

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução analítica das equações de cinética  
espacial de nêutrons em geometria cilíndrica  
tridimensional via separação de variáveis**

por

Jenifer Cassandra da Silva Oliveira

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestra em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes  
Orientador

Porto Alegre, 30 de maio de 2023

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Oliveira, Jenifer Cassandra da Silva

Solução analítica das equações de cinética espacial de nêutrons em geometria cilíndrica tridimensional via separação de variáveis / Jenifer Cassandra da Silva Oliveira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2023.

109 p.: il.

Dissertação (mestrado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2023.

Orientador: Fernandes, Julio Cesar Lombaldo

Dissertação: Matemática Aplicada: Transporte de Partículas, Reatores nucleares, Cinética espacial de nêutrons, Geometria cilíndrica tridimensional, Separação de variáveis

# Solução analítica das equações de cinética espacial de nêutrons em geometria cilíndrica tridimensional via separação de variáveis

por

Jenifer Cassandra da Silva Oliveira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestra em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Transporte de Partículas

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Rodrigues de Oliveira  
Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS) - Campus Osório

Profa. Dra. Cibele Aparecida Ladeia  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Prof. Dr. Claudio Zen Petersen  
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL)

Dissertação apresentada e aprovada em  
maio de 2023.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira  
Coordenador

*“Daria tudo que sei pela metade do que ignoro”.*

*- René Descartes.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe e minhas irmãs, por me ajudarem e apoiarem ao longo da minha trajetória de estudante.

Ao professor Dr. Julio Lombaldo, por aceitar orientar esse trabalho, pelos ensinamentos durante o período de mestrado e por sempre estar disposto a me ajudar.

Ao professor Dr. Fernando Rodrigues de Oliveira, pelo exemplo de profissional da área, pelas valiosas contribuições no desenvolvimento desse trabalho e por todos os ensinamentos durante o período de graduação e mestrado. Obrigada pela paciência, pelo incentivo em ingressar no mestrado e pela disposição em esclarecer minhas dúvidas.

A minha dupla acadêmica, Murilo Tedesco, pela parceria, amizade e cumplicidade durante o período de graduação e mestrado. És peça fundamental na minha formação, contigo aprendi e aprendo muito.

Aos amigos Vanessa Garofali e Leonardo Schneider, obrigada por sempre estarem dispostos a ouvirem minhas explicações sobre a dissertação, principalmente nessa reta final. Obrigada por ajudarem a amenizar minhas aflições e pelas palavras de incentivo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de estudos que permitiu dedicar-me integralmente ao mestrado.

Por fim, a UFRGS, especialmente aos profissionais do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), pelo ensino sério e de qualidade.

# SUMÁRIO

|  |             |
|--|-------------|
| <b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .  | <b>vii</b>  |
| <b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .  | <b>ix</b>   |
| <b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .   | <b>x</b>    |
| <b>RESUMO</b> . . . . .  | <b>xiii</b> |
| <b>ABSTRACT</b> . . . . .  | <b>xiv</b>  |
| <b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .  | <b>1</b>    |
| <b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> . . . . .   | <b>4</b>    |
| 2.1 Aspectos introdutórios sobre a teoria de reatores nucleares . . . . .        | 4           |
| 2.2 Definição de termos físico-matemáticos . . . . .                             | 6           |
| 2.3 Difusão de nêutrons . . . . .  | 10          |
| 2.3.1 <i>Equação de difusão de nêutrons para o caso monoenergético</i> . . . . . | 11          |
| 2.3.2 <i>Equações multigrupo de difusão de nêutrons</i> . . . . .                | 15          |
| 2.4 Cinética de reatores nucleares . . . . .                                     | 20          |
| 2.4.1 <i>Equações de cinética espacial</i> . . . . .                             | 22          |
| <b>3 METODOLOGIA DE PESQUISA</b> . . . . .                                       | <b>26</b>   |
| 3.1 Formulação do problema . . . . .   | 26          |
| 3.1.1 <i>Condições de fronteira</i> . . . . .                                    | 28          |
| 3.2 Objetivos . . . . .  | 29          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>4</b> | <b>SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA TRIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CILÍNDRICA . . . . .</b> | <b>31</b> |
| 4.1      | Solução para a variável espacial . . . . .  | 34        |
| 4.2      | Solução para a variável temporal . . . . .  | 55        |
| 4.3      | Solução explícita . . . . .   | 58        |
| <b>5</b> | <b>ANÁLISE DA SOLUÇÃO ANALÍTICA . . . . .</b>   | <b>65</b> |
| 5.1      | Primeira situação particular . . . . .  | 66        |
| 5.1.1    | Análise do fluxo escalar de nêutrons da primeira situação particular . . . . .        | 69        |
| 5.2      | Segunda situação particular . . . . .   | 75        |
| 5.2.1    | Análise do fluxo escalar de nêutrons da segunda situação particular . . . . .         | 78        |
| <b>6</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>   | <b>86</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>  | <b>91</b> |

# LISTA DE FIGURAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Partícula neutra no espaço . . . . .  | 8  |
| 2.2 | Volume de controle do balanço de nêutrons . . . . .   | 12 |
| 2.3 | Esquema de discretização da variável energia $E$ em $G$ grupos/intervalos . . . . .   | 15 |
| 5.1 | Gráfico de dispersão do tempo computacional para calcular $\phi_1$ em função da quantidade de termos dos somatórios . . . . .   | 68 |
| 5.2 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular quando $z = 4 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$  | 70 |
| 5.3 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$  | 70 |
| 5.4 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ com domínio da variável $z$ expandido . . . . .  | 71 |
| 5.5 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular em função de $r$ e $z$ quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ para os tempos $t = 1 \text{ s}$ , $t = 5 \text{ s}$ , $t = 15 \text{ s}$ e $t = 30 \text{ s}$ . . . . . | 72 |
| 5.6 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ e $z = 4 \text{ cm}$ . . . . .  | 73 |
| 5.7 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ , $z = 4 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .   | 74 |
| 5.8 | Fluxo escalar de nêutrons da 1 <sup>a</sup> situação particular em função de $t$ e $z$ , de $t$ e $r$ , e de $t$ e $\theta$ . . . . .   | 75 |
| 5.9 | Gráfico de dispersão do tempo computacional para calcular $\phi_2$ em função da quantidade de termos dos somatórios . . . . .   | 78 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5.10 | Fluxo escalar de nêutrons da 2 <sup>a</sup> situação particular quando $z = 4 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .  | 79 |
| 5.11 | Fluxo escalar de nêutrons da 2 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .  | 80 |
| 5.12 | Fluxo escalar de nêutrons, para a 2 <sup>a</sup> situação particular, em função de $r$ e $z$ quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ para os tempos $t = 1 \text{ s}$ , $t = 5 \text{ s}$ , $t = 15 \text{ s}$ e $t = 30 \text{ s}$ . . . . . | 81 |
| 5.13 | Fluxo escalar de nêutrons da 2 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ e $z = 4 \text{ cm}$ . . . . .  | 82 |
| 5.14 | Fluxo escalar de nêutrons da 2 <sup>a</sup> situação particular quando $r = 5 \text{ cm}$ , $z = 4 \text{ cm}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .   | 83 |
| 5.15 | Fluxo escalar de nêutrons da 2 <sup>a</sup> situação particular em função de $t$ e $z$ , de $t$ e $r$ , e de $t$ e $\theta$ . . . . .   | 84 |

## LISTA DE TABELAS

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Fração de nêutrons atrasados e constante de decaimento para cada grupo do combustível $U_{92}^{235}$ . . . . . | 21 |
| 5.1 | Parâmetros nucleares utilizados na 1ª situação particular . . . . .  | 66 |
| 5.2 | Valores estimados para o fluxo escalar variando $n$ , $k$ e $l$ . . . . .                                      | 67 |
| 5.3 | Parâmetros nucleares utilizados na 2ª situação particular . . . . .  | 76 |
| 5.4 | Valores estimados para o fluxo escalar variando $n$ , $k$ e $l$ para a 2ª situação particular . . . . .        | 77 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $\beta$                             | Fração total de nêutrons atrasados.  |
| $\beta_i$                           | Fração de nêutrons atrasados do grupo $i$ de precursores.  |
| $\chi_g$                            | Fração de nêutrons que aparece no grupo $g$ .  |
| $\lambda$                           | Constante de decaimento radioativo do grupo de precursores [ $s^{-1}$ ].                                     |
| $\lambda_i$                         | Constante de decaimento radioativo do grupo $i$ de precursores [ $s^{-1}$ ].                                 |
| $\nabla[.]$                         | Operador matemático gradiente.   |
| $\nabla^2[.]$                       | Operador matemático laplaciano.  |
| $\nu$                               | Número médio de nêutrons liberados no processo de fissão.  |
| $\nu_{g'}$                          | Número médio de nêutrons de fissão liberados em uma reação de fissão induzida por um nêutron no grupo $g'$ . |
| $\phi(\vec{r}, E, t)$               | Fluxo escalar de nêutrons na posição $\vec{r}$ , no tempo $t$ e na energia $E$ [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].          |
| $\phi(\vec{r}, t)$                  | Fluxo escalar de nêutrons na posição $\vec{r}$ e no tempo $t$ [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].                           |
| $\phi_g(\vec{r}, t)$                | Fluxo escalar de nêutrons na posição $\vec{r}$ do grupo $g$ no tempo $t$ [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].                |
| $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ | Fluxo angular de nêutrons [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].   |
| $\sigma_1$                          | Constante de separabilidade.   |
| $\sigma_2$                          | Constante de separabilidade.   |
| $\sigma_3$                          | Constante de separabilidade.   |
| $\sigma_4$                          | Constante de separabilidade.   |

- $\Sigma_a(\vec{r}, t)$  Seção de choque macroscópica de absorção na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$  [ $cm^{-1}$ ].
- $\Sigma_f(\vec{r}, t)$  Seção de choque macroscópica de fissão na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$  [ $cm^{-1}$ ].
- $\Sigma_{ag}(\vec{r}, t)$  Seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição  $\vec{r}$  no grupo  $g$  e no tempo  $t$  [ $cm^{-1}$ ].
- $\Sigma_{fg'}(\vec{r}, t)$  Seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g'$  e no tempo  $t$ .
- $\Sigma_{Rg}$  Seção de choque macroscópica de remoção do grupo  $g$  [ $cm^{-1}$ ].
- $\Sigma_{sg \rightarrow g'}(\vec{r}, t)$  Seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  para o grupo  $g'$  no tempo  $t$  [ $cm^{-1}$ ].
- $\Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t)$  Seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g'$  para o grupo  $g$  no tempo  $t$  [ $cm^{-1}$ ].
- $\vec{\Omega}$  Vetor unitário que indica a direção do movimento dos nêutrons.
- $\vec{J}(\vec{r}, E, t)$  Corrente neutrônica [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].
- $\vec{n} dA \int_{4\pi} \vec{v} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega}$  Número líquido de nêutrons que cruzam uma superfície de área  $dA$  [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].
- $\vec{n}$  Vetor unitário normal a uma superfície.
- $\vec{r}$  Vetor posição do nêutron [ $cm$ ].
- $\vec{v}$  Vetor velocidade do nêutron [ $cm/s$ ].
- $C(\vec{r}, t)$  Concentração de precursores do grupo de precursores na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$  [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].
- $C_i(\vec{r}, t)$  Concentração de precursores do grupo  $i$  de precursores na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$  [ $cm^{-2}s^{-1}$ ].

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $D(\vec{r}, t)$                  | Coeficiente de difusão na posição $\vec{r}$ e no tempo $t$ [ $cm$ ].                          |
| $D_g(\vec{r}, t)$                | Coeficiente de difusão na posição $\vec{r}$ do grupo $g$ e no tempo $t$ [ $cm$ ].             |
| $D_{dif}$                        | Coeficiente de difusão [ $cm$ ].  |
| $E$                              | Energia cinética dos nêutrons [ $eV$ ].   |
| $E_g$                            | Energia cinética dos nêutrons no grupo $g$ [ $eV$ ].  |
| $G$                              | Quantidade de grupos de energia.  |
| $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ | Densidade neutrônica no espaço de fase/ densidade angular [ $cm^{-3}$ ].                      |
| $n(\vec{r}, E, t)$               | Densidade de nêutrons [ $cm^{-3}$ ].  |
| $S_f(\vec{r}, t)$                | Fonte de nêutrons devido à fissão na posição $\vec{r}$ e no tempo $t$ [ $cm^{-3}s^{-1}$ ].    |
| $S_g^{ext}(\vec{r}, t)$          | Fonte externa de nêutrons na posição $\vec{r}$ do grupo $g$ no tempo $t$ [ $cm^{-3}s^{-1}$ ]. |
| $t$                              | Variável temporal [ $s$ ].  |
| $V$                              | Volume arbitrário [ $cm^3$ ].   |
| $v$                              | Velocidade escalar do nêutron [ $cm/s$ ].   |
| $v_g$                            | Velocidade escalar dos nêutrons na posição $\vec{r}$ do grupo $g$ e no tempo $t$ [ $cm/s$ ].  |

## RESUMO

Neste trabalho será apresentada uma solução analítica para o problema de cinética espacial de nêutrons em geometria cilíndrica tridimensional, para o caso homogêneo e monoenergético, utilizando a técnica separação de variáveis, abordagem esta que foi proposta por Oliveira (2017). Parte-se da suposição que os fluxos escalares e que as concentrações de precursores de nêutrons atrasados possam ser expressados, cada um deles, como o produto entre funções espaciais e funções temporais. A partir dessa suposição inicial, obtêm-se um sistema de equações desacoplado, composto por uma equação diferencial parcial, que foi resolvida utilizando separação de variáveis; um sistema de equações diferenciais ordinárias composto por duas equações, que foi solucionado utilizando a técnica de eliminação sistemática; e uma equação que indica que a função espacial do fluxo e a função espacial da concentração de precursores são proporcionais. A solução geral determinada para o problema é analítica, no sentido que nenhuma aproximação numérica é realizada ao longo da resolução. Por fim, particulariza-se a solução, utilizando dois conjuntos de parâmetros nucleares e analisando o comportamento dos nêutrons dentro de um cilindro específico.

**Palavras-chave:** Reatores nucleares. Cinética espacial de nêutrons. Geometria cilíndrica tridimensional. Separação de variáveis.

# ABSTRACT

This work presents an analytical solution to the problem of neutron spatial kinetics in three-dimensional cylindrical geometry, specifically for the homogeneous and monoenergetic case. The solution utilizes the technique of variable separation, as proposed by Oliveira (2017). We start with the assumption that the scalar fluxes and the concentrations of delayed neutron precursors can be expressed as the product of spatial functions and temporal functions. From this initial assumption, a decoupled system of equations is derived, consisting of a partial differential equation that is solved using variable separation, a system of ordinary differential equations comprising two equations that are solved using systematic elimination, and an equation indicating that the spatial function of the flux and the spatial function of the precursor concentration are proportional. The general solution obtained for the problem is analytical, meaning that no numerical approximation is performed throughout the resolution. Finally, the solution is applied by considering two sets of nuclear parameters and analyzing the behavior of neutrons within a specific cylinder.

**Keywords:** Nuclear reactors. Neutron spatial kinetics. Three-dimensional cylindrical geometry. Variable separation.

# 1 INTRODUÇÃO

As usinas nucleares são instalações que geram energia elétrica a partir da fissão de núcleos não-estáveis, que são bombardeados por nêutrons e podem dividir-se em outros núcleos menores. Esse processo libera, entre outras coisas, calor que pode ser transformado em energia elétrica. Para que as usinas sejam seguras e rentáveis, as mesmas precisam ser bem projetadas. Uma alternativa seria construir instalações experimentais para cada projeto de usina e realizar diversas testagens, a fim de validá-lo ou invalidá-lo. O que ocorre é que, na prática, isso seria financeiramente caro. Outra alternativa seria adotar limites operacionais mais rígidos a fim de evitar eventuais acidentes, o que culminaria numa certa ineficiência das potencialidades do reator. Uma terceira alternativa que parece mais viável e promissora consiste em estudar e desenvolver modelos teóricos, que visem melhor compreender o comportamento dos nêutrons nas usinas nucleares (SMITH, 1976, p. 2). Zanette (2021, p. 2) corrobora com essas ideias, ao afirmar que "estes modelos teóricos podem contribuir tanto na otimização da estrutura física das usinas, como na eficiência do processo operacional".

O comportamento dos nêutrons em um reator nuclear é descrito de maneira adequada pela equação de transporte de Boltzmann dependente do tempo para o fluxo angular (SUTTON; AVILES, 1996, p. 120), que, em sua generalidade, consiste em uma equação integro-diferencial, com sete variáveis independentes, sendo três delas espaciais, duas direcionais, uma energética e uma temporal (ZANETTE, 2017, p. 20).

Portanto, a distribuição de nêutrons poderia ser determinada se fosse inserida nessa equação um conjunto apropriado de seções de choque, que são as probabilidades de interação de nêutrons, juntamente com a disposição geométrica do sistema. Contudo, na prática isso se torna complexo e, em alguns casos, até impossível, pois as seções de choque e suas variações com a energia de nêutrons não são

completamente conhecidas; e também porque o arranjo geométrico dos materiais em um reator é complexo a ponto da equação do transporte não poder ser resolvida em um tempo razoável, mesmo que fossem utilizados recursos computacionais (BELL, GLASSTONE, 1970, p. 1; MAIA, 1979, p. 2).

Deste modo, temos que a equação do transporte é de difícil solução, exceto nos casos mais simples, por isso métodos aproximados são utilizados (BELL, GLASSTONE, 1970, p. 1). É mais fácil derivar a equação do transporte do que resolvê-la, e por isso surgem as equações que são advindas dessas derivações. Dentre as aproximações existentes para a equação de transporte dependente do tempo, destaca-se a equação de difusão de nêutrons dependente do tempo (SUTTON; AVILES, 1996, p. 120). O interesse desta equação está em calcular o fluxo escalar (que denotaremos por  $\phi$ ) que dependerá da posição  $\vec{r}$  do nêutron, do tempo  $t$ , e da faixa infinitesimal de energia  $E$ . Na subseção 2.3 apresentaremos e explicaremos com maiores detalhes a equação de difusão de nêutrons.

Temos que a solução da equação de transporte de nêutrons monoenergético (isto é, considerando um grupo de energia) possui duas partes, a parte assintótica e a parte transiente. Destaca-se que essa parte assintótica satisfaz a equação de difusão, por isso a aproximação de difusão pode ser utilizada nos casos em que o termo assintótico dominar o fluxo total (DWORAK; LOSKIEWICZ; JANIK, 2000, p. 845-846), sendo que isso ocorre, por exemplo, em meios cuja absorção é fraca (BECKURTS; WIRTZ, 1964, p. 90).

Nesta pesquisa será desenvolvida uma solução analítica para o sistema de equações diferenciais parciais que modelam o problema de cinética espacial de nêutrons em geometria cilíndrica tridimensional, conforme formulado nas subseções 3.1 e 3.1.1. As equações de cinética espacial são construídas a partir das equações de difusão, sendo a diferença primordial que as equações de cinética consideram em sua formulação além dos nêutrons prontos, que são considerados nas equações de difusão, os nêutrons atrasados (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976, p. 286).

A solução é desenvolvida utilizando a técnica de separação de variáveis, abordagem que foi apresentada por Oliveira (2017). Portanto, a contribuição dessa dissertação, no que diz respeito a solução desse problema, consiste em apresentar uma solução mais completa, no sentido de detalhar mais etapas da solução do problema geral e realizar mais análises particulares do comportamento da função fluxo escalar de nêutrons.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. O primeiro consiste na introdução; o segundo consiste no referencial teórico, no qual são apresentados aspectos introdutórios da teoria de reatores nucleares e as equações de difusão de nêutrons e cinética espacial de nêutrons; o terceiro consiste na metodologia, o qual o problema de pesquisa é formulado e os objetivos de pesquisa são estabelecidos; o quarto consiste na solução analítica do problema da cinética espacial, em que são detalhados os passos resolutivos realizados; o quinto consiste na análise da solução analítica, o qual particulariza-se a solução determinada no capítulo anterior para um cilindro específico e para dois conjuntos de parâmetros nucleares; e o sexto consiste nas considerações finais.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Aspectos introdutórios sobre a teoria de reatores nucleares

O primeiro reator nuclear foi construído na Universidade de Chicago, sob a supervisão do físico italiano Enrico Fermi (1901-1954). Foi em 2 de dezembro de 1942 que o equipamento entrou em operação, com uma reação em cadeia autosustentável que utilizou como combustível o Urânio-235, como moderador barras de grafite e como material absorvente barras de cádmio (CNEN, 2023, p. 25). Denominamos de reator nuclear a instalação em que é mantida e controlada a reação de fissão nuclear. Os reatores são montados/construídos intercalando barras de combustível físsil, que geralmente são urânio enriquecido<sup>1</sup> ou plutônio 239, e barras de moderador de nêutrons, que podem ser barras de carbono na forma de grafite, de cádmio ou água pesada. Deste modo, nêutrons que são liberados no processo de fissão nuclear colidem com os núcleos dos moderadores, que absorvem esses nêutrons sem sofrer fissão. Assim, esses moderadores auxiliam no controle da quantidade de nêutrons, isto é, no controle da reação de fissão em cadeia (FOGAÇA, 2022).

Quase quatorze anos depois, em outubro de 1956, o Reino Unido inaugurou em Calder Hall a primeira usina nuclear totalmente comercial, conhecida como Central Nuclear de Calder Hall. Destaca-se que a produção de eletricidade era uma atividade secundária da usina, sendo destinada principalmente para a produção de plutônio para o programa de armas atômicas do Reino Unido. Essa usina foi desativada em 2003, e, ao todo, contou com quatro reatores nucleares Magnox (ICE, 2023).

---

<sup>1</sup>Urânio com grande quantidade de Urânio-235 (U-235).

A indústria de energia nuclear sofreu certo declínio a partir da década de 70 até os anos 2000 (WORD NUCLEAR ASSOCIATION, 2023). Murray e Holbert (2020, p. 136-137) descrevem possíveis causas que tenham motivado esse cenário, sendo elas uma certa quebra de expectativa que a energia pode ter causado na população em geral, afinal na década de 50 a maioria da imprensa noticiava que a energia nuclear era barata, inesgotável e segura. Na contramão do que era noticiado até então, a partir da década de 60 surgiram movimentos ambientais que questionavam os possíveis impactos dos reatores, da radiação e da radiatividade para a vida das pessoas e para o meio ambiente. Além disso, houve contínuas denúncias de gerenciamento inadequado de resíduos radioativos, foram realizadas muitas associações das bombas atômicas com a energia nuclear e ocorreram acidentes nucleares em usinas nucleares, tais como o que ocorreu em 1979 na usina Three Mile Island (Pensilvânia-EUA) e o que ocorreu em 1986 na usina de Chernobyl (Kiev-Ucrânia).

As perspectivas de ascensão e expansão da energia nuclear é reativada no novo século, segundo a Word Nuclear Association (2023). Acredita-se que isso ocorra devido a uma combinação de fatores, como por exemplo o aumento significativo da demanda mundial por energia elétrica, sendo mais intenso nos países que estão em rápido desenvolvimento como a China, e a necessidade de limitar as emissões de carbono devido as mudanças climáticas. Uma das vantagens de geração de energia elétrica a partir de usinas nucleares, consiste no fato da não utilização de combustíveis fósseis, como por exemplo o carvão, que emitem gases tóxicos na atmosfera. Além disso, o aumento da demanda por energia elétrica faz surgir a necessidade de pensar em alternativas para a geração de energia elétrica. Neste contexto, as usinas nucleares são uma alternativa, afinal ocupam áreas relativamente pequenas, suas instalações podem ser realizadas perto dos centros consumidores e não dependem de fatores climáticos para funcionar, como por exemplo chuva, vento, etc (WORD NUCLEAR ASSOCIATION, 2023).

A produção de energia nuclear ocorre dentro dos reatores nucleares, a partir de um processo chamado de fissão. Temos um processo de fissão quando um núcleo pesado e instável é particionado em pelo menos dois núcleos atômicos menores. Essa partição ocorre quando o núcleo pesado e instável é bombardeado por nêutrons que conseguem penetrar e se agregar aquele núcleo, transformando-o num núcleo físsil que se fragmentará em outros núcleos. Essa reação além de gerar pelo menos dois núcleos menores, que são chamados de *produtos de fissão* ou *fragmentos de fissão*, também geram entre 2 a 3 nêutrons e liberam calor (ZANETTE, 2019, p. 2). Os nêutrons emitidos como resultado do processo de fissão podem ser classificados em dois tipos: nêutrons prontos e atrasados. Os nêutrons prontos são a maioria dos nêutrons emitidos no processo de fissão e são emitidos em um curto intervalo de tempo após a fissão; enquanto os nêutrons atrasados são a minoria e são emitidos após o processo de fissão, a partir do decaimento radioativo dos produtos de fissão (OLIVEIRA, 2013, p. 8).

