa. À medida que os alunos não conseguem resolver, o professor vai até eles e "explica" como se faz, geralmente fazendo para o aluno. A aula de "problemas" passa a ser cansativa: – Tem que copiar tudo aquilo... Mesmo que o aluno "faça de cabeça" as contas, ou resolva "de cabeça" os problemas, terá que fazê-las todas no caderno. Por quê? Para o professor ver como o aluno fez, para os pais, para que os próprios alunos ao "estudarem" saibam como foi feito...; enfim, por razões criadas pelo professor em função de um modelo de ensino, e especialmente de avaliação, que existe desde o tempo em que era aluno. É importante lembrar, ainda, que todos devem permanecer em silêncio para que "não atrapalhem o coleguinha que está pensando", e "prestar bem atenção" para que possam "entender".

A aula de "problema" é uma chatice (– De novo problema, profe?) Não há aluno que goste de problema. Problema é, realmente, um problema, tanto para o aluno, que não sabe que conta fazer, quanto para o professor, que não sabe o que fazer com tantas notas baixas... Ambos procuram justificativas. O professor atribui as dificuldades à "falta de raciocínio lógico" dos alunos. Já estes:

LEA. – Eu não sei o que eu tenho, profe. Não entendo nada, nada. Nem a profe explicando, nem eu lendo o problema. Não entra na cabeça... não entra! (bastante nervosa) Eu consigo imaginar o problema, mas na hora de fazer a conta eu erro, não sei se é assim.

ANA. – A senhora dá o problema. Eu entendo. Quando eu vou fazer eu não sei que conta eu faço. Aí eu fico nervosa. Não sei se é de mais ou de menos, de vezes ou de dividi... lendo o problema eu entendo e depois não consigo.

ROS. – Quando eu leio o problema às vezes eu entendo, outras não. Quando a gente entende é fácil de fazer...

Estes depoimentos denunciam a dificuldade que sentem para resolver os problemas e, o que é maïs grave, a falta de "compreensão" do problema. Estes fatores fazem com que os alunos criem um sentimento de incapacidade em relação às suas próprias condições de aprender, passem a considerar a Matemática difícil e a detestá-la. Muitos optam, no futuro, por profissões "que não precisam de Matemática" e carregam para o resto da vida o estigma de "fracos" nesta matéria.

Mas, na sala de aula é necessário resolver os problemas. O sistema escolar assim o exige. O aluno acaba encontrando meios.

3.1.2 - **A busca de modelos**

Uma rápida olhada nos "planos de aula" dos professores, principalmente das séries iniciais, permite observar que geralmente a aula de Matemática consiste nos mesmos tipos de exercícios. Por exemplo:

1 - Arme e efetue.
2 - Complete as lacunas.
3 - Resolva os problemas.
4 - Escreva o nome dos numerais.

Estes, por sua vez, não exigem muito raciocínio ou criatividade do aluno. Basta resolverem um ou dois, para descobrirem "macetes" que lhes permitam resolver os seguintes. Por exemplo:

1 - Complete:

126 = ..6..u + ..2..d + ..1..c
248 = ...u + ...d + ...c
364 = ...u + ...d + ...c
104 = ...u + ...d + ...c

Para resolver este exercício, basta o aluno transcrever os algarismos, sempre na mesma seqüência. Além de o exercício não exigir, por si só, nenhum raciocínio maior do aluno, este passa a resolvê-lo mecanicamente, sem que para isso precise raciocinar. Esta situação se agrava, pois geralmente o professor "ensina" a resolver o exercício, fazendo o primeiro da série como modelo.

Resolver exercícios como este não garante que o aluno compreenda o sistema de numeração decimal, mas que memorize a quantidade de unidades, dezenas e centenas que compõem o número. Muitas vezes esta "memorização" conduz a graves erros, encontrados em muitos cadernos de alunos e até mesmo em alguns livros didáticos. Ex.: 126 = .6.u, .2.d, .1.c.

Na verdade, o número é composto por 126 unidades que, por sua vez, contém 12 dezenas e 1 centena:

126 contém 126 u
12 d
1 c

Para que o aluno compreenda o porquê de 126 u, 12 d e 1 c, terá que reconstruir internamente o processo de construção do nosso sistema de numeração. Exercícios como estes certamente não levam a essa reconstrução.

Outro exemplo:

2 Transforme as frações decimais em números decimais:

12/10 = 1,2 15/10 = 1,5
3/10 = 0,3 126/10 =12,6

Neste tipo de exercício o aluno terá que descobrir apenas que "quando forem décimos tem apenas uma casinha depois da vírgula". Na maioria das vezes não precisa nem descobrir. O professor ensina a resolver o exercício, "explicando" através destas mesmas palavras. Não há preocupação com que o aluno compreenda que em 23/10 há 2 inteiros e restam 3 décimos; tampouco com que estes 2 inteiros e 3 décimos possam ser lidos como 2 metros e 30 centímetros, ou 2 quilos e 300 gramas, ou como 2 cruzeiros e 30 centavos. Para o aluno são "coisas" completamente diferentes, que irá aprender em épocas diferentes.

Exercícios como estes e vários outros repetem-se quase diariamente. Não é de estranhar que diante de situações-problema em que precisem pensar, os alunos busquem "regras" através das quais possam resolver situações semelhantes. Por exemplo, ao trabalhar com frações, em nossa pesquisa, procuramos "ensiná-las" de tal maneira que para resolver as crianças raciocinassem.

Assim: 2/4 ÷ 2 = 1/4 "Dois quartos divididos em duas partes é um quarto". Nas operações seguintes como 3/4 ÷ 3 = , 4/8 ÷ 2 = , 6/10 ÷ 3 = ... , observamos que os alunos comentavam entre si:

SIL. — É só dividir os de cima, pôr o que dá, e o debaixo continua o mesmo.

Ou seja: $\frac{2}{4} \div 2 = \frac{1}{4}$

Quando encontraram no exercício a operação 3/4 ÷ 2 = a tendência foi "aplicar" a mesma regra. Só que se depararam com um problema: - Não dá pra dividir 3 por 2, ou seja, não dava exato como nas anteriores. Perceberam então que a regra "não dá pra todas".

Evidenciou-se aqui uma despreocupação em raciocinar sobre o significado da operação e uma excessiva preocupação em encontrar um "meio" de resolver o exercício:

JUR. — Tem que fazer 4 ÷ 2 = 2 e depois botar o 4 embaixo, né profe? É sempre assim, né?

A "regra" significava uma garantia de que "saberia fazer" os exercícios, tanto na aula quanto na prova. Essa constatação evidencia uma necessidade de segurança dos alunos frente à Matemática e a desconfiança em relação à capacidade de raciocinar para solucionar qualquer situação-problema. Por outro lado, evidencia que o aluno é capaz de descobrir e criar regras, e, até mesmo, construir algoritmos, sem que, necessariamente, o professor precise ensiná-los.

Se os exercícios trabalhados na sala de aula são geralmente "do mesmo tipo", o mesmo acontece com os problemas. O que muda são os números, uma vez que a redação e as situações envolvidas são quase sempre as mesmas. Isto facilita ao aluno, pois, diante de um problema e diante da ausência de qualquer estratégia de resolução, busca nos problemas anteriores modelos de resolução.

Observamos a tendência em buscar e seguir "modelos" em várias situações de sala de aula. Alguns exemplos:

1 - Diante do exercício:

Encontre quanto é 15 % de:

a) 8.200,00

b) 5.400,00

c) 960,00

d) 420,00

Os alunos resolveram normalmente as letras a) e b), "cortando" os dois zeros para dividir por 100. Assim:

a) 8.2~~00~~ ÷ 1~~00~~ = 82

82 x 15 = 1.230

b) 5.4~~00~~ ÷ 1~~00~~ = 54

54 x 15 = 810

Diante das letras c) e d) a tendência foi a mesma, só que não havia dois zeros "para cortar". Houve um impasse que gerou muitas discussões, aliás, bastante construtivas, pois a tomada de consciência do erro oportuniza a compreensão do próprio erro e, conseqüentemente, do problema assim gerado.

MAU. - Fez 9~~60~~ ÷ 1~~00~~ = 9 ("cortou" o 6 também!)

Profª - Por que deu 9?

MAU. - Tem que cortar dois...

Profª - O que é cortar dois zeros na Matemática?

Mau. - É dividir por 100.

Profª - Então faça a divisão 960 |100 para ver se dá o mesmo resultado.

ANA. - Fez 420 ÷ 100 = 42 ("cortou" um zero só)

Depois fez 42 x 15 = 630.

- Tá certo né, profe?

Profª - Então 15 % de 420 cruzeiros é 630 cruzeiros?

ANA. - É... deu assim na conta, profe...

Profª - O que é 15 %, Ana? O que significa encontrar 15 por cento?

2 - Diante do problema:

Comprei um par de sapatos por Cr$ 2.364,20. Paguei à vista. Houve um desconto de 10 %. Quanto paguei pelos sapatos?

SIM folheou o caderno, nervosa, até encontrar um problema, a seu ver, semelhante ao que precisava resolver.

Era assim:

Comprei uma calça por Cr$ 2.680,00. Paguei à vista e por esta razão obtive um desconto de 20 %. Quanto paguei pela calça?

No caderno o problema estava "resolvido" da seguinte maneira:

2.680,00 x 80 = 214400,00

214400,00 ÷ 100 = 2.144,00

Perguntou por quê, no caderno, multiplica-se por 80.

Devolvemos a pergunta. Perguntou nervosa, se tinha que fazer "vezes 80". Respondemos que deveria fazer como achasse correto. Deixamo-la pensar

SIM resolveu o problema corretamente, através do seguinte reciocínio:

2.364 x 10 = 23640

23640 ÷ 100 = 236,40

2.364,00 - 236,40 = 2.127,60.

Não se sentiu segura com o que fez. Apagou tudo e fez "vezes 80", da mesma forma que no caderno.

2.364 x 80 = 189120

189.120 ÷ 100 = 1.891,20

Não deu o mesmo resultado. Ficou confusa. Não entendia por que "no caderno dava para fazer vezes 80" - "o problema era igual!" - SIM não lembrava que o cálculo do desconto podia ser feito "direto", pois 100 % - 20 % = 80 %. Logo, na realidade calculava-se só o valor a pagar.

Novamente perguntou se tinha que fazer "vezes 80". Respondemos que em qualquer situação tinha que pensar sobre o problema, raciocinar e fazer da maneira que a gente achasse correta. E confiar em nós mesmos.

Acabou apagando novamente e refazendo as operações anteriores, ou seja, multiplicando por 10, dividindo o resultado por 100 e, por fim, subtraindo o valor obtido na divisão do preço inicial dos sapatos. No entanto, não estava certa de que esta era a forma correta. Achava que estava errado, pois "no caderno, o mesmo problema a gente fez vezes 80".

Para SIM, os dois problemas "eram o mesmo problema", pois "eram de prestação" e de "desconto". Logo, deviam ser resolvidos com as mesmas contas.

3 - Diante do problema:

Comprei uma TV por Cr$ 18.950,00. Como paguei a prazo, houve um acréscimo de 15 %. Quanto custou a TV?

LEA calculou o acréscimo, multiplicando 18.950,00 por 15 %. Deu 28.425,00. Apagou tudo. Perguntamos por que.

- Tá errado. Deu demais.

Folheava bastante o caderno, nervosa. Procurava um problema semelhante. Encontrou um, cujos cálculos haviam sido iniciados assim:

$$\frac{100}{100} + \frac{15}{100} = \frac{115}{100}$$

Fez, então, as seguintes operações:

$$\frac{100}{100} + \frac{15}{100} = \frac{115}{100}$$

$$18.950 + 115,00 = 19.066,50$$

Profª - O que são os 115,00 ?

LEA. - É os por cento.

Profª - Por que você somou a taxa ?

LEA. - É mesmo... Então é o primeiro jeito. Mas, não tem lógica dar 28 mil. É muito caro o acréscimo. Tem que ser do jeito do caderno, então.

Profª – Quanto deu o acréscimo do "jeito do caderno"?

LEA. – Dezenove mil e... é caro também...

Profª – Por que você não procura pensar e fazer do seu jeito, hem?

LEA. leu o problema novamente, mais calma. Pensou um bom pouco e depois perguntou:

– É do primeiro jeito, né profe?

Respondemos que sim. Então multiplicou novamente por 15 % e novamente errou no dividir por 100. Por esta razão encontrava 28.425,00 que, a seu ver, e corretamente, não tinha lógica. Discutimos a origem do erro e, finalmente, após encontrar os 2.842,50, somou o acréscimo ao preço da TV, encontrando o resultado correto.

O "modelo" até então havia sido para estes alunos uma alternativa para encontrar a solução para os problemas "passados" pelo professor, ou, em outras palavras, para descobrir "que conta fazer". O resultado encontrado não possuía significação (tampouco o problema!) e por esta razão resultados absurdos são apresentados pelos alunos sem que se dêem conta.

A preocupação com a "lógica" do resultado, demonstrada por LEA, já era decorrente do trabalho que estávamos realizando com a turma, uma vez que eram desafiados a raciocinar e a questionar seus resultados.

3.1.3 - A falta de lógica nos resultados

Diante de um problema, a preocupação com a conta a fazer e com a busca de modelos era tão grande que o pensar sobre o problema, o interpretar o problema, o compreender o problema, enfim, o próprio problema ficava esquecido. Isto fazia com que os alunos apresentassem resultados absurdos sem ao menos "darem-se conta". Estes resultados eram decorrentes de raciocínios incorretos ou de erros nos cálculos, decorrentes, na maioria das vezes, de dificuldades trazidas de outras séries.

Alguns exemplos:

1 - Diante do problema:

Fiz um empréstimo de Cr$ 25.000,00 para pagar em 15 dias a uma taxa de 5 % ao mês. Quanto paguei pelo empréstimo?

NEU faz os seguintes cálculos:

25.000 x 5 % = 1.250,00 (para encontrar o juro que pagaria em um mês);

1250 ÷ 15 = 83,33 (para encontrar o juro diário - ao invés de dividir por 30);

83,33 x 15 = 12.495,55.

Respondeu que pagaria pelo empréstimo 12.495,55.

Profª - NEU, quanto você pediu emprestado?

NEU. - (lendo o problema) Pedi 25.000,00.

Profª - Quando você for pagar, já que foi cobrado juro, vai pagar mais, ou menos de 25.000,00?

NEU. - Mais!...

Profª - Você respondeu que pagou... (aponta o resultado) quanto?

NEU. - Ah!... Tem erro... deu menos...

NEU não havia somado o valor encontrado do juro durante os 15 dias ao valor que pediu emprestado. Pagaria somente os juros e, mesmo assim, altíssimos em relação à taxa cobrada, pois errou ao dividir por 15 ao invés de 30, e ao multiplicar 83,33 por 15. O juro seria de 625,00 e não de 12.495,55.

2 - LEO, ao tentar resolver o problema:

Comprei uma TV por Cr$ 18.950,00. Como paguei a prazo, houve um acréscimo de 15 %. Quanto custou a TV?

LEO fez os seguintes cálculos:

18.950 x 15 = 2.8.37,50

Depois: 2.8.37,50
+ 1 8 950,0
4.7 32,50

Respondeu que a TV passou a custar 4.732,50.

Profª - Quanto custa a TV?

LEO. - Dezoito mil e novecentos e cinqüenta.

Profª - Você comprou a prazo, teve um acréscimo, e aí, quanto pagou pela TV?

Quatro mil e setecentos e... não, este é o acréscimo... não, é o... mas eu fiz de mais, profe... Tem alguma coisa errada.

LEO não se dera conta do erro ao escrever o numeral: 2.8.37,50 e tampouco de que a TV iria custar muito menos do que custava, mesmo com acréscimo.

3 - ROS procurava o preço de 40 centímetros de fita mimosa, cujo metro custava Cr$ 136,50. Fez a seguinte operação:

136,50 x 0,40 = 546,00 (errou na colocação da vírgula).

Profª - Quanto custa um metro inteiro, ROS? (Mostramos com as mãos a distância aproximada de 1 m)

ROS (olhando o caderno) - Custa 136,50.

Profª - E 40 centímetros, que é um pedacinho assim de fita, custa 546,00?

ROS. - Não pode, profe...

Profª - Onde está o erro?

É interessante observar que, quando questionados sobre os resultados apresentados, "davam-se conta" da ilogicidade das respostas. Este questionar implica em retomar a situação - problema e, de certa forma, fazer com que o aluno se sinta sujeito dela.

A não compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos, evidente nas situações relatadas, tornava-se mais evidente ainda em razão dos próprios algoritmos, o que torna o problema mais grave. Apesar de serem priorizados no ensino de Matemática "que se tem" e, apesar da grande quantidade de exercícios de fixação observada, o aluno ou não sabe "fazer", ou "faz" corretamente, mas não compreende o processo. E as dificuldades se arrastam de ano para ano.

3.1.4 - Dificuldades trazidas de séries anteriores

Normalmente, pelos objetivos do currículo atual, ao chegar na 6ª série o aluno deveria trazer em sua bagagem o domínio dos principais conceitos da Aritmética. Isto não ocorria com a maioria dos alunos da turma, uma vez que apresentavam dificuldades em conteúdos elementares. As mais freqüentes eram relativas à(s):

a) Leitura e escrita dos numerais.

LOU. Fez 2.364,00 x 80 = 189120,00. Perguntou:
— Profe, que resultado é este?

Profª — Por que você fez esta operação? O que você quer encontrar com ela?

LOU. — Não, profe... Que número é?

ANA. Fez 2.364,20 x 90 = 2.1267,80.

Profª — Qual é o resultado da multiplicação?

ANA. — Dois mil, cento e duzentos e... não! Dois milhões, mil duzentos e sessenta e sete... não pode! Ah, não sei, profe, acho que tem alguma coisa errada.

SIL. Escreveu o resultado do problema: 28.42,50.

Profª — Quanto deu de acréscimo?

SIL. — Deu vinte e oito mil, quarenta e dois cruzeiros e cinqüenta centavos.

Profª — Tudo isto?

SIL. — Ah... é muito. Deixa eu vê... mas a conta tá certa, profe!

Profª — Está certa! O problema está na forma como você escreveu o numeral. Pela tua lógica, de quanto, aproximadamente, teria que ser o resultado?

b) Quatro operações fundamentais.

MAR. : 10.000 - 8.464 = 11.536.

Profª — Quanto sobrou de troco?

MAR. — Deu... onze mil, quinhentos e trinta e seis.

Profª - Tu tinhas dez mil, gastou oito mil e pouco na loja e ainda sobraram onze mil?

MAR. - É mesmo, profe...

JUR. : Fez 6.240,00 ÷ 3 = 280,00.

Profª - Você tem uma conta para pagar em três prestações, certo? Aí, em cada mês você paga 280,00?

JUR. - Sim... não... É o que deu a conta, profe!

Profª - Você acha que tá certo?

JUR. ("confere" a conta) - Tá certo, profe...

Profª - Então no primeiro mês você paga 280,00, no 2º mais 280,00 e no...

JUR. (interrompe) - Tem erro... é pouco..., não dá nem mil. Como se faz, então?

c) Quatro operações com números decimais.

GER. : Fez 2.816,00 x 0,40 = 112.640,00.

Profª - Gerson, por que você está fazendo esta conta?

GER. - Pra ver quanto é quarenta centímetros.

Profª - Quarenta centímetros é mais, ou menos que um metro?

GER. - É menos.

Profª - E tem que custar mais, ou menos?

GER. - Menos! (olha para o caderno:) Chiii... profe. Tem erro! Dava pra comprar uma TV...

d) Alguns conceitos básicos.

Profª - O que é área de um terreno?

LEA. - É aquilo que a gente soma todos os lados.

JUR. - É B x h .

Profª - O que é B x h ?

JUR. - É a área.

Profª - Do terreno?

JUR. - É. Não sei... a gente fazia assim...

Profª - O que é fração?

LEO. - É aqueles número que tem um traço no meio, um em cima e outro em baixo?

Profª - O que é 2/3 de um inteiro?

MAR. - É uma barra de chocolate, pintado duas parte e dividido em três.

Dificuldades como estas deveriam estar superadas na 6ª série, de acordo com os objetivos do currículo atual e dos programas de ensino, o que nos leva a questionar vários aspectos do ensino de Matemática "que se tem". Entre eles, os critérios de avaliação adotados, uma vez que alunos foram aprovados ou reprovados em nome destes objetivos, e o próprio conceito de aprendizagem, pois que os alunos "aprendem" num ano e "esquecem" no ano seguinte.

A "falta de base" dos alunos ao chegarem numa determinada série, ocorre com tanta freqüência que já é tida como "normal" entre os professores e, o que é pior, serve como justificativa para os alunos que não "aprendem".

No ensino de Matemática "que se tem" as "reflexões" relativas aos problemas do ensino-aprendizagem, restringem-se, em geral, à busca de causas e esta, por sua vez, é entendida como a busca de "culpados": a falta de raciocínio do aluno, que é "fraco" na Matemática, a falta de base do aluno, o desinteresse do aluno que "não quer saber de estudar", a incompetência do professor, a escola que é "fraca", a pobreza do aluno, o meio precário em que ele vive..., enfim, uma destas razões é sempre justificativa para os problemas.

Enquanto isto os alunos continuam na mesma rotina: ouvindo as explicações do professor, fazendo "exercícios" e cometendo algumas "gafes" que evidenciam a que ponto chega a mecanização e a memorização dos conceitos, neste modelo de ensino.

Alguns exemplos:

a)

$$\begin{array}{r} 121 \\ \underline{\times 13} \\ 363 \\ \underline{121} \\ 1573 \end{array}$$

--->

<---

- Eu não me lembro mais, profe. Tem que começar contando de lá pra cá ou daqui pra lá? (para colocar o ponto no numeral: 1.573).

b) 868
x 900
791200

— Professora, não precisa deixar estes zeros, né?

(na intenção de "cortar" os zeros)

c) 1.000
\- 168

— Professora, quando em cima tem zero e debaixo tem 8, dá zero ou dá oito?

d) 1000
-168
1832

— Tá certo assim, profe?

— Tu tens mil cruzeiros, pagas cento e sessenta e oito na farmácia, e ainda sobram 1.832 cruzeiros?

— Ah, então fica só isto aqui 1 832
(mostra com o dedo)

e) 10.000
\- 849

10 151
\+ 849

10 000

— Tá certo, né profe?

— Por que você fez a conta de "mais"?

— Porque é assim, profe.

— Mas que conta tu estás fazendo?

— Esta aqui, profe. (mostra) A de "menos".

— Então, por que você fez "mais" 849?

— Não sei, profe. A gente sempre fazia assim.

Neste último exemplo o aluno fez a operação e "tirou a prova real". Estava tão acostumado a resolver os "Efetue e tire a prova real", tradicionais exercícios da maioria das aulas de Matemática, que para ele "fazer a conta de menos incluía fazer a de mais". É o que poderíamos classificar como o auge da mecanização no ensino da Matemática. (Isso, sem mencionar os erros de subtração e de adição cometidos pelo aluno.)

Se o ensino de Matemática "que se tem" prioriza as "contas", o fato de os alunos apresentarem tantas dificuldades em "fazê-las" (nem vamos falar em compreendê-las) evidencia que algo vai mal neste ensino.

