

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL COM UMA FORMULAÇÃO SIMP E  
FILTRO DE MATERIAL COM FUNÇÃO LIMIAR DE HEAVISIDE

por

Artur Frederico Lagemann

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Abril de 2023.

### CIP - Catalogação na Publicação

Lagemann, Artur Frederico

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL COM UMA FORMULAÇÃO  
SIMP E FILTRO DE MATERIAL COM FUNÇÃO LIMAR DE HEAVISIDE/  
Artur Frederico Lagemann. -- 2023.  
15f.

Orientador: Herbert Martins Gomes.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de  
Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1.Otimização topológica. 2. Multimaterial. 3.Elementos  
finitos. 4.SIMP. 5.Filtro limiar de Heaviside I. Gomes,  
Herbert Martins, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os  
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Artur Frederico Lagemann

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL COM UMA FORMULAÇÃO SIMP E  
FILTRO DE MATERIAL COM FUNÇÃO LIMIAR DE HEAVISIDE

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Seppi Bresolin  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Daniel Milbrath De Leon

Profa. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes (Presidente)

Porto Alegre, Abril de 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2022

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL COM UMA FORMULAÇÃO  
SIMP E FILTRO DE MATERIAL COM FUNÇÃO LIMIAR DE HEAVISIDE

**Artur Frederico Lagemann**

[arturlagemann@gmail.com](mailto:arturlagemann@gmail.com)

**Resumo.** A otimização topológica de peças e componentes é uma realidade atualmente. Contudo, pouco se explora a possibilidade do uso de mais de um tipo de material na sua construção. Isso é benéfico na geração de novas possibilidades para a otimização topológica estrutural, fazendo-se o uso racional e eficiente das propriedades de resistência específicas de cada material onde for necessário, além de reduzir o custo de projeto e produção. Este trabalho tem como objetivo investigar e modificar as implementações propostas por TAVAKOLI e MOHSENI (2014) para um algoritmo de otimização topológica multimaterial com formulação SIMP, fazendo uso de restrições volumétricas para cada uma das fases dos materiais. Ademais, busca-se implementar um filtro de material com função limiar de Heaviside - baseado em CUI et al. (2018) - para as densidades finais, a fim de tornar a topologia resultante mais definida, com o mínimo de densidades intermediárias possíveis. São avaliados resultados para casos benchmark da literatura em comparação com os resultados do código implementado, além de realizarem-se estudos paramétricos para as variáveis do algoritmo.

**Palavras-chave:** otimização topológica; multimaterial; elementos finitos; SIMP; Filtro limiar de Heaviside.

MULTI-MATERIAL TOPOLOGY OPTIMIZATION WITH SIMP FORMULATION AND  
HEAVISIDE THRESHOLD FUNCTION FILTER

**Abstract.** Topological optimization of parts and components is a reality today. However, little is explored about the possibility of using more than one type of material in its construction. This is beneficial in generating new possibilities for structural topological optimization, making rational and efficient use of the specific strength properties of each material where necessary, in addition to reducing design and production costs. This work aims to investigate and modify the implementations proposed by TAVAKOLI and MOHSENI (2014) for a multi-material topological optimization algorithm with SIMP formulation, making use of volumetric constraints for each of the material phases. Furthermore, we seek to implement a material filter with a Heaviside threshold function - based on CUI et al. (2018) - for the final densities, in order to make the resulting topology more defined, with as few intermediate densities as possible. Results for benchmark cases from the literature are evaluated in comparison with the results of the implemented code, in addition to performing parametric studies for the variables of the algorithm.

**Keywords:** topological optimization; multimaterial; finite elements; SIMP; Heaviside threshold filter.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Viga MBB com carga no centro do vão para otimização topológica.....	6
Figura 2 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) deste trabalho (Fases 1 a 4: vermelho, azul, verde e branco).....	6
Figura 3 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) obtido com este trabalho para a <i>Compliance</i> . .....	7
Figura 4 – Estrutura em ponte com três cargas no centro do vão para otimização topológica.....	7
Figura 5 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) deste trabalho (Fases 1 a 4 dadas por vermelho, azul, verde e branco).....	7
Figura 6 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) obtido com este trabalho para a <i>Compliance</i> . .....	8
Figura 7 – Viga engastada livre com carga à meia altura na extremidade para otimização topológica. ....	8
Figura 8 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho (Fases 1, 2 e 3 dadas por: vermelho, verde e branco). ....	9
Figura 9 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho para a <i>Compliance</i> . ....	9
Figura 10 – Melhor resultado obtido para as combinações de <i>rf</i> e <i>iter_max_in</i> , com <i>Compliance</i> de 46,6 J. ....	10
Figura 11 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho (Fases 1 a 4 dadas por vermelho, verde, azul e branco). ....	10
Figura 12 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho para a <i>Compliance</i> . ..	11
Figura 13 – Resultado para o teste de malha para (a) 48x24, (b) 96x48 e (c) 192x96 elementos. ....	11
Figura 14 - Resultado para Viga Cantilever de 3 fases (Tavakoli et al. 2014) para diferentes <i>iter_max_in</i> . ....	12
Figura 15 – Resultado para a Viga Cantilever de 4 fases (Tavakoli et al. 2014) com diferentes <i>iter_max_in</i> . ....	12
Figura 16 - Estrutura de ponte com 3 fases (Tavakoli et al. 2014) para diferentes valores de <i>iter_max_in</i> . ....	13
Figura 17 – Estrutura de ponte com 4 fases (Tavakoli et al. 2014) para diferentes valores de <i>iter_max_in</i> . ....	13
Figura 18 – Viga engastada livre com 3 fases (Cui et al. 2018) para diferentes valores de <i>iter_max_in</i> . ....	13
Figura 19 – Viga engastada livre com 4 fases (Cui et al. 2018) para diferentes valores de <i>iter_max_in</i> . ....	13
Figura 20 – Resultado obtido para a Viga Cantilever (Tavakoli et al. 2014) com 3 fases para diferentes valores de <i>rf</i> .....	14
Figura A.1 - Gráficos de histórico da <i>Compliance</i> obtidos para os casos estudados: estrutura de ponte com 3 e 4 fases (Tavakoli et al. 2014) e viga engastada livre com 3 e 4 fases (Cui et al. 2018).....	17

Figura A.2 - Resultado obtido para a Viga <i>Cantilever</i> (Tavakoli et al. 2014) com 4 fases para diferentes valores de $rf$ .....	18
Figura A.3 - Valores de <i>Compliance</i> para a viga <i>cantilever</i> de 3 e 4 fases (Tavakoli et al. 2014) para cada valor de $rf$ . .....	18

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos

$c(\mathbf{x})$	<i>Compliance</i>	[N m]
$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamentos globais	[m]
$\mathbf{F}$	Vetor de forças globais	[N]
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global	[N/m]
$\mathbf{u}_e$	Vetor de deslocamentos	[m]
$k_0$	Matriz de rigidez	[N/m]
$\mathbf{x}$	Vetor das variáveis de projeto (densidade)	[-]
$\mathbf{x}_{min}$	Vetor de densidade mínima	[-]
$N$	Número de elementos do domínio discretizado	[-]
$p$	Fator de penalização	[-]
$V(\mathbf{x})$	Volume de material na estrutura	[m <sup>3</sup> ]
$V$	Volume do domínio de projeto	[m <sup>3</sup> ]
$f$	Fração volumétrica	[-]
$E_e$	Tensor constitutivo do material	[N/m <sup>2</sup> ]
$E_0$	Módulo elástico completo da matriz constitutiva	[N/m <sup>2</sup> ]
$E_{min}$	Módulo elástico mínimo	[N/m <sup>2</sup> ]
$\rho_e$	Densidade do elemento	[-]
$m$	Limite positivo para movimento	[-]
$\eta$	Coefficiente de amortecimento	[-]
$B_e$	Relação <i>Compliance</i> , volume e densidade	[-]
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange	[-]
$\mathbf{D}$	Matriz constitutiva do material (estado plano de tensões)	[N/m <sup>2</sup> ]
$t$	Espessura do elemento finito	[m]
$\mathbf{B}$	Matriz de relação entre deformação e deslocamento	[-]
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformações	[m/m]
$\mathbf{u}$	Vetor de Deslocamentos	[m]
$k_e$	Matriz de rigidez para elemento linear de 4 nós	[N/m]
$\hat{H}_f$	Operador fator de peso	[m]
$r_{min}$	Tamanho da influência do filtro em número de elementos	[-]
$dist$	Operador para cálculo das distancias entre elementos	[-]
$\rho_{ij}$	Densidades para um elemento $i$ da fase $j$	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\phi$	Limiares das Variáveis	[-]
$\beta$	Taxa de aproximação	[-]
$n_x$	Número de elementos na direção horizontal	[-]
$n_y$	Número de elementos na direção vertical	[-]

### Abreviaturas e acrônimos

BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	v
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
SUMÁRIO.....	viii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	2
3.1 Método SIMP.....	2
3.2 Filtro de Densidades.....	4
4 METODOLOGIA.....	4
4.1 Otimização Multimaterial.....	4
4.2 Filtro de Material com função de limiar de Heaviside.....	5
5 RESULTADOS.....	6
5.1 Exemplo de Viga MBB Tavakoli et al. (2014) com 4 fases.....	6
5.2 Exemplo de estrutura de ponte Tavakoli et al. (2014) com 4 fases.....	7
5.3 Exemplo de Viga Engastada Livre de Cui et al. (2018) com 3 fases.....	8
5.4 Exemplo de Viga Engastada Livre de Cui et al. (2018) com 4 fases.....	10
5.5 Testes de Verificação.....	11
5.5.1 Estudo de Malha.....	11
5.5.2 Estudo do Número de Iterações Internas.....	12
5.5.3 Raio do Filtro.....	14
6 CONCLUSÃO.....	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	16
APÊNDICE.....	17

## 1 INTRODUÇÃO

A otimização topológica de peças e componentes é uma realidade atualmente. Contudo, pouco se explora a possibilidade do uso de mais de um tipo de material na sua construção. Isso seria benéfico na geração de novas possibilidades para a otimização topológica estrutural, fazendo-se o uso racional e eficiente das propriedades de resistência específicas de cada material onde for necessário, além de reduzir o custo de projeto e produção. Isso pode ser verificado, segundo HUANG e XIE (2010), pelo aumento do uso estrutural de materiais compósitos, os quais se beneficiam de algoritmos de otimização para a melhora de suas propriedades de acordo com a necessidade.

Dentre as metodologias mais empregadas hoje em dia, podemos destacar a metodologia SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) a qual assume densidades e propriedades elásticas dos materiais como contínuas e diferenciáveis e é baseada em gradientes da função objetivo (em geral *Compliance*) para realizar a otimização topológica; a metodologia BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) que utiliza o MEF (Método dos Elementos Finitos) para avaliar porções do material e simultaneamente retirar e colocar material no domínio de forma que não haverá elementos com densidades intermediárias, removendo a necessidade de filtros finais; e o *Level-Set*, método que se baseia no movimento das fronteiras no domínio, tendo como vantagem não exigir a parametrização dos objetos, permitindo a análise de geometrias complexas. Isso se prova de grande valor para formas que mudam de topologia, sendo muito útil também para modelos transientes.

