

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS
SUJEITAS A EFEITOS AEROELÁSTICOS**

por

Daniel Milbrath De Leon

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2011.

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS SUJEITAS A EFEITOS AEROELÁSTICOS

por

Daniel Milbrath De Leon

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof^a. Dr^a. Adriane Prisco Petry (PROMEC - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz (PROMEC - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Roberto Gil Annes da Silva (ITA/ São José dos Campos - Brasil)

Prof. Ph.D. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 09 de Fevereiro de 2011.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é dedicado a todos que, de maneira direta ou indireta contribuíram para o sucesso de mais essa etapa na minha vida. A lista evidentemente é grande e ficaria difícil citar todos um a um neste espaço reduzido.

Gostaria inicialmente de agradecer ao meu orientador, Prof. Jun Sergio Ono Fonseca pelo apoio em todas as etapas deste trabalho, e ajuda imprescindível nos momentos de dificuldade, que não foram poucos, para a conclusão deste trabalho. Agradeço também ao muito em breve Doutor Carlos Eduardo de Souza, não só pela ajuda como pela idéia inicial, sem a qual este trabalho sequer teria começado. Se não entra oficialmente como coorientador desse trabalho, por razões meramente burocráticas, entra como um agradecimento especial e o reconhecimento da indispensável ajuda.

Agradeço aos membros da banca de avaliação, professores Adriane, Ignácio, e Gil, que colaboraram muito com as correções e dicas que aumentaram em muito a qualidade da versão final dessa dissertação. Aproveito para agradecer também à CAPES pelo apoio financeiro durante todo o período do mestrado.

Não posso me esquecer da turma do GMAp, e da turma do futebol de quarta-feira, composta pelos integrantes do GMAp e “forasteiros” dos outros laboratórios da engenharia. São tantos que infelizmente me limito a apenas citá-los dessa forma em função do pouco espaço, mas seria injusto ignorar a importância de uma boa conversa jogada fora e daquela correria atrás da bola para distrair e revigorar as idéias.

Por fim, mas de extrema importância agradeço à minha família, especialmente à minha mãe Vinilda e minha irmã Lauren por todo apoio dado desde o início até o fim dessa jornada que resolvi realizar.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia utilizando técnicas de otimização estrutural para o projeto de placas feitas de material composto laminado sujeitas à interação fluido-estrutura. O procedimento de otimização busca o aumento da velocidade de *flutter* através da maximização das frequências naturais relacionadas aos modos de vibração que estão envolvidos no fenômeno. A análise de estabilidade aeroelástica é feita através do método ZONA6 ou método de malha de dipolos, implementado no software ZAERO. O método dos elementos finitos é aplicado para resolver as equações de equilíbrio no modelo estrutural, a sensibilidade dos autovalores com relação às variáveis de projeto é calculada analiticamente e programação linear sequencial é aplicada. A maximização é feita usando dois métodos; o primeiro utiliza uma análise aeroelástica para determinar qual modo causa o início de *flutter*, o autovalor associado é então maximizado, na segunda estratégia um método de diferenças finitas é aplicado e as sensibilidades da velocidade de *flutter* com respeito aos autovalores são calculadas, a análise de sensibilidade é usada para guiar o processo de otimização. Por fim, um processo de otimização topológica é aplicado para reduzir a massa das placas em estudo, usando a minimização de volume do material base com a densidade sendo a variável de projeto.

Palavras-chave: Otimização Estrutural, Método dos Elementos Finitos, Aeroelasticidade, Materiais Compostos Laminados, Placas Finas.

ABSTRACT

STRUCTURAL OPTIMIZATION OF LAMINATED COMPOSITE PLATES SUBJECT TO AEROELASTIC EFFECTS

This work presents a structural optimization aided design methodology for composite laminated plates subject to fluid-structure interaction. The goal of the optimization procedure is to increase the flutter speed onset through the maximization of natural frequencies related to the vibration modes involved in the phenomenon. The aeroelastic stability analysis is performed using the ZONA6 method or Doublet mesh method by means of ZAERO software. The finite element method is applied to solve the structural model equilibrium equations, the eigenvalues sensitivities with respect to design variables are calculated analytically, and sequential linear programming is applied. The maximization is accomplished using two methods; the first method uses an aeroelastic analysis to determinate which eigenmode causes the flutter onset, and its eigenvalue is then maximized. In the second method, a forward finite difference method is applied and the flutter speed sensitivities with respect to the eigenvalues are calculated. This sensitivity is used to guide the optimization process. Finally, a topology optimization process is applied to reduce the mass of the plates under study, using the base material volume minimization with density as design variable.