Entre tantas dificuldades, sempre se encontram, no entanto, alunos com um bom raciocínio matemático e que resolvem os problemas "à sua moda"... mas não à moda do professor.

3.1.5 - A falta de espaço à criatividade do aluno

Nas primeiras aulas de nossa pesquisa observamos que os alunos nada faziam diante de um problema, ou melhor, "esperavam".

MAR. (olhando para os lados, em silêncio, enquanto os outros trabalhavam.)

Profª - MAR, você está resolvendo o problema?

MAR. - Eu tô pensando, profe. (Fez uma cara de quem estava "pensando muito" e continuou "pensando" durante um bom tempo.)

Profª - MAR, você conseguiu resolver o problema?

MAR. - Não, eu ainda tô pensando.

Enquanto "pensava", MAR nem sequer lia o problema. Na verdade, não tinha interesse nenhum em resolvê-lo. Para ele aquele problema certamente não consistia em um problema e, por isso, tampouco num desafio. Esperou até um colega fazer no quadro e copiou a resolução do colega. Ficou satisfeito. A mesma atitude de MAR era observada em ROS, LEO, SIM, SIL e MAU ... Quando ninguém "fazia no quadro", solicitavam que fosse feito, pois não haviam "entendido".

Na verdade, os alunos estavam habituados a esperar a correção. Nas observações realizadas constatamos que na aula de Matemática há sempre a mesma rotina: o professor, após explicar a matéria, "passa" os exercícios no quadro e espera o aluno fazer. Depois "corrige" o exercício no quadro, explicando novamente. Muitos alunos, da mesma forma que MAR, nem se preocupam em resolvê-lo, pois sabem que poderão copiar do quadro.

Observamos também outro tipo de situação:

a) Diante do problema:

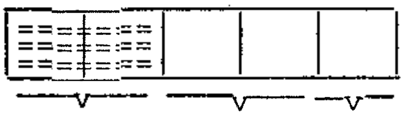
Dois quintos da quantia que tenho equivalem a Cr$ 240,00. Quanto dinheiro tenho?

LIA. (faz no quadro):

240 + 240 + 120 = 600,00

Profª – Como você achou esse resultado?

LIA. (explica, fazendo o desenho)



240 240 120 = 600,00

$\frac{1}{5}$ é a metade

Profª (surpresa) – Tá certo, mas na prova tu tens que fazer do jeito que a profe ensinou senão tá errado.

Olha: 240 ÷ 2 = 120 que é $\frac{1}{5}$; 120 x 5 = 600

"Deste jeito a gente faz todos. Aí não tem erro.

LIA resolveu o problema através de um raciocínio que evidenciou que havia realmente compreendido as frações e o problema. No entanto, a professora não considerou este aspecto, além de transferir a necessidade de resolver problemas matemáticos para a prova; desconsiderou o raciocínio criativo da aluna, limitando a resolução à "maneira de fazer" ensinada por ela. Atrela-se o aluno, portanto, a processos predeterminados de resolução, desconsiderando a sua possibilidade de criação ou, até, pode-se dizer, inibindo a sua criatividade.

Na prática pedagógica que realizamos a criatividade dos alunos tornou-se muito evidente: quando desafiados a pensar e motivados por algum contexto significativo, eles encontravam soluções para situações-problema através de raciocínios espontâneos e bastante criativos. Para isso foi necessário "desafiá-los" a pensar, através de uma postura diferente enquanto professor e através de uma nova dinâmica nas aulas. É o que relataremos a seguir.

3.2 - O "caso" dos contracheques

Propusemos às crianças que conversássemos sobre problemas enfrentados pelas famílias, atualmente.

Ficou evidente, desde os primeiros comentários, que os problemas giravam em torno do alto custo de vida, dos baixos salários, dos altos preços, enfim do processo inflacionário que caracteriza o país.

Algumas crianças deram depoimentos, falando sobre a situação financeira da sua família: o pai ganha um pouco mais que o salário, mas gastou mais da metade no rancho; o irmão ganha o salário e ficou apavorado quando numa loja lhe pediram mais do que este valor por um "tênis"; o pai trabalha o dia todo, faz horas extras e mesmo assim não consegue sustentar sozinho a família.

O depoimento que chamou a atenção dos colegas e que originou uma situação-problema a ser estudada foi o de LEO. Segundo ela, o pai recebeu no final do mês um salário de 3.604,00 cruzeiros e teve um desconto de 505,oo cruzeiros para o INPS, o que considerava um absurdo, por ser um valor "grande" e pelo fato de que sempre haviam sido mal atendidos pelos médicos quando precisaram.

Houve uma discussão sobre o INPS e o INAMPS, quando todos participaram. Argumentavam não valer a pena pagar, devido às filas, ao baixo valor da aposentadoria, ao mau atendimento.

Relatavam situações vivenciadas por todos e que deixavam claro que este Instituto não atende aos fins sociais a que se destina.

O objetivo, ao propiciar esta discussão, era o diálogo problematizador através do qual delinearíamos os conteúdos a serem trabalhados. Isto aconteceu à medida que se definiam situações-problema.

Durante o diálogo ADE comentou:

— Profe, para o meu pai, no "cheque" descontam um monte de descontos: da AACC, do rancho, do sindicato e do INPS também. Não sobra quase nada... não, não sobra muito...

O "cheque" a que ele se referia era o "contracheque" entregue no final do mês aos operários da COTREL - Cooperativa Tritícola Erexim Ltda. Os pais da maioria destas crianças trabalhavam para essa empresa, em ramos diferentes: granja de suínos, incubadora de aves, supermercado, abatedouro de aves, transportes e frigorífico.

Como o problema era comum à maioria, o passo seguinte foi analisar o contracheque dos pais.

JUR e LEO trouxeram o contracheque de seus pais, que trabalhavam no supermercado e na granja, respectivamente. Formamos uma roda para "olhar" e "ler" os contracheques. Entre os "proventos" estavam o salário-base, o salário-família, a insalubridade e as horas extras. Entre os "descontos" estavam o INPS, a taxa da AACC (Associação dos funcionários), a compra de materiais didáticos, o imposto sindical, o rancho e outros.

Essa "leitura" deu origem a várias situações-problema: como eram feitos os cálculos desses descontos e "proventos"? Inicialmente tentamos descobrir "sozinhos"...

3.2.1 - O cálculo da taxa de desconto do INPS

Os dados que tínhamos no contracheque eram o salário-base: Cr$ 3.604,00 e o valor do desconto: Cr$ 505,00. A questão era descobrir como eles haviam calculado este desconto.

Como já havíamos a respeito do INPS, estava claro que mensalmente era descontada uma parte do salário do trabalhador. Que parte, então? Deveria haver um critério comum a todos... Questionamos:

Profª - Se o desconto no salário do pai da LEO foi de Cr$ 505,00, de quanto por cento será que foi este desconto?

Os alunos ficaram com cara de quem nada entendeu. Repetimos as perguntas, escrevendo os dados no quadro.

ANA – Como assim, profe?

Repetimos novamente a pergunta. Reclamavam e argumentavam que não sabiam fazer. Resolvemos dar uma pista, aproveitando um dado que já haviam demonstrado conhecer.

Profª – Se o desconto tivesse sido de 50 %, de quanto teria sido em dinheiro?

ADE. – A metade.

MAU. – Não pode ser mais de 50 %, porque não teria lógica. É muito.

LEO. – Acho que é 15 %, porque senão já é demais. O salário já é pouco, se for mais de 15 % não sobra nada.

ADE. – Se fosse 50 % seria a metade. Aí daria... (faz a conta) 1.802,00 Tá louco!

Surpresa com as argumentações lógicas que fizeram, buscadas nas suas vivências e experiências pessoais, uma vez que tinham como referencial o valor do dinheiro, continuamos a desafiá-los.

Profª – E agora? Como vamos saber de quanto foi o desconto? De 50 % já sabemos que não foi.

Demoram pensando. Quando os incentivávamos a pensar, comentavam:

- Eu não sei.
- Diz de quanto, profe.
- Explica, profe...

Profª – Tentem descobrir. Já demos uma pista.

ADE. – A metade de 50 % é 25 %. Será que é de 25 % ?

Profª – Pode ser, não sei. Como podemos saber?

(silêncio...)

Profª – Como podemos encontrar quanto é 25 % do salário?

(silêncio, novamente...)

ANA. – É a metade da metade.

SIM. – Acho que tem que dividir por 25.

LEA. – Acho que não dá.

ADE. – Dá novecentos e pouco...

Profª – Como você encontrou?

ADE. - Dividindo por 2. Peguei o 1.802 e dividi por 2.

Profª - Por que você fez assim?

ADE. - Pra achá a metade dos 50 %. É os 25 %. Deu 901.

ANA. - É a metade da metade!

Profª - Certo. (escrevendo no quadro os cálculos feitos pelo ADE.)

- E agora? Já encontramos de quanto por cento foi o desconto?

MAU. - Ainda não. 901 passou de 505.

Profª - Como vamos fazer, então, para encontrar?

MAU. - Pegando o 901 e dividindo de novo na metade.

Profª - Por quê, MAU?

MAU. - Daí vai achar 12,5 % que é a metade dos 25 %.

Profª - Então façam a conta...

ANA. - Dá 450.

LEO. - Então é mais.∴ faltou pros 505.

ADE. - É, falta 55.

Profª - E então?

ANA. - Deve ser 13 % ou 14 %, por aí...

MAR. - Acho que é 13,5 %.

Profª - Como vamos descobrir?

(Silêncio...)

Novamente um silêncio angustiante para nós. Ao mesmo tempo que estávamos satisfeita e surpresa com "o rumo que as coisas estavam tomando", ficávamos a nos perguntar se eles iam ou não conseguir, se deveríamos explicar como fazer, enfim, tivemos que controlar a sensação de que eles não iriam conseguir encontrar uma solução e o conseqüente impulso de "explicar como fazer".

Continuamos a incentivá-los a encontrar uma forma de chegar à solução. Argumentavam:

- Eu não sei...

- Explica, profe...

- Não dá mais pra achar a metade...

No ano anterior estes alunos "tiveram" o conteúdo "porcentagem". Haviam esquecido. Até então, em nenhum momento usaram a forma de calcular porcentagem aprendida no ano anterior:

$\frac{c\ i\ t}{100} = p.$

Sentimos que haveria necessidade de reconstruir com eles a noção de "por cento" e o cálculo do percentual.

Perguntamos aos alunos se sabiam como os pais calculavam o percentual, uma vez que seguidamente se envolviam com descontos, acréscimos, juros, nas compras que faziam. Como não sabiam, ficaram com a tarefa de pesquisar como era feito esse cálculo. Uns comentaram que os pais não sabiam. ELA sugeriu que perguntassem para o dono do mercadinho da esquina, e assim apareceram muitas sugestões..

"Descobriram" que primeiro se "fazia de vezes", e depois "dividia por 100".

Questionamos se alguém sabia por que os cálculos eram feitos assim e se gostariam de saber.

Foi necessário partir da noção de fração decimal para que compreendessem o significado de "por cento". Apesar de terem visto o conteúdo na série anterior, o fato de não lembrarem mais nem "como se faz" e tampouco o significado, evidencia que não houve verdadeira assimilação.

Passamos a calcular a porcentagem como fração de um inteiro.

Então: $\frac{13,5}{100} \times 3.604 = \frac{48650}{100} = 486,50$

Retomamos o problema inicial:

Profª – Então, será que o desconto para o INPS no contracheque do pai da LEO foi de 13,5?

MAR. – Não, ainda falta. Dá uns 14 % .

SIM. – Dá uns 15 % .

MAU. – A gente já fez. Passou.

ANA. – Então dá 14,5 % .

Profª – Será que dá? Concordam com a ANA?

MAR. – Tem que tentar.

ANA. – E se der errado?

MAU. – Aí tenta de novo, guria.

Enquanto faziam os comentários, o ODI fez o cálculo de 15 %. Encontrou 546,00.

ANA. – Então dá menos. Dá 14 %.

Fizeram os cálculos. Conversavam muito entre si.

ADE. – Pra mim passou. Deu 512,58.

LEO. – Com 14 % deu 504,56.

ROS. – Deu quase!

Íamos colocando os resultados já encontrados no quadro. Foram fazendo por aproximação e após vários cálculos concluíram que o valor que mais se aproximava era o 14 %. O desconto para o INPS, portanto, deveria ter sido aproximadamente 14 %.

Ficamos surpresa com o valor que juntos encontramos, pois sabíamos que o desconto do INPS era de 8 %. Comunicamos isto aos alunos e ponderamos que o cálculo deveria ter sido feito de outra forma.

Em dúvida, tentamos calcular as horas extras.

3.2.2 - O cálculo das horas extras

LEO. – Meu pai completa o salário por causa das hora extra.

Profª – Como assim?

LEO. – Vamos supor que o pai trabalha até onze e meia todos os dia. Se ele trabalha até o meio-dia faz meia hora.

Contaram sobre o trabalho dos pais. ROS comentou que quem faz hora extra ganha mais. JUR comentou que nem todos ganham hora extra, pois algumas firmas não pagam. LEO contou que muitas vezes o capataz da granja onde seu pai trabalha não marca as horas extras feitas por ele, mesmo sendo um direito que ele tinha. Conversamos sobre isto e aproveitamos para perguntar:

Profª – Será quanto o trabalhador ganha por hora extra que trabalha?

ROS. – Meu irmão, mais do que as outras.

Profª — Como podemos descobrir?

(silêncio...)

Profª — Eu ouvi dizer que é de 50 % da hora normal a mais.

ADE. — Ah, então é mais a metade.

JUR. — Profe, aqui (no contracheque) diz que foi 27 horas extra e tem o número 2 do lado.

O número 2 era um código que se referia, no verso, a: horas extras, 25 %. Nem nós, nem as crianças entendemos. Levantamos a hipótese de que haviam sido pagos 25 % a mais sobre a hora normal, ao invés de 50 %. Resolvemos "testar" nossa hipótese, vendo se os cálculos "fechavam". Colocamos os dados no quadro:

Salário-base pai do JUR: 4.163,00

27 h/e --- 25 % a mais que a h/n

Profª — Como vamos fazer o cálculo?

(silêncio...)

MAU. — 25 % da hora normal. Tem que saber a hora normal.

Profª — E como vamos saber?
Pensem... Se o pai do Jurandir recebe 4.163,00, que é o salário mínimo, quanto receberá por 1 hora de trabalho?

(Silêncio... Repetimos a questão mais de duas vezes, incentivando-os a descobrirem.)

ADE. — Primeiro tem que descobrir quantas horas ele trabalha por mês.

LEO. — Ele trabalha 8 h por dia. Tem que saber por mês.

MAU. — 240 h por mês.

Profª — Como você descobriu?

MAU. — Cada dez dias, 80 horas: 80 + 80 + 80 = 240 horas.

ADE. — Dá pra fazer 30 vezes 8 que é 240 também.

Profª — Por quê?

ADE. — Cada dia, 8. Trinta dias faz vezes 8.

Profª — Certo. E agora? Como vamos descobrir quanto o trabalhador ganha por 1 h?

(Silêncio...)

Profª — Ele ganha 4.163,00 cruzeiros por mês. Trabalha 240 horas... (Silêncio)

ADE. — Pega o 4.163 e divide por 240.

Profª — Concordam? Então façam o cálculo.

ADE. — Deu 17 e sobra 34. O que eu faço com os 34?

ANA. — Não dá pra tirá fora, profe?

Fizemos a conta no quadro. Relembramos como trabalhar com decimais. O resultado foi 17,34. Este número adquiriu significado para eles, quando o entenderam como 17 cruzeiros e 34 centavos. Para isso foi necessário retomar o problema e lembrar que o resultado da conta era o valor da hora normal de trabalho.

Profª - E agora, como descobrir o valor da hora extra?
LEA. - Faz de vezes 25 %.
Profª - Por quê?
ANA. - É a metade da metade.
Profª - Então façam.
ADE. - Deu 21,67.
Profª - Como você fez?
ADE. - Dividi 17,34 por 2. Deu 8,17. Peguei o 8,17 e somei com 17,34.
Profª - Será que o Adelar fez certo?
ODI. - Não, porque vai dar muito.

Revisamos o raciocínio feito pelo ADE. MAU argumentou que ele havia achado 50 % e não 25 %.

ANA. - Bom, então é só dividir por 2 de novo, que é a metade.
ADE. - Eu já fiz. Deu assim: 8,17 ÷ 2 = 4,05; 17,34 + 4,05 = 21,39.
ODI. - Pra mim também.
LEA. - Então não dá do meu jeito?
Profª - Como você fez?
LEA. - Fiz de vezes.

Revisamos o que havia sido feito, colocando os dois "jeitos" no quadro.

Jeito da LEA:	Jeito do ADE:
$\frac{25}{100} \times 17,34 = 4,33$	$8,17 \div 2 = 4,05$
$17,34 + 4,33 = 21,67$	$17,34 + 4,05 = 21,39$

Houve discussões e chegou a haver dúvidas sobre se os resultados tinham que ser iguais. Acabaram concluindo que tinham que ser iguais. Propusemos que retomassem os cálculos desde o início. Descobriram o erro: 17,34 ÷ 2 = 8,67, ao invés de

8,17. O quadro mudou:

Jeito da LEA:	Jeito do ADE:
$\frac{25}{100} \times 17,34 = 4,33$	$8,67 \div 2 = 4,33$
$17,34 + 4,33 = 21,67$	$17,34 + 4,33 = 21,67$

Profª - E agora, como vamos fazer?

(Silêncio...)

Sentimos que estavam meio perdidos. Havia a necessidade de retomar constantemente o raciocínio que já haviam feito. Foi o ODI que sugeriu fazer 21,67 x 27 para encontrar o valor recebido pelas horas extras. O resultado foi 585,23. Não conferia com o valor que constava no contracheque: 748,98. Os cálculos deviam ser feitos de um modo diferente do que imaginávamos.

LEO sugeriu que fôssemos até a COTREL e perguntássemos à pessoa responsável pelos pagamentos. A sugestão foi aceita por todos. Decidimos que iríamos fazer uma pesquisa. A intenção era entender como eram feitos os cálculos de descontos e "proventos" no contracheque: Definimos que iríamos questionar como eram feitos os cálculos do desconto do INPS, da insalubridade, do salário-família e das horas extras.

ROS perguntou por que estávamos "ensinando" o contracheque. Respondemos que considerávamos importante entender o contracheque para assegurarmos nossos direitos de trabalhador. Dialogamos sobre direitos e deveres do trabalhador.

Na visita à COTREL obtivemos vários dados "numéricos" sobre os direitos e deveres do trabalhador, bem como sobre como eram feitos os cálculos relativos ao "contracheque". Apenas alguns elementos da pesquisa:

- insalubridade: é determinada por fiscais que estabelecem "graus" de acordo com o tipo de trabalho; o mínimo é 20 % sobre o salário mínimo, que é o caso das COTREL;

- horas extras: pela legislação, o valor da hora extra é de 50 % sobre os ganhos do trabalhador. A COTREL paga 60 % devido a um acordo com o sindicato. O cálculo é feito assim:

a) total de ganhos ÷ por 220 = valor hora normal;

b) hora normal + 60 % da hora normal = hora extra;

- INPS: a taxa de desconto é variável de acordo com o salário do trabalhador. Se ele recebe de 1 a 3 salários mínimos, o desconto é de 8 % sobre o salário mínimo; de 5 a 10 salários mínimos o desconto é de 9 %; e acima de 10 salários mínimos o desconto é de 1 salário mínimo.

A partir da discussão e análise destes dados foi possível realizar novamente os cálculos dos contracheques e compreendê-los. Isto oportunizou aos alunos assimilarem o cálculo do percentual, uma vez que as diversas "contas" que fizeram possuíam uma significação, um contexto significativo, ao invés de simplesmente "treinarem" o algoritmo do percentual. Fazer contas, aqui, constituía-se num meio necessário para atingir um determinado fim.

Durante as primeiras oito aulas em que travalhamos este conteúdo não foi sequer mencionada a fórmula do cálculo do percentual e tampouco o cálculo através da regra de três. Para encontrar o percentual os alunos calculavam através de uma fração (centesimal) do inteiro, o que corresponde à própria fórmula. Ex. 20/100 de 8.000 equivale a 20/100 x 8.000. Se observarmos a fórmula usual de cálculo $P = \frac{c\ i}{100}$ e procurarmos compreendê-la, teremos c = 8.000; i = 20 %. Logo, $P = \frac{8.000 \times 20}{100}$.
No entanto, se formos mais rigorosos em função de compreendermos 20 % como 20/100, teríamos

$$P = \frac{8.000 \times 20/100}{100}$$

Para não incorrermos neste erro, a fórmula tem que ser "interpretada" de uma forma mais "direta": $P = \frac{8.000 \times 20}{100}$

o que, a nosso ver, não passa a idéia de "20 de cada 100 que compõe os 8.000" ou "20 por cento".

Chegar à formalização, no entanto, é essencial na Matemática. Por esta razão desafiamos os alunos a encontrarem uma "fórmula", ou seja, uma forma de calcular qualquer percentual, usando letras. Surgiram várias "fórmulas", através de diversas letras: P = D x t/100 (D = dinheiro, t = taxa); P = t x v (t= taxa, v = valor); P = t/100 x v (t = quantos por cento, v=valor).

A fórmula P = ci/100 foi apresentada aos alunos e foi motivo de discussão e análise durante uma aula. Ao final, os alunos optaram pela fórmula P = c x i (c = capital, i = taxa), usando as letras comumente usadas e considerando "i" como taxa, portanto, "já diz que é por cento, e por isso não precisa sobre cem".

O mesmo processo de "reconstrução" ocorreu com o cálculo da variação da taxa e em relação aos juros.

Nosso objetivo era que o aluno compreendesse a variação da taxa e não apenas que compreendesse a "fórmula" ou o "como aplicar a fórmula", como no ensino de Matemática "que se tem".

Para descobrir a variação da taxa, ou seja, para descobrir quanto por cento um determinado produto aumentou num determinado período de tempo, os alunos teriam que compreender, por exemplo, que:

- se um produto aumenta duas vezes, isto é, de 1 passa a valer 2, ou de 100 passa a valer 200, o aumento foi de 1 para cada 1, ou de 100 para cada 100, ou 100 %;

- se um produto aumenta 4 vezes, isto é, de 1 passa a valer 4, ou de 100 passa a valer 400, o aumento foi de 3 para cada 1, ou de 300 para cada 100, ou 300 %;

- se um produto aumenta 8 vezes, isto é, de 1 passa para 8, ou de 100 passa para 800, o aumento foi de 7 para cada 1, ou de 700 para cada 100, ou 700 % (Biasuz, 1987).