### 1.1 Motivação

A otimização topológica moderna - apesar de ter se firmado há mais de três décadas (BENDSØE, 1989), teve sua aplicabilidade aumentada nos últimos anos. Isso se deve ao advento da impressão 3D, a qual permitiu a fabricação fiel das peças resultantes do processo de otimização, uma vez que as mesmas eram muito complexas para meios de produção tradicionais. Devido ao uso racional e eficiente das resistências dos materiais, as peças podem apresentar comportamentos que exijam performance destes materiais. O uso de mais de um tipo de material maximiza seus atributos individuais, quer seja sua rigidez, seus limites tensões ou mesmo custo, algo pouco visto nos algoritmos de otimização multimaterial encontrados na literatura.

### 1.2 Objetivos

O presente trabalho propõe a implementação em *Matlab* (2012) de uma formulação para otimização topológica multimaterial com restrições volumétricas dentro de uma metodologia SIMP, baseado nas implementações feitas por TAVAKOLI e MOHSENI (2014). Como objetivos secundários, pretende-se implementar um filtro final para densidades, gerando o mínimo de “regiões cinzentas” (YAMAZAKI et al. (2015) e que atenda às restrições volumétricas (CUI et al. 2018). São avaliados resultados para casos benchmark da literatura em comparação com os resultados do código implementado, além da realização de testes paramétricos das variáveis do algoritmo.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O tema de otimização topológica vem sendo frequentemente abordado em inúmeras pesquisas e trabalhos acadêmicos, como nos trabalhos de conclusão de curso do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS por RIBEIRO (2020) e BÜCKER (2019), por exemplo.

A otimização topológica também pode ser aplicada à análise dinâmica no tempo resultante de múltiplos carregamentos, como proposto por RIBEIRO (2020). O autor implementa, por meio do software *Matlab* (2012), um algoritmo baseado no método BESO com restrição volumétrica que permita otimizar estruturas bidimensionais sujeitas a carregamentos transientes, de forma a ser possível avaliar a segurança das mesmas. Conforme o autor, o método explorado provou-se eficaz

apesar de sua simplicidade, obtendo por vezes resultados melhores que os da literatura utilizada. Ademais, é provado que a otimização realizada para uma solicitação maior não equivale à otimização para várias solicitações.

O trabalho de conclusão de curso de BÜCKER (2019) abordou o tema otimização multimaterial. Para realizar a interpolação de diferentes materiais dentro do mesmo domínio, o autor propôs o uso de funções de distribuição normal. Foram utilizados exemplos da viga em L e da viga engastada livre para validar os resultados, ambos utilizando 4 fases (incluindo o vazio). Na maior parte dos casos obteve sucesso, mas os parâmetros da distribuição de Gauss (média e desvio padrão) devem ser criteriosamente escolhidos, caso contrário poderá haver não convergência na distribuição de algum dos materiais e uma distribuição um pouco dispersa.

TAVAKOLI (2014) propõe um novo método para a otimização topológica multimaterial que consiste na divisão do problema em subproblemas binários menores, permitindo-se o cálculo de forma sequencial para as múltiplas fases da estrutura com *solvers* já existentes. A posterior junção destes resultados incompletos é realizada com uma iteração externa, baseada no método de descida coordenada de bloco por Gauss-Seidel. O algoritmo construído se provou fácil de implementar, sendo possível estender praticamente qualquer ferramenta de otimização bifásica para uma multifásica utilizando a estrutura apresentada. Ademais, a complexidade do código não é afetada pelo número de fases desejadas, ou seja, pode ser facilmente ajustada, provando-se a eficiência do método apresentado através da resolução de inúmeros exemplos.

HUANG e XIE (2010) definem os fundamentos para a otimização topológica multimaterial com um enfoque BESO. Em seu livro, intitulado “*Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures Methods and Applications*”, fazem uso da otimização por rigidez (minimização da *Compliance*). Os módulos de elasticidade para os casos multimateriais são alocados de forma decrescente em um vetor. Definem também que, para estruturas multifásicas, pode-se determinar as propriedades do material situado entre duas fases distintas por meio de uma interpolação penalizada.

Uma metodologia de otimização topológica multimaterial baseada no método PTO (*Proportional Topology Optimization*) foi proposta por CUI et al. (2018). Os autores alegam que a complexidade do problema pode ser diminuída ao fazer-se uso de um método não baseado em gradientes. A função logística é utilizada para a interpolação das densidades entre as fases. Ademais, um filtro de densidades combinado com uma função de limiar de *Heaviside* permitiu que a junção entre dois materiais sólidos ao final da otimização ficasse mais evidente comparado com outros métodos. A acurácia do método proposto foi verificada pela obtenção de *Compliances* finais menores que os exemplos encontrados na literatura, os quais são resolvidos por outros métodos.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 Método SIMP

Fazendo uso de elementos finitos, os métodos de otimização baseiam-se na premissa de retirada de material em regiões pouco solicitadas da estrutura. Esta retirada é realizada de acordo com uma restrição imposta, a qual pode ser volumétrica, relacionada à tensão limite do material utilizado, dentre outras. Sua formulação geral é dada pelas Equações (1) a (4).

$$\text{Minimizar } \mathbf{x}: \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N x_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad V(\mathbf{x})/V_0 = f \quad (2)$$

$$: \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3)$$

$$: \quad \mathbf{0} < \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x}_e \leq \mathbf{1}, \quad (4)$$

sendo  $c(\mathbf{x})$  a flexibilidade da estrutura (*Compliance*),  $\mathbf{U}$  o vetor de deslocamentos globais,  $\mathbf{F}$  o vetor de forças globais,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez global,  $\mathbf{u}_e$  e  $\mathbf{k}_0$  são o vetor de deslocamentos e a matriz de rigidez de um único elemento finito, respectivamente,  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de projeto (neste caso, a densidade em cada elemento finito),  $\mathbf{x}_{min}$  o vetor de densidades mínimas permitidas ( $10^{-3}$  para evitar-se o problema de singularidade),  $N$  o número de elementos do domínio discretizado,  $V(\mathbf{x})$  o volume de material na estrutura como função da densidade,  $V$  o volume do domínio de projeto e  $f$  a fração volumétrica definida pelo usuário (SIGMUND, 2001).

Caso o  $x_e$  seja modelado pela lei de potência ( $x_e^p$ ) a fim de reduzir a rigidez dos elementos que se queiram retirar, temos o método SIMP, onde  $p$  é o fator de penalização do método. Este método, se diferencia dos demais por não fazer uso de densidades discretas, mas sim contínuas no intervalo  $[0,1]$ , evitando-se assim os problemas associados a esta formulação, além de possibilitar o uso de algoritmos de solução que utilizam gradientes. Isso é realizado através da parametrização do tensor constitutivo do material por meio da Equação (5),

$$E_e = E_{min} + (x_e)^p (E_0 - E_{min}), \quad (5)$$

sendo  $E_0$  o módulo elástico completo da matriz constitutiva do material,  $E_{min}$  um valor pequeno ( $E_{min} = 10^{-9}E_0$ ) para evitar problemas numéricos e  $x_e$  a densidade do elemento. Ademais, utiliza-se de um fator de penalização (usualmente  $p=3$ ) aplicado à densidade, de forma a orientar o resultado para as fronteiras do intervalo  $[x_{min}, 1]$ , buscando-se eliminar as densidades intermediárias na estrutura final, já que as mesmas não possuem significado físico (BENDSØE e SIGMUND, 2003).

De acordo com BENDSØE e SIGMUND (1995), pelo Critério de Optimalidade (OC, *Optimality Criteria method*), baseado na 2ª. Condição KKT, pode-se formular um sistema de atualização heurístico para as variáveis de forma a garantir que as densidades atendam, de fato, um extremo das condições de optimalidade. Sendo assim, a Equação (6) indica como as densidades são atualizadas de forma a garantir que em todas as iterações seja satisfeita a restrição de volume imposta para cada fase dos múltiplos materiais.

$$x_e^{new} = \left\{ \begin{array}{ll} \max(x_{min}, x_e - m) & \text{se } x_e B_e^\eta \leq \max(x_{min}, x_e - m) \\ x_e B_e^\eta & \text{se } \max(x_{min}, x_e - m) \leq x_e B_e^\eta \leq \min(1, x_e + m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{se } \min(1, x_e + m) \leq x_e B_e^\eta \end{array} \right\}, \quad (6)$$

onde  $m$  é um limite positivo para o movimento do método das assíntotas,  $\eta$  um coeficiente de amortecimento (com valor igual a 0,5 cujo objetivo é um amortecimento numérico do método OC para evitar variações bruscas no valor de  $B_e$ ) e  $B_e$  é dado pela equação (7), sendo  $\lambda$  um multiplicador de Lagrange, o qual pode ser encontrado por um algoritmo bi-secante (SIGMUND, 2001).

$$B_e = \frac{\partial c}{\partial x_e} / \lambda \frac{dV}{dx_e} \quad (7)$$

A otimização é posteriormente implementada numericamente pelo método OC simplificando o problema em subproblemas sequenciais onde uma aproximação de 1ª. ordem da função objetivo e das restrições é utilizada. A sensibilidade da função objetivo frente às variáveis de projeto são avaliadas como:

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p(x_e)^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (8)$$

que é calculada para cada elemento da malha de elementos finitos e  $k_0$  a matriz de rigidez para módulo elástico unitário. Para montar as matrizes dos elementos finitos assume-se aqui a matriz constitutiva  $\mathbf{D}_e$  para estado plano de tensões:

$$\mathbf{D}_e = E_e \frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} = E_e \mathbf{D}_0 \quad (9)$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento finito fica:

$$\mathbf{k}_e = t \iint_{A_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dA \quad e = 1, \dots, N, \quad (10)$$

onde  $N$  é número de elementos da malha,  $t$  é a espessura do elemento,  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}$ , com  $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$  o vetor de deformações, e  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}^T$ , o vetor de deslocamentos. A matriz de rigidez para elemento linear de 4 nós (solução da Equação 10, indicada em SIGMUND, 2001), fica:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e t}{(1-\nu^2)24} \begin{bmatrix} 12 & 3 & -6 & -3 & -6 & -3 & 0 & 3 \\ & 12 & 3 & 0 & -3 & -6 & -3 & -6 \\ & & 12 & -3 & 0 & -3 & -6 & 3 \\ & & & 12 & 3 & -6 & 3 & -6 \\ & & & & 12 & 3 & -6 & -3 \\ & & & & & 12 & 3 & 0 \\ & & & & & & 12 & -3 \\ \text{sym.} & & & & & & & 12 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 & 9 & 2 & -3 & 4 & -9 \\ & -4 & -9 & 4 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ & & -4 & -3 & 4 & 9 & 2 & 3 \\ & & & -4 & -9 & -2 & 3 & 2 \\ & & & & -4 & 3 & 2 & 9 \\ & & & & & -4 & -9 & 4 \\ & & & & & & -4 & -3 \\ \text{sym.} & & & & & & & -4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A montagem para os respectivos graus de liberdade de todos os  $\mathbf{k}_e$  dos elementos da malha de elementos finitos resulta na matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ . Posteriormente as condições de contorno são aplicadas, resultando na matriz condicionada ( $\mathbf{K}_c$ ) para então ser utilizada para resolver o sistema linear para deslocamentos  $\mathbf{K}_c \mathbf{U} = \mathbf{F}$ .

### 3.2 Filtro de Sensibilidades

De forma a se evitar os inúmeros problemas recorrentes em algoritmos de otimização (tais como *checkerboard* e dependência de malha), faz-se necessário o emprego de um filtro para estas sensibilidades. SIGMUND (2001) emprega um filtro dado pela Equação (12), o qual permite a solução que seja independente da malha. Contudo, conforme ressaltado pelo autor, ainda não foi possível provar que o filtro empregado assegura a existência única de soluções, apesar de garantir a independência de malha desejada.