Esses novos nêutrons que são emitidos podem gerar novas fissões, isto é, é gerada uma reação em cadeia que precisa ser controlada nos reatores nucleares. Assim, temos que prever o comportamento dos reatores nucleares está intimamente relacionado com compreender e prever o comportamento dos nêutrons ao longo do tempo que estão dentro do reator nuclear (ZANETTE, 2019, p. 2).

Na próxima subseção são definidos termos físico-matemáticos que são utilizados para compreender e apresentar as equações da difusão e de cinética espacial de nêutrons, que são as equações utilizadas nesse trabalho.

## 2.2 Definição de termos físico-matemáticos

A partir de Bell e Glasstone (1970, p. 4- 10), abaixo serão definidos termos iniciais da teoria de reatores nucleares utilizadas ao longo do trabalho de forma direta ou indireta.

↪ **Nêutron:**

Define-se nêutron como sendo uma partícula pontual, no sentido de que pode ser descrito completamente pela sua posição, dada pelo vetor  $\vec{r}$ , e pela sua velocidade, dada pelo vetor  $\vec{v}$ .

↪  $\vec{v}$  - **vetor velocidade do nêutron:**

Define-se como  $\vec{v} = v \vec{\Omega}$ , onde  $v$  é a velocidade escalar do nêutron; enquanto  $\vec{\Omega}$  é um vetor unitário que indica a direção do movimento, ou seja, indica a direção de  $\vec{v}$ .

↪ **Seções de choque:**

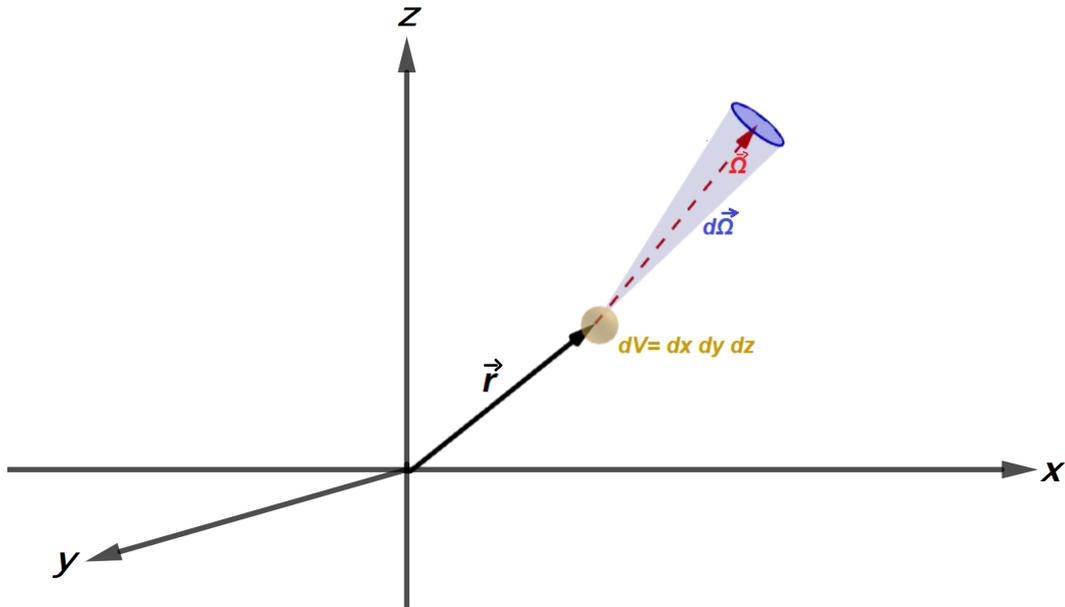
Na física, as seções de choque são medidas probabilísticas (0 a 1) que indicam a probabilidade de alguma reação ocorrer, por exemplo, considerando a situação em que temos colisões de feixes acelerados de um tipo de partícula cujo alvo é um segundo tipo de partícula, a seção de choque para uma reação específica indicará a probabilidade de um determinado evento ocorrer. Em outras palavras, no contexto desse trabalho, temos que as seções de choque indicam a probabilidade de determinada interação ocorrer entre os nêutrons e os núcleos-alvo. As seções podem ser divididas em dois grupos principais: as macroscópicas e as microscópicas. Enquanto a primeira representa a "área total oferecida por todos os núcleos contidos em uma unidade de volume", a segunda representa a "área que cada núcleo oferece de interação com os nêutrons" (ZANETTE, 2021, p. 26).

↪  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ - **densidade neutrônica no espaço de fase/ densidade angular:**

É o número provável de nêutrons na posição  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$  e energia  $E$  no tempo  $t$  (BELL, GLASSTONE, 1970, p. 4). Assim, define-se  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{r} d\vec{\Omega} dE dt$  como sendo o número esperado de nêutrons no volume infinitesimal  $dV$  em torno de  $\vec{r}$ , tendo direções no ângulo sólido  $d\vec{\Omega}$  circundando  $\vec{\Omega}$  e em uma faixa

infinitesimal de energia  $dE$  contendo  $E$  e num instante de tempo infinitesimal  $dt$  contendo  $t$  (Figura 2.1).

Figura 2.1: Partícula neutra no espaço



Fonte: Elaboração própria a partir de Bell e Glasstone (1970, p. 4).

$\hookrightarrow n(\vec{r}, E, t)$ - **Densidade de nêutrons:**

Define-se como sendo a integral da *densidade angular* de nêutrons em todas as direções, ou seja, em todos os ângulos sólidos

$$n(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega}, \quad (2.1)$$

onde  $4\pi$  implica integração em todas as direções. Assim,  $n(\vec{r}, E, t)$  é o número esperado de nêutrons em  $\vec{r}$ , com energia  $E$  no tempo  $t$ , por unidade de volume, por unidade de energia, por unidade de tempo.

$\hookrightarrow \vec{v} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ - **Fluxo vetorial:**

É dado pelo produto entre a velocidade do nêutron e a densidade angular de nêutrons, sendo chamado também de corrente angular de nêutrons. Note

que trata-se de uma função vetorial dependendo de quatro variáveis ( $\vec{r}$ ,  $\vec{\Omega}$ ,  $E$  e  $t$ ) e cuja direção é  $\vec{\Omega}$ .

$\hookrightarrow \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  - **Fluxo angular (densidade de fluxo direcional):**

É a magnitude do fluxo vetorial, ou seja

$$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = v N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t). \quad (2.2)$$

$\hookrightarrow \phi(\vec{r}, E, t)$  - **Fluxo escalar de nêutrons (fluxo total):**

Define-se como sendo a integral do fluxo angular em todas as direções

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, E, t) &= \int_{4\pi} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} \\ &= \int_{4\pi} v N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} \\ &= v \int_{4\pi} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} = v n(\vec{r}, E, t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ou seja, "pode ser definido como o número de nêutrons que cruzam a área de uma seção transversal arbitrária, por unidade de área e por unidade de tempo" (ZANETTE, 2019, p. 25).

$\hookrightarrow$  **Fluxo assintótico:**

Corresponde aos nêutrons que foram espalhados várias vezes no meio e sua distribuição espacial e angular depende principalmente das propriedades do meio.

$\hookrightarrow$  **Número líquido de nêutrons que cruzam  $dA$ :**

Se  $\vec{n}$  representa um vetor unitário normal a uma superfície, de maneira que  $\vec{n}dA$  é o vetor normal a um elemento de superfície de área  $dA$ , então  $\vec{n}dA\vec{v}N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  é o número de nêutrons cruzando o elemento de superfície por unidade de ângulo sólido, por unidade de energia, por unidade de tempo. Ao integrarmos em todas as direções, tem-se o número líquido de nêutrons por unidade de

energia e tempo de cruzamento  $dA$  é

$$\vec{n} \, dA \int_{4\pi} \vec{v} \, N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega}. \quad (2.4)$$

↪ **Corrente neutrônica:**

Define-se como corrente neutrônica a seguinte integral

$$\vec{J}(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} \vec{v} \, N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega}, \quad (2.5)$$

a qual determina o número líquido de nêutrons de energia  $E$  em  $\vec{r}$  e tempo  $t$ , cruzando a unidade de área por unidade de energia e tempo. Ou seja, "representa os nêutrons que escapam pelo contorno do volume" (ZANETTE, 2019, p. 25).

## 2.3 Difusão de nêutrons

Conforme mencionado na introdução, a equação que melhor descreve o comportamento dos nêutrons é a equação do transporte de Boltzmann, que consiste em uma equação integro-diferencial com sete variáveis independentes. Por se tratar de uma equação de difícil solução, até mesmo em casos simplificados, aproximações são utilizadas (BELL, GLASSTONE, 1970, p. 1).

Dentre as aproximações existentes para analisar o comportamento de nêutrons, neste trabalho são utilizadas as equações de cinética espacial de nêutrons, que são formuladas a partir das equações de difusão de nêutrons. A solução dessas equações é mais simples e viável, se comparadas a equação do transporte, isso porque é realizada uma aproximação linear na dependência angular, eliminando o caráter integro-diferencial existente na equação do transporte. Além disso, há uma redução na quantidade de variáveis independentes, de 7 para 5, sendo elas três espaciais, uma energética e uma temporal (DUDERSTADT, HAMILTON, 1976, p. 111-114).

Se por um lado temos uma equação matemática mais simplificada, por outro lado temos limitações físicas no que tange aos problemas que a equação da difusão modela/descreve. Segundo Zanette (2017, p. 20-21), duas exigências são fundamentais:

- i)* o processo de migração dos nêutrons tem que ser dominado por interações de espalhamento, isto é, o meio material tem que ser fracamente absorvedor de nêutrons;
- ii)* o processo de migração de nêutrons tem que ocorrer longe de descontinuidade de materiais, onde esperam-se pequenos gradientes no fluxo de nêutrons. (ZANETTE, 2017, p. 20-21)

Deste modo, existem casos em que a equação de difusão de nêutrons não é apropriada, como por exemplo quando os reatores são ligados e desligados ou próximo dos locais que são inseridas as barras de controle (ZANETTE, 2017, p. 21).

Conforme Lamarsh (1996, p. 118) e Zanette (2017, p. 16), as exigências para a validade das equações da difusão raramente são satisfeitas em problemas práticos, contudo a sua utilização em geral oferece uma boa aproximação e portanto é utilizada em muitos projetos de reatores.

### 2.3.1 *Equação de difusão de nêutrons para o caso monoenergético*

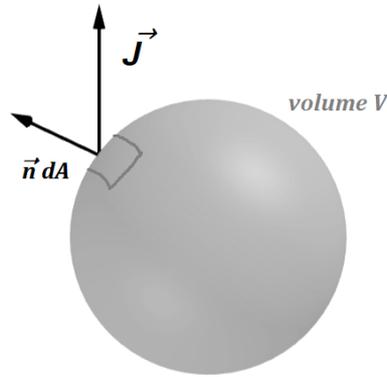
Nessa subseção nos basearemos em Duderstadt e Hamilton (1976, p. 150- 153) e Fernandes (2011, p. 5-7) para apresentar a equação da difusão de nêutrons para o caso monoenergético.

Inicialmente, iremos assumir que todos os nêutrons podem ser caracterizados por uma única energia cinética. Apresentaremos uma equação para o fluxo escalar de nêutrons partindo da afirmação que a taxa de variação temporal do número de nêutrons em um volume arbitrário  $V$  deve ser igual a taxa na qual os

nêutrons são produzidos no volume  $V$ , subtraída da taxa na qual eles são perdidos do volume  $V$ , sendo que essa perda ocorre devido à absorção ou à fuga.

Mais especificamente, consideraremos um volume arbitrário  $V$ , de área superficial  $A$ , localizado em qualquer lugar dentro do reator nuclear (Figura 2.2). Iremos analisar esse volume  $V$ , denominado *volume de controle*, a fim de encontrar uma expressão que caracterize como a população de nêutrons dentro dele muda ao longo do tempo.

Figura 2.2: Volume de controle do balanço de nêutrons



Fonte: Elaboração própria a partir de Duderstadt e Hamilton (1976, p. 150).

Temos que o número total de nêutrons em  $V$  em um tempo  $t$  pode ser obtido simplesmente integrando sobre o volume, de modo que

$$\int_V N(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{1}{v} \phi(\vec{r}, t) dV. \quad (2.6)$$

Portanto, a taxa de variação temporal do número de nêutrons em  $V$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_V \frac{1}{v} \phi(\vec{r}, t) dV \right] &= \left[ \text{Produção em } V \right] - \left[ \text{Absorção em } V \right] \\ &\quad - \left[ \text{Fuga em } V \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Agora iremos escrever expressões matemáticas para o ganho e perda de nêutrons da equação (2.7). Definiremos uma fonte de nêutrons  $S(\vec{r}, t)$  como

$$\left[ \text{Produção em } V \right] = \int_V S(\vec{r}, t) dV. \quad (2.8)$$

Ainda podemos separar esse termo fonte em dois: um devido à fissão e outro devido a uma fonte externa. A fonte devido à fissão pode ser expressa por

$$S_f(\vec{r}, t) = \nu \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t), \quad (2.9)$$

onde  $\nu$  é a média de nêutrons emitidos na fissão;  $\Sigma_f(\vec{r}, t)$  é a seção de choque macroscópica de fissão na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ ; e  $\phi(\vec{r}, t)$  é o fluxo escalar de nêutrons na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ .

Nesse momento, define-se uma seção de choque que descreve a absorção de nêutrons em  $V$ , denotada por  $\Sigma_a(\vec{r}, t)$ , de modo que

$$\left[ \text{Absorção em } V \right] = \int_V \Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) dV. \quad (2.10)$$

Agora determinaremos uma expressão matemática que descreve a fuga de nêutrons em  $V$ . A fuga total de nêutrons através da superfície de  $V$  pode ser expressa em termos da corrente neutrônica ( $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ) e o vetor normal ( $\vec{n}dA$ ) ao volume  $V$ , dado por

$$\left[ \text{Fuga em } V \right] = \int_A \vec{J}(\vec{r}, t) \vec{n} dA. \quad (2.11)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss, transforma-se a integral de superfície de (2.11) em uma integral de volume

$$\left[ \text{Fuga em } V \right] = \int_A \vec{J}(\vec{r}, t) \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV, \quad (2.12)$$

onde  $\nabla[\cdot]$  é o operador gradiente.

Substituindo as equações (2.8), (2.10) e (2.12) na equação (2.7) fica-se com

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_V \frac{1}{v} \phi(\vec{r}, t) dV \right] = \int_V S(\vec{r}, t) dV - \int_V \Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) dV - \int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV. \quad (2.13)$$

Conforme Duderstadt e Hamilton (1976, p. 152), como escolhemos o volume  $V$  de maneira arbitrária, temos que a equação (2.13) deve ser válida para qualquer volume  $V$  que desejarmos, sendo que a única maneira disso ocorrer é se exigirmos que

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) dV = S(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t). \quad (2.14)$$

Tratando-se de um sistema uniforme, ou seja, o meio que os nêutrons estão se difundindo é homogêneo, considera-se que a Lei de Fick é válida, ou seja

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -D(\vec{r}, t) \nabla \phi(\vec{r}, t), \quad (2.15)$$

onde  $D(\vec{r}, t)$  é o coeficiente de difusão.

Substituindo a equação (2.15) em (2.14), temos

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) dV = S(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) + \nabla D(\vec{r}, t) \nabla \phi(\vec{r}, t), \quad (2.16)$$

que é a equação de difusão de nêutrons monoenergética, onde:

$\hookrightarrow \phi(\vec{r}, t)$  representa o fluxo escalar de nêutrons na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow v$  representa a velocidade escalar de nêutrons;

$\hookrightarrow S(\vec{r}, t)$  representa a fonte de nêutrons na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow \Sigma_a(\vec{r}, t)$  representa a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ ;

$\nabla[\cdot]$  representa o operador gradiente;

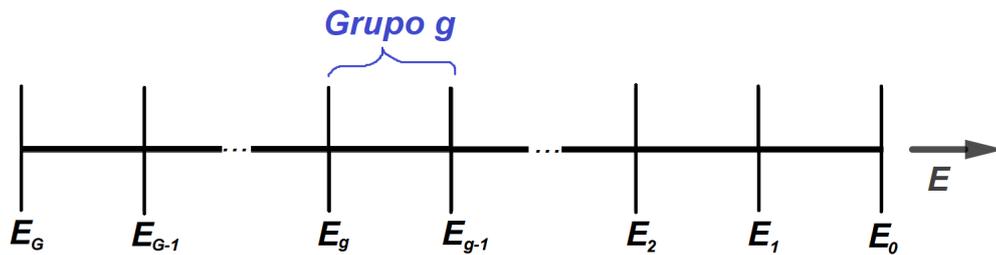
$D(\vec{r}, t)$  representa o coeficiente de difusão na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ .

### 2.3.2 Equações multigrupo de difusão de nêutrons

Esta subseção é baseada em Duderstadt e Hamilton (1976, p. 286- 288), a qual busca-se estender as ideias utilizadas na subseção anterior para a equação de difusão para o caso monoenergético, a fim de determinar/apresentar equações de difusão que descrevem o comportamento dos fluxos escalares de nêutrons em  $G$  grupos de energia.

A ideia inicial é permitir que o fluxo escalar de nêutrons ( $\phi(\vec{r}, E, t)$ ) dependa da energia, mas ao invés de tratar a variável de energia de nêutrons  $E$  como sendo uma variável contínua, iremos discretizá-la em intervalos ou grupos de energia. Isto é, a gama de energia de nêutrons será fragmentada em  $G$  grupos de energia, conforme ilustrado na Figura 2.3.

Figura 2.3: Esquema de discretização da variável energia  $E$  em  $G$  grupos/intervalos



Fonte: Elaboração própria a partir de Duderstadt e Hamilton (1976, p. 122).

Note que a indexação dos grupos no esquema da Figura 2.3 ocorre de maneira decrescente. Essa indexação se justifica pois, fisicamente, corresponde ao fato de que o nêutron geralmente perde energia durante sua vida; enquanto que

matematicamente, corresponde ao fato de que normalmente se resolve as equações discretizadas, começando em altas energias e trabalhando sucessivamente com energias mais baixas (DUDERSTADT, HAMILTON, 1976, p. 286; DUDERSTADT, MARTIN, 1979, p. 67) .

O objetivo desta subseção consiste em determinar um conjunto de equações que descrevam os fluxos escalares de nêutrons discretizados sobre as energias de cada grupo, de modo que o fluxo escalar  $\phi_g(\vec{r}, t)$  represente o fluxo total de todos os nêutrons com energias  $E$ , com  $E_g < E < E_{g-1}$ , no grupo  $g$ . Essas equações assumem a forma de um conjunto de equações de difusão que descrevem os nêutrons em cada grupo de energia, sendo acopladas umas às outras, uma vez que os nêutrons podem mudar de energia ao longo do tempo e, por isso, passar de grupo para grupo.

Uma das maneiras de chegar nas equações multigrupo de energia da teoria da difusão de nêutrons é aplicar o conceito de balanço/equilíbrio de nêutrons para um grupo de energia dado, buscando equilibrar as formas que os nêutrons podem entrar ou sair desse grupo de energia. Deste modo, considere um grupo típico de energia  $g$ . Tem-se que a taxa de variação temporal do fluxo escalar de nêutrons nesse grupo pode ser representada pelo seguinte balanço

$$\begin{aligned}
\left[ \begin{array}{c} \text{Taxa de variação} \\ \text{temporal do fluxo} \\ \text{de nêutrons no} \\ \text{grupo } g \end{array} \right] &= - \left[ \begin{array}{c} \text{Perda devido} \\ \text{à fuga} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Perda devido} \\ \text{à absorção} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] \\
&- \left[ \begin{array}{c} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para fora} \\ \text{do grupo } g \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para dentro} \\ \text{do grupo } g \end{array} \right] \\
&+ \left[ \begin{array}{c} \text{Fonte de} \\ \text{nêutrons no} \\ \text{grupo } g \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Observe que o balanço acima levou em consideração de maneira explícita que as colisões de espalhamento podem alterar a energia do nêutron, levando-o a sair do grupo  $g$  ou migrar para o grupo  $g$ .

Caracteriza-se a probabilidade de um nêutron do grupo  $g' \in \{1, \dots, G\} \setminus \{g\}$  se espalhar para o grupo  $g$  utilizando a seção de choque macroscópica de espalhamento denotada por  $\Sigma_{sg' \rightarrow g}$ . Assim, a seção de choque que caracteriza a probabilidade de um nêutron se espalhar para dentro do grupo  $g$  será dada por  $\sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}$ . Similarmente, vamos caracterizar a probabilidade de um nêutron se espalhar para fora do grupo  $g$ , isto é, para outros grupos, por  $\Sigma_{sg} = \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg \rightarrow g'}$ .

Também define-se uma seção de choque macroscópica de absorção no grupo  $g$ , denotada por  $\Sigma_{ag}$  e um termo fonte  $S_g$ , que representa os nêutrons produzidos no grupo  $g$  por uma fonte.

Por fim, vamos definir um coeficiente de difusão  $D_g$ , para que a fuga de nêutrons do grupo  $g$  possa ser expressada a partir da aproximação de difusão  $\nabla D_g \nabla \phi_g$ .

Ao combinar os termos mencionados acima, tem-se uma representação matemática das relações de equilíbrio da taxa de variação temporal do fluxo escalar de nêutrons no grupo  $g$ , dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t) = & \nabla D_g(\vec{r}, t) \nabla \phi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_{ag}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) - \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg \rightarrow g'}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) \\ & + \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + S_g, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $g = 1, 2, 3, \dots, G$ .

Ainda, podemos separar esse componente da fonte em dois tipos, um devido à fissão e outro devido a uma fonte externa, escrevendo-o como

$$S_g = \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + S_g^{ext}, \quad (2.19)$$

onde  $\chi_g$  é a fração de nêutrons que aparece no grupo  $g$ , isto é, a probabilidade de que um nêutron de fissão nasça com uma energia do grupo  $g$ ;  $\Sigma_{fg'}(\vec{r}, t)$  é a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g'$  e no tempo  $t$ ;  $\nu_{g'}$  é o número médio de nêutrons de fissão liberados em uma reação de fissão induzida por um nêutron no grupo  $g'$ ; e  $S_g^{ext}$  é a fonte externa de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  no tempo  $t$ .

Logo, substituindo (2.19) em (2.18) fica-se com

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t) = & \nabla D_g(\vec{r}, t) \nabla \phi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_{ag}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) - \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg \rightarrow g'}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) \\ & + \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + S_g^{ext}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

para  $g, g' \in \{1, 2, \dots, G\}$ , onde:

$\hookrightarrow \phi_g(\vec{r}, t)$  representa o fluxo escalar de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow v_g$  representa a velocidade escalar dos nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  e no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow D_g(\vec{r}, t)$  representa o coeficiente de difusão na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  e no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow \Sigma_{ag}(\vec{r}, t)$  representa a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição  $\vec{r}$  no grupo  $g$  e no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow \Sigma_{sg \rightarrow g'}(\vec{r}, t)$  representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  para o grupo  $g'$  no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t)$  representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g'$  para o grupo  $g$  no tempo  $t$ ;

$\hookrightarrow \chi_g$  representa a fração de nêutrons que aparece no grupo  $g$ ;

$\hookrightarrow \nu_{g'}$  representa o número médio de nêutrons de fissão liberados em uma reação de fissão induzida por um nêutron no grupo  $g'$ ;

$\hookrightarrow \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t)$  representa a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g'$  e no tempo  $t$ ; e

$\hookrightarrow S_g^{ext}$  representa a fonte externa de nêutrons na posição  $\vec{r}$  do grupo  $g$  no tempo  $t$ .

Portanto, agora temos um conjunto de  $G$  equações de difusão acopladas que, quando resolvidas, descrevem o fluxo escalar de nêutrons em cada grupo de energia, ou seja, determinam  $\phi_g(\vec{r}, t)$ , para  $g \in \{1, \dots, G\}$ .

Nesse conjunto de equações assume-se que os nêutrons aparecem instantaneamente após a fissão. O que ocorre é que, além desses nêutrons que são produzidos instantaneamente, os chamados nêutrons prontos, há também uma fração de nêutrons que são gerados/produzidos a partir do decaimento dos produtos de fissão (elementos resultantes da fissão nuclear), que ocorrem após os produtos de fissão, sendo esses nêutrons denominados nêutrons atrasados (OLIVEIRA, 2013, p. 8). Na próxima seção, veremos/determinaremos um conjunto de equações que considerará além dos nêutrons prontos os nêutrons atrasados.