Keywords: Structural Optimization, Finite Element Method, Aeroelasticity, Laminated Composite Materials, Flat Plates.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Organização do Trabalho	4
2	MODELO ESTRUTURAL	5
2.1	Elasticidade Linear Infinitesimal	5
2.2	Método dos Elementos Finitos	7
2.2.1	Solução do Problema Modal	9
2.2.2	Elemento Finito de Casca.....	10
2.2.3	Determinação do Campo de Deslocamentos do Elemento	12
2.3	Materiais Compostos	16
2.3.1	Comportamento Macromecânico de uma Lâmina.....	19
2.3.2	Estado Plano de Tensões	21
2.4	Transformação de Coordenadas	22
2.5	Teoria de Laminação da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem	26
2.5.1	Equações de Halpin-Tsai	30
2.6	Obtenção das Matrizes de Rigidez e Massa	32
2.6.1	Matriz de Rigidez	32
2.6.2	Matriz de Massa	33
2.7	Massa Modal Efetiva	34
3	MODELO AEROELÁSTICO	36
3.1	Fundamentos da Aeroelasticidade	38
3.2	“Aeroelastic Tailoring”	45
3.2.1	Breve Histórico	45

3.2.2	“Fiber Steering”	48
4	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	50
4.1	Breve Histórico da Otimização Estrutural	50
4.2	Conceitos Básicos	51
4.2.1	Variáveis de Projeto	52
4.2.2	Função Objetivo	52
4.2.3	Restrições de Projeto	53
4.2.4	Mínimos Locais e Globais	54
4.3	Formulação do Problema de Otimização	55
4.4	Programação Matemática	57
4.4.1	Programação Linear	58
4.4.2	Programação Linear Sequencial	58
4.5	Otimização Topológica	60
5	ESTRATÉGIA E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO	65
5.1	Maximização de Autovalores	65
5.1.1	Autovalores Repetidos	67
5.2	Diferenças Finitas à Frente	71
5.3	Minimização do Volume com Restrição a Frequência Natural	74
6	RESULTADOS	77
6.1	Otimização da Orientação	79
6.1.1	Asa $[0, 90]$	79
6.1.2	Asa $[0, 90]_s$	84
6.1.3	Asa $[0, 45, 90]_s$	88
6.1.4	Comparação de Resultados	91
6.2	Otimização Topológica	92
6.2.1	Asa $[0, 0]_s$	92
6.2.2	Asa $[0, 0, 0]_s$	95
6.3	Organização dos Resultados	98
6.4	Asa acrescida de massa	98

7 CONCLUSÕES.....	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
APÊNDICE A	110
APÊNDICE B	119
ANEXO I.....	121
ANEXO II.....	123

LISTA DE SÍMBOLOS

\bullet^{-1}	Inversa de uma matriz quadrada
\bullet^T	Transposta de uma matriz ou de um vetor
$\ \bullet\ $	Norma Euclidiana de um vetor ou matriz
\times	Operador produto vetorial
\Re	Conjunto dos números reais
$\det[\bullet]$	Determinante de uma matriz quadrada
$ J $	Determinante da matriz Jacobiana
1, 2, 3	Sistema de coordenadas global
a	Alteração do valor das variáveis de projeto a cada iteração
a^{inf}, a^{sup}	Limites laterais para a programação linear
\mathbf{A}	Matriz de rigidez extensional
	Matriz dos coeficientes das restrições linearizadas
$\mathbf{A}(ik)$	matriz de coeficientes de influência aerodinâmico
b	Semicorda de referência [m]
\mathbf{b}	Forças de corpo [N/m^3]
\mathbf{B}	Matriz de rigidez do acoplamento extensão-flexão
\mathbf{c}	Vetor que contém os coeficientes da função objetivo linearizados
\mathbf{C}_{ijkl}	Tensor de 4ª ordem das relações constitutivas homogeneizado [N/m^2]
\mathbf{C}_{ijkl}^0	Tensor de 4ª ordem das relações constitutivas do material base [N/m^2]
\mathbf{C}^{dpl}	Tensor de 4ª ordem das relações constitutivas na direção principal do laminado [N/m^2]
\mathbf{C}^{slc}	Tensor de 4ª ordem das relações constitutivas no sistema local [N/m^2]
\mathbf{d}_i	Deslocamento apresentado pelo nó i
\mathbf{D}	Matriz de rigidez flexional
E_f, E_m	Módulo de elasticidade da fibra e da matriz, respectivamente [GPa]
E_i	Módulo de elasticidade na direção i [GPa]
$f(x)$	Função objetivo
\mathbf{f}	Vetor de forças genérico