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{f=1}^N \hat{H}_f} \sum_{f=1}^N \hat{H}_f x_f \frac{\partial c}{\partial x_f}, \quad (12)$$

onde o operador fator de peso ( $\hat{H}_f$ ) é dado por:

$$\hat{H}_f = r_{min} - dist(e, f), \quad \{f \in N | dist(e, f) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, \dots, N \quad (13)$$

sendo  $r_{min}$  o tamanho da influência do filtro em número de elementos e o operador  $dist(e, f)$  definido como a distância entre o centro do elemento em questão  $e$  e o centro do elemento  $f$ . O fator de convolução é nulo fora da área abrangida pelo filtro e decai linearmente com o aumento da distância.

## 4 METODOLOGIA

### 4.1 Otimização Multimaterial

De acordo com HUANG e XIE (2010), parte-se do princípio de otimizar (minimizar) a *compliance* utilizando-se um certo número de fases  $n$  com frações volumétricas definidas pelo usuário  $f_1, \dots, f_n$  de forma que  $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ . Os módulos elásticos dos materiais são colocados em ordem decrescente ( $E_1 > E_2 \dots > E_n$ ) e que os volumes prescritos de cada material  $V_0^j$  estão na mesma ordem. Uma das fases pode ser o vazio, a qual receberá um valor pequeno  $E_n = E_{min} (10^{-9} \max(E_j))$  neste trabalho). Assim, o problema de otimização pode ser colocado da seguinte forma:

$$\min_{\mathbf{x}}: \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N x_e^p \mathbf{u}_e^T k_0 \mathbf{u}_e \quad (14)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad V_0^j - \sum_{i=1}^N V_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{j-1} V_0^i = 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (15)$$

$$: \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (16)$$

$$: \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x}_{ij} \leq \mathbf{1}, \quad (17)$$

com  $x_{ij}$  sendo as densidades para um elemento  $i$  de uma fase  $j$ . Em cada elemento  $i$ , a soma das frações das diversas fases  $j$  deve ser igual a 1 ( $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ ) e a soma dos volumes das fases em todos os elementos deve resultar nas frações pré-definidas ( $\sum_{i=1}^N V_i x_{ij} = V_0^j$ ).

Assim, do mesmo modo que no método SIMP, as propriedades elásticas são interpoladas, duas a duas, conforme a Equação (18).

$$E_e(x_{ij}) = (x_{ij})^p E_j + (1 - x_{ij}^p) E_{j+1}, \quad (18)$$

Para o cálculo da sensibilidade, procede-se de forma similar ao método SIMP, anteriormente explicado, levando-se em conta as múltiplas fases.

$$\frac{\partial c}{\partial x_{ij}} = -p(x_{ij})^{p-1} (\mathbf{u}_i^T k_0^j \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^T k_i^{j+1} \mathbf{u}_i) \quad (19)$$

Para evitar problemas de *checkboard*, uma filtragem independente de malha e baseada em um raio mínimo é feita na sensibilidade durante todo o processo iterativo de otimização. Além do mais, no algoritmo há um laço interno no qual as densidades dos materiais são distribuídas conforme as frações volumétricas de cada fase (dois a dois), sendo esta distribuição confirmada por múltiplas passadas do algoritmo neste laço e controlada pelo usuário com o número máximo de iterações, dado pelo parâmetro *iter\_max\_in*.

## 4.2 Filtro de Material com função de limiar de Heaviside

Uma contribuição deste trabalho está na aplicação de um filtro para que as densidades finais sempre resultem em elementos mais próximos de cheios (1) para uma certa fase  $j$  (e as outras tendam a zero), fato não conseguido completamente com o uso apenas do fator de penalização  $p$  do método SIMP original. De acordo com CUI et al. (2018) isto pode ser conseguido com a utilização de um filtro com uma função limiar de *Heaviside* (*Heaviside Threshold Function*) a qual preserva as frações volumétricas desejadas. As variáveis de projeto precisam passar pela filtragem tradicional (feita a nível de elementos e suas vizinhanças), para só então depois passarem pela filtragem de função de limiar de *Heaviside* (feito uma única vez, ao final da convergência do método). Os valores de densidade abaixo ou acima de um dado limiar gradualmente tendem a 0 e 1 se a função for do tipo:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{\arctan(\beta\phi) + \arctan(\beta(x_{ij} - \phi))}{\arctan(\beta\phi) + \arctan(\beta(1 - \phi))} \quad (20)$$

onde  $\phi \in [0, 1]$  são os limiares das variáveis,  $\beta$  é um número positivo que determina a taxa de aproximação (escolhido pelo usuário),  $\bar{x}_{ij}$  são as densidades filtradas. Em seu trabalho, CUI et al. (2018) afirma que a função *arctan* comporta-se melhor que a função *tanh*, também utilizada em alguns filtros propostos na literatura. Para manter o volume consistente, após aplicar este filtro, o volume final daquela fase deve continuar sendo o mesmo antes da aplicação do filtro, de forma que a seguinte relação, para uma dada fase  $j$ , vale:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} v_i = \sum_{i=1}^N \bar{x}_{ij}(\phi) v_i, \quad (21)$$

Assim, o parâmetro  $\phi$  é obtido pelo método da bisseção de forma a preservar a fração volumétrica após a aplicação do filtro, ou seja, obtido resolvendo-se a Equação (21) para  $\phi$ . CUI et al. (2018) demonstra que este filtro tem gerado ótimos resultados com topologias finais quase que discretas,

indicando um só tipo de material por região de espaço para os resultados finais obtidos com o SIMP. Este problema não necessitaria ser contornado com este filtro, caso a aproximação do problema fosse feita pelo método BESO. Entretanto, ainda assim nas regiões de nós da topologia final, é possível que resulte em materiais que tenham densidades e proporções intermediárias entre as fases dos materiais escolhidos, sendo isto ainda motivo de pesquisas na literatura.

## 5 RESULTADOS

Nesta seção serão resolvidos alguns exemplos de otimização topológica encontrados na literatura referente a materiais com diversas fases. Para todos os problemas propostos nesta seção, utilizam-se os seguintes fatores: penalização  $p = 3$ , raio do filtro  $rf = 8$ , módulo elástico mínimo de  $E_{min} = 10^{-9}N/m^2$ , espessura do elemento finita unitária, máximo de 200 iterações externas, tolerância do filtro de 5% e tolerância para convergência de 0,1%. Todas as cargas ( $F$ ) são unitárias. A proporção entre elementos da malha ( $n_x$  e  $n_y$ ) deve ser idêntica à proporção entre os comprimentos  $L_x$  e  $L_y$ . Em todo problema com simetria geométrica será simulada somente metade da topologia para reduzir o custo computacional. Foi adotado um comprimento de 1 centímetro para cada elemento, indiferente da direção:  $n_x = n_y = 0,01$  [m]. Nas topologias abordadas, o vazio é representado pela cor branca.

### 5.1 Exemplo de Viga MBB Tavakoli et al. (2014) com 4 fases

A viga MBB apresentada em TAVAKOLI et al. (2014) com 4 fases é otimizada. Ela possui uma razão de 2:1 ( $L_x/L_y$ ) com geometria e carregamentos descritos conforme a Figura 1. Usam-se  $n_x = 96$  elementos na horizontal e  $n_y = 48$  na vertical (96x48). Os módulos elásticos das fases dos materiais são:  $E_1 = 9N/m^2$  (vermelho),  $E_2 = 3N/m^2$  (azul),  $E_3 = 1N/m^2$  (verde) e  $E_4 = E_{min}$  (branco). As frações volumétricas desejadas são:  $f_1 = 0,16$ ,  $f_2 = f_3 = 0,08$  e  $f_4 = 0,68$ .

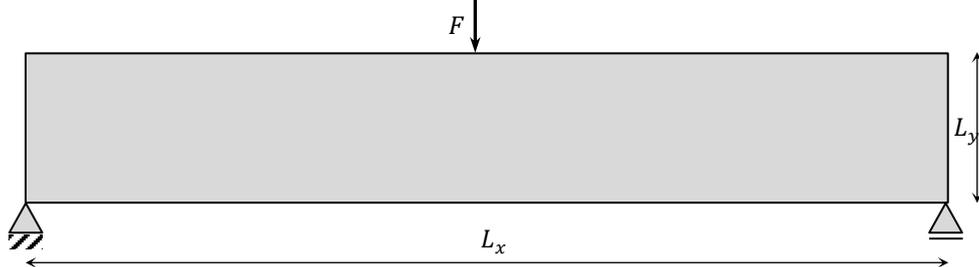


Figura 1 – Viga MBB com carga no centro do vão para otimização topológica.

Na Figura 2 indica-se a topologia resultante após a convergência para o caso resolvido por TAVAKOLI et al. (2014) e o pelo presente trabalho. Percebe-se que o resultado da literatura apresenta uma topologia que possui uma mistura das fases, principalmente nos nós, além da ocorrência de densidades intermediárias nas bordas da estrutura. Isso fica evidenciado pelo fato de a imagem aparentar pouca nitidez, dando um aspecto desfocado à estrutura gerada. Em contraponto, a topologia obtida pelo presente trabalho apresenta contornos bem definidos e alta nitidez, devido à passagem do filtro limiar de *Heaviside* anteriormente mencionado.

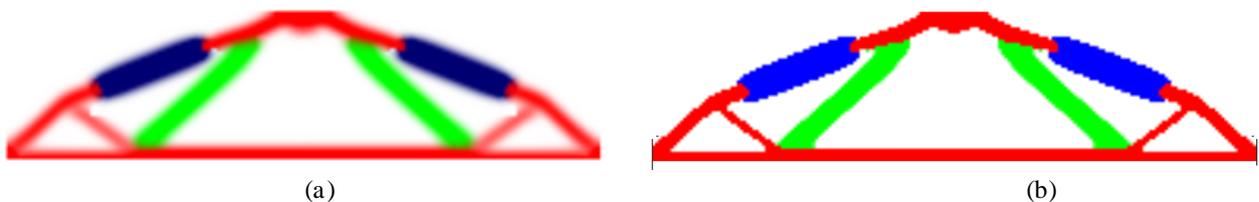


Figura 2 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) deste trabalho (Fases 1 a 4: vermelho, azul, verde e branco).

Na Figura 3 indica-se o histórico - ao longo das iterações - da função objetivo (*Compliance*) para o exemplo resolvido por TAVAKOLI et al. (2014) e por este trabalho, juntamente com a fração

volumétrica obtida em cada fase. Por meio destas é possível confirmar que o filtro implementado efetivamente corrige as densidades intermediárias, além de manter inalteradas as frações volumétricas ao longo das iterações.