Assim, se um produto de Cr$ 400,00 passar para Cr$ 800,00 terá que aumentar 100 para cada 100, ou seja, 100 %:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
400 = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100
\end{array}
$$

Valor Inicial = 400
Aumento = <u>400</u>
Valor Final = 800

Se um produto de Cr$ 400,00 for para Cr$ 600,00 , terá que aumentar 50 para cada 100, ou seja, 50 % :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
400 & = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 50 & + & 50 & + & 50 & + & 50
\end{array}
$$

Valor Inicial = 400
Aumento = <u>200</u>
Valor Final = 600

Se um produto de Cr$ 400,00 passar para Cr$ 500,00 , aumentará 25 %, ou seja, 25 para cada 100:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
400 & = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 25 & + & 25 & + & 25 & + & 25
\end{array}
$$

Valor Inicial = 400
Aumento = <u>100</u>
Valor Final = 500

Para que compreendessem a fórmula $i = (\frac{F}{I} - 1) \times 100$ (i = taxa, F = Valor Final, I = Valor Inicial), teriam que "compreender" que dividindo o valor Valor Final pelo Valor Inicial, encontramos quantas vezes o produto ficou mais caro. Por exemplo, se um produto de Cr$ 850,00 foi para Cr$... 1.800,00, aumentou 2,117 vezes, isto é, para cada 1 o preço passou a 2,117. O aumento foi de 1,117 para cada 1, ou de 111,7 para cada 100. O aumento foi, portanto, de 111,7 %.

Pela fórmula:

(cf. p. seguinte)

$$i = \left(\frac{1.800}{850} - 1\right) \times 100$$

$$i = (2{,}117 - 1) \times 100$$

$$i = 1{,}117 \times 100$$

$$i = 111{,}7 \text{ ou } 111{,}7\ \%$$

Para compreender a "fórmula" é necessário compreender o processo da variação da taxa, portanto. No ensino de Matemática "que se tem" a compreensão da fórmula é entendida como a compreensão dos processos algébricos e aritméticos que permitiram chegar a ela. Por esta razão "demonstra-se a fórmula ao aluno, "explicando como deduzi-la", ou "explica-se a fórmula ao aluno".

A forma como se ensinam "juros" na escola é um exemplo da tentativa de "explicar" a fórmula aos alunos.

3.2.3 - O cálculo do juro

Ensinam-se juros, normalmente, pelas seguintes fórmulas:

$$J = \frac{cit}{3.000}, \quad J = \frac{cit}{1.200} \quad e \quad J = \frac{cit}{3.600}$$

A primeira é aplicável nos casos de ter que reduzir a taxa mensal para diária; a segunda para reduzir a taxa anual para mensal e a terceira para reduzir a anual para diária. Nos casos em que não há necessidade destas reduções usa-se a fórmula $J = \frac{cit}{100}$.

Diante de "problemas" de juro, o "problema" do aluno é descobrir qual a fórmula a usar. Muitas vezes "descobre" macetes:

a) $\text{mês} = 30 \text{ dias}$

$$\begin{array}{ccc} \text{mês} & = & 30 \text{ dias} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{mensal} & \text{p/} & \text{diária}: \ \dfrac{cit}{3000} \end{array}$$

b) ano = 12 meses

$$\begin{array}{ccc} \text{ano} & = 12 & \text{meses} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{anual} & \text{p/} & \text{mensal}: \ \dfrac{cit}{1200} \end{array}$$

c) ano = 360 dias

$$\begin{array}{ccc} \text{ano} & = 360 & \text{dias} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{anual} & \text{para} & \text{diária}: \ \dfrac{cit}{3600} \end{array}$$

Para que o aluno "entenda" a fórmula, o professor explica da melhor maneira possível. Por exemplo:

$$J = \frac{cit}{3.000} = \frac{cit}{100 \times 30}$$

- "É necessário dividir também por 30 para encontrar a taxa diária - o mês tem 30 dias."

E aí demonstra:

$$J = \frac{cit}{100} \div 30 \quad \text{(divisão de frações)}$$

Então:

$$J = \frac{cit}{100} \times \frac{1}{30} = \frac{cit}{3000}$$

A compreensão da fórmula não determina a compreensão do problema. Caso contrário, o aluno saberia "o que fazer" ou "que fórmula usar" diante de qualquer problema; o que não ocorre. A compreensão é, portanto, anterior à formalização. O ensino de Matemática "que se tem" é que coloca a formalização no início do processo.

Na prática pedagógica que realizamos tínhamos como objetivo a compreensão dos conceitos. Acreditávamos que a fórmula seria o ponto de chegada de um processo de construção.

A "questão" dos juros surgiu, naturalmente, a partir da percentagem. Era um termo conhecido por todos, através dos meios de comunicação e também devido a algumas experiências já vivenciadas. ODI contou que o pai, antes de vir trabalhar de motorista na cidade, trabalhava na colônia. A cada época de plantio ou safra necessitava fazer empréstimos no Banco do Brasil. Os juros muito altos foram uma das razões que o levaram a desistir da agricultura e tentar a vida de outra forma. ANA contou que a mãe havia deixado de pagar uma conta, porque não tinha dinheiro. Quando pagou cobraram um juro enorme. JUR comentou que ouviu na TV que o Brasil não consegue pagar a dívida externa, porque os juros são muito altos.

Esses depoimentos geraram um diálogo crítico sobre a situação econômica do país e da população. Alunos outrora quietos, calados, já participavam dos debates com mais liberdade.

Aproveitando as situações discutidas, sugerimos que "inventássemos" problemas semelhantes aos relatados para aprendermos a calcular os juros.

Nos exemplos que seguem pode-se observar que, mesmo não tendo conhecimento das fórmulas para juros e de não terem "visto" o conteúdo anteriormente, os alunos encontravam caminhos para chegar à solução.

a) A mãe de ANA, D. Luíza, pagou a conta de Cr$ 5.600,00 com atraso de 10 dias. A loja cobra uma multa de 30 % ao mês. Quanto D. Luíza pagou de juros?

JUR fez o seguinte raciocínio: $5.600 \times \frac{10}{100} - 560,00$

Explicou:

- Se o juro é de 30 % ao mês e ela atrasou 10 dias, o mês tem 30 dias, então, 10 % para cada 10 dias.

SIM, ANA e LEA, trabalhando em grupo, tentavam resolver da seguinte maneira:

$30 \div 30 = 1\ \%$ ao dia; $5600 \times \frac{10}{100} = 56,00$

Erravam na divisão e multiplicação dos decimais, o que as fazia pensar que está "tudo errado", porque era "muito pouco". O raciocínio, porém, estava correto: buscaram a taxa diária, multiplicaram pelo número de dias de atraso para encontrar a taxa a ser cobrada e por fim calcularam o valor da multa.

Caso fossem aplicar a fórmula, teriam que usar a que "reduzisse" de mês para dias: J = cit/3000. Aí bastaria "aplicá-la":

$$J = \frac{5.660 \times 30 \times 10}{3.000} = \frac{1.680.000}{3.000} = 560$$

b) SIL colocou 22.500,00 na poupança durante 3 meses. No 1º mês o rendimento foi de 13,8 %, no 2º de 14,4 % e no 3º de 15,7 %. Quanto dinheiro SIL tinha na poupança no fim de 3 meses?

JUR calculou o 1º mês: 22.500 x 13,8 % = 3.933,00. A seguir calculou o 2º mês: 22.500 x 14,4 % = 3.240. Quando ia calcular o 3º mês, GER, que sentava ao lado, o interrompeu questionando a forma como tinha "feito". Segundo ele, "tinha que ver primeiro com quanto ele ficou no 1º mês, pra depois calculá o juro, senão não era vantagem". Juntaram-se a eles, na discussão formada, MAU, ADE e ODI. GER e os dois últimos argumentavam:

> - Primeiro tem que ver quanto deu no 1º mês. Aí tem que fazer 14,4 % de quanto deu. A gente ganha o juro de quanto ficou lá no Banco.

Fomos chamada para "ver quem tava certo". Estendemos a discussão para todos, pois outros grupos estavam calculando da forma do JUR.

Após muita conversa, chegamos às conclusões necessárias e ao conteúdo "juro composto". Sistematizamos os conhecimentos: a poupança paga juro sobre juro, ou seja, calcula-se o juro sobre o montante de cada mês. Fizemos uma tabela no quadro:

	Capital	Juro	Montante
1º mês	22.500,00	3.105,00	25.605,00
2º mês	25.605,00	3.687,12	29.292,12
3º mês	29.292,12	4.598,86	33.890,98

ANA questionou:

- Então se é composto dá mais dinheiro?

Para responder à questão pedimos que calculassem quanto renderia a poupança, a juros simples, e preenchessem só os juros, na tabela:

	Simples	Composto
1º mês	3.105,00	3.105,00
2º mês	3.240,00	3.687,12
3º mês	3.532,00	4.598,86

Concluímos que para os Bancos era mais vantajoso emprestar a juro composto. Questionaram que tipo de empréstimo era feito a juros simples. Ficamos de "pesquisar" e trazer os dados na próxima aula.

Questionaram, após resolverem outro problema que envolvia capitalização em 8 meses, se não havia uma "fórmula" para fazer mais depressa, "pra não ficar fazendo mês por mês". Apresentamos a fórmula do juro composto e passamos a "aplicá-la" aos problemas: $Cn = C\ (1+i)^n$.

3.3 - O Ensino de Matemática "que se tem" e a Educação Matemática "que se quer"

O ensino da Matemática atualmente ministrado na maioria das escolas caracteriza-se pelo professor-transmissor de conhecimentos previamente estruturados e pelo aluno-receptor-passivo de informações, ao qual cabe o papel de reproduzir os conhecimentos transmitidos pelo professor através da memorização.

O professor *dá a aula, dá a matéria e dá a Matemática para o aluno. Ele faz para o aluno e não com o aluno* (Medeiros, In: Bicudo, s.d., p. 28).

O aluno fica na condição de ouvinte das "explicações" do professor. Após as explicações sobre como resolver determinados exercícios ou problemas-tipo, passa-se aos exercícios de fixação quando cada aluno tentará refazer o que foi feito pelo professor em situações análogas. Caso o aluno não tenha "entendido" o conteúdo, o professor "explica" novamente (e quantas vezes forem necessárias) até o aluno "aprender", ou seja, até ele memorizar "como se faz". É necessário lembrar que a concepção existente é de que "aprender" Matemática consiste em resolver corretamente adições, subtrações, multiplicações, divisões, equações, fatorações, derivadas, integrais, etc. e depois saber "aplicá-las" em problemas propostos pelo professor (o que normalmente não ocorre, pois a maioria dos alunos não sabem resolver problemas). O ensino, desta forma, fica voltado para a eficiência do saber realizar com êxito certos exercícios, aplicando corretamente certas regras, em detrimento da real compreensão dos conceitos, ou seja, do verdadeiro "aprender" que implica em construir conceitos.

Caracteriza-se também pelo excesso de simbolismos e pela exigência de abstrações precoces pelo aluno. *... toda ênfase é colocada na estrutura e na lógica da disciplina e não no conhecimento de como esta lógica é constituída para a criança* (Rangel, 1987: 57). Por exemplo, a distribuição dos conteúdos por séries e a graduação das dificuldades é feita segundo o critério da disciplina matemática. O currículo não considera o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Elkind (1978: 24) já o havia observado, apontando um outro exemplo: a Matemática Moderna:

> *A falta de distinção entre a lógica (a estrutura) da disciplina e da criança é uma fonte perene de problemas curriculares. Um dos maiores equívocos da "nova matemática foi ser ensinada de acordo com a estrutura da disciplina (em que o conceito de conjunto é fundamental) e não de acordo com a estrutura da criança (em que o conceito de unidade é o fundamento do pensamento quantitativo).*

A Matemática é trabalhada no currículo de forma isolada, tanto no que se refere à sua própria estrutura quanto no que se refere às demais áreas do conhecimento.

O conteúdo matemático é trabalhado de forma compartimentada em vários assuntos estanques. O que foi visto em uma série é pré-requisito para a seguinte, mas não é incorporado de forma integrada com o novo conteúdo. O aluno não é levado a estabelecer relações entre o que já foi e o que está sendo estudado. Passa-se a visão de que a Matemática é formada por conteúdos isolados, quando deveriam ser trabalhados de forma integrada. Por exemplo, nas primeiras séries a ênfase total do ensino está na Aritmética. Pouco ou nada se fala sobre Geometria ou Álgebra. Esta última só começará a ser trabalhada (de forma abstrata e formal) na 6ª série. A Geometria, por sua vez, é sempre "o último conteúdo do livro", ficando para ser vista no final do ano, "se" sobrar tempo. E quase nunca sobra. O mesmo acontece com a Matemática Financeira, conteúdo de grande importância, mas que na maioria das vezes é deixado de lado por falta de tempo.

A disciplina Matemática é tratada como algo à parte, em relação às demais disciplinas e às vivências diárias do estudante:

> *Convém salientar ainda que o ensino da Matemática, por ser formal, teórico, totalmente alienante e desvinculado da realidade do aluno, leva professores de áreas afins a ensinar tópicos de matemática porque esses ou não serão estudados em matemática ou serão estudados quando não é mais preciso* (Beltrame, 1985).

O mundo-vida do aluno, ou seja, a família, a escola, a sociedade e as relações afetivas, políticas e econômicas que o envolvem não são consideradas. Mostra disto é o fato de que alguns alunos que "vão mal" na matemática da escola, saem-se muito bem na matemática da vida. Os "problemas" não resolvidos na escola encontram solução rápida e criativa em situações análogas que vivenciam no dia-a-dia. Não causa estranheza, diante disto, o desinteresse e a indisciplina dos alunos na sala de aula. Tudo isto, aliado à não compreensão dos conceitos matemáticos "explicados" pelo professor e às cansativas listagens de "exercícios", faz com que os alunos detestem a Matemática e não visualizem a necessidade do seu estudo.

O pensar, que é essencial na Matemática, fica ofuscado pelo treino de habilidades de calcular. A forma como esta disciplina é abordada nas escolas propicia o não alcance dos objetivos a que se destina, embora, paradoxalmente, conste em todos os planejamentos escolares, ou seja: o desenvolvimento do raciocínio lógico e do espírito crítico.

Não há dúvida de que a ênfase à linguagem técnica, aos simbolismos e aos conceitos abstratos, aliada ao isolamento da disciplina no que se refere às relações sociais do aluno, relega a um segundo plano a capacidade de estabelecer relações, o desenvolvimento do raciocínio e a capacidade de análise crítica. Não há dúvida também de que por detrás desta problemática existem interesses ideológicos.

A sociedade brasileira caracteriza-se pelas contradições geradas pela concentração dos meios de produção nas mãos de uma minoria comprometida com o sistema capitalista mundial, onde as relações existentes entre esta e a sociedade são de dominação e exploração.

As instituições escolares inserem-se neste contexto como distribuidoras e como produtoras de conhecimentos necessários à manutenção destas relações, Nesta perspectiva se inserem também a organização curricular, as atividades pedagógicas e, em específico, o ensino da Matemática.

A própria Matemática, enquanto ciência, é um instrumento ideológico poderoso que pode servir para a manutenção das relações de dominação e exploração.

A Educação Matemática "que se tem" atualmente nas escolas, identifica-se com a concepção de educação que Freire denomina de "bancária". Esta, segundo o autor, caracteriza-se pela relação autoritária entre professor e aluno, onde o professor é o que educa, o que sabe, o que pensa, o que diz a palavra, o que disciplina, o que opta e prescreve sua opção, o que atua, o que escolhe o conteúdo programático, enfim, é o sujeito do processo educativo. O aluno, por sua vez, é aquele que é educado, que não sabe, que não pensa, que escuta docilmente, que segue prescrições, que atua na atuação do professor, que se acomoda às escolhas do professor, enfim, que se constitui em mero objeto no processo educativo (Freire, 1988: 59).

Narração de conteúdos, fixação e memorização vazias de significado, conteúdos que são *retalhos da realidade desconectados da totalidade em que se engendram* (ibidem, p. 57), fazem parte da rotina diária de alunos que vêem aumentar dentro de si, a cada dia, a necessidade de dar vazão à sua criatividade, ao desejo de falar, de agir, de questionar, de criticar, enfim, de participar, mas que vêem também diminuir, a cada dia, estas possibilidades na atitude autoritária do professor. Este traz, em sua bagagem, em sua própria formação, os reflexos da ideologia da dominação e a reproduz, mesmo que de forma inconsciente.

A visão "bancária" de educação, para a qual a forma de ensinar matemática contribui, faz do ato educativo um permanente depositar de conteúdos no qual o professor é o depositante e o aluno o depositário. Nega o diálogo, assistencializa, inibe a criatividade, impõe a passividade, impede o pensar. Tudo isto com um fim definido: a satisfação dos interesses dos "opressores" para os quais o "desnudamento" do mundo e a sua transformação não é fundamental. Pelo contrário, para os seus interesses é fundamental a manutenção das relações de dominação que caracterizam a sociedade.

O ensino da Matemática, pela característica desta disciplina, que é, entre outras, desenvolver o poder reflexivo e crítico do sujeito, poderia, ao contrário do que tem feito, contribuir para a "libertação".

Para isto, no entanto, seria necessária uma prática pedagógica que ampliasse o sentido do "ensinar matemática" para o de "educar matemática", em oposição à concepção positivista do conhecer a partir do receber informações e conhecimentos já elaborados e em concordância com o conhecer, a partir do *encontro dialógico entre educador e educando* (p. 69).

O "educar matemática" requer uma prática pedagógica que se identifique com a concepção de educação que Freire denomina de "problematizadora". Esta implica na *superação da contradição educador-educando, de tal maneira que se façam ambos, simultaneamente, edu-*

cadores e educandos (p. 59). Isto requer a morte do professor proprietário do conhecimento e o seu renascer como "educador" que procura conhecer a realidade com o educando, a quem, numa relação dialógica possibilita o direito de dizer a sua palavra.

Esta concepção de educação funda-se na criatividade, estimula a reflexão e a ação verdadeira dos homens sobre a realidade, na *sua vocação ontológica e histórica de humanizar-se* (p. 72). Tem no diálogo o selo do ato cogniscente, através do qual será possível o rompimento das relações de opressão.

Ao contrário da educação bancária, a educação problematizadora não impõe conteúdos já sistematizados, mas desafia os alunos a captar e compreender o mundo e as relações que o cercam como uma realidade em contínua transformação. Não aceita o imobilismo, mas *... se re-faz constantemente na práxis. Encara a educação como um quefazer permanente, (...) na razão da inconclusão dos homens e no devenir da realidade* (p. 73).

O mundo e a Ciência estão em constante devir e as transformações fazem parte da essência humana. Heráclito de Éfeso, aproximadamente 500 a.C., já chamava a atenção para este fato.

A realidade que vivemos atualmente evidencia, mais do que nunca, que passamos e ainda estamos passando por transformações tanto a nível de história da humanidade, como a nível de história individual. A esta realidade não cabe uma visão metafísica do mundo, e tampouco um processo de ensino-aprendizagem passivo.

A sociedade atual enfrenta um período de crise não apenas política e econômica, mas também uma crise de valores, momento em que urge resgatar o homem na sua condição de ser humano, de agente criador e transformador, de atuante e crítico da sociedade em que vive. O "educar matemática" requer um suporte teórico e uma prática educativa que atenda a estes aspectos.

Não contribuem, certamente, para isto a visão empirista do conhecimento, a visão behaviorista da aprendizagem e a visão formalista do conhecimento matemático que caracterizam o ensino de Matemática "que se tem".

A visão empirista do conhecimento pressupõe o aluno como uma *tabula rasa* onde os conhecimentos, já prontos e acabados, devem ser gravados: o conhecimento, nesta perspectiva, independe do sujeito, cabendo a ele o papel de depositário de informações.

A visão behaviorista da aprendizagem subordina os processos de aprendizagem ao treino de habilidades, ao exercício, ao reforço, à memorização e ao condicionamento do aluno.

A visão formalista do conhecimento matemático defende a idéia de que a Matemática consistiria apenas em axiomas, definições, teoremas e fórmulas, enfim, definir-se-ia como a ciência das demonstrações rigorosas.

Estas concepções subjacentes ao ensino existente em nossas escolas conferem ao sujeito um papel passivo de mero expectador do processo ensino-aprendizagem. Se o que se quer é formar sujeitos inventivos, criativos, capazes de crítica e autocrítica, com coragem de transformar a si mesmos e a sua realidade, é necessária uma prática pedagógica que priorize a ação e a participação do sujeito, bem como a análise e a compreensão das relações que se estabelecem no mundo que o cerca. Isto será possível se subjacente a ela houver a concepção interacionista do conhecimento.

O "educar matemática" requer, portanto, uma prática pedagógica que concilie os aspectos cognitivos e ideológicos, presentes na produção do conhecimento matemático, com as questões sociais que o envolvem.

Devemos considerar ainda que o "educar matemática" terá que ser um ato político, uma vez que *a Educação Matemática é sempre ideológica, carregada de valores, explícitos ou não...* (Medeiros, In:Bicudo,s.d., p. 38), pois está sempre associada a uma visão de homem que quer formar e a um modelo de sociedade que pretende manter ou atingir.

Concordamos com as considerações de Medeiros (In: Bicudo, p. 39-41), quanto à Educação Matemática que, enquanto ato político:

- deve contribuir para a construção de uma sociedade em que os valores humanos de justiça econômica, de democracia com o exercício das cons-

ciências e de autonomia na produção do conhecimento superem os antigos e respectivos valores de paternalismo econômico, de controle hegemônico movido pela propaganda ideológica e do consumismo do saber pronto;

- *se revela a partir das atitudes do professor frente ao aprender e ensinar a Matemática.* Embora as palavras e atitudes do professor não determinem mudanças sociais, o que pode fazer na escola é *explicitar as suas crenças e defendê-las, possibilitando a abertura das consciências, enquanto estados de alerta para as coisas, àqueles com quem convive, tendo o diálogo como um meio que lhes propicie uma nova leitura do mundo;*

- necessita *resgatar a Matemática que está inserida na codificação de toda uma realidade física e social, vivenciada pelos educandos e analisar com eles, de forma dialógica, os diferentes significados atribuídos e as diferentes formas de pôr ordem nas idéias na construção desse conhecimento;*

- contribui para explicitar as contradições da sociedade, com menor intensidade em relação a outras ciências cujos objetos de estudo sejam o homem e a sociedade; entretanto, há *um certo tipo de desmistificação das relações sociais de produção codificadas, por exemplo, nos estudos da Economia, e um certo tipo de compreensão dos fenômenos físicos que cabe diretamente ao professor de Matemática pela especificidade dos significados envolvidos;*

- faz com que o aluno, através do seu pensar, das suas explicações acerca dos assuntos matemáticos que estuda e acerca do mundo social ou físico que o cerca, das suas representações alternativas e do desenvolvimento racional, formule *heurísticas não codificadas das quais lança mão para emprestar um sentido, seja às idéias matemáticas, seja ao mundo físico ou social.*

Para finalizar, devemos considerar que a Educação Matemática "que se quer" não pode prescindir de um referencial teórico que permita encontrar respostas a questões que digam respeito à epistemologia do sujeito e da Matemática enquanto ciência. Parece-nos evidente a necessidade de considerarmos a forma como a criança adquire o conhecimento matemático e a forma como este conhecimento se desenvolveu na história da humanidade, ao pensarmos numa prática pedagógica que atenda às expectativas do "educar" matemática.

Nesse sentido, dois referenciais contribuem expressivamente: a Espistemologia Genética de Jean Piaget (ver cap. 1) e a História da Matemática e da Ciência.