## 2.4 Cinética de reatores nucleares

As equações de cinética de nêutrons são construídas/formuladas a partir das equações de difusão de nêutrons. O que ocorre é que nas equações de cinética são considerados, além dos nêutrons prontos que são considerados nas equações de difusão, os nêutrons atrasados, que são provenientes do decaimento radioativo dos produtos de fissão (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976, p. 286).

As equações que modelam os problemas de cinética em reatores dividem-se, basicamente, em dois tipos: as equações de cinética pontual e as equações de cinética espacial. As primeiras consideram que o comportamento do fluxo de nêutrons não possui dependência espacial, ou seja, terá como variável independente apenas a variável temporal, sendo apropriadas em geral para reatores de pequenas dimensões. Enquanto o segundo tipo de equações consideram que o comportamento do fluxo de nêutrons possui dependência espacial e temporal, sendo consideradas a melhor aproximação para descrever a evolução de nêutrons dentro da teoria de difusão de nêutrons (ZANETTE, 2021, p. 5).

Segundo Petersen (2011, p. 14), a fissão nuclear origina fragmentos de fissão (também chamados de produtos de fissão), que são elementos que possuem menor massa do que o núcleo inicial, sendo alguns desses fragmentos instáveis e nos

processos de decaimento emitem nêutrons. Esses nêutrons emitidos após o processo de fissão são chamados de nêutrons atrasados (OLIVEIRA, 2013, p. 8) e os núcleos responsáveis por emití-los são chamados de precursores de nêutrons atrasados ou apenas precursores.

Os nêutrons atrasados não possuem as mesmas propriedades dos nêutrons prontos, sendo uma delas que a energia média dos nêutrons atrasados é muito menor que a energia média dos nêutrons prontos (STACEY, 1967). Uma das consequências dessa propriedade é que os nêutrons atrasados possuem menor probabilidade de fuga do núcleo, pois como "nascem" com menor energia, viajam distâncias mais curtas quando comparados aos nêutrons prontos (OLIVEIRA, 2013, p. 8; PETERSEN, 2011, p. 14).

De acordo com a meia-vida dos produtos de fissão, podemos reuni-los em 6 grupos. Na Tabela 2.1 é possível ver a fração de nêutrons atrasados para o combustível urânio enriquecido, denotado por  $U_{92}^{235}$ .

Tabela 2.1: Fração de nêutrons atrasados e constante de decaimento para cada grupo do combustível  $U_{92}^{235}$

| <b>Grupos</b> | <b>CONSTANTE DE DECAIMENTO</b> | $\lambda_i [s^{-1}]$ | $\beta_i$ |
|---------------|--------------------------------|----------------------|-----------|
| 1             | 0,0124                         |                      | 0,00022   |
| 2             | 0,0305                         |                      | 0,00142   |
| 3             | 0,111                          |                      | 0,00127   |
| 4             | 0,310                          |                      | 0,00257   |
| 5             | 1,14                           |                      | 0,00075   |
| 6             | 3,01                           |                      | 0,00027   |

Fonte: Elaborado a partir de Oliveira (2013, p. 9) e Petersen (2011, p. 15).

Por definição, temos que  $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$  é a fração total de nêutrons atrasados (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976, p. 242). Deste modo, para o elemento urânio enriquecido temos que  $\beta = 0,0065$ , que corresponde a 0,65% dos nêutrons

emitidos na fissão desse elemento. Embora possa parecer pouco, para escalas de tempo maiores, quando comparadas as escalas de tempo da fissão, essa quantidade de nêutrons desempenha um papel significativo (OLIVEIRA, 2013, p. 9; PETERSEN, 2011, p. 14).

A fim de considerar esses nêutrons atrasados, iremos definir, na subseção 2.4.1, um conjunto de equações que descrevem a dependência temporal da concentração dos precursores de nêutrons atrasados e, a partir disso, utilizando também a equação da difusão de nêutrons, iremos apresentar as equações de cinética espacial.

#### 2.4.1 *Equações de cinética espacial*

Nesta subseção nos basearemos em Duderstadt e Hamilton (1976, p. 237-238), Oliveira (2013, p. 9-10) e Petersen (2011, p. 15-16), buscando apresentar as equações de cinética espacial. Para tal, iremos considerar que a variação temporal da taxa de concentração de precursores será dada por um balanço entre a produção do precursor devido à fissão e a perda decorrente do decaimento.

Assim, os nêutrons produzidos no  $i$ -ésimo grupo de precursores, considerando o caso monoenergético, podem ser contabilizados a partir do produto entre a taxa de produção de nêutrons na fissão e a fração de nêutrons atrasados, de modo que

$$\beta_i \nu \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t), \quad (2.21)$$

para  $i = 1, \dots, P$ , onde  $P \in \{1, 2, \dots, 6\}$ .

Agora, define-se  $C_i(\vec{r}, t)$  como sendo a concentração de precursores na posição  $\vec{r}$  e no tempo  $t$ . Assim, a perda de nêutrons no grupo  $i$  de precursores, considerando o caso monoenergético, pode ser contabilizada a partir do produto entre a sua respectiva constante de decaimento e a sua respectiva taxa de concentração

de precursores

$$\lambda_i C_i(\vec{r}, t), \quad (2.22)$$

para  $i = 1, \dots, P$ .

Sendo que essa relação (2.22) assume que os precursores não migram ou se fundem antes do decaimento (DUDERSTADT, HAMILTON, 1976, p. 237).

Logo, a equação de balanço da variação temporal da concentração de precursores, para o caso monoenergético, será dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t), \quad (2.23)$$

para  $i = 1, \dots, P$ .

Nesse momento, a equação de difusão de nêutrons de uma velocidade (subseção 2.2.1) pode ser utilizada para descrever o fluxo escalar de nêutrons, desde que seja incluída a contribuição dos nêutrons atrasados na fonte de fissão. Incluindo essa contribuição, tem-se

$$S_f = (1 - \beta) \nu \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^P \lambda_i C_i(\vec{r}, t). \quad (2.24)$$

Logo, nosso sistema de equações de cinética espacial para o caso monoenergético sem fonte externa, que descreve o fluxo escalar de nêutrons em um reator incluindo os nêutrons atrasados, será dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) &= \nabla D(\vec{r}, t) \nabla \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^P \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

para  $i = 1, \dots, P$ .

Agora determinaremos um conjunto de equações de cinética espacial para o caso em que temos  $G$  grupos de energia e não apenas uma. Para tal, procederemos de maneira similar ao caso monoenergético.

Temos que os nêutrons produzidos no  $i$ -ésimo grupo de precursores, considerando o caso de  $G$  grupos de energia, podem ser contabilizados a partir do produto entre a taxa de produção de nêutrons na fissão, sendo esta a soma das taxas de produção de nêutrons em cada grupo de energia, e a fração de nêutrons atrasados, de modo que

$$\sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t), \quad (2.26)$$

para  $i = 1, \dots, P$ .

Temos que a perda de nêutrons no grupo  $i$  de precursores, considerando o caso de  $G$  grupos de energia, será igual para o caso monoenergético, sendo dada pela relação (2.22).

Portanto, a equação de balanço da variação temporal da concentração de precursores, para o caso de  $G$  grupos de energia, será dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t), \quad (2.27)$$

para  $i = 1, \dots, P$ .

Nesse momento, as equações multigrupo da difusão de nêutrons (subseção 2.2.2) podem ser utilizadas para descrever o fluxo escalar de nêutrons, desde que seja incluída a contribuição dos nêutrons atrasados na fonte de fissão. Incluindo essa contribuição, teremos que

$$S_{fg} = \sum_{g'=1}^G (1 - \beta_i) \chi_g^p \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^P \chi_g^d \lambda_i C_i(\vec{r}, t), \quad (2.28)$$

onde  $\chi_g^p$  e  $\chi_g^d$  são os espectros de fissão do grupo  $g$  para os nêutrons prontos e nêutrons atrasados, respectivamente.

Logo, definindo  $\Sigma_{Rg} = \Sigma_{ag} + \Sigma_{sg}$  (seção de choque macroscópica de remoção do grupo  $g$ ), nosso sistema de equações multigrupo de cinética espacial sem fonte externa, que descreve o fluxo escalar de nêutrons em um reator incluindo os nêutrons atrasados, é

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t) = & \nabla D_g(\vec{r}, t) \nabla \phi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_{Rg} \phi_g(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) \\ & + \sum_{g'=1}^G (1 - \beta_i) X_g^p \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^P X_g^d \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t), \quad (2.30)$$

para  $i = 1, \dots, P$ ; e  $g = 1, \dots, G$ .

### 3 METODOLOGIA DE PESQUISA

As pesquisas científicas podem ser subdivididas em dois grupos, que são as *puras* e as *aplicadas*. Enquanto as do primeiro grupo visam produzir e/ou ampliar conhecimentos sem a necessidade de ter aplicações práticas imediatas, as do segundo tipo objetivam utilizar os conhecimentos científicos produzidos para solucionar problemas aplicados e, conseqüentemente, gerar conhecimentos que contribuem para a solução ou compreensão dos problemas em questão (ASSIS, 2009, p. 17-18; GILL, 2002, p. 17).

Portanto, temos que a presente pesquisa é do tipo aplicada, pois a partir da utilização de conhecimentos científicos matemáticos pretende-se solucionar um problema de cinética espacial, ou seja, um problema que possui aplicação na teoria de reatores nucleares.

Nessa seção será formulado o problema que será resolvido ao longo do trabalho e os objetivos propostos. Para atingir os objetivos estabelecidos, serão utilizados, majoritariamente, conhecimentos ancorados nas teorias de separação de variáveis e de solução de equações diferenciais ordinárias.

#### 3.1 Formulação do problema

No decorrer desse trabalho desenvolveremos uma solução analítica para o sistema de equações diferenciais parciais que modela o problema de cinética espacial de nêutrons em geometria cilíndrica.

Supomos:

- 1<sup>o</sup>) um meio homogêneo, isto é, o meio no qual os nêutrons estão se difundindo é homogêneo;

- 2<sup>o</sup>) a energia é monoenergética, ou seja, há um único grupo de energia;
- 3<sup>o</sup>) há somente um grupo de precursores de nêutrons atrasados;
- 4<sup>o</sup>) não há fonte externa de nêutrons, somente a fonte devido à fissão.

Da 1<sup>a</sup> suposição, temos que o coeficiente de difusão e as seções macroscópicas de choque de absorção e de fissão não dependem da posição  $\vec{r}$  e do tempo  $t$ , ou seja, são constantes (DUDERSTADT, HAMILTON, 1976, p.156).

Considerando o sistema de equações (2.25), apresentado na subseção 2.4.1, com todas as suposições descritas acima, temos que o problema dessa subseção pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) &= \nabla^2 D_{dif} \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + \lambda C(\vec{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(\vec{r}, t) &= -\lambda C(\vec{r}, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, 0) &= \phi_0(\vec{r}) \\ C(\vec{r}, 0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\lambda} \phi_0(\vec{r}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde:

↔  $v$  representa a velocidade escalar dos nêutrons;

↔  $\Sigma_a$  representa a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons;

↔  $\beta$  representa a fração de nêutrons atrasados;

↔  $\lambda$  representa a constante de decaimento radioativo;

↔  $\nu \Sigma_f$  é o produto da seção de choque macroscópica de fissão pelo número médio de nêutrons emitidos na fissão.

### 3.1.1 Condições de fronteira

Nessa subseção apresentam-se as condições de fronteira que são utilizadas para que o problema esteja bem posto. Para cada variável espacial do vetor posição  $\vec{r} = (r, \theta, z) \in \Omega_{cil} = (0, R] \times (-\infty, \infty) \times [0, Z] \subset \mathbb{R}^3$ , considera-se:

- *Condições de contorno sobre a variável espacial radial  $r$*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \theta, z, t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\phi(R, \theta, z, t) = 0, \quad (3.4)$$

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq z \leq Z$  e  $t \in (0, \infty)$ .

- *Condições de contorno periódicas sobre a variável angular  $\theta$*

$$\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r, \theta + 2\pi, z, t), \quad (3.5)$$

para todo  $r \in (0, R]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq z \leq Z$  e  $t \in (0, \infty)$ .

- *Condições de contorno sobre a variável azimutal  $z$*

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(r, \theta, 0, t) = 0 \quad (3.6)$$

$$\phi(r, \theta, Z, t) = 0, \quad (3.7)$$

para todo  $r \in (0, R]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $t \in (0, \infty)$ .

- **Afirmção 1:** *Para o caso cilíndrico, o sistema de EDPs descrito em (3.1) é simétrico com respeito ao eixo azimutal.*

**Demonstração:** A demonstração é realizada usando o componente azimutal do operador laplaciano. Assim, sejam os pontos do domínio  $\Omega_{cil}$  tais que  $\tilde{z} = -z < 0$ . Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} [\phi(r, \theta, \tilde{z}, t)] \right) \\ \xrightarrow{\text{regra da cadeia}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \frac{d\tilde{z}}{dz} \right) \\ \xrightarrow{\frac{d\tilde{z}}{dz} = -1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \right) \\ \xrightarrow{\text{regra da cadeia}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \frac{d\tilde{z}}{dz} \right) \\ \xrightarrow{\frac{d\tilde{z}}{dz} = -1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \end{aligned}$$

que implica um sistema semelhante ao descrito em (3.1) para os valores negativos de  $z$ .  $\square$

A condição de contorno apresentada na equação (3.6) é devido ao fato que o problema admite simetria azimutal, ou seja, que o sistema de EDPs resolve o mesmo problema físico para as funções  $\phi(r, \theta, z, t)$  e  $\phi(r, \theta, -z, t)$ , onde  $r \in (0, R]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $z \in [0, Z]$  e  $t \in (0, \infty)$ .

## 3.2 Objetivos

Esta dissertação possui como objetivo geral solucionar analiticamente o problema de cinética espacial, para o caso monoenergético e com um grupo de precursores de nêutrons, em geometria cilíndrica tridimensional, utilizando como ferramentas matemáticas principais a técnica de separação de variáveis, métodos

para resolver equações diferenciais ordinárias e o método de eliminação sistemática para solucionar sistemas de EDOs.

Desta forma, propõe-se como objetivos específicos:

- Solucionar analiticamente o sistema de EDPs do problema em geometria cilíndrica tridimensional, utilizando a técnica de separação de variáveis, abordagem esta que foi proposta/apresentada por Oliveira (2017).
- Analisar a solução analítica encontrada, particularizando a solução para parâmetros nucleares, condição inicial e condições de fronteira específicos.

# 4 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA TRIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CILÍNDRICA

A ideia dessa seção é supor que as funções do sistema de EDPs descrito em (3.1) possam ser escritas, cada uma delas, como o produto de duas funções, sendo uma dessas funções dependendo apenas da variável espacial (vetor posição  $\vec{r}$ ) e a outra dependendo somente da variável temporal (variável  $t$ ).

Inicialmente, iremos alterar os parâmetros nucleares do sistema de equações diferenciais parciais apresentado em (3.1), a fim de facilitar a notação. Deste modo, define-se

- $A = vD_{dif}$ ;  $B = v[(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a]$ ;  $D = v\lambda$ ;  $E = \beta\nu\Sigma_f$ ;  $H = -\lambda$ ;  
 $P = \frac{-E}{H}$ .

onde  $A, B, D, E, P \in \mathbb{R}$ .

Reescrevendo o sistema com as mesmas condições iniciais

$$\frac{\partial\phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = A\nabla^2\phi(\vec{r}, t) + B\phi(\vec{r}, t) + DC(\vec{r}, t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial C(\vec{r}, t)}{\partial t} = HC(\vec{r}, t) + E\phi(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

$$\phi(\vec{r}, 0) = \phi_0(\vec{r}) \quad (4.3)$$

$$C(\vec{r}, 0) = P\phi_0(\vec{r}). \quad (4.4)$$

Neste momento iremos iniciar o processo de aplicação do método de separação de variáveis nas equações (4.1) e (4.2). Para tal, vamos supor que existem

funções  $F_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (para cada ponto  $\vec{r}$  no domínio  $\Omega$ ); e funções  $G_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que as funções  $\phi(\vec{r}, t)$  e  $C(\vec{r}, t)$  possam ser expressas como

$$\phi(\vec{r}, t) = F_1(\vec{r})G_1(t) \quad (4.5)$$

$$C(\vec{r}, t) = F_2(\vec{r})G_2(t). \quad (4.6)$$

Substituindo as relações (4.5) e (4.6) nas equações (4.1) e (4.2), respectivamente

$$F_1(\vec{r}) \frac{d}{dt} G_1(t) = A G_1(t) \nabla^2 F_1(\vec{r}) + B F_1(\vec{r}) G_1(t) + D F_2(\vec{r}) G_2(t) \quad (4.7)$$

$$F_2(\vec{r}) \frac{d}{dt} G_2(t) = H F_2(\vec{r}) G_2(t) + E F_1(\vec{r}) G_1(t). \quad (4.8)$$

Reorganizando os termos das equações acima

$$F_1(\vec{r}) \frac{d}{dt} G_1(t) = G_1(t) [A \nabla^2 F_1(\vec{r}) + B F_1(\vec{r})] + D F_2(\vec{r}) G_2(t) \quad (4.9)$$

$$F_2(\vec{r}) \frac{d}{dt} G_2(t) = H F_2(\vec{r}) G_2(t) + E F_1(\vec{r}) G_1(t). \quad (4.10)$$

Dividindo a equação (4.10) por  $F_2(\vec{r})G_1(t)$  tem-se

$$\frac{\frac{d}{dt} G_2(t)}{G_1(t)} = H \frac{G_2(t)}{G_1(t)} + E \frac{F_1(\vec{r})}{F_2(\vec{r})} \quad (4.11)$$

$$\implies \frac{\frac{d}{dt} G_2(t) - H G_2(t)}{G_1(t)} = E \frac{F_1(\vec{r})}{F_2(\vec{r})}. \quad (4.12)$$

Note que  $\vec{r}$  e  $t$  são variáveis independentes. Além disso, como o lado esquerdo da equação (4.12) só depende de  $t$  e lado direito da mesma equação só depende de  $\vec{r}$ , temos

$$\frac{\frac{d}{dt} G_2(t) - H G_2(t)}{G_1(t)} = E \frac{F_1(\vec{r})}{F_2(\vec{r})} = \sigma_1, \quad (4.13)$$

onde  $\sigma_1$  é a constante de separabilidade.

Assim, de (4.13) temos que a partir da EDP descrita em (4.10) obtivemos as equações

$$EF_1(\vec{r}) = \sigma_1 F_2(\vec{r}) \implies F_2(\vec{r}) = \frac{E}{\sigma_1} F_1(\vec{r}), \quad \sigma_1 \neq 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt}G_2(t) = \sigma_1 G_1(t) + HG_2(t). \quad (4.15)$$

As equações (4.14) e (4.15) serão resolvidas e/ou explicitadas nas subseções seguintes. Nesse momento nos concentraremos em, a partir da EDP descrita em (4.9), determinar duas equações diferenciais desacopladas. Para tal, substituiremos a relação (4.14) na EDP (4.9), de modo que

$$F_1(\vec{r}) \frac{d}{dt}G_1(t) = G_1(t)[A\nabla^2 F_1(\vec{r}) + BF_1(\vec{r})] + \frac{DE}{\sigma_1} F_1(\vec{r})G_2(t). \quad (4.16)$$

Dividindo a EDP acima por  $F_1(\vec{r})G_1(t)$ , tem-se

$$\frac{\frac{d}{dt}G_1(t)}{G_1(t)} = \frac{A\nabla^2 F_1(\vec{r}) + BF_1(\vec{r})}{F_1(\vec{r})} + \frac{DE}{\sigma_1} \frac{G_2(t)}{G_1(t)}. \quad (4.17)$$

Reorganizando os termos da equação (4.17), obtem-se

$$\frac{\frac{d}{dt}G_1(t) - \frac{DE}{\sigma_1}G_2(t)}{G_1(t)} = \frac{A\nabla^2 F_1(\vec{r}) + BF_1(\vec{r})}{F_1(\vec{r})}. \quad (4.18)$$

Novamente, observe que  $\vec{r}$  e  $t$  são variáveis independentes. Além disso, como o lado esquerdo da equação (4.18) só depende de  $t$  e lado direito da mesma equação só depende de  $\vec{r}$ , temos

$$\frac{\frac{d}{dt}G_1(t) - \frac{DE}{\sigma_1}G_2(t)}{G_1(t)} = \frac{A\nabla^2 F_1(\vec{r}) + BF_1(\vec{r})}{F_1(\vec{r})} = \sigma_2, \quad (4.19)$$

onde  $\sigma_2$  é a constante de separabilidade.

De (4.19), temos que a partir da EDP descrita em (4.9) obtivemos as equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}G_1(t) = \frac{DE}{\sigma_1}G_2(t) + \sigma_2G_1(t) \quad (4.20)$$

$$A\nabla^2 F_1(\vec{r}) + (B - \sigma_2)F_1(\vec{r}) = 0. \quad (4.21)$$

Assim, temos que para resolver o sistema de EDPs descrito em (4.1) e (4.2), basta resolvermos as equações que estão descritas em (4.14), (4.15), (4.20) e (4.21). Nas próximas subseções dessa seção nos concentraremos em solucionar essas equações e estudar possíveis valores para as constantes de separabilidade.

## 4.1 Solução para a variável espacial

Utilizando as condições de contorno descritas na subseção 3.1.1, iremos apresentar uma solução para a EDP descrita em (4.21), utilizando a técnica separação de variáveis. Escrevendo na equação (4.21) o laplaciano em coordenadas cilíndricas fica-se com

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}F_1(r, \theta, z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F_1(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}F_1(r, \theta, z) \\ + \frac{\partial^2}{\partial z^2}F_1(r, \theta, z) + \left(\frac{B - \sigma_2}{A}\right)F_1(r, \theta, z) \\ = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora iremos supor que existem funções  $\tilde{F}_1 : (0, R] \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : [0, Z] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $F_1(r, \theta, z)$  pode ser expressa como

$$F_1(r, \theta, z) = \tilde{F}_1(r, \theta)h(z) \quad (4.23)$$

Substituindo a relação acima na equação (4.22) tem-se

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{F}_1(r, \theta) \right] h(z) + \left[ \frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z) \right] \tilde{F}_1(r, \theta) = 0. \quad (4.24)$$

Reorganizando os termos da equação acima, podemos escrevê-la de modo que um lado da igualdade só dependa das variáveis  $r$  e  $\theta$  e o outro lado dependa da variável  $z$ , que são variáveis independentes entre si. Deste modo, temos que

$$\frac{- \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{F}_1(r, \theta) \right)}{\tilde{F}_1(r, \theta)} = \frac{\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z)}{h(z)} = \sigma_3, \quad (4.25)$$

onde  $\sigma_3$  é a constante de separabilidade.

A partir das igualdades acima, obtemos as equações diferenciais

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \sigma_3 \tilde{F}_1(r, \theta) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z) - \sigma_3 h(z) = 0 \implies \frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \sigma_3 \right] h(z) = 0. \quad (4.27)$$

Utilizando a separação de variáveis na equação (4.26), iremos supor que a função  $\tilde{F}_1(r, \theta)$  pode ser expressa como

$$\tilde{F}_1(r, \theta) = f(r)g(\theta), \quad (4.28)$$

onde  $f, g$  são funções tais que  $f : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Assim, substituindo a relação (4.28) na equação (4.26) fica-se com

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) + \sigma_3 f(r) \right] g(\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) f(r) = 0$$

$$\text{multiplicando por } r^2 \implies r^2 \left[ \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) + \sigma_3 f(r) \right] g(\theta) + \frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) f(r) = 0. \quad (4.29)$$

Reorganizando os termos da equação acima, podemos escrevê-la de modo que um lado da igualdade só dependa da variável  $r$  e o outro lado dependa da variável  $\theta$ , que são variáveis independentes entre si. Deste modo, temos que

$$\frac{r^2 \left[ \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) + \sigma_3 f(r) \right]}{f(r)} = \frac{-\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta)}{g(\theta)} = \sigma_4, \quad (4.30)$$

onde  $\sigma_4$  é a constante de separabilidade.

