

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Renato Vaz Linn**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS  
UTILIZANDO DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA**

Porto Alegre  
dezembro 2010

**RENATO VAZ LINN**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS  
UTILIZANDO DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

**Orientador: Armando Miguel Awruch**

Porto Alegre  
dezembro 2010

**RENATO VAZ LINN**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS  
UTILIZANDO DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2010 (data da entrega da versão final pós-defesa)

Prof. Armando Miguel Awruch  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Ronald José Ellwanger (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Luis Felipe da Rosa Espath**  
Me. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Armando Miguel Awruch (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho a meus pais

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha família, minha mãe Sirlei, meu pai Silvio e meu irmão Rodrigo.

Ao professor Awruch pelo constante incentivo, dedicação e orientação do trabalho.

A Felipe Espath pelo grande apoio e auxílio, não apenas na realização deste trabalho, mas como amigo, sem o qual a realização deste trabalho não seria possível.

A todos os professores que de alguma forma contribuíram com minha formação.

A todos meus amigos e colegas, sem os quais o percurso ao longo da faculdade e da vida não seria tão agradável e nem faria o mesmo sentido.

Não existem métodos fáceis para  
resolver problemas difíceis.

*René Descartes*

## RESUMO

LINN, R. V. **Otimização de Forma de Cascas Axissimétricas utilizando Diferenciação Automática**. 2010. 92 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Cascas constituem um tipo de estrutura que possui uma vasta quantidade de aplicações, incluindo, por exemplo, fuselagens de aviões e submarinos, silos metálicos, coberturas de hangares, estruturas de prédios e componentes automotivos e aeroespaciais. Os grandes vãos possíveis de serem cobertos, baixo peso e alta rigidez são algumas das vantagens obtidas com o emprego deste tipo de estrutura. A indústria moderna, a tecnologia e a alta competitividade têm requerido destas estruturas uma performance estrutural cada vez maior, a qual pode ser obtida com otimização tanto topológica quanto de forma. No caso de estruturas de cascas, a rigidez depende da geometria da casca e tanto sua forma quanto sua espessura governam a resposta estrutural da mesma. Neste sentido, uma otimização da forma se faz necessária para melhorar o desempenho estrutural de cascas. A otimização de forma de cascas lida com a modificação da estrutura, usando um algoritmo de otimização e a análise estrutural, sendo que áreas distintas são acopladas, estabelecendo um sistema de otimização estrutural. Tanto a precisão quanto a eficiência da otimização depende de todas estas áreas. No presente trabalho é proposta uma otimização de forma de cascas axissimétricas isotrópicas utilizando uma descrição da geometria através da parametrização NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*), com um algoritmo Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming* – SQP) para a otimização e Diferenciação Automática (*Automatic Differentiation* – AD) para a análise de sensibilidade.

Palavras-chave: otimização de forma; cascas axissimétricas;  
NURBS; diferenciação automática.

## **ABSTRACT**

LINN, R. V. **Otimização de Forma de Cascas Axissimétricas utilizando Diferenciação Automática.** 2010. 92 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

### **Shape Optimization of Axisymmetric Shells using Automatic Differentiation**

In structural mechanics, shells are a type of structure having a wide range of applications, including, for example, submarines and aircraft fuselages, metallic silos, roofs of hangars, building structures, automotive and aerospace components. Large spans roofs, low weight and high stiffness are some of the advantages obtained using such structural type. Modern industry, technology and high competitiveness require from these structures an increasing performance, which may be obtained with both, topology and shape optimization. In the case of shell structures, the stiffness depends on the geometry and their shapes govern the structural response. Then, shape optimization is necessary to improve the structural behavior of the shell. Shape optimization of shells deals with the modification of the structure using an optimization algorithm and structural analysis, and different areas must be coupled together to establish a structural optimization system. Both, the accuracy and efficiency of the optimization depends on all these areas. In this work, shape optimization of isotropic axisymmetric shells, using a geometry description by NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), with a Sequential Quadratic Programming algorithm (SQP) and Automatic Differentiation (AD) for the sensitivity analysis, is proposed.

Keywords: shape optimization; axisymmetric shells; NURBS; automatic differentiation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: diagrama das etapas da pesquisa .....	27
Figura 2: elementos de um sólido axissimétrico .....	38
Figura 3: tensões e deformações envolvidas na análise de sólidos axissimétricos .....	40
Figura 4: geometria e malha original .....	64
Figura 5: geometria e malha deformada .....	64
Figura 6: algoritmo de otimização .....	65
Figura 7: geometria e condições de contorno consideradas no exemplo 1 .....	67
Figura 8: malha de elementos finitos inicial utilizada no exemplo 1 .....	68
Figura 9: parametrização NURBS e variáveis consideradas no exemplo 1 .....	68
Figura 10: exemplo de erro ocasionado pela transposição de pontos de controle .....	69
Figura 11: sequência de otimização da geometria do exemplo 1 .....	71
Figura 12: deslocamentos da geometria inicial do exemplo 1 .....	72
Figura 13: tensões de von Mises da geometria inicial do exemplo 1 .....	72
Figura 14: deslocamentos e tensões (von Mises) para a geometria final do exemplo 1 ..	72
Figura 15: visualização tridimensional em 360° e 270° da estrutura otimizada no exemplo 1 .....	73
Figura 16: gráfico da função objetivo ao longo das iterações no exemplo 1 .....	74
Figura 17: analogia de Robert Hooke entre correntes suspensas e arcos .....	75
Figura 18: projeto de Wren para o domo da Catedral St. Paul .....	76
Figura 19: modelo original de suspensão invertida utilizado por Gaudí (à esquerda) e reconstituição do mesmo (à direita) .....	77
Figura 20: modelo de membrana suspensa invertida de Isler .....	77
Figura 21: geometria e condições de contorno consideradas no exemplo 2 .....	78
Figura 22: malha de elementos finitos inicial utilizada no exemplo 2 .....	79
Figura 23: parametrização NURBS e variáveis consideradas no exemplo 2 .....	79
Figura 24: gráfico da função objetivo ao longo das iterações no exemplo 2 .....	80
Figura 25: sequência de otimização da geometria do exemplo 2 .....	81
Figura 26: deslocamentos da geometria inicial do exemplo 2 .....	82
Figura 27: tensões de von Mises da geometria inicial do exemplo 2 .....	82
Figura 28: deslocamentos e tensões (von Mises) para a geometria final do exemplo 2 ..	82
Figura 29: visualização tridimensional em 360° e 270° da estrutura otimizada no exemplo 2 .....	83
Figura 30: geometria e condições de contorno consideradas no exemplo 3 .....	84
Figura 31: malha de elementos finitos inicial utilizada no exemplo 3 .....	85

Figura 32: parametrização NURBS e variáveis consideradas no exemplo 3 .....	86
Figura 33: gráfico da função objetivo ao longo das iterações no exemplo 3 .....	86
Figura 34: deslocamentos e tensões de von Mises da geometria inicial do exemplo 3 ...	87
Figura 35: deslocamentos e tensões de von Mises da geometria final do exemplo 3 .....	88
Figura 36: visualização tridimensional em 360° e 270° da estrutura otimizada no exemplo 3 .....	88

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: coordenadas iniciais dos pontos de controle do exemplo 1 .....	70
Quadro 2: coordenadas finais dos pontos de controle do exemplo 1 .....	74
Quadro 3: coordenadas axiais iniciais e finais dos pontos de controle tomados como variáveis do exemplo 2 .....	80
Quadro 4: coordenadas axiais iniciais e finais dos pontos de controle tomados como variáveis do exemplo 3 e do bordo superior .....	87

## LISTA DE SIGLAS

NURBS: *Non-Uniform Rational Basis Spline*

SQP: Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming*)

AD: Diferenciação Automática (*Automatic Differentiation*)

LICQ: *Linear Independence Constraint Qualification*

KKT: Karush-Kuhn-Tucker

CAGD: *Computer Aided Geometry Design*

INRIA: *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*

UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_{ij}$  = componentes do tensor de tensões de Cauchy

$\varepsilon_{ij}$  = componentes do tensor de deformações específicas infinitesimais

$C_{ijkl}$  = componentes do tensor de quarta ordem da rigidez do material

$\sigma_i$  = componentes do tensor de tensões de Cauchy

$\varepsilon_i$  = componentes tensor de deformações específicas infinitesimais

$C_{ij}$  = constantes do material

$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$  = gradiente da componente do vetor deslocamento  $u_j$

$E$  = módulo de Young

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$\delta_{ij}$  = delta de Kronecker

$\sigma_{kk}$  = traço do tensor de componentes  $\sigma_{ij}$

$\varepsilon_{kk}$  = traço do tensor de componentes  $\varepsilon_{ij}$

$\sigma_{ji,j} = \partial \sigma_{ji} / \partial x_j$  = divergência do tensor de tensões de componentes  $\sigma_{ij}$

$b_i$  = componente da força de volume na direção  $x_i$

$\bar{u}_i$  = valor prescrito das componentes dos deslocamentos  $u_i$  na direção  $x_i$

$n_j$  = componente segundo  $x_j$  do vetor unitário normal externo à superfície

$t_i$  = componente da força atuante na superfície  $S$  que rodeia o volume  $V$

$\bar{t}_i$  = valor prescrito da força  $t_i$  na direção  $x_i$

$$u_{i,jj} = \partial^2 u_i / \partial x_j^2$$

$$u_{j,ji} = \partial^2 u_j / \partial x_i \partial x_j$$

$\delta u_i$  = deslocamento virtual

$V$  = volume

$\delta W_I$  = trabalho interno

$\delta W_E$  = trabalho externo

$\delta \varepsilon_{ij}$  = componentes de deformações devidas aos deslocamentos virtuais

$S$  = superfície

$\mathbf{x}_i$  = coordenadas nodais

$\mathbf{N}_i$  = componentes da matriz de função de forma  $\mathbf{N}$

$\mathbf{u}_i$  = componentes dos deslocamentos nodais

$\boldsymbol{\varepsilon}$  = vetor que contém as componentes de deformações no interior do elemento

$\mathbf{B}$  = matriz que vincula componentes de deslocamentos e deformações específicas

$\mathbf{C}$  = matriz constitutiva do material

$\mathbf{b}$  = vetor de forças de volume

$\mathbf{t}$  = vetor de forças de superfície

$\mathbf{p}$  = vetor de forças concentradas

$\mathbf{d}^e$  = vetor de deslocamentos do elemento  $e$

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (\text{matriz de rigidez do elemento } e)$$

$$\mathbf{r}^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \mathbf{p} \quad (\text{vetor de cargas nodais do elemento } e)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N^e} \mathbf{K}^e \quad (\text{matriz de rigidez global})$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{N^e} \mathbf{r}^e \quad (\text{vetor de cargas global})$$

$\mathbf{d}$  = vetor coluna contendo todos os graus de liberdade nodais

$N^e$  = número de elementos

$\mathbf{a}_i$  = deslocamentos no nó  $i$

$\mathbf{a}^e$  = deslocamentos do elemento  $e$

$\alpha_i = r_j z_m - r_m z_j$  em ordem cíclica

$\beta_i = z_j - z_m$  em ordem cíclica

$\gamma_i = r_m - r_j$  em ordem cíclica

$\Delta$  = área do elemento

$r$  = coordenada radial

$z$  = coordenada axial

$\mathbf{I}$  = matriz identidade

$\bar{r}$  = coordenada radial no centróide do elemento

$\bar{z}$  = coordenada axial no centróide do elemento

$\bar{\mathbf{B}}$  = matriz deslocamentos-deformação calculado no centróide do elemento

$\bar{R}$  = componente radial de força por unidade de comprimento na circunferência de um nó

$\bar{Z}$  = componente axial de força por unidade de comprimento na circunferência de um nó

$b_r$  = força de volume na direção  $r$

$b_z$  = força de volume na direção  $z$

$\mathbf{x}$  = vetor de variáveis

$f$  = função objetivo

$c_i$  = funções de restrição

$\mathcal{E}$  = conjunto de índice das restrições de igualdade

$\mathcal{J}$  = conjunto de índice das restrições de desigualdade

$\in$  = pertence (conjunto)

$\mathbb{R}^n$  = conjunto dos números reais  $n$ -dimensional

$\Omega$  = conjunto viável

$\mathcal{A}(\mathbf{x})$  = conjunto ativo

$\nabla$  = gradiente (operador)

$\forall$  = para qualquer (notação)

$\mathbf{x}^*$  = mínimo local

$\lambda_i$  = multiplicadores de Lagrange

$\lambda^*$  = multiplicadores de Lagrange em  $\mathbf{x}^*$

$\mathcal{L}$  = Lagrangeano ou função Lagrangeana

$\delta_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$  = direção de busca

$\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$  = direção de busca

$\mathbf{x}_k$  = valor de  $\mathbf{x}$  na iteração  $k$



$\lambda_k$  = valor de  $\lambda$  na iteração  $k$

$\mathbf{W}$  = componente de  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k)$

$\alpha_k$  = comprimento do passo

$\mathbf{P}$  = ponto no espaço Euclidiano

$u, v$  = parâmetros independentes normalizados  $\in [0, 1]$

$N_{i,p}(u)$  =  $i$ -ésima função de base *B-Spline* de grau  $p$

$\hat{u}_i$  = nós de  $\mathcal{U}$

$\hat{v}_i$  = nós de  $\mathcal{V}$

$\mathbf{S}$  = superfície NURBS

$\mathbf{P}_{i,j}$  = ponto de controle

$w_{i,j}$  = pesos

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$  = vetores de nós

$r = n + p + 1$

$s = m + q + 1$

$R_{i,j}$  = função de base racional

$\mathcal{H}$  = função definida por um algoritmo numérico

$X$  = variáveis independentes

$Y$  = variáveis dependentes

$\mathcal{H}^l$  =  $l$ -ésimo passo que define um algoritmo numérico

$Z^l$  = variáveis intermediárias

$\mathbb{N}$  = conjunto dos números inteiros

$\odot$  = operador de composição de funções

$A_{ij}$  = Jacobiano

$\triangleq$  = símbolo para definição (notação)

$\delta Z^l$  = variação da variável intermediária  $Z^l$

$\delta^* Z^l$  = adjunto de um resultado intermediário  $Z^l$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  = produto interno em um espaço Euclidiano

$\delta \mathcal{H}$  = gradiente de  $\mathcal{H}$

$V_{ini}$  = volume inicial

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	20
<b>2 MÉTODO DE PESQUISA</b> .....	24
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA .....	24
2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	24
<b>2.2.1 Objetivo principal</b> .....	24
<b>2.2.2 Objetivos secundários</b> .....	24
2.3 PRESSUPOSTO .....	25
2.4 DELIMITAÇÕES .....	25
2.5 LIMITAÇÕES .....	25
2.6 DELINEAMENTO .....	25
<b>3 ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	28
3.1 ELASTICIDADE LINEAR .....	28
<b>3.1.1 Equações constitutivas</b> .....	28
<b>3.1.2 Formulação e solução de problemas em elasticidade linear</b> .....	31
3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	33
<b>3.2.1 Princípio dos trabalhos virtuais</b> .....	34
<b>3.2.2 Interpolação e funções de forma</b> .....	35
<b>3.2.3 Equação de equilíbrio para um elemento finito</b> .....	36
3.3 AXISSIMETRIA .....	38
<b>3.3.1 Funções de deslocamento</b> .....	39
<b>3.3.2 Deformações</b> .....	40
<b>3.3.3 Matriz constitutiva do material</b> .....	41
<b>3.3.4 Matriz de rigidez</b> .....	42
<b>3.3.5 Forças nodais externas</b> .....	43
<b>3.3.6 Forças de volume distribuídas</b> .....	43
<b>4 OTIMIZAÇÃO</b> .....	45
4.1 TEORIA DA OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES .....	46
<b>4.1.1 Condições de ponto ótimo de primeira ordem</b> .....	47
<b>4.1.2 Condições de ponto ótimo de segunda ordem</b> .....	48
4.1.2.1 Condições necessárias de segunda ordem .....	48
4.1.2.2 Condições suficientes de segunda ordem .....	49
4.2 PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL .....	49
<b>5 NURBS</b> .....	52

5.1 FUNÇÕES DE BASE B-SPLINE .....	52
5.2 DEFINIÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE NURBS .....	53
<b>6 DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA .....</b>	<b>55</b>
6.1 DIFERENCIAÇÃO DE ALGORITMOS .....	55
6.2 MODO <i>FORWARD</i> DE PROPAGAÇÃO DE TANGENTES .....	58
6.3 MODO <i>REVERSE</i> DE PROPAGAÇÃO DE GRADIENTES .....	58
6.4 DIFERENCIAÇÃO DE FUNÇÕES ESCALARES .....	58
<b>7 IMPLEMENTAÇÃO .....</b>	<b>61</b>
7.1 ANÁLISE ESTRUTURAL POR ELEMENTOS FINITOS .....	61
7.2 OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA USANDO UM ALGORITMO SQP .....	61
7.3 DEFORMAÇÃO LIVRE DE FORMA BASEADO EM NURBS .....	62
7.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE UTILIZANDO AD .....	64
7.5 ALGORITMO NUMÉRICO .....	65
<b>8 APLICAÇÕES .....</b>	<b>67</b>
8.1 EXEMPLO 1 .....	67
8.2 EXEMPLO 2 .....	78
8.3 EXEMPLO 3 .....	83
<b>9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>89</b>
REFERÊNCIAS .....	91



## 1 INTRODUÇÃO

As pessoas otimizam. As indústrias visam maximizar a eficiência de seus projetos e a operação de seus processos produtivos. Investidores buscam minimizar seus riscos. Engenheiros adaptam parâmetros para otimizar a performance de seus projetos.

A natureza otimiza. Sistemas físicos tendem a um estado de mínima energia. As moléculas em um sistema químico isolado reagem umas com as outras até que toda a energia potencial de seus elétrons seja minimizada. Raios da luz solar seguem o caminho que minimiza seu tempo de viagem.

A otimização é uma ferramenta importante na Ciência, na Engenharia e na análise de sistemas físicos. Para utilizar esta ferramenta, precisa-se primeiramente identificar um objetivo, que é uma quantidade que mede a performance do sistema em estudo. Este objetivo pode ser o lucro, o tempo, a energia potencial ou qualquer outra combinação de quantidades que podem ser representadas por uma única função (funcional). O objetivo depende de certas características do sistema, chamadas variáveis. A intenção é encontrar valores para estas variáveis, tais que otimizam o objetivo. Muitas vezes, as variáveis têm restrições de alguma forma.

Uma vez que o modelo tenha sido formulado, um algoritmo de otimização pode ser utilizado para encontrar sua solução, geralmente com a ajuda de um computador. Praticamente não existem algoritmos de otimização universal, mas sim uma coleção de algoritmos, cada um dos quais é adaptado a um caso particular de otimização (alguns algoritmos UFO – *Universal Functional Optimization*, entretanto, são ditos universais). A responsabilidade de escolher o algoritmo apropriado para uma aplicação específica geralmente recai sobre o usuário. Esta escolha é muito importante e pode determinar se o problema será resolvido eficientemente e, sobre tudo, se a solução será encontrada.

Projetar uma estrutura melhor é o desejo de todos os engenheiros estruturais. Nos tempos passados, os projetos eram aprimorados por engenheiros hábeis através das experiências adquiridas durante várias gerações. Hoje em dia, as limitações de recursos, competições tecnológicas e problemas contextuais adicionam um novo impulso ao desenvolvimento da

otimização estrutural. A otimização estrutural consiste em obter a melhor performance estrutural possível para uma dada aplicação, sobre certas condições e restrições, como por exemplo, o melhor aproveitamento dos materiais. Alguns exemplos que se pode citar são a otimização de perfis aerodinâmicos que forneçam menor arrasto, de perfis metálicos para que gerem o menor peso possível e a de materiais compósitos para adquirirem uma orientação de suas fibras, bem como número e espessura das lâminas, na qual sua resistência seja maximizada.

Entre os diversos tipos de estruturas a serem otimizadas, o presente trabalho aborda o caso específico das cascas axissimétricas. Cascas constituem um tipo especial de estrutura, podendo ser compreendidas como superfícies curvas cuja espessura seja pequena em relação às outras dimensões. Elas apresentam uma performance estrutural excelente e, em muitos casos, arquitetonicamente belas. São utilizadas em diversas aplicações, como fuselagens de aviões e de submarinos, silos metálicos, coberturas, reservatórios, prédios, etc. Pode-se citar como vantagens a leveza, a rigidez e a possibilidade de manipulação geométrica na sua concepção e, como desvantagens, o custo muitas vezes elevado e as dificuldades construtivas, em alguns casos. A geometria de uma estrutura deste tipo infere diretamente na eficiência global da estrutura, portanto, a otimização da performance estrutural de cascas recai sobre a otimização de sua forma, incluindo sua espessura, o que justifica a abordagem de otimização sobre a forma da casca adotada no presente trabalho.

A otimização de forma de cascas lida com a modificação da geometria da estrutura, a programação matemática para o algoritmo de otimização e a análise estrutural. Estas áreas devem ser acopladas, estabelecendo um sistema de otimização estrutural. Tanto a eficiência quanto a precisão da otimização depende de todas estas áreas.

Neste trabalho, a otimização de forma de cascas axissimétricas isotrópicas é proposta utilizando uma descrição paramétrica da superfície através de *Non-Uniform Rational Basis Spline* (NURBS), com um algoritmo de Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*) e utilizando Diferenciação Automática (*Automatic Differentiation – AD*) para a análise de sensibilidade.

Para a análise estrutural, uma abordagem por elementos finitos, utilizando um elemento CST (*Constant Stress Triangle*) axissimétrico para casos de análise linear estática, foi implementada. Uma discretização adequada da malha é também importante para o

fornecimento de valores numéricos corretos sem grandes erros associados para o algoritmo de otimização, os quais poderiam gerar soluções ótimas incorretas. Os fundamentos básicos da análise estrutural via elementos finitos são abordados no capítulo 3 do presente trabalho.

O método de otimização matemática deve ser escolhido, como dito anteriormente, baseado na aplicação específica. Certos procedimentos de otimização podem lidar bem com alguns tipos de problemas, mas podem também ser insatisfatórios ou simplesmente não conseguem lidar com outros tipos de problemas de otimização. Para otimização de forma de cascas, as restrições geométricas utilizadas sobre as variáveis são geralmente altamente não-lineares. Neste sentido, um algoritmo SQP foi escolhido para o presente trabalho. O método SQP é um algoritmo robusto para otimização determinística não-linear de variáveis contínuas. Este algoritmo utiliza avaliações da função objetivo, das restrições, assim como de suas respectivas derivadas para guiar seu procedimento iterativo de busca pela solução ótima. Para melhor compreensão do método SQP e da teoria que fundamenta a otimização, o capítulo 4 foi organizado no intuito de expor tais conceitos básicos.