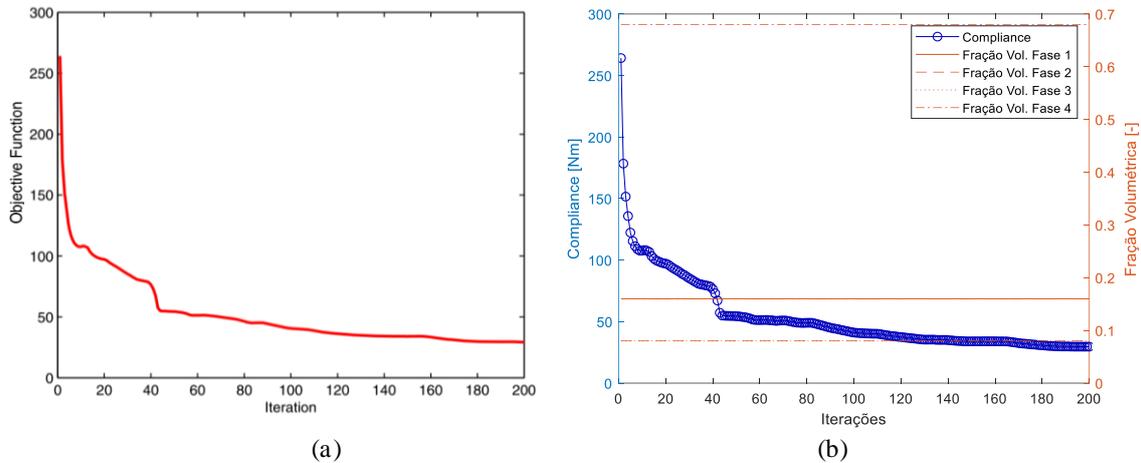


Figura 3 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) obtido com este trabalho para a *Compliance*.

A *Compliance* do presente estudo resultou em 26 J e o valor respectivo de TAVAKOLI et al. (2014) foi de 29,45 J. Isto demonstra novamente a vantagem do filtro proposto, que reduz a *Compliance* devido à transformação dos diversos elementos com fases de densidades intermediárias em novos elementos com uma única fase.

## 5.2 Exemplo de estrutura de ponte Tavakoli et al. (2014) com 4 fases

Neste exemplo, uma estrutura do tipo Ponte com 4 fases é otimizada topologicamente. Sua geometria e cargas são definidas conforme a Figura 4. Os módulos elásticos das fases são dados por:  $E_1 = 9\text{N/m}^2$  (vermelho),  $E_2 = 3\text{N/m}^2$  (azul),  $E_3 = 1\text{N/m}^2$  (verde) e  $E_4 = E_{\text{mín}}$  (branco). As frações volumétricas desejadas são:  $f_1 = 0,2$ ,  $f_2 = f_3 = 0,1$  e  $f_4 = 0,6$ . Utiliza-se uma razão de 1:1 ( $L_x = L_y$ ), sendo usados 96 elementos em cada direção para a construção da malha ( $n_x = n_y = 96$ ).

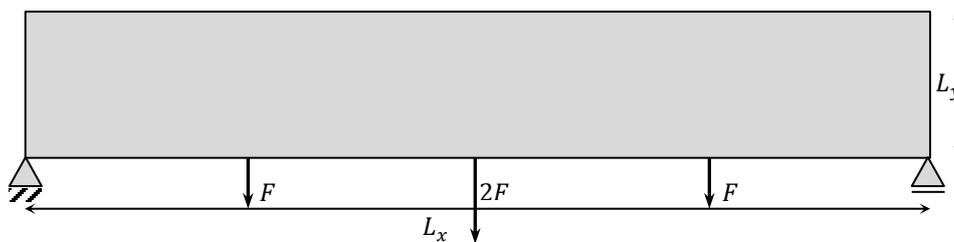


Figura 4 – Estrutura em ponte com três cargas no centro do vão para otimização topológica.

Na Figura 5 encontram-se dispostas as topologias obtidas para este caso por TAVAKOLI et al. (2014) e pelo presente trabalho. Novamente pode-se observar o aspecto mais nítido do resultado obtido pelo presente trabalho face ao resultado da literatura.

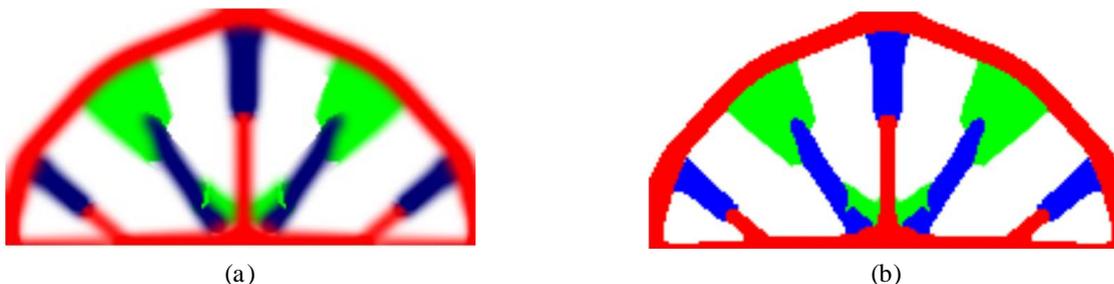


Figura 5 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) deste trabalho (Fases 1 a 4 dadas por vermelho, azul, verde e branco).

Na Figura 6 indica-se o histórico da função objetivo obtido por TAVAKOLI et al. (2014) e por este trabalho, juntamente com a fração volumétrica obtida em cada fase. Desta forma, confirma-se novamente que as modificações implementadas mantêm as frações volumétricas inalteradas, além de corrigir as densidades intermediárias na topologia final.

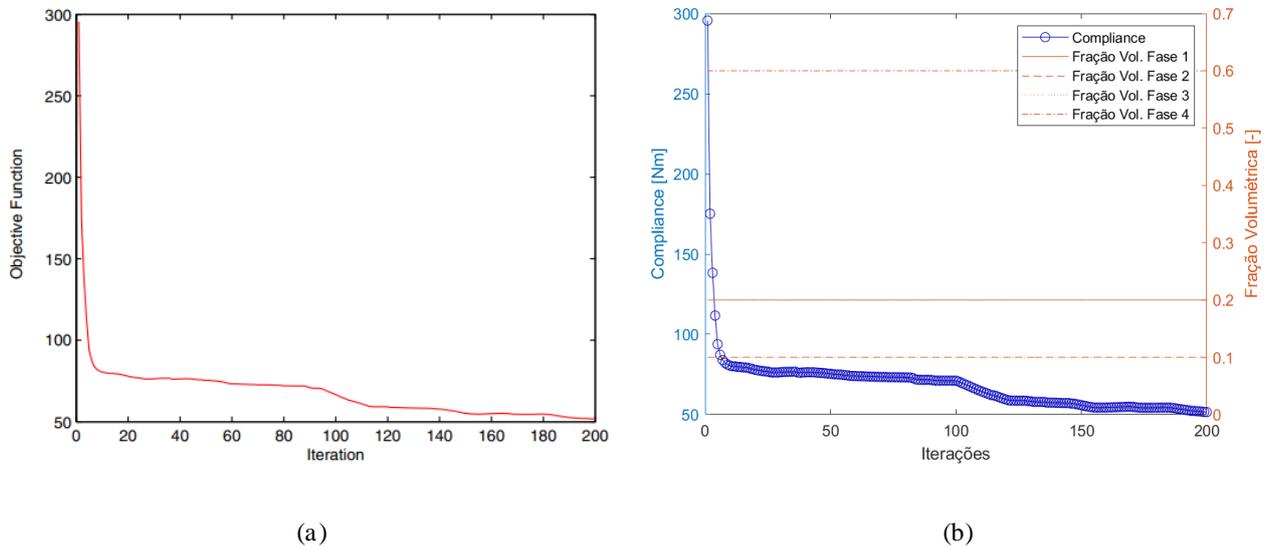


Figura 6 – (a) Resultado de Tavakoli et al. (2014) e (b) obtido com este trabalho para a *Compliance*.

Novamente observa-se o efeito benéfico da passagem do filtro proposto. A *Compliance* resultante para este problema foi de 45,45 J. O valor respectivo obtido por TAVAKOLI et al. (2014) foi de 51,53 J.

### 5.3 Exemplo de Viga Engastada Livre de Cui et al. (2018) com 3 fases

A estrutura tem uma razão dimensional de 2:1, fazendo-se uso de uma malha de  $96 \times 48$  elementos. A carga  $F$  é aplicada na extremidade livre à meia altura ( $L_y/2$ ). A geometria é dada pela Figura 7. Assumem-se três fases definidas da forma:  $E_1 = 2 \text{ N/m}^2$  (vermelho),  $E_2 = 1 \text{ N/m}^2$  (verde) e  $E_3 = E_{min}$  (branco). As frações volumétricas são:  $f_1 = 0,25$ ,  $f_2 = 0,15$  e para o vazio  $f_3 = 0,60$ .

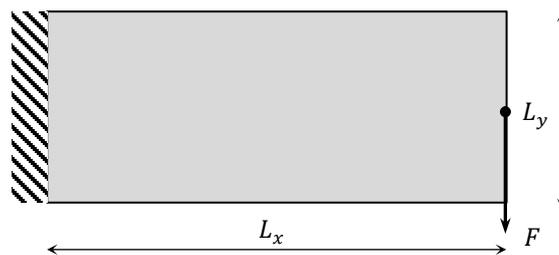


Figura 7 – Viga engastada livre com carga à meia altura na extremidade para otimização topológica.

Na Figura 8 encontram-se dispostas as topologias obtidas (a) por CUI et al. (2018) e (b) pelo presente trabalho. Como pode-se verificar, o resultado possui menor nitidez se comparado com os exemplos anteriores, além de o efeito de serrilhado ser mais notável. Isso ocorre pois, neste problema, não se utiliza somente a metade simétrica para o cálculo, sendo o problema como um todo resolvido para a malha de  $96 \times 48$  elementos, o que gera uma menor resolução na topologia final.

Na Figura 9 indica-se o histórico da função objetivo para este exemplo resolvido por CUI et al. (2018) e por este trabalho, juntamente com a fração volumétrica obtida em cada fase, corroborando com os resultados anteriores com respeito às modificações implementadas.

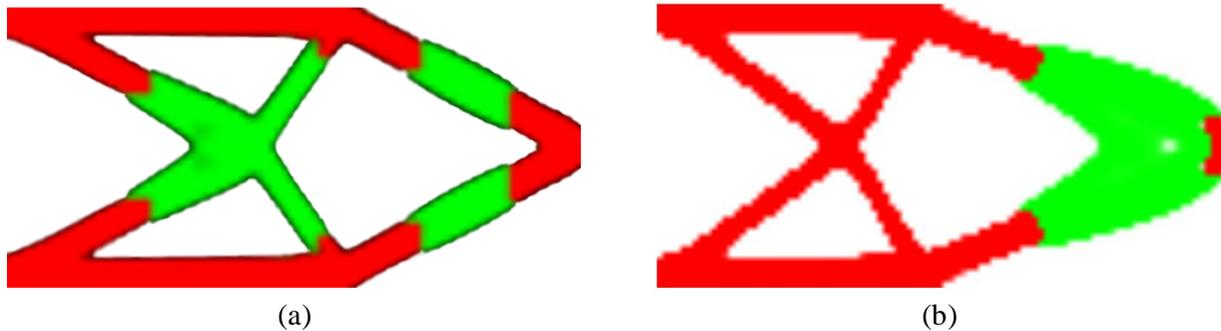


Figura 8 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho (Fases 1, 2 e 3 dadas por: vermelho, verde e branco).