Da equação (4.30) obtemos as equações

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) + (\sigma_3 r^2 - \sigma_4) f(r) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) + \sigma_4 g(\theta) = 0. \quad (4.32)$$

A partir desse instante, nosso objetivo será determinar soluções para a equação (4.27) relacionada a variável azimutal, para a equação (4.31) relacionada a variável radial, e para a equação (4.32) relacionada a variável angular. Para solucionar essas equações, iremos caracterizar as condições de contorno para as mesmas a partir da afirmação seguinte.

- **Afirmação 2:** *Sob as condições de contorno descritas em (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7), temos que:*

$$\text{Item 1) } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0 \text{ e } f(R) = 0;$$

$$\text{Item 2) } g(\theta) = g(\theta + 2\pi), \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R};$$

$$\text{Item 3) } \frac{d}{dz} h(0) = 0 \text{ e } h(Z) = 0.$$

**Demonstração do item 2:** A mostrar que  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Da relação (4.22), temos que  $\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r, \theta + 2\pi, z, t)$ , para todo  $(\vec{r}, t) \in \Omega_{cil} \times (0, \infty)$ . Assim

$$f(r)g(\theta)h(z)G_1(t) = f(r)g(\theta + 2\pi)h(z)G_1(t) \Leftrightarrow$$

$$f(r)h(z)G_1(t)[g(\theta) - g(\theta + 2\pi)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(r)h(z)G_1(t) = 0 \quad \text{ou} \quad g(\theta) - g(\theta + 2\pi) = 0. \quad (4.33)$$

Mas note que se  $f(r)h(z)G_1(t) = 0$ , para todo  $r \in (0, R]$ ,  $z \in [0, Z]$  e  $t \in (0, \infty)$ , implicaria que

$$\phi(\vec{r}, t) = F_1(\vec{r})G_1(t) = f(r)g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$$

Ainda mais, se  $f(r) = 0$  ou  $h(z) = 0$ , implicaria

$$F_1(\vec{r}) \stackrel{\text{relação(4.23)}}{=} \tilde{F}_1(r, \theta)h(z) \stackrel{\text{relação(4.28)}}{=} f(r)g(\theta)h(z) = 0$$

$$\stackrel{\text{equação(4.14)}}{\implies} F_2(\vec{r}) = 0 \stackrel{\text{relação(4.6)}}{\implies} C(\vec{r}, t) = 0,$$

o que seria absurdo, afinal queremos que  $C(\vec{r}, t)$  seja diferente de zero pois estamos considerando que o problema possui um grupo de precursores de nêutrons.

Finalmente, se  $G_1(t) = 0$ , implicaria, pela equação (4.20)

$$\frac{d}{dt}G_1(t) = \frac{DE}{\sigma_1}G_2(t) + \sigma_2G_1(t) \stackrel{G_1(t)=0}{\implies} G_2(t) = 0,$$

donde segue, pela relação (4.6), que  $C(\vec{r}, t)=0$ , o que seria absurdo. Logo, temos que  $f(r)h(z)G_1(t) \neq 0$ , o que mostra a validade de  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .

□

**Demonstração do item 1:** A mostrar que  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0$  e  $f(R) = 0$ .

Iniciaremos mostrando que  $f(R) = 0$ . Da relação (3.4), temos que  $\phi(R, \theta, z, t) = 0$ , donde segue que  $f(R)g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$ , para todo  $\theta \in (-\infty, \infty)$ ,  $z \in [0, Z]$ , e  $t \in (0, \infty)$ . Isso implicaria que

$$f(R) = 0 \text{ ou } g(\theta)h(z)G_1(t) = 0.$$

Contudo, se  $g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$  teríamos o par solução trivial, isto é,  $(\phi(\vec{r}, t), C(\vec{r}, t)) = (0, 0)$ . Isso se justifica pois, pela demonstração do item 2, sabemos que  $G_1(t) \neq 0$  e  $h(z) \neq 0$ . Portanto, restaria  $g(\theta) = 0$ . Mas se  $g(\theta) = 0$ , teríamos que  $F_1(\vec{r}) = 0$  (relações (4.23) e (4.28)), que implicaria, pela equação (4.14), que  $F_2(\vec{r}) = 0$ . Da igualdade (4.5), teríamos que  $F_1(\vec{r}) = 0 \implies \phi(\vec{r}, t) = 0$ ; e  $F_2(\vec{r}) = 0 \implies C(\vec{r}, t) = 0$ . Logo,  $f(R) = 0$ .

Agora mostraremos que  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0$ . Utilizando a relação (3.3), tem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \theta, z, t) = 0 \implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r)g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$$

$$\implies g(\theta)h(z)G_1(t) \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0 \implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0.$$

A última implicação acima se justifica pois  $g(\theta), h(z), G_1(t) \neq 0$ , conforme constatado anteriormente na demonstração desse item e na demonstração do item 2.

Portanto, temos que  $f(R) = 0$  e  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0$ , para todo  $r \in (0, R]$ .

□

**Demonstração do item 3:** A mostrar que  $\frac{d}{dz}h(0) = 0$  e  $h(Z) = 0$ .

Utilizando as relações (3.6) e (3.7) temos, respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(r, \theta, 0, t) = 0 \implies f(r)g(\theta)\frac{d}{dz}h(0)G_1(t) = 0 \implies \frac{d}{dz}h(0) = 0$$

$$\phi(r, \theta, Z, t) = 0 \implies f(r)g(\theta)h(Z)G_1(t) = 0 \implies h(Z) = 0,$$

pois já foi destacado nas demonstrações dos itens 1 e 2 que se  $f(r) = 0$ , ou  $g(\theta) = 0$ , ou  $G_1(t) = 0$  teríamos solução trivial para a função fluxo e a função concentração de precursores.

Assim,  $\frac{d}{dz}h(0) = 0$  e  $h(Z) = 0$ , como queríamos mostrar.  $\square$

Nesse momento, temos todas as suposições para determinar a solução para o problema. Deste modo, procuraremos os autovalores das autofunções associados a cada um dos problemas estudados. Iniciaremos com o estudo dos valores reais que a constante de separabilidade  $\sigma_4$  pode assumir.

- *Caso em que  $\sigma_4 = -\xi_4^2 < 0$ , com  $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ :*

Supondo  $\sigma_4 = -\xi_4^2 < 0$ , teríamos que a equação (4.22) seria dada por

$$\frac{d^2}{d\theta^2}g(\theta) - \xi_4^2g(\theta) = 0. \quad (4.34)$$

Como trata-se de uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea e com coeficientes constantes, para resolvê-la podemos determinar as raízes da equação característica associada, ou seja

$$m^2 - \xi_4^2 = 0 \implies m = \pm\xi_4. \quad (4.35)$$

Como temos duas raízes reais e distintas, temos que  $g_1(\theta) = \exp(\xi_4\theta)$  e  $g_2(\theta) = \exp(-\xi_4\theta)$ , onde  $g_1, g_2 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , são duas soluções linearmente independentes <sup>2</sup> da EDO (4.34) (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173-174). Logo, a combinação linear de  $g_1, g_2$  formam a solução geral da EDO (4.34), dada por

$$g(\theta) = c_1 \exp(\xi_4\theta) + c_2 \exp(-\xi_4\theta), \quad (4.36)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Aplicando a condição  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$  na solução acima fica-se com

$$\begin{aligned} c_1 \exp(\xi_4\theta) + c_2 \exp(-\xi_4\theta) &= c_1 \exp(\xi_4(\theta + 2\pi)) + c_2 \exp(-\xi_4(\theta + 2\pi)) \\ \implies \exp(\xi_4\theta)[c_1 - c_1 \exp(2\pi\xi_4)] + \exp(-\xi_4\theta)[c_2 - c_2 \exp(-2\pi\xi_4)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Como o conjunto de funções de  $\theta$   $\{\exp(\xi_4\theta), \exp(-\xi_4\theta)\}$  é linearmente independente, temos que

$$c_1 - c_1 \exp(2\pi\xi_4) = 0 \text{ e } c_2 - c_2 \exp(-2\pi\xi_4) = 0. \quad (4.38)$$

O que implica que  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ , pois  $\xi_4 \neq 0$ . Logo, podemos desconsiderar esse caso pois nosso interesse não está em soluções triviais.

- *Caso em que  $\sigma_4 = 0$ :*

Supondo  $\xi_4 = 0$ , temos que a equação (4.32) será

$$\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) = 0. \quad (4.39)$$

Cuja solução geral é dada por  $g(\theta) = c_1 + c_2\theta$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  (ZILL, CULLEN, 2001, p. 174). Aplicando a condição  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$  na solução geral

---

<sup>2</sup>Para verificar que  $g_1, g_2$  são linearmente independentes, basta verificar que o Wroskiano dessas funções é  $-2\xi_4 \neq 0$ , para todo  $\theta \in (-\infty, \infty)$  (ZILL, CULLEN, 2001, p. 149).

encontrada, obtem-se

$$\begin{aligned} c_1 + c_2\theta &= c_1 + c_2(\theta + 2\pi) \\ \implies 2c_2\pi &= 0 \implies c_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

o que implica que  $g(\theta) = c_1$ . Como encontramos uma solução não nula para a função  $g(\theta)$ , vamos analisar os valores reais que a constante de separabilidade  $\sigma_3$  pode assumir quando  $\sigma_4 = 0$ .

- *Caso em que  $\sigma_4 = 0$  e  $\sigma_3 = -\xi_3^2 < 0$ , onde  $\xi_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$ :*

Nesse caso, temos que a equação (4.31) será

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) - (\sigma_3 r)^2 f(r) = 0, \quad (4.41)$$

que é a equação de Bessel modificada de ordem zero (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 155), que tem como solução geral a expressão

$$f(r) = c_3 I_0(\xi_3 r) + c_4 K_0(\xi_3 r), \quad (4.42)$$

onde  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ,  $I_0$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem zero (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 156), e  $K_0$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem zero (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 156).

Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável espacial radial  $r$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) &= 0 \\ \implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ c_3 \frac{d}{dr} I_0(\xi_3 r) + c_4 \frac{d}{dr} K_0(\xi_3 r) \right\} &= 0 \Leftrightarrow c_4 = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

pois  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} K_0(r) = -\infty$  (BOWMAN, 1958, p. 42). Por outro lado, temos que  $0 = f(R) = c_3 I_0(\xi_3 R)$ , que implica que  $c_3 = 0$ , pois  $I_0(r) \neq 0, \forall r \in \mathbb{R}$  (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 156).

Portanto, como  $c_3, c_4 = 0$ , teríamos solução trivial para  $f(r)$ , o que nos leva a desconsiderar esse caso.

- *Caso em que  $\sigma_4 = 0$  e  $\sigma_3 = 0$ :*

Nesse caso, temos que a equação (4.31) será

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) = 0. \quad (4.44)$$

Que trata-se de uma equação de Cauchy-Euler (ZILL, CULLEN, 2001, p. 275). Para resolvê-la, inicialmente vamos supor que a função  $f_1(r) = r^m$  é uma solução para a EDO (4.44), onde  $m$  será determinado a seguir e  $f_1 : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ . A primeira e a segunda derivadas de  $f_1(r)$  são, respectivamente

$$\frac{d}{dr} f_1(r) = mr^{m-1} \quad e \quad \frac{d^2}{dr^2} f_1(r) = m(m-1)r^{m-2}. \quad (4.45)$$

Assim, a EDO (4.44) torna-se

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) = r^m [m(m-1) + m] = 0, \quad (4.46)$$

de modo que temos  $m(m-1) + m = 0$ . Assim, segue que  $m = 0$ .

Portanto,  $f_1(r) = r^0 = 1$  é uma solução para a EDO (4.44). A partir dessa solução, construiremos uma segunda solução linearmente independente a  $f_1(r)$ .

Seja a função  $f_2(r) = f_1(r)u(r)$ , onde  $u : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2 : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ . A primeira e a segunda derivadas de  $f_2(r)$  são, respectivamente

$$\frac{d}{dr} f_2(r) = f_1'(r)u(r) + f_1(r)u'(r) \quad e \quad (4.47)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} f_2(r) = f_1''(r)u(r) + 2f_1'(r)u'(r) + f_1(r)u''(r), \quad (4.48)$$

onde  $f_1''(r) = \frac{d^2}{dr^2}f_1(r)$ ,  $u''(r) = \frac{d^2}{dr^2}u(r)$ ,  $f_1'(r) = \frac{d}{dr}f_1(r)$  e  $u'(r) = \frac{d}{dr}u(r)$ . Como  $f_2(r)$  é solução da EDO (4.44), temos que

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2}f_2(r) + r \frac{d}{dr}f_2(r) = 0$$

$$\implies f_1''(r)u(r) + 2f_1'(r)u'(r) + f_1(r)u''(r) + \frac{1}{r}[f_1'(r)u(r) + f_1(r)u'(r)] = 0$$

$$\implies u(r) \left[ f_1''(r) + \frac{1}{r}f_1'(r) \right] + f_1(r)u''(r) + u'(r) \left( 2f_1'(r) + \frac{1}{r}f_1(r) \right) = 0.$$

Note que o que está dentro dos colchetes da última implicação é igual a zero, restando portanto

$$f_1(r)u''(r) + u'(r) \left( 2f_1'(r) + \frac{1}{r}f_1(r) \right) = 0. \quad (4.49)$$

Realizando a troca  $u'(r) = w(r)$ , temos

$$f_1(r)w'(r) + w(r) \left( 2f_1'(r) + \frac{1}{r}f_1(r) \right) = 0, \quad (4.50)$$

onde  $w'(r) = \frac{d}{dr}w(r)$ . Note que a equação diferencial acima é separável (ZILL, CULLEN, 2001, p. 44), de modo que

$$\int \frac{1}{w(r)}dw = -2 \int \frac{f_1'(r)}{f_1(r)}dr - \int \frac{1}{r} \frac{f_1'(r)}{f_1(r)}dr \quad (4.51)$$

$$\implies \ln |w(r)| + 2 \ln |f_1(r)| = -\ln |r| + M_1 \quad (4.52)$$

$$\implies \ln |w(r)f_1^2(r)| = \ln |r^{-1}| + M_1 \quad (4.53)$$

$$\implies w(r) = \frac{r^{-1}M_2}{f_1^2(r)}, \quad (4.54)$$

onde  $M_1$  é constante real e  $M_2 = \exp(M_1)$ . Como  $u'(r) = w(r)$ , temos

$$u(r) = \int w(r)dr = \int \frac{r^{-1}M_2}{f_1^2(r)}dr$$

$$\stackrel{f_1(r)=1}{\implies} u(r) = M_2 \int r^{-1}dr \implies u(r) = M_2 \ln |r| + M_3,$$

onde  $M_3$  é constante real. Assim, temos que  $f_2(r) = f_1(r)u(r) = M_2 \ln |r| + M_3$ . Tomando  $M_2, M_3 = 1$ , temos que a solução geral da EDO (4.44) será a combinação linear das funções 1 e  $\ln |r|$ , de modo que

$$f(r) = c_3 + c_4 \ln(r), \quad (4.55)$$

onde  $c_3, c_4$  são constantes reais.

Aplicando as condições de fronteira na solução geral tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} \{c_3 + c_4 \ln(r)\} \\ &\implies 0 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{c_4}{r} \Leftrightarrow c_4 = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Assim,  $f(r) = c_3$ . Por outro lado, utilizando a condição  $f(R) = 0$ , temos que  $c_3 = 0$ , logo,  $f(r) = 0$ . Como não queremos solução trivial, esse caso também deve ser desconsiderado.

- *Caso em que  $\sigma_4 = 0$  e  $\sigma_3 = \xi_3^2 > 0$ , onde  $\xi_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$ :*

Nesse caso, temos que a equação (4.31) será

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) + (\xi_3 r)^2 f(r) = 0, \quad (4.57)$$

que é a equação de Bessel paramétrica de ordem zero (ZILL, CULLEN, 2001, p. 335), cuja solução geral é dada por

$$f(r) = c_3 J_0(\xi_3 r) + c_4 Y_0(\xi_3 r), \quad (4.58)$$

onde  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ,  $J_0$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 153), e  $Y_0$  é a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 154).

Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável radial fica-se com

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0 \quad (4.59)$$

$$\implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} \{c_3 J_0(\xi_3 r) + c_4 Y_0(\xi_3 r)\} = 0 \quad (4.60)$$

$$\implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} c_3 J_0(\xi_3 r) + \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} c_4 Y_0(\xi_3 r) = 0 \Leftrightarrow c_4 = 0, \quad (4.61)$$

pois  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} Y_0(r) = \infty$  (ZILL, CULLEN, 2001, p. 334).

Por outro lado, temos que  $f(R) = 0$ , o que implica

$$c_3 J_0(\xi_3 R) = 0 \implies \xi_3 R = \alpha_n, \quad (4.62)$$

onde  $J_0(\alpha_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Portanto, determinamos

$$\xi_{3,n} = \frac{\alpha_n}{R}, \quad (4.63)$$

e  $f_n(r) = c_{3,n} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$  que fazem parte da solução do problema.

Iremos caracterizar

$$\tilde{F}_{1,n}^\theta(r, \theta) = a_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right), \quad (4.64)$$

onde  $a_n = c_1 c_{3,n}$ , que são as funções que satisfazem o problema da equação (4.63), considerando  $\sigma_4 = 0$  para cada  $\sigma_{3,n} = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2$ .

Agora, nos atentaremos para a  $n$ -ésima equação (4.27), ou seja

$$\frac{d^2}{dz^2} h_n(z) + \left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \right] h_n(z) = 0. \quad (4.65)$$

A partir desse momento, nos próximos três casos estudaremos os valores de  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \right]$  dentro da análise de  $\sigma_4 = 0$  e  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2$ .

- *Caso em que*  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 e \left[ \left(\frac{B - \sigma_{2,n}}{A}\right) - \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 \right] = -\xi_{2,n}^2 < 0$ , onde  $\xi_{2,n} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :

Com essas suposições, temos que a equação (4.27) será uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea e com coeficientes constantes (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173), cuja equação característica será dada por

$$m^2 + (-\xi_{2,n}^2) = 0 \implies m = \pm \xi_{2,n}. \quad (4.66)$$

Como as raízes da equação característica são reais e distintas, temos que a solução geral da equação (4.113) será

$$h_n(z) = c_5 \exp(\xi_{2,n} z) + c_6 \exp(-\xi_{2,n} z), \quad (4.67)$$

onde  $c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ .

Aplicando as condições de contorno para a variável azimutal, temos

$$\frac{d}{dz} h_n(0) = 0 \implies c_5 \xi_{2,n} - c_6 \xi_{2,n} = 0 \quad (4.68)$$

$$\implies \xi_{2,n}(c_5 - c_6) = 0 \implies c_5 = c_6, \quad (4.69)$$

pois  $\xi_{2,n} \neq 0$ .

Utilizando a outra condição de contorno relacionada a variável azimutal, temos

$$h_n(Z) = 0 \implies c_5(\exp(\xi_{2,n} Z) + \exp(-\xi_{2,n} Z)) \implies c_5 = c_6 = 0. \quad (4.70)$$

Logo, temos que  $h_n(z) = 0$ , por isso iremos desconsiderar esse caso.

- *Caso em que*  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 e \left[ \left(\frac{B - \sigma_{2,n}}{A}\right) - \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 \right] = 0$  :

Com essas suposições, temos que a equação (4.27) será uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea e com coeficientes constantes (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173), cuja equação característica será dada por

$$m^2 = 0 \implies m_1 = 0, m_2 = 0. \quad (4.71)$$

Como as raízes da equação característica são reais e iguais, temos que a solução geral da equação (4.113) será

$$h_n(z) = c_5 + c_6 z, \quad (4.72)$$

onde  $c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ .

Aplicando as condições de contorno para a variável azimutal temos

$$\frac{d}{dz} h_n(0) = 0 \implies c_6 = 0 \quad e \quad (4.73)$$

$$h_n(Z) = 0 \implies c_5 = 0, \quad (4.74)$$

que nos leva a solução trivial para  $h_n(z)$ . Portanto, esse caso será desconsiderado.

- *Caso em que  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2$  e  $\left[\left(\frac{B - \sigma_{2,n,k}}{A}\right) - \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2\right] = \xi_{2,n,k}^2 > 0$ , onde  $\xi_{2,n} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Com essas suposições, temos que a equação (4.27) será uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea e com coeficientes constantes (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173), cuja equação característica será dada por

$$m^2 + \xi_{2,n}^2 = 0 \implies m = \pm \xi_{2,n} i, \quad (4.75)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária. Como as raízes da equação característica são complexas, temos que a solução geral da equação (4.113) será

$$h_n(z) = c_5 \cos(\xi_{2,n} z) + c_6 \text{sen}(\xi_{2,n} z), \quad (4.76)$$

onde  $c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ .

Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável azimutal, ficamos com

$$\frac{d}{dz}h_n(0) = 0 \implies c_6 \xi_{2,n} \cos(\xi_{2,n} 0) = 0 \implies c_6 = 0. \quad (4.77)$$

Por outro lado, temos

$$h_n(Z) = 0 \implies h_n(Z) = c_5 \cos(\xi_{2,n} Z) = 0 \implies \xi_{2,n} Z = \left(\frac{2k-1}{2}\right) \pi, \quad (4.78)$$

onde  $k = 1, 2, \dots$ , afinal se  $c_5 = 0$ , teríamos a solução trivial.

Assim, segue:

$$\xi_{2,n,k} = \left(\frac{2k-1}{2Z}\pi\right) \quad \text{e} \quad (4.79)$$

$$\sigma_{2,n,k} = B - A \left[ \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 + \left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\pi\right)\right)^2 \right]. \quad (4.80)$$

Dessa maneira, obtemos uma solução para as funções que dependem das variáveis espaciais, que são

$$F_{1,n,k}(r, \theta, z) = b_{n,k} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\pi\right) \pi z\right) \quad \text{e} \quad (4.81)$$

$$F_{2,n,k}(r, \theta, z) = \frac{E}{\sigma_1} b_{n,k} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\pi\right) \pi z\right), \quad (4.82)$$

onde  $b_{n,k} = a_n c_{5,k}$ .

- *Caso em que  $\sigma_4 = \xi_4^2 > 0$ , onde  $\xi_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Com essas suposições, temos que a equação (4.32) será

$$\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) + \xi_4^2 g(\theta) = 0. \quad (4.83)$$

Como trata-se de uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea e com coeficientes constantes (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173), para resolvê-la podemos determinar as raízes da equação característica associada, ou seja

$$m^2 + \xi_4^2 = 0 \implies m = \pm \xi_4 i, \quad (4.84)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária. Como as raízes da equação característica são complexas, temos que a solução geral da EDO será (ZILL, CULLEN, 2001, p. 174-175)

$$g(\theta) = c_1 \cos(\xi_4 \theta) + c_2 \operatorname{sen}(\xi_4 \theta), \quad (4.85)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável angular fica-se com

$$g(\theta) = g(\theta + 2\pi) \quad (4.86)$$

$$\implies c_1 \cos(\xi_4 \theta) + c_2 \operatorname{sen}(\xi_4 \theta) = c_1 \cos(\xi_4 \theta + 2\pi \xi_4) + c_2 \operatorname{sen}(\xi_4 \theta + 2\pi \xi_4). \quad (4.87)$$

Utilizando as identidades trigonométricas de seno da soma e cosseno da soma de dois arcos, e reorganizando os termos, segue

$$0 = \cos(\xi_4 \theta) [c_1 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) - c_2 \operatorname{sen}(2\pi \xi_4)] + \operatorname{sen}(\xi_4 \theta) [c_2 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) + c_1 \operatorname{sen}(2\pi \xi_4)]. \quad (4.88)$$

Como o conjunto de funções  $\{\operatorname{sen}(\xi_4 \theta), \cos(\xi_4 \theta)\}$  é linearmente independente, temos

$$c_1 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) - c_2 \operatorname{sen}(2\pi \xi_4) = 0 \quad \text{e} \quad (4.89)$$

$$c_2 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) + c_1 \operatorname{sen}(2\pi \xi_4) = 0. \quad (4.90)$$

Na forma matricial, o sistema linear acima pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos(2\pi \xi_4) & -\operatorname{sen}(2\pi \xi_4) \\ \operatorname{sen}(2\pi \xi_4) & 1 - \cos(2\pi \xi_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Como queremos que  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 \neq 0$ , precisa ser válido que a matriz dos coeficientes transforma o vetor  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  no vetor nulo, ou seja, que a transformação linear induzida por essa matriz é não-inversível. Desta forma, como a matriz dos coeficientes induz uma transformação linear não-inversível, temos que o determinante dela deve ser nulo, de modo que

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 - \cos(2\pi\xi_4) & -\text{sen}(2\pi\xi_4) \\ \text{sen}(2\pi\xi_4) & 1 - \cos(2\pi\xi_4) \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (4.92)$$

$$\implies (1 - \cos(2\pi\xi_4))^2 + \text{sen}^2(2\pi\xi_4) = 0 \quad (4.93)$$

$$\Leftrightarrow 1^2 - 2\cos(2\pi\xi_4) + \cos^2(2\pi\xi_4) + \text{sen}^2(2\pi\xi_4) = 0 \quad (4.94)$$

$$\Leftrightarrow 1^2 - 2\cos(2\pi\xi_4) + 1 = 0 \quad (4.95)$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\xi_4 = 2\pi l, \quad 1, 2, \dots \quad (4.96)$$

$$\implies \xi_{4,l} = l. \quad (4.97)$$

Portanto, temos que

$$g^{(l)}(\theta) = c_{1,l}\cos(l\theta) + c_{2,l}\text{sen}(l\theta), \quad \text{com } \sigma_{4,l} = l^2. \quad (4.98)$$

Como encontramos uma solução não nula para a função  $g^{(l)}(\theta)$ , nos próximos casos vamos analisar os valores reais que a constante de separabilidade  $\sigma_{3,l}$  pode assumir quando  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$ .