Uma representação suave e precisa da geometria é muito importante quando é a forma da estrutura que deve ser encontrada e modificada. Uma parametrização NURBS promove uma descrição de fácil manipulação da geometria e pode representar precisamente formas complexas através de uma implementação matemática eficiente. Para o propósito de otimização de forma, NURBS se torna muito adequado devido ao fácil controle da forma da geometria através dos chamados pontos de controle e da utilização de coordenadas homogêneas, promovendo a representação de praticamente qualquer geometria. O estudo sobre os fundamentos matemáticos que definem superfícies NURBS é abordado no capítulo 5 deste trabalho.

A análise de sensibilidade da estrutura pode ser realizada analiticamente, semi-analiticamente ou numericamente. Análises analíticas requerem uma matemática complexa e laboriosa, sendo muitas vezes difíceis de serem explicitadas, ou a solução analítica pode simplesmente não existir explicitamente. A análise de sensibilidade através de procedimentos numéricos (como o método das diferenças finitas) requer cálculos extras e pode gerar valores imprecisos, principalmente para funções altamente não-lineares. O método semi-analítico situa-se em algum ponto entre estes dois, sendo analítico até certo ponto, mas com algumas simplificações adotadas para o respectivo cálculo. A diferenciação automática (AD) consiste de um método



numérico-computacional para o cálculo de derivadas de funções que gera a solução com precisão analítica, porém efetuada de forma numérica. O método se baseia no fato que toda e qualquer função, não importa o quão complicada seja, pode ser desmembrada em partes elementares, as quais são analiticamente diferenciáveis. Utilizando a regra da cadeia é possível obter as derivadas de uma função através da diferenciação de cada uma destas partes elementares com relação à anterior. No presente trabalho, a AD foi implementada para o cálculo das derivadas utilizadas pelo método SQP, promovendo uma computação rápida e precisa das mesmas. O capítulo 6 contém a descrição do método AD, envolvendo a teoria básica numérico-computacional.

O capítulo 7 contém a descrição da implementação do procedimento de otimização estrutural, bem como do funcionamento do algoritmo de otimização. Exemplos de aplicações, comparações e análise dos resultados obtidos são tratados no capítulo 8 deste trabalho.

## **2 MÉTODO DE PESQUISA**

O método de pesquisa utilizado no trabalho é descrito neste capítulo. O capítulo compreende a organização do método, contendo objetivos, limitações, delimitações, pressupostos bem como o delineamento do trabalho.

### **2.1 QUESTÃO DE PESQUISA**

A questão de pesquisa deste trabalho é: qual a configuração geométrica que uma estrutura de casca axissimétrica deve ter para que seu comportamento estrutural seja otimizado segundo um dado objetivo descrito por variáveis sob certas restrições?

### **2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO**

Os objetivos do trabalho estão classificados em um objetivo principal e alguns objetivos secundários, e são apresentados nos próximos itens.

#### **2.2.1 Objetivo principal**

O objetivo principal deste trabalho é a obtenção da configuração geométrica que otimiza o desempenho estrutural sob restrições de uma casca axissimétrica para uma dada condição de contorno através de uma abordagem numérica e computacional eficiente.

#### **2.2.2 Objetivos secundários**

Os objetivos secundários deste trabalho são os seguintes:

- a) a implementação da Diferenciação Automática (AD) na Programação Quadrática Sequencial (SQP) para o fornecimento dos gradientes de forma eficiente e precisa;

- b) a utilização da AD na análise estrutural por Elementos Finitos para análise da sensibilidade da estrutura;
- c) o acoplamento computacional da AD, da SQP, da análise em Elementos Finitos e da parametrização da superfície a ser otimizada numericamente.

## 2.3 PRESSUPOSTO

O trabalho tem por pressuposto que a análise numérica via Elementos Finitos utilizada, aplicada de forma correta e adequada, fornece uma solução estrutural suficientemente precisa para fins de otimização.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se à otimização de forma de cascas axissimétricas isotrópicas segundo um único objetivo, sem alterações de sua topologia e sem a consideração da não-linearidade física do material.

## 2.5 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho a otimização de forma de cascas axissimétricas submetidas apenas a carregamentos estáticos em estruturas com comportamento geometricamente linear.

## 2.6 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir, que estão representadas na figura 1, e descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) análise estrutural via Elementos Finitos;
- c) parametrização da superfície via NURBS;
- d) algoritmo de otimização SQP;
- e) análise de sensibilidade da estrutura via AD;
- f) acoplamento da otimização estrutural;

g) exemplos, comparações e considerações finais.

A etapa inicial, denominada **pesquisa bibliográfica**, teve por objetivo fornecer a base teórica e prática sobre todos os temas abordados ao longo do trabalho, como, por exemplo, elementos finitos, otimização, NURBS, AD e o processo de otimização estrutural em si.

A seguir, na segunda etapa, chamada **análise estrutural via Elementos Finitos**, abordou-se o problema estrutural. Implementou-se computacionalmente o algoritmo de um elemento finito CST axissimétrico para análise de problemas lineares estáticos para uma casca axissimétrica isotrópica, desconsiderando a não-linearidade física e geométrica da estrutura.

A etapa seguinte, intitulada **parametrização de superfície via NURBS**, serviu como base para descrever a geometria em estudo, a casca, de um modo matemático preciso e bem definido, no intuito de fornecer controle sobre a mudança de geometria.

A quarta etapa, chamada **algoritmo de otimização SQP**, visou a implementação computacional do algoritmo matemático de otimização do tipo SQP.

Após, foi realizada a próxima etapa, denominada **análise de sensibilidade da estrutura via AD**, a qual interligou a análise de sensibilidade da estrutura requerida pelo algoritmo SQP através da diferenciação do código da análise estrutural via elementos finitos, cuja geometria é descrita parametricamente via NURBS.

Na etapa seguinte, chamada **acoplamento da otimização estrutural**, realizou-se o acoplamento parcial e total da análise estrutural, da parametrização, do algoritmo de otimização e da análise de sensibilidade realizada nas etapas anteriores, objetivando obter a otimização estrutural completa.

Na etapa final, intitulada **exemplos, comparações e considerações finais**, foram realizados exemplos comparativos para validação do trabalho, comparando os resultados obtidos com os presentes em outras publicações, bem como uma análise crítica e discussão dos resultados encontrados, sendo ambos os aspectos incluídos nas considerações finais.

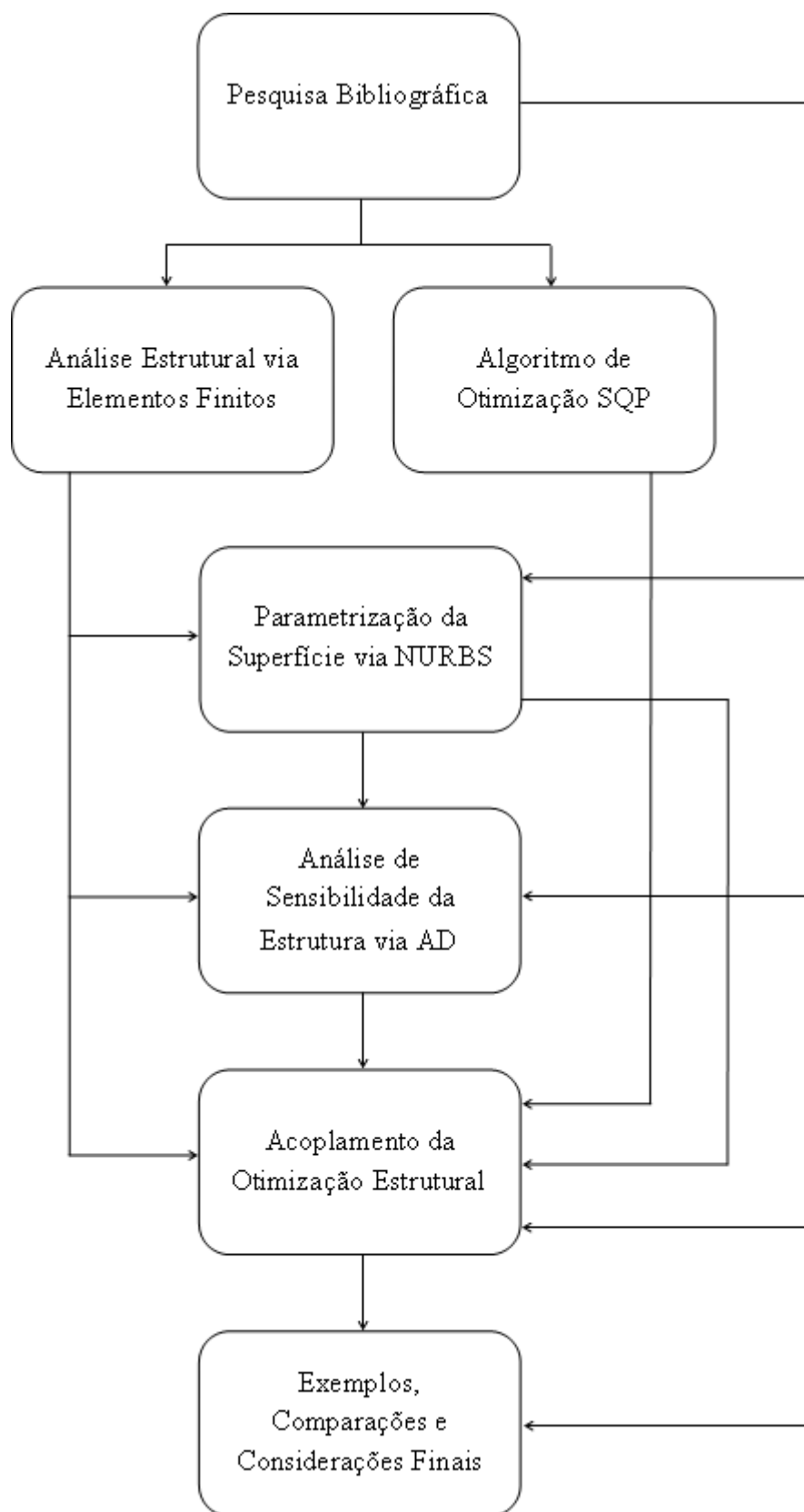


Figura 1: diagrama das etapas da pesquisa

### 3 ANÁLISE ESTRUTURAL

Neste capítulo, os fundamentos da elasticidade linear na mecânica do contínuo e os princípios fundamentais do método dos elementos finitos são abordados de forma resumida. Com base nestes fundamentos, o caso específico aplicado a estruturas axissimétricas é também detalhado neste capítulo.

#### 3.1 ELASTICIDADE LINEAR

O comportamento elástico é caracterizado pelas duas seguintes condições: que as componentes de tensão em um material sejam função unicamente das componentes de deformação e que o material possua a capacidade de recuperar completamente sua forma natural ao serem removidas as forças aplicadas pelo mesmo caminho. O comportamento elástico pode ser linear ou não-linear. Para muitos problemas de Engenharia, as condições de comportamento linear são suficientemente satisfeitas e a teoria da elasticidade linear oferece uma adequada e confiável aproximação (MASE; MASE, 1999, p. 244).

##### 3.1.1 Equações constitutivas

Simbolicamente, as equações constitutivas para o comportamento elástico são, na sua forma mais geral, denominadas equação de Hooke generalizada (MASE; MASE, 1999, p. 245), dadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{equação 1})$$

Onde:

$\sigma_{ij}$  = componentes do tensor de tensões de Cauchy;

$\varepsilon_{ij}$  = componentes do tensor de deformações específicas infinitesimais;

$C_{ijkl}$  = componentes do tensor de quarta ordem da rigidez do material.

A equação 1 pode ser reescrita utilizando sobrescritos gregos (com os índices variando de 1 a 6). Na forma matricial, ela se apresenta, de forma generalizada, contendo 36 constantes, na forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2})$$

Onde:

$\sigma_i$  = componentes do tensor de tensões de Cauchy;

$\varepsilon_i$  = componentes do tensor de deformações específicas infinitesimais;

$C_{ij}$  = constantes do material.

A matriz contendo as constantes  $C_{ij}$  da equação é simétrica, ou seja,  $C_{ij} = C_{ji}$ . Com isso, o número de constantes é reduzido para apenas 21. No caso do material apresentar isotropia e homogeneidade, isto é, se as propriedades elásticas do corpo descritas pelos coeficientes  $C_{ij}$  são as mesmas para qualquer conjunto de eixos de referência e em todos os pontos, as equações constitutivas possuem apenas duas constantes elásticas. Tais constantes são o módulo de Young,  $E$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$  (MASE; MASE, 1999, p. 249). Às vezes, as equações podem ser definidas em termos de  $G$  (módulo de cisalhamento) e  $K$  (módulo de *bulk*); outras vezes podem ser utilizadas as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ .

Assumindo que no material deformado o gradiente de deformações é pequeno em relação à unidade, tem-se que as componentes do tensor de deformações específicas infinitesimais  $\varepsilon_{ij}$  ficam definidas pela seguinte expressão (MASE; MASE, 1999, p. 244):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{equação 3})$$

Onde:

$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j =$  gradiente da componente do vetor deslocamento  $u_j$ .

Considerando que o material possua um comportamento elástico linear e seja isotrópico, é possível escrever as componentes do tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$  em termos das componentes do tensor de tensões  $\sigma_{ij}$  utilizando as constantes elásticas  $E$  e  $\nu$  (MASE; MASE, 1999, p. 261), da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right] \quad (\text{equação 4})$$

Onde:

$\delta_{ij}$  = delta de Kronecker;

$\sigma_{kk}$  = traço do tensor de componentes  $\sigma_{ij}$ ;

$E$  = módulo de Young;

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

As componentes do tensor de tensões  $\sigma_{ij}$  também podem ser reescritas em termos das componentes do tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$  utilizando as mesmas constantes elásticas para o mesmo comportamento elástico linear de uma material isotrópico (MASE; MASE, 1999, p. 259), da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij} \quad (\text{equação 5})$$

Onde:

$\varepsilon_{kk}$  = traço do tensor de componentes  $\varepsilon_{ij}$ .



Tanto a equação 4 quanto a equação 5 podem ser reescritas na forma matricial conforme a equação 6 e a equação 7, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 6})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 7})$$

### 3.1.2 Formulação e solução de problemas em elasticidade linear

A formulação e solução de problemas básicos em elasticidade linear requer que certas equações de campo sejam satisfeitas em todos os pontos interiores do corpo elástico em consideração, ao mesmo tempo que certas variáveis de campo satisfaçam condições específicas no contorno (MASE; MASE, 1999, p. 269).

Dado um corpo elástico de volume  $V$ , o qual está sujeito à ação de forças de volume de componentes  $b_i$  e de forças de superfície de componentes  $t_i$ . As componentes das forças de volume  $b_i$  atuam sobre todo o volume  $V$  do corpo e as componentes das forças de superfície  $t_i$  atuam sobre a parte  $S_\sigma$  da superfície  $S = S_\sigma \cup S_u$  que envolve o volume  $V$ . Os vínculos do corpo estão localizados na parte  $S_u$  da superfície. Todas as componentes de deslocamentos,

ou parte delas, estão prescritas (ou fixadas) na região  $S_u$ . As equações 3 e 4 (ou 5), as quais relacionam deformações com deslocamentos e tensões com deformação, respectivamente, são equações de campo, juntamente com a seguinte equação de equilíbrio, válida em todo o domínio  $V$  do corpo (MASE; MASE, 1999, p. 270):

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (\text{equação 8})$$

Onde:

$\sigma_{ji,j} = \partial\sigma_{ji} / \partial x_j =$  divergência do tensor de tensões de componentes  $\sigma_{ij}$ ;

$b_i =$  componente da força de volume na direção  $x_i$ .

Assume-se que as componentes das forças de volume  $b_i$  são conhecidas, de forma que a solução procurada para as 15 equações de campo (3 equações de equilíbrio, 6 equações relacionando componentes de deformações e deslocamentos e 6 equações constitutivas) sejam as 3 componentes de deslocamento  $u_i$ , as 6 componentes do tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  e as 6 componentes do tensor de deformações específicas  $\varepsilon_{ij}$ . Devem ser satisfeitas certas condições de contorno forçadas ou prescritas válidas em  $S_u$ , bem como certas condições de contorno naturais válidas na parte  $S_\sigma$  do contorno total  $S$  (MASE; MASE, 1999, p. 270). Tais condições são dadas pelas equações 9 e 10, respectivamente:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } S_u \quad (\text{equação 9})$$

Onde:

$\bar{u}_i =$  valor prescrito das componentes dos deslocamentos  $u_i$  na direção  $x_i$ .

$$t_i = \bar{t}_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{em } S_\sigma \quad (\text{equação 10})$$

Onde:

$n_j =$  componente segundo  $x_j$  do vetor unitário normal externo à superfície;

$t_i$  = componente da força atuante na superfície  $S$  que rodeia o volume  $V$  ;

$\bar{t}_i$  = valor prescrito da força  $t_i$  na direção  $x_i$  .

Substituindo-se a equação 3 na equação 4 (ou 5) e substituindo esse resultado na equação de equilíbrio (equação 8), obtém-se três equações parciais de segunda ordem, chamadas de equações de Navier. Se uma solução pode ser determinada para estas equações, que também satisfazem as condições de contorno (equações 9 e 10), então este resultado pode ser substituído nas equações 3 e 4 para obter-se as componentes de deformações e tensões (MASE; MASE, 1999, p. 271). As equações de Navier são dadas por:

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{i,jj} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (\text{equação 11})$$

Onde:

$$u_{i,jj} = \partial^2 u_i / \partial x_j^2 ;$$

$$u_{j,ji} = \partial^2 u_j / \partial x_i \partial x_j .$$

A solução também pode ser formulada em termos das componentes de tensões obtidas a partir das equações de compatibilidade, obtendo-se as equações de Beltrami-Michell, que é uma forma de solução menos prática. Para problemas mais complexos deve recorrer-se a métodos numéricos, tais como o método dos elementos finitos (MASE; MASE, 1999, p. 271).

### 3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As definições básicas da elasticidade linear podem ser utilizadas no método dos elementos finitos. Tal aplicação requer a utilização de princípios básicos como o princípio dos trabalhos virtuais conjuntamente com as equações que governam o problema.

### 3.2.1 Princípio dos trabalhos virtuais

Assumindo que um corpo sólido contínuo esteja em equilíbrio, se um deslocamento virtual de componentes  $\delta u_i$  que respeite as condições de contorno é imposto, então, de acordo com a equação 8, tem-se (HUGHES, 2000, p. 78):

$$\int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_V b_i \delta u_i dV = 0 \quad (\text{equação 12})$$

Na expressão anterior,  $V$  é o domínio em estudo, cujo contorno é denominado  $S$ . De acordo com Hughes (2000, p. 79), utilizando o teorema da divergência de Gauss, o qual relaciona uma integral de superfície a uma integral de volume, e o fato de que  $\frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \delta \varepsilon_{ij}$ , surge o princípio dos trabalhos virtuais, o qual demonstra que, no equilíbrio, o trabalho realizado pelas forças externas durante um deslocamento virtual deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças internas:

$$\delta W_I = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS = \delta W_E \quad (\text{equação 13})$$

Onde:

$\delta W_I$  = trabalho interno;

$\delta W_E$  = trabalho externo;

$\delta \varepsilon_{ij}$  = componentes de deformações devidas aos deslocamentos virtuais.

Em forma inversa, poder-se-ia demonstrar que se os trabalhos virtuais externos e internos são iguais, o corpo está em equilíbrio, ou seja, que a equação 8, com as considerações de contorno dadas pela equação 9 e 10, é satisfeita.

### 3.2.2 Interpolação e funções de forma

Para problemas arbitrários de contorno, a equação 13 não é analiticamente fácil de resolver. Para contornar este problema, o contínuo é discretizado em um número finito de elementos. A idéia de discretizar uma estrutura em elementos finitos é motivada no sentido de procurar uma solução discreta nodal e interpolar tanto a geometria quanto os deslocamentos dos elementos entre os nós no lugar de buscar por uma função contínua para o campo de deslocamentos através do domínio. Para obter solução em pontos nodais, um sistema de equações deve ser resolvido (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 19).

O conceito de funções de forma é introduzido para interpolar o elemento através dos graus de liberdade nodais. A idéia básica é de que cada nó pertencente a um elemento possui uma função de forma correspondente que vale 1 (e todas as outras 0) em seu nó. Para coordenadas não pertencentes a um nó, cada função de forma possui um valor positivo e a soma de todas as funções de forma é igual a 1 (considerando as funções lineares). Se a geometria aproximada no interior de um elemento é denotada por  $\mathbf{x}$ , a geometria é interpolada através da matriz das funções de forma  $\mathbf{N}$  e as coordenadas nodais,  $\mathbf{x}_i$ , na forma (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 21):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_i \mathbf{x}_i \quad (\text{equação 14})$$

Onde:

$\mathbf{x}_i$  = coordenadas nodais;

$\mathbf{N}_i$  = componentes da matriz de funções de forma  $\mathbf{N}$ .

Para elementos isoparamétricos, tanto a geometria quanto os deslocamentos no interior dos elementos são interpolados pela mesma função de forma. Então, os deslocamentos internos são interpolados através de deslocamentos nodais por (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 21):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i \quad (\text{equação 15})$$

Onde:

$\mathbf{u}_i$  = componentes dos deslocamentos nodais.

As deformações no interior do elemento podem ser determinadas através das derivadas da equação 15. O termo  $\mathbf{B}$ , o qual é a matriz que relaciona componentes de deformação e deslocamento obtida através das derivadas das funções de forma  $\mathbf{N}$  com respeito às coordenadas globais, é inserido (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 22), ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{equação 16})$$

Onde:

$\boldsymbol{\varepsilon}$  = vetor que contém as componentes de deformação no interior do elemento;

$\mathbf{B}$  = matriz que vincula componentes de deslocamentos e deformações específicas.