Em Byers* encontramos referências à História da Matemática:

> *... é impossível entender a natureza da Matemática exceto pela sua história (...). Tanto quanto entendo do assunto, a principal razão para estudar história da matemática é trazer alguma luz à natureza da própria matemática.*

A História da Matemática, da mesma forma que a Epistemologia Genética, evidencia o caráter construtivo da Matemática. O "educar" matemática requer, portanto, que se reconstruam com os alunos os conceitos matemáticos, da mesma forma que se oportunize a construção de novos conceitos.

---

* **Por que estudar a História da Matemática.** Extraído de:
INT. - J. Math, Educ. Sci. Technol., v. 13, n. 1, p. 59-66. 1982.
Trad. por Maria Amoroso Anastácio, UNESP, Rio Claro e Eduardo Sebastiani Ferreira
IMECC, UNICAMP.

4. APRENDIZAGEM X CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Na prática pedagógica que realizamos, a não aprendizagem dos conceitos matemáticos trabalhados em séries anteriores tornou-se um aspecto bastante evidenciado, não apenas pelas dificuldades em resolver problemas matemáticos, mas até mesmo pelas dificuldades no "fazer contas", aspecto tão enfatizado no ensino de Matemática "que se tem". Os alunos, no entanto, foram aprovados nas séries anteriores, o que permite julgar que corresponderam ao que era considerado "aprender" Matemática por este modelo de ensino. Isto nos conduz a investigar a concepção de aprendizagem subjacente a este modelo de ensino e a buscar em nosso referencial teórico elementos que possam justificar esta não aprendizagem.

4.1 - <u>Concepção de aprendizagem subjacente ao ensino de Matemática "que se tem"</u>

A tradicional rotina da aula de Matemática é, por si só, bastante esclarecedora a respeito da concepção de aprendizagem que predomina no atual ensino: o professor "explica" o conteúdo e o aluno "presta atenção", aprende e, a seguir, consolida esta aprendizagem através de exercícios de "fixação". Portanto, o aluno aprende através de órgãos sensoriais ("vendo" e "ouvindo" o professor) e através do exercício (treino de habilidades).

Supõe-se que, como no empirismo, o conhecimento a ser adquirido está fora - no meio - (representado pelo professor, transmissor desse conhecimento), e que o aluno o adquire sem que para isto necessite realizar alguma atividade interna. Ao aluno cabe apenas o papel de recebê-lo e reproduzi-lo, uma vez que já o adquire pronto, elaborado e sistematizado, devendo somente associá-lo a conhecimentos anteriores.

Para o empirismo, bem como para o professor de Matemática, o sujeito cognoscente, no caso, o aluno, é considerado como *um "receptáculo", no começo um "receptáculo vazio", no qual ingressam dados do mundo exterior, transmitidos pelos sentidos, mediante a percepção* (Dicionário de Filosofia).

No ensino de Matemática, os conhecimentos anteriores do aluno ou a sua forma natural e espontânea de raciocinar não são considerados, uma vez que, na sala de aula, tem que resolver cálculos, exercícios e problemas "da maneira que o professor ensinou". Da mesma forma Locke (1632-1704), precursor do empirismo, considera o aluno uma *tabula rasa* na qual as idéias e conhecimentos devem ser imprimidos. Isto não apenas em relação a conhecimentos, mas, como defendem os associacionistas (behavioristas), também em relação a novas reações, novos hábitos, novos comportamentos.

Ensinar, nesta acepção, é oferecer aos alunos todas as condições necessárias (estímulos) para que atinjam as metas determinadas (respostas) através de mudanças em seus comportamentos. O professor é, portanto, aquele que organiza todo o processo ensino-aprendizagem: planeja, dirige, guia, arruma, manipula, recompensa, pune; enfim, toma as providências necessárias para ter a certeza de que as atividades dos alunos vão estar voltadas para o que determinou, ou, em outras palavras, que os alunos irão "aprender". Na aula de Matemática é o professor que determina o conteúdo a ser aprendido, planeja a aula, explica, "passa" os exercícios, corrige. A aprendizagem é considerada mudança no comportamento, como resultado de práticas determinadas. Na aula de Matemática esta "prática", como atrás já dissemos, consiste em ver, ouvir, copiar e resolver exercícios. O "exercício", por sua vez, consiste em fazer contas. Talvez por esta razão a aula de Matemática é, para o aluno, a aula de fazer conta... um "fazer" que pode ter significado para o professor, mas que nem sempre tem significado para o aluno. Como se este "fazer" (experiência) pudesse impor conhecimentos ao aluno, diretamente, sem que este precisasse realizar nenhuma atividade organizadora desses conhecimentos.

Em nossa pesquisa, as "contas" e os conteúdos matemáticos passaram a ter significado para os alunos à medida que não mais os recebiam como conhecimentos prontos, necessitando, por esta razão, sair da passividade à qual estavam habituados e passar a agir (pensar, raciocinar, pesquisar, questionar...) na busca de solução para problemas, o que vale dizer: quando o "fazer" não mais se limitava a reproduzir mecanicamente, passava a ser um "fazer" com significado.

Isto nos leva a considerar as relações existentes entre o "fazer" característico de ambas as situações e a aprendizagem.

O empirismo considera "aprendizagem" toda a experiência adquirida em função do meio físico ou social (Piaget, 1974: 35) e "experiência" algo que se impõe por si, sem que o sujeito tenha que organizá-la, isto é, como se ela fosse impressa diretamente no organismo, sem que nenhuma atividade do sujeito seja necessária à sua constituição (Piaget, 1987: 339). O sujeito aprenderia através de hábitos e associações mecanicamente adquiridas.

O "fazer" que conduziria à aprendizagem implica em reproduzir ações previamente determinadas pelo meio. O sujeito não age por iniciativa própria; sua ação é orientada e dirigida pelo professor.

Quanto ao ensino de Matemática, as palavras de um professor de Matemática, explicando aos seus alunos como se "estuda Matemática", são esclarecedoras:

> *A gente aprende a fazer Matemática fazendo. Por isto refaçam todos os exercícios em casa, várias vezes. Com certeza vocês saberão os da prova.*

Clara novamente se torna a concepção de que aprender Matemática é aprender a fazer contas, equações, fatorações... enfim, é aprender mecanismos, memorizar processos, aplicar fórmulas... como se "saber Matemática" fosse apenas saber "fazer"...

um "fazer" que não está comprometido com o conhecimento, mas com a prova, quando a criança terá que "reproduzir" para o professor o que "aprendeu" na aula.

A prova é, para o professor empirista, um instrumento para "medir" a aprendizagem do aluno, o que é feito através do número de erros e acertos por ele cometidos, nos mesmos "tipos" de exercícios realizados na sala de aula. O produto final, o resultado é o que vale para o professor. O processo de raciocínio realizado até chegar a ele não é considerado. O fato de a Matemática ser uma ciência "exata" é usado como argumento para justificar este ponto de vista. Tanto é assim que para muitos professores não há "meio certo" (usado quando o aluno desenvolve um raciocínio correto e erra no cálculo, por exemplo): ou "tá certo" ou "tá errado".

Esta forma de avaliar denuncia não apenas a concepção de aprendizagem a ela subjacente, mas também a perfeita sincronia desta forma de "ensinar" Matemática com um projeto mais amplo de educação: o liberal conservador.

Como chama a atenção Luchesi*, o atual exercício da avaliação está a serviço de pedagogias (tradicional, escolanovista e tecnicista) que, por sua vez, estão a serviço do modelo liberal conservador dominante em nossa sociedade. É, portanto, um instrumento disciplinador *não só das condutas cognitivas como também das sociais, no contexto da escola.*

É fundamental ao liberalismo em educação que a Matemática não seja entendida como um processo, como um "meio", como a entende Piaget, mas como um fim em si mesmo, uma entidade perfeita, uma realidade absoluta pertencente à natureza das coisas, à qual o sujeito não tem acesso, isto é, não tem acesso aos seus mecanismos íntimos. Compreendê-los a ponto de ser capaz de contestar, comprovar, enfim, criar Matemática, seria perigoso demais. Aprender, portanto, não pode estar comprometido com a

---

* Avaliação Educacional Escolar: para além do autoritarismo. **Revista de Educação da AEC.** Brasília, Ano 15, n. 60, p. 6-16, abril/júlio de 1986.

possibilidade de construir novos conhecimentos, mas apenas "reproduzi-los".

Piaget distingue dois tipos de "fazer" no processo de construção do conhecimento:

- o "fazer" que consiste em um saber realizar (*réussir*);
- o "fazer" que consiste em atribuir significado às coisas - o compreender.

O "fazer" que poderia ser comparado ao "fazer" empirista associacionista seria o "réussir", uma vez que Piaget admite o papel e a importância progressiva da experiência no desenvolvimento. No entanto, estas interpretações do "fazer" diferem na origem: toda ação da criança, por mais elementar que seja (exercício dos reflexos, reações circulares) possui uma organização interna que lhe atribui significado.

O saber realizar, conseguir (*réussir*), para Piaget, faz parte de um processo: utilizar as coisas com sucesso é condição preliminar para a compreensão, sem a qual não se pode falar em conhecimento. É neste sentido que Piaget distingue "aprender" e "conhecer":

> *Aprender, ele mostra, é saber realizar (réussir); conhecer é compreender e distinguir as relações necessárias das contingentes: atribuir significado às coisas no sentido mais amplo da palavra, ou seja, levando em conta não só o atual e o explícito como o passado, o possível e o implícito* (Chiarottino, 1984: 73).

Ambos - aprender e conhecer (fazer e compreender) - fazem parte de um processo funcional de conjunto, que tende a se confundir com o próprio processo de desenvolvimento, ao qual Piaget denomina aprendizagem no sentido amplo (s. lat.); processo que engloba aquisições devidas à experiência física e/ou lógico-matemática (aprendizagem no sentido restrito e aquisições devidas aos processos de equilibração (compreensões graduais, por exemplo) (Piaget, 1974) e que inicia com a formação dos esquemas de ação sensório-motores (cujas ações já se estruturam internamente) e se prolonga indefinidamente por constantes reequilibrações até o mundo dos "possíveis e imagináveis".

O "fazer" piagetiano significa *agir sobre os objetos e descobrir suas propriedades por abstração, partindo dos próprios objetos* (experiência física) e/ou *agir sobre os objetos, mas, no caso, descobrir as propriedades por abstração, a partir não dos objetos como tais, mas das próprias ações que se exercem sobre esses objetos* (experiência lógico-matemática) (Piaget, 1976: 46). Ambas consistem na ação do sujeito ora sobre os objetos, transformando-os (assimilando-os), ora na ação interna, organizadora, de transformação ou de criação de novas estruturas (acomodação).

Contrapondo-se ao empirismo, para o qual a experiência é recepção de dados oriundos do meio, experiência, para Piaget, é ação e construção progressivas (1987). Não se trata, porém, de ações impostas ao sujeito pelo meio, mas de ações do sujeito sobre o meio, ações que visam a "assimilá-lo", "conhecê-lo", "transformá-lo". Ações que podem ser materiais, físicas, sobre os objetos, ou ações interiorizadas, realizadas em pensamento - operações, mas que se coordenam progressivamente, à medida que o sujeito constrói suas estruturas do conhecimento.

Trata-se de um "fazer" com significado, com um objetivo bem definido, desde as suas formas mais elementares: o de "explorar" o mundo, visando a apreendê-lo, assimilá-lo, estruturá-lo, enfim, "conhecê-lo".

> *Conhecer um objeto é agir sobre ele e transformá-lo, apreendendo os mecanismos dessa transformação vinculados com as ações transformadoras. Conhecer é, pois, assimilar o real às estruturas de transformações, e são as estruturas elaboradas da inteligência enquanto prolongamento direto da ação* (Piaget, 1976: 37).

ok

Trata-se de um "fazer" que se opõe ao "fazer" empirista que caracteriza o ensino de Matemática. Não comprometido com o conhecimento, o "fazer" ou aprender empirista justifica os esquecimentos dos alunos de um ano para o outro, ou até mesmo de um conteúdo para outro. Nas palavras de Rangel (1987: 66):

> *... alunos que aprendem a fazer sem a necessária compreensão do que realizam, facilmente esquecem a aprendizagem quando a ação deixa de ser solicitada. Só se "sabe fazer" enquanto se está continuamente fazendo, pois não há tomada de consciência sobre o que se execu-*

> *ta. Se o exercício é interrompido a aprendizagem é esquecida...*

O fazer empirista é insuficiente, portanto, para proporcionar a aprendizagem (s. lat.).

Segundo Becker:

> *Se o empirismo associacionista (teorias E - R) que atribui todas as aquisições do sujeito à aprendizagem str. s. ou experiência física, a partir de uma hipotética* ***tabula rasa****, é capaz de dar certa explicação do desenvolvimento - o que o faz por associação entre, de certa forma, dois mundos paralelos, o mundo do estímulo (meio, objeto) e o mundo da resposta (sujeito), já que não admite a interação radical entre sujeito e objeto - mostra-se, no entanto, incapaz de explicar o conhecimento lógico-matemático* (apud Moreira et alii, 1987).

E acrescenta:

> *A aprendizagem, segundo Piaget, não se esgota no conceito de aprendizagem no sentido estrito (experiência física); é necessário alargar este conceito introduzindo o processo de equilibração ou condição prévia de toda a aprendizagem no sentido estrito, ou seja, a experiência lógico-matemática...* (p. 125).

Entendemos aprendizagem como a entende Piaget, ou seja, no sentido amplo, o que nos permite considerar que a aprendizagem matemática só é entendida como tal se proporcionar, de um lado, a compreensão dos conceitos matemáticos e, de outro, a construção de novas estruturas lógicas que, num contínuo processo (em espiral) possam proporcionar novas compreensões, novas estruturas e assim indefinidamente.

O ensino de Matemática "que se tem" não conduz a nenhum destes lados - nem à compreensão dos conceitos matemáticos próprios da disciplina, nem à construção de novas estruturas. Estas se constroem a partir das atividades do sujeito fora da escola, à medida que interage com o mundo em seu dia-a-dia.

A interpretação empirista que caracteriza este ensino justifica, a nosso ver, a não aprendizagem dos alunos em Matemática, uma vez que não corresponde a um "fazer" que constrói conhecimentos.

4.2 - A aprendizagem da Matemática

Para Piaget, as estruturas da inteligência correspondem às estruturas lógico-matemáticas do sujeito. Estas, por sua vez, são isomorfas às estruturas da Matemática (ver item 1.3,p. 22 e seguintes).

Aprender matemática é, pois, construir progressivamente as estruturas da inteligência. Este processo construtivo inicia com as primeiras interações do bebê com o meio e se prolonga até atingir o que Piaget considera o conhecimento "universal e necessário", ou seja, a Matemática e a Física (Chiarottino, 1988). Desde as suas primeiras ações, portanto, a criança está "aprendendo" Matemática, no sentido de que está construindo as suas estruturas de conhecimento. Desta forma, "assimilando" os eventos do mundo aos seus esquemas e "adaptando-se" a eles (acomodando-os), vai estruturando "conhecimentos" à medida que percorre o caminho (creodos) comum a todos os seres humanos na construção da sua inteligência. Caminho que inicia no período sensório-motor e estende-se ao formal, cujo exemplo máximo Piaget considera a Lógica e a Matemática. Chiarottino refere-se a uma "linha evolutiva" na capacidade de conhecer:

> *... uma "linha evolutiva" no que diz respeito à capacidade de conhecer e que parte de trocas concretas entre organismo e meio para culminar com trocas simbólicas a nível do pensamento formal (ou seja, a nível do estabelecimento de relações entre relações), cujo exemplo máximo estaria na Lógica e na Matemática...* (p. 35).

Ao estabelecer este "creodos" Piaget considera o sujeito epistêmico universal, ou seja, o sujeito do conhecimento e não o sujeito psicológico ou dos indivíduos concretos. Podemos dizer, então, que todo o ser humano normal e em condições normais de interação com o meio possui "possibilidades genéticas" de atingir o período formal e, conseqüentemente, de atingir o raciocínio hipotético-dedutivo, característico da ciência matemática.

Por outro lado, as estruturas lógico-matemáticas resultam do funcionamento cerebral (sem, no entanto, estarem escritas antecipadamente neste funcionamento) desde que este é utilizado na solução de problemas efetivos. São, portanto, estruturas que:

> *prolongam muito mais estritamente do que parece o funcionamento organizador geral comum a todas as estruturas vivas, simplesmente pelo fato deste funcionamento estar presente na ação e no sistema nervoso, assim como em qualquer outra organização, e pelo fato de a abstração reflexiva não ter começo absoluto e remontar às "reconstruções convergentes com adiantamentos", comuns a todas as construções organizadas* (Piaget, 1973:375).

Assim, todos os seres humanos possuem as condições necessárias ao aprendizado da Matemática, uma vez que, em condições normais, elaboram e utilizam a todo o momento (em que interagem com o meio físico ou social) estruturas lógico-matemáticas espontâneas da inteligência. A Piaget parece paradoxal, diante disto, o fato de determinados alunos saírem-se bem em outras disciplinas e nas atividades do dia-a-dia e fracassarem na Matemática da escola. Segundo ele. as matemáticas

> *... constituem um prolongamento direto da própria lógica, e a tal ponto que atualmente é impossível traçar uma fronteira estável entre os dois campos (e isto qualquer que seja a interpretação dada a esta relação: identidade, construção progressiva, etc.)* (1976: 51).

Isto posto, aliado às relações da Matemática com as estruturas operatórias fundamentais do pensamento (ver cap.1), é, para Piaget

> *... difícil pensar que pessoas bem dotadas na elaboração e na utilização de estruturas lógico-matemáticas espontâneas da inteligência sejam carentes de qualquer vantagem na compreensão de um ensino que incide exclusivamente sobre o que se pode tirar de tais estruturas* (ibidem).

A seu ver, um revés na Matemática significaria uma deficiência nos próprios mecanismos do raciocínio, o que torna necessário verificar, antes de emitir tal julgamento sobre os alunos, se a responsabilidade não recai sobre os métodos de ensino (Piaget, 1980: 55).

É comum observarmos adultos não escolarizados que apresentam um excelente raciocínio matemático e até mesmo crianças que, fora do ambiente escolar, demonstram o mesmo. É o que ocorre com pedreiros, carpinteiros, mestres-de-obras, meninos trabalhadores... Pesquisadores pernambucanos, Carraher e Schliemann demonstraram-no em pesquisas realizadas que permitem concordar com a hipótese piagetiana sobre a inadequação dos métodos de ensino da Matemática.

É importante salientar que, embora o "creodos" apontado por Piaget diga respeito a um desenvolvimento natural e espontâneo das estruturas lógicas, não significa que a escola não desempenha um importante papel neste desenvolvimento. Ela é entendida por este autor como um meio formador necessário ao desenvolvimento das estruturas do conhecimento. A seu ver,a formação e a educação são direitos do ser humano que não se restringem à família, mas que se estendem à escola. Limitar esta última ao papel de transmitir conhecimentos empobrece o significado do direito à educação. Não somente restringe o alcance construtivo deste direito, mas também separa a escola da vida.

> *A educação é, por conseguinte, não apenas uma formação, mas uma condição formadora necessária ao próprio desenvolvimento natural. Proclamar que toda pessoa tem direito à educação não é pois unicamente sugerir, (...) que todo o indivíduo (...) possui (...) o direito de receber da sociedade a iniciação às tradições culturais e morais; é, pelo contrário e muito mais profundamente, afirmar que o indivíduo não poderia adquirir suas estruturas mentais sem uma contribuição exterior, a exigir um certo meio social de formação, e que em todos os níveis (desde os mais elementares até os mais altos) o fator social ou educativo constitui uma condição do desenvolvimento* (ibidem, p. 33).

A escola tradicional, no entanto, nega, através dos seus métodos de ensino, o que a vida oferece com abundância: a possibilidade de interação com o meio físico e social, uma vez que restringe a ação do aluno - fundamental no processo construtivo do conhecimento. Limitando-se a "transmitir conhecimentos" (apoiada na falsa concepção de que para ensinar Matemática basta o conhecimento da mesma) ignora a construção psicológica das noções matemáticas no pensamento do aluno. Impõe a este um "fazer" (uma "ginástica intelectual" - Piaget, 1980: 53) que, a seu ver, conduz à aprendizagem.

É assim que muitas crianças adquirem fora da escola, nas interações com o meio físico e social, nos problemas que vivencia no dia-a-dia, as condições necessárias ao aprendizado da Matemática. Em outras palavras, é assim que as crianças constroem as estruturas que lhes permitem aprender matemática. Estas são tidas como "inteligentes", como "experts", enfim, como "dotadas" de um dom especial que lhes permite aprender matemática.

Crianças privadas destas interações e destas vivências, que lhes possibilitem agir na busca de soluções para pequenos problemas, chegam à escola muitas vezes com atrasos em seu desenvolvimento cognitivo (ver pesquisas Chiarottino, 1984), que não lhes permitem "aprender". São considerados como alunos "fracos", com dificuldades de "raciocínio", incapazes para a Matemática.

Estas dificuldades de raciocínio são vistas pelo professor como uma inaptidão para a aprendizagem, quando, na verdade, denunciam que os métodos de ensino e o conteúdo que está sendo ensinado não são compatíveis com o período do desenvolvimento cognitivo em que se encontram os alunos.

Na teoria piagetiana encontramos referências que demonstram a submissão do processo de aprendizagem ao processo de desenvolvimento : *este é a condição de possibilidade daquele, por isto ambos podem ser considerados como constituindo um processo de aprendizagem no sentido amplo* (Becker, 1983: 106).

Segundo Piaget (1983: 116), a aprendizagem é *função dos instrumentos lógicos à disposição do indivíduo.* É assim que se pode dizer que, se a criança aprende, o faz porque tem condições para aprender. Caso não as tiver, não adianta sequer apelar para uma seqüência de aprendizagens (contingências de reforço, por exemplo) para que aprenda (Becker, 1983), como faz a escola, através das "aulas de reforço" ou de recuperação. Estas geralmente consistem em "mais exercícios", "mais explicações", enfim, em uma "repetição" do que já foi "feito" e "visto" na aula normal. Novamente se torna explícita a concepção behaviorista da aprendizagem, para a qual o exercício e o "treino" constituem-se na forma de aprender.

O período em que a criança ingressa na escola e freqüenta as primeiras séries do 1º grau, corresponde ao período de transição entre o "fazer e o compreender". Corresponde ao período em que as ações da criança, coordenando-se progressivamente, tornam-se operações, isto é, totalidades conceituais. Trata-se, portanto, de um período em que várias transformações se operam no pensamento da criança, as quais conduzem à compreensão dos conceitos matemáticos. Como vimos, o ensino de matemática, carregado de "empirismos", não considera estas transformações, o que determina, entre outros fatores, a não aprendizagem dos alunos. OK

Se o que se quer é uma educação matemática construtivista, torna-se necessário adequar os métodos de ensino a estas transformações e aos instrumentos lógicos à disposição do aluno. Antes, porém, é preciso torná-los claros a professores e educadores matemáticos (ver 1.3).