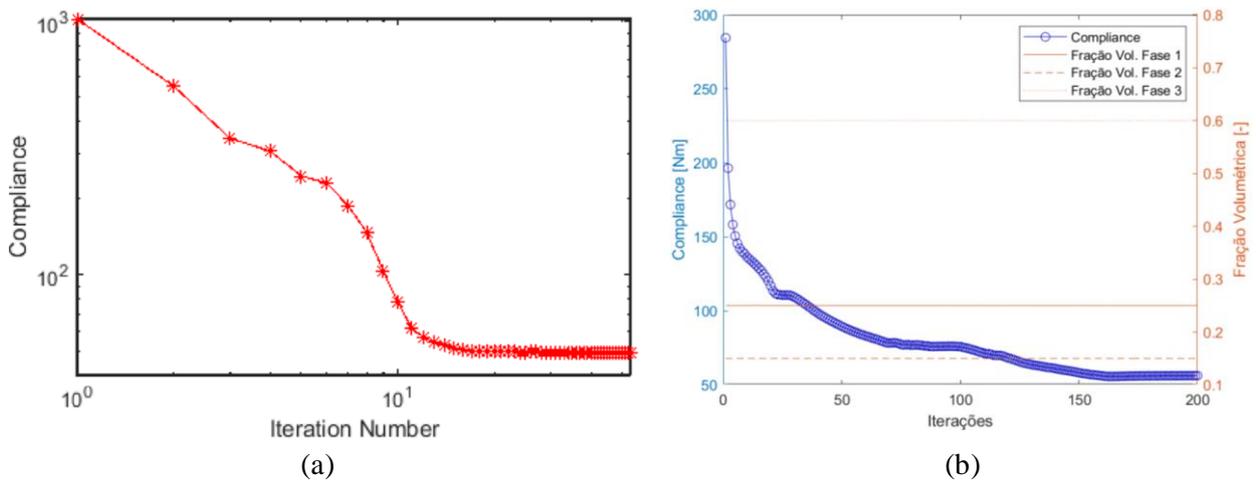


Figura 9 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho para a *Compliance*.

Como pode-se verificar, a topologia obtida - apesar de semelhante - difere da apresentada pela literatura. Isso se deve ao fato de o presente problema, proposto por CUI et al. (2018), ser resolvido utilizando-se um método distinto ao aplicado por TAVAKOLI et al. (2014) - base principal do código desenvolvido para o presente trabalho. Com isso, alguns parâmetros não podem ser replicados corretamente, tais como o raio do filtro ( $rf$ ) e o número de iterações internas ( $iter\_max\_in$ ). Buscando-se reproduzir o problema da forma mais fiel possível, faz-se uso dos mesmos parâmetros utilizados por TAVAKOLI et al. (2014) para a resolução de um problema similar ( $rf = 8$  e  $iter\_max\_in = 2$ ). Assim, a *Compliance* final obtida foi de 50,82 J, enquanto que o resultado por CUI et al. (2018) foi de 48,88 J.

De forma a permitir uma avaliação completa da solução, estudam-se as diferentes combinações paramétricas possíveis entre o raio do filtro ( $rf$ ) e o número de iterações internas. A simulação é realizada avaliando-se cada valor de  $rf$  para um único valor de  $iter\_max\_in$ , o qual é incrementado em *steps* unitários, repetindo-se novamente o processo. Os intervalos de cada variável são:  $4 \leq rf \leq 16$  e  $1 \leq iter\_max\_in \leq 12$ . Dentre as diferentes combinações possíveis (156), a Figura 10 (a) demonstra a melhor topologia obtida ( $rf = 6$  e  $iter\_max\_in = 1$ ), semelhante ao resultado da literatura, com *Compliance* final de 46,6 J. Já a Figura 10 (b) apresenta um compilado de todos os resultados obtidos. A partir da análise dos dados, pode-se verificar que os melhores resultados são obtidos para os menores valores de  $iter\_max\_in$  e  $rf$ . Sendo assim, é possível minimizar a procura para os intervalos  $4 \leq rf \leq 16$  e  $iter\_max\_in \leq 2$ , reduzindo-se para 26 o total de iterações. Caso haja interesse na viabilidade estrutural da topologia, deve-se realizar o procedimento descrito até a ocorrência de um resultado satisfatório. Uma maior discussão acerca deste tópico se dará em seções futuras.

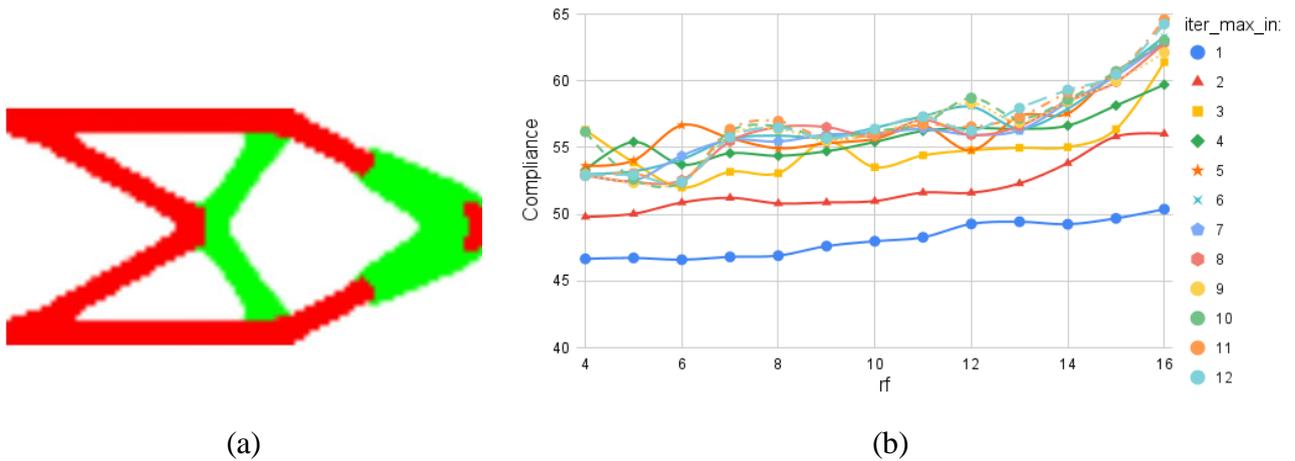


Figura 10 – Melhor resultado obtido para as combinações de  $rf$  e  $iter\_max\_in$ , com *Compliance* de 46,6 J.

#### 5.4 Exemplo de Viga Engastada Livre de Cui et al. (2018) com 4 fases

O mesmo problema anterior agora é analisado com 4 fases, mantendo-se as cargas e geometrias inalteradas. Utiliza-se uma malha de  $120 \times 60$  elementos.  $E_1 = 4 \text{ N/m}^2$  (vermelho),  $E_2 = 2 \text{ N/m}^2$  (verde),  $E_3 = 1 \text{ N/m}^2$  (azul) e  $E_4 = E_{min}$  (branco). As frações volumétricas desejadas são:  $f_1 = 0,25$ ,  $f_2 = 0,15$ ,  $f_3 = 0,10$ ,  $f_4 = 0,50$ . De forma a manter-se uma proporção similar aos exemplos resolvidos por TAVAKOLI et al. (2014), utiliza-se  $rf = 10$ .

A Figura 11 demonstra o resultado obtido por (a) CUI et al. (2018) e (b) pelo presente trabalho. A *Compliance* final calculada por CUI et al. (2018) foi de 23,77 J, em contraponto a 23,38 J para o presente trabalho. Pode-se verificar que, para o presente caso, obteve-se um resultado mais próximo ao da literatura (se comparado ao anterior), tanto para a *Compliance* quanto para a topologia final.

A Figura 12 indica-se o histórico da *Compliance* para este exemplo resolvido por CUI et al. (2018) e por este trabalho, juntamente com a fração volumétrica obtida em cada fase, corroborando com os resultados anteriores para as modificações implementadas.

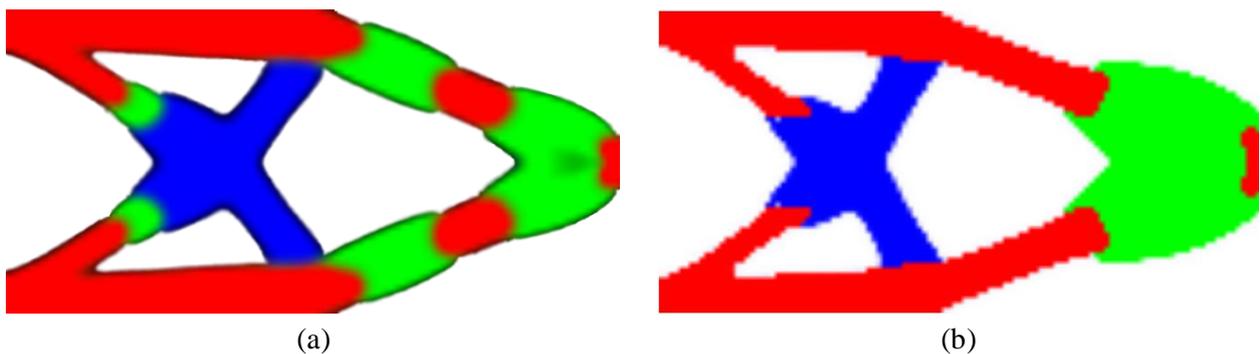


Figura 11 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho (Fases 1 a 4 dadas por vermelho, verde, azul e branco).

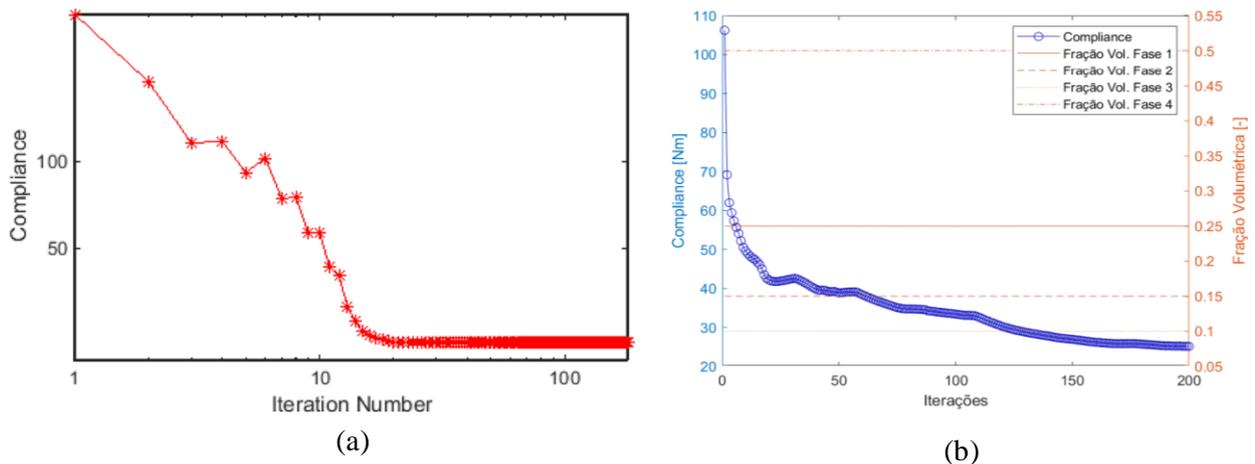


Figura 12 – (a) Resultado de Cui et al. (2018) e (b) obtido com este trabalho para a *Compliance*.

## 5.5 Testes de Verificação

Nesta seção abordam-se certos testes realizados no algoritmo construído a fim de validar-se o mesmo e verificar a influência de certas variáveis sobre o resultado final.