### 3.2.3 Equação de equilíbrio para um elemento finito

Partindo-se das equações do princípio dos trabalhos virtuais e da equação de Hooke generalizada, pode-se deduzir a equação de equilíbrio para um elemento finito, que é dada pela seguinte expressão (HUGHES, 2000, p. 90):

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{d}^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \mathbf{p} \quad (\text{equação 17})$$

Onde:

$\mathbf{C}$  = matriz constitutiva do material;

$\mathbf{b}$  = vetor de forças de volume;

$\mathbf{t}$  = vetor de forças de superfície;

$\mathbf{p}$  = vetor de forças concentradas;

$\mathbf{d}^e$  = vetor de deslocamentos do elemento  $e$ .

É possível reescrever a equação 17, inserindo-se o termo  $\mathbf{K}^e$ , a matriz de rigidez de um elemento e o termo  $\mathbf{r}^e$ , que é o vetor de cargas nodais equivalentes. Desta forma, obtém-se, de forma mais compacta (HUGHES, 2000, p. 90-91) a seguinte expressão matricial:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{r}^e \quad (\text{equação 18})$$

Onde:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (\text{matriz de rigidez do elemento } e);$$

$$\mathbf{r}^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \mathbf{p} \quad (\text{vetor de cargas nodais do elemento } e).$$

O sistema global de equações lineares a ser resolvido, após montagem de  $\mathbf{K}^e$  e  $\mathbf{r}^e$  e de serem aplicadas as condições de contorno correspondentes, é então:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{r} \quad (\text{equação 19})$$

Onde:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N^e} \mathbf{K}^e \quad (\text{matriz de rigidez global});$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{N^e} \mathbf{r}^e \quad (\text{vetor de cargas global});$$

$\mathbf{d}$  = vetor coluna contendo todos os graus de liberdade nodais;

$N^e$  = número de elementos.

A partir do vetor  $\mathbf{d}$  pode-se calcular as componentes de deformações específicas e de tensões utilizando as relações entre  $\varepsilon_{ij}$  e  $u_i$ , e entre  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$ .

### 3.3 AXISSIMETRIA

A análise de sólidos de revolução tridimensional pode ser feita usando-se como referência um sistema de coordenadas cilíndricas. No caso em que o corpo, as cargas e as condições de contorno são simétricas em relação a um eixo, tem-se um problema axissimétrico. O problema matemático se apresenta de forma muito similar aos casos de estado plano de tensão e de deformação, sendo o problema também bidimensional. Por simetria, as duas componentes de deslocamento em cada seção do corpo ao longo de seu eixo de simetria definem completamente o estado de deformação e, portanto, o estado de tensões também. Esta seção transversal é mostrada na figura 2. Os termos  $r$  e  $z$  denotam, respectivamente, as coordenadas radiais e axiais de um ponto, sendo  $u$  e  $v$  as respectivas componentes de deslocamentos. (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 112). As características de um elemento triangular linear de 3 nós são descritas a seguir.

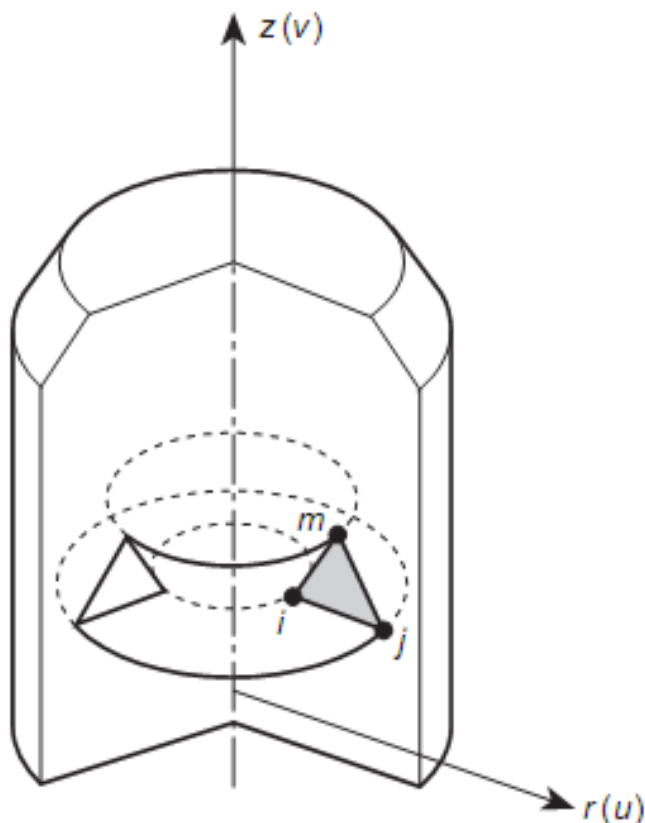


Figura 2: elementos de um sólido axissimétrico  
(ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 113)



### 3.3.1 Funções de deslocamento

Utilizando um elemento triangular linear de três nós, sendo seus nós  $i$ ,  $j$  e  $m$  numerados no sentido anti-horário, define-se os deslocamentos nodais no nó  $i$ , por exemplo, através de suas duas componentes pela equação 20 e os deslocamentos dos três nós do elemento pela equação 21 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 112), da seguinte forma:

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 20})$$

Onde:

$\mathbf{a}_i$  = deslocamentos no nó  $i$ .

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 21})$$

Sendo:

$\mathbf{a}^e$  = deslocamentos do elemento  $e$ .

Pode-se utilizar um polinômio linear para definir unicamente os deslocamentos no domínio de um elemento. Os polinômios da forma  $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$  e  $v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$  devem ser solucionados resolvendo-se dois conjuntos de três equações simultâneas que surgem quando as coordenadas nodais são inseridas e os deslocamentos igualados aos deslocamentos nodais apropriados. Adotando-se o termo  $N_i$  dado pela equação 22, o campo de deslocamentos é dado em termos da equação 23 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 113):

$$N_i = \frac{\alpha_i + \beta_i r + \gamma_i z}{2\Delta} \quad (\text{equação 22})$$

Onde:

$\alpha_i = r_j z_m - r_m z_j$  em ordem cíclica;

$\beta_i = z_j - z_m$  em ordem cíclica;

$\gamma_i = r_m - r_j$  em ordem cíclica;

$\Delta =$  área do elemento;

$r =$  coordenada radial;

$z =$  coordenada axial.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\mathbf{I}N_i \quad \mathbf{I}N_j \quad \mathbf{I}N_m] \mathbf{a}^e \quad (\text{equação 23})$$

Onde:

$\mathbf{I} =$  matriz identidade.

### 3.3.2 Deformações

Quatro componentes de deformações específicas devem ser consideradas. A figura 3 ilustra e define estas deformações e as tensões associadas. Estas são, de fato, todas as deformações não nulas possíveis em deformações axissimétricas.

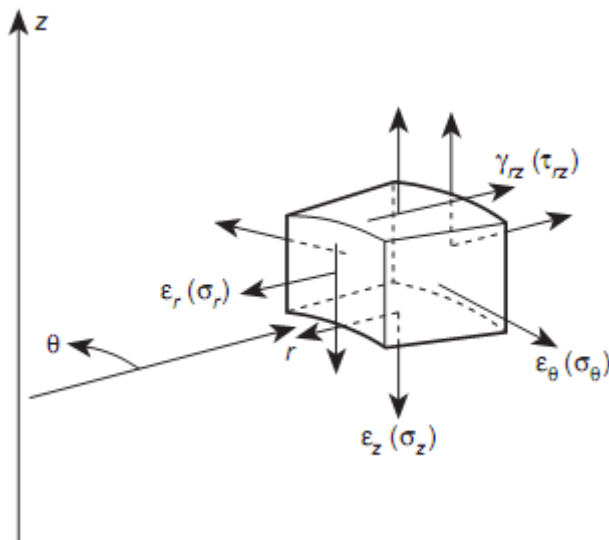


Figura 3: tensões e deformações envolvidas na análise de sólidos axissimétricos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 114)

O vetor de deformações definido abaixo lista as componentes de deformações envolvidas e as define em termos dos deslocamentos de um ponto (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 114) segundo a equação 24:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 24})$$

Utilizando as funções de deslocamentos definidas pelas equações 22 e 23, obtém-se a equação 25, na qual a matriz  $\mathbf{B}_i$  é dada pela equação 26 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 114):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e = [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m] \mathbf{a}^e \quad (\text{equação 25})$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \frac{\alpha_i}{r} + \beta_i + \frac{\gamma_i z}{r} & 0 \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad (\text{equação 26})$$

### 3.3.3 Matriz constitutiva do material

A matriz constitutiva do material  $\mathbf{C}$ , a qual relaciona as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e as tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , é apresentada na forma geral pela equação 27. Para o caso de um material isótropo, a equação 28 explicita  $\mathbf{C}$  em termos do módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 117):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{equação 27})$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 28})$$

### 3.3.4 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento  $ijm$  pode ser calculada a partir da equação 17. Como a integral sobre o volume do elemento deve ser calculada considerando a axissimetria, a equação da matriz de rigidez do elemento é calculada na forma (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 117):

$$\mathbf{K}_{ij}^e = 2\pi \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j r dr dz \quad (\text{equação 29})$$

Esta integração não pode ser realizada explicitamente pois a matriz  $\mathbf{B}$  depende das coordenadas. Uma alternativa para contornar isto, é utilizar uma integração numérica. O procedimento de integração numérica mais simples consiste em calcular todas as quantidades para um ponto localizado no centróide do elemento (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 117):

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_m}{3} \quad (\text{equação 30})$$

Onde:

$\bar{r}$  = coordenada radial no centróide do elemento;

$\bar{z}$  = coordenada axial no centróide do elemento.

Desta forma, utilizando a equação 30 na equação 29, a integral da matriz de rigidez do elemento é aproximada pela equação:

$$\mathbf{K}_{ij}^e = 2\pi \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}_j \bar{r} \Delta \quad (\text{equação 31})$$

Onde:

$\bar{\mathbf{B}}$  = matriz deslocamentos-deformação calculado no centróide do elemento.

### 3.3.5 Forças nodais externas

É importante salientar que no caso axissimétrico as forças nodais representam um efeito combinado da força atuando sobre toda a circunferência do círculo formado pelo nó do elemento no entorno do eixo de revolução. Portanto, a força externa que deve ser introduzida no cálculo é (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 118):

$$\mathbf{p}_i^e = \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\pi r \bar{R} \\ 2\pi r \bar{Z} \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 32})$$

Onde:

$\bar{R}$  = componente radial de força por unidade de comprimento na circunferência de um nó;

$\bar{Z}$  = componente axial de força por unidade de comprimento na circunferência de um nó.

### 3.3.6 Forças de volume distribuídas

Forças de volume distribuídas, tais como aquelas devido à gravidade (se atuando ao longo do eixo  $z$ ), forças centrífugas em componentes de máquinas rotacionais ou poro pressões frequentemente aparecem em problemas axissimétricos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 117). Denota-se tais forças por unidade de volume do material como:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 33})$$

Onde:

$b_r$  = força de volume na direção  $r$  ;

$b_z$  = força de volume na direção  $z$  .

Utilizando-se a equação 17 e calculando-se a integral no centróide do elemento, tal como para a matriz de rigidez, pode-se calcular a força concentrada correspondente em cada nó do elemento de forma aproximada (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000, p. 117):

$$\mathbf{p}_i^e = 2\pi \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} \frac{\bar{r}\Delta}{3} \quad (\text{equação 34})$$

## 4 OTIMIZAÇÃO

Matematicamente, otimização é a minimização, ou maximização, de uma função objetivo sujeita a certas restrições sobre suas variáveis (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 2). A teoria matemática que embasa o estudo da otimização é apresentado de forma resumida neste capítulo. Um problema de otimização pode ser formulado genericamente na seguinte forma:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0 & i \in \mathcal{E} \\ c_i(\mathbf{x}) \geq 0 & i \in \mathcal{J} \end{cases} \quad (\text{expressão 1})$$

Onde:

$\mathbf{x}$  = vetor de variáveis;

$f$  = função objetivo;

$c_i$  = funções de restrição;

$\mathcal{E}$  = conjunto de índice das restrições de igualdade;

$\mathcal{J}$  = conjunto de índice das restrições de desigualdade.

De acordo com Nocedal e Wright (2006, p. 5-8), problemas expressos da forma geral como acima, podem ser classificados de acordo com:

- a) os tipos de variáveis utilizadas na otimização (contínuas ou discretas);
- b) o tipo de otimização (determinística ou estocástica);
- c) o tipo de otimização quanto às restrições impostas (com ou sem restrições);
- d) a natureza da função objetivo e restrições (linear, não-linear, convexa);
- e) o número de variáveis (grande, pequeno);
- f) a suavidade das funções (diferenciáveis ou não-diferenciáveis).

No presente trabalho, será tratada apenas a otimização no enfoque determinístico utilizando variáveis contínuas com restrições. Tanto a função objetivo quanto as restrições abordadas

possuem comportamento não-linear. O número de variáveis utilizadas é variável, sendo em geral pequeno a médio e as funções são diferenciáveis.

#### 4.1 TEORIA DA OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES

Um ponto  $\mathbf{x}$  que satisfaz todas as restrições de desigualdade e igualdade é chamado de viável e a região definida pela interseção de todas as funções de restrição é chamada de região viável. Uma restrição de desigualdade define dois subdomínios pela sua fronteira: um subdomínio viável e outro inviável. Um ponto sobre esta fronteira define tal restrição como sendo ativa, um ponto contido no subdomínio viável define tal restrição como sendo inativa e um ponto contido no subdomínio inviável define tal restrição como sendo violada. A restrição de igualdade satisfeita define tal restrição como ativa (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 3-4).

Sobre a expressão 1 é definido o conjunto viável  $\Omega$  (região viável) que representa o conjunto dos pontos  $\mathbf{x}$  que satisfazem as restrições (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 305), da forma:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \mid c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}; \quad c_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{J} \} \quad (\text{equação 35})$$

Onde:

$\Omega$  = conjunto viável.

O ponto de mínimo  $\mathbf{x}^*$  para o problema de otimização pode ser uma solução local, se  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  e há uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$  tal que  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$  para  $\mathbf{x} \in \mathcal{N} \cap \Omega$ . Se o ponto de mínimo  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  e há uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$  tal que  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{N} \cap \Omega$  com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ , então é dito que  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local estrito (NOCEDAL; WRITH, 2006, p. 306).

Define-se o conjunto ativo  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  sobre todo  $\mathbf{x}$  viável como a união do conjunto de índices  $\mathcal{E}$  com os índices das restrições de desigualdade ativas (NOCEDAL; WRITH, 2006, p. 320), produzindo então:



$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{J} \mid c_i(\mathbf{x}) = 0\} \quad (\text{equação 36})$$

Onde:

$\mathcal{A}(\mathbf{x})$  = conjunto ativo.

Usualmente se faz uma consideração, chamada de qualificação das restrições, para se assegurar que não ocorra um comportamento degenerado no valor de  $\mathbf{x}$  em questão. Dado o ponto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  e o conjunto ativo  $\mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , é dito que a qualificação das restrições linearmente independente (LICQ, do acrônimo do inglês *Linear Independence Constraint Qualification*) é assegurada se os gradientes das restrições do conjunto ativo  $\{\nabla c_i(\mathbf{x}^*), i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)\}$  forem linearmente independentes (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 320). Podem-se estabelecer relações fundamentais para a solução do problema de otimização com restrições avaliando-se as condições de ponto ótimo de primeira e de segunda ordem.

### 4.1.1 Condições de ponto ótimo de primeira ordem

As condições necessárias definidas no teorema das condições necessárias de primeira ordem são assim chamadas porque elas estão relacionadas com as propriedades dos gradientes (derivadas de primeira ordem dos vetores) da função objetivo e restrições. Tal teorema supõe que  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  é um mínimo local da expressão 1 se é assegurado a LICQ em  $\mathbf{x}^*$ . Neste caso, existe um vetor multiplicador de Lagrange,  $\lambda^*$ , com componentes  $\lambda_i^*$ ,  $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J}$ , tal que as seguintes condições são satisfeitas em  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0} & \\ c_i(\mathbf{x}^*) = 0 & \forall i \in \mathcal{E} \\ c_i(\mathbf{x}^*) \geq 0 & \forall i \in \mathcal{J} \\ \lambda_i^* \geq 0 & \forall i \in \mathcal{J} \\ \lambda_i^* c_i(\mathbf{x}^*) = 0 & \forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J} \end{array} \right. \quad (\text{condições 1})$$

Onde:

$\mathbf{x}^*$  = mínimo local;

$\lambda_i$  = multiplicadores de Lagrange;

$\lambda^*$  = multiplicadores de Lagrange em  $\mathbf{x}^*$ ;

$\mathcal{L}$  = Lagrangeano ou função Lagrangeana.

Tais condições são conhecidas como as condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou condições KKT e  $\mathcal{L}$ , o Lagrangeano (ou função Lagrangeana) é definido como (NOCEDAL; WRITH, 2006, p. 321):

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(\mathbf{x}) \quad (\text{equação 37})$$

Portanto, os vetores gradientes de todas as restrições no ponto  $\mathbf{x}^*$  devem ser linearmente independentes para que  $\mathbf{x}^*$  seja um mínimo local. A interpretação geométrica das condições KKT é que o gradiente da função objetivo é uma combinação linear dos gradientes das equações de restrições no ponto candidato a mínimo, sendo os multiplicadores de Lagrange os escalares de proporcionalidade destas combinações lineares (ARORA, 1989, p. 119).

### 4.1.2 Condições de ponto ótimo de segunda ordem

A necessidade de usar derivadas de segunda ordem para verificar a existência de um ponto de ótimo ocorre quando nada mais se pode saber sobre o crescimento ou decréscimo da função ao longo da direção de seu gradiente. Tais condições se dividem em condições necessárias e condições suficientes de segunda ordem (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 330).

#### 4.1.2.1 Condições necessárias de segunda ordem

Supondo que  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  é um mínimo local da expressão 1, sendo assegurado a LICQ em  $\mathbf{x}^*$ , e se  $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$  é um vetor multiplicador de Lagrange tal que as condições KKT são satisfeitas,

então, o Hessiano da função Lagrangeana  $\nabla_{xx}\mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)$  deve ser positivo semi-definido ou positivo definido (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 332).

#### 4.1.2.2 Condições suficientes de segunda ordem

Supondo que  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  é um ponto viável e que existe um vetor multiplicador de Lagrange  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  tal que as condições KKT são satisfeitas, então, se o Hessiano da função Lagrangeana  $\nabla_{xx}\mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)$  for positivo definido,  $\mathbf{x}^*$  será um mínimo local estrito (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 333).

## 4.2 PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL

A partir de um ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ , os algoritmos de otimização geram uma sequência de iterações  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$  que termina quando nenhum progresso a mais pode ser realizado ou quando este ponto parece ser a solução aproximada com suficiente acurácia. Na decisão de como se mover de uma iteração  $\mathbf{x}_k$  para uma próxima iteração, os algoritmos usam informações de  $f$ , de  $\mathbf{x}$  e, possivelmente, também informações sobre iterações recentes em  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ . Estes algoritmos utilizam estas informações para encontrar uma nova iteração  $\mathbf{x}_{k+1}$  com um valor de  $f$  menor do que na iteração anterior. Existem algoritmos não monótonos que não insistem no decréscimo de  $f$  em todos os passos, mas requerem que  $f$  decresça após um número  $m$  prescrito de iterações (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 30-31).

Um dos métodos mais eficientes para solucionar problemas de otimização não-linear com restrições é o método da Programação Quadrática Sequencial (SQP), o qual gera passos para resolver subproblemas quadráticos (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 529). O método SQP surge da aplicação do método de Newton à função Lagrangeana e vem dado por:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k) & \nabla_{\lambda x}\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k) \\ \nabla_{x\lambda}\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k) & \nabla_{\lambda\lambda}\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \Delta\lambda_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k) \\ \nabla_\lambda\mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k) \end{bmatrix} \quad (\text{equação 38})$$

Onde:

$\delta_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$  = direção de busca;

$\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$  = direção de busca;

$\mathbf{x}_k$  = valor de  $\mathbf{x}$  na iteração  $k$  ;

$\lambda_k$  = valor de  $\lambda$  na iteração  $k$  .

Uma generalização para problemas em que existam restrições de igualdade e desigualdade resulta num sistema de inequações. Tal caso pode ser escrito da seguinte forma (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 533), na qual a função objetivo é aproximada a uma forma quadrática e as restrições, tanto as de igualdade como as de desigualdade, a uma forma linear:

$$\begin{aligned} \min_{\delta_k} \quad & \frac{1}{2} \delta_k^T \mathbf{W} \delta_k + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \delta_k \\ \text{sujeito a} \quad & c_i(\mathbf{x}_k) + c_i(\mathbf{x}_k)^T \delta_k = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ \text{e} \quad & c_i(\mathbf{x}_k) + c_i(\mathbf{x}_k)^T \delta_k \geq 0, \quad i \in \mathcal{J} \end{aligned} \quad (\text{expressão 2})$$

Na expressão 2, assume-se que  $\mathbf{W}$  seja uma aproximação do Hessiano positivo definido  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \lambda_k)$ . Sobre este problema, aplica-se um algoritmo de solução para problemas quadráticos o qual permite a obtenção da direção de busca  $\delta_k$ . Sendo  $\delta_k$  a solução do problema descrito pela expressão 2, utiliza-se um método para a obtenção de um novo ponto  $\mathbf{x}_{k+1}$  (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 533). As duas estratégias mais conhecidas e utilizadas são a busca linear e a região viável. Apenas a busca linear é tratada aqui por ser o método mais utilizado.