A aprendizagem, segundo Piaget, *só pode ser entendida como fundamentalmente um processo de progressivas tomadas de consciência mediante abstrações reflexivas* (In: Becker, 1983: 123). Através dele o "fazer" sensório-motor é reconstruído ao nível da representação e posteriormente estruturado pela capacidade operatória, permitindo a compreensão. OK

Inicialmente, as ações do sujeito são materiais e autônomas em relação à conceituação, mas já constituem, através de seus "esquemas", em um "saber fazer" elaborado, uma vez que conduzem às estruturas operatórias fundamentais.

A tomada de consciência dá-se dos objetivos e resultados da ação (periferia - P), interiorizando-se progressivamente, para as regiões centrais da ação (P --> C) e exteriorizando-se em direção às regiões centrais dos objetos (P --> C'). O primeiro conduz à construção das estruturas lógico-matemáticas enquanto o segundo conduz às explicações físicas ou causalidade, sendo que o progresso de um acarreta um progresso no outro.

No nível das ações materiais, o processo de interiorização conduz da periferia a assimilações recíprocas entre os esquemas e as coordenações cada vez mais centrais (enquanto vizinhas das coordenações gerais de fonte orgânica). Estas levam à construção de uma espécie de lógica dos esquemas, anterior à linguagem e ao pensamento, em cujo seio já se encontram em atuação os grandes tipos de conexão que são as relações de ordem, os encaixes de esquemas, as correspondências, as intersecções, uma certa transitividade, a associatividade dos monóides, etc., enfim, os principais ingredientes das futuras estruturas operatórias. O processo de exteriorização, por sua vez, caracteriza-se por acomodações sempre maiores dos esquemas de assimilação aos objetos, possibilitando a construção de condutas instrumentais de estruturas físicas espaço-temporais (o grupo prático dos deslocamentos) e de uma causalidade objetivada e espacializada (depois das formas puramente fenomenistas das origens em P) (Piaget, 1977).

Os progressos em direção a C e a C' não são isolados, mas solidários entre si:

- o poder acomodador dos esquemas segue uma "norma de acomodação" que, por sua vez, depende das coordenações entre os esquemas: quanto mais um esquema comporta ligações com os outros, mais flexível ele se torna em suas aplicações aos objetos; inversamente, quanto mais ele multiplica suas acomodações, mais essas variações favorecem assimilações recíprocas;

- as estruras espaço-temporais de grupo, a permanência do objeto, a espacialização da causalidade, etc. são o resultado da lógica dos esquemas; mas nesses casos atribuídas aos objetos, da mesma forma que os problemas cinemáticos e dinâmicos, impostos pelo sujeito pela experiência dos objetos, constituem incitações fecundas na construção dessa lógica das ações (Piaget, 1977).

As ações materiais interiorizam-se progressivamente, por meio de representações semiotizadas, como a linguagem e as imagens mentais, ou seja, por meio de um processo geral de tomada de consciência. Este, desde o início, e na medida em que ocorrem os progressos da própria ação, se polariza em função das abstrações empíricas e reflexivas.

A abstração empírica fornece uma conceituação "descritiva" dos dados da observação constatados nas características materiais da ação. Estes dados são "ligados" e interpretados, no nível do conceito, pelas abstrações refletidoras, que extraem das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais. Desta forma, a conceituação se torna operatória. Há que ressalvar, porém, que, embora ela se torne capaz de engendrar raciocínios e estruturações (seriações, classificações, número, etc.), de forma operatória, as estruturas subjacentes que permitem essas aplicações permanecem inconscientes, bem como o mecanismo da abstração refletidora.

Quanto ao movimento de exteriorização (que conduz às explicações físicas ou à causalidade), de um lado, a abstração empírica, a partir dos objetos, fornece a representação de seus dados de observação; de outro, a abstração refletidora (que é responsável pelas estruturações de formas operatórias) permite uma interpretação dedutiva dos acontecimentos em direção dos objetos. Daí decorre a formação das explicações causais por atribuição das operações aos próprios objetos, embora permaneçam inconscientes, do ponto de vista do próprio sujeito assim como o são as estruturas operatórias como tais em suas inferências lógico-matemáticas (Piaget, 1977).

Nesta fase o sujeito realiza operações simultaneamente idênticas, reversíveis e compensatórias possíveis mediante a ação física, o que lhe confere a possibilidade de realizar raciocínios "concretos", estruturados logicamente pela "estrutura de agrupamento".

> *O agrupamento explica a primeira forma de equilíbrio estável atingido pelo sistema de regulações, equilíbrio tornado possível pela consecução da reversibilidade completa. Realiza-se uma coordenação geral das ações precedentes - agora reversíveis, portanto transformadas em operações - em estruturas definidas, como classificações, seriações, correspondências, etc. que se farão presentes não só neste estágio das operações concretas, mas em toda a vida do indivíduo* (Becker, 1983: 141).

Estas estruturas tenderão a formar sistemas mais complexos. É o que ocorre por volta de 11-12 anos, quando a tomada de consciência começa a tornar-se também uma reflexão do pensamento sobre si mesmo, por intermédio das abstrações refletidas (produtos conscientes das abstrações refletidoras).

Em função do movimento de interiorização (em direção aos domínios lógico-matemáticos), o sujeito torna-se capaz de teoria, da qual abusam, segundo Piaget, os responsáveis pelos programas de ensino, e não mais unicamente de reciocínios concretos. Isto se deve ao novo poder, adquirido pelo sujeito, de elaborar operações sobre operações (conjunto das partes e combinatório, grupo INRC, etc.). Em conseqüência, no que se refere ao movimento de exteriorização, o sujeito torna-se apto a fazer variar os fatores em suas experimentações e a considerar os diversos modelos possíveis para a explicação de um fenômeno, como a possibilidade de submetê-lo ao controle dos fatos.

Neste último nível, a solidariedade entre os movimentos de interiorização (lógico-matemática) e exteriorização (físico ou causal) torna-se maior, em relação aos precedentes, devido aos progressos da abstração e devido ao paradoxo *segundo o qual a adaptação aos dados concretos da experiência depende do caráter abstrato dos quadros noéticos que permitem analisá-la e mesmo compreendê-la* (Piaget, 1977: 211).

Em síntese, inicialmente a ação se concretiza pelo funcionamento dos esquemas de assimilação, isolados, não indo além de acomodações momentâneas no esforço de ligá-los aos objetos. Trata-se de uma ação material sem conceituação, mas de uma ação que obtém êxito, autônoma em relação a esta última. O êxito prático que caracteriza as ações da criança constitui-se no "fazer" que consiste em utilizar as coisas com sucesso.

Progressivamente, a coordenação das ações supera esta ação inicial, primeiramente por assimilações recíprocas entre os esquemas e a seguir por progressivas tomadas de consciência, transformando a ação em conceituação. Em outras palavras, as coordenações das ações inicialmente inconscientes são transportadas para um novo nível: o da conceituação, que tira seus elementos da ação, em virtude de suas tomadas de consciência, mas a ação é enriquecida com tudo o que o conceito comporta de novo em relação a ela.

Quanto à conceituação:

> ... *ela está longe de constituir apenas uma simples leitura: ela é uma* ***reconstrução****, e que introduz características novas sob a forma de ligações lógicas, com estabelecimento de conexão entre a compreensão e as extensões, etc.* (Piaget, 1977: 208).

As coordenações construídas pela ação *estão longe de ser radicalmente novas*, mas são extraídas por abstração refletidora de mecanismos anteriores, como ocorre em todo o processo regulado. Da mesma forma, a própria ação (ou a ação primeira) não é consciente, por isso não se pode dizer que provém da tomada de consciência de seu "substrato neurológico"; pode-se afirmar, isso sim, que ela é *uma espécie de tomada de posse progressiva, com reconstrução e enriquecimento, análogo ao que é a conceituação em relação a esta ação* (Piaget, apud Becker, 1983, p. 131).

Finalmente, a conceituação (como ação interiorizada) caminha em direção a formas cada vez mais gerais e independentes em relação ao seu conteúdo, o que caracteriza as estruturas operatórias de conjunto com suas leis de composição (transitividade, etc.). São as operações formais, implicativas, obtidas mediante abstrações reflexivas. *São operações já existentes sobre as quais se realizam novas operações, estas por sua vez abstraídas daquelas; trata-se de operações sobre operações, ou operações de segunda potência* (ibidem). As operações formais, da mesma forma que a conceituação, agem retroativamente sobre as construções de níveis anteriores.

Nesta última fase, a conceituação, que aos poucos ia-se impondo, ultrapassa a ação, tornando-se totalmente independente. O "fazer" conduz, assim, ao "compreender".

O mundo da Ciência Matemática é o mundo do "compreender". É da coordenação das ações do sujeito que a Matemática extrai sua substância, através de sucessivas tomadas de consciência.

4.3 - Os problemas da Escola X os problemas da Vida

Duas atitudes apresentadas pelos alunos diante da necessidade de resolver problemas matemáticos tornaram-se bastante significativas no decorrer de nossa pesquisa:

- recorriam, inicialmente, a "vícios" que adquiriram nas séries anteriores (buscar "modelos", esperar a correção do professor, "testar" várias possibilidades de resolução, etc.) e que normalmente não lhes permitiam chegar à resolução;

- diante de um contexto significativo, quando desafiados a pensar, encontravam soluções criativas.

O aluno, ao ler o problema que o professor "passa no quadro", não o identifica como um problema seu, ou seja, como uma situação que o desafia, mas como um problema do professor. Apesar disso, o problema passa a ser seu, uma vez que o sistema escolar exige que o aluno o resolva. Diante do problema já "copiado", não sabe o que fazer (ou melhor: que conta fazer). Sabe, porém, que precisa "agir" para chegar à solução. Como este "agir" não está claro para ele, uma vez que não relaciona à situação-problema as contas necessárias à sua resolução, a saída é buscar "modelos" ou esperar "a profe corrigir no quadro", ou, ainda, ir tentando resolver por eliminatória:

> - Tá certo, profe? Não? Então é de dividir... E agora, tá certo? Não? Então tem que ser de vezes...

E assim, sucessivamente, até encontrar a conta "certa".

Na verdade, o aluno busca uma ação apropriada para resolver o problema, mas a forma como busca denuncia que não se sente capaz de encontrar a solução através do seu raciocínio.

O mesmo não ocorre em situações de vida. Num contexto significativo, como, por exemplo, a ocasião em que vai até o bar comprar bolitas, calcula "de cabeça" os gastos e até mesmo o troco, realizando as mesmas operações que não consegue realizar na aula. O mesmo não ocorria, também, quando os problemas matemáticos se referiam a situações significativas para o aluno no momento em que eram trabalhados (como, por exemplo, "o caso dos contracheques").

Verifica-se, portanto, na escola, um bloqueio no raciocínio dos alunos. Na vida, verifica-se o quanto estes raciocínios são criativos. Na escola, os professores acusam seus alunos de não possuírem raciocínio lógico. Na vida, estes alunos são "experts" em resolver problemas, principalmente quando dizem respeito ao trabalho.

Numa situação de pesquisa Carraher e Schliemann (1988) realizaram com crianças trabalhadoras na feira e freqüentadoras da escola dois tipos de testes: Informal e Formal.

O teste informal consistia em colocar questões às crianças em seu contexto natural de trabalho através da interação vendedor-freguês. O freguês examinador não apenas comprava, mas questionava o vendedor quanto ao preço, ao troco e ao processo (raciocínio) realizado para a obtenção do resultado.

O teste formal consistia em colocar os mesmos problemas que haviam resolvido informalmente, às mesmas crianças, mas sob a forma de operações aritméticas a serem resolvidas sem qualquer contexto, representadas no papel ("contas") e sob a forma de problemas do tipo escolar: *Maria comprou... bananas, cada banana custava... quanto dinheiro ela gastou?*

Em ambos os casos utilizavam-se os mesmos números com os quais as crianças haviam operado na situação informal. O índice de acertos na resolução de problemas foi nitidamente superior em situações reais, e foi nitidamente inferior nas operações simples, até mesmo em relação aos problemas imagináveis.

Os dados obtidos, segundo os autores, confrontam a rotina habitual do ensino de Matemática: ensinar primeiro as contas para que depois os alunos saibam "aplicá-las aos problemas".

> ... *confrontam a noção implícita, mas tacitamente aceita na escola de que, em primeiro lugar devemos ensinar às crianças operações aritméticas isoladas de qualquer contexto, para depois apresentar essas mesmas operações no contexto de problemas* (Carraher e Schliemann,.. 1988: 34-5).

Ora, em situações reais as crianças resolviam os problemas através de cálculos diferentes dos tradicionais algoritmos ensinados na escola, e chegavam à solução correta. Já em situações formais, ao tentar usar os algoritmos aprendidos, erravam os mesmos cálculos.

Os algoritmos ensinados na escola para a realização das operações aritméticas, ao invés de auxiliarem na solução de problemas, constituíam-se e podem constituir-se, segundo os autores, num obstáculo para o raciocínio natural e espontâneo da criança. Por exemplo:

. No teste informal:

Freguês – Quanto é dois cocos?

MD – Oitenta.

Freguês – Tome uma nota de 200. Quanto vai ser meu troco?

MD – Cento e vinte.

. No teste formal:

Examinador – Faça esta conta agora: 200 - 80.

MD escreve:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -\ \underline{80} \\ 800 \end{array}$$

Examinador – Como é que você fez?

MD – Abaixa o zero aqui e aqui (mostra os zeros do resultado). Aqui dá 8.

Em nossa pesquisa muitas foram as situações em que os cálculos errados confundiam os alunos envolvidos com problemas de porcentagem ou juros:

- Como, profe?
- Tem que dar mais!
- É caro demais.
- Não tem lógica.

Ressalta-se o fato de que os problemas, nestas situações, eram significativos para os alunos.

É importante salientar que nem sempre os raciocínios realizados pelos alunos correspondem ao que corresponde aos algoritmos ensinados na escola. As crianças e adolescentes da pesquisa de Carraher e Schliemann, bem como a maioria dos educadores, psicólogos e alunos de pós-graduação, indagados pelos pesquisadores, não fazem os cálculos de acordo com os procedimentos aprendidos na escola. Por exemplo: o problema verbal 45 + 35. Algumas pessoas ao resolvê-lo somam 40 + 30 e depois adicionam 10 (5+5). Outras somam 5 a 45, obtendo 50, e depois somam 30. Raras vezes um indivíduo soma 5 + 5, faz o "vai um", soma 1 com o 4 e depois acrescenta o 3 (Carraher e Schliemann, 1988: 38).

A escola, no entanto, prioriza determinados algoritmos e "atrela" os alunos a eles, através de incansáveis "treinos", ao invés de aproveitar as diversas lógicas corretas na resolução de cálculos e os procedimentos naturais dos alunos, desafiando-os a "inventar" e a "criar" novas formas de resolução.

Os citados autores chamam a atenção pra o fato de que, no modelo tradicional de ensino, efetuar uma operação (ou melhor: "fazer" uma conta) é considerado mais fácil do que resolver um problema com a mesma operação. Constataram, diante da facilidade com que as crianças resolviam os problemas em contextos naturais, que, pelo contrário:

> *- a análise lógica implicada na solução de um problema facilita a realização da operação, por inseri-la num sistema de significados bem compreendidos, ao invés de constituir uma habilidade isolada que é executada numa seqüência de passos, os quais levariam à solução* (ibidem, p. 35).

Em situações em que se apresentam quantidades dentro de uma interação significativa, ao invés de utilizar "as contas da escola", as crianças resolvem problemas "manipulando" quantidades oralmente, através do agrupamento e da decomposição. Ex.:

Lúcia. Situação: problema verbal
Operação: 200 - 35 =

- Se fosse trinta, o resultado era setenta. Mas é trinta e cinco. Então é sessenta e cinco; cento e sessenta e cinco. (ibidem, p. 59).

Já em situações de computação de exercícios de cálculo, tradicionais na sala de aula em que apenas números são apresentados, as crianças pesquisadas optavam por resolver por escrito em um primeiro momento. Ex.:

Eva. Situação: exercício de computação
computação: $100 \div 4 =$

Após tentar, sem sucesso, resolver o problema no papel, afirma que é impossível. Ela tentara primeiramente dividir 1 por 4, o que não era possível, depois 0 por 4 e finalmente desistiu. O examinador pediu então uma justificativa.

> - Na minha cabeça eu posso fazer. Cem divido por 4 é vinte e cinco. Cem dividido por dois é cinquenta. Depois divide por 2 de novo, dá vinte e cinco.
> (ibidem, p. 65)

Os autores consideram que os exercícios de cálculos em que crianças devam "treinar" algoritmos fazem com que elas focalizem sua atenção nos símbolos escritos, *perdendo, assim, tanto o significado das transações que estão sendo quantificadas, como o significado dos algoritmos dentro do sistema de quantificação* (ibidem). Esta perda de significado parece, a seu ver, explicar a facilidade com que a criança aceita resultados absurdos, *como o resto de uma subtração maior que o minuendo, resposta que é prontamente rejeitada quando a criança considera o significado implícito na computação* (ibidem).

Este foi um dos aspectos mais evidentes em nossa pesquisa. Os alunos constatavam o erro quando inseríamos o resultado em uma situação significativa ou quando "lembrávamos" a eles a situação-problema. A preocupação em relação às "contas" a fazer era tão grande que o problema era esquecido (ver 3.1).

Exemplos:

Ex.1 - Problema: *Ana foi pagar uma conta de Cr$.. 896,00 com atraso de 5 dias. A loja cobrou um juro de 1 % ao dia. Quanto Ana pagou pela conta?*

ADE. - Fez $896 \times 5\ \% = 44{,}80$
$44{,}80 \div 5 = 8{,}96$

Profª - Qual foi o resultado do problema?

ADE. - 44,80.

Profª - Entao a Ana pagou, com a multa, 44,80 pela conta?

ADE. - Não, não pode... Deixa eu ver. ... (leu o problema) Tem erro, profe. É muito pouco...

Ex.2 - Operação: 10.000 - 1.264 =

MAR. -
$$\begin{array}{r} 10.000 \\ 1.264 \\ \hline 11.736 \end{array}$$

Profª - Qual é o resultado da operação, MAR ?

MAR. - 11.736.

Profª - Ah! Entao se tu tivesses dez mil cruzeiros, gastasses mil duzentos e pouco na farmácia, sobrariam onze mil, setecentos e pouco ?

MAR. - Tá louco, profe...

Os estudos psicológicos piagetianos relativos às noções lógicas e matemáticas revelam, segundo o autor, que há um desenvolvimento real e espontâneo dessas noções, *em parte independente não do intercâmbio com o meio social (estimulante necessário para qualquer forma de pensamento) mas dos conhecimentos propriamente ditos, adquiridos na família ou na escola* (1980: 58). É o caso, por exemplo, da noção da conservação da quantidade (adquirida espontaneamente por volta de 7-8 anos), do peso (8-10 anos), do volume físico (11-12 anos) e das noções geométricas elementares. Trata-se de uma elaboração intelectual espontânea, rica em transformações, que evidencia uma lei de evolução muito clara: *todas as noções de Matemática principiam por uma construção qualitativa antes de adquirirem caráter métrico* (ibidem, p. 59).

No ensino de Matemática "que se tem" ocorre o inverso: todas as noções principiam pelas considerações métricas ou numéricas. Esta inadequação entre a construção matemática espontânea da criança e os métodos de ensino esclarecem algumas atitudes dos alunos frente aos "problemas".

Piaget faz algumas considerações:

- alunos passivos, bloqueados frente a problemas abstratos (desvinculados de uma necessidade real), persuadidos da sua deficiência, reputados como "fracos" e que renunciam de antemão à busca de soluções, dando-se por vencidos, assumem uma atitude totalmente diferente quando o problema emana de uma situação concreta e que tem a ver com outros interesses: resolvem os problemas em função de sua inteligência geral. Alunos medíocres nas aulas de cálculo são capazes de resolver problemas matemáticos sem se aperceber que se trata de Matemática. É o caso de experiências concretas onde intervenham questões de proporção, regras e velocidades, por exemplo. Nestas situações evidenciam um espírito compreensivo e mesmo inventivo (1980);

- alunos que, diante de um problema, tentam todos os tipos de cálculos, tateando na aplicação das diversas operações de que têm conhecimento - o que resulta no bloqueio do seu raciocínio, livres da preocupação de calcular - comprazem-se em construir ativamente todas as correspondências lógicas em jogo, chegando até à elaboração de mecanismos operatórios delicados e precisos (ibidem).

Estas atitudes de passividade, insegurança ou dificuldade dos alunos diante dos problemas, decorrem, segundo Piaget, da insuficiente dissociação entre as questões de lógica e as considerações numéricas ou métricas. Por exemplo: num problema de velocidade o aluno precisa simultaneamente desenvolver um raciocínio voltado para os espaços percorridos e o tempo de duração empregado e efetua um cálculo com base nos números que exprimem estas quantidades. Se a estrutura lógica do problema não estiver solidamente assegurada, as estruturas numéricas permanecem destituídas de significado e podem até obscurecer o sistema das relações em jogo (ibidem).

No ensino "que se tem" não há preocupação com as estruturas lógicas, pelo contrário, priorizam-se as considerações numéricas, como se a lógica já "existisse" no pensamento da criança. No entanto, diz Piaget, a lógica se constrói passo a passo, em decorrência das atividades concretas da criança em seu meio físico e social.

É em função desta lógica, deste desenvolvimento real e espontâneo que a criança resolve "de cabeça" os problemas do seu dia-a-dia, criando novos processos de cálculo e não se deixando enganar nos resultados. O fato de usar, nestas situações, raciocínios próprios e não os da escola demonstra que é capaz de aprender Matemática, mesmo sendo um "péssimo" aluno na Matemática da escola.

> *Todo o aluno normal é capaz de um bom raciocínio matemático desde que se apele para as suas atividades concretas e se consiga assim remover (...) um sentimento de inferioridade (...) nessa matéria. Toda a diferença está em que, na maioria das aulas da Matemática, o aluno é convidado a receber de fora uma disciplina intelectual já inteiramente organizada, que ele compreende ou não, ao passo que em um contexto de atividade autônoma ele é solicitado a descobrir por si mesmo as correlações e as noções, e assim recriá-las...* (Piaget, 1980: 57).

OK

O que ocorre normalmente é que os alunos não conseguem "assimilar" a Matemática da escola às suas estruturas. Ensina-se Matemática através de uma linguagem abstrata, axiomatizada, carregada de simbolismos inacessíveis às estruturas de "agrupamento" características da criança, nos primeiros anos escolares (operatório concreto).

As crianças não utilizam a Matemática da escola em situações reais de vida, por não encontrarem nelas alguma significação. Ora, a significação é o resultado da possibilidade de assimilação. Piaget chega a dizer que a assimilação consiste em conferir significação às coisas e aos fatos.

> *... todo o conhecimento contém sempre e necessariamente um fator fundamental de assimilação, o único a conferir* ***significação*** *ao que é percebido ou concebido* (1973: 14 - grifo do autor).

OK

Como não conseguem "assimilar" a Matemática ensinada pelo professor, esta não possui significação para eles. Assim, diante de situações-problema lançam mão dos recursos de que dispõem: no caso, suas estruturas lógico-matemáticas, ao invés das "contas" aprendidas na aula.