- *Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$  e  $\sigma_{3,l} = -\xi_{3,l}^2 < 0$  onde  $\xi_{3,l}; \xi_{4,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Com essas suposições, temos que a equação (4.31) será

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f^{(l)}(r) + r \frac{d}{dr} f^{(l)}(r) - (\xi_{3,l}^2 r^2 + l^2) f^{(l)}(r) = 0, \quad (4.99)$$

que é conhecida como a equação modificada de Bessel de ordem  $l$  (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 155), cuja solução é dada por

$$f^{(l)}(r) = c_{7,l}I_l(\xi_{3,l}r) + c_{8,l}K_l(\xi_{3,l}r), \quad (4.100)$$

onde  $I_l$  é a função modificada de primeira espécie de Bessel de ordem  $l$  (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 155), e  $K_l$  é a função modificada de segunda espécie de Bessel de ordem  $l$  (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 156).

Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável radial temos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0 \quad (4.101)$$

$$\implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ c_{7,l} \frac{d}{dr} I_l(\xi_{3,l}r) + c_{8,l} \frac{d}{dr} K_l(\xi_{3,l}r) \right\} = 0 \Leftrightarrow c_{8,l} = 0, \quad (4.102)$$

pois  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} K_l(r) = -\infty$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Por outro lado, temos que  $0 = f(R) = c_{7,l}I_l(\xi_{3,l}R)$ , que implica que  $c_{7,l} = 0$ , pois  $I_l(\xi_{3,l}) \neq 0$ , para  $R > 0$ .

Logo, temos solução trivial para este caso.

- *Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$  e  $\sigma_{3,l} = 0$  onde  $\xi_{4,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Com essas suposições, temos que a equação (4.31) será

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f^{(l)}(r) + r \frac{d}{dr} f^{(l)}(r) - l^2 f^{(l)}(r) = 0, \quad (4.103)$$

que trata-se de uma equação de Cauchy-Euler (ZILL, CULLEN, 2001, p. 275).

Para resolvê-la, inicialmente vamos supor que a função  $f_1(r) = r^m$  é uma solução para a EDO (4.103), onde  $m$  será determinado a seguir e  $f_1 : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ . A primeira e a segunda derivadas de  $f_1(r)$  são, respectivamente

$$\frac{d}{dr} f_1(r) = mr^{m-1} \quad e \quad \frac{d^2}{dr^2} f_1(r) = m(m-1)r^{m-2}.$$

Assim, a EDO (4.103) torna-se

$$r^m[m(m-1)] + r^m m - l^2 r^m = 0 \implies r^m(m^2 - l^2) = 0 \implies m = \pm l. \quad (4.104)$$

Assim, temos que  $r^l$  e  $r^{-l}$  são soluções para a EDO (4.103). Como  $\{r^l, r^{-l}\}$  é um conjunto linearmente independente, temos que

$$f^{(l)}(r) = c_{7,l}r^l + c_{8,l}r^{-l}, \quad (4.105)$$

onde  $c_{7,l}; c_{8,l} \in \mathbb{R}$ , é solução geral para a EDO (4.103).

Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável radial temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) &= 0 \\ \implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \{lc_{7,l}r^{l-1} - lc_{8,l}r^{-l-1}\} &= 0 \implies c_{8,l} = 0, \end{aligned} \quad (4.106)$$

pois  $\lim_{r \rightarrow 0^+} -lr^{-l-1} = -\infty$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Por outro lado, temos que  $0 = f(R) = c_{7,l}R^l$ , que implica que  $c_{7,l} = 0$ , pois  $R^l \neq 0$ , para  $R > 0$ .

Logo, temos solução trivial para este caso.

- *Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$  e  $\sigma_{3,l} = \xi_{3,l}^2 > 0$  onde  $\xi_{3,l}; \xi_{4,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Nesse caso, temos que a equação (4.31) será

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f^{(l)}(r) + r \frac{d}{dr} f^{(l)}(r) + (\xi_{3,l}^2 r^2 - l^2) f^{(l)}(r) = 0, \quad (4.107)$$

que é a equação de Bessel paramétrica de ordem  $l$  (ZILL, CULLEN, 2001, p. 335), cuja solução geral é dada por

$$f^{(l)}(r) = c_{7,l}J_l(\xi_{3,l}r) + c_{8,l}Y_l(\xi_{3,l}r), \quad (4.108)$$

onde  $c_{7,l}, c_{8,l} \in \mathbb{R}$ ,  $J_l$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $l$  (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 153), e  $Y_l$  é a função de Bessel de segunda espécie de ordem  $l$  (SPIEGEL, LIPSCHUTZ, LIU, 2009, p. 154).

Aplicando as condições de contorno relacionadas a variável radial temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) &= 0 \\ \implies \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} \{c_{7,l}J_l(\xi_{3,l}r) + c_{8,l}Y_l(\xi_{3,l}r)\} &= 0 \Leftrightarrow c_{8,l} = 0, \end{aligned} \quad (4.109)$$

pois  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} Y_l(r) = \infty$  (ZILL, CULLEN, 2001, p. 334). Por outro lado, temos que  $f(R) = 0$ , o que implica

$$c_{7,l}J_l(\xi_{3,l}R) = 0 \implies \xi_{3,l}R = \alpha_{n,l}, \quad (4.110)$$

onde  $J_l(\alpha_{n,l}) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Portanto, determinamos que

$$\xi_{3,l} = \frac{\alpha_{n,l}}{R} \quad (4.111)$$

e  $f_n^{(l)}(r) = c_{7,l}J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right)$ , que fazem parte da solução do problema.

Assim, caracteriza-se

$$\tilde{F}_{l,n}(r, \theta) = c_{7,l}J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) [c_{1,l}\cos(l\theta) + c_{2,l}\sen(l\theta)]. \quad (4.112)$$

Deste modo, estamos caracterizando uma nova classe de funções que são soluções para o problema proposto.

Nesse momento, nos atentaremos para a equação (4.27), ou seja

$$\frac{d^2}{dz^2} h_{n,l}(z) + \left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n,l}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 \right] h_{n,l}(z) = 0. \quad (4.113)$$

A partir desse momento, nos próximos três casos estudaremos os valores de  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n,l}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 \right]$  dentro da análise de  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$  e  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2$ .

- *Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2$  e  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 \right] = -\xi_{2,n,l}^2 < 0$ , onde  $\xi_{4,l}; \xi_{2,n,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Esse caso leva a solução trivial e seu desenvolvimento é análogo ao caso em que  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2$  e  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n,l}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \right] = -\xi_{2,n}^2 < 0$  (descrito anteriormente).

- *Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2$  e  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n,l}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 \right] = 0$ , onde  $\xi_{4,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Esse caso leva a solução trivial e seu desenvolvimento é análogo ao caso em que  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2$  e  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \right] = 0$  (descrito anteriormente).

- *Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$ ,  $\sigma_{3,n,l} = \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2$  e  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n,k,l}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 \right] = \xi_{2,n,k,l}^2 > 0$ , onde  $\xi_{4,l}; \xi_{2,n,k,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

Esse caso possui desenvolvimento análogo ao caso em que  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2$  e  $\left[ \left( \frac{B - \sigma_{2,n}}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \right] = -\xi_{2,n}^2 > 0$  (descrito anteriormente).

Portanto, temos que com as suposições deste caso segue

$$h^{(n,k,l)}(z) = c_{9,k} \cos(\xi_{2,n,k,l} z), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.114)$$

com  $\xi_{2,n,k,l} = \frac{(2k-1)}{2Z} \pi$ . Ainda, temos:

$$\sigma_{2,n,k,l} = B - A \left[ \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 + \left( \left( \frac{2k-1}{2Z} \right) \pi \right)^2 \right]. \quad (4.115)$$

Finalmente, para essa classe de soluções obtemos

$$F_1^{(n,k,l)}(r, \theta, z) = b_{n,k,l} J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) [c_{1,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,l} \cos(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)}{2Z} \pi z \right) \quad (4.116)$$

$$F_2^{(n,k,l)}(r, \theta, z) = \frac{E}{\sigma_1} F_1^{(n,k,l)}(r, \theta, z), \quad (4.117)$$

onde  $b_{n,k,l}$ ;  $c_{1,l}$  e  $c_{2,l}$  são constantes arbitrárias.

## 4.2 Solução para a variável temporal

Nessa subseção iremos resolver as equações (4.15) e (4.20). Relembrando-as

$$\frac{d}{dt} G_1(t) = \frac{DE}{\sigma_1} G_2(t) + \sigma_2 G_1(t) \quad (4.118)$$

$$\frac{d}{dt} G_2(t) = \sigma_1 G_1(t) + HG_2(t). \quad (4.119)$$

Para resolver o sistema de equações diferenciais acima, utilizaremos o método de *eliminação sistemática* (ZILL, CULLEN, 2001, p. 2).

Seja  $\tilde{D}[\cdot]$  o *operador diferencial* tal que  $\tilde{D}[\cdot] := \frac{d}{dt}[\cdot]$  (ZILL, CULLEN, 2001, p.195) . Reescrevendo o sistema em termos do operador diferencial temos

$$\tilde{D}G_1(t) = \frac{DE}{\sigma_1} G_2(t) + \sigma_2 G_1(t) \implies [\tilde{D} - \sigma_2]G_1(t) - \frac{DE}{\sigma_1} G_2(t) = 0 \quad (4.120)$$

$$\tilde{D}G_2(t) = \sigma_1 G_1(t) + HG_2(t) \implies [\tilde{D} - H]G_2(t) - \sigma_1 G_1(t) = 0. \quad (4.121)$$

Aplicando na primeira equação o operador  $[\tilde{D} - H]$  e multiplicando a segunda equação por  $\frac{DE}{\sigma_1}$  temos

$$[\tilde{D} - H][\tilde{D} - \sigma_2]G_1(t) - [\tilde{D} - H]\frac{DE}{\sigma_1} G_2(t) = 0 \quad (4.122)$$

$$[\tilde{D} - H]\frac{DE}{\sigma_1} G_2(t) - (DE)G_1(t) = 0. \quad (4.123)$$

Somando as duas equações acima e reorganizando os termos, teremos uma equação diferencial que elimina  $G_2(t)$ , isto é

$$[\tilde{D}^2 - (H + \sigma_2)\tilde{D} + (\sigma_2 H - DE)]G_1(t) = 0. \quad (4.124)$$

Note que a equação característica associada a EDO acima será  $\Lambda^2 - (H + \sigma_2)\Lambda + (\sigma_2 H - DE) = 0$ , cujas raízes são dadas por

$$\Lambda_1 = \frac{(H + \sigma_2) + \sqrt{(H + \sigma_2)^2 - 4(\sigma_2 H - DE)}}{2} \quad (4.125)$$

$$\Lambda_2 = \frac{(H + \sigma_2) - \sqrt{(H + \sigma_2)^2 - 4(\sigma_2 H - DE)}}{2}. \quad (4.126)$$

Observe que as raízes são reais e distintas, afinal o discriminante da equação característica é positivo, visto que

$$\begin{aligned} (H + \sigma_2)^2 - 4(\sigma_2 H - DE) &= H^2 - 2\sigma_2 H + \sigma_2^2 + 4DE \\ &= (H - \sigma_2)^2 + 4DE > 0, \end{aligned} \quad (4.127)$$

pois  $D = v\lambda > 0$  e  $E = \beta\nu\Sigma_f > 0$  (seção 4), dado que os parâmetros nucleares são positivos.

Como as raízes da equação característica são reais e distintas, temos que a solução geral da EDO será dada por (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173-174)

$$G_1(t) = c_{10} \exp(\Lambda_1 t) + c_{11} \exp(\Lambda_2 t), \quad (4.128)$$

onde  $c_{10}, c_{11} \in \mathbb{R}$ .

Nesse instante determinaremos uma solução para  $G_2(t)$ . Para tal, multiplicaremos a equação (4.120) por  $\sigma_1$  e aplicaremos o operador  $[\tilde{D} - \sigma_2]$  na equação (4.121), de modo que

$$[\tilde{D} - \sigma_2]\sigma_1 G_1(t) - (DE)G_2(t) = 0 \quad (4.129)$$

$$[\tilde{D} - \sigma_2][\tilde{D} - H]G_2(t) - [\tilde{D} - \sigma_2]\sigma_1 G_1(t) = 0. \quad (4.130)$$

Somando as duas equações acima e reorganizando os termos, teremos uma equação diferencial que elimina  $G_1(t)$  dada por

$$[\tilde{D} - (H + \sigma_2)\tilde{D} + (\sigma_2 H - DE)]G_2(t) = 0. \quad (4.131)$$

Note que a equação característica associada a EDO acima será  $\Lambda^2 - (H + \sigma_2)\Lambda + (\sigma_2 H - DE) = 0$ , cujas raízes serão  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ , descritas em (4.125) e (4.126), que conforme observado anteriormente, serão raízes reais e distintas. Portanto, que a solução geral da EDO será dada por (ZILL, CULLEN, 2001, p. 173-174)

$$G_2(t) = c_{12} \exp(\Lambda_1 t) + c_{13} \exp(\Lambda_2 t), \quad (4.132)$$

onde  $c_{12}, c_{13} \in \mathbb{R}$ .

Substituindo (4.128) e (4.132) na equação (4.121) temos

$$\Lambda_1 c_{12} \exp(\Lambda_1 t) + \Lambda_2 c_{13} \exp(\Lambda_2 t) =$$

$$\sigma_1 [c_{10} \exp(\Lambda_1 t) + c_{11} \exp(\Lambda_2 t)] + H [c_{12} \exp(\Lambda_1 t) + c_{13} \exp(\Lambda_2 t)] \quad (4.133)$$

$$\implies \exp(\Lambda_1 t) [(\Lambda_1 - H)c_{12} - \sigma_1 c_{10}] + \exp(\Lambda_2 t) [(\Lambda_2 - H)c_{13} - \sigma_1 c_{11}] = 0, \quad (4.134)$$

donde implica que  $c_{12} = \frac{\sigma_1 c_{10}}{\Lambda_1 - H}$  e  $c_{13} = \frac{\sigma_1 c_{11}}{\Lambda_2 - H}$ , pois  $\{\exp(\Lambda_1 t), \exp(\Lambda_2 t)\}$  é um conjunto linearmente independente.

Portanto, obtemos as funções temporais

$$G_1(t) = c_{10} \exp(\Lambda_1 t) + c_{11} \exp(\Lambda_2 t) \quad (4.135)$$

$$G_2(t) = \frac{\sigma_1 c_{10}}{\Lambda_1 - H} \exp(\Lambda_1 t) + \frac{\sigma_1 c_{11}}{\Lambda_2 - H} \exp(\Lambda_2 t), \quad (4.136)$$

onde  $c_{10}, c_{11} \in \mathbb{R}$  e  $\Lambda_1, \Lambda_2$  estão descritos em (4.125) e (4.126).

Observe que a função  $G_2(t)$  explicita a constante de separabilidade  $\sigma_1$ , mas não precisaremos estudar os valores que a mesma pode assumir, pois as soluções obtidas para  $F_2(\vec{r})$  nas subseções 4.2 e 4.3 apresentam um coeficiente fracionário com denominador multiplicado por  $\sigma_1$ . Logo, como por definição  $C(\vec{r}, t) = F_2(\vec{r})G_2(t)$ , temos que  $\sigma_1$  se anula.

### 4.3 Solução explícita

A partir do que foi observado até o momento, é possível explicitar a solução analítica do problema tridimensional para o caso cilíndrico. Abaixo serão descritas as duas classes de soluções determinadas/encontradas.

- *Caso em que  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_{3,n} = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2$  e  $\left[\left(\frac{B - \sigma_{2,n,k}}{A}\right) - \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2\right] = \xi_{2,n,k}^2 > 0$ , onde  $\xi_{2,n} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :*

A partir das relações (4.81), (4.82), (4.135) e (4.136), lembrando que  $\phi(\vec{r}, t) = F_1(\vec{r})G_1(t)$  e  $C(\vec{r}, t) = F_2(\vec{r})G_2(t)$  (seção 4), temos

$$\phi^{(n,k)}(\vec{r}, t) = [d_{1,n,k} \exp(\Lambda_1 t) + d_{2,n,k} \exp(\Lambda_2 t)] J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right) \pi z\right) \quad (4.137)$$

$$C^{(n,k)}(\vec{r}, t) = E \left[ \frac{d_{1,n,k}}{\Lambda_1 - H} \exp(\Lambda_1 t) + \frac{d_{2,n,k}}{\Lambda_2 - H} \exp(\Lambda_2 t) \right] J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right) \pi z\right), \quad (4.138)$$

onde  $d_{1,n,k} = c_{10} b_{n,k}$  e  $d_{2,n,k} = c_{11} b_{n,k}$  são constantes reais.

- Caso em que  $\sigma_{4,l} = \xi_{4,l}^2 > 0$ ,  $\sigma_{3,n,l} = \left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}\right)^2 e \left[ \left(\frac{B - \sigma_{2,n,k,l}}{A}\right) - \left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}\right)^2 \right] = \xi_{2,n,k,l}^2 > 0$ , onde  $\xi_{4,l}; \xi_{2,n,k,l} \in \mathbb{R} - \{0\}$  :

A partir das relações (4.116), (4.117), (4.135) e (4.136), lembrando que  $\phi(\vec{r}, t) = F_1(\vec{r})G_1(t)$  e  $C(\vec{r}, t) = F_2(\vec{r})G_2(t)$ , temos:

$$\begin{aligned} \phi^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) = & [d_{1,n,k,l} \exp(\Lambda_1 t) + d_{2,n,k,l} \exp(\Lambda_2 t)] J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) \\ & [c_{1,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,l} \text{cos}(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)}{2Z} \pi z \right) \end{aligned} \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} C^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) = & E \left( \frac{d_{1,n,k,l}}{\Lambda_1 - H} \exp(\Lambda_1 t) + \frac{d_{2,n,k,l}}{\Lambda_2 - H} \exp(\Lambda_2 t) \right) \\ & J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) [c_{1,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,l} \text{cos}(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)}{2Z} \pi z \right), \end{aligned} \quad (4.140)$$

onde  $d_{1,n,k,l} = c_{10} b_{n,k,l}$  e  $d_{2,n,k,l} = c_{11} b_{n,k,l}$  são constantes reais.

Nesse momento, vamos aplicar a condição inicial  $\phi(\vec{r}, 0) = \phi_0(\vec{r})$  em (4.137) e (4.139), respectivamente

$$\phi^{(n,k)}(\vec{r}, 0) = \phi_0^{(n,k)}(\vec{r}) = (d_{1,n,k} + d_{2,n,k}) J_0 \left( \frac{\alpha_n}{R} r \right) \cos \left( \left( \frac{2k-1}{2Z} \right) \pi z \right) \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(n,k,l)}(\vec{r}, 0) = & \phi_0^{(n,k,l)}(\vec{r}) = (d_{1,n,k,l} + d_{2,n,k,l}) J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) \\ & [c_{1,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,l} \text{cos}(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)}{2Z} \pi z \right). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Ainda, temos pela condição inicial descrita em (4.4) que

$$C^{(n,k)}(\vec{r}, 0) = P \phi_0^{(n,k)}(\vec{r}) \quad (4.143)$$

$$C^{(n,k,l)}(\vec{r}, 0) = P \phi_0^{(n,k,l)}(\vec{r}). \quad (4.144)$$

Agora faremos a análise das condições iniciais para (4.143). Aplicando  $t = 0$  em  $C^{(n,k)}(\vec{r}, t)$  (equação (4.138)) e igualando com (4.143), temos

$$E \frac{d_{1,n,k}}{\Lambda_{1,n,k} - H} + E \frac{d_{2,n,k}}{\Lambda_{2,n,k} - H} = P d_{1,n,k} + P d_{2,n,k} \quad (4.145)$$

$$\implies d_{2,n,k} \left[ \frac{E}{\Lambda_{2,n,k} - H} - P \right] = d_{1,n,k} \left[ P - \frac{E}{\Lambda_{1,n,k} - H} \right] \quad (4.146)$$

$$\implies d_{2,n,k} = \zeta_{n,k} d_{1,n,k}, \quad (4.147)$$

onde  $\zeta_{n,k} = \frac{P(\Lambda_{2,n,k} - H)(\Lambda_{1,n,k} - H) - E(\Lambda_{2,n,k} - H)}{E(\Lambda_{1,n,k} - H) - P(\Lambda_{2,n,k} - H)(\Lambda_{1,n,k} - H)}$ .

Seguindo passos análogos aos descritos acima, ao analisar (4.144), temos

$$d_{2,n,k,l} = \zeta_{n,k,l} d_{1,n,k,l},$$

onde  $\zeta_{n,k,l} = \frac{P(\Lambda_{2,n,k,l} - H)(\Lambda_{1,n,k,l} - H) - E(\Lambda_{2,n,k,l} - H)}{E(\Lambda_{1,n,k,l} - H) - P(\Lambda_{2,n,k,l} - H)(\Lambda_{1,n,k,l} - H)}$ .

Utilizando o princípio de superposição de soluções (ZILL, CULLEN, 2001, p. 153), temos que uma forma analítica para a solução do nosso problema será dada por

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,n,k} [\exp(\Lambda_{1,n,k} t) + \zeta_{n,k} \exp(\Lambda_{2,n,k} t)] J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right) \pi z\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\exp(\Lambda_{1,n,k,l} t) + \zeta_{n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)] J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R} r\right) \\ & [c_{1,n,k,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,n,k,l} \text{cos}(l\theta)] \cos\left(\frac{(2k-1)}{2Z} \pi z\right) \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$\begin{aligned} C(\vec{r}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E d_{1,n,k} \left[ \frac{\exp(\Lambda_{1,n,k} t)}{\Lambda_{1,n,k} - H} + \frac{\zeta_{n,k} \exp(\Lambda_{2,n,k} t)}{\Lambda_{2,n,k} - H} \right] J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right) \pi z\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E \left( \frac{\exp(\Lambda_{1,n,k,l} t)}{\Lambda_{1,n,k,l} - H} + \frac{\zeta_{n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)}{\Lambda_{2,n,k,l} - H} \right) J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R} r\right) \cdot \\ & [c_{1,n,k,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,n,k,l} \text{cos}(l\theta)] \cos\left(\frac{(2k-1)}{2Z} \pi z\right), \end{aligned} \quad (4.149)$$

onde  $c_{1,n,k,l} = d_{1,n,k,l}c_{1,l}$  e  $c_{2,n,k,l} = d_{2,n,k,l}c_{2,l}$ .

Nesse momento iremos determinar expressões para as constantes  $d_{1,n,k}$ ,  $c_{1,n,k,l}$  e  $c_{2,n,k,l}$  da nossa solução.

Inicialmente, para determinar as constantes  $d_{1,n,k}$  definiremos o operador integral

$$\mathfrak{J}[\cdot] = \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\cdot] r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \cos\left(\frac{(2s-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta, \quad (4.150)$$

onde  $\mathfrak{N} = \frac{ZR^2\pi}{2}(1 + \zeta_{m,s})J_1^2(\alpha_m)$ ,  $\forall m, s \in \mathbb{N}$  fixos.