$\tilde{\mathbf{f}}$	Vetor de forças aerodinâmicas generalizado
$\mathbf{f}_a(x), \mathbf{f}_e(t)$	Vetor de forças aerodinâmicas induzidas pela deformação estrutural e vetor de forças aerodinâmicas externas, respectivamente
\mathbf{F}	Matriz deslocamento-deformação
$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$	Matrizes deslocamento-deformação para o modelo de Kumar
$g_j(x)$	Conjunto representando as j restrições de igualdade
G_f, G_m	Módulo de cisalhamento transversal da fibra e da matriz, respectivamente
G_i	Módulo de cisalhamento transversal na direção i
\mathbf{G}_s	Matriz de interpolação por <i>splines</i>
h	Espessura da lâmina [m]
$h_k(x)$	Conjunto representando as k restrições de desigualdade
h_k	Espessura da k -ésima lâmina
\mathbf{I}	Matriz Identidade
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
k	Frequência reduzida [rad]
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
$\tilde{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez generalizada
\mathbf{K}_e	Matriz de rigidez de um elemento
l_i	Tamanho do limite móvel da i -ésima variável de projeto
$\bar{\mathbf{I}}$	Vetor de coeficientes
\mathbf{L}^∞	Espaço das funções integráveis de Lebesgue
$m_{ef,i}$	Massa modal efetiva para o modo i [kg]
\mathbf{M}	Matriz de massa
$\tilde{\mathbf{M}}$	Matriz de massa generalizada
\mathbf{M}_e	Matriz de massa de um elemento
\mathbf{n}	Vetor normal à superfície de aplicação de uma força
N_i	Função de forma do nó i do elemento finito
\mathbf{N}	Vetor de esforços normais [N/m ²]
p	Parâmetro de penalização da função objetivo
q	Parâmetro de penalização do tensor constitutivo
\mathbf{q}_a	Vetor deslocamento dos pontos de controle aerodinâmicos

q_∞	Pressão dinâmica
$\bar{\mathbf{Q}}$	Matriz constitutiva do escrita no sistema global do laminado $[N/m^2]$
$\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{s}}$	Vetor de orientação da posição no plano e fora do plano, respectivamente
$s(x)$	Função objetivo
\mathbf{S}	Matriz de flexibilidade
t	Tempo $[s]$
t_i	Espessura total do laminado no nó i $[m]$
\mathbf{t}	Vetor carregamento aplicado
\mathbf{T}_1	Matriz de rotação no plano
\mathbf{T}_2	Matriz de rotação no espaço
u_i, v_i, w_i	Deslocamentos do nó i
$\ddot{\mathbf{u}}_j$	Vetor aceleração do corpo no ponto j
V	Velocidade do fluido $[m/s]$
\mathbf{V}	Volume de um corpo $[m^3]$
x, y, z	Sistema de coordenadas da lâmina
x^*	Ponto extremo de um funcional
\mathbf{x}	Vetor de deslocamentos
$\bar{\mathbf{x}}$	Vetor de deslocamentos generalizados
$\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_e$	Vetor que contém as coordenadas dos pontos no modelo aerodinâmico e estrutural, respectivamente
$\mathbf{Y}(ik)$	Matriz de coeficientes de influência aerodinâmicos generalizada
α	Parâmetro de penalização da função objetivo
	Coefficiente a ser determinado no problema de autovalor repetido
α_{1i}, α_{2i}	Rotação do nó i em torno do eixo 2 e do eixo 1, respectivamente $[rad]$
β	Coefficiente a ser determinado no problema de autovalor repetido
γ	Massa específica do material $[kg/m^3]$
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de participação modal
δ	Fator de variação dos limites móveis
δ_{ij}	Símbolo de Kroenecker
δu_i	Deslocamento virtual do ponto i
$\delta \epsilon_{ij}$	Deformação virtual do ponto i na direção j