Na estratégia de busca linear, o algoritmo escolhe uma direção  $\delta_k$  e busca ao longo desta, a partir da iteração atual  $\mathbf{x}_k$ , uma nova posição com um menor valor funcional. A distância percorrida sobre a direção  $\delta_k$  pode ser aproximada pela solução de uma minimização unidimensional (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 30). Então, sendo  $\alpha_k$  o comprimento deste passo, tem-se:

$$\min_{\alpha_k > 0} f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \delta_k) \quad (\text{equação 39})$$

A solução da equação 39 resulta no máximo benefício na direção  $\delta_k$ , mas uma minimização exata é custosa e desnecessária. Em vez disto, o algoritmo de busca linear gera um número limitado de passos até encontrar um ponto que aproxime o mínimo da equação 39. Sobre o novo ponto, uma nova direção e um novo comprimento do passo são calculados e o processo é repetido. Cada novo ponto  $\mathbf{x}_k$  é calculado então por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta_k \quad (\text{equação 40})$$

Enquanto o ótimo não é encontrado, o Hessiano  $\mathbf{W}$  é atualizado de acordo com o método **BFGS** (nome este devido às iniciais de seus inventores Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno), sendo este um algoritmo que gera uma aproximação positiva definida de  $\mathbf{W}$  sempre que a aproximação inicial de  $\mathbf{W}$  for também positiva definida. **BFGS** é um método Quase-Newton, que tem como característica o fato de não calcular o Hessiano de forma exata e sim aproximá-lo com base nos gradientes da iteração atual e anteriores. Um resumo da sequência de passos de um algoritmo SQP é descrito abaixo (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 532):

- a) obter os vetores  $\delta$  e  $\lambda$  no ponto  $\mathbf{x}_0$  a partir da solução do subproblema de programação quadrática (expressão 2);
- b) verificar os critérios de parada  $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\delta_k\| < tol_1$  (o qual verifica o decréscimo de  $f$  da direção  $\delta$ ),  $\max c_i(\mathbf{x}_k) < tol_2$  (o qual verifica a restrição mais violada) e  $\sum c_i(\mathbf{x}_k) < tol_3$  (o qual verifica a soma das restrições violadas);
- c) fazer a busca linear sobre a direção  $\delta_k$  (equação 39), determinando assim o passo a ser efetuado;
- d) atualizar a aproximação do Hessiano da função Lagrangeana (usando o método **BFGS**);
- e) voltar ao passo (a) com um novo  $\mathbf{x}_k$ .

O método utilizado para calcular o gradiente influencia o resultado final obtido pelo algoritmo de otimização. Se um método impreciso for utilizado para estimar os gradientes, então o algoritmo pode terminar em um ponto não crítico.

## 5 NURBS

Otimização de forma significa otimização da geometria. As variáveis características do processo de otimização são, portanto, parâmetros geométricos que definem a forma da estrutura. O número de variáveis pode ser reduzido drasticamente sem perda de generalidade se conceitos de CAGD (*Computer Aided Geometry Design*) forem utilizados. Nestes métodos, formas livres de geometrias podem ser descritas através das coordenadas de alguns pontos chamados de **pontos de controle**, os quais podem ser escolhidos como variáveis (RAMM et al., 1993, p. 103).

NURBS é o padrão utilizado para descrever e modelar curvas e superfícies em CAGD e diversas outras aplicações gráficas computacionais. Para compreender completamente toda a flexibilidade que NURBS pode prover, um aprofundamento do conhecimento matemático relativo ao tema torna-se necessário (ROGERS, 2001, p. 1). A descrição matemática de NURBS é resumida a seguir, baseada na obra de Piegl e Tiller (1997).

### 5.1 FUNÇÕES DE BASE B-SPLINE

Seja  $\mathbf{u} = \{\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_m\}$  uma sequência de números reais crescentes, onde os  $\hat{u}_i$  são os nós e  $\mathbf{u}$  é o vetor de nós, a  $i$ -ésima função de base B-Spline de grau  $p$  (ordem  $p+1$ ), denotada por  $N_{i,p}(u)$ , é definida (PIEGL; TILLER, 1997, p. 50) como:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } \hat{u}_i \leq u \leq \hat{u}_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{expressão 3})$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - \hat{u}_i}{\hat{u}_{i+p} - \hat{u}_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{\hat{u}_{i+p+1} - u}{\hat{u}_{i+p+1} - \hat{u}_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Onde:

$u$  = parâmetro independente normalizado  $\in [0,1]$ ;

$N_{i,p}(u)$  =  $i$ -ésima função de base B-Spline de grau  $p$ ;

$\hat{u}_i$  = nós de  $\mathcal{U}$ .

## 5.2 DEFINIÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE NURBS

Uma superfície NURBS  $\mathbf{S}$  de grau  $p$  na direção  $u$  e grau  $q$  na direção  $v$  é um vetor bivalente racional por partes da forma (PIEGL; TILLER, 1997, p. 128):

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (\text{equação 41})$$

Onde:

$u, v$  = parâmetros independentes normalizados  $\in [0, 1]$ ;

$\mathbf{S}$  = superfície NURBS;

$\mathbf{P}_{i,j}$  = ponto de controle;

$w_{i,j}$  = pesos.

Os pontos  $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$  forma uma rede de controle e as funções de base B-Spline são definidas sobre os vetores de nós  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ . Os vetores de nós vêm dados por:

$$\mathcal{U} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \hat{u}_{p+1}, \dots, \hat{u}_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (\text{equação 42})$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \hat{v}_{q+1}, \dots, \hat{v}_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\} \quad (\text{equação 43})$$

Onde:

$\mathcal{U}, \mathcal{V}$  = vetores de nós;

$\hat{v}_i = \text{nós de } \mathcal{V}$ ;

$r = n + p + 1$ ;

$s = m + q + 1$ .

Introduzindo a função de base racional  $R_{i,j}(u, v)$  definida pela equação 45 pode-se reescrever a equação que descreve uma superfície NURBS (equação 41) segundo a equação 46 (PIEGL; TILLER, 1997, p. 128):

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}} \quad (\text{equação 45})$$

Onde:

$R_{i,j}$  = função de base racional.

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (\text{equação 46})$$

As propriedades das superfícies NURBS são dadas em Piegl e Tiller, 1997, p. 128-131.



## 6 DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA

Segundo Camprubí et al. (2004, p. 2551), em otimização de forma de estruturas, a qualidade da análise estrutural e de sensibilidade é de crucial importância. Dois fatores principais determinam a qualidade destas análises: a formulação de elementos finitos e a técnica da análise de sensibilidade.

A técnica da análise de sensibilidade é normalmente distinguida entre análise de sensibilidade analítica, semi-analítica ou numérica. A técnica numérica, baseada em um esquema de diferenças finitas, é simples de implementar, mas computacionalmente custosa e perde precisão quando a curvatura da função é muito pronunciada. Verma (2009, p. 11), comenta que o uso da diferenciação automática (AD) é mais adequado para a análise de sensibilidade da estrutura, ao invés de métodos convencionais de diferenciação (como diferenças finitas) principalmente porque a AD gera derivadas com precisão analítica para o código fonte. Isto elimina a presença qualquer erro de truncamento associado a um método de diferenciação, além de ser computacionalmente mais eficiente.

Há dois tipos básicos de diferenciação possíveis através de AD: o modo *forward* e o modo *reverse*. O modo se refere à direção em que são propagadas as derivadas ao longo do cálculo das mesmas. Tipicamente, a AD fornece a diferenciação de funções vetoriais numericamente sem nenhum erro de truncamento associado, em detrimento a um meio que utilize uma expressão simbólica (GRIEWANK; WALTHER, 2009, p. 23).

A AD se baseia na regra da cadeia para calcular as derivadas com relação às variáveis de entrada de funções definidas por um programa computacional. Toda função, não importa o quão complexa seja, pode ser calculada segundo uma série finita de passos elementares. O valor de uma função calculada pelo programa é simplesmente uma composição destas funções elementares (VERMA, 2000, p. 804).

### 6.1 DIFERENCIAÇÃO DE ALGORITMOS

Representando cada etapa de um algoritmo numérico por uma função, a composição destas funções é diferenciável pelo uso da regra da cadeia. O cálculo das derivadas resulta em um

produto múltiplo de matrizes cada um pertencendo a um passo particular do algoritmo. Seja então  $\mathcal{H}$  uma função definida por um algoritmo numérico cujo domínio  $X \in \mathbb{R}^n$  e sua imagem  $Y \in \mathbb{R}^m$  (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 7):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ X &\mapsto Y \end{aligned} \quad (\text{expressão 4})$$

Onde:

$\mathcal{H}$  = função definida por um algoritmo numérico;

$X$  = variáveis independentes;

$Y$  = variáveis dependentes;

$\mathbb{R}^n$  = espaço real  $n$ -dimensional.

Uma vez que o algoritmo pode ser extenso e complexo, pode ser difícil encontrar uma representação explícita de  $\mathcal{H}$ . Entretanto, um algoritmo numérico pode ser decomposto em  $K \in \mathbb{N}$  passos, cada um deles contendo uma representação explícita (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 7):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^l : \mathbb{R}^{n_{l-1}} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_l} \quad (l=1,\dots,K) \\ Z^{l-1} &\mapsto Z^l \end{aligned} \quad (\text{expressão 5})$$

Onde:

$\mathcal{H}^l$  =  $l$ -ésimo passo que define um algoritmo numérico;

$Z^l$  = variáveis intermediárias;

$\mathbb{N}$  = conjunto dos números inteiros.

Nesta representação matemática, as componentes das variáveis  $Z^l$  são diferentes das variáveis no código numérico, sendo definido  $Z^0 \triangleq X$ ,  $Z^K \triangleq Y$ . As variáveis numéricas podem alterar seus valores de um passo para outro durante um cálculo de  $\mathcal{H}(X_0)$ . Em contraste, o vetor  $Z^l$  contém todas as  $n_l$  resultados intermediários que são válidos após o  $l$ -

ésimo passo do algoritmo. Neste contexto, um resultado pode ser tomado como válido enquanto ele é mantido em alguma unidade de memória do computador. Portanto, para  $p \neq q$ , as componentes de  $Z^p$  e  $Z^q$  podem ser o valor da mesma variável em diferentes passos do algoritmo (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 7).

A composição  $\mathcal{H}$  de funções diferenciáveis  $\mathcal{H}^l$  é escrita, utilizando o operador de composição de funções, como (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 8):

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}) = \bigodot_{l=1}^K \mathcal{H}^l(\mathbf{X}) \triangleq (\mathcal{H}^K \circ \dots \circ \mathcal{H}^1)(\mathbf{X}) \quad (\text{equação 47})$$

Onde:

$\bigodot_{l=1}^K$  = operador de composição de funções.

A composição  $\mathcal{H}$  pode ser diferenciável de acordo com a regra da cadeia. Para uma função diferenciável  $\mathcal{H}$ , seu Jacobiano calculado no ponto  $X_0$  é definido pela equação 48 e, aplicando a regra da cadeia, a equação 49 é encontrada (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 8):

$$A_{ij}(X_0) \triangleq \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_j} \right|_{X=X_0} \quad i = (1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (\text{equação 48})$$

Onde:

$A_{ij}$  = Jacobiano.

$$A(X_0) = \left. \frac{\partial \mathcal{H}^K}{\partial Z^{K-1}} \right|_{Z^{K-1} = \bigodot_{l=1}^{K-1} \mathcal{H}^l(X_0)} \cdot \dots \cdot \left. \frac{\partial \mathcal{H}^1}{\partial Z^0} \right|_{Z^0 = X_0} \quad (\text{equação 49})$$

As estratégias de diferenciação são baseadas na multiplicação associativa de matrizes. Computacionalmente, as duas estratégias mais comuns que surgem neste contexto são: multiplicação frontal (*forward mode*) e multiplicação reversa (*reverse mode*) (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 8).

## 6.2 MODO *FORWARD* DE PROPAGAÇÃO DE TANGENTES

No modo *forward*, as multiplicações de matrizes são calculadas na mesma ordem que a composição da função diferenciável, possuindo todos os resultados intermediários  $n$  colunas, ou seja (ESPATH et al. 2010, p. 731):

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}^K}{\partial Z^{K-1}} \cdot \left( \dots \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{H}^3}{\partial Z^2} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{H}^2}{\partial Z^1} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^1}{\partial Z^0} \right) \right) \right) \right) \quad (\text{equação 50})$$

## 6.3 MODO *REVERSE* DE PROPAGAÇÃO DE GRADIENTES

No modo *reverse*, as multiplicações de matrizes são calculadas em ordem reversa à composição da função diferenciável e todos os resultados intermediários têm  $m$  linhas, ou seja (ESPATH et al. 2010, p. 731):

$$\left( \left( \left( \left( \left( \frac{\partial \mathcal{H}^K}{\partial Z^{K-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{K-1}}{\partial Z^{K-2}} \right) \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{K-2}}{\partial Z^{K-3}} \right) \cdot \dots \right) \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^1}{\partial Z^0} \right) \right) \quad (\text{equação 51})$$

## 6.4 DIFERENCIAÇÃO DE FUNÇÕES ESCALARES

Em otimização numérica, geralmente  $n > m$  e  $m = 1$ , conseqüentemente o método *reverse* é preferível em detrimento ao *forward* por requerer menos cálculo computacional. Entretanto, para cada caso, a memória computacional requerida deve ser analisada (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 9). A seguinte definição para um resultado intermediário em uma função escalar é feita:

$$Z_0^l \triangleq \bigodot_{i=1}^l \mathcal{H}^i(X_0) \quad 1 \leq l \leq K \quad (\text{equação 52})$$

A variação das variáveis intermediárias é função da variação das variáveis intermediárias anteriores e, com  $\delta Z^0 \triangleq \delta X$ , a seguinte proposição é definida (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 9):

$$\delta Z^l = \left. \frac{\partial \mathcal{H}^l(Z^{l-1})}{\partial Z^{l-1}} \right|_{Z^{l-1}=Z_0^{l-1}} \cdot \delta Z^{l-1} \quad (\text{equação 53})$$

Onde:

$\delta Z^l$  = variação da variável intermediárias  $Z^l$ .

O adjunto de um resultado intermediário,  $\delta^* Z^l$ , é definido como o gradiente de  $\mathcal{H}$  com respeito ao resultado intermediário  $Z^l$  (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 9):

$$\delta^* Z^l \triangleq \nabla_{Z^l} \left( \bigodot_{i=l+1}^k \mathcal{H}^i(Z^l) \right) \Big|_{Z^l=Z_0^l} \quad (\text{equação 54})$$

Onde:

$\delta^* Z^l$  = adjunto de um resultado intermediário  $Z^l$ .

Denotando-se o produto interno em um espaço Euclidiano por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e com a definição de gradiente  $\partial \mathcal{H} \triangleq (\nabla_x \mathcal{H}(X_0), \delta X)$ , obtém-se (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 9):

$$\delta \mathcal{H} = \langle \delta^* Z^l, \delta Z^l \rangle \quad (\text{equação 55})$$

Onde:

$\delta \mathcal{H}$  = gradiente de  $\mathcal{H}$ .

É natural que a equação 55 seja válida para qualquer  $l$  e, portanto, tem-se a equação 56. De acordo com a definição do operador adjunto como uma matriz transposta, a equação 56 pode

ser reescrita segundo a equação 57, a qual exemplifica um passo simples do algoritmo adjunto (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 9):

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^* Z^{l-1}, \delta Z^{l-1} \rangle &= \langle \delta^* Z^l, \delta Z^l \rangle \\
 &= \left\langle \delta^* Z^l, \left( \frac{\partial \mathcal{H}^l Z^{l-1}}{\partial Z^{l-1}} \right) \Big|_{Z^{l-1}=Z_0^{l-1}} \cdot \delta Z^{l-1} \right\rangle \\
 &= \left\langle \left( \frac{\partial \mathcal{H}^l Z^{l-1}}{\partial Z^{l-1}} \right)^* \Big|_{Z^{l-1}=Z_0^{l-1}} \cdot \delta^* Z^l, \delta Z^{l-1} \right\rangle \quad (\text{equação 56}) \\
 \delta^* Z^{l-1} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}^l Z^{l-1}}{\partial Z^{l-1}} \right)^* \Big|_{Z^{l-1}=Z_0^{l-1}} \cdot \delta^* Z^l
 \end{aligned}$$

$$\delta^* Z_i^{l-1} = \sum_{j=1}^{n_l} \frac{\partial \mathcal{H}_j^l(Z^{l-1})}{\partial Z_i^{l-1}} \Big|_{Z^{l-1}=Z_0^{l-1}} \cdot \delta^* Z_j^l \quad (\text{equação 57})$$

O gradiente de  $\mathcal{H}$  é calculado no último passo do algoritmo adjunto, portanto tem-se a seguinte igualdade (GIERING; KAMISKI, 1996, p. 9):

$$\delta^* Z^0 = \delta^* X = \nabla_X \mathcal{H} \quad (\text{equação 58})$$

## 7 IMPLEMENTAÇÃO

Os diversos procedimentos adotados e implementados neste trabalho para a consolidação da otimização de forma de cascas axissimétricas são apresentados e descritos neste capítulo.

### 7.1 ANÁLISE ESTRUTURAL POR ELEMENTOS FINITOS

A análise estrutural foi implementada utilizando-se um elemento finito CST de três nós axissimétrico. O algoritmo foi programado em linguagem Fortran 90. A estrutura do programa é brevemente descrita abaixo:

- a) leitura e alocação de dados (malha da geometria, dados do material, carregamentos e condições de contorno);
- b) montagem da matriz de rigidez global (utilizando esquema de banda simétrica);
- c) aplicação de carregamento e condições de contorno sobre a estrutura;
- d) solução numérica utilizando o método de Gauss;
- e) saída de dados.

Para pré e pós-processamento de dados utilizou-se o programa GID (2010).

### 7.2 OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA USANDO UM ALGORITMO SQP

A otimização matemática implementada faz uso da sub-rotina DNCONF da biblioteca matemática IMSL para linguagem Fortran. Esta é uma sub-rotina SQP baseada no código em Fortran desenvolvido por Schittkowski (1986). Os gradientes são fornecidos pelo usuário neste sub-rotina. Para formulação de problemas de otimização, os seguintes dados são utilizados na sub-rotina adotada:

- a) variáveis de otimização;
- b) limite inferior e superior de cada variável;
- c) fator de escala;
- d) número máximo de iterações;

- e) função objetivo;
- f) restrições de igualdade e desigualdade;
- g) gradientes da função objetivo e restrições;
- h) ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ .

Como variáveis de otimização utilizaram-se apenas pontos de controle  $\mathbf{P}_{i,j}$  de uma superfície NURBS que descreve a geometria. Os pesos  $w_{i,j}$  e os vetores de nós poderiam ter sido empregados como variáveis de otimização, entretanto não foram utilizados neste trabalho.

### 7.3 DEFORMAÇÃO LIVRE DE FORMA BASEADO EM NURBS

Utilizou-se um algoritmo de deformação livre de forma baseado em NURBS para manipular a geometria a ser otimizada e ao mesmo tempo manter a parametrização, evitando, com isso, a necessidade de gerar novas malhas de elementos finitos ao longo do processo. O algoritmo utilizado foi desenvolvido por Espath (2009) e encontra-se escrito em linguagem Fortran 2003.

A modificação de forma utilizada consiste simplesmente na modificação da malha de elementos finitos, isto é, como resultado final da modificação da geometria, obtém-se a modificação da malha. Para tal, faz-se uso da malha no espaço paramétrico. Para se modificar a forma, fixados os graus  $p$  e  $q$  e os vetores de nós  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , pode-se deslocar os pontos de controle  $\mathbf{P}_{i,j}$  e os pesos  $w_{i,j}$  (ESPATH, 2009, p. 72). Algumas características importantes que incorporam o algoritmo são:

- a) código independente de qualquer código computacional de CAGD;
- b) código independente de qualquer gerador de malha;
- c) código baseado em NURBS;
- d) código de baixa memória de armazenamento e processamento;
- e) código que controla a deformação dos elementos.

A leitura de dados utilizados pelo algoritmo é descrita abaixo (ESPATH, 2009, p. 72):



- a) leitura de entidades que conformam a superfície (pesos  $w_{i,j}$ , pontos de controle  $\mathbf{P}_{i,j}$ , graus  $p$  e  $q$  e vetores de nós  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ );
- b) leitura da malha de elementos finitos no espaço paramétrico;
- c) índice de pontos de controle (em coordenadas homogêneas) a deslocar.

A partir da leitura inicial, realiza-se o pré-processamento, descrito nas seguintes etapas (ESPATH, 2009, p. 72):

- a) a partir dos índices dos pontos de controle a deslocar, são criadas variáveis vetores (dentro de uma variável tipo derivado), onde o número de variáveis criadas é igual ao número de subdomínios a serem modificados;
- b) é feita a contagem dos nós (da malha de elementos finitos) pertencentes a cada subdomínio a ser modificado, alocando dinamicamente cada variável vetor;
- c) em cada variável vetor é armazenado o conjunto de nós (da malha de elementos finitos) pertencentes ao correspondente subdomínio.

O processamento da modificação livre de forma é realizado nas seguintes etapas (ESPATH, 2009, p. 74):

- a) avaliam-se todos os nós (da malha de elementos finitos) pertencentes aos vetores que representam os subdomínios a serem reavaliados, para cada superfície;
- b) os nós da malha de elementos finitos são sobrescritos pelos nós reposicionados na nova geometria.

Uma vez que a geometria utilizada no presente trabalho é descrita pela sua seção transversal de revolução, apenas uma descrição bidimensional torna-se necessária. Portanto, apenas as coordenadas  $x$  e  $y$  são utilizadas, mantendo-se  $z = 0$ . Utiliza-se, neste trabalho,  $w_{i,j} = 1$  e superfícies Bézier como caso particular de NURBS. O efeito obtido sobre a geometria e a malha ao deslocarem-se apenas os pontos de controle em uma superfície plana é mostrado nas figuras 4 e 5. É fácil perceber que a malha de elementos finitos se desloca em conjunto com a geometria, mantendo a parametrização inicial.