### 5.5.1 Estudo de Dependência de Malha

Este teste consiste na execução repetitiva de um problema, refinando-se a malha a cada novo teste, visando verificar se a mesma tem influência sobre os resultados. Para este caso utiliza-se uma viga MBB (Figura 1) de 4 fases. Os módulos elásticos das fases dos materiais são:  $E_1 = 4\text{N/m}^2$ ,  $E_2 = 2\text{N/m}^2$ ,  $E_3 = 1\text{N/m}^2$  e  $E_4 = E_{\min}$ . Já as frações volumétricas são:  $f_1 = 0,2$ ,  $f_2 = f_3 = 0,15$  e  $f_4 = 0,5$ . As malhas aplicadas são de:  $48 \times 24$ ,  $96 \times 48$  e  $192 \times 96$ . Vale ressaltar que, de acordo com o método estabelecido, deve-se alterar  $rf$  de forma proporcional à malha, de forma a isolá-la como único fator influente (quanto mais refinada a malha, maior o valor de  $rf$ ). Para o presente caso, utilizam-se os valores:  $rf = 4, 8, 16$  respectivamente. A Figura 13 mostra um comparativo entre as três malhas abordadas.

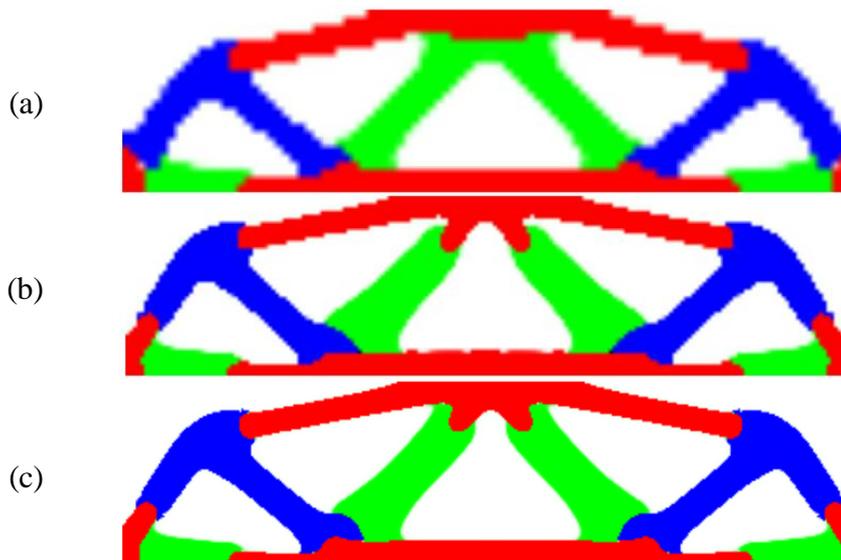


Figura 13 – Resultado para o teste de malha para (a)  $48 \times 24$ , (b)  $96 \times 48$  e (c)  $192 \times 96$  elementos.

Para malhas com um maior número de elementos, a topologia resultante possui uma maior resolução, o que acarreta em uma estrutura com bordas mais definidas e com menor efeito de serrilhado. Malhas com um número insuficientemente baixo de elementos podem acarretar em uma alteração da topologia final. Portanto, desde que mantida uma proporção malha-objeto consistente e

um número suficiente de elementos, a malha não influenciará significativamente no resultado da topologia final.

### 5.5.2 Estudo do Número Máximo de Iterações Internas

Dada a abordagem utilizada por TAVAKOLI et al. (2014) é de interesse verificar se o número de iterações internas ( $iter\_max\_in$ ) afeta o resultado final. Para tal, resolve-se inúmeras vezes o problema da Viga *Cantilever* (TAVAKOLI et al. 2014) para diferentes valores de  $iter\_max\_in$ . Utiliza-se uma malha de  $96 \times 48$  elementos, módulos de elasticidade  $E_1 = 2N/m^2$ ,  $E_2 = 1N/m^2$ ,  $E_3 = E_{min}$  e frações volumétricas  $f_1 = 0,4$ ,  $f_2 = 0,2$  e  $f_3 = 0,4$ , sendo as cores das fases 1, 2 e 3 (vazio) dadas por vermelho, azul e branco, respectivamente. A Figura 14 demonstra a topologia obtida para cada valor de  $iter\_max\_in$ . Percebe-se que, para valores superiores a dois, não há alterações topológicas significativas, apesar de o custo computacional crescer linearmente com  $iter\_max\_in$ .

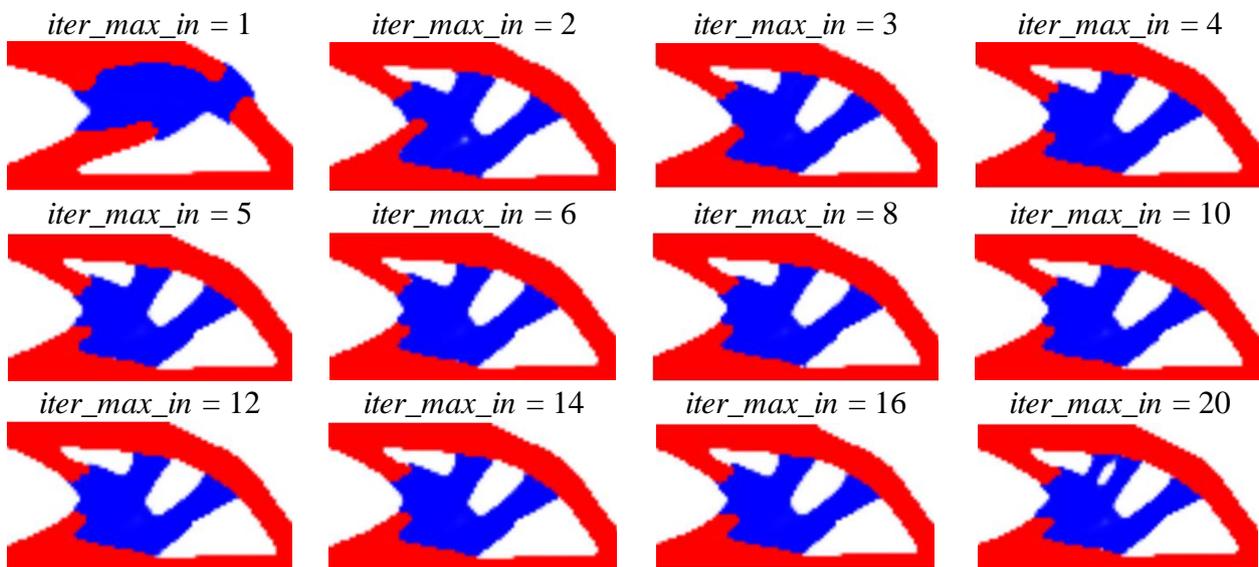


Figura 14 - Resultado para Viga Cantilever de 3 fases (Tavakoli et al. 2014) para diferentes  $iter\_max\_in$ .

Avalia-se agora o mesmo problema, mas com 4 fases. Mantém-se todos os parâmetros originais, alterando-se somente os módulos de elasticidade e frações volumétricas da forma:  $E_1 = 4$ ,  $E_2 = 2$ ,  $E_3 = 1$ ,  $E_4 = E_{min}$ ,  $f_1 = 0,2$ ,  $f_2 = f_3 = 0,1$  e  $f_4 = 0,6$ . A Figura 15 demonstra as topologias resultantes. Percebe-se que no intervalo  $1 \leq iter\_max\_in \leq 4$ , ocorrem mudanças mais significativas na estrutura com quatro fases, se comparada com o exemplo anterior.

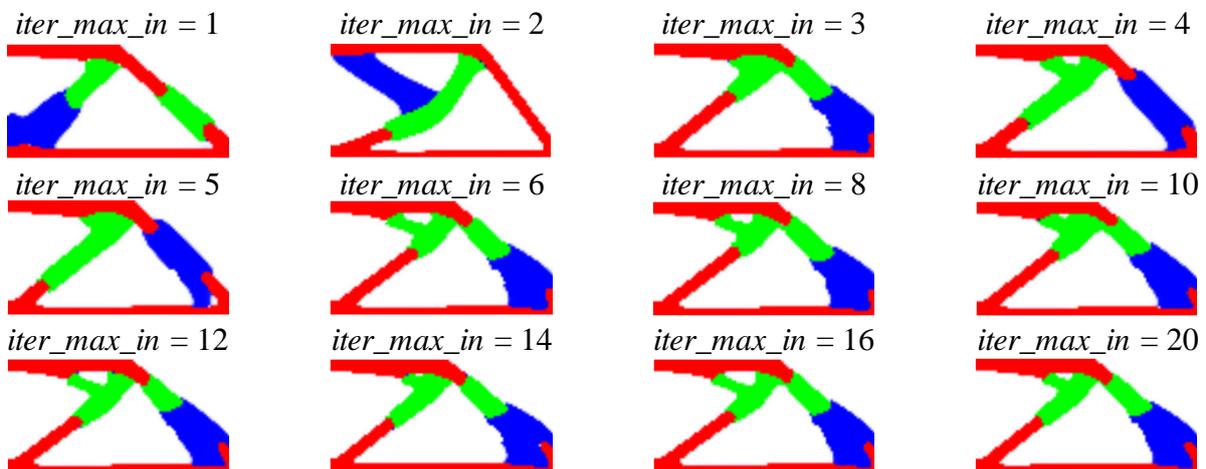


Figura 15 – Resultado para a Viga Cantilever de 4 fases (Tavakoli et al. 2014) com diferentes  $iter\_max\_in$ .

O mesmo teste é realizado para o problema da viga engastada livre proposto por CUI et. al. (2018) - discutido na seção 5.4 - e para a estrutura de ponte proposta por TAVAKOLI et al. (2014), discutida na seção 5.2. Para ambos os casos se mantém os parâmetros originais, variando-se somente o valor de  $iter\_max\_in$ . Ambos os problemas são abordados para o caso de 3 e 4 fases. As Figuras 16 a 19 demonstram os resultados obtidos para a estrutura de ponte com 3 e 4 fases (TAVAKOLI et al. 2014) e para a viga engastada livre de 3 e 4 fases (CUI et al. 2018), nesta ordem.

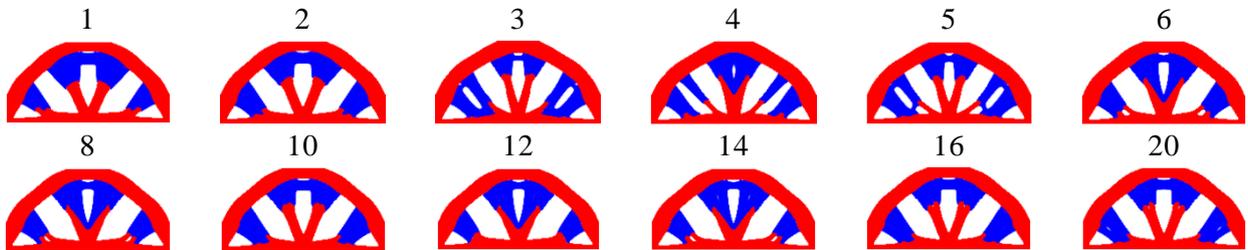


Figura 16 - Estrutura de ponte com 3 fases (Tavakoli et al. 2014) para diferentes valores de  $iter\_max\_in$ .