Δ_1, Δ_2	Magnitude da atualização das variáveis de projeto de 1 passo anterior e a 2 passos anteriores, respectivamente
Δ_i	Deslocamento total apresentado pelo ponto i
ϵ	Campo de deformações infinitesimal
ϵ^0	Vetor deformação no plano médio da placa
θ_N	Orientação inicial da lâmina N [rad]
θ_i	Orientação da variável de projeto i em relação a coordenada global [rad]
κ	Vetor curvatura da placa
λ	Autovalor do problema modal [rad ² /s ²]
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
ν_f	Coefficiente de Poisson da fibra
ν_m	Coefficiente de Poisson da matriz
ξ, η, ζ	Sistema de coordenadas do elemento isoparamétrico linear
ρ	Variável de projeto do problema de otimização topológica
σ	Tensor tensão de Cauchy
σ_{ij}	Componente do tensor de Cauchy no plano i na direção j
ϕ	Autovetor do problema modal
Φ	Matriz de autovetores
Ψ	Matriz do problema de autovalores repetidos
ω_i	Frequência natural relativa ao modo i [rad/s]
Ω	Domínio ocupado por um corpo [m ³]
Ω_t	Região de aplicação das condições de contorno de Neumann [m ²]
Ω_u	Região de aplicação das condições de contorno de Dirichlet [m ²]
Ω^{mat}	Domínio onde existe material [m ³]

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CFD	Computational Fluid Dynamics
CLT	Classical Lamination Theory
DLM	Doublet Lattice Method
EPT	Estado Plano de Tensões
FSDT	First-Order Shear Deformation Theory
LCO	Limit Cycle Oscilation
LP	Linear Programming
MEF	Método dos Elementos Finitos
MC	Método da Continuação
MOADF	Método de Otimização Aeroelástico por Diferenças Finitas
<i>ndesvar</i>	Número de variáveis de projeto
<i>nelem</i>	Número de elementos
<i>nmodos</i>	Número de modos de vibração
<i>nnos</i>	Número de nós
<i>notmlyr</i>	Número de camadas a otimizar
PM	Programação Matemática
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SLP	Sequential Linear Programming
UAV	Unmanned Aerial Vehicle
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado
VGf	Velocidade - Amortecimento - Frequência

Lista de Figuras

2.1	Problema de Elasticidade Linear Infinitesimal.	6
2.2	Elemento Sólido Tridimensional e Elemento de Ahmad	11
2.3	Deslocamento de um ponto no plano médio.	12
2.4	Deslocamento de um ponto fora do plano médio.	13
2.5	Deslocamento Δ_i apresentado pelo ponto Q	15
2.6	Exemplo de sequência de laminação	17
2.7	Eixos coordenados utilizados no trabalho	18
2.8	Numeração empregada no trabalho	19
2.9	Sistemas coordenados apresentados no trabalho.	23
2.10	Geometria (a) indeformada e (b) deformada de uma placa na hipótese da teoria de primeira ordem.	27
3.1	Triângulo de Collar (com adição de controle).	36
3.2	Frequência e resposta dinâmica de um ponto na asa a diferentes velocidades. .	38
3.3	Diagrama do problema de aeroelasticidade.	39
3.4	(a) Asa discretizada em painéis para o método Doublet-Lattice e pontos de controle. (b) Sistema de coordenadas local de cada painel	42
3.5	Exemplo de uma análise de estabilidade usando o método g	44
3.6	Projeto do propulsor de Munk.	46
3.7	Short SB. 4 Sherpa.	46
3.8	X-29.	47
3.9	Resultados utilizando <i>fiber steering</i>	49
4.1	Casos possíveis de funções	55
4.2	Espaço de Projeto	56
4.3	Exemplo de expansão por séries de Taylor	59