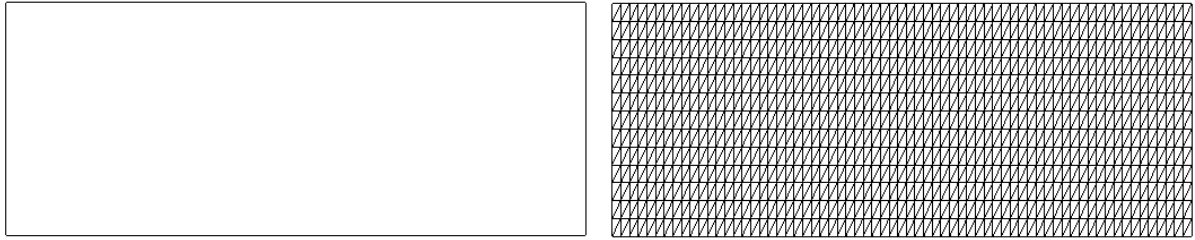


Figura 4: geometria e malha original

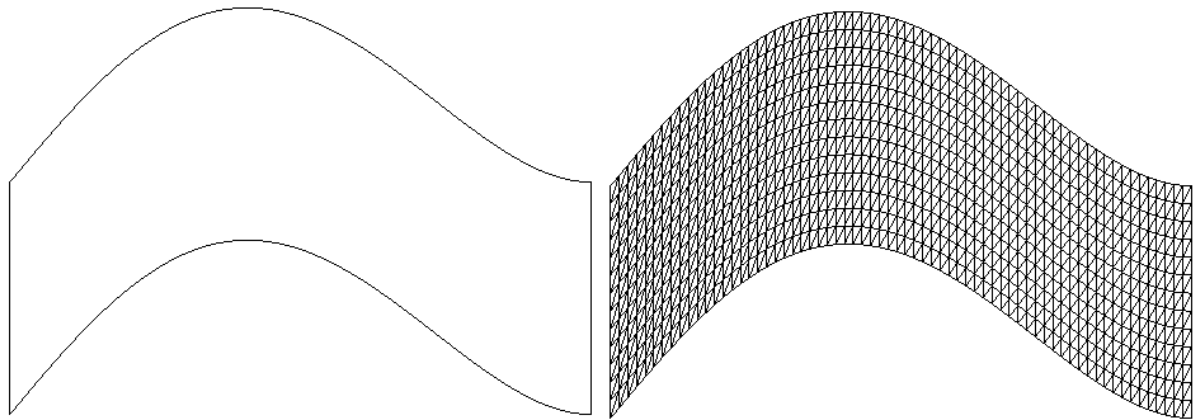


Figura 5: geometria e malha deformada

#### 7.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE UTILIZANDO AD

A análise de sensibilidade foi realizada utilizando-se o método da diferenciação automática e, inicialmente, para fins de comparação e validação, o método das diferenças finitas também. O método AD foi implementado utilizando-se as ferramentas de diferenciação TAPENADE AD, ferramentas estas desenvolvidas pelo *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique* (INRIA, 2002). A estrutura de funcionamento do TAPENADE AD é descrita abaixo:

- a) fornecimento de código computacional a ser diferenciado pelo usuário (em linguagem Fortran 77/90/95 ou C);
- b) leitura do código;
- c) seleção de sub-rotina a ser diferenciada;
- d) seleção de variáveis a serem diferenciáveis dentro da sub-rotina (saída);
- e) seleção de variáveis segundo as quais as variáveis de saída são diferenciadas dentro da sub-rotina (entrada);
- f) escolha do tipo de diferenciação (*forward*, *forward* vetorial ou *reverse*);
- g) diferenciação do código (em linguagem Fortran 77/90/95 ou C).

A partir da última etapa de utilização do TAPENADE, obtém-se o código diferenciado. Este código é basicamente o código original reescrito em termos de funções elementares e diferenciado segundo o sentido escolhido para as variáveis selecionadas. Utilizou-se a AD no modo *reverse* no presente trabalho. A função objetivo e restrições foram diferenciadas com relação aos pontos de controle (variáveis de otimização).

## 7.5 ALGORITMO NUMÉRICO

O algoritmo geral, mostrado na figura 6, é a união entre a análise estrutural via elementos finitos, a diferenciação automática, a programação sequencial quadrática e NURBS. Basicamente, há três tipos de dados de entrada: a descrição do problema de otimização, o modelo de elementos finitos e a descrição da geometria utilizando NURBS.

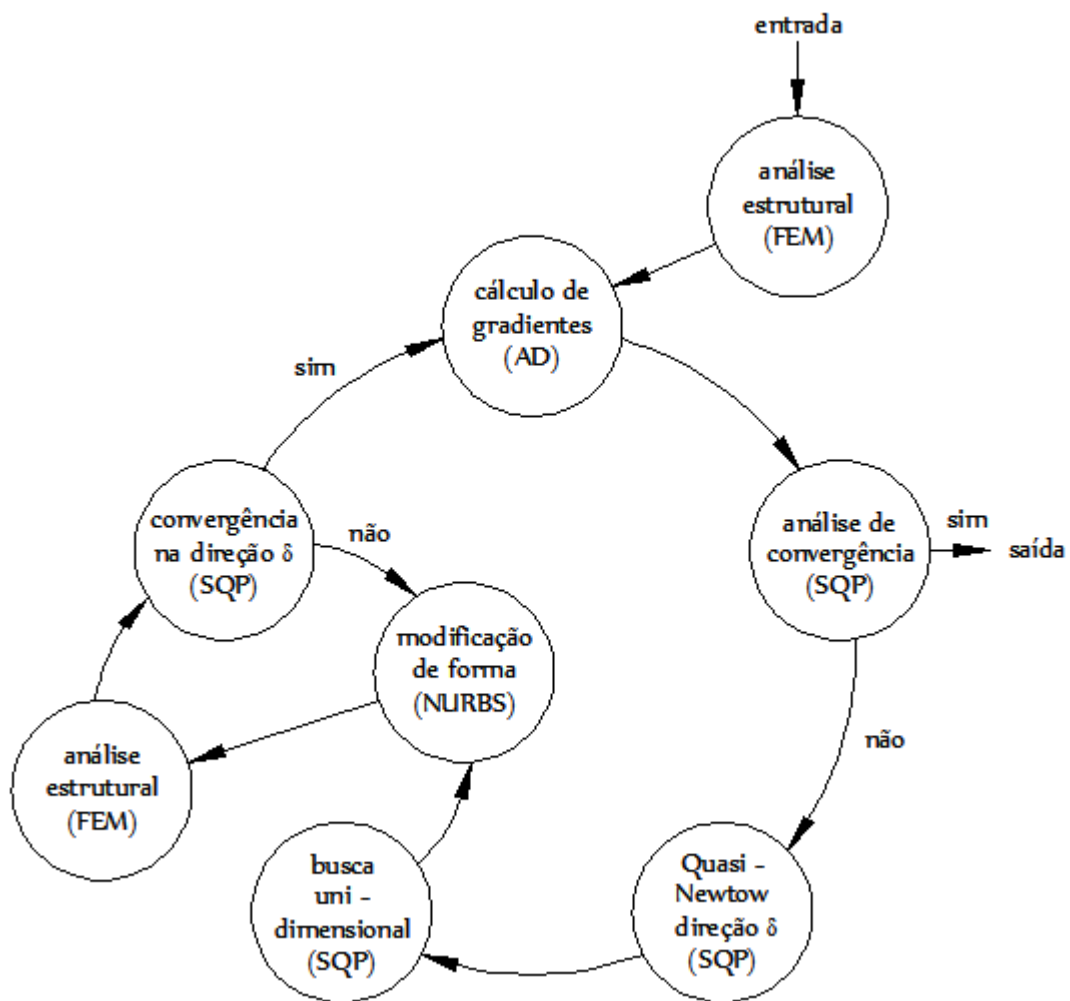


Figura 6: algoritmo de otimização

Após a análise estrutural inicial sobre a forma inicial, o laço principal tem início. No início de cada laço, os gradientes são calculados via AD. Então, verifica-se as condições de KKT. Quando estas são satisfeitas, o laço principal encerra. O problema quadrático é resolvido e as direções Quase-Newton  $\delta_k$  são obtidas. É realizada a minimização unidimensional na direção  $\delta_k$ . A geometria é modificada sobre  $\delta_k$  e os funcionais envolvidos são calculados. A minimização unidimensional não é exata. O laço converge na direção  $\delta_k$  quando um ponto razoável é obtido. Um ponto razoável é aquele que apresenta um decréscimo suficiente e que respeite certas condições de curvatura.

A AD utilizada na análise de sensibilidade em modo *reverse* requer o custo computacional de cálculo de uma única análise de elementos finitos para o cálculo de todo o gradiente. No caso de outro método, por exemplo o das diferenças finitas, necessita-se perturbar cada variável individualmente e realizar uma nova análise estrutural para cada variável para se obter o gradiente, o que implica muitas análises de elementos finitos. Portanto, a medida que o número de iterações e de variáveis presentes na otimização aumenta, a utilização da AD se mostra mais eficiente computacionalmente, além de fornecer valores com precisão analítica.

## 8 APLICAÇÕES

Para demonstrar e validar a utilização do algoritmo desenvolvido, alguns exemplos realizados são apresentados neste capítulo.

### 8.1 EXEMPLO 1

O primeiro exemplo apresentado trata de uma casca cuja geometria inicial é plana (pode ser entendida como inicialmente uma laje circular). As propriedades do material utilizado são  $E = 3.10 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0.2$  e  $\gamma = 2.5 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ . O raio  $R$  da estrutura mede  $R = 5\text{m}$ , e a altura inicial  $h = 1.0\text{m}$ . A estrutura encontra-se simplesmente apoiada na lateral e uma carga vertical  $q = 750\text{kN/m}$  é aplicada sobre a mesma sobre a forma de cargas nodais equivalentes. A figura 7 mostra a geometria inicial e as condições de contorno consideradas.

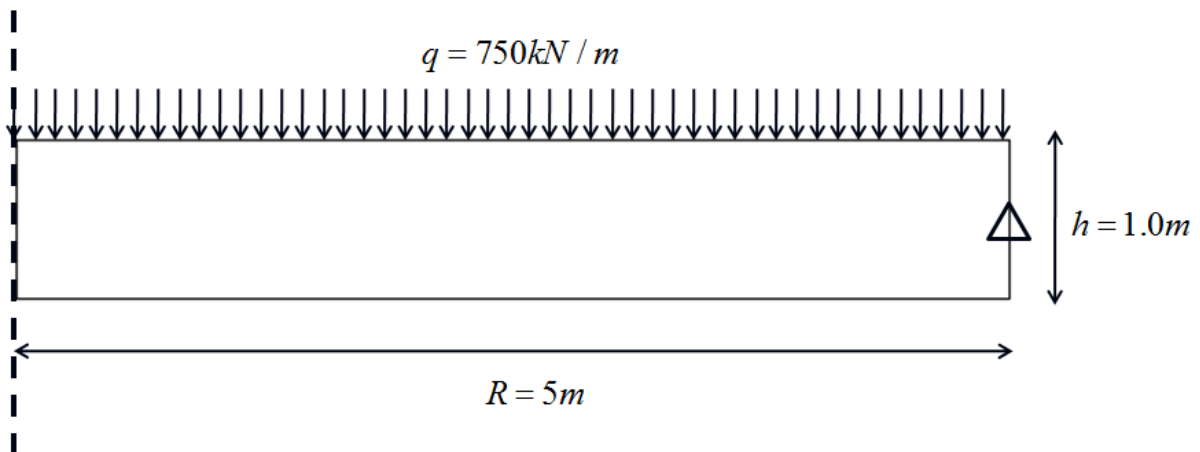


Figura 7: geometria e condições de contorno consideradas no exemplo 1

A malha de elementos finitos utilizada contém 2121 nós e 4000 elementos e é apresentada na figura 8. A parametrização NURBS utilizada contém 4 pontos de controle em cada direção, somando 16 no total. Os vetores de nós utilizados (que caracterizam as superfícies de Bézier) são:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\} \quad (\text{equação 59})$$

$$\mathbf{v} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\} \quad (\text{equação 60})$$

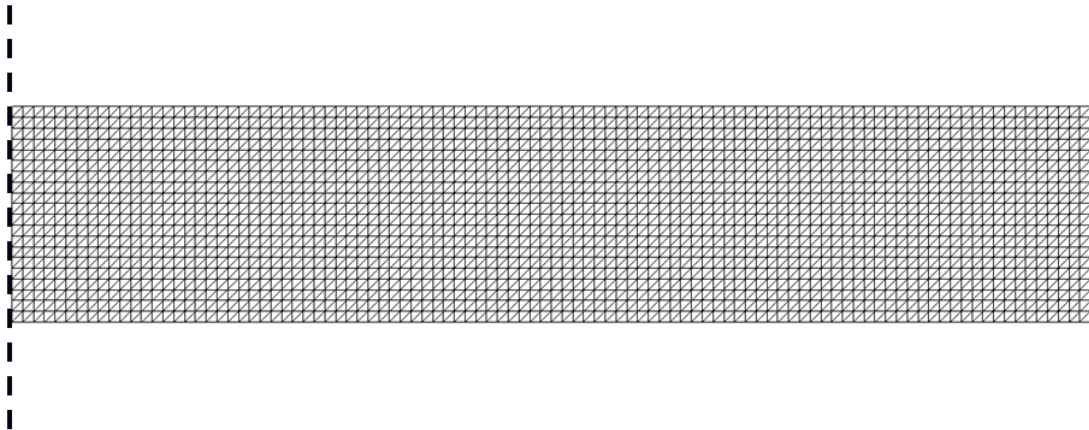


Figura 8: malha de elementos finitos inicial utilizada no exemplo 1

As variáveis de otimização são as coordenadas axiais ( $Z$ ) dos pontos de controle do bordo superior e inferior da malha NURBS, totalizando 8 variáveis. A parametrização NURBS bem como as variáveis de otimização (pontos em vermelho) são apresentadas na figura 9.

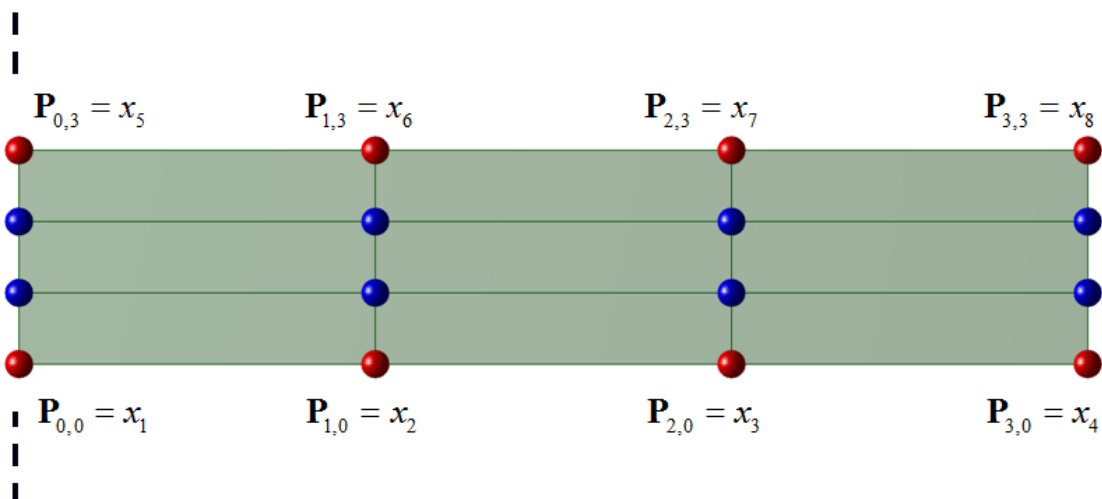


Figura 9: parametrização NURBS e variáveis consideradas no exemplo 1

Uma vez que os pontos de controle não tomados como variáveis de otimização (pontos azuis da figura 9) não são manipulados pelo algoritmo diretamente, forçou-se a movimentação de

forma indireta dos mesmos. Esta movimentação indireta torna-se necessária primeiramente para não ocorrer distorções excessivas da malha de elementos finitos. Em segundo lugar, para grandes modificações da geometria, um ponto de controle poderia ultrapassar outro, levando a uma geometria incorreta e um erro no cálculo via elementos finitos. Este erro ocasionado pela transposição dos pontos de controle é mostrado na figura 10.

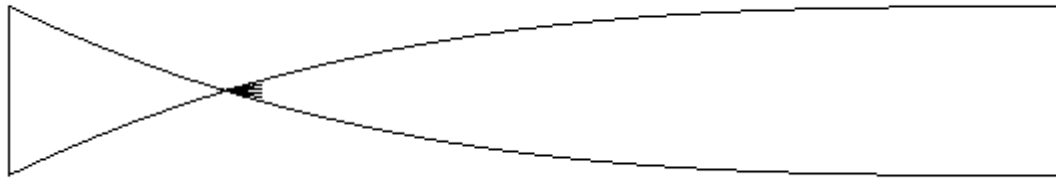


Figura 10: exemplo de erro ocasionado pela transposição de pontos de controle

Para impedir que este tipo de erro ocorra, foi inserida a imposição de que a posição relativa dos pontos de controle que não são variáveis de otimização com relação àquelas que são deve se manter sempre constante em uma dada direção. Desta forma, a distância vertical entre os pontos de controle possui sempre valor uniforme.

A função objetivo  $f$  utilizada no problema é a minimização da energia de deformação da estrutura:

$$f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (\text{equação 61})$$

A função objetivo é restrita à condição de que o volume da estrutura se mantenha constante (imposta pela equação 62) e que a distância axial (vertical) entre os pontos de controle (que são tomados como variáveis) seja maior ou igual a 0.15m:

$$c_1 = 1 - \frac{V}{V_{ini}} = 0 \quad (\text{equação 62})$$

Onde:

$V_{ini}$  = volume inicial.

A condição limitante de volume constante faz com que a geometria otimizada buscada não seja o resultado de simplesmente aumentar a quantidade de material da mesma e mantém a carga de volume aplicada (peso próprio) constante (a carga concentrada também se mantém constante ao longo das iterações). Além disto, as variáveis são limitadas superiormente a uma coordenada axial máxima de 25m e inferiormente a uma coordenada axial mínima de -25m. O quadro 1 mostra as coordenadas iniciais dos pontos de controle da geometria. A sequência de geometrias encontradas ao longo das iterações para este problema de otimização realizado é mostrada na figura 11. A convergência foi obtida na 28ª iteração.

<b>P</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
(0,0)	0.00	0.00
(1,0)	1.67	0.00
(2,0)	3.33	0.00
(3,0)	5.00	0.00
(0,1)	0.00	0.33
(1,1)	1.67	0.33
(2,1)	3.33	0.33
(3,1)	5.00	0.33
(0,2)	0.00	0.67
(1,2)	1.67	0.67
(2,2)	3.33	0.67
(3,2)	5.00	0.67
(0,3)	0.00	1.00
(1,3)	1.67	1.00
(2,3)	3.33	1.00
(3,3)	5.00	1.00

Quadro 1: coordenadas iniciais dos pontos de controle do exemplo 1



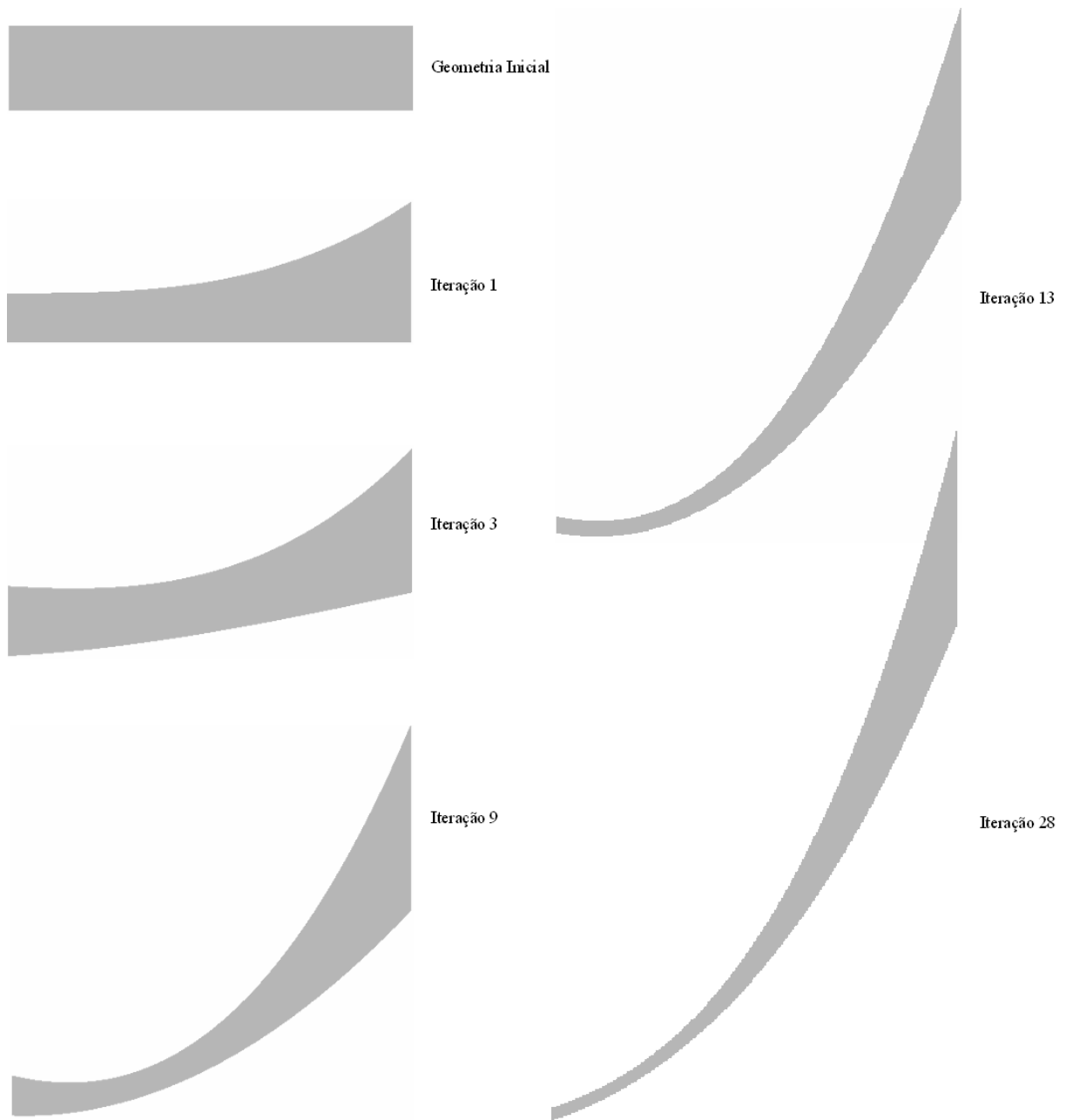


Figura 11: sequência de otimização da geometria do exemplo 1

É possível notar que as primeiras iterações realizadas são as mais salientes. As iterações finais restringem-se mais a uma modificação da curvatura e altura da geometria. A iteração 28 consiste na geometria final encontrada pelo algoritmo. Os deslocamentos iniciais da geometria (em metros e em módulo) são apresentados na figura 12 e as tensões segundo o critério de von Mises (em  $N/m^2$ ) da mesma na figura 13. A figura 14 mostra os mesmos resultados para a geometria final.