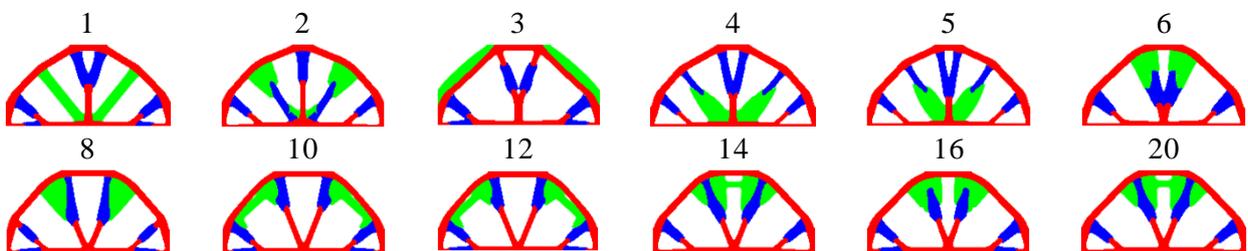


Figura 17 – Estrutura de ponte com 4 fases (Tavakoli et al. 2014) para diferentes valores de  $iter\_max\_in$ .

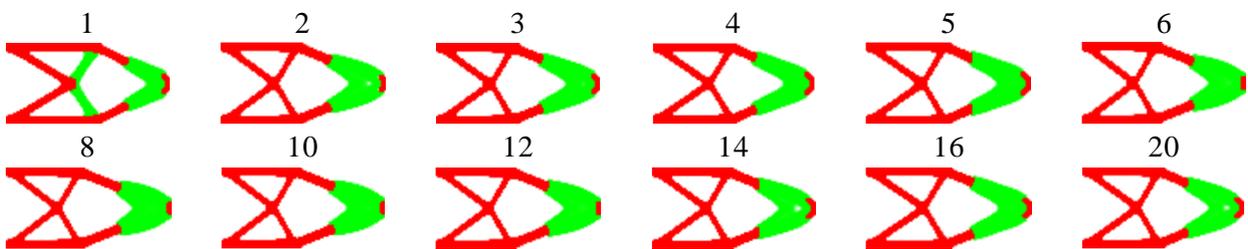


Figura 18 – Viga engastada livre com 3 fases (Cui et al. 2018) para diferentes valores de  $iter\_max\_in$ .

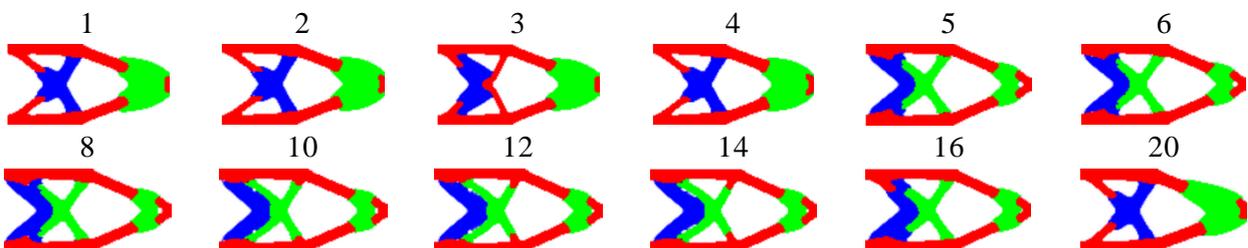


Figura 19 – Viga engastada livre com 4 fases (Cui et al. 2018) para diferentes valores de  $iter\_max\_in$ .

Com base nos resultados obtidos para os seis exemplos abordados, pode-se verificar que o aumento no número de fases torna a topologia mais sensível às variações de  $iter\_max\_in$ . Isso fica evidenciado analisando-se as Figuras (15, 17 e 19), as quais apresentam significativas mudanças em sua topologia durante o estudo. Já as topologias mostradas nas Figuras (14, 16 e 18) apresentam uma maior constância, usualmente para valores de  $iter\_max\_in \geq 2$ . Outro fator acentuado pelo aumento do número de iterações internas é a instabilidade (distribuição mais irregular dos materiais) dos

resultados. Como pode-se observar, a instabilidade das topologias aumenta com  $iter\_max\_in$ , por vezes gerando estruturas impraticáveis de construção (p.e., Figura 19,  $iter\_max\_in \geq 20$ ).

Apesar das diferenças ressaltadas, uma tendência se manteve constante em todos os problemas abordados. Independentemente do número de fases, quanto maior o número de  $iter\_max\_in$ , maior é a *Compliance* resultante. Dessa forma, pode-se assegurar que o valor ótimo para esta variável será  $iter\_max\_in = 1$ . Entretanto, caso haja interesse na viabilidade de construção da topologia, basta avaliar-se um pequeno intervalo de procura para a variável, partindo-se de 1 com incrementos unitários. Assim, pode-se garantir que o melhor resultado será a primeira estrutura estável encontrada. Isso fica evidente ao analisar-se o histórico da *Compliance* para cada caso. No Apêndice (Figura A.1) encontram-se dispostos os gráficos de *Compliance* vs.  $iter\_max\_in$  para os seis casos estudados, estando estes na mesma ordem em que foram abordados.

### 5.5.3 Raio do Filtro

De forma a avaliar influência de  $rf$  nos resultados, resolve-se novamente o problema da viga Cantilever (TAVAKOLI et al. 2014) para três e quatro fases. Para ambos os casos, utiliza-se uma malha de  $96 \times 48$  elementos e varia-se o raio do filtro no intervalo  $4 \leq rf \leq 16$ . Primeiro, aborda-se o problema com três fases. Os módulos de elasticidade são  $E_1 = 2 \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 1 \text{ N/m}^2$ ,  $E_3 = E_{\min}$  e frações volumétricas  $f_1 = 0,4$ ,  $f_2 = 0,2$ ,  $f_3 = 0,4$ , sendo as cores das fases 1 a 3 dadas por vermelho, azul e branco, respectivamente. A Figura 20 demonstra os resultados obtidos para o problema com três fases para cada valor de  $rf$ . Além disso, calcula-se o percentual de  $rf$  em relação ao menor comprimento da malha ( $ny$ , para este caso).

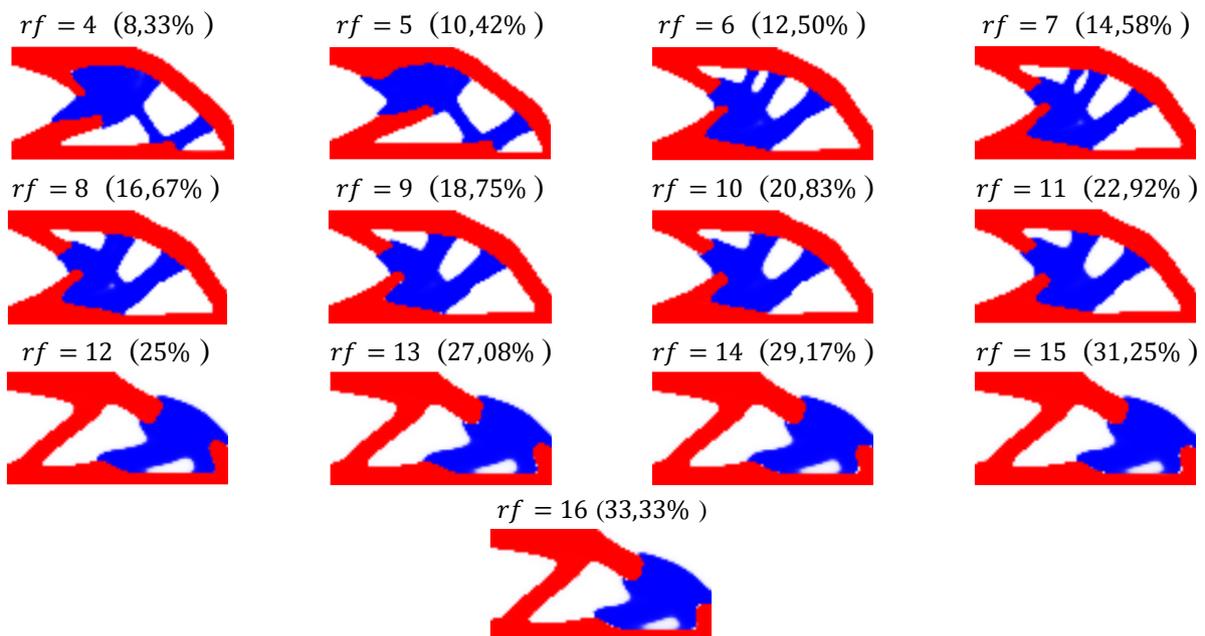


Figura 20 – Resultado obtido para a Viga Cantilever (Tavakoli et al. 2014) com 3 fases para diferentes valores de  $rf$ .

Para o problema com 4 fases, utilizam-se os módulos de elasticidade:  $E_1 = 4 \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 2 \text{ N/m}^2$ ,  $E_3 = 1 \text{ N/m}^2$  e  $E_4 = E_{\min}$  e frações volumétricas  $f_1 = 0,2$ ,  $f_2 = f_3 = 0,1$  e  $f_4 = 0,6$ , sendo as cores das fases 1 a 4 dadas por vermelho, azul, verde e branco, respectivamente. Os resultados obtidos encontram-se dispostos no Apêndice (Figura A.2).

De forma análoga ao estudo anteriormente realizado para o máximo de iterações internas, pode-se observar o mesmo comportamento para  $rf$ . Conforme demonstrado no Apêndice (Figura A.3), para ambas as fases, ocorre um crescimento constante da *Compliance* com o aumento de  $rf$ , sendo o melhor resultado obtido para  $rf = 4$ . Caso haja interesse na viabilidade da estrutura, deve-se repetir

os procedimentos anteriormente descritos, partindo-se de  $rf = 4$  (já que valores menores poderão resultar em *checkboxboard*) e aumentando-se gradualmente o raio do filtro até a obtenção de uma topologia exequível. Isso garante que a topologia encontrada, dentre todas as possibilidades exequíveis, será a de menor *Compliance* (solução ótima).

## 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo investigar e modificar as implementações propostas por TAVAKOLI et al. (2014) para um algoritmo de otimização topológica multimaterial com formulação SIMP, além da implementação de um filtro de material com função limiar de *Heaviside* (CUI et al. 2018), para minimizar a existência de densidades intermediárias. Devido ao uso racional e eficiente de todos os materiais utilizados na otimização, tem-se a capacidade de maximizar seus atributos individuais na topologia final, quer sejam eles rigidez, limites tensões ou mesmo custo.

Dada a implementação do filtro com função limiar de *Heaviside* proposto e comparando-se os resultados obtidos para casos *benchmark* da literatura com os gerados pelo código implementado, pode-se verificar que o uso do filtro é benéfico, tanto para a topologia - reduzindo-se a incidência de densidades intermediárias - quanto para o valor de *Compliance* final, que foi reduzida em 11,8% para certos casos, desde que feito o uso eficiente dos parâmetros.

Dentre as variáveis estudadas, pode-se confirmar que a malha não interfere no resultado final, desde que a mesma possua um número suficiente de elementos para representar a topologia e que se mantenha uma proporção malha-objeto consistente. Já o raio do filtro ( $rf$ ) e o máximo de iterações internas ( $iter\_max\_in$ ) possuem uma maior influência sobre os resultados. Ambas as variáveis influenciam mais a topologia final quanto maior o número de fases do problema. Verificou-se também que o valor da função objetivo (*Compliance*) piora com o aumento das variáveis. Sendo assim, seus valores ótimos são os menores possíveis dentre os intervalos abordados ( $rf = 4$  e  $iter\_max\_in = 1$ ). Contudo, por vezes, o resultado ótimo é uma topologia abstrata (instável). Caso haja interesse na viabilidade de execução da estrutura, requer-se uma abordagem mais cautelosa quanto à escolha das variáveis. A solução encontrada consiste em dar-se início à simulação com valores do extremo inferior do intervalo, aumentando-os gradualmente até que se obtenha uma topologia exequível e adequada aos critérios do usuário.