Aplicando sobre  $\phi_0(\vec{r}, t)$  o operador integral  $\mathfrak{J}[\cdot]$  temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] = & \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,n,k} (1 + \zeta_{n,k}) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right)\pi z\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (1 + \zeta_{n,k,l}) J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) [c_{1,n,k,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,n,k,l} \text{cos}(l\theta)] \\ & \cos\left(\frac{(2k-1)}{2Z}\pi z\right) r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \cos\left(\frac{(2s-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Note que  $\int_0^{2\pi} c_{1,n,k,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,n,k,l} \text{cos}(l\theta) d\theta = 0$ , para todo  $l = 1, 2, \dots$

. Isso implica que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] = & \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,n,k} (1 + \zeta_{n,k}) \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^Z \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right)\pi z\right) \right. \\ & \left. \cos\left(\left(\frac{2s-1}{2Z}\right)\pi z\right) dz d\theta \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) dr \right]. \end{aligned} \quad (4.152)$$

Pela propriedade de ortogonalidade das funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero, com respeito a função peso identidade (BOWMAN, 1958, p. 8-10), temos

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) dr = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{R^2}{2}(J_0^2(\alpha_m) + J_1^2(\alpha_m)), & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4.153)$$

Ainda, temos pela relação (4.62) que  $J_0(\alpha_m) = 0$ , de modo que

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) dr = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_m), & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4.154)$$

Desse modo, segue

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] &= \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_m) \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,m,k} (1 + \zeta_{m,k}) \\ &\quad \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^Z \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right)\pi z\right) \cos\left(\left(\frac{2s-1}{2Z}\right)\pi z\right) dz d\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Pela propriedade de ortogonalidade das funções cosseno, temos

$$\int_0^Z \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2Z}\right)\pi z\right) \cos\left(\left(\frac{2s-1}{2Z}\right)\pi z\right) dz = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq s \\ \frac{Z}{2}, & \text{se } k = s \end{cases} \quad (4.156)$$

Portanto, segue

$$\mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] = \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \frac{ZR^2}{4} J_1^2(\alpha_m) d_{1,m,s} (1 + \zeta_{m,s}) \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \quad (4.157)$$

$$\implies \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] = \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \frac{ZR^2\pi}{2} J_1^2(\alpha_m) d_{1,m,s} (1 + \zeta_{m,s}) = \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} d_{1,m,s} \frac{ZR^2\pi}{2} (1 + \zeta_{m,s}) J_1^2(\alpha_m) \quad (4.158)$$

$$\implies \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r}, t)] = \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} d_{1,m,s} \mathfrak{N}_{m,s} = d_{1,m,s}. \quad (4.159)$$

Logo, temos

$$d_{1,n,k} = \mathfrak{N}_{n,k}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\phi_0(\vec{r})] r J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) \cos\left(\frac{(2k-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta. \quad (4.160)$$

Para determinar  $c_{1,n,k,l}$ , iremos definir o operador integral

$$\mathfrak{J}_{sen}[\cdot] = \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\cdot] r J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R}r\right) \text{sen}(u\theta) \cos\left(\frac{(2s-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta, \quad (4.161)$$

para qualquer  $m, s, u \in \mathbb{N}$  fixos.

Aplicando sobre  $\phi_0(\vec{r})$  o operador  $\mathfrak{J}_{sen}[\cdot]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{sen}[\phi_0(\vec{r})] &= \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,n,k} (1 + \zeta_{n,k}) J_0 \left( \frac{\alpha_n}{R} r \right) \cos \left( \left( \frac{2k-1}{2Z} \right) \pi z \right) \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (1 + \zeta_{n,k,l}) J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) [c_{1,n,k,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,n,k,l} \text{cos}(l\theta)] \\ &\quad \left. \cos \left( \left( \frac{2k-1}{2Z} \right) \pi z \right) \cdot r J_u \left( \frac{\alpha_{m,u}}{R} r \right) \text{sen}(u\theta) \cos \left( \left( \frac{2s-1}{2Z} \right) \pi z \right) \right\} dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (4.162)$$

Como  $\int_0^{2\pi} \text{sen}(u\theta) d\theta = 0, \forall \theta \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{sen}[\phi_0(\vec{r})] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (1 + \zeta_{n,k,l}) \int_0^Z \int_0^R r J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) J_u \left( \frac{\alpha_{m,u}}{R} r \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cos \left( \left( \frac{2k-1}{2Z} \right) \pi z \right) \cos \left( \left( \frac{2s-1}{2Z} \right) \pi z \right) dr dz \right. \\ &\quad \left. \int_0^{2\pi} \text{sen}(u\theta) [c_{1,n,k,l} \text{sen}(l\theta) + c_{2,n,k,l} \text{cos}(l\theta)] d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Ainda, como

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(u\theta) \text{cos}(l\theta) d\theta = 0, \forall u, l \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad (4.164)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(u\theta) \text{sen}(l\theta) d\theta = \pi \delta_{u,l}, \forall u, l \in \mathbb{N}, \quad (4.165)$$

onde  $\delta_{u,l}$  é o Delta de Kronecker, definido tal que

$$\delta_{u,l} = \begin{cases} 0, & \text{se } u \neq l \\ 1, & \text{se } u = l \end{cases} \quad (4.166)$$

Portanto, conclui-se que  $u = l$ , de modo que

$$\mathfrak{J}_{sen}[\phi_0(\vec{r})] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi (1 + \zeta_{n,s,u}) c_{1,n,k,u} \left[ \int_0^R r J_u \left( \frac{\alpha_{n,u}}{R} r \right) J_u \left( \frac{\alpha_{m,u}}{R} r \right) dr \right] \quad (4.167)$$

$$\left[ \int_0^Z \cos \left( \left( \frac{2k-1}{2Z} \right) \pi z \right) \cos \left( \left( \frac{2s-1}{2Z} \right) \pi z \right) dz \right]. \quad (4.168)$$

Pela ortogonalidade das funções de Bessel de primeira espécie e ordem  $u$ ; e pela ortogonalidade das funções cosseno, segue

$$\mathfrak{J}_{sen}[\phi_0(\vec{r})] = \frac{\pi Z}{2}(1 + \zeta_{m,s,u})\frac{R^2}{2}[J_u^2(\alpha_{m,u}) + J_{u+1}^2(\alpha_{m,u})]c_{1,m,s,u}. \quad (4.169)$$

Definiremos  $\mathfrak{B}_{m,s,u} = \frac{\pi Z}{4}(1 + \zeta_{m,s,u})R^2 [J_u^2(\alpha_{m,u}) + J_{u+1}^2(\alpha_{m,u})]$ . Como  $J_l(\alpha_{n,l}) = 0$ , segue que  $J_l^2(\alpha_{n,l}) = 0$ . Assim, temos que  $\mathfrak{B}_{n,k,l} = \frac{\pi Z}{4}(1 + \zeta_{n,k,l})R^2 J_{l+1}^2(\alpha_{n,l})$ . Portanto, temos

$$c_{1,n,k,l} = \mathfrak{B}_{n,k,l}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\phi_0(\vec{r})] r J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) \text{sen}(l\theta) \cos\left(\frac{(2k-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta. \quad (4.170)$$

Seguindo passos análogos aos descritos para determinar  $c_{1,n,k,l}$ , definiremos os valores de  $c_{2,n,k,l}$  aplicando sobre a expressão  $\phi_0(\vec{r})$  o operador integral

$$\mathfrak{J}_{cos}[\cdot] = \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\cdot] r J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R}r\right) \cos(u\theta) \cos\left(\frac{(2s-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta, \quad (4.171)$$

de modo que obtêm-se uma expressão para os valores  $c_{2,n,k,l}$ , que será dada por

$$c_{2,n,k,l} = \mathfrak{B}_{n,k,l}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\phi_0(\vec{r})] r J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) \cos(l\theta) \cos\left(\frac{(2k-1)}{2Z}\pi z\right) dr dz d\theta. \quad (4.172)$$

Com isso, finalizamos a solução analítica para o problema tridimensional em geometria cilíndrica descrito em (3.1), cujas condições iniciais são dadas por (3.2) e as condições de contorno são descritas na subseção 3.1.1. Obtivemos o par solução  $(\phi(\vec{r}, t); C(\vec{r}, t))$ , onde  $\phi(\vec{r}, t)$  é dado por (4.148); e  $C(\vec{r}, t)$  é dado por (4.149). Por fim, as constantes arbitrárias  $d_{1,n,k}$ ,  $c_{1,n,k,l}$  e  $c_{2,n,k,l}$  são dadas por (4.160), (4.170) e (4.172), respectivamente.

Destaca-se que as expressões analíticas para a função fluxo escalar de nêutrons e função concentração de precursores coincidem com as determinadas por Oliveira (2017, p. 28-30).

## 5 ANÁLISE DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Nesse capítulo iremos particularizar a solução geral determinada no capítulo 4. Na subseção 5.1, iremos particularizar a solução utilizando o conjunto de parâmetros que foi utilizado por Oliveira (2017, p. 33). Isso nos permitirá, em alguma medida, verificar se as análises que serão realizadas nesse trabalho vão ao encontro das análises que foram realizadas por Oliveira (2017). Na subseção 5.2, será utilizado um segundo conjunto de parâmetros (GOMES, 2014, p. 35) e serão realizadas análises. Conforme será destacado nas subseções posteriores, as duas situações particulares irão simular a inserção de barras de controle no núcleo do reator nuclear, por isso, ao analisar as duas situações propostas, espera-se que o comportamento gráfico obtido em ambas seja similar.

As análises das situações particulares foram realizadas utilizando a linguagem de programação python, sendo que os códigos foram escritos e executados na versão gratuita do Google Colab. Iremos especificar como foi construído o código para a função fluxo ( $\phi(\vec{r}, t)$ ) no parágrafo subsequente.

A ideia geral do código consiste em definir uma função fluxo, que foi construída utilizando a noção de listas. Inicialmente, definimos uma lista vazia e na sequência foi utilizada a função *for* para representar cada somatório. Deste modo, foram utilizados três *for* consecutivos: um para o somatório em  $n$ , um para o somatório em  $k$  e outro para o somatório em  $l$ . Em seguida, foi definido o formato dos termos e, após isso, foram adicionados a essa lista os elementos que correspondem aos termos dos somatórios. Para adicioná-los, foi utilizada a função *append*. Para calcular os cossenos, senos e exponenciais, foi utilizada a biblioteca *numpy*. Para calcular as integrais, foi utilizada a função *scipy.integrate.quad*, da biblioteca *scipy*. Por fim, para gerar os gráficos, foi utilizada a biblioteca *matplotlib*.

## 5.1 Primeira situação particular

Nessa subseção iremos particularizar a solução analítica para o fluxo escalar adotando as mesmas dimensões para o cilindro e o mesmo conjunto de parâmetros nucleares utilizado por Oliveira (2017, p. 33 e 58), sendo que os mesmos simulam/imitam a inserção de uma barra de controle. O cilindro possui dimensões  $0 < r \leq R = 10 \text{ cm}$ ,  $0 < z \leq Z = 10 \text{ cm}$  e os parâmetros físicos utilizados estão dispostos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros nucleares utilizados na 1ª situação particular

| $D_{dif} [cm]$ | $v [cm/s]$          | $\Sigma_a [cm^{-1}]$   | $\nu\Sigma_f [cm^{-1}]$ | $\lambda [s^{-1}]$ | $\beta$ |
|----------------|---------------------|------------------------|-------------------------|--------------------|---------|
| 0,96343        | $1,1035 \cdot 10^7$ | $1,5843 \cdot 10^{-2}$ | $3,3303 \cdot 10^{-2}$  | 0,08               | 0,0065  |

Fonte: Elaborado a partir de Oliveira (2017, p. 33).

Utilizaremos a função  $\phi_0(\vec{r}) = \left(-\frac{r^2}{R^2} + 1\right) \left(-\frac{z^2}{Z^2} + 1\right)$  como condição inicial. Note que a mesma satisfaz as condições de contorno especificadas na metodologia do trabalho.

A seguir serão realizadas análises do comportamento da solução para o fluxo escalar de nêutrons a partir do esboço de alguns gráficos que foram plotados truncando os somatórios em  $n = 10$ ,  $k = 10$  e  $l = 10$ , ou seja, utilizamos 1000 termos da série da função que descreve o fluxo escalar de nêutrons. Mas antes disso, iremos explicar nos parágrafos consecutivos as motivações de realizar tal truncamento.

Na Tabela 5.2, é possível ver, na primeira coluna, o fluxo de nêutrons em  $\phi_1 = \phi\left(\frac{R}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{Z}{2}, 1\right)$ . Na segunda coluna, estão dispostos os valores da norma da função fluxo de nêutrons em função de  $r$ , isto é, os valores máximos dos fluxos fixados  $z$ ,  $\theta$  e  $t$  e variando a quantidade de termos dos somatórios, sendo que o valor máximo vai ocorrer quando  $r$  tender a zero. Na terceira coluna, dividimos os valores dos fluxos  $\phi_1$  pela norma em relação a  $r$  e notamos, por inspeção, que a partir de  $n = k = l = 4$  já temos uma aproximação de dois dígitos significativos, desconsiderando

Tabela 5.2: Valores estimados para o fluxo escalar variando  $n$ ,  $k$  e  $l$

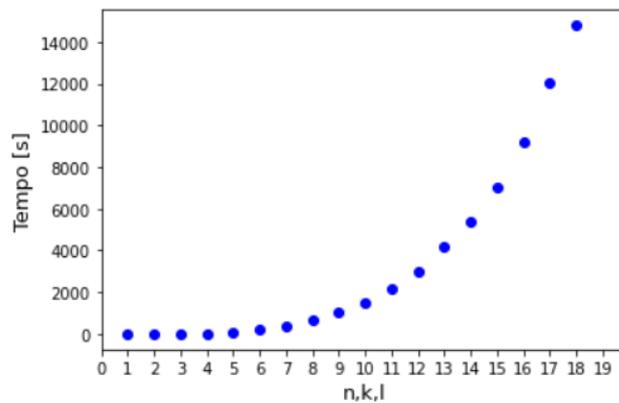
| $\phi_1$     | $\phi_{max}$ | $\frac{\phi_1}{\ \phi_{max}\ }$ | $n$ | $k$ | $l$ | Tempo de $\phi_1$ |
|--------------|--------------|---------------------------------|-----|-----|-----|-------------------|
| 0,0017303586 | 0,0025828957 | 0,6699297389                    | 1   | 1   | 1   | 0,53460 s         |
| 0,0035851070 | 0,0050743686 | 0,7065129186                    | 2   | 2   | 2   | 4,33017 s         |
| 0,0053645013 | 0,0076339854 | 0,7027130696                    | 3   | 3   | 3   | 17,71761 s        |
| 0,0071127981 | 0,0101678813 | 0,6995359127                    | 4   | 4   | 4   | 46,73092 s        |
| 0,0088484316 | 0,0127144066 | 0,6959374421                    | 5   | 5   | 5   | 105,21697 s       |
| 0,0105824030 | 0,0152554555 | 0,6936799109                    | 6   | 6   | 6   | 220,26661 s       |
| 0,0123229191 | 0,0177990857 | 0,6923343903                    | 7   | 7   | 7   | 363,53531 s       |
| 0,0140750845 | 0,0203410294 | 0,6919553709                    | 8   | 8   | 8   | 639,42816 s       |
| 0,0158360150 | 0,0228841653 | 0,6920075451                    | 9   | 9   | 9   | 1008,16926 s      |
| 0,0175976027 | 0,0254265549 | 0,6920954414                    | 10  | 10  | 10  | 1517,50372 s      |
| 0,0193547595 | 0,0279694204 | 0,6919971612                    | 11  | 11  | 11  | 2158,26802 s      |
| 0,0211075301 | 0,0305119205 | 0,6917797946                    | 12  | 12  | 12  | 3017,63957 s      |
| 0,0228574482 | 0,0330547112 | 0,6915034913                    | 13  | 13  | 13  | 4187,46729 s      |
| 0,0246060436 | 0,0355972926 | 0,6912335683                    | 14  | 14  | 14  | 5395,45651 s      |
| 0,0263558348 | 0,0381400264 | 0,6910282265                    | 15  | 15  | 15  | 7062,09877 s      |
| 0,0281087934 | 0,0406826337 | 0,6909285571                    | 16  | 16  | 16  | 9231,90380 s      |
| 0,0298641799 | 0,0432253505 | 0,6908950316                    | 17  | 17  | 17  | 12024,76193 s     |
| 0,031619758  | 0,0457679811 | 0,6908707187                    | 18  | 18  | 18  | 14793,84309 s     |

Fonte: Elaboração própria.

possíveis arredondamentos numéricos realizados pelo python. Devido a isso, temos que a solução segue um comportamento gráfico similar até mesmo tomando poucas parcelas dos somatórios, por isso nas nossas análises os somatórios serão truncados em  $n = k = l = 10$ . É válido destacar que a partir de  $n = k = l = 17$  temos que os dígitos significativos são 4 e não apenas 2, evidenciando que de fato ocorre estabilidade.

Na Figura 5.1 é possível ver um crescimento exponencial do tempo para calcular  $\phi_1$ , a medida que são tomados mais termos dos somatórios. Isso também justifica, além de observarmos uma certa convergência no comportamento da solução a partir da Tabela 5.2, a escolha em realizarmos as análises com  $n, k, l = 10$ . Destaca-se ainda que não concentramos nossos esforços em determinar valores próximos aos exatos para os fluxos de nêutrons, mas sim em analisar o comportamento da solução. Contudo, destaca-se que, tendo em vista que no capítulo 4 obtivemos soluções analíticas para  $\phi(\vec{r}, t)$  e  $C(\vec{r}, t)$ , é possível obter um valor mais próximo do exato a partir da solução que determinamos, mas para isso, seria necessário, por exemplo, dispor de dispositivos mais potentes para executar os códigos que realizamos em python ou desenvolver códigos utilizando uma linguagem de programação que seja de baixo nível.

Figura 5.1: Gráfico de dispersão do tempo computacional para calcular  $\phi_1$  em função da quantidade de termos dos somatórios



Fonte: Elaboração própria.

Portanto, na próxima subseção iremos analisar o comportamento da função fluxo escalar de nêutrons, sendo que a série que o descreve foi truncada em  $n = k = l = 10$ .

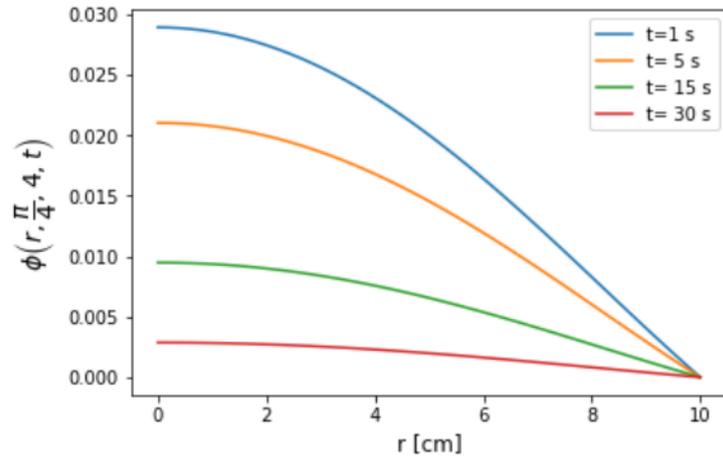
### 5.1.1 Análise do fluxo escalar de nêutrons da primeira situação particular

Nessa subseção iremos analisar a função fluxo escalar de nêutrons, denotada por  $\phi(\vec{r}, t)$ , cuja solução geral foi explicitada subseção 4.3. A ideia dessa subseção consiste em particularizar a solução, utilizando as condições de fronteira, condição inicial e parâmetros nucleares descritos na subseção 5.1, objetivando analisar o comportamento gráfico do fluxo escalar de nêutrons. Como a função fluxo possui 4 variáveis independentes, sendo três espaciais e uma temporal, iremos fixar duas ou três variáveis independentes a fim de que seja possível realizar a análise desejada.

Na Figura 5.2 está esboçado o comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função do raio do cilindro quando  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , para os tempos  $1 \text{ s}$ ,  $5 \text{ s}$ ,  $15 \text{ s}$  e  $30 \text{ s}$ . Analisando a figura é possível ver que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento decrescente em relação a variável temporal. Além disso, em cada tempo, observa-se que o fluxo de nêutrons é maior para valores mais próximos ao centro radial.

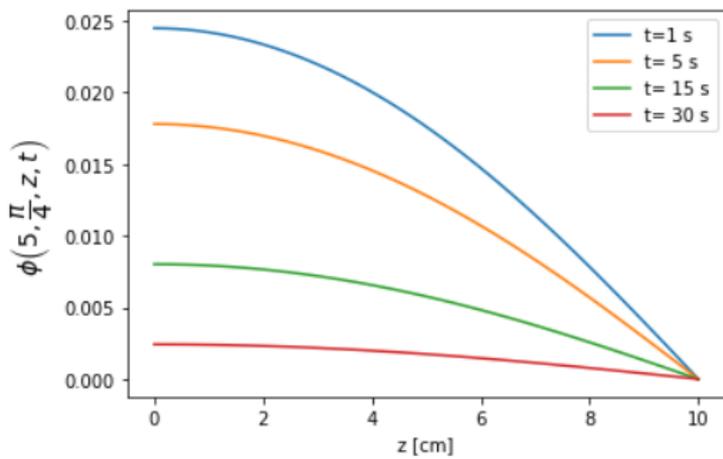
Na Figura 5.3 está esboçado o comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função de  $z$ , quando o raio do cilindro é  $r = 5 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , para os tempos  $1 \text{ s}$ ,  $5 \text{ s}$ ,  $15 \text{ s}$  e  $30 \text{ s}$ . Analisando a figura é possível ver que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento decrescente em relação a variável temporal. Além disso, em cada tempo, observa-se que o fluxo de nêutrons é maior para valores mais próximos de  $z = 0$ .

Figura 5.2: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular quando  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Fonte: Elaboração própria.

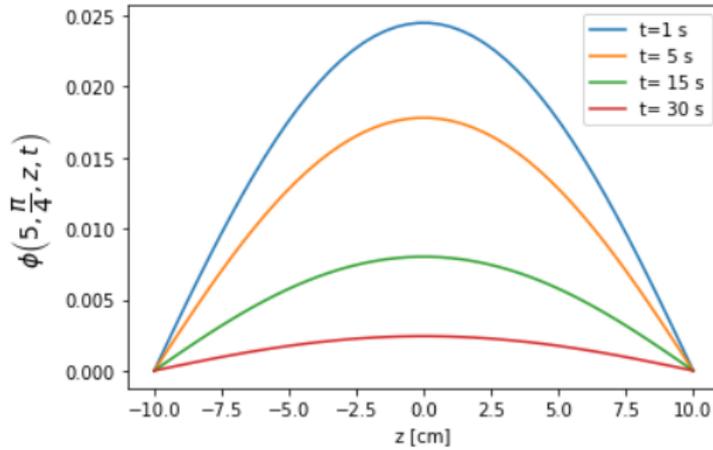
Figura 5.3: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular quando  $r = 5 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Fonte: Elaboração própria.

Na seção da metodologia, demonstramos, na **Afirmção 1**, que o problema admittia simetria azimutal. Isso fica explícito na Figura 5.4, onde expandimos o domínio da variável  $z$  de modo que  $-10 \text{ cm} = -Z \leq z \leq Z = 10 \text{ cm}$ .