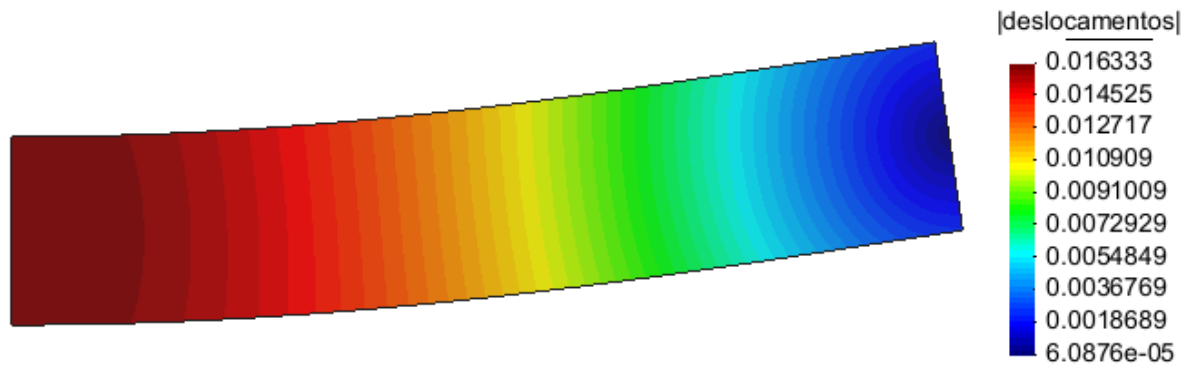


Figura 12: deslocamentos da geometria inicial do exemplo 1

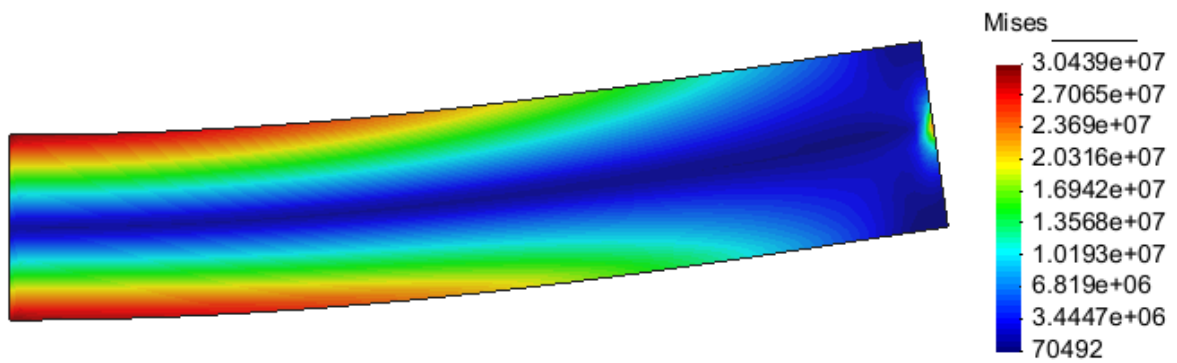


Figura 13: tensões de von Mises da geometria inicial do exemplo 1

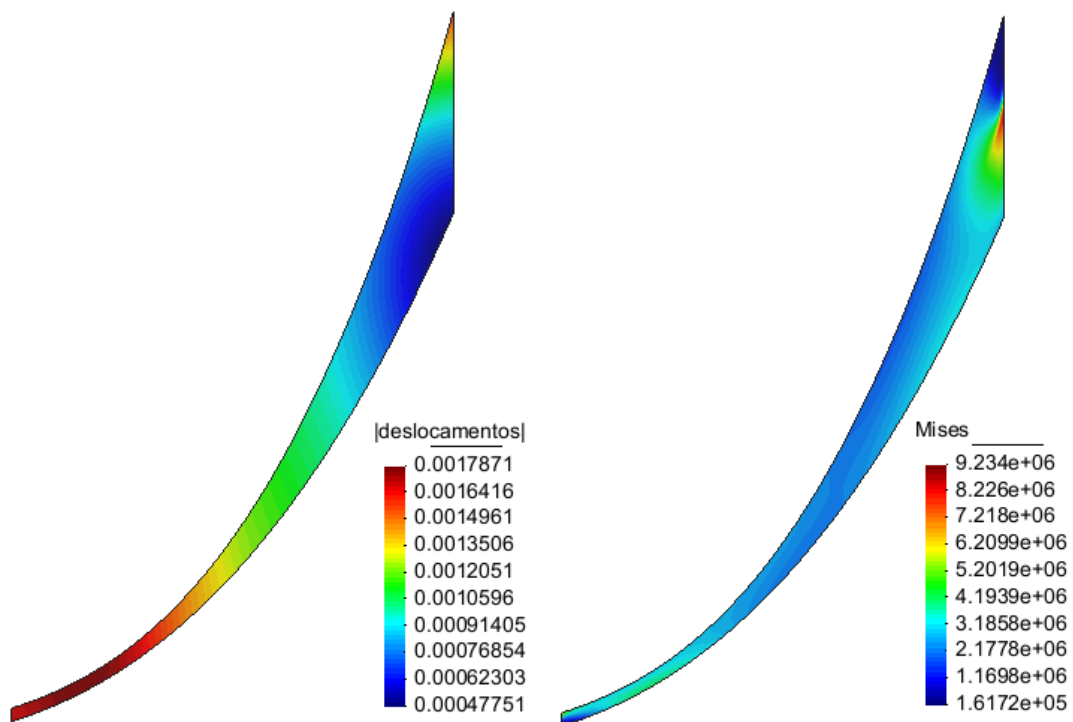


Figura 14: deslocamentos e tensões (von Mises) para a geometria final do exemplo 1

A geometria se assemelhada a uma forma parabólica obtida mostra claramente a minimização da função objetivo. Tanto os deslocamentos quanto as tensões sofrem uma redução de praticamente 10 vezes o valor inicial. A estrutura otimizada, pela sua configuração geométrica, possui uma distribuição de esforços internos de tal maneira que as tensões sejam preferencialmente membranais. Os esforços de flexão e corte originais dão lugar a parcelas cada vez maiores de tensões membranais ao longo das iterações. É possível perceber também a maior concentração de material na região próxima aos apoios, em detrimento a uma espessura mais reduzida na região central. Na figura 15 é possível visualizar tridimensionalmente a estrutura otimizada em duas vistas diferentes. É interessante notar que, mantendo-se as mesmas condições de contorno e apenas invertendo a concavidade da estrutura otimizada apresentada (invertendo seu sentido), obtém-se uma casca submetida preferencialmente a esforços de compressão (comportamento linear). Para materiais tais como o concreto simples, cuja resistência à compressão é muito superior à de tração, isso implica em grande vantagem estrutural. Resultados análogos, porém utilizando um elemento de casca e uma placa quadrada como geometria inicial, foram encontrados por Bletzinger et al. (2005, p. 3446) e Espath et al. (2010, p. 738), dentre outros autores.

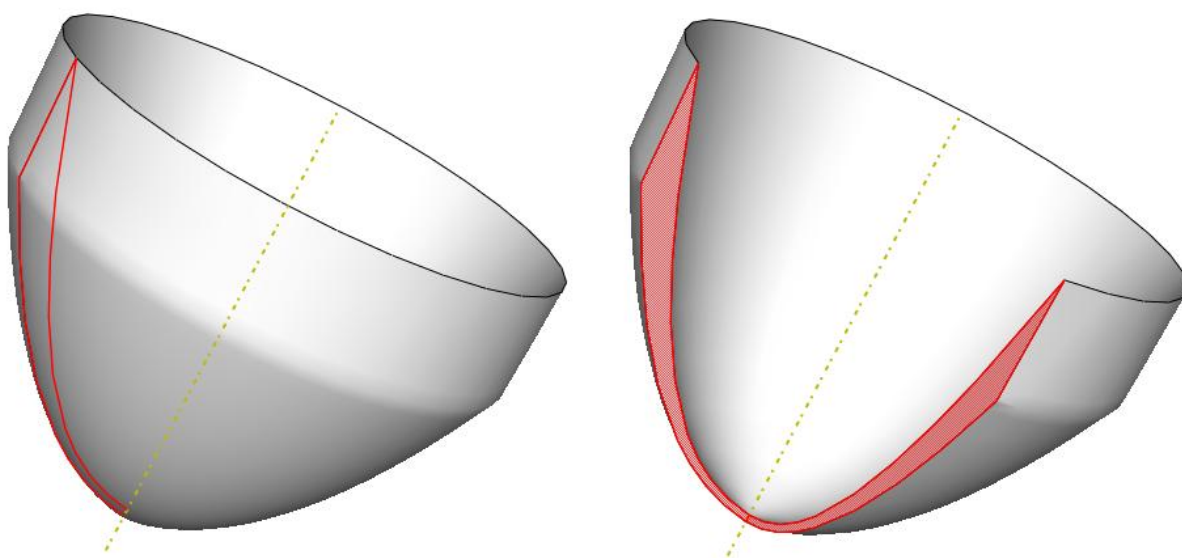


Figura 15: visualização tridimensional em 360° e 270° da estrutura otimizada no exemplo 1

As coordenadas dos pontos de controle da geometria final são apresentadas no quadro 2. A evolução da minimização da função objetivo ao longo das iterações é mostrada na figura 16. Pode-se perceber da figura 16, que, a partir da 14ª iteração, não há redução significativa da

função objetivo. Neste gráfico, a função objetivo é normalizada dividindo-se o valor total da energia de deformação da iteração correspondente pelo valor da energia de deformação obtido na geometria inicial. Portanto, sendo  $f_{ini} = 1$ , o valor final obtido foi  $f_{opt} = f_{28} = 0.114$ .

<b>P</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
(0,0)	0.00	-14.98
(1,0)	1.67	-14.45
(2,0)	3.33	-13.02
(3,0)	5.00	-9.26
(0,1)	0.00	-14.93
(1,1)	1.67	-14.40
(2,1)	3.33	-12.97
(3,1)	5.00	-8.50
(0,2)	0.00	-14.88
(1,2)	1.67	-14.35
(2,2)	3.33	-12.92
(3,2)	5.00	-7.74
(0,3)	0.00	-14.83
(1,3)	1.67	-14.30
(2,3)	3.33	-12.87
(3,3)	5.00	-6.98

Quadro 2: coordenadas finais dos pontos de controle do exemplo 1

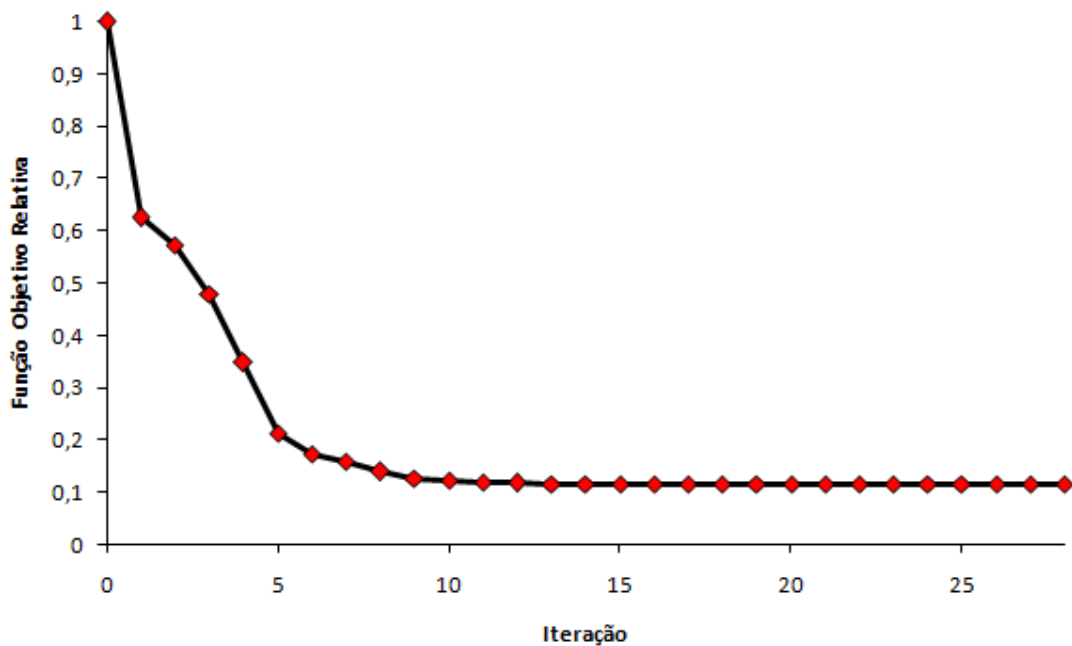


Figura 16: gráfico da função objetivo ao longo das iterações no exemplo 1

Este exemplo possui relevância ainda mais ampla quanto analisado no contexto histórico. O importante papel desempenhado pela forma dos domos ou abóbodas sempre despertou interesse dos construtores e muitas das cascas projetadas até a época da Renascença foram baseadas em métodos heurísticos, através do conhecimento acumulado ao longo de diversas experiências anteriores. Nesta época os materiais utilizados na construção possuíam baixa ou nenhuma capacidade de resistência à esforços de tração como o *opus caementitium* utilizado pelos romanos e diferentes tipos de alvenaria. Foi o famoso Robert Hooke (1635-1702), pesquisador da Royal Society, recentemente fundada naqueles dias, conhecido pela sua lei da mola elástica *ut tensio sic vis*, quem perguntou aos seus contemporâneos sobre a forma ótima de um arco de alvenaria. A solução por ele proposta (HOOKE, 1675, p. 31) é descrita como *ut pendet continuum flexile, sic stabit contigum rigidum inversum*, através de um anagrama, o que pode ser traduzido na forma "como a forma flexível trava, o arco invertido permanece rígido", mostrado na figura 17. Isso, em outras palavras, descreve o método da suspensão invertida, onde a forma obtida da estrutura deformada livremente pela ação de seu peso próprio é invertida, levando a um estado de compressão (SANTIAGO, 2006, p. 325). Tal arco também é conhecido como catenária, obtida pela analogia entre arcos e correntes suspensas.

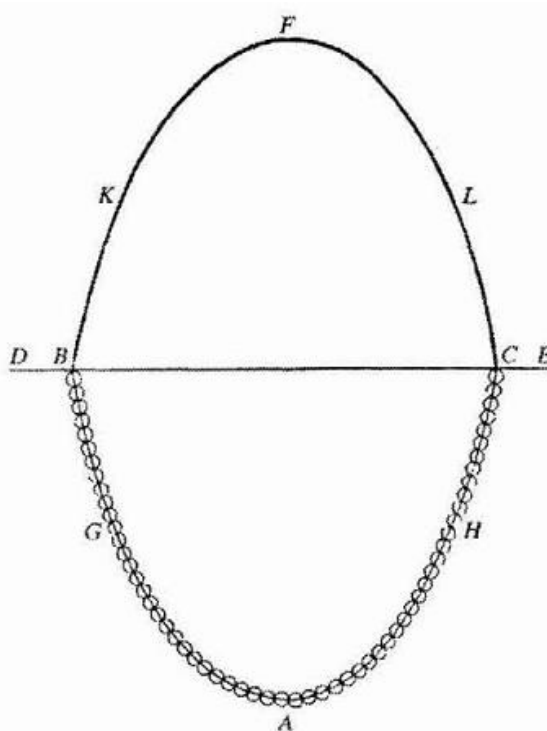


Figura 17: analogia de Robert Hooke entre correntes suspensas e arcos (SANTIAGO, 2006, p. 325)

O princípio do método da suspensão invertida tornou-se um ingrediente básico para projeto de abóbodas e coberturas usado até hoje. Ele reduz o processo de busca de forma a um procedimento natural o qual conduz automaticamente a um resultado de compressão livre de trações, ideal para materiais que suportam apenas baixas ou nenhuma tração, como o concreto. Hooke possuía contato com Sir Christopher Wren, o construtor e projetista do domo da Catedral St. Paul, em Londres. Na concepção do domo da catedral, os princípios do método foram utilizados. O formato utilizado foi o de uma casca cônica levemente curvada, devido ao grande peso de uma lanterna fixada no topo, mostrado na figuras 18 (RAMM; WALL, 2004, p. 395).

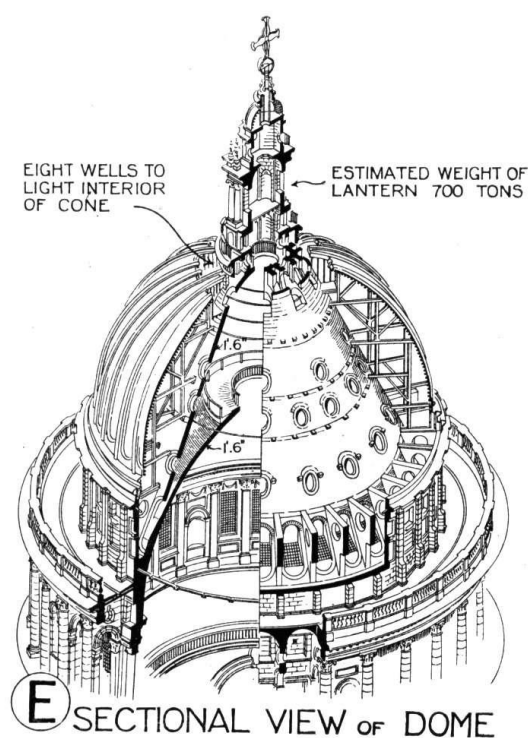


Figura 18: projeto de Wren para o domo da Catedral St. Paul  
(SANTIAGO, 2006, p. 330)

Estes conceitos foram mais tarde utilizados por Rondelet na abóboda central da Igreja St. Genevieve em Paris (a qual transformou-se no Panteon Francês durante a Revolução Francesa). Dentre tantos outros que aderiram à técnica, pode-se citar Gaudí, que também fez uso de tais princípios em diversas estruturas como a abóboda da Igreja da Colônia Güell e a Sagrada Família em Barcelona, mostrada na figura 19 (RAMM; WALL, 2004, p. 395).

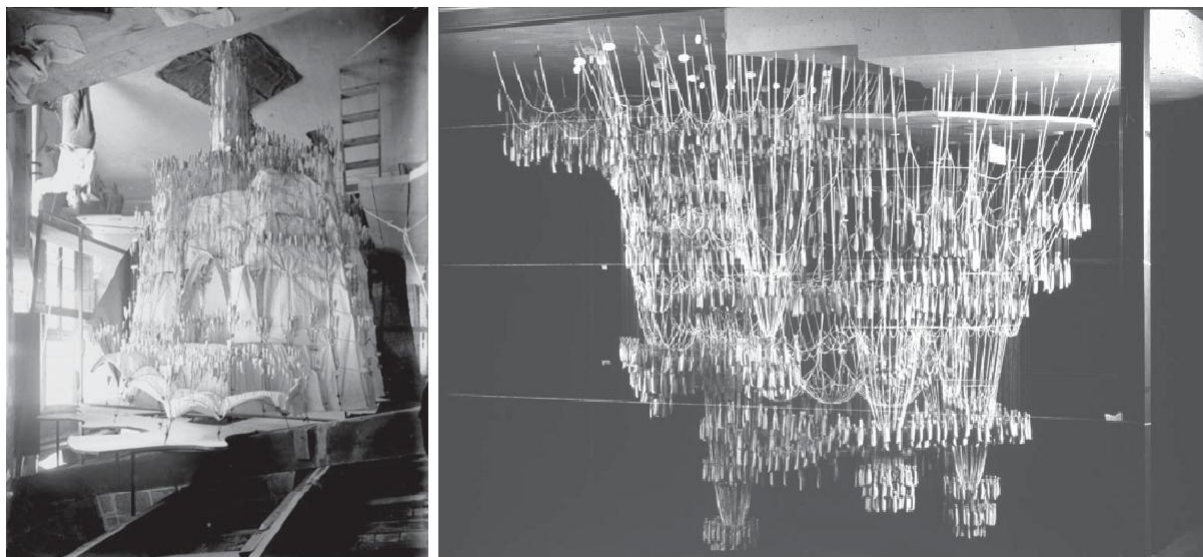


Figura 19: modelo original de suspensão invertida utilizado por Gaudí (à esquerda) e reconstituição do mesmo (à direita) (GRAEFE, 2009, p. 732)

O conceito também foi utilizado por projetistas modernos em cascas de concreto, como por exemplo F. Otto e H. Isler, mostrado na figura 20. Embora este método produza estruturas de certa forma inapropriadas sob certos efeitos (por exemplo vibrações), este conceito tem sido utilizado com grande sucesso ao longo dos anos (RAMM; WALL, 2004, p. 394-395).

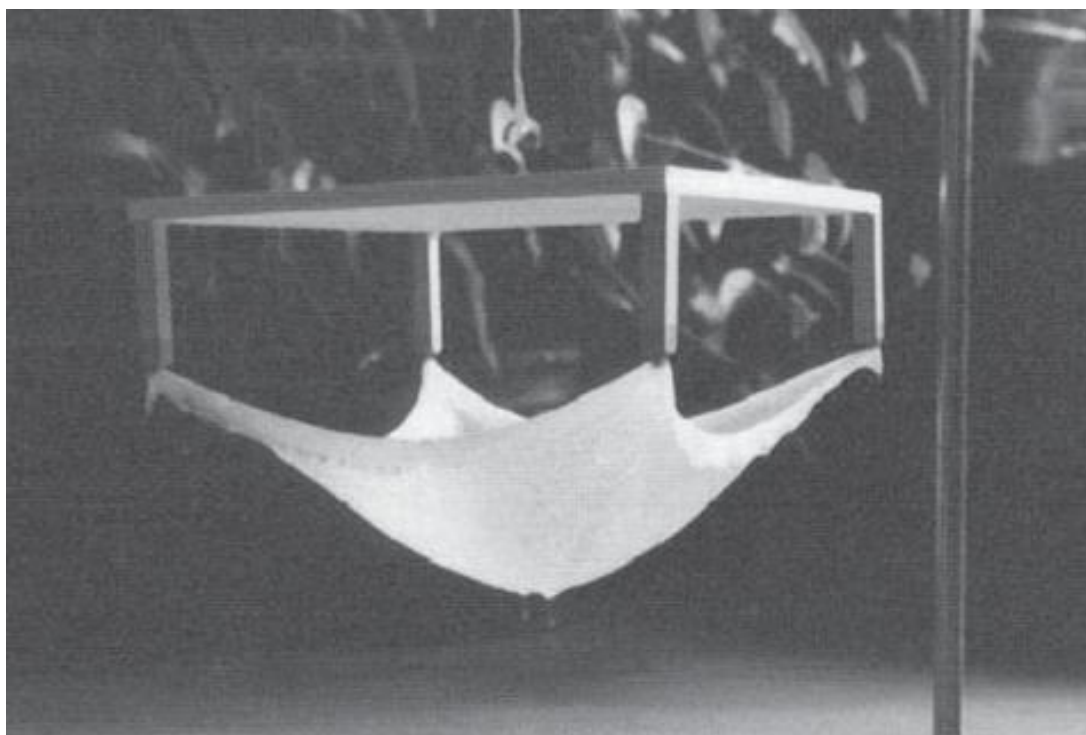


Figura 20: modelo de membrana suspensa invertida de Isler (CHILTON, 2000, p. 37)

## 8.2 EXEMPLO 2

O segundo exemplo aqui apresentado é uma variação do primeiro. O material utilizado possui as mesmas propriedades do exemplo anterior, entretanto a geometria inicial difere por apresentar um furo na região central. O raio externo  $R_e$  da estrutura mede  $R_e = 10m$ , o raio interno  $R_i$  mede  $R_i = 5m$  e a altura inicial  $h = 1.5m$ . A estrutura encontra-se simplesmente apoiada na lateral externa e uma carga vertical  $q = 268kN/m$  é aplicada sobre a mesma, sobre a forma de cargas nodais com carregamento equivalente. O peso próprio também é considerado. A figura 21 mostra a geometria inicial e as condições de contorno consideradas.