Atribuir significado, para Piaget, é inserir algo em uma estrutura, é poder encaixar alguma coisa a um todo organizado

(Chiarottino, 1988: 25). Portanto, a Matemática da escola terá sentido para o aluno quando houver uma adequação dos métodos de ensino e dos conteúdos ao desenvolvimento cognitivo do aluno.

Piaget chama a atenção para o fato de que *são as lições que escapam à compreensão e não a matéria* (1980: 14). De acordo com sua hipótese, a diferenciação existente entre os "bons alunos" em Matemática decorre principalmente da capacidade de estes alunos se adaptarem ao tipo de ensino (formalizado) que lhes é fornecido. Quanto aos "maus alunos" em Matemática (muitas vezes bem sucedidos em outras), a sua hipótese é de que estão, na realidade, aptos a dominar os assuntos que parecem não compreender, contanto que estes lhes cheguem através de outros caminhos.

Adequar os métodos de ensinar, consistiria, basicamente, em *falar à criança na sua linguagem antes de lhe impor uma outra já pronta e demais abstrata, e sobretudo levar a criança a reinventar aquilo de que é capaz, ao invés de limitar-se a ouvir e repetir* (Piaget, 1980: 17). OK

O objeto do ensino da Matemática, diz Piaget, será sempre alcançar o rigor lógico e a compreensão do formalismo que lhe é próprio. Porém, chama a atenção para o fato de que

> *... nada prova que, colocando o formalismo no começo o encontraremos, no final, sob suas formas autênticas; e os estragos de um pseudoformalismo ou de um formalismo puramente verbal, demasiadamente precoce, mostram, ao contrário, os perigos de um método que ignora as leis do desenvolvimento mental* (Piaget, 1968: 27). OK

É o que ocorre no atual ensino da Matemática. Coloca-se o formalismo no início do processo de aprendizagem, quando, na verdade, deveria constituir o ponto de chegada. O resultado desta inversão é evidente em nossa pesquisa: a não compreensão do formalismo (apenas o uso mecânico) e a não compreensão de conceitos matemáticos elementares.

Segundo Becker (1983), *cabe ao educador buscar com seus educandos o "rigor lógico" ao mesmo tempo que a "compreensão de um formalismo suficiente" através dos caminhos indicados pela psicologia: os caminhos da ação e da operação.* Foi o que procuramos fazer em nossa prática pedagógica.

Procuramos fazer dos problemas matemáticos, trabalhados em sala de aula, uma ocasião em que os alunos tivessem que agir de alguma forma para encontrar a solução, sem recorrer a modelos, mas recorrendo à sua capacidade de raciocinar. Em outras palavras, procuramos fazer com que o problema significasse realmente um problema para o aluno.

Mas o que é um problema?

Gazire* considera que um indivíduo encara uma situação como sendo um "problema" quando:

- compreende a situação e não encontra uma solução óbvia, imediata;
- reconhece que a situação exige uma ação;
- quer e precisa agir sobre a ação.

Apresenta como exemplo a troca de um pneu. Geralmente trocar um pneu de um carro não é um problema. Isto porque o procedimento para trocar o pneu é conhecido e as ferramentas adequadas para realizar a troca estão disponíveis. Mas se o pneu estoura e não se tem no momento ferramentas adequadas para trocá-lo, aí a situação se torna um problema. É justamente a necessidade, a busca de solução, a urgência em transpor um obstáculo que leva o indivíduo a inventar, a criar estratégias.

Os problemas normalmente trabalhados nas aulas de Matemática não correspondem a um problema, segundo esta definição. Na classificação de Lester Jr. e Charles (1982) e de Dante (... 1989), correspondem ao que denominam exercícios de reconhecimento, exercícios de algoritmos, problemas-tipo, problemas-tipo simples e problemas-tipo complexo.

a) Exercícios de reconhecimento

Seu objetivo é fazer com que o aluno lembre, reconheça ou identifique uma definição ou uma propriedade, etc. Exemplos:

---

* Apontamentos referentes à disciplina "Resolução de Problemas" da "Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática de 1ª a 4ª série do 1º Grau", cursada por nós no período de julho de 1988 a janeiro de 1989 na FAFIG - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, PR.

1) *Uma centena equivale a quantas dezenas?*

2) *Circule os números ímpares: 2, 8, 13, 16, 17, 34, 45.*

3) *Qual é o antecessor de 18?*

b) **Exercícios de algoritmos**

Seu objetivo é treinar a habilidade de executar um algoritmo e "reforçar" conhecimentos anteriores. Exemplos:

1) *Calcule a equação:* $2\ (x + 8) = 4x + 16$

2) *Arme e efetue:* $102{,}6 - 18{,}92 =$

3) *Calcule o valor da expressão:* $[2^2 \cdot (3 + 8) - (\frac{1}{3})^2\ ] =$

c) **Problemas-tipo**

Os problemas-tipo são os tradicionais problemas dos livros didáticos. Sua resolução envolve apenas a aplicação direta ou indireta de algoritmos já aprendidos e não exige qualquer estratégia. Basta transformar a linguagem usual em linguagem matemática. Segundo Dante, o objetivo destes problemas é *recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações fundamentais, além de reforçar o vínculo existente entre essas operações e seus empregos nas situações do dia-a-dia* (Dante, 1989: 17). Chama a atenção para o fato de que, de um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam. Exemplos:

- *Quero repartir 260 laranjas entre 15 crianças. Quantas receberá cada criança?*

d) **Problemas-tipo simples**

Envolvem apenas um algoritmo. Exemplo:

- *Luís tem 7 anos a mais que o tripo da idade de Felipe. Os dois juntos têm 55 anos. Qual a idade de cada um?*

e) **Problemas-tipo complexo**

Envolvem dois ou mais algoritmos.

Lester Jr. e Charles (1982) chamam a atenção para o fato de que é necessário considerar o indivíduo para que se possa determinar se uma situação é ou não um problema, uma vez que o que não constitui problema para um pode constituir um problema para outro. Consideram difícil determinar se uma situação será um problema para um determinado grupo de alunos ou não e, por esta razão, orientam-se pela seguinte definição:

- Um problema é uma tarefa para a qual: a) o indivíduo que a enfrenta deseja ou necessita encontrar uma solução; b) o indivíduo não conhece de imediato um procedimento que lhe permitirá determinar completamente a solução; c) o indivíduo deve procurar uma maneira de resolver a situação.

Os tipos de problemas trabalhados em sala de aula não correspondem, também, a esta definição, uma vez que, na maioria das vezes o indivíduo não deseja encontrar a solução; apenas o faz por ser esta uma imposição da escola. Quanto às outras condições, pode-se dizer que são satisfeitas, embora se façam necessárias algumas ressalvas:

- o indivíduo não conhece de imediato o procedimento que lhe permitirá chegar à solução,não porque necessita construir um conhecimento novo (dado que isto nem sempre é necessário neste tipo de problemas), mas porque não houve "aprendizagem" dos conhecimentos que lhe permitiriam chegar à solução (entendida aqui como "associação" do conteúdo ao problema);

- o indivíduo procura uma maneira de resolver o problema não buscando compreender a situação e raciocinar sobre ela, mas recorrendo a "modelos" de problemas já resolvidos.

Na prática pedagógica que realizamos torna-se evidente que a atitude dos alunos frente aos problemas trabalhados em sala de aula se inverte, quando a prática empirista "que se tem" é substituída por uma prática construtivista. Nesta, o aluno é inserido num contexto problematizador onde terá que interagir com a situação-problema e os elementos que a envolvem. É solicitado a agir, tanto a nível de ações concretas, quanto a nível de ações mentais (operações); e sua ação não se restringe à sala de aula, mas se amplia à escola, à família, à comunidade,enfim, ao mundo-vida do aluno e às relações que nele se estabelecem: sociais, econômicas, políticas, culturais. O aluno passa a querer encontrar soluções para os problemas, uma vez que não são "problemas do professor", mas problemas seus, do seu grupo, da sua família, da sua comunidade... Não são problemas aos quais terá que aplicar as contas e as fórmulas que "aprendeu", mas problemas em torno dos quais terá que construir, inventar estratégias, descobrir "fórmulas" de resolução. Permite-se assim, ao aluno, que percorra o caminho ação - operação - compreensão - formalização, nas aulas de Matemática, que é o caminho que lhe permitirá construir, progressiva e simultaneamente, estruturas lógico-matemáticas e conhecimento matemático.

Nesta perspectiva poderíamos dizer que o aluno estaria diante de um problema, quando determinada situação não é passível de ser assimilada aos seus esquemas, provocando, assim, uma situação de desequilíbrio. As estruturas cognitivas do sujeito tendem a funcionar em equilíbrio, aumentando permanentemente seu grau de organização interna e adaptação ao meio. Isto faz com que, diante destes desequilíbrios, o organismo (estruturas cognitivas) se reorganize, acomodando-se às novas situações, ou, em outras palavras, construindo internamente novos esquemas de assimilação que lhe permitem novamente chegar ao equilíbrio. *O mecanismo é o de uma reequilibração por reconstrução, e em seguida de ultrapassamento (no sentido de* ***aufhebung****), graças a uma reorganização com novas combinações, mas cujos elementos são retirados do sistema anterior* (Chiarotino, 1988: 53). Piaget o denomina abstração reflexiva.

As abstrações reflexivas "constroem", assim, os esquemas ou as estruturas cognitivas necessárias à superação dos problemas.

Como vimos, este é o mesmo processo que permite ao aluno aprender. Podemos, portanto, dizer que o aluno aprende à medida que busca soluções aos problemas.

Isto sugere uma inversão na tradicional rotina da aula de Matemática: primeiro o conteúdo, depois os problemas, pondo por terra a crença de que a aprendizagem dos primeiros é pré-requisito à solução dos últimos.

Verificamos em nossa pesquisa que a "aplicação" do conteúdo dos problemas não garante a sua aprendizagem, além do que, da forma como é realizada (como uma nova alternativa para "fixar" o conteúdo, ou, mais especificamente, "treinar" algoritmos), facilita a mecanização dos processos e incentiva a passividade do aluno frente ao problema. A resolução do problema vai implicar sempre no algoritmo "ensinado" pelo professor anteriormente. Deixa, portanto, de ser um "problema" para o aluno, e passa a ser um novo tipo de "exercício".

Gazire, revendo a literatura existente em Educação Matemática, identifica três grandes perspectivas em Resolução de Problemas:

1) a resolução de problemas como forma de aplicar o conteúdo;

2) a resolução de problemas como um novo conteúdo;

3) a resolução de problemas como uma forma de aprender Matemática.

A primeira perspectiva caracteriza o ensino de Matemática "que se tem" e corresponde à abordagem dada aos problemas acima referida. A segunda perspectiva corresponde a uma "nova" disciplina no currículo, através da qual se ensinariam estratégias, técnicas e princípios gerais para resolver problemas. Fundamenta-se na crença de que, se o aluno for instruído nestes aspectos, que emergeriam da análise teórica do processo de pensamento e da observação comparativa de pessoas bem ou mal sucedidas na solução de problemas, o indivíduo teria mais facilidade em resolver problemas. Equipados com instruções para desenvolver estratégias de pensamento e para o uso de habilidades, ferramentas e heurísticas que conduziriam à solução do problema, os alunos adquiririam a "habilidade" de resolver problemas. A terceira corresponde à concepção construtivista de aprendizagem. Fundamenta-se na crença de que, se todo o conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem que corresponda a um problema que desafie o aluno a raciocinar, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser aprendido.

A abordagem dada aos problemas e aos conteúdos na prática pedagógica que realizamos corresponde a esta terceira perspectiva. Os conteúdos a serem "ensinados" foram determinados pela situação-problema. Diante do "problema" os alunos sentiam a necessidade de buscar na aprendizagem de novos conteúdos as possíveis soluções. Em outras palavras, os alunos sentiam necessidade de "assimilar" novos conhecimentos.

Os conteúdos matemáticos adquiriam significação para o aluno por serem "assimilados" às suas estruturas cognitivas e por adquirirem significado em contexto mais amplo, que é o seu mundo-vida e as relações que nele se estabelecem. Porém é preciso lembrar que é neste contexto que são criadas as necessidades de assimilação (inexistente na sala de aula tradicional), o que torna necessária a interação entre ambos - conteúdos matemáticos a serem "ensinados" x problemas relativos ao mundo-vida do aluno.

Esta forma de "ensinar" Matemática permite, também, buscar o *diálogo da educação como prática da liberdade* (Freire, 1988),uma vez que os problemas podem (e devem) ser buscados na relação dialógica educador-educando:

> *O que temos a fazer, na verdade, é propor ao povo,através de certas contradições básicas, sua situação existencial, concreta, presente, como* ***problema*** *que, por sua vez, o desafia, e assim lhe exige resposta, não só no nível intelectual, mas no nível da ação* (Freire,1988: 86 - grifo nosso).

Os conteúdos a serem aprendidos não seriam impostos ou dados *sem que pouco ou nada tenham a ver com seus anseios, com suas dúvidas, com suas esperanças, com seus temores...*, mas seriam buscados juntamente; *é na realidade mediatizadora, na consciência que dela tenhamos, educadores e povo, que iremos buscar o conteúdo programático da educação.* - (ibidem, p. 87)

Não há dúvidas de que esta abordagem "quebra" as estruturas da educação bancária (e do ensino de Matemática "que se tem"), pois os conteúdos mínimos preestabelecidos por escolas e por algumas Delegacias de Educação (que, embora não possuam "listagens" oficiais, recomendam uma certa uniformidade nos conteúdos) e a seqüência apresentada pelos livros didáticos já não mais determina o quê ensinar. Causa insegurança aos professores, pois, habituados ao seu papel de "transmissores de conhecimentos" e despreparados, didática e pedagogicamente, a assumirem um novo papel, tornar-se educador-problematizador constitui-se em um grande desafio.

> *Ora, nem os professores estão suficientemente preparados para mudarem sua posição em relação ao ensino, nem a sociedade o quer, enquanto expressão do poder dominante (...) Trabalhar com situações reais é instalar o desequilíbrio, é tornar necessária a discussão, a revisão, o exame mais atento das relações que as compõem, é alterar compreensões e posições* (Ott, 1989: 32).

Se os "desequilíbrios" são fundamentais ao desenvolvimento do aluno, também o são a nível de construção de uma educação libertadora.

Perdem o sentido, nesta perspectiva, os problemas-tipo e exercícios de reconhecimento e fixação "passados pelo professor" ou listados nos livros didáticos. Adquirem sentido problemas que dizem respeito aos tantos problemas que a população enfrenta em seu dia-a-dia: custo de vida, habitação, transporte, saneamento, saúde, etc., e há muita "matemática" envolvida neles. O "problema" é, para a Educação Matemática "que se quer", que até mesmo os professores de Matemática não conseguem "vê-la" uma vez que, para muitos, saber Matemática sempre foi entendido como saber "fazer" cálculos, equações, derivadas, integrais, etc. mecanicamente, até mesmo nos cursos de Graduação.

Quanto à segunda perspectiva, a Resolução de Problemas como um novo conteúdo, gostaríamos de contribuir com algumas considerações.

Procuramos, na prática pedagógica que realizamos, "equipar" os alunos com algumas técnicas de resolução de problemas. Apresentamos "passos" que, segundo Polya (1957) e Dante (1989), auxiliariam no processo. São eles:

1º) Compreender o problema;

2º) Elaborar um plano;

3º) Executar o plano;

4º) Fazer o retrospecto ou verificação.

De início, a maior dificuldade encontrada pelos alunos estava em "elaborar um plano" de resolução, uma vez que não sabiam "que conta fazer". No entanto, como se tratava de situações significativas, empenhavam-se na busca da solução, mesmo que na verificação se deparassem com algum erro. A compreensão do problema, ou seja, o primeiro "passo", consistia na compreensão da situação-problema enquanto situação de vida possível, mas não envolvia a relação existente entre esta e o conhecimento matemático já adquirido. Esta relação somente foi sendo adquirida à medida que estes conhecimentos eram reconstruídos pelo aluno e à medida que eram desafiados a raciocinar. Por outro lado, percebemos que, para os alunos que não apresentavam maiores dificuldades na disciplina, mas que, pelo contrário, resolviam problemas com facilidade, estes "passos" tornavam-se desnecessários.

Estes dados confirmam o nosso pressuposto de que a aplicação de técnicas e estratégias não determina possibilidade de resolução de um problema matemático. O que permite a "compreensão" do problema e o estabelecimento de um plano de resolução é a presença de uma estrutura operatória, que confere significação ao problema e aos conceitos matemáticos que o envolvem. Esta é "construída", como vimos, a partir da tomada de consciência das ações do sujeito. Considerar que possa ser "adquirida" através do uso de determinadas estratégias, como sugere esta abordagem dada à Resolução de Problemas, significa desconsiderar a sua gênese, ou, em outras palavras, cair no empirismo.

4.4 - Os Conteúdos

Na prática pedagógica que realizamos foi necessário "reconstruir" os conteúdos matemáticos já trabalhados pelos alunos, uma vez que não houve aprendizagem. Isto nos leva a considerar a abordagem dada aos conteúdos matemáticos no ensino de Matemática "que se tem".

Nas entrevistas e observações que realizamos constatamos que o "conteúdo" matemático se constitui, neste ensino, em um fim em si mesmo. Isto se reflete em vários posicionamentos dos professores:

- a melhor escola é aquela que "dá" mais conteúdo;
- o aluno precisa "passar" todo o conteúdo da série para poder acompanhar a série seguinte;
- é necessário que haja uma seqüência de conteúdos a serem trabalhados em cada série, pois, caso o aluno troque de turma ou de escola, não ficará com "lacunas" e não terá dificuldade em acompanhar o conteúdo.

Verificamos, no entanto, que apesar de os alunos de nossa pesquisa terem "visto" todos os conteúdos predeterminados para as séries anteriores, traziam consigo "lacunas", não só a nível da compreensão dos conceitos matemáticos, mas, o que é mais grave (se considerarmos todos os esforços "empiristas" para "fixar" o conteúdo), mesmo a nível da mecanização dos algoritmos (alguns que não sabiam fazer contas...).

É comum entre os professores de Matemática receberem alunos de outras escolas durante o ano letivo e constatarem que os mesmos trazem consigo, apesar de nos cadernos constarem inúmeros "exercícios" relativos a vários conteúdos, graves dificuldades em relação a estes mesmos conteúdos.

O que deveria ser evitado através dos conteúdos mínimos, previamente elaborados, acaba acontecendo. Isto confirma que "ter" o conteúdo e trabalhá-lo através de explicações e vários exercícios não determina a aprendizagem.

Estes argumentos obteriam sustentação (caso houvesse aprendizagem) na teoria associacionista, para a qual o desenvolvimento é fruto de aprendizagens cumulativas (Gagné, 1968). Haveria, pois, a necessidade de respeitar a seqüência destas aprendizagens, organizando-as, das mais simples às mais complexas. Uma seria "peça" importante para a seguinte (pré-requisito), uma vez que a última seria decorrente da lembrança das anteriores e da transferência a novas situações. A não aprendizagem de um conteúdo poderia, portanto, constituir-se em uma "lacuna" em relação às próximas aprendizagens. Gagné apresenta uma hierarquia de aprendizagem, *a qual nada mais é do que um "ma-*

pa de habilidades" subordinadas a alguma habilidade mais complexa que deve ser aprendida (Moreira, 1985: 30).

O ensino de Matemática é organizado desta forma. Há uma hierarquia de conteúdos e aprendizagens pré-requisitos um do outro, sendo que a seqüência estabelecida respeita a estrutura e a lógica da disciplina Matemática e não a forma como esta lógica é construída pela criança (Rangel, 1987:57). "Vencer" o conteúdo da série passa a ser o principal objetivo do professor, mesmo que para isto tenha que "passar o conteúdo mais depressa", sacrificando a "compreensão" do mesmo.

Se o processo de construção do conhecimento lógico-matemático for considerado, conteúdo e aprendizagem assumem um novo sentido. Os conteúdos passam a ser entendidos como meios para atingir determinados fins (a construção das estruturas lógico-matemáticas, essencialmente), ao invés de constituir-se em um fim em si mesmo, como se a "quantidade de conteúdos vistos" pelo aluno determinasse o seu conhecimento.

O que Piaget entende por conteúdo no processo de construção do conhecimento?

Conteúdo é entendido como produto das ações ou operações do sujeito sobre os objetos. Constitui-se no "alimento" para a construção das "formas" (estruturas cognitivas), através de sucessivas "abstrações reflexivas", ou seja, através de um processo de equilibração contínuo, que permite ao sujeito adaptar-se ao meio. Trata-se de um processo dinâmico, comparável a uma espiral, que se amplia indefinidamente em altura, diz Chiarottino, onde:

> *... o refletir dos conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma fórmula, de uma estrutura (reflexão) e os conteúdos assim transferidos a outro plano exigem, por sua vez, a construção de novas formas. Há assim uma alternância ininterrupta de forma e conteúdo, sem limites, sem fim, sem começos absolutos* (1984: 70).

Neste processo, o sujeito aplica a **forma** na busca de entendimento dos **conteúdos**. Estes, por sua vez, provocam seguidamente resistências que impedem sua imediata compreensão (assimilação), exigindo do sujeito um esforço para superação por novos ajustamentos, através da diferenciação de estruturas atuais e de reorganizações internas (acomodação). Esta atividade "gera" a abstração reflexiva - a transferência do conteúdo a um novo plano (o da razão), obrigando, sucessivamente, a construção de novas formas de reflexão (Rangel, 1987).

Considerar o "conteúdo" como produto das ações ou operações do sujeito e o "alimento" para a construção de novas formas de conhecimento, difere radicalmente de considerá-lo um "saber" sistematizado pela humanidade, que deve ser transmitido ao aluno, como o faz o atual ensino de Matemática. Pressupõe um aluno ativo, dinâmico, questionador, pesquisador, com iniciativas próprias, que busca na Matemática e nos conteúdos que lhe são próprios, a **construção** de novos conhecimentos, ao invés de um aluno passivo, que espera recebê-los prontos, necessitando apenas armazená-los na memória. Pressupõe a "reinvenção", a reconstrução destes conhecimentos, tendo em vista a necessidade de construir, paralelamente, as estruturas que possibilitem "assimilá-los", e, o que é fundamental, compreendê-los.

> ... ***compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção***, *e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir* (Piaget, 1980: 17).

A "reinvenção" ou "reconstrução" dos conhecimentos matemáticos requer um retorno à experimentação a cada novo "conteúdo" a ser ensinado. A experimentação é entendida aqui como a atividade e as tentativas dos alunos, *assim como a espontaneidade das pesquisas na manipulação de dispositivos destinados a provar ou invalidar hipóteses que houveram podido formular por si mesmos para a explicação de tal ou tal fenômeno elementar* (ibidem). Em outras palavras, podemos dizer que requer um retorno à ação do aluno no sentido de permitir que construa as "formas" necessárias à sua compreensão. Piaget cita um exemplo:

> *... todos sabem da dificuldade que sentem os alunos do segundo grau (e mesmo um bom número de estudantes universitários) em compreender a regra de Álgebra chamada dos sinais: "menos por menos dá mais". Ora, essa regra dos sinais já é descoberta na ação por crianças de 7 a 8 anos, sob formas qualitativas variadas. Quando uma*

> *delgada haste de ferro que atravessa ABC é vergada atrás de uma tela (sendo visíveis os movimentos, mas não as das bolas, a criança compreende que a ordem ABC se altera para CBA; compreende então imediatamente que duas viradas restituem a ordem ABC, que três rotações resultam em CBA, etc. Descobre assim, sem a conhecer, a regra de composição que preceitua que duas inversões de sentido se anulam, ou seja, que "menos por menos dá mais". Entretanto, quando estiver com 15 ou 16 anos, se as operações algébricas cuja existência irá aprender não lhe forem apresentadas como* ***prolongamento de ações desse tipo, ela não compreenderá mais nada!*** (Piaget, 1980: 60 - grifo nosso).