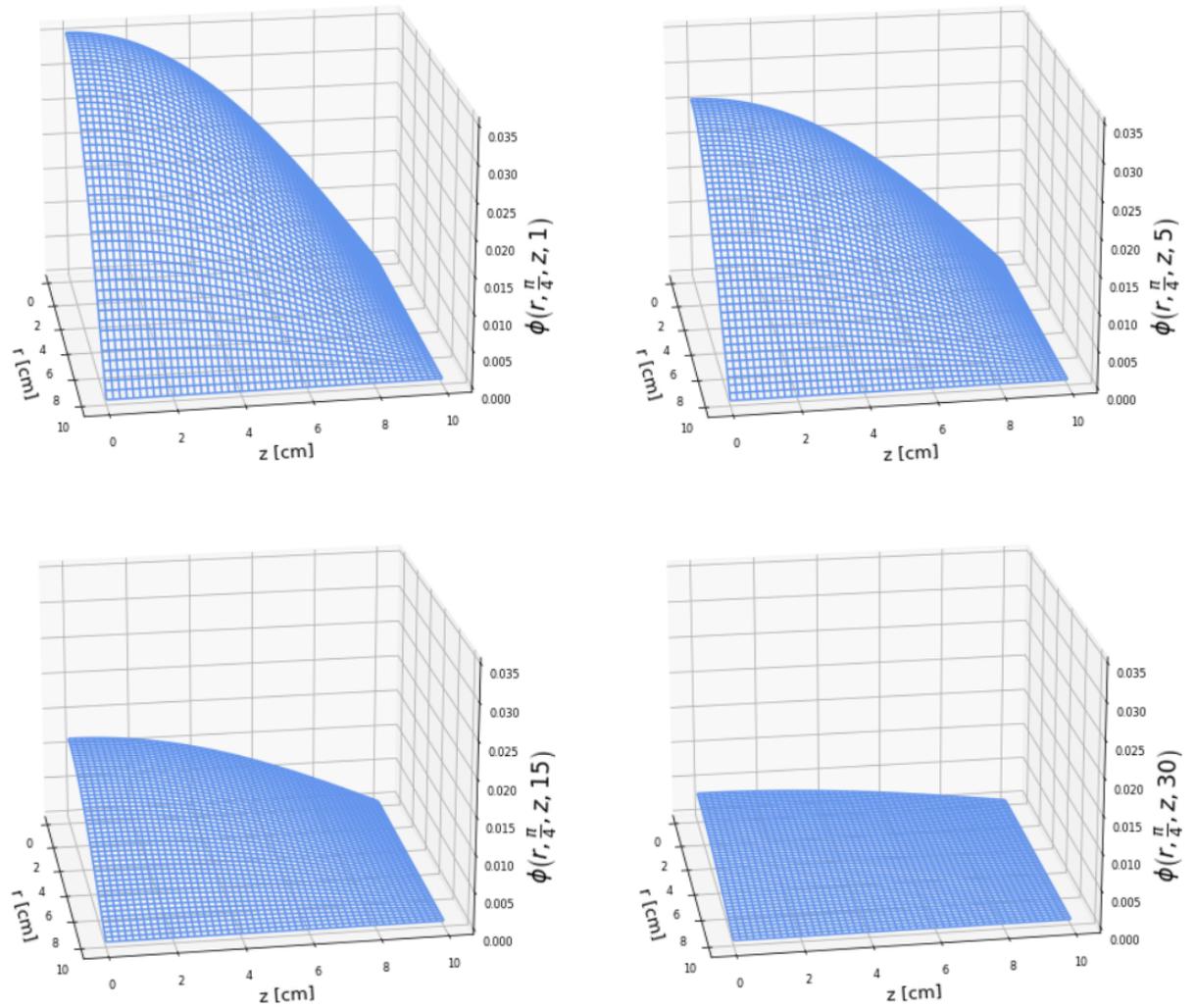
Figura 5.4: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular quando  $r = 5 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  com domínio da variável  $z$  expandido



Fonte: Elaboração própria.

Os comportamentos observados nas Figura 5.2 e Figura 5.3 também podem ser observados nos gráficos da Figura 5.5, a qual estão plotados quatro gráficos do fluxo de nêutrons em função das variáveis  $r$  e  $z$ , fixado  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , para os tempos  $t = 1 \text{ s}$ ,  $t = 5 \text{ s}$ ,  $t = 15 \text{ s}$  e  $t = 30 \text{ s}$ , onde é possível identificar que o fluxo decresce a medida que as variáveis  $r$  e  $z$  aumentam. Além disso, também é possível visualizar que o fluxo escalar de nêutrons diminui a medida que o tempo aumenta.

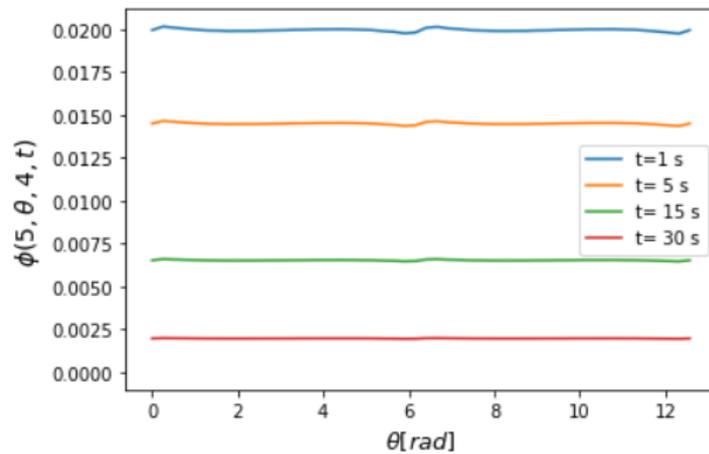
Figura 5.5: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular em função de  $r$  e  $z$  quando  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para os tempos  $t = 1 s$ ,  $t = 5 s$ ,  $t = 15 s$  e  $t = 30 s$



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 5.6 está esboçado o comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função de  $\theta$ , no intervalo  $0 \leq \theta \leq 4\pi$ , quando o raio do cilindro é  $r = 5$  *cm* e  $z = 4$  *cm*, para os tempos 1 *s*, 5 *s*, 15 *s* e 30 *s*. Analisando a figura é possível ver que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento decrescente em relação a variável temporal e que, em cada tempo, observa-se que o fluxo de nêutrons possui período  $2\pi$ . Também é possível notar que conforme  $t$  aumenta, o comportamento do fluxo tende a ficar uniforme.

Figura 5.6: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular quando  $r = 5$  *cm* e  $z = 4$  *cm*



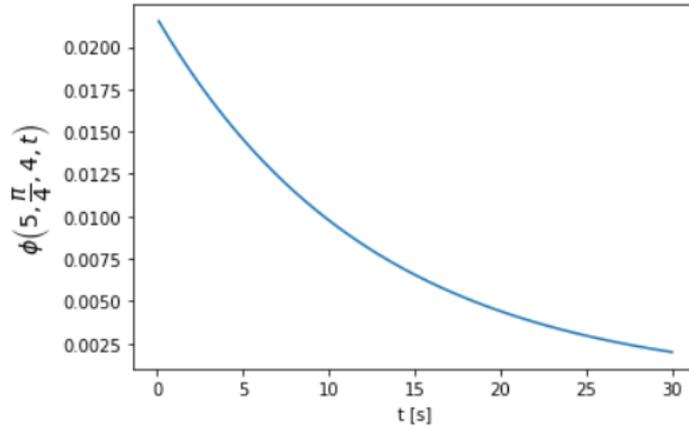
Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 5.7 está esboçado o comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função de  $t$ , quando o raio do cilindro é  $r = 5$  *cm*,  $z = 4$  *cm* e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Analisando a figura é possível ver que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento exponencial decrescente. Esse comportamento é justificado pois o sistema é subcrítico, que é quando a criticalidade, também chamada de fator de multiplicação efetivo, denotado por  $K_{eff}$ , é menor do que 1. Isso pode ser verificado, pois o  $K_{eff}$  pode ser obtido através da expressão (OLIVEIRA, 2017, p. 35):

$$K_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a \left( 1 + \frac{D_{dif}}{\Sigma_a} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{2Z} \right)^2 \right]^2 \right)}$$

$$\implies K_{eff} \approx 0,349.$$

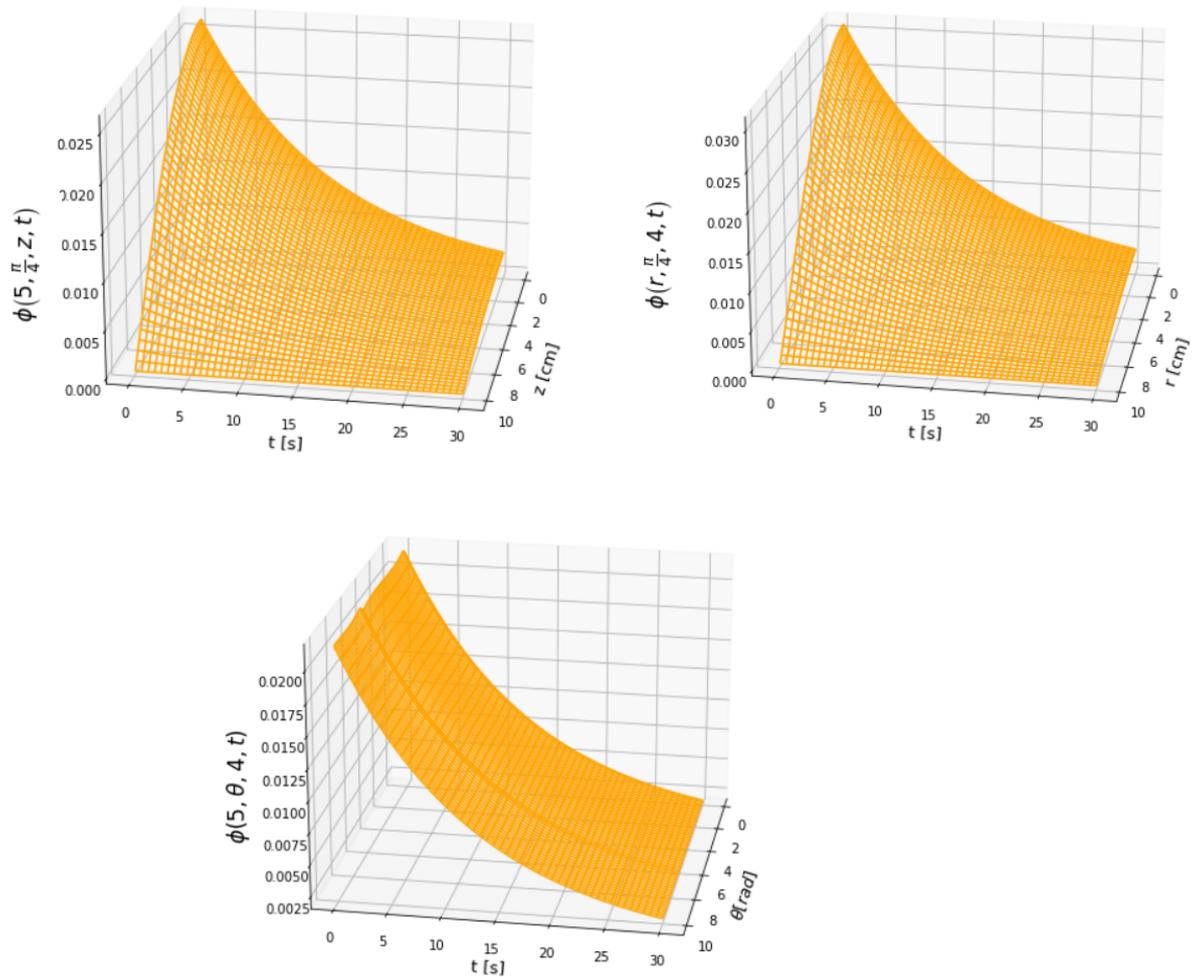
Figura 5.7: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular quando  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Fonte: Elaboração própria.

Os comportamentos observados nas Figura 5.2, Figura 5.3 e Figura 5.7 também podem ser observados nos gráficos da Figura 5.8, a qual estão plotados três gráficos do fluxo de nêutrons: o primeiro em função das variáveis  $t$  e  $z$ , onde foi fixado  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $r = 5 \text{ cm}$ ; o segundo em função das variáveis  $t$  e  $r$ , onde foi fixado  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $z = 4 \text{ cm}$ ; e o terceiro em função das variáveis  $t$  e  $\theta$ , onde foi fixado  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$ . Nesses gráficos é possível observar que o fluxo decresce a medida que as variáveis  $r$  e  $z$  aumentam. Além disso, também é possível visualizar que o fluxo escalar de nêutrons decresce exponencialmente a medida que o tempo aumenta.

Figura 5.8: Fluxo escalar de nêutrons da 1ª situação particular em função de  $t$  e  $z$ , de  $t$  e  $r$ , e de  $t$  e  $\theta$



Fonte: Elaboração própria.

Destaca-se que os comportamentos analisados para a função fluxo vão ao encontro dos que foram constatados por Oliveira (2017, p. 33-35), o que nos permite intuir que as análises computacionais realizadas estão consistentes.

## 5.2 Segunda situação particular

Nessa subseção iremos particularizar a solução analítica para o fluxo escalar adotando as mesmas dimensões para o cilindro utilizadas por Oliveira (2017,

p. 33 e 58) e o conjunto de parâmetros nucleares disponível em Gomes (2014, p. 35), sendo que os mesmos simulam/imitam a inserção de barras de controle. O cilindro possui dimensões  $0 < r \leq R = 10 \text{ cm}$ ,  $0 < z \leq Z = 10 \text{ cm}$  e os parâmetros físicos utilizados estão dispostos na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Parâmetros nucleares utilizados na 2ª situação particular

| $D_{dif} \text{ [cm]}$ | $v \text{ [cm/s]}$    | $\Sigma_a \text{ [cm}^{-1}\text{]}$ | $\nu\Sigma_f \text{ [cm}^{-1}\text{]}$ | $\lambda \text{ [s}^{-1}\text{]}$ | $\beta$    |
|------------------------|-----------------------|-------------------------------------|--|-----------------------------------|------------|
| 0,396461               | $1,077809 \cdot 10^6$ | $0,595949 \cdot 10^{-2}$            | $0,610396 \cdot 10^{-2}$               | 0,0718701                         | 0,00729106 |

Fonte: Elaborado a partir de Gomes (2014, p. 35).

Utilizaremos a função  $\phi_0(\vec{r}) = \left(-\frac{r^2}{R^2} + 1\right) \left(-\frac{z^2}{Z^2} + 1\right)$  como condição inicial, sendo que a mesma satisfaz as condições de contorno especificadas na metodologia do trabalho.

De maneira análoga ao que foi feito para a primeira situação problema, apresentaremos na Tabela 5.4 dados que evidenciam a convergência da solução quando truncamos os somatórios em  $n = k = l = 10$ .

Destaca-se que a partir de  $n = k = l = 6$  já temos uma aproximação de 2 dígitos significativos, desconsiderando possíveis arredondamentos numéricos realizados pelo python. Devido a isso, temos que a solução segue um comportamento gráfico similar até mesmo tomando poucas parcelas dos somatórios, por isso nas nossas análises os somatórios serão truncados em  $n = k = l = 10$ .

Na Figura 5.9 é possível ver um crescimento exponencial do tempo para calcular  $\phi_2$ , a medida que são tomados mais termos dos somatórios. Isso também justifica a escolha em realizarmos as análises com  $n, k, l = 10$ .

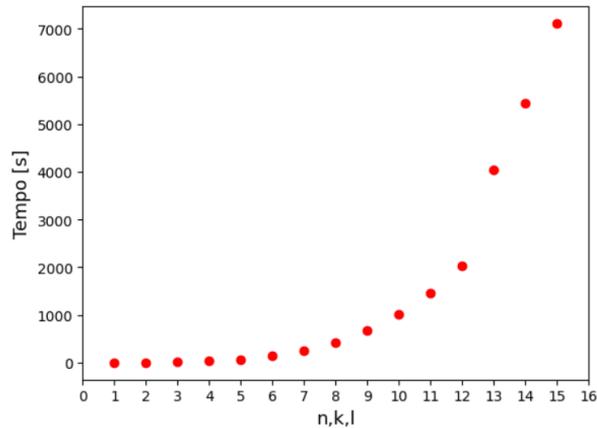
Deste modo, na próxima subseção iremos analisar o comportamento da função fluxo escalar de nêutrons, onde a série que o descreve foi truncada em  $n = k = l = 10$ .

Tabela 5.4: Valores estimados para o fluxo escalar variando  $n$ ,  $k$  e  $l$  para a 2ª situação particular

| $\phi_2$     | $\phi_{max}$ | $\frac{\phi_2}{\ \phi_{max}\ }$ | $n$ | $k$ | $l$ | Tempo de $\phi_2$ |
|--------------|--------------|---------------------------------|-----|-----|-----|-------------------|
| 0,0006871233 | 0,0010256648 | 0,6699297389                    | 1   | 1   | 1   | 0,37139 s         |
| 0,0014332839 | 0,0020074648 | 0,7139770892                    | 2   | 2   | 2   | 2,99215 s         |
| 0,0021437885 | 0,0030222538 | 0,7093343752                    | 3   | 3   | 3   | 11,43722 s        |
| 0,0028392207 | 0,0040243171 | 0,7055161443                    | 4   | 4   | 4   | 32,51237 s        |
| 0,0035284139 | 0,0050326721 | 0,7011014899                    | 5   | 5   | 5   | 71,73322 s        |
| 0,0042167359 | 0,0060382891 | 0,6983328963                    | 6   | 6   | 6   | 136,83093 s       |
| 0,0049082830 | 0,0070451993 | 0,6966847725                    | 7   | 7   | 7   | 246,82843 s       |
| 0,0056056422 | 0,0080512636 | 0,6962437850                    | 8   | 8   | 8   | 418,66687 s       |
| 0,0063073974 | 0,0090579261 | 0,6963401327                    | 9   | 9   | 9   | 669,63307 s       |
| 0,0070094843 | 0,0100642141 | 0,6964760696                    | 10  | 10  | 10  | 1018,29570 s      |
| 0,0077093412 | 0,0110707413 | 0,6963708259                    | 11  | 11  | 11  | 1460,61775 s      |
| 0,0084070027 | 0,0120770832 | 0,6961120168                    | 12  | 12  | 12  | 2023,65058 s      |
| 0,0091032299 | 0,0130835735 | 0,6957755017                    | 13  | 13  | 13  | 4042,20009 s      |
| 0,0097988057 | 0,0140899572 | 0,6954460968                    | 14  | 14  | 14  | 5438,76428 s      |
| 0,0104949821 | 0,0150964180 | 0,6951968389                    | 15  | 15  | 15  | 7113,61452 s      |

Fonte: Elaboração própria.

Figura 5.9: Gráfico de dispersão do tempo computacional para calcular  $\phi_2$  em função da quantidade de termos dos somatórios



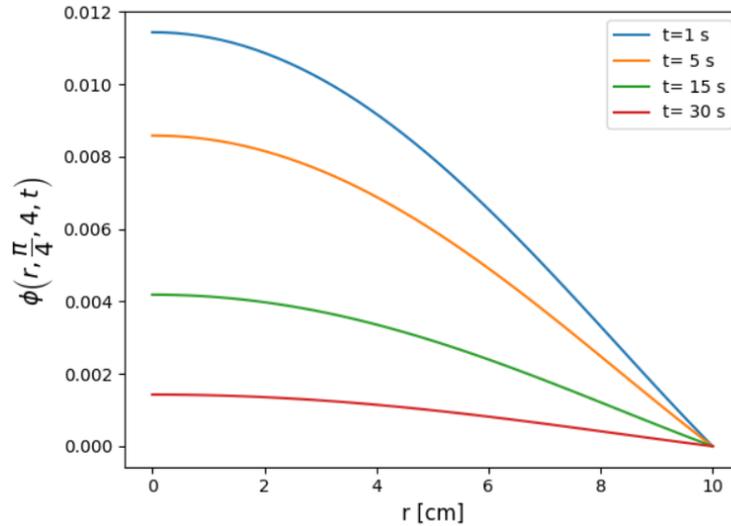
Fonte: Elaboração própria.

### 5.2.1 Análise do fluxo escalar de nêutrons da segunda situação particular

Nessa subseção iremos analisar a função fluxo escalar de nêutrons, denotada por  $\phi(\vec{r}, t)$ , cuja solução geral foi explicitada subseção 4.3. A ideia dessa subseção consiste em particularizar a solução, utilizando as condições de fronteira, condição inicial e parâmetros nucleares descritos na subseção 5.2. O objetivo é analisar o comportamento gráfico do fluxo escalar de nêutrons. Como a função fluxo possui 4 variáveis independentes, sendo três espaciais e uma temporal, iremos fixar duas ou três variáveis independentes a fim de que seja possível realizar a análise desejada.

Na Figura 5.10 é possível visualizar o esboço do comportamento da função fluxo escalar de nêutrons, em função da variável radial, sendo que foram fixados  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , para os tempos 1 s, 5 s, 15 s e 30 s. A partir dessa figura verifica-se que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento decrescente em relação a variável temporal. Além disso, em cada tempo, observa-se que o fluxo de nêutrons é maior para valores mais próximos ao centro radial.

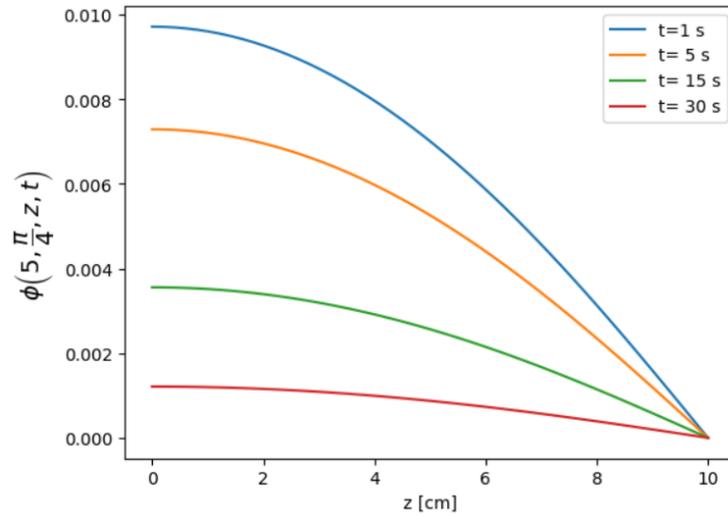
Figura 5.10: Fluxo escalar de nêutrons da 2ª situação particular quando  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 5.11 temos o esboço do comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função da variável  $z$ , quando o raio do cilindro é  $r = 5 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , para os tempos  $1 \text{ s}$ ,  $5 \text{ s}$ ,  $15 \text{ s}$  e  $30 \text{ s}$ . Ao analisar esse comportamento gráfico, verificamos que o fluxo de nêutrons possui um comportamento decrescente em relação a variável temporal. Também é possível observar, em cada tempo, que o fluxo de nêutrons é maior para valores mais próximos de  $z = 0$ .

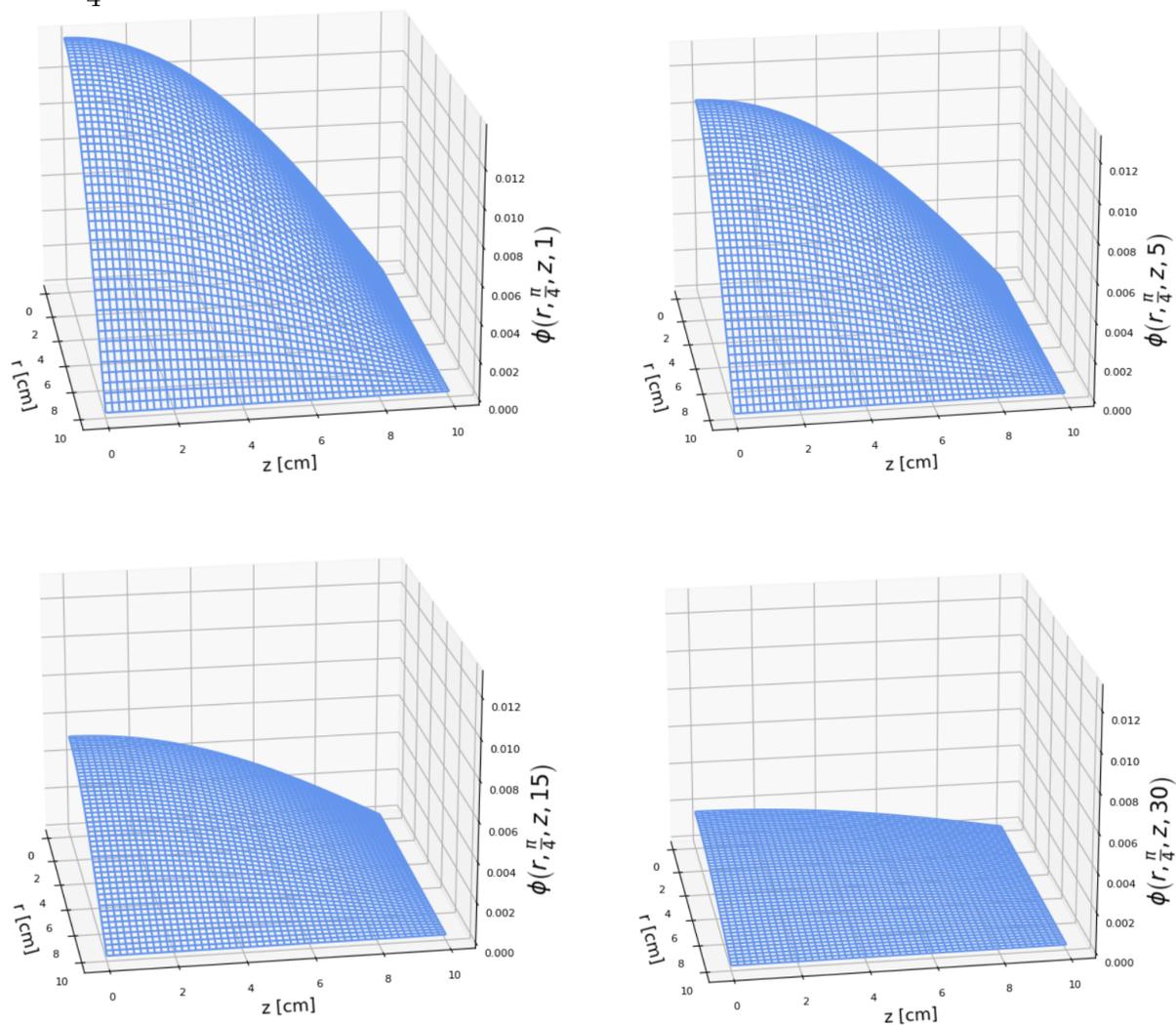
Figura 5.11: Fluxo escalar de nêutrons da 2ª situação particular quando  $r = 5 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Fonte: Elaboração própria.