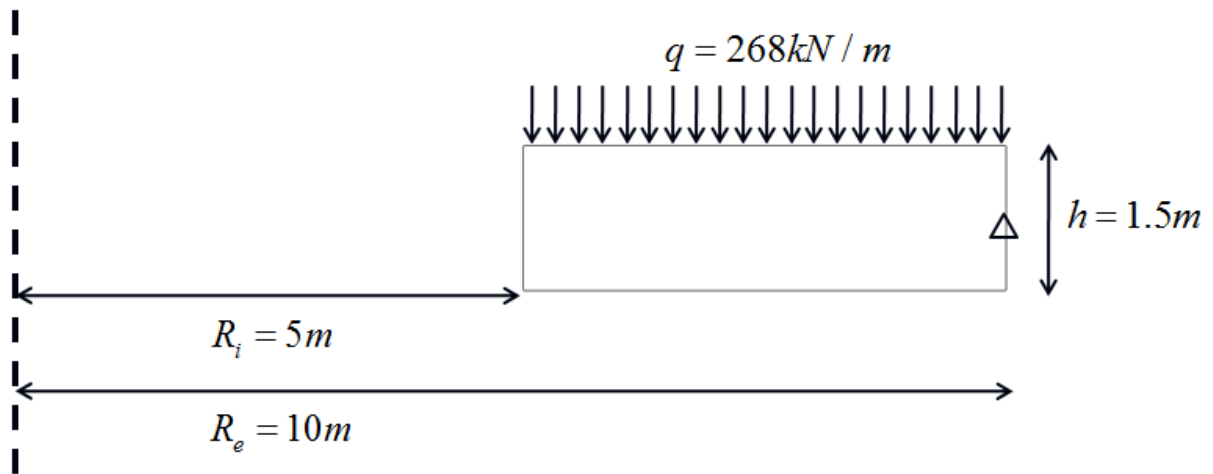


Figura 21: geometria e condições de contorno consideradas no exemplo 2

A malha de elementos finitos utilizada contém 952 nós e 1742 elementos e é apresentada na figura 22. A parametrização NURBS utilizada contém 7 pontos de controle na direção  $u$  e 6 na direção  $v$ , somando 42 ao total. Os vetores de nós utilizados são:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \quad (\text{equação 63})$$

$$\mathbf{v} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \quad (\text{equação 64})$$



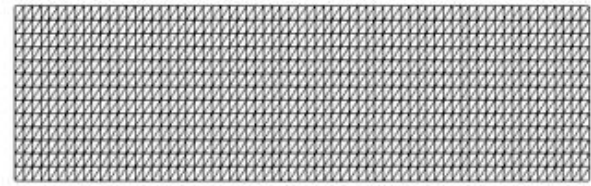


Figura 22: malha de elementos finitos inicial utilizada no exemplo 2

As variáveis de otimização são as coordenadas axiais ( $Z$ ) dos pontos de controle do bordo superior e inferior da malha NURBS, totalizando 14 variáveis. A parametrização NURBS bem como as variáveis de otimização (pontos em vermelho) são apresentadas na figura 23.

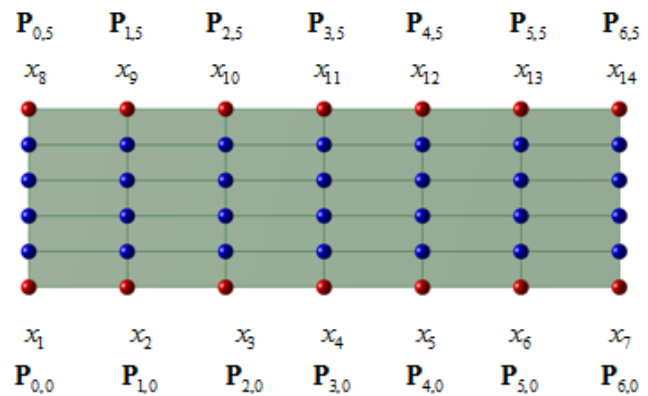


Figura 23: parametrização NURBS e variáveis consideradas no exemplo 2

Assim como no exemplo 1, os pontos de controle intermediários entre os pontos de controle que são variáveis de otimização, ou seja, os pontos azuis da figura 23, devem manter a distância axial relativa uniforme.

A função objetivo  $f$  utilizada no problema é a minimização da energia de deformação da estrutura. A função objetivo é restrita à condição de que o volume da estrutura se mantenha constante e que a distância axial (vertical) entre os pontos de controle (que são tomados como variáveis) seja maior ou igual a 0.15m. Além disto, as variáveis são limitadas superiormente a uma coordenada axial máxima de 7.5m e inferiormente a uma coordenada axial mínima no valor de -7.5m.

O quadro 3 mostra as coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle que são variáveis de otimização da geometria. A função objetivo ao longo das iterações é mostrada no gráfico da figura 24. Percebe-se que na primeira iteração ocorre o maior decréscimo da função objetivo. A convergência foi obtida na 39ª iteração. O valor final obtido foi  $f_{opt} = f_{39} = 0.068$ , sendo este valor normalizado, tomando  $f_{ini} = 1$ .

<b>P</b>	<b>x</b>	<b>y ini</b>	<b>y fin</b>
(0,0)	5.00	0.00	-7.50
(1,0)	5.83	0.00	-7.50
(2,0)	6.67	0.00	-7.05
(3,0)	7.50	0.00	-6.01
(4,0)	8.33	0.00	7.35
(5,0)	9.17	0.00	-7.50
(6,0)	10.00	0.00	-7.50
(0,5)	5.00	1.50	-7.35
(1,5)	5.83	1.50	-7.24
(2,5)	6.67	1.50	-6.90
(3,5)	7.50	1.50	-5.86
(4,5)	8.33	1.50	7.50
(5,5)	9.17	1.50	-3.83
(6,5)	10.00	1.50	-3.13

Quadro 3: coordenadas axiais iniciais e finais dos pontos de controle tomados como variáveis do exemplo 2

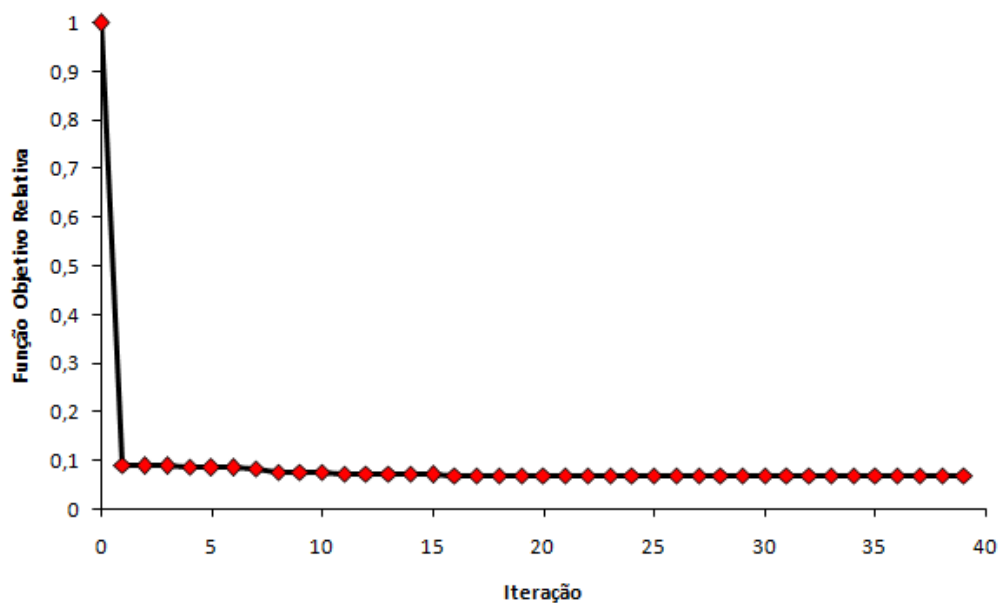


Figura 24: gráfico da função objetivo ao longo das iterações no exemplo 2

A seqüência de geometrias encontradas ao longo das iterações para este problema de otimização realizado é mostrada na figura 25.

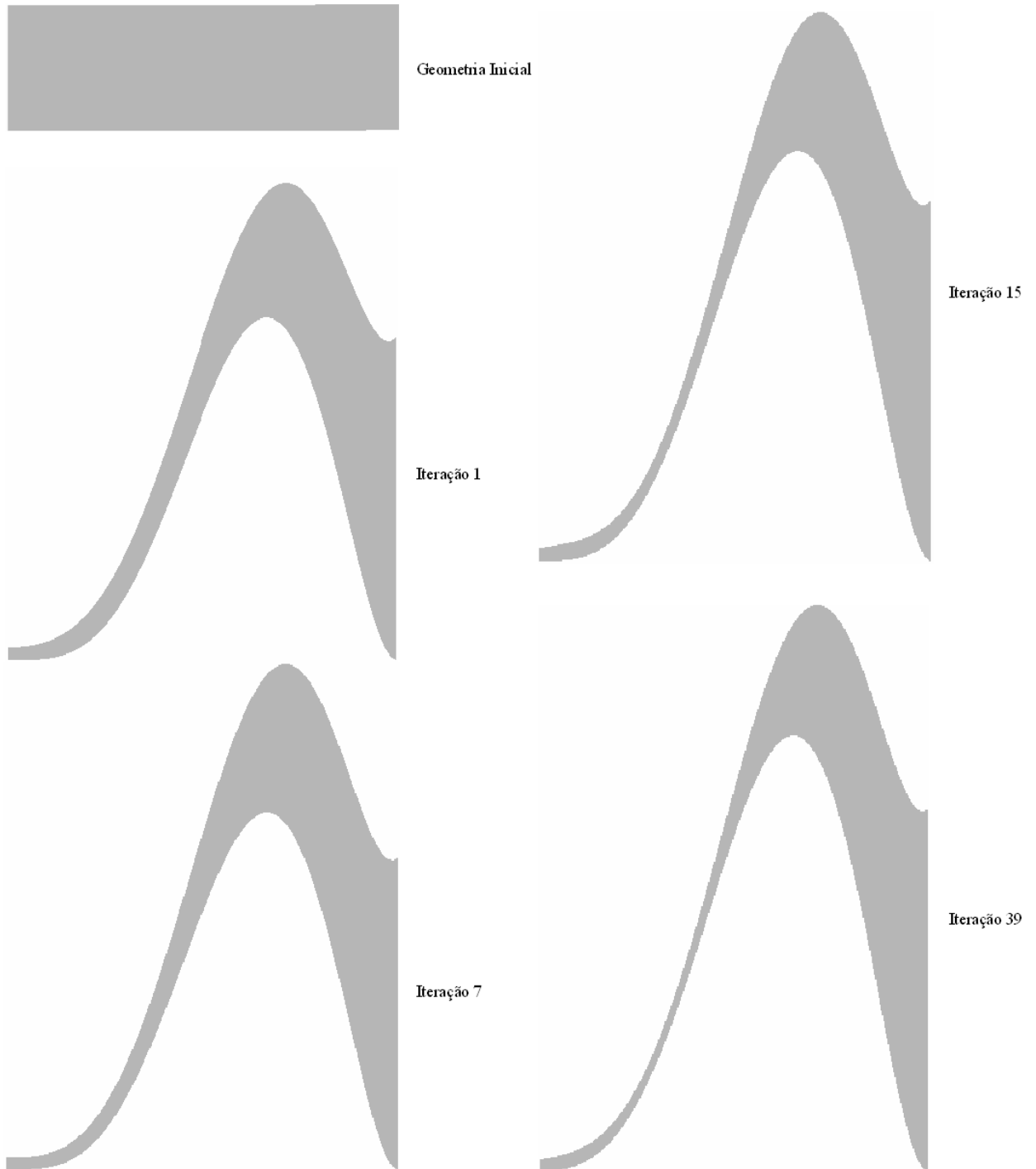


Figura 25: seqüência de otimização da geometria do exemplo 2

Os deslocamentos iniciais da geometria (em metros e em módulo) são apresentados na figura 26 e as tensões segundo o critério de von Mises (em  $\text{N/m}^2$ ) da mesma na figura 27. A figura 28 mostra os mesmos resultados para a geometria final.

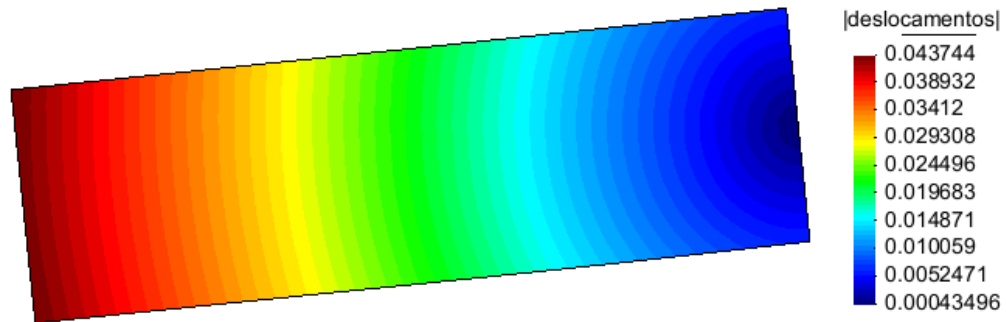


Figura 26: deslocamentos da geometria inicial do exemplo 2

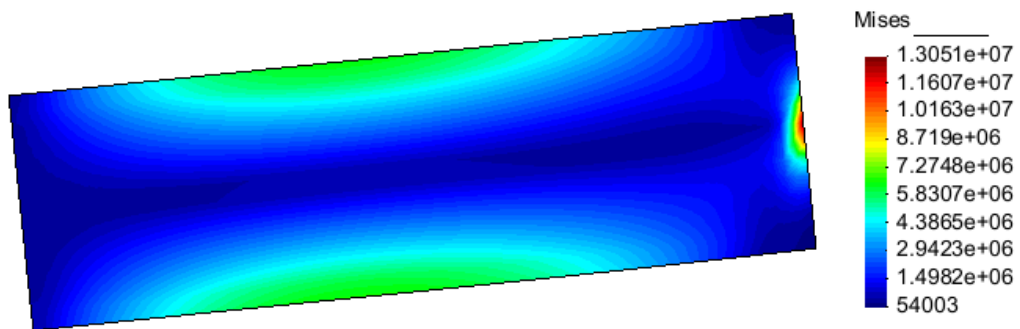


Figura 27: tensões de von Mises da geometria inicial do exemplo 2

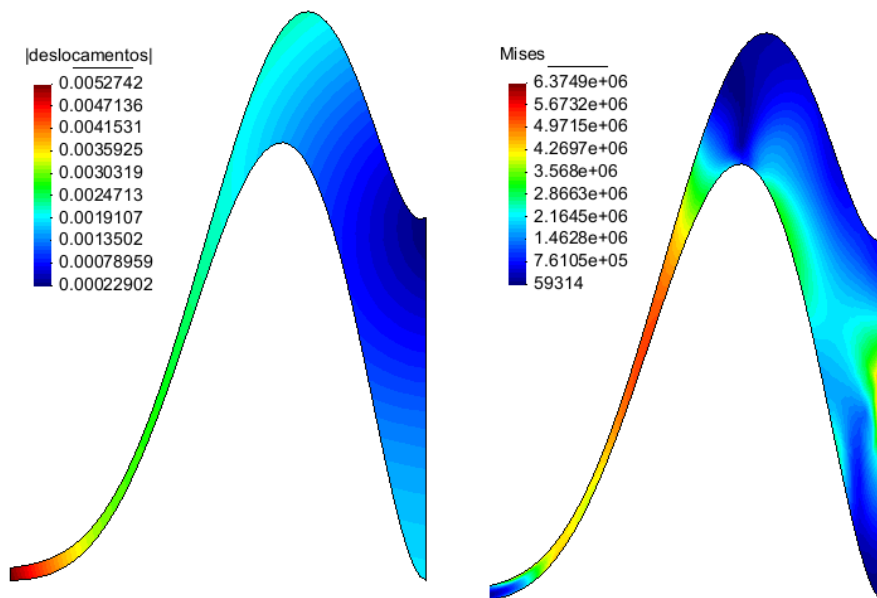


Figura 28: deslocamentos e tensões (von Mises) para a geometria final do exemplo 2

A estrutura otimizada apresenta uma forma assemelhada a duas parábolas em sentidos opostos. Novamente, a espessura maior encontra-se próxima aos apoios, devido às altas tensões. Do quadro 3, observa-se que a limitação superior e inferior das coordenadas das variáveis também limitou a forma da estrutura otimizada. Grande parte das variáveis encontra-se no limite desta restrição, ou seja, ou na coordenada 7.5m, ou na coordenada -7.5m. Para o caso de relaxação destas limitações, a estrutura provavelmente tenderia a possuir maior amplitude vertical e o bordo interior mais afunilado. Na figura 29 é possível visualizar tridimensionalmente a estrutura otimizada em duas vistas diferentes.

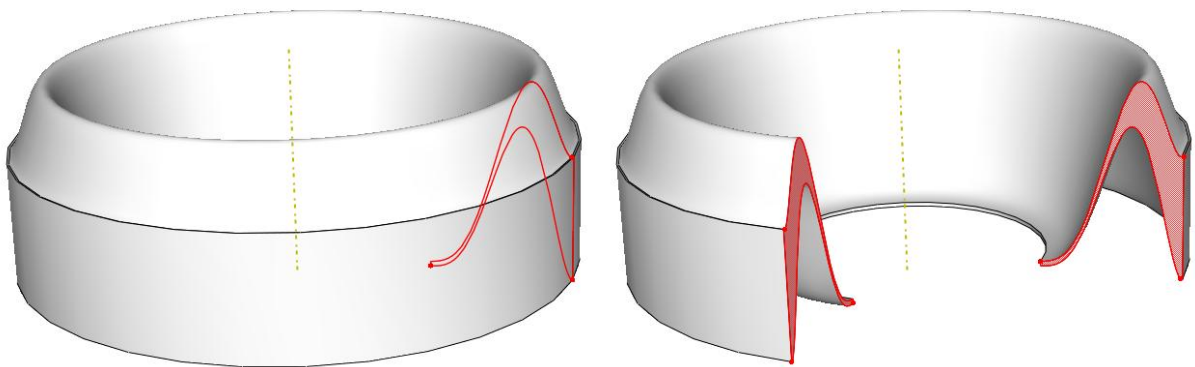


Figura 29: visualização tridimensional em 360° e 270° da estrutura otimizada no exemplo 2

### 8.3 EXEMPLO 3

O terceiro exemplo parte de uma geometria inicial cilíndrica. O material utilizado possui as mesmas propriedades dos exemplos anteriores, entretanto o peso próprio da estrutura foi desconsiderado neste exemplo. O raio externo  $R_e$  da estrutura mede  $R_e = 25m$ , o raio interno  $R_i$  mede  $R_i = 23.5m$  e a altura  $h = 10.0m$ . A estrutura encontra-se engastada na borda inferior e uma carga horizontal  $q_h = 25000kN/m$  e uma vertical  $q_v = 50000kN/m$  são aplicadas sobre o topo da mesma. A figura 30 mostra a geometria inicial e as condições de contorno consideradas.

A malha de elementos finitos utilizada contém 606 nós e 1000 elementos e é apresentada na figura 31. A parametrização NURBS utilizada contém 6 pontos de controle na direção  $u$  e 6 na direção  $v$ , somando 36 ao total. Os vetores de nós utilizados são:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \quad (\text{equação 65})$$

$$\mathbf{v} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \quad (\text{equação 66})$$

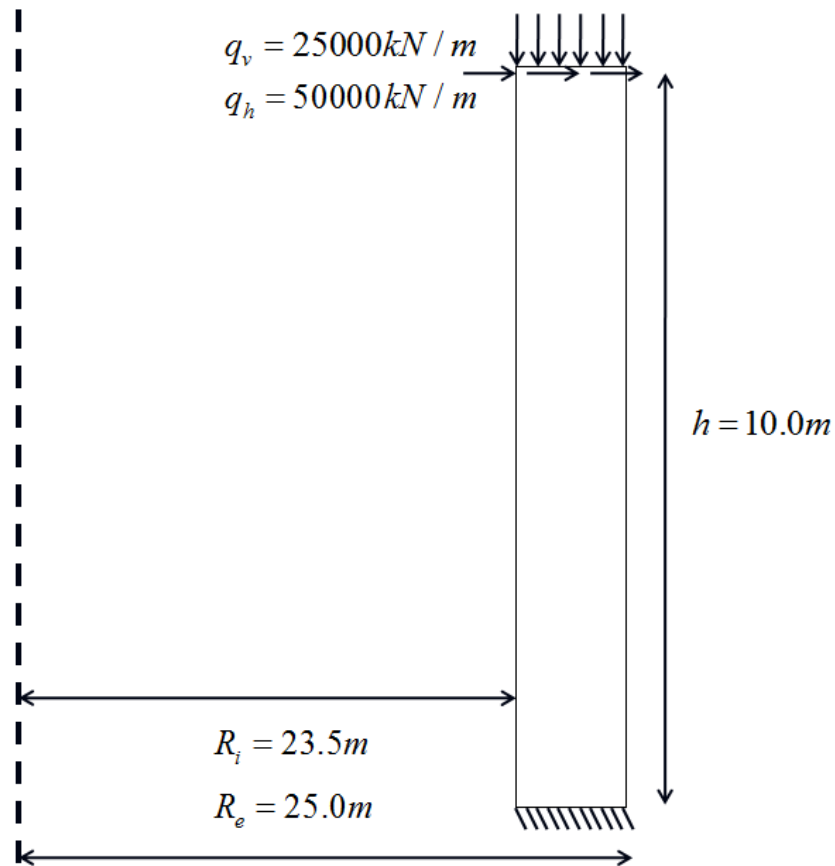


Figura 30: geometria e condições de contorno consideradas no exemplo 3

As variáveis de otimização são as coordenadas radiais ( $R$ ) dos pontos de controle dos bordos laterais, excluindo-se os pontos situados na borda superior da malha NURBS, totalizando 10 variáveis. A parametrização NURBS, bem como as variáveis de otimização (pontos em vermelho), são apresentadas na figura 32.