Avalizados pela concepção errônea de que a quantidade de conteúdos "dados" é um dos indicadores de qualidade de ensino e de que a quantidade de conteúdos aprendidos (cf. concepção empirista de aprendizagem) determina um aluno mais ou menos inteligente, os professores "ensinam" a regra dos sinais, referida por Piaget, na 6ª série do 1º grau, de forma totalmente abstrata. Não é de estranhar que, devido à inadequação da forma abstrata que é ensinada ao desenvolvimento cognitivo do aluno e ausência total de "ação", este "conteúdo" constitui-se em uma das maiores dificuldades dos alunos (mesmo a nível de memorização... que dirá compreensão!)

É a partir da escola maternal, diz Piaget, que deve ser preparado o ensino da Matemática

> *por uma série de manipulações voltadas para conjuntos lógicos e numéricos, os comprimentos, as superfícies... e esse gênero de atividades concretas deveria ser desenvolvido e enriquecido ininterruptamente, de forma muito sistemática, no decorrer de todo o ensino de 1º grau,*

para que gradativamente se transformassem em experiências de Física e de Mecânica elementares. Trata-se de principiar o ensino pelas noções qualitativas, introduzindo ao seu tempo as considerações numéricas.

> *Nessa hipótese, o ensino propriamente da Matemática estaria situado em seu meio natural de adequação aos objetos e possibilitaria um desenvolvimento da inteligência superior àquele alcançado enquanto permanecer verbal ou gráfico* (Piaget, 1980: 60).

Para Piaget, não é o conhecimento do conteúdo "dado" ao aluno que irá torná-lo inteligente, mas a reinvenção deste conteúdo. Não é o conhecimento do teorema de Pitágoras, exemplifica, que irá assegurar o livre exercício da inteligência pessoal: é o fato de haver redescoberto a sua existência e a sua demonstração (ibidem, p. 60-1).

Ao contrário da concepção tradicional de ensino, o objetivo da educação intelectual, para Piaget, não é *saber repetir ou conservar verdades acabadas*, mas é *aprender por si próprio a conquista do verdadeiro, correndo o risco de despender tempo nisso e de passar por todos os rodeios que uma atividade real pressupõe.*

No ensino de Matemática "que se tem" reinventar ou redescobrir o conteúdo é considerado "perda de tempo", pois o importante é "passar" a maior quantidade de conteúdos possível. Já para Piaget, *o ideal da educação não é aprender o máximo ou elevar ao máximo os resultados, mas sim, antes de tudo, aprender a aprender; aprender a desenvolver-se e aprender a continuar a desenvolver-se depois da escola (...* 1983: 40). E salienta:

> *Uma coisa é aprender um resultado e outra coisa é formar um instrumento intelectual, formar uma lógica necessária à construção dum dado resultado. Não se forma um novo instrumento de raciocínio em poucos dias* (ibidem, p. 18).

Para Piaget, a educação intelectual está, portanto, comprometida com a construção das "formas" e não apenas com os "conteúdos", como o faz o atual ensino. Enquanto para este o conteúdo é considerado "conhecimento", para Piaget, conhecimento é forma e conteúdo, entendidos dialeticamente. O que é conteúdo num patamar, por exemplo, passa a ser forma no outro patamar. Esta, por sua vez, constitui-se no "conteúdo" para a forma seguinte e assim sucessivamente. A característica desta "espiral", diz Chiarottino, é a de conduzir a formas cada vez mais ricas e mais importantes em relação aos conteúdos. *As formas podem determinar a elaboração de estruturas do pensamento formal (exemplo, a Matemática) ou de estruturas atribuídas aos objetos e às regularidades da Natureza em que consistem as explicações causais como na Física* (.. Chiarottino, 1984: 70).

É assim que, para Piaget, na Matemática e na Lógica o *conteúdo são as próprias formas* (ibidem, p. 71). Ao mesmo tempo em que se constituem no objeto da operação, constituem-se no modo de operar.

Os "conteúdos" dos livros didáticos, da forma como são ensinados atualmente, constituem a "expressão" do que o ser humano pode construir no apogeu do seu raciocínio formal. Constituem-se, pois, no produto das formas do sujeito e da sua capacidade de raciocinar. Daí a necessidade de "reconstruí-los", ao invés de "dá-los" como algo pronto, formal e axiomatizado, não assimiláveis às estruturas ainda não formais do aluno. Daí também a necessidade de torná-los assimiláveis, uma vez que possibilitam ao sujeito a ampliação da sua capacidade operatória.

Reconstruir os conteúdos, portanto, não implica em "dar menos conteúdo", "baixar a qualidade do ensino","deixar de lado conteúdos menos importantes para o dia-a-dia" ou "cair no ativismo", como argumentam muitos professores. Implica, pelo contrário, na compreensão efetiva destes conteúdos, o que assegura a qualidade do ensino e possibilita ao aluno *um poder operacional que se prolonga indefinidamente* (Piaget, 1974: 178).

Fazem-se necessárias algumas considerações. Ao contrário do que se pensa, a reconstrução dos conteúdos não é tarefa do método de ensino ou do professor, mas do próprio aluno. Ao professor e aos métodos cabe o papel de oferecer ao aluno as condições necessárias, através do *recurso aos métodos ativos* e da *adequação dos métodos aos períodos de desenvolvimento cognitivo* (Piaget, 1974). O aluno "reconstrói" o conteúdo à medida que se apropria dos mecanismos das ações realizadas a ponto de refazê-las num novo plano: o da representação ou, em outras palavras, à medida que a tomada de consciência das ações conduz à compreensão.

Ocorre nas escolas que o professor faz para o aluno o que este precisaria fazer para tomar consciência das ações: o professor é quem realiza a ação, ou quem comanda a ação, e quem tira as conclusões necessárias. Exemplo disto é a forma como muitos vêm "utilizando" o "material concreto".

Profª – Façam 3 grupos de 4 tampinhas cada. Quantos grupos foram feitos?

Alunos – Treêêêês... (em coro)

Profª – Quantas tampinhas ficaram em cada grupo?

Alunos - Quaaatro... (em coro)

Profª - Então, três vezes quatro é doze. Entenderam?
Três vezes quatro tampinhas são doze tampinhas.

O professor, além de ter realizado a ação (uma vez que os alunos agiram sob o seu comando), revelou as relações que deveriam ter sido "descobertas" pelo aluno. Impediu , portanto, que este tomasse consciência da ação realizada. Ora, a tomada de consciência consiste *no traço de união entre as condutas práticas, seus fracassos e sucessos no plano da ação como tal, e a compreensão das ligações constatadas* (Piaget, 1974: 42). O professor não permitiu o aluno "compreender". Justifica-se, pois, o espanto dos professores diante da não aprendizagem dos alunos, expresso em argumentos do tipo:

- *Mas como? Eu trabalhei com material concreto e mesmo assim meus alunos não sabem o que é multiplicar?*

Não é o "uso" do material concreto que determina a aprendizagem matemática, tampouco a forma como é "usado" (uma vez que o aluno poderá manusear os materiais espontaneamente sem realizar nenhuma "descoberta"). O que a determina é a compreensão das ligações constatadas na ação. Não basta, para isto, realizar ações físicas sobre os objetos ("abstrair" suas propriedades físicas). É necessário realizar ações lógico-matemáticas, ou seja, "extrair as relações entre os objetos da coordenação das ações e não mais dos objetos como tais. Isto não ocorre sem "tomadas de consciência" progressivas. Sem tomadas de consciência, portanto, não há reconstrução ou compreensão dos conteúdos. Ao professor e ao método cabe o papel de proporcioná-las. Evita-se, assim, que as atividades realizadas na sala de aula se reduzam ao ativismo e ao empirismo. Questões realizadas pelo professor, após ou durante o trabalho prático que permitam ao aluno retomar a ação realizada, pensar sobre o que praticou (*Pensar não seria apenas representar, mas organizar ou estruturar representações* - Chiarottino, 1988), estabelecer relações entre os acontecimentos e explicar o ocorrido, auxiliam no processo. A tomada de consciência, diz Piaget, consiste em *uma conceituação que conduz assim da ação (desempenhos materiais) à explicação (relações julgadas verdadeiras)* (Piaget, 1974: 42).

Para a prática problematizadora "que se quer" em Educação Matemática, os conteúdos matemáticos adquirem significado à medida que deixam de ser "doados" ou "impostos" aos alunos, pelo professor, tendo em vista a necessidade de cumprir o "programa" da disciplina.

> *Para o educador-educando o conteúdo programático da educação não é uma doação ou uma imposição - um conjunto de informes a ser depositado nos educandos - mas a devolução organizada, sistematizada e acrescentada ao povo daqueles elementos que este lhe entregou de forma desestruturada* (Freire, 1988: 84).

O quê estudar é determinado através do diálogo, *momento em que investiga-se o universo temático do povo ou o conjunto de seus temas geradores* (ibidem, p. 77).

> *Investigar o tema gerador é investigar (...) o pensar dos homens referido à realidade, é investigar seu atuar sobre a realidade que é a sua práxis* (p. 98).

> *A investigação temática (...) sendo processo de busca, de conhecimento, por isto tudo de criação, exige de seus sujeitos que vão descobrindo, no encadeamento dos temas significativos a interpenetração dos problemas (...) envolve a investigação do próprio pensar do povo. Pensar que não se dá fora dos homens, nem num homem só, nem no vazio, mas nos homens e entre os homens, e sempre referido à realidade* (p. 100-1).

Cabe ao educador dialógico devolver este universo temático *como problema, não como dissertação, uma vez que na prática problematizadora o conteúdo jamais é depositado,* mas,

> *se organiza e se constitui na visão de mundo dos educandos (...) reflete seus anseios e esperanças (...)Por tal razão é que este conteúdo há de estar sempre renovando-se e ampliando-se* (p. 102).

O salário do trabalhador foi o tema gerador que originou os vários problemas que determinaram os conteúdos a serem estudados. Estes faziam parte do conteúdo programático tradicional da 6ª série, mas incluíam também conteúdos de séries anteriores já "esquecidos" pelos alunos. Foi necessário oportunizar-lhes a "reconstrução dos mesmos.

Os conteúdos trabalhados foram:

trário do que muitos professores argumentam, a educação problematizadora preocupa-se com a competência do processo educativo, tanto no que se refere ao ensino-aprendizagem, quanto ao que se refere ao professor.

> *Quanto mais progressista, tanto mais exigente deve ser o professor; exigente quanto à sua própria formação, à sua competência científica e à sua competência técnica. O professor precisa ensinar. Vocês já pensaram um professor que não ensina? Não é possível (...). O professor, o ensinante tem que ensinar, e tem que ensinar alguma coisa a alguém. O alguém é o educando, o aluno. (...) Ensinar significa o que ensinar e como ensinar. É óbvio que o professor progressista precisa saber como vai ensinar. Mas ele precisa ter uma compreensão política do a favor de quem e de que ele se acha para ensinar o que ele ensina. (...) O professor progressista que não se prepara cientificamente, sacrifica politicamente sua posição progressista. (...) Por isso jamais pode fazer concessões ao espontaneísmo. Ele não pode ser um professor espontaneísta* Freire, apud Andreola, 1987: 27).

Freire diria que não é possível fazer só matemática ou fazer só política. O que é preciso, a seu ver, é politizar a Matemática, o que, para o preparo científico do educador, é fundamental. E justifia:

> *O preparo científico, a capacitação científica, o domínio dos conteúdos necessários, fundamentais à educação do menino ou do jovem, demanda clareza política do educador, na medida mesma que não há capacitação científica, formação científica neutra* (ibidem).

4.5 - "Conta" não é Operação

Operação, segundo Piaget, é uma ação interiorizada, reversível e coordenada a outras pertencentes ao mesmo sistema. Ação interiorizada é, por sua vez, ação executada em pensamento sobre objetos simbólicos, através da representação de um possível acontecimento e a sua aplicação a objetos reais evocados por imagens mentais ou através da aplicação direta a objetos simbólicos (Chiarottino, 1972).

Conta, segundo o dicionário, é uma operação aritmética. Por ser operação, consiste também em uma ação interiorizada, executada mentalmente e passível de ser representada através de uma linguagem simbólica, no caso, a da Matemática.

A escola, no entanto, não entende "conta" como operação, apesar de considerar os termos como sinônimos, mas apenas como a representação de uma ação, implicitamente realizada (como juntar, tirar, dividir, etc.). Ensina-se o aluno a representar a ação, através de algoritmos determinados, suprimindo do processo o essencial, que é a própria ação.

No ensino "que se tem" a ação do aluno restringe-se a reproduzir as operações realizadas pelo professor, repetidas vezes, até memorizar "como se faz", ou seja, como se representam diferentes operações. No "fazer" a conta não há ação, tampouco operação. Há mecanização. Principia-se o ensino da Matemática pela linguagem simbólica e enfatiza-se esta linguagem no decorrer das séries, a ponto de pais, alunos e até mesmo porfessores confundirem a aula de Matemática com aula de "fazer contas".

Priorizam-se os cálculos escritos. É comum observarmos alunos que, quando a professora termina de passar o problema no quadro, já sabem a resposta, mas mesmo assim têm que fazer a conta no caderno. Tanto na aula quanto na prova, as contas são exigidas, ou porque "se o aluno não faz a conta é porque colou" ou porque "os pais precisam saber que os filhos estão aprendendo" ou ainda porque "ao fazer no caderno o aluno aprende melhor". Ora, se o aluno resolve o problema "de cabeça" é porque operou. Este fato, que é prioritário ao ensino, passa despercebido pelo professor e torna-se secundário, uma vez que "fazer a conta no caderno é essencial". Com um agravante: o aluno terá que "fazer" (as contas ou os problemas), utilizando os algoritmos ou fórmulas "ensinadas" pelo professor e não através do seu próprio raciocínio.

Segundo Carraher, até mesmo os problemas da vida diária, trabalhados na escola, consistem numa forma alternativa de o aluno executar um procedimento determinado, demonstrado ou aplicado pelo professor.

> *Quando exemplos da vida diária são introduzidos na sala de aula, eles visam à execução de rotinas demonstradas pela professora, não à compreensão da situação e a sua realização para a compreensão de conceitos matemáticos. (...) A própria execução do procedimento é o objetivo da atividade, o que fica claramente demonstrado nas avaliações escolares: uma resposta certa, sem a demonstração escrita do procedimento ensinado ou merece apenas crédito parcial ou não merece crédito* (1989: 90).

Ao "fazer" uma conta, na perspectiva do ensino "que se tem", o aluno representa uma ação sem ter consciência da ação que realiza. "Faz" a conta, que é uma operação, mas não o faz operatoriamente. Apenas reproduz um mecanismo adquirido que não possui significação.

Operação, salienta Piaget, não é a representação de uma ação. Ela é ainda uma ação, não mais puramente física ou causal, mas uma ação "significante", pois utiliza ligações de natureza implicativa e não mais causal.

> *... tudo o que concerne à ação e ao seu contexto pode ser traduzido por representações significativas através dos instrumentos semióticos correntes (língua, imagens, etc.), mas o núcleo funcional das próprias coordenações que constitui o essencial e que no plano da ação, permanece de natureza causal, encontra então seu equivalente no plano do pensamento, naquilo que é, de fato, a herança mais direta da ação: o sistema de coordenações operacionais, que transforma os objetos do pensamento assim como a ação modifica os objetos materiais* - (Piaget, 1978: 178).

A ausência de significação no "fazer contas" é observada na ausência de compreensão do próprio processo (algoritmo) e na dificuldade de encontrar a "conta certa" para resolver problemas matemáticos na sala de aula.

O sistema de implicações significantes, próprio do pensamento operatório, permite determinar as razões, *sem as quais os sucessos representam apenas fatos sem significação* (ibidem, p. 179). Permitem, pois, a "compreensão". *... comprender consiste em isolar as razões das coisas...* (ibidem). A compreensão procede, inicialmente, pela tomada de consciência das coordenações próprias da ação material em si.

Ao aprender a fazer uma conta, no ensino "que se tem", o aluno não toma consciência da ação por ela representada. É assim que não consegue compreender os processos e não consegue descobrir "que conta fazer" diante dos "problemas". O aluno não consegue estabelecer as relações existentes entre a ação proposta no problema e a ação representada pela conta.

Operar, para Piaget, é a capacidade de reunir elementos num todo, formando um sistema de relações lógicas. As ações são transformadas em operações graças à capacidade endógena do organismo de estabelecer relações, e à capacidade de mantê-las na consciência, simultaneamente (memória), às várias coordenações estabelecidas na prática (Chiarottino, 1988).

A forma como se ensina Matemática não permite ao aluno que estabeleça relações (tampouco permite ao aluno agir). Ao impor um conhecimento já sistematizado libera-se o aluno da necessidade de operar. Tampouco permite-se ao aluno visualizar na conta uma possível operação (ação mental representada através de um algoritmo) ou um saber que é fruto de um processo construtivo (onto e filogeneticamente), uma vez que "passa" ao aluno apenas o produto final deste processo.

Muitos professores temem o uso de calculadoras na sala de aula, pois, a seu ver, pode "impedir o desenvolvimento do raciocínio lógico", podem "viciar o aluno, tornando-o dependente da máquina para realizar qualquer cálculo", entre outras argumentações. No entanto, estes mesmos professores não se apercebem que a abordagem dada às contas na escola, transforma os alunos em "meros calculadores". Tais quais as máquinas de calcular, "fazem" a conta sem tomar consciência do que estão fazendo. "Viciados" ao lápis, ao papel e aos algoritmos predeterminados, para realizar cálculos elementares, deixam de usar o próprio raciocínio.

Numa das aulas de nossa pesquisa solicitamos aos alunos que trouxessem calculadora. O objetivo da atividade era "aprender" a usá-la, como auxiliar na resolução de problemas. Nas atividades comerciais e bancárias, juros e percentuais são calculados com o uso deste instrumento, o que tornava significativo aos alunos utilizá-lo na sala de aula.

Os episódios que relataremos, ocorridos durante esta atividade, permitem observar que a calculadora não impede que o aluno raciocine, pois apenas realiza para ele o cálculo ou a conta.

Diante do problema:

- *Calcular os juros de Cr$ 40.000,00 aplicados à taxa de 16 % ao mês, durante 18 dias.*

a) ADE tentava resolver o problema entusiasmadamente, com a calculadora.

Fez: 16 ÷ 18 = 0,88 % para encontrar a taxa diária (ao invés de dividir por 30).

Aí, fez: 18 x 0,88 % = 15,84 % (para encontrar a taxa cobrada pelos 18 dias).

Concluiu: 40.000 x 15,84 = 6.326,00

Resultado: 6.326,00 foi o juro cobrado.

b) JUR tentava ~~resolver~~ o problema, já um tanto irritado.

- Profe, eu não consigo resolver o problema.

Profª - Faz com a calculadora... (propositalmente)

JUR. - De que que adianta a calculadora se eu não sei que conta fazer...

A expressão de JUR. torna evidente que a calculadora não opera para o aluno, apenas faz a conta em seu lugar, obedecendo aos seus comandos. A "operação" é anterior à conta e é realizada ou não pelo aluno, a nível de seu pensamento. A sua realização é que determinará os comandos a serem digitados.

Operar implica em raciocinar. Confunde-se "habilidade de fazer contas" com raciocinar logicamente.

Se o aluno tem facilidade em adquirir os mecanismos é porque tem um "bom raciocínio"; se não tem, é porque tem "dificuldade de raciocínio".

Raciocínio também é confundido com inteligência. Quem aprende a fazer contas com facilidade "- É inteligente!..."

Vejamos como Piaget define inteligência e raciocínio:

> *A **inteligência** é a solução dum problema novo para o indivíduo, é a coordenação dos meios para atingir um determinado fim que não é acessível de um modo imediato; ao passo que o **raciocínio** é a inteligência interiorizada, não se apoiando já na acção directa, mas num simbolismo, na evocação simbólica, das imagens mentais, etc..., que permitem representar o que a inteligência sensório motora, pelo contrário, vai apreender directamente* (1983: 21 - grifo nosso).

O uso da calculadora não impede que o aluno raciocine, pelo contrário, ele terá que raciocinar para "encontrar as contas certas" para a resolução dos problemas. Ora, no ensino "que se tem" priorizam-se as contas (aula de Matemática é aula de fazer contas). É, pois, evidente que a calculadora fará o que o aluno terá que aprender a fazer. Justifica-se, portanto, o temor dos professores e até mesmo dos pais em permitir o uso da calculadora. No entanto, se os intermináveis exercícios de "arme e efetue" fossem substituídos por problemas que exigissem o raciocínio do aluno, a calculadora não se tornaria "tão perigosa" ao aprendizado da Matemática.

No mesmo ensino "que se tem", confunde-se, também, a compreensão de uma determinada operação, com a compreensão do processo de cálculo. Compreender a operação é, para muitos professores, compreender o "vai um", o "pede emprestado", o "abaixa um zero", enfim, compreender o algoritmo. Não há dúvidas que este possui importância, mas não permite ao aluno "encontrar as contas que resolvem o problema". Como vimos, para isto terá que "tomar consciência" das ações inerentes a estas "operações" (juntar, reunir, seriar, tirar, dividir, multiplicar, etc.).

Diante destas considerações, podemos dizer que "conta" (como a entende o ensino "que se tem") não é operação, e que, através da forma como se ensina Matemática, desconsidera-se a capacidade operatória do sujeito e, o que é mais grave, contribui-se para que ela não se desenvolva.

CONCLUSÃO

A interpretação empirista do fazer, que caracteriza o ensino da Matemática, obstrui a dinâmica do "fazer e compreender" natural do ser humano e consiste, por esta razão, num dos principais fatores da não-aprendizagem matemática. Trata-se de um "fazer que produz a mecanização e a memorização dos conceitos matemáticos", em detrimento da "compreensão", própria do processo de construção do conhecimento lógico-matemático.

Isto se evidencia em nossa pesquisa na abordagem dada às contas, aos problemas e aos conteúdos nas aulas de Matemática, bem como nas situações de ensino-aprendizagem que lhe são próprias.

A rotina da aula consiste, para o aluno, em prestar atenção nas explicações do professor e fazer os exercícios por ele propostos. Estes são, na sua maioria, "contas" e "exercícios-tipo" que os alunos terão que reproduzir e treinar "até aprender". Para o professor, o ensino da Matemática consiste em explicar o conteúdo, "passar" exercícios e problemas para o aluno fixar o que foi "ensinado", "passar exercícios de reforço", quando necessário, "dar" e corrigir provas.