Como sugestão para trabalhos futuros, de forma a permitir a otimização da estrutura de acordo com as propriedades do material, tem-se a implementação das restrições de tensão. Dessa forma, dispensa-se a necessidade de múltiplas iterações para o problema e a definição prévia das frações volumétricas, além de garantir-se a estabilidade estrutural da topologia. O uso de propriedades mais reais para os materiais e para os carregamentos também podem ser tópico de estudo. Ademais, poder-se-ia realizar uma análise sobre a viabilidade de substituição do método de otimização utilizado, passando-se do SIMP ao BESO. Isso seria benéfico para o algoritmo, não sendo mais necessário o uso de um filtro, uma vez que, para o método BESO, não há densidades intermediárias. Por fim, a transição e compatibilização entre as fases da topologia otimizada, atualmente debatido na comunidade internacional, deve ser objeto de estudo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENDSØE, M. P. “**Optimal shape design as a material distribution problem**”. Springer-Verlag, Structural Optimization 1, 193-202 (1989).

BENDSØE, M. P., SIGMUND, O. “**Topology Optimization**”. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg GmbH, 2<sup>nd</sup>. Edition, 370p. 2002.

BÜCKER, A. W. “**Otimização topológica multimaterial baseado na distribuição normal para a maximização da rigidez estrutural**”, 26p. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS, 2019.

CUI, M., ZHANG, Y., YANG, X., LUO, C. “**Multimaterial proportional topology optimization based on the modified interpolation scheme**”, Engineering with Computers, 34, p.287–305, 2018.

HUANG, X.; XIE, Y. M. “**Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and Applications**”. John Wiley & Sons LTD, 223 p., 2010.

THE MATHWORKS INC. (2012). MATLAB version: 8.0 (R2012b), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>.

PALMA, L. F. “**Estudos complementares sobre Otimização Topológica Multimaterial utilizando interpolação SIMP ordenada**”. 124p. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, SC, 2018.

RIBEIRO, T.S. “**Otimização topológica para análise dinâmica no tempo e múltiplos carregamentos**”. 15p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR - RS, 2020.

SIGMUND, O. “**A 99 line topology optimization code written in Matlab**”. Struct Multidisc Optim 21, 120–127 (2001).

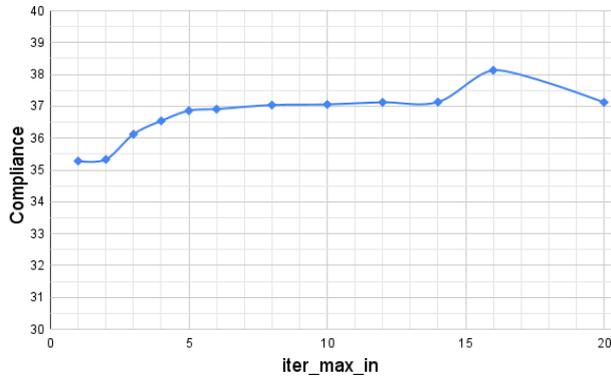
TAVAKOLI, R., MOHSENI, S.M. “**Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line MATLAB implementation**”. Structural and Multidisciplinary Optimization. 49:621–642, 2014.

YAMASAKI, S.; KAWAMOTO, A.; NOMURA, T.; FUJITA, K. “**Applications of a Consistent Grayscale-free Topology Optimization Method to Industrial Design Problems**”. June, p. 3-8, 2015. 48, 71.

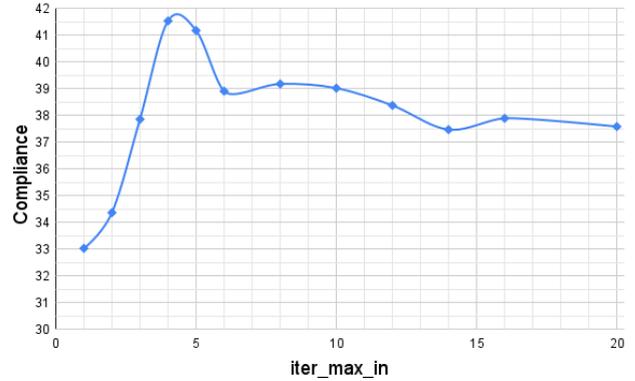
## APÊNDICE

Figura A.1 - Gráficos de histórico da *Compliance* obtidos para os casos estudados: estrutura de ponte com 3 e 4 fases (Tavakoli et al. 2014) e viga engastada livre com 3 e 4 fases (Cui et al. 2018).

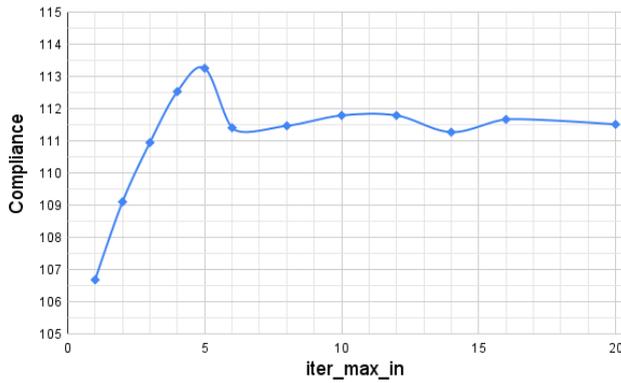
Viga Cantilever com 3 fases - Tavakoli et al. 2014



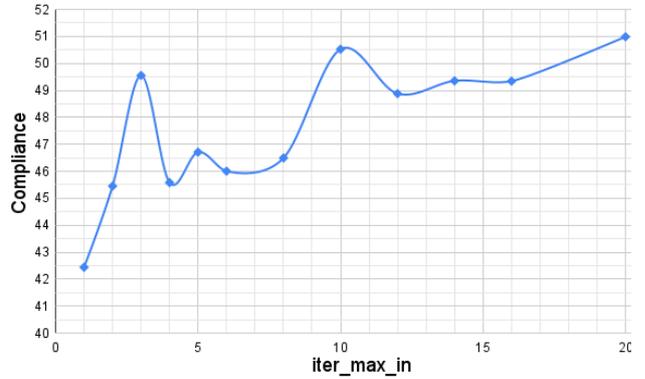
Viga Cantilever com 4 fases - Tavakoli et al. 2014



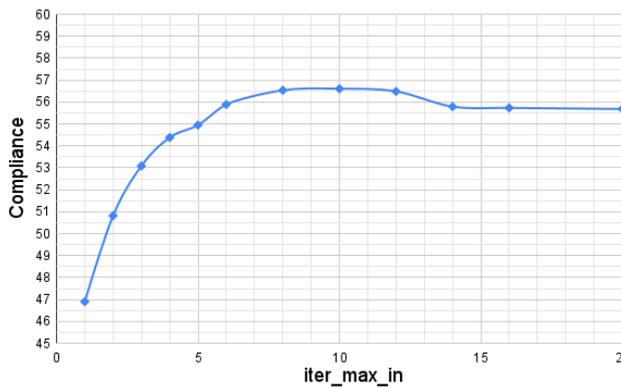
Estrutura de ponte com 3 fases - Tavakoli et al. 2014



Estrutura de ponte com 4 fases - Tavakoli et al. 2014



Viga engastada livre com 3 fases - CUI et al. 2018



Viga engastada livre com 4 fases - CUI et al. 2018

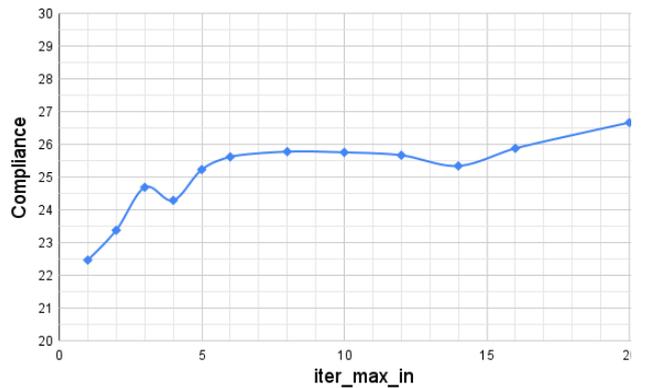


Figura A.2 - Resultado obtido para a Viga *Cantilever* (Tavakoli et al. 2014) com 4 fases para diferentes valores de *rf*.

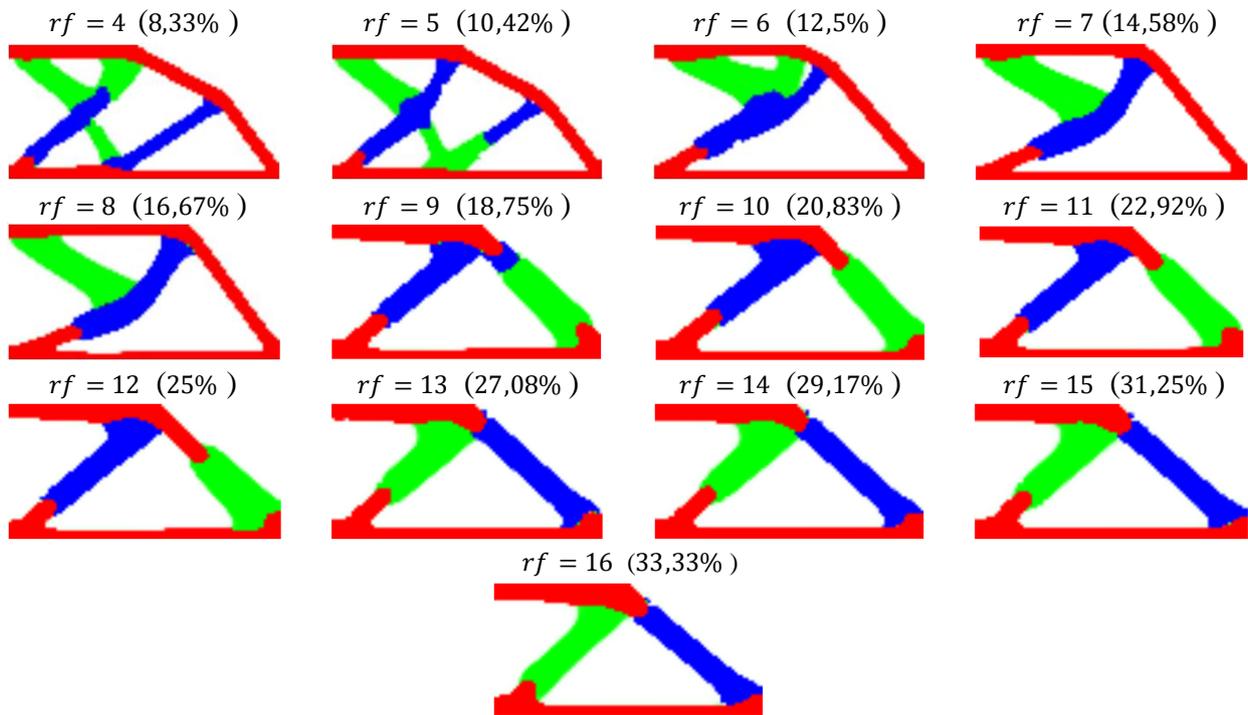


Figura A.3 - Valores de *Compliance* para a viga *cantilever* de 3 e 4 fases (Tavakoli et al. 2014) para cada valor de *rf*.