4.4	Problema geral de otimização topológica	61
4.5	Penalização da função objetivo como em 4.16 (à esquerda) e para diversos α com $p=8$ (à direita).	63
4.6	Laminado otimizado apresentando cavidades internas.....	64
5.1	Problema de autovalor repetido	67
5.2	Fluxograma do problema de maximização dos autovalores	71
5.3	Fluxograma da Otimização usando MOADF.....	73
5.4	Fluxograma do processo de otimização topológica das asas.....	76
6.1	Modelo testado.	78
6.2	Asa discretizada para o método de elementos finitos (esquerda) e para o método de painel (direita).	78
6.3	Análise modal inicial da asa $[0, 90]$	79
6.4	Análise aeroelástica inicial da asa $[0, 90]$	80
6.5	Otimização da orientação para a asa $[0, 90]$ usando a primeira estratégia.	81
6.6	Função Objetivo da otimização de orientação.	81
6.7	Modos de Vibração e frequências naturais da asa após o processo de otimização.	82
6.8	Curvas VGF da estrutura usando a primeira estratégia.	82
6.9	Modos de vibração da asa $[0, 90]$ após usar MOADF.....	83
6.10	Curvas VGF da estrutura otimizada usando MOADF.	83
6.11	Configuração das fibras após MOADF.	84
6.12	Modos e frequências de vibração da asa $[0, 90]_s$	85
6.13	Análise Modal da asa $[0, 90]_s$ otimizada.	85
6.14	Função objetivo da otimização da orientação da asa $[0, 90]_s$	86
6.15	Configuração das fibras de cada lâmina.	86
6.16	Análise modal da asa otimizada seguindo MOADF.	87
6.17	Configuração das fibras da asa $[0, 90]_s$ após MOADF.	87
6.18	Análise modal inicial na placa simétrica de 6 lâminas.....	88
6.19	Análise modal ao fim da primeira estratégia.	88
6.20	Evolução da maximização.....	89
6.21	Configuração das fibras da asa após a primeira estratégia.	89

6.22	Análise modal após MOADF.	90
6.23	Configuração final da asa de 6 lâminas usando MOADF.	90
6.24	Resumo dos Resultados das estratégias implementadas.	91
6.25	Função objetivo para o processo de otimização da orientação e topológica. ...	93
6.26	Lâminas 1 e 4 com a topologia otimizada.	94
6.27	Evolução da função objetivo em dois níveis para a asa de 6 lâminas.	96
6.28	Topologia final das lâminas da asa otimizada.	97
6.29	Massa acoplada à ponta da asa.	99
6.30	Função objetivo da otimização da asa com massa adicionada.	100
6.31	Topologia das lâminas 1 e 6 para a asa com massa na ponta.	101
7.1	Curvas VGF da asa $[0, 90]_s$	111
7.2	Curvas VGF da asa $[0, 90]_s$ otimizada seguindo a análise inicial.	112
7.3	Curvas VGF da asa $[0, 90]_s$ otimizada seguindo MOADF.	112
7.4	Curvas VGF da asa $[0, 45, 90]_s$	113
7.5	Curvas VGF da asa $[0, 45, 90]_s$ após otimização.	113
7.6	Curvas VGF da asa $[0, 45, 90]_s$ após MOADF.	114
7.7	Curvas VGF da asa $[0, 0]_s$	114
7.8	Curvas VGF da asa $[0, 0]_s$ após convergência da orientação.	115
7.9	Curvas VGF da asa $[0, 0]_s$ após convergência da topologia.	115
7.10	Curvas VGF da asa $[0, 0, 0]_s$ antes da otimização.	116
7.11	Curvas VGF da asa $[0, 0, 0]_s$ após convergência da orientação.	116
7.12	Curvas VGF da asa $[0, 0, 0]_s$ após convergência da topologia.	117
7.13	Curvas VGF da asa com massa adicionada.	117
7.14	Curvas VGF da asa com massa adicionada após convergência da orientação. .	118
7.15	Curvas VGF da asa com massa adicionada após convergência da topologia. ..	118
7.16	Elemento finito quadrilátero linear isoparamétrico de 8 nós.	121

Lista de Tabelas

6.1	Propriedades de uma lâmina.	77
6.2	Valores das primeiras frequências naturais do modelo numérico e real [Hz].	78
6.3	Comparação das velocidades de início de <i>flutter</i> para as estratégias.	88
6.4	Comparação das velocidades de início de <i>flutter</i> para as estratégias.	91
6.5	Comparação dos resultados para as diferentes estratégias.	91
6.6	Análise modal inicial da asa de 4 lâminas.	93
6.7	Análise modal ao fim do processo de otimização.	94
6.8	Comparação das velocidades de início de <i>flutter</i> ao término de cada nível.	95
6.9	Análise modal ao fim do processo de otimização.	95
6.10	Análise modal ao fim do processo de otimização da asa de 6 lâminas.	97
6.11	Organização dos resultados da otimização em dois níveis.	98
6.12	Análise modal inicial da asa com massa adicional.	99
6.13	Análise modal ao fim do processo de otimização.	100
6.14	Organização dos resultados da otimização em dois níveis.	101