Assim como nos outros exemplos, os pontos de controle intermediários entre os pontos de controle que são variáveis de otimização, ou seja, os pontos azuis da figura 32, devem manter a distância radial relativa uniforme. Embora nos outros exemplo isso foi feito para a direção axial, o mesmo se aplica neste caso para a direção radial.

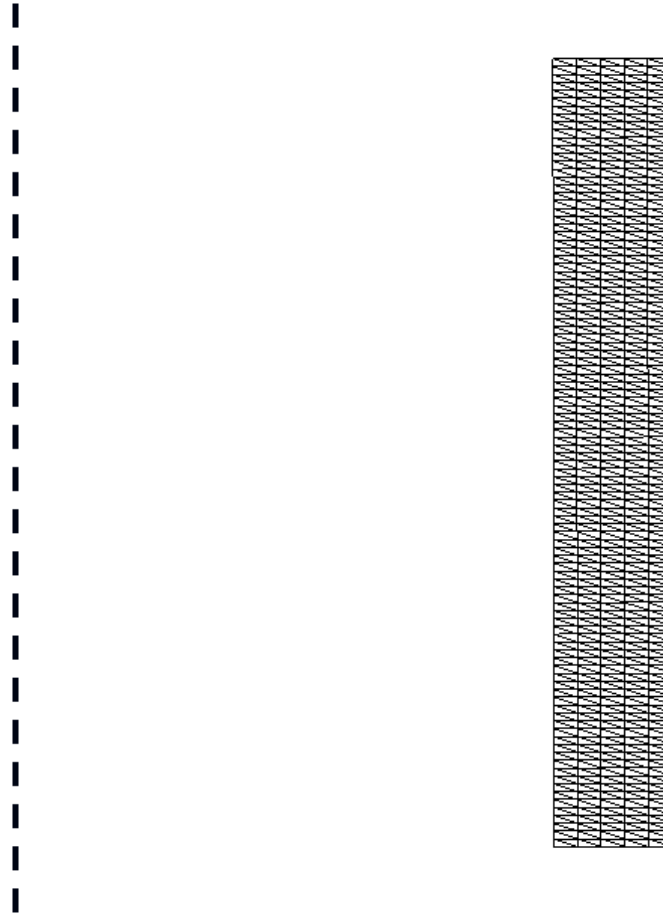


Figura 31: malha de elementos finitos inicial utilizada no exemplo 3

A função objetivo  $f$  utilizada no problema é a minimização da energia de deformação da estrutura. A função objetivo é restrita à condição de que o volume da estrutura se mantenha constante e que a distância radial (horizontal) entre os pontos de controle (que são tomados como variáveis) seja maior ou igual a 0.5m. Além disto, as variáveis são limitadas superiormente a uma coordena radial máxima de 75.0m e inferiormente a uma coordenada radial mínima no valor de 0.0m.

O quadro 4 mostra as coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle que são variáveis de otimização da geometria e dos pontos do bordo superior. A função objetivo ao longo das iterações é mostrada no gráfico da figura 33. A convergência foi obtida na 52<sup>a</sup> iteração. O valor final obtido foi  $f_{opt} = f_{52} = 0.199$ , sendo este valor normalizado, tomando  $f_{ini} = 1$ .

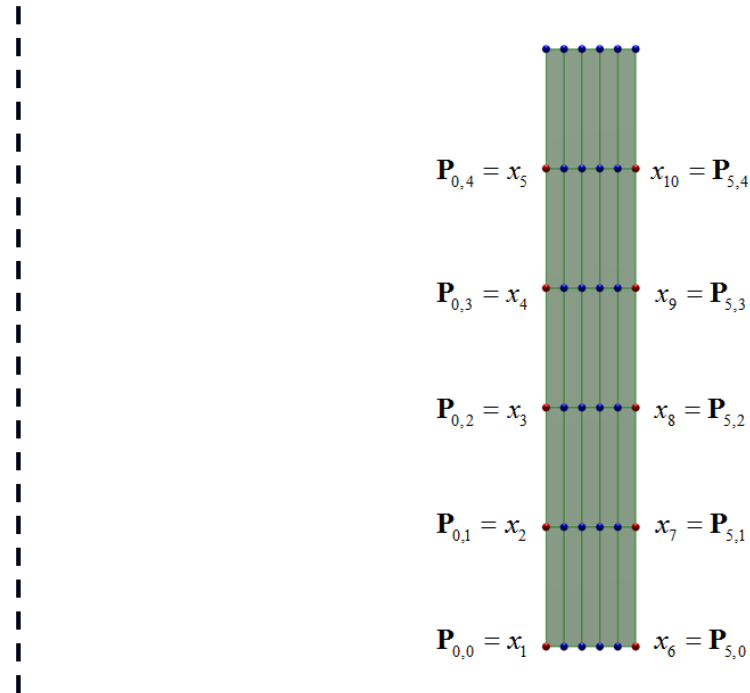


Figura 32: parametrização NURBS e variáveis consideradas no exemplo 3

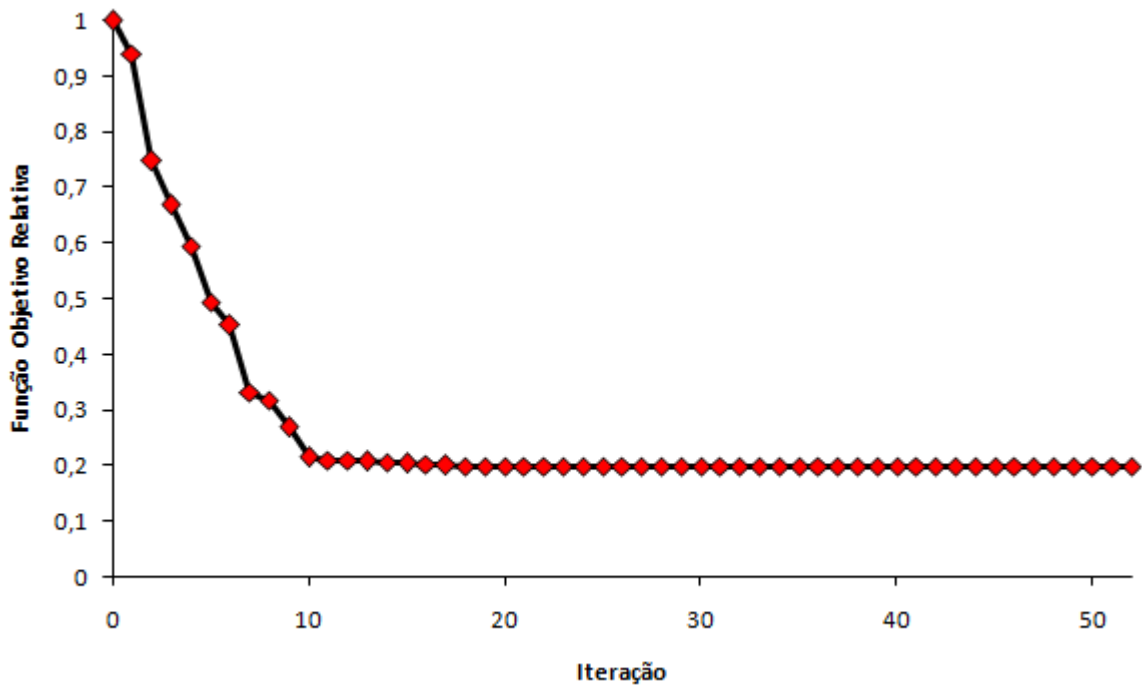


Figura 33: gráfico da função objetivo ao longo das iterações no exemplo 3

Os deslocamentos (em metros e em módulo) e tensões segundo o critério de von Mises (em  $N/m^2$ ) iniciais da geometria são apresentados na figura 34. A figura 35 mostra os mesmos resultados para a geometria final.



P	y	x ini	x fin
(0,0)	0.00	23.50	28.48
(1,0)	2.00	23.50	27.49
(2,0)	4.00	23.50	26.42
(3,0)	6.00	23.50	25.61
(4,0)	8.00	23.50	24.42
(5,0)	10.00	23.50	23.50
(0,5)	0.00	25.00	29.73
(1,5)	2.00	25.00	28.70
(2,5)	4.00	25.00	27.86
(3,5)	6.00	25.00	26.77
(4,5)	8.00	25.00	26.06
(5,5)	10.00	25.00	25.00

Quadro 4: coordenadas axiais iniciais e finais dos pontos de controle tomados como variáveis do exemplo 3 e do bordo superior

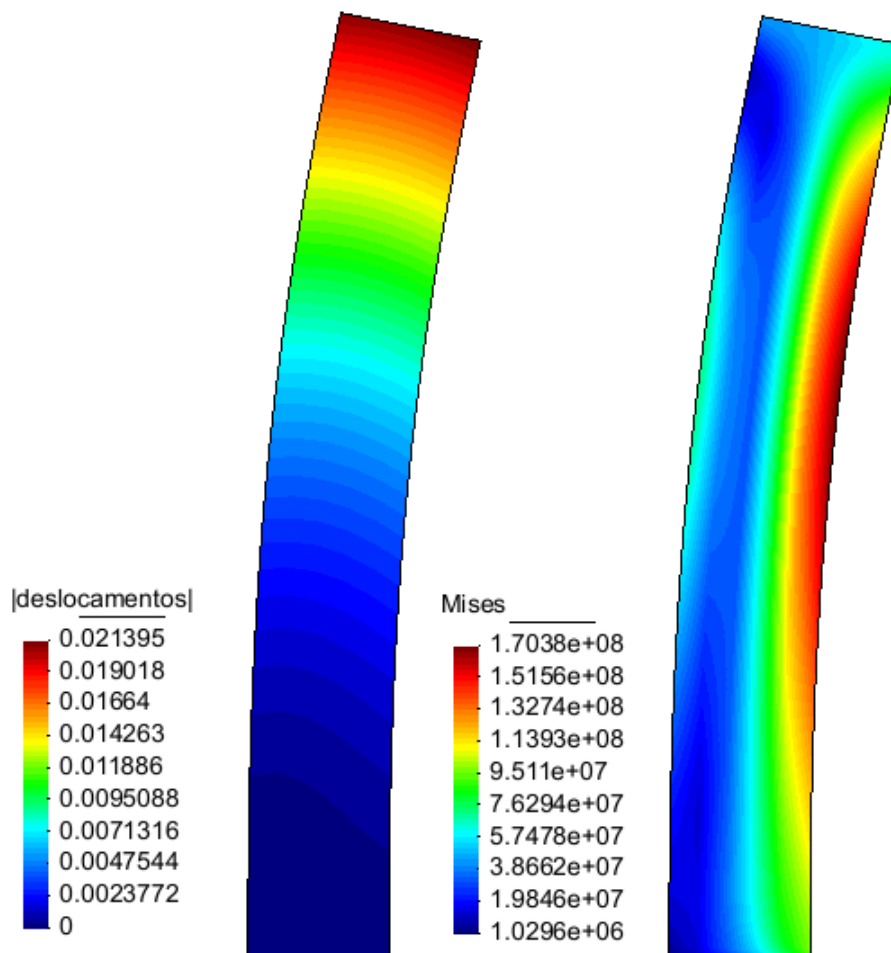


Figura 34: deslocamentos e tensões de von Mises da geometria inicial do exemplo 3

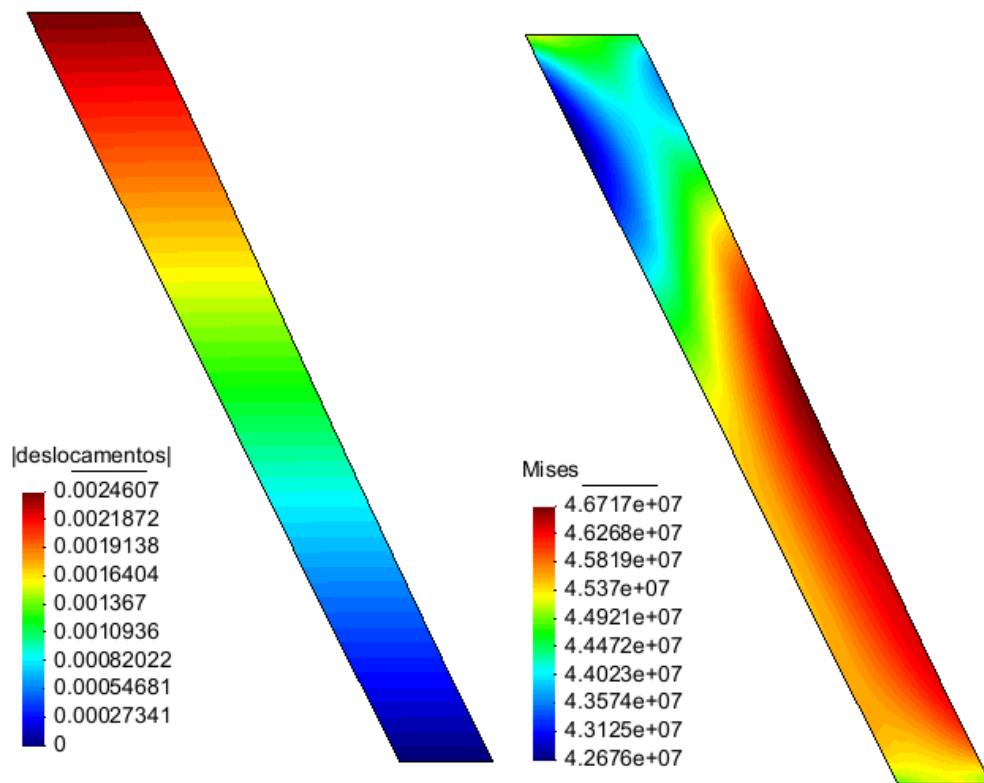


Figura 35: deslocamentos e tensões de von Mises da geometria final do exemplo 3

A estrutura otimizada apresenta uma forma assemelhada a um tronco de cone. A espessura da geometria otimizada é quase que constante, sendo levemente maior na região superior. A estrutura apresenta uma inclinação próxima da inclinação do carregamento equivalente aplicado, gerando um estado preferencialmente de compressão. Há um decréscimo da ordem de cerca de dez vezes tanto dos deslocamentos quanto das tensões. Os deslocamentos na estrutura otimizada encontram-se em uma distribuição uniforme. Na figura 36 é possível visualizar tridimensionalmente a estrutura otimizada em duas vistas diferentes.

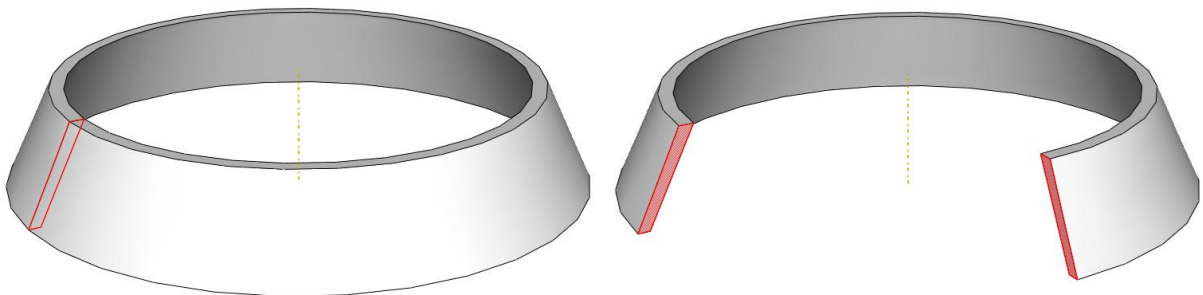


Figura 36: visualização tridimensional em 360° e 270° da estrutura otimizada no exemplo 3

## 9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo desenvolvido para otimização de forma de cascas axissimétricas se mostrou válido e eficiente. As geometrias encontradas são consistentes, possuindo melhor desempenho estrutural segundo o objetivo estipulado e respeitando as restrições impostas. A manipulação da geometria utilizando NURBS resultou em fácil modificação de forma e uma estrutura suave ao final do procedimento. Além disso, a não necessidade de gerar novas malhas de elementos finitos ao longo da modificação da geometria se mostrou válida através da deformação livre de forma. Entretanto, o cuidado de evitar transposições de pontos de controle são uma limitação desta aplicação. A análise de sensibilidade realizada utilizando AD também se mostrou válida, ainda que a utilização da AD, para fins de otimização estrutural tem sido muito pouco explorada. O modelo de SQP também se mostrou eficiente, uma vez que mesmo tomando geometrias muito distantes de sua forma otimizada como iniciais, o método mostrou-se suficientemente robusto para encontrar a solução do problema.

A manipulação direta da espessura através das modificações da seção transversal durante o processo de otimização torna possível obter uma variação contínua da espessura, não sendo isto possível quando se utiliza um elemento finito de casca onde a espessura mantém-se constante em cada elemento. Entretanto, a estrutura fica limitada a carregamentos exclusivamente axissimétricos neste caso, enquanto que no caso geral isto não acontece.

As geometrias ótimas encontradas não garantem ser o mínimo global do problema, mas sim, um mínimo local. A falta de prova rigorosa da convexidade do problema de otimização, no entanto, não exclui a possibilidade do mínimo local ser, de fato, um mínimo global.

Algumas sugestões propostas para melhoramento, investigação, pesquisa e avanço relativo ao presente trabalho são:

- a) implementação da possibilidade de um comportamento que inclua efeitos de não linearidade geométrica da estrutura e física do material no código;
- b) realização de mais testes e comparações;
- c) implementação de efeitos multifísicos como interação fluido-estrutura e interação com cargas magnéticas;
- d) otimização da topologia da estrutura utilizando a teoria da homogeneização;
- e) estudo sobre a convexidade do problema;

- f) investigação de efeitos de flambagem e vibrações nas estruturas otimizadas;
- g) consideração de imperfeições nas estruturas a serem otimizadas.

Como resultado do trabalho, obteve-se geometrias otimizadas cuja forma tende a uma geometria natural. As formas naturais de estruturas, tanto as de uso em Engenharia, quanto as próprias formas encontradas na natureza, são, em geral, formas ótimas. Tais formas, além do melhor desempenho para fins estruturais, possuem uma estética agradável, sendo este fato explorado por engenheiros e arquitetos em seus projetos desde muito tempo atrás.

## REFERÊNCIAS

- ARORA, J. **Introduction to Optimum Design**. 1st ed. New York: McGraw-Hill, 1989.
- BLETZINGER, K. U.; WÜCHNER, R.; DAOUD, F.; CAMPRIBÍ, N. Computational Methods for Form Finding and Optimization of Shells and Membranes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 30, p. 3438-3452, Aug. 2005.
- CAMPRUBÍ, N.; BISCHOFF, M.; BLETZINGER, K. U.; REITINGER, R. Shape Optimization of Shells and Locking. **Computers and Structures**, Munich, v. 82, n. 29, p. 2551-2561, Nov. 2004.
- CHILTON, J. **The Engineer's Contribution to Contemporary Architecture**. Heinz Isler. 1st ed. London: Telford, 2000.
- ESPATH, L. F. **Otimização de Forma de Cascas via Deformação Livre de Forma Baseado em NURBS**. 2009. 153 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- ESPATH, L. F.; LINN, R. V.; AWRUCH, A. M. Structural Shape Optimization using Gradient-Based Method. In: XXXI IBERIAN-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE), 2010, Buenos Aires. **Proceedings...** Brazilian Association for Computational Methods in Engineering (ABMEC), 2010.
- GID, The Personal Pre and Postprocessor, version 10.0.1: CIMNE International Center for Numerical Methods in Engineering, 2010.
- GIERING, R.; KAMINSKI, T. Recipes for Adjoint Code Construction. **Internal Report from Max-Planck Institute für Metereologie**, Hamburg, v. 1, n. 212, p. 1-35, Aug. 1996.
- GRAEFE, R. Reconstruction of Antoni Gaudí's Church of the Colónia Güell. In: Third International Congress on Construction History, 2009, Cottbus. **Proceedings...** Cottbus: Brandenburg University of Technology Cottbus, 2009.
- GRIEWANK, A.; WALTHER, A. **Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation**. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- HOOKE, R. **A Description of Helioscopes, and some Other Instruments**. 1st ed. London: John Martyn, 1617.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: linear static and dynamic finite element analysis**. Mineola, NY: Dover, 2000.
- INRIA, TAPENADE AD, 2002. Disponível em:  
<<http://tapenade.inria.fr:8080/tapenade/index.jsp>>. Acesso em: 15 nov. 2010.

MASE, G. T.; MASE, G. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. 2nd ed. Boca Raton: CRC, 1999.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. 2nd ed. New York: Springer Verlag, 2006.

PIEGL, L. A.; TILLER, W. **The NURBS Book**. 2nd ed. New York: Springer Verlag, 1997.

RAMM, E.; BLETZINGER, K. U.; REITINGER, R. Shape Optimization of Shell Structures. **IASS Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures**, Madrid, v. 34, n. 112, p. 103-121, Jan. 1993.

RAMM, E.; WALL, W. A. Shell Structures – A Sensitive Interrelation Between Physics and Numerics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, n. 1, p. 381-427, May 2004.

ROGERS, D. F. **An Introduction to NURBS with Historical Perspective**. San Francisco: Morgan Kaufman, 2001.

SANTIAGO, F. H. Structural Design in the Work of Gaudí. **Architectural Science Review**, Sydney, v. 8 n. 2, p. 324-339, Dec. 2006.

SCHITTKOWSKI, K. NLPQL: A FORTRAN Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. **Annals of Operations Research**, v. 5, n. 2, p. 485-500, May 1986.

VERMA, A. An Introduction to Automatic Differentiation. **Current Science**, Bangalore, v. 78, n. 7, p. 804-807, Apr. 2000.

VERMA, S. **Investigation of Adjoint Based Shape Optimization Techniques in Nascart-GT using Automatic Reverse Differentiation**. 2009. 28 f. Thesis (Bachelor of Science) – School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**: Volume 1: The Basis. 5th ed. Woburn: Butterworth-Heinemann, 2000.