A aula de Matemática é conhecida como "a aula de fazer contas". Os cálculos escritos são priorizados e as operações reduzidas ao algoritmo, ou seja, à sua representação.

Os problemas matemáticos trabalhados, totalmente desvinculados das vivências dos alunos, consistem numa forma alternativa de aplicar o conteúdo "aprendido", ou "exercitar" determinados algoritmos, o que lhes não confere nenhuma significação.

Os conteúdos são tratados como um fim em si mesmo: "vencer" o conteúdo da série é a meta principal. Qualidade de ensino é confundida com quantidade de conteúdos "vistos" pelo aluno.

Ensinar é, nesta perspectiva, "transmitir conhecimentos". Aprender é "saber reproduzi-los".

A concepção de ensino-aprendizagem subjacente ao ensino "que se tem" é claramente empirista. O sujeito recebe, passivo, as informações previamente elaboradas no meio físico e social, através dos órgãos sensoriais. A concepção existente acerca da natureza do conhecimento matemático é a mesma. A Matemática é considerada uma linguagem formal e axiomatizada, da qual o sujeito toma conhecimento à medida que esta lhe é transmitida.

A "falta de base" denunciada pelos professores e trazida pelos alunos, a falta de lógica nos resultados obtidos, os constantes "esquecimentos" do conteúdo visto, a dificuldade em raciocinar diante de problemas matemáticos, a busca constante de "modelos" para solucionar exercícios e problemas são, entre outros, elementos constatados na presente pesquisa, que permitem afirmar que esta forma de "ensinar" não proporciona a aprendizagem efetiva da Matemática.

Como características definidoras da não-aprendizagem matemática, apresentamos:

- a exclusão da ação no processo ensino-aprendizagem;
- o uso precoce e mecânico do formalismo matemático;
- as dificuldades trazidas de séries anteriores;
- a prioridade à transmissão de conhecimentos - "conteúdos";
- a promoção da incompetência dos alunos frente a problemas matemáticos.

Entendemos aprendizagem como a entende Piaget (1974): um processo funcional de conjunto que tende a se confundir com o próprio processo de desenvolvimento, englobando aquisições devidas à experiência física (aprendizagem no sentido restrito) e também aquisições devidas à experiência lógico-matemática e aos processos de equilibração. Em outras palavras, aprendizagem no sentido amplo (s. lat.).

Da mesma forma entendemos que conhecimento matemático não é imposto pelo meio, mas construído nas interações sujeito--meio, à medida que o sujeito constrói suas estruturas lógico-

-matemáticas. Para tanto, extrai conhecimentos dos objetos e das ações, através dos processos de abstração empírica e reflexiva, respectivamente.

Neste processo, alguns aspectos são fundamentais: a ação do sujeito sobre o meio e a tomada de consciência das ações. O "fazer" inicial do sujeito (que não se compara ao "fazer" empirista, uma vez que, por mais elementar que seja, possui uma atividade organizadora interna), caracteriza-se pela autonomia inicial das ações e é ultrapassado, gradativamente, pela conceituação, pelo "fazer" em pensamento, ou seja, pelo "compreender". Este compreender confere ao sujeito a possibilidade de extrapolar o real e entrar para o mundo do abstrato: o mundo da Matemática.

Aprender, portanto, significa construir conhecimento. Ensinar significa proporcionar a interação sujeito-meio, a tomada de consciência das ações e abstrações reflexivas, a partir do experienciado, condição para que esta abstração ocorra.

A atual forma de ensinar Matemática, além de não proporcionar a aprendizagem, obstrui este processo que é natural ao ser humano. Ao invés de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, como tradicionalmente se propõe nos planos de ensino, promove uma obstrução na capacidade de raciocinar.

A intervenção realizada na presente pesquisa permitiu-nos apontar algumas características definidoras da aprendizagem matemática:

- a confiança na capacidade de raciocínio dos alunos frente a problemas matemáticos.

O referencial teórico piagetiano permitiu-nos acreditar na capacidade de raciocínio dos nossos alunos e desmistificar os mitos criados em torno deste aspecto pelo ensino "que se tem".

Propusemo-nos a realizar uma prática pedagógica que invertesse a rotina habitual da sala de aula. Optamos por trabalhar "o problema matemático" como uma forma de provocar a necessidade de aprender conteúdos novos, ao invés de "fixar" e/ou "aplicar" o conteúdo visto. Acreditávamos que, se todo o conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem que desafie o aluno a raciocinar, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser aprendido.

Fundamentávamos na definição de "problema" que construímos no decorrer da pesquisa: O aluno está diante de um problema quando determinada situação não é passível de ser assimilada aos seus esquemas, provocando assim um desequilíbrio. As estruturas do sujeito tendem a funcionar em equilíbrio, aumentando sempre seu grau de organização interna e adaptação ao meio. Isto faz com que, diante destes desequilíbrios, o organismo (estruturas cognitivas) se reorganize, acomodando-se às novas situações, ou, em outras palavras, construindo internamente novos esquemas de assimilação que lhe permitam chegar ao equilíbrio.

O aluno constrói a solução para o problema a partir de uma situação de desequilíbrio, através de abstrações reflexivas. Como se trata do mesmo mecanismo que lhe permite aprender, podemos dizer que aprende enquanto busca soluções para problemas.

Tratava-se, portanto, de propor ao aluno situações significativas - passíveis de serem assimiladas - que provocassem, a partir de sucessivas tomadas de consciência, a construção de soluções possíveis. A situação surgida espontaneamente na turma pesquisada foi "o caso dos contracheques".

Enquanto raciocinavam, diante dos "problemas", tornava-se possível visualizar o processo de reequilibração interna que realizavam. Sucessivas tomadas de consciência permitiam que elaborassem hipóteses, reconstruíssem erros, tentassem novas hipóteses, etc.

É importante salientar que "o caso dos contracheques" consistia numa situação significativa para os alunos, uma vez que tratava da problemática que envolvia as suas famílias. Os problemas trabalhados eram os seus problemas, e não os do professor. Este contexto significador permite a assimilação da situação-problema, uma vez que cria necessidades.

Não se trata de problemas em torno dos quais terão que aplicar as "contas" e as "fórmulas" aprendidas, apenas, mas problemas em torno dos quais terão que criar estratégias, construir fórmulas de resolução.

O ensino "que se tem" corta a necessidade, no sentido psicológico. Em nossa pesquisa buscamos criar necessidades.

Foi assim que, diante de problemas significativos, desafiados a pensar, os alunos encontravam soluções criativas.

A pesquisa realizada permitiu-nos algumas considerações a respeito do fato de crianças saírem-se melhor nas situações de vida, no que se refere à Matemática, do que na escola.

Na vida, a criança, principalmente a trabalhadora, é constantemente desafiada pelo meio a refletir sobre as ações que realiza. A vida exige que ações lógico-matemáticas sejam realizadas a cada total, por exemplo, ou a cada troco a ser calculado.

A criança é solicitada a extrapolar o plano da ação física, uma vez que lhe são exigidas respostas no plano superior: o da representação.

A dinâmica do "fazer e compreender" ocorre naturalmente, através de sucessivas tomadas de consciência e é garantida pelo ambiente problematizador em que a criança está inserida.

A sala de aula não permite esta dinâmica. Exclui do processo de ensino-aprendizagem aquilo que lhe é próprio, não proporcionando aquilo que é a matéria-prima da construção do conhecimento: a ação do aluno. Torna ativos somente seus órgãos sensoriais, impondo-lhe a passividade: - "Preste atenção!", - "Silêncio!", - "Permaneçam nos seus lugares!"...

As crianças, por outro lado, não conseguem "assimilar" a Matemática da escola às suas estruturas pela inadequação dos métodos de ensino ao seu desenvolvimento cognitivo. Ensina-se Matemática através de uma linguagem axiomatizada, abstrata, carregada de simbolismos inacessíveis às estruturas cognitivas da criança nos primeiros anos escolares. Isto faz com que não utilize a Matemática da escola na vida por não encontrar nela nenhuma significação (visto que não foi assimilada). É assim que, diante de situações que realmente a desafiam, lança mão das estruturas lógicas que possui, ao invés das contas aprendidas na escola.

Encontram-se explicações, portanto, para o fato de que a "vida", ou seja, as vivências do sujeito lhe proporcionem, em determinadas situações, maiores oportunidades do que aquelas oferecidas pela escola, no que se refere à construção das estruturas lógicas. Desmistifica-se, também, a "falta de raciocínio lógico" dos alunos, tão comum às salas de aula.

Ao trabalharmos a partir de contextos significativos para o aluno, resgatamos a dinâmica ação-conceituação na sala de aula. A cada problema proposto, o aluno se deparava com uma situação desequilibradora e para solucioná-la extraía conhecimentos da estrutura anterior, reorganizava-os em novas combinações e projetava-os para um novo plano, construindo assim novas estruturas através de abstrações reflexivas. O aluno assim agia em busca da solução e reequilibrava-se em função de cada resposta encontrada. Isto fez com que o raciocínio lógico, antes considerado inexistente, se desenvolvesse gradativamente.

Consideramos fundamental que a sala de aula se torne também um ambiente desafiador, pois é seu papel participar e promover o processo de construção de conhecimentos. Para isso, terá que permitir, através da prática pedagógica, que o aluno "compreenda", ou seja, que ele se volte sobre a sua ação, que tome posse dos mecanismos e a refaça num novo plano. É função do professor, neste processo, provocar esta reflexão, solicitando ao aluno que repense a ação realizada e, posteriormente, coloque estes conhecimentos em confronto com o conhecimento formal.

- O ensino do conteúdo matemático a partir de situações-problema.

Os conteúdos adquirem significado para o aluno à medida que deixam de ser "dados" ou "impostos" pelo professor, tendo em vista a necessidade de cumprir o programa da disciplina, e à medida que passam a ser determinados pela situação-problema do aluno, ou seja, significativa para ele, no contexto em que está inserido.

Ao contrário do que muitos professores pensam, a qualidade de ensino não fica prejudicada por esta prática, uma vez que:

- os conteúdos "vistos" são efetivamente aprendidos por serem significativos ao aluno;

- prioriza-se a construção das estruturas lógicas, o que faz com que o aluno se torne capaz de aprender os aspectos numéricos, superando assim possíveis lacunas deixadas por transferências de escolas, ou por não ter "passado" um conteúdo na série anterior.

O conteúdo é entendido, aqui, como o produto das ações ou operações do sujeito e como o alimento para a construção de novas formas de conhecimento e não como o entende o ensino "que se tem": um saber sistematizado pela humanidade, que deve ser transmitido ao aluno. Deixam de constituir-se em um fim em si mesmo (como se a quantidade de conteúdos "vistos" determinasse o conhecimento do aluno e a qualidade do ensino) e passam a ser meios para a construção das estruturas do conhecimento.

O ensino de Matemática "que se quer" terá que estar comprometido com a construção do conhecimento, ou seja, com a construção das formas e não apenas com a transmissão de conteúdos, como o faz o ensino "que se tem". Forma e conteúdo, entendidos dialeticamente, passam a ser conhecimento: o que é conteúdo num patamar passa a ser forma num patamar superior. Esta, por sua vez, constitui-se em conteúdo para a forma seguinte, e assim sucessivamente.

Ensinar o conteúdo a partir de contextos significativos permite que este seja assimilado e se torne, assim, conteúdo para o aluno, alimento para a construção das suas formas.

- A reinvenção do conteúdo matemático:

Na prática pedagógica realizada tornou-se necessário "reinventar" o conteúdo, uma vez que não houve aprendizagem do mesmo nas séries anteriores. Por exemplo: foi necessário reconstruir as noções de fração decimal e números decimais para o trabalho com percentagem e juros.

Reconstruir o conteúdo significa buscar a compreensão efetiva do mesmo, o que assegura a qualidade do ensino e possibilita ao aluno um poder operacional maior.

Este processo não é tarefa do método ou do professor, mas do próprio aluno que reconstrói os conteúdos à medida que se apropria dos mecanismos das ações realizadas, a ponto de refazê-las num novo plano: o da representação. Em outras palavras, à medida que sucessivas tomadas de consciência das ações conduzem à compreensão - retoma-se o caminho do "fazer" ao "compreender". Aos primeiros cabe o papel de promover as condições necessárias.

Decorre a necessidade de a sala de aula promover ações matematizantes. Não se trata de voltar, necessariamente, às ações físicas sobre os objetos, embora isto se torne necessário, muitas vezes, mas em voltar ao patamar anterior, retirando elementos do plano anterior, projetando-os ao plano superior. Trata-se de uma nova coordenação das ações anteriormente realizadas.

A forma de ensinar Matemática deveria ser a da reinvenção, já que se trata de uma disciplina que expressa o que o ser humano pode construir no apogeu do seu pensamento formal.

- O uso construtivo do material concreto:

No estudo "Fazer e Compreender" (1978) Piaget enfatiza a importância que o êxito prático, característico das ações da criança, possui no processo que conduz à conceituação. Considera este "fazer" inicial como condição preliminar para a compreensão.

Torna-se importante para a aprendizagem, portanto, o uso de materiais e estratégias que permitam ações sobre objetos, em todas as séries, mas principalmente nas iniciais.

O uso de materiais concretos somente adquire sentido quando as ações com eles realizadas permitam o estabelecimento de relações, ou, em outras palavras, quando tomadas de consciência progressivas permitem a compreensão das ligações constatadas na ação. Cabe ao professor proporcioná-las através de questionamentos que levem o aluno a retornar a ação realizada, a pensar sobre o que praticou, a levantar hipóteses, a explicar o ocorrido, enfim.

Materiais concretos podem ser usados sem que esse processo ocorra, o que permite afirmar que não é o "uso" do mesmo que determina a aprendizagem. É o que ocorre com o ensino "que se tem", onde o material é usado com base numa visão empirista do conhecimento: o professor é quem realiza e/ou comanda a ação e extrai dela as conclusões necessárias. Demonstra, expõe, explica as relações estabelecidas por ele, a partir do material, não permitindo que o aluno estabeleça relações próprias.

O que determina a aprendizagem é a compreensão das ligações constatadas na ação; quando a utilização do material concreto proporciona as tomadas de consciência que a possibilitem, este adquire significado na sala de aula.

O concreto, no entanto, nem sempre é algo físico, manipulável. Pode constituir-se em situações significativas para o aluno: a sua vida, o seu mundo, as relações que nele se estabelecem. Pode ser o retorno ao plano anterior, atavés de ações matematizantes: a coordenação de ações anteriormente realizadas. Enfim, pode constituir-se numa situação-problema que confira significação a determinado conteúdo matemático.

Para a educação matemática "que se quer", o retorno ao concreto é fundamental. Sem tomadas de consciência das ações implícitas nas situações-problema não há como alcançar um dos seus principais objetivos: a compreensão dos conceitos matemáticos.

- O ensino da operação em substituição ao da conta:

Operação não é a representação de uma ação. É uma ação significante que utiliza ligações de natureza implicativa. Operar é a capacidade de reunir elementos num todo, formando um sistema de relações lógicas.

A forma como se ensinam as "operações" (contas) no ensino que se tem não permite que o aluno estabeleça relações lógicas, tampouco que realize ações lógico-matemáticas. Impõe-se um processo já acabado (o produto final de um processo histórico de construção), liberando-o da necessidade de operar. Apenas precisará memorizar. O aluno faz a operação, mas não o faz operatoriamente. Reproduz o processo de representação de uma determinada ação sem tomar consciência da ação nele implícita.

Na pesquisa realizada a conta adquiriu significação para o aluno, quando inserida numa situação-problema que lhe conferia significado, ou seja, que lhe permitia tomar consciência das ações por ela representadas.

O que se quer é um ensino de Matemática que trabalhe operatoriamente o algoritmo. Para isto há que se trabalhar o sistema de relações em jogo numa determinada situação-problema. Há que se trabalhar também com a construção de vários algoritmos que representam uma determinada ação, ao invés de promover o uso mecânicao de apenas um processo de cálculo, como é feito atualmente.

Isto se torna possível se o caminho do fazer ao compreender é percorrido: ação, coordenação das ações, compreensão e, finalmente, formalização. De nada vale colocar a formalização no início do processo como o faz o ensino "que se tem".

- A Educação Libertadora e a visão interacionista do conhecimento:

A Educação Libertadora promove aprendizagem à media que torna o aluno sujeito do processo ensino-aprendizagem, à medida que insere este processo no mundo-vida do aluno e nas relações que nele se estabelecem, tornando-o efetivamente significativo.

Permite à escola "gerar necessidades" de assimilação que promovem a aprendizagem, uma vez que permitem uma prática pedagógica problematizadora que surge das vivências de ambos - professor e aluno - inseridos num processo de construção que não é só o do conhecimento, mas é o da própria vida.

Acreditamos, a partir da realização desta pesquisa e da atitude positiva dos alunos frenta à proposta de trabalho por nós desenvolvida e à própria disciplina, ser possível um ensino de Matemática voltado para a construção de conhecimentos. Para isto, no entanto, consideramos que a concepção empirista acerca da natureza do conhecimento e a visão bancária de educação, características do atual ensino, sejam substituídas por uma visão construtiva e libertadora.

Construir a Educação Matemática "que se quer" não se tornará possível se as inovações metodológicas não vierem acompanhadas de um novo referencial epistemológico.

Para finalizar, esperamos que este trabalho possa ter contribuído, de alguma forma, para a Educação Matemática "que se quer". Não acreditamos em algo pronto e acabado, mas em processo construtivo. Por esta razão, nossa expectativa é de que este possa ser apenas um dos muitos trabalhos de pesquisa que se fazem necessários para responder às questões aqui propostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMBROSIO, Ubiratan d'. **Da realidade à ação: Reflexões sobre Educação e Matemática.** São Paulo, Summus - Ed. da Inicamp, 1986. 115 p.

ANDREOLA, B. Conteúdos Escolares. **Revista da AEC.** Ano 16, nº 63, jan./mar. 1987.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática.** 2.ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1976.

BECKER, Fernando F. **Da Ação à Operação:** O caminho da Aprendizagem. São Paulo, USP, 1983. Tese de Doutorado em Psicol.

BELTRAME, A. M. & outros. Uma proposta política de Ensino de Matemática. **Educação e Sociedade.** Jan. de 1985.

BIASUZ, Saulé (org.) et alii. **O Ensino da Matemática nas séries iniciais.** Polígrafo. FAPES - CESE, Deptº de Técnicas de Ensino. Erexim, FAPES, 1987. 63 p.

BICUDO, Maria Aparecida (org.). **Educação Matemática.** São Paulo, Moraes, s.d.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 9. ed. Lisboa, Livraria Sá da Costa, 1983. 320 p.

CARRAHER, David e Teresinha & SCHLIEMANN, Ana Lúcia. **Na vida Dez na Escola Zero.** São Paulo, Cortez, 1988. 182 p.

CARRAHER, Teresinha. **Sociedade e Inteligência.** São Paulo, Cortez, 1989. 130 p.

CHIAROTTINO, Zélia R. **Piaget: Modelo e Estrutura.** Rio de Janeiro, José Olympio, 1972. 95 p.

__________. **Em busca do Sentido da Obra de Jean Piaget.** São Paulo, Ática, 1984. 118 p.

__________. **Psicologia e Epistemologia Genética de Jean Piaget.** São Paulo, EPU, 1988. 87 p.

DANTE, Luiz R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo, Ática, 1989. 176 p.

DAVIS, Philip J. & HERSH, Rouben. **A Experiência Matemática.** 3ª ed. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1986. 490 p.

DOLLE, Jean M. **Para Compreender Jean Piaget:** Uma Iniciação à Psicologia Piagetiana. 4.ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1983. 200 p.

ELKIND, David. **Desenvolvimento e Educação** (Aplicação de Piaget na sala de aula). Rio de Janeiro, Zahar, 1978

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** 18.ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1988. 184 p.

GAGNÉ, Robert M. Contribution of learning to human development. **Psychological Review.** Washington, 75 (3): 177 - 91, may, 1968.

GEYMONAT, Ludovico. **Elementos de Filosofia da Ciência.** Trad. de Manuel da Costa Leite. Col. "Trajectos". Lisboa, Gradiva, s.d.

JUNKE, Buford. **A Importância do Trabalho de Campo.** Rio de Janeiro, Lidador, 1971.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna.** São Paulo, IBRASA, 1976. 212 p.

LESTER, Jr. & CHARLES, R. **Teaching Problem Solving:** What and Wow. New York, Dale Seymour Publications, 1982.

LUDKE, Nenga & ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa e Educação.** São Paulo, EPU, 1986. 99 p.

MACHADO, Wilson J. **Matemática e Realidade.** São Paulo, Cortez, 1987. 100 p.

MANNO, Ambrogio Giacomo. **A Filosofia da Matemática.** Trad. de Armindo José Rodrigues. Col. "O saber da Filosofia". São Paulo, Martins Fontes, s.d.

MEDEIROS, Cleide Farias. Educação Matemática: Discurso ideológico que a sustenta. In: BICUDO, Maria Aparecida. Op. cit. (Dissertação - 1985 - p. 28).

MOREIRA, Marco Antônio. **Ensino e Aprendizagem:** Enfoques Teóricos. São Paulo, Moraes, 1985. 94 p.

MOREIRA, Marco Antônio et alii. **Aprendizagem e Perspectivas Teóricas.** Porto Alegre, PADES - UFRGS - PROCRAD, 1987.

OTT, Margot Bertoluci. Problemas como Referencial de Estudo. In: **Revista de Educação da AEC.** 18 (72): 31-6. Brasília, abr./jun. 1989.

PIAGET, Jean. Las Estruturas matemáticas y las estruturas operatorias de la inteligencia. In: _____ et alii. **La enseñanza de las matemáticas.** 3.ed. Madrid, Aguiar, 1968. Cap. 1, p. 3-28.

______. **Seis Estudos de Psicologia.** 4.ed. Rio de Janeiro, Forense, 1971. 150 p.

______. **Biologia e Conhecimento.** Ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos. Petrópolis, Vozes, 1973. 423 p.

______. **Psicologia e Pedagogia.** 4.ed. Rio de Janeiro, Forense, 1976. 185 p.

______. **A Tomada de Consciência.** São Paulo, Melhoramentos - USP, 1977. 211 p.

______. **Fazer e Compreender.** São Paulo, Melhoramentos - USP, 1978. 186 p.

______. **Para onde vai a Educação?** 7.ed. Rio de Janeiro, José Olympio, 1980. 80 p.

______. A Epistemologia Genética. Sabedoria e Ilusões da Filosofia. Problemas de Psicologia Genética. In: Os Pensadores. Rio de Janeiro, Victor Civita, 1983.

______. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro, Ed. Guanabara, S.A., 1987. 390 p.

PIAGET, J. & Gréco, P. **Aprendizagem e Conhecimento.** Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1974. 238 p.

PIAGET, J.; BETH, W. E. & MAYS, W. **Epistemologia Genética e Pesquisa Psicológica.** Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1974. 160 p.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro, Interciência, 1978. 196 p.

RANGEL, Ana Cristina. **A Educação Matemática e a Construção do Número pela Criança** - Uma Experiência na 1ª série em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre, 1987. Dissertação de Mestrado, UFRGS.