Os comportamentos observados nas Figura 5.10 e Figura 5.11 também podem ser observados nos gráficos da Figura 5.12, a qual estão plotados quatro gráficos do fluxo de nêutrons em função das variáveis  $r$  e  $z$ , fixado  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , para os tempos  $t = 1 \text{ s}$ ,  $t = 5 \text{ s}$ ,  $t = 15 \text{ s}$  e  $t = 30 \text{ s}$ , onde é possível identificar que o fluxo decresce a medida que as variáveis  $r$  e  $z$  aumentam. Além disso, também é possível visualizar que o fluxo escalar de nêutrons diminui a medida que o tempo aumenta.

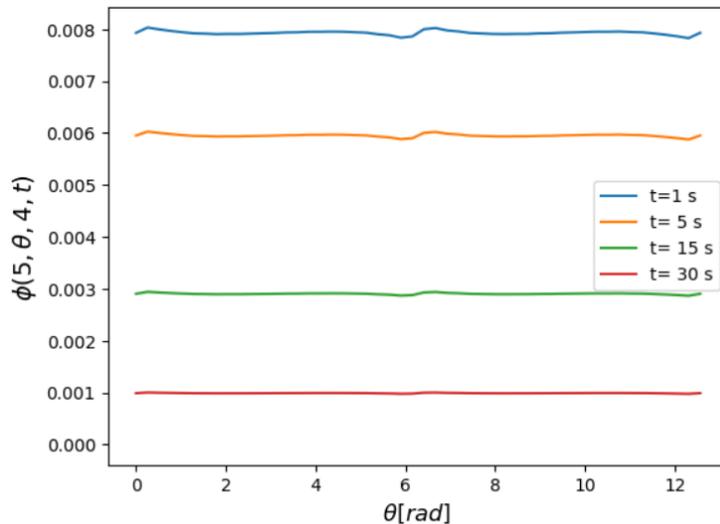
Figura 5.12: Fluxo escalar de nêutrons, para a 2ª situação particular, em função de  $r$  e  $z$  quando  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para os tempos  $t = 1 s$ ,  $t = 5 s$ ,  $t = 15 s$  e  $t = 30 s$



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 5.13 temos o esboço do comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função da variável angular  $\theta$ , no intervalo  $0 \leq \theta \leq 4\pi$ , quando o raio do cilindro é  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$ , para os tempos  $1 \text{ s}$ ,  $5 \text{ s}$ ,  $15 \text{ s}$  e  $30 \text{ s}$ . Ao analisar essa figura, verifica-se que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento decrescente em relação a variável temporal e que, em cada tempo, observa-se que o fluxo de nêutrons possui período  $2\pi$ . Também é possível notar que conforme  $t$  aumenta, o comportamento do fluxo tende a ficar uniforme.

Figura 5.13: Fluxo escalar de nêutrons da 2ª situação particular quando  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$



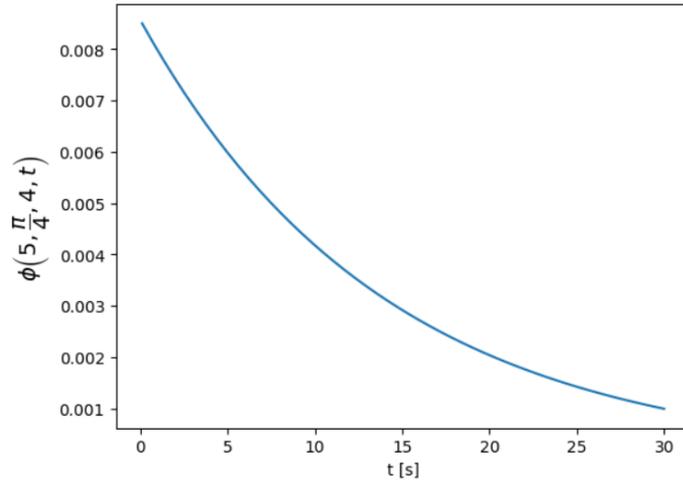
Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 5.14 temos o esboço do comportamento do fluxo escalar de nêutrons como função da variável temporal, quando o raio do cilindro é  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Analisando a figura é possível ver que o fluxo de nêutrons apresenta um comportamento exponencial decrescente. Esse comportamento é justificado pois o sistema é subcrítico, ou seja,  $K_{eff} < 1$ . Isso pode ser verificado através da expressão (OLIVEIRA, 2017, p. 35):

$$K_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a \left( 1 + \frac{D_{dif}}{\Sigma_a} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{2Z} \right)^2 \right]^2 \right)}$$

$$\implies K_{eff} \approx 0,705.$$

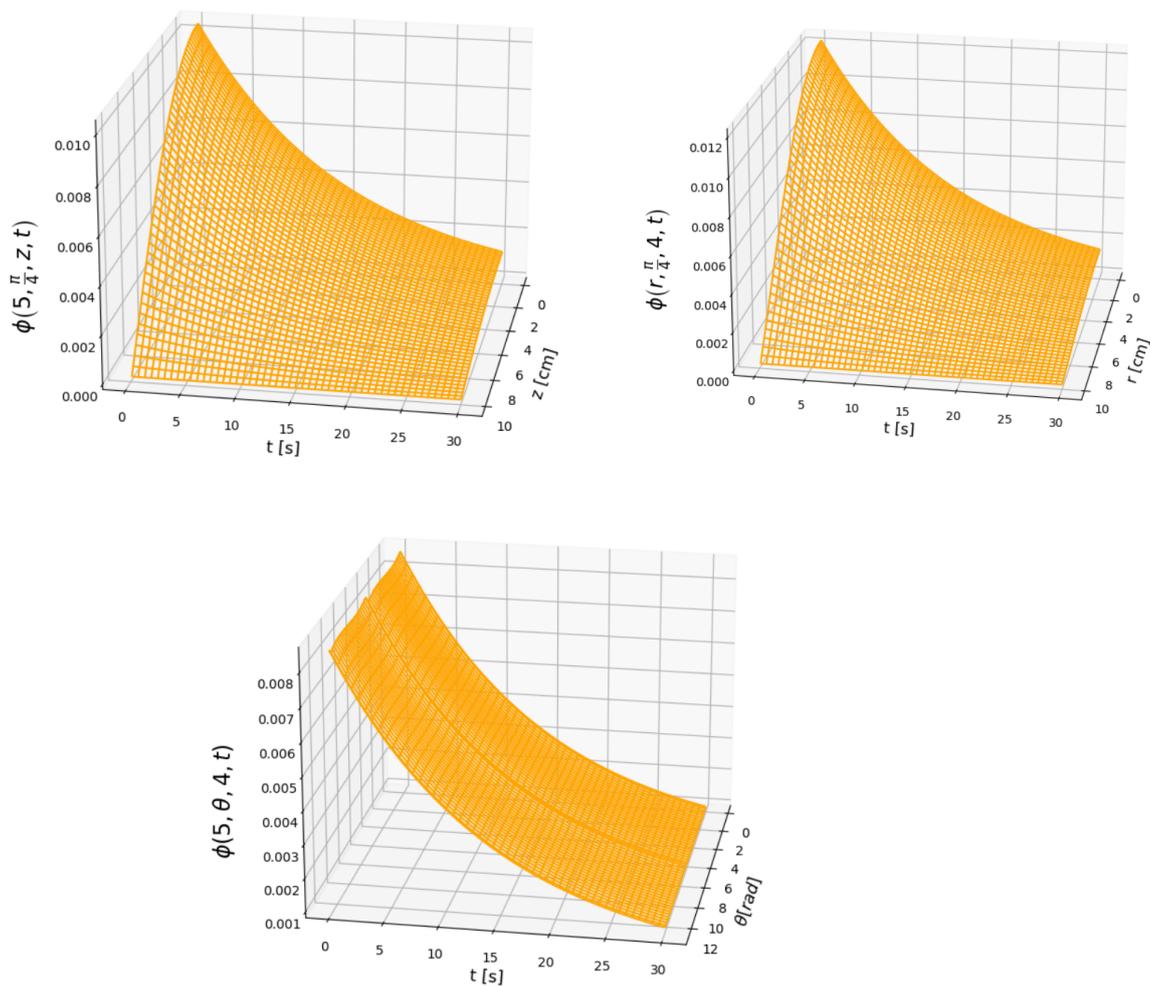
Figura 5.14: Fluxo escalar de nêutrons da 2ª situação particular quando  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Fonte: Elaboração própria.

Os comportamentos observados nas Figura 5.10, Figura 5.11 e Figura 5.13 também podem ser observados nos gráficos da Figura 5.15, a qual estão plotados três gráficos do fluxo de nêutrons: o primeiro em função das variáveis  $t$  e  $z$ , onde foi fixado  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $r = 5 \text{ cm}$ ; o segundo em função das variáveis  $t$  e  $r$ , onde foi fixado  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $z = 4 \text{ cm}$ ; e o terceiro em função das variáveis  $t$  e  $\theta$ , onde foi fixado  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$ . Nesses gráficos é possível observar que o fluxo decresce a medida que as variáveis  $r$  e  $z$  aumentam. Além disso, também é possível visualizar que o fluxo escalar de nêutrons decresce exponencialmente a medida que o tempo aumenta.

Figura 5.15: Fluxo escalar de nêutrons da 2ª situação particular em função de  $t$  e  $z$ , de  $t$  e  $r$ , e de  $t$  e  $\theta$



Fonte: Elaboração própria.

Destaca-se que os comportamentos analisados para a função fluxo nessa situação particular vão ao encontro dos comportamentos obtidos na primeira situação particular (subseção 5.1.1), o que era esperado pois em ambas as situações temos que estão sendo inseridas barras de controle. Portanto, conclui-se que as análises computacionais realizadas para esta situação particular estão consistentes.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação solucionou o problema de cinética espacial de nêutrons em geometria cilíndrica tridimensional, que é modelado por um sistema com duas equações diferenciais parciais (EDPs), sendo que foi considerado que o meio que os nêutrons se difundem é homogêneo e que há um grupo de energia e um grupo de precursores de nêutrons. É válido destacar que esse é um tipo de problema que visa compreender o comportamento da população de nêutrons em um reator e não um problema propriamente de segurança.

Inicialmente construiu-se um referencial teórico, baseando-se em autores como Oliveira (2013; 2017), Fernandes (2011), Zanette (2017; 2021), Petersen (2011), Duderstadt e Hamilton (1976), e Bell e Glasstone (1970). O referencial teórico foi estruturado em três pilares principais, sendo que o primeiro objetivou apresentar aspectos introdutórios e gerais sobre a teoria de reatores nucleares, apresentando um breve histórico sobre reatores nucleares, destacando conceitos físico-matemáticos e argumentando que a energia nuclear é uma alternativa viável para a geração de energia elétrica; o segundo objetivou apresentar a teoria de difusão de nêutrons, destacando que as suas equações são uma aproximação da equação de transporte de nêutrons e em quais contextos elas são adequadas/apropriadas; e o terceiro objetivou apresentar a teoria de cinética espacial de nêutrons, que considera em sua formulação os nêutrons prontos e atrasados, além de considerar que o fluxo de nêutrons depende/varia de acordo com a posição espacial e temporal, sendo considerada a melhor aproximação para descrever a evolução de nêutrons dentro da teoria de difusão de nêutrons (ZANETTE, 2021, p. 5).

A principal dificuldade nesta etapa de elaboração do referencial teórico está atrelada ao fato que a maior parte dos trabalhos que foram consultados pela estudante pesquisadora não citavam as referências teóricas utilizadas, ou quando citavam-as, não detalhavam a(s) página(s) que essas informações estavam contidas.

Isso foi problemático pois em alguns casos não foi possível verificar se as informações descritas nesses trabalhos iam realmente ao encontro das informações descritas na fonte original, pois não foi possível localiza-las.

Após escrevermos os embasamentos teóricos do trabalho, foi construída a metodologia de pesquisa. Nela, foi caracterizado que a presente pesquisa classificasse como aplicada (ASSIS, 2009, p. 17-18; GILL, 2002, p. 17) e foi formulado o problema que almejava-se solucionar. Destaca-se que as condições de contorno estabelecidas foram motivadas pela simetria azimutal do problema, conforme foi demonstrado na **Afirmção 1** do capítulo 3. Nesse capítulo também foram delimitados os objetivos de pesquisa, que consistiam em solucionar analiticamente o problema proposto e analisar a solução determinada, particularizando o problema.

Na sequência, solucionou-se o problema proposto, cuja estratégia de resolução consistiu na utilização da técnica separação variáveis, a qual foi aplicada sucessivas vezes ao longo da solução. Para tal, partiu-se das suposições que a função que descreve o fluxo escalar de nêutrons e a função que descreve a concentração de precursores de nêutrons atrasados podem ser expressadas, cada uma, pelo produto de uma função temporal e uma função espacial. A partir disso, obteve-se um sistema de equações desacoplado, cuja solução foi determinada solucionando uma equação diferencial parcial (EDP) e um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Mais precisamente, o sistema desacoplado é composto por uma EDP que possui dependência apenas espacial. Essa EDP foi solucionada utilizando a técnica separação de variáveis, na qual foram analisados todos os possíveis valores que as constantes de separabilidade podiam assumir de acordo com as condições de fronteira estabelecidas. Nessa etapa foram encontradas duas classes de solução não triviais - ou seja, soluções não nulas. A partir disso, foi solucionado o sistema de EDOs utilizando o método de eliminação sistemática (ZILL, CULLEN, 2001, p. 2), sendo que esse sistema possuía dependência apenas da variável temporal. Por fim, pelo princípio

de superposição de soluções (ZILL, CULLEN, 2014, p. 153), obtivemos uma solução geral e analítica para o problema proposto, que depende apenas da condição inicial, das condições de fronteira e dos parâmetros nucleares. Destaca-se também que pelo teorema de Cauchy-Kowalesky a solução determinada existe e é única.

A solução geral obtida e descrita no capítulo 4 é analítica, no sentido que nenhuma aproximação numérica foi realizada ao longo da solução. Cabendo destacar que os coeficientes da série que descreve a solução foram obtidos a partir de propriedades de ortogonalidade das funções envolvidas, que eram cosseno e de Bessel, garantindo que nenhuma aproximação advinda de truncamentos fosse utilizada nessa etapa do trabalho, mantendo portanto o caráter analítico da solução. É válido destacar também, embora isso não tenha sido abordado nesse trabalho, que a analiticidade da solução nos permite calcular os fluxos escalares e as concentrações de precursores em qualquer posição interior do cilindro e em qualquer tempo.

Cumprido destacar que a abordagem de solução, que foi via separação de variáveis, foi proposta por Oliveira (2017) e, no contexto desse trabalho, detalhamos mais passos resolutivos em relação ao material de referência, que consiste na tese de doutorado do autor.

Tendo em vista que o par solução  $(\phi(\vec{r}, t), C\vec{r}, t)$  obtido só depende dos parâmetros nucleares, das condições de fronteira e da condição inicial, no capítulo 5 particularizamos em duas situações a solução que havia sido obtida, sendo que foi delimitado que a região estudada seria um cilindro de dimensões  $0 < r \leq R = 10 \text{ cm}$ ,  $0 < z \leq Z = 10 \text{ cm}$ ; que os parâmetros nucleares seriam os descritos na Tabela 5.1 e na Tabela 5.3, que descrevem momentos em que são inseridas barras de controle; e que a condição inicial seria dada por  $\phi_0(\vec{r}) = \left(-\frac{r^2}{R^2} + 1\right) \left(-\frac{z^2}{Z^2} + 1\right)$ , que satisfaz as condições de fronteira do problema.

Nas análises das duas situações particulares propostas, conseguimos constatar, de maneira geral, que o fluxo escalar de nêutrons é maior quando próximo

do centro radial do cilindro e vai diminuindo cada vez mais a medida que se distancia do mesmo. Um comportamento similar é observado quando analisamos a solução em função da variável  $z$ , ou seja, o fluxo é maior quando próximo de  $z = 0$  e diminui cada vez mais a medida que se distancia do mesmo. Constatamos também que conforme o tempo aumenta, a solução para o fluxo apresenta um comportamento decrescente, o que é um comportamento esperado, pois trata-se de sistemas subcríticos conforme argumentado/justificado no capítulo 5.

Nessa etapa do trabalho, tomou-se  $n = k = l = 10$ , que representa 1000 termos da série que descreve o comportamento da função fluxo de nêutrons. Truncar os somatórios desta maneira justifica-se pois concentramos nossos esforços em analisar o comportamento gráfico das soluções. Observamos, na Tabela 5.2 e na Tabela 5.4, que há uma estabilidade de dois dígitos significativos no que tange ao comportamento gráfico quando realizamos esse truncamento. Também evidenciamos, na Figura 5.1 e na Figura 5.9, que o tempo computacional do código implementado em python era do tipo exponencial a medida que aumentássemos os índices de  $n = k = l$ , por isso, se quiséssemos obter um valor para o fluxo de nêutrons mais preciso, teríamos que reduzir o tempo computacional empregado.

É válido destacar que conseguimos reduzir bastante o tempo computacional quando expressamos simbolicamente as integrações triplas de  $d_{1,n,k}$ ,  $c_{1,n,k,l}$  e  $c_{2,n,k,l}$  em termos de integrações simples sob a variável  $r$ , pois antes disso, não conseguíamos obter resultados para  $n, k, l > 3$ . Embora essa redução do tempo computacional tenha sido significativa no contexto desse trabalho, não foi suficiente para obter um valor numérico mais próximo ao exato. Acredita-se que para isso, uma alternativa seria computar a solução particular utilizando uma linguagem de programação de baixo nível, sendo esse um aspecto que pode ser explorado em trabalhos futuros.

Por fim, acredita-se que em trabalhos futuros podem ser estudados critérios que relacionam a precisão da solução analítica determinada com o truncamento

das séries de funções que as descrevem, isto é, pode ser estudado a convergência do par solução. Além disso, também como perspectiva de trabalhos futuros, pretende-se utilizar a mesma abordagem que foi apresentada nesse trabalho, isto é, a técnica separação de variáveis, para resolver problemas de cinética espacial em outras geometrias, com mais grupos de energia (OLIVEIRA; FERNANDES; BODMANN; VILHENA, 2019) e/ou com mais grupos de precursores de nêutrons.

## REFERÊNCIAS

AMORIM, B. C. **Estudo da equação de difusão dependente do tempo para um georeator natural**. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2011.

ASSIS, M. C. **Metodologia do trabalho científico**. In: Evangelina Maria B. de Faria; Ana Cristina S. Aldrigue. Linguagens: usos e reflexões. 3<sup>a</sup> ed. Editora Universitária UFPB. 2009.

BELL, G. I.; GLASSTONE, S. **Nuclear Reactor Theory**. Editora Van Nostrand Reinhold Inc., U.S. 1970.

BOWMAN, F. **Introduction to Bessel Functions**. Editora Dover Publications. 1958.

DUDERSTADT, J.J.; HAMILTON, L. J. **Nuclear Reactor Analysis**. Editora Wiley. 1976.

DUDERSTADT, J.J.; MARTIN, W. R. **Transport Theory**. Editora John Wiley & Sons Inc. 1979.

DWORAK, D.; LOSKIEWICZ, J.; JANIK, M. **Asymptotic solutions of neutron transport equation and the limits of correct use of diffusion approximation for rocks**. Applied Radiation and Isotopes. 2001.

CNE, Conselho Nacional de Energia Nuclear. **Calder Hall Nuclear Power Station**. Disponível em: <[https:// www.ice.org.uk/what-is-civil-engineering/what-do-civil-engineers-do/calder-hall-nuclear-power-station/](https://www.ice.org.uk/what-is-civil-engineering/what-do-civil-engineers-do/calder-hall-nuclear-power-station/)>. Acesso em: dez. 2022.

CNEN, Conselho Nacional de Energia Nuclear. **A História da Energia Nuclear**. Disponível em: <<http://antigo.cnen.gov.br/images/cnen/documentos/educativo/historia-da-energia-nuclear.pdf>>. Acesso em: jan. 2023.

FERNANDES, J. C. L. **Solução analítica da equação da difusão de nêutrons multi-grupo em cilindro infinito pela técnica da transformada de Hankel**. Dissertação: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMap). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). 2011.

FOGAÇA, J. R. V. **Reator Nuclear**. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/quimica/reator-nuclear.htm>. Acesso em 24 de junho de 2022.

GOMES, G. A. **Estudo dinâmico de um reator nuclear considerando a cinética espacial a uma dimensão**. Dissertação: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Nuclear (PPGEN). Instituto Militar de Engenharia (IME). 2014.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4<sup>a</sup> ed. Editora Atlas. 2002.

LAMARSH, J. R. **Introduction to Nuclear Reactor Theory**. American Nuclear Society. 2002.

MAIA, C. R. M. **Cálculo em teoria de transporte no modelo de um grupo para cédula de três regiões**. Dissertação. Instituto de Energia Atômica (IEA). 1979. Disponível em: <[http://pelicano.ipen.br/PosG30/TextoCompleto/Cassio%20Roberto%20Macedo%20Maia\\_M.pdf](http://pelicano.ipen.br/PosG30/TextoCompleto/Cassio%20Roberto%20Macedo%20Maia_M.pdf)>. Acesso em: mar. 2023.

OLIVEIRA, F. R. **Solução analítica da equação de multigrupo de cinética de nêutrons em geometria cartesiana e cilíndrica unidimensionais**. Dissertação: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMap). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). 2013.

OLIVEIRA, F. R. **Solução da equação de cinética de difusão de nêutrons em geometria cilíndrica tridimensional**. Tese: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMap). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). 2017.

OLIVEIRA, F. R.; FERNANDES, J. C. L. ; BODMANN, B. E. J.; VILHENA, M. T. **On an analytical solution for the two energy group neutron space-kinetic equation in heterogeneous cylindrical geometry**. *Annals of Nuclear Energy* 133. p. 216–220. 2019.

PETERSEN, C. Z. **Solução analítica das equações da cinética pontual e espacial da teoria de difusão de nêutrons pelas técnicas da GITT e decomposição**. Dissertação: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMap). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). 2011.

SMITH, K. S. **An Analytic Nodal Method for Solving the Two-group, Multidimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equations**. Massachusetts Institute of Technology, Department of Nuclear Engineering, 1979.

SPIEGEL, M. R.; LIPSCHUTZ, S.; LIU, J. **Mathematical Handbook of Formulas and Tables**. 3<sup>a</sup> ed. Editora McGraw Hill. 2009.

STACEY, W.M. **Modal approximations: theory and an application to reactor physics**. Editora The MIT Press. 1967.

SUTTON, T. M.; AVILES, B. N. **Diffusion theory methods for spatial kinetics calculations**. *Progress in Nuclear Energy*. Volume 30, 1996, p. 119-182.

WORLD NUCLEAR ASSOCIATION. **Nuclear Power in the World Today**. Disponível em: <<https://world-nuclear.org/information-library/current-and-future-generation/nuclear-power-in-the-world-today.aspx>>. Acesso em: jan. 2023.

ZANETTE, R. **Solução de problemas estacionários e transientes da teoria da difusão de nêutrons multigrupo em geometria cartesiana via abordagens nodais e exponenciais matriciais.** Tese: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). 2021. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/221887/001126313.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: jan. 2023.

ZANETTE, R. **Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião não Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias.** Dissertação: Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática. Universidade Federal de Pelotas (UFPel). 2017. Disponível em: <[http://guaiaca.ufpel.edu.br:8080/bitstream/prefix/4688/1/dissertacao\\_rodrigo\\_zanette.pdf](http://guaiaca.ufpel.edu.br:8080/bitstream/prefix/4688/1/dissertacao_rodrigo_zanette.pdf)>. Acesso em: ago. 2022.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais.** Volume 1. Editora Pearson Universidades. 3<sup>a</sup> ed. 2001.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais.** Volume 2. Editora Pearson Universidades. 3<sup>a</sup> ed. 2001.