1. INTRODUÇÃO

Em todos os tipos de projetos, em engenharia, economia ou qualquer outra área do conhecimento, a relação custo-benefício é indispensável para a medida do sucesso do empreendimento. Apesar de outros fatores muitas vezes serem relevantes, a relação custo-benefício é o fator que decide sobre a viabilidade de um projeto. Uma etapa importante na decisão de um projeto é a escolha dos parâmetros que estarão envolvidos no processo. Por exemplo, um motor que polua menos ou uma máquina que realize o mesmo processo de outras em menos tempo não serão necessariamente os projetos mais baratos, porém, se o benefício trazido por ambas for relevante, esses projetos tornam-se competitivos. O correto equacionamento desses parâmetros é a chave para o sucesso de um projeto, por isso muitas vezes é indicado que se dispense maior tempo à fase de desenvolvimento de uma estrutura ou componente por exemplo, do que à fase de execução.

A otimização é uma ferramenta poderosa a serviço das mais diversas áreas do conhecimento, colaborando para que se determine as melhores respostas possíveis para um dado problema. Em engenharia, a aplicação de um problema de otimização pode resultar em uma estrutura que desempenhe a mesma função estrutural de outras com o emprego de menos material, ou pode resultar em um processo tão eficiente quanto outros com o menor número de etapas, por exemplo.

O uso de placas e cascas feitas de material composto laminado em diversas aplicações da engenharia tem crescido rapidamente nas últimas décadas. Inicialmente existiu uma certa relutância no uso deste tipo de material tendo em vista que suas propriedades não eram muito conhecidas. Com o desenvolvimento de procedimentos de cálculo para essas estruturas e inúmeros testes realizados com esses tipos de materiais tornou-se possível viabilizar o emprego dos materiais reforçados por fibras em todas áreas da engenharia. O grande atrativo de materiais reforçados por fibras é que se torna possível fabricar peças que respondam de maneira mais eficiente em uma direção de interesse, bastando para isso que se determine a direção das fibras do material. Portanto, esse tipo de material tornou-se objeto rapidamente

de estudos em problemas de otimização com as mais diversas variáveis de projeto.

O desenvolvimento de materiais compostos laminados está intimamente ligado ao uso na indústria aeronáutica. Os projetistas ganharam uma grande variedade de opções para a construção de estruturas de baixo peso. O primeiro planador feito de fibra de vidro foi o FS 24 Phoenix, feito na Alemanha em 1957. Esse trabalho incentivou o estudo desse tipo de material em outras aeronaves. Na década de 1960 alguns componentes estruturais de caças já começaram a ser produzidos de materiais compostos, como exemplo, o F-111 já foi projetado com o estabilizador horizontal feito de um material composto. Nos anos 70 o uso de materiais avançados já era rotina nos projetos aeronáuticos, e nos anos 2000 o emprego de tais materiais já era obrigatório em projetos competitivos de aeronaves. Em suma, nos últimos 40 anos o emprego de materiais compostos já atingiu cerca de 15 % do peso estrutural de aviões civis e mais de 50 % do peso estrutural de helicópteros e aviões militares [EADS Deutschland GmbH, 2004].

Um capítulo especial do uso de materiais compostos na aeronáutica são os veículos aéreos não-tripulados (VANT), conhecidos também pela sigla em inglês UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*). Os VANT têm sido explorados nas últimas décadas principalmente no campo militar como aeronaves de teste ou equipamentos de reconhecimento de campo. Logo em seguida se encontrou utilidade civil para esses equipamentos como imagens aéreas para a agricultura, inspeção de linhas elétricas, monitoramento ambiental, etc. Cada vez a lista de empregos de tais equipamentos cresce com o desenvolvimento de pesquisa nessa área.

Uma característica importante das asas desse tipo de aeronave é a possibilidade de estarem sujeitas a uma alta deflexão, bem maior do que no caso de asas convencionais, rígidas, de aeronaves de grande porte. Uma consequência disso é a possibilidade de surgimento de *flutter* durante uma operação normal.

A característica citada acima introduz o termo *Aeroelastic Tailoring* no projeto de asas deste tipo. *Aeroelastic Tailoring* pode ser descrito como o processo que faz uso das propriedades direcionais das fibras dos materiais compostos e orienta essas fibras nas direções ótimas [Hertz et al., 1981]. Este método incorpora técnicas de otimização para a determinação da melhor configuração da distribuição das fibras de um composto reforçado, buscando um projeto aeroelástico mais eficiente. Portanto essa técnica pode ser empregada sem o uso direto de equações da aerodinâmica, e sim focando no processo de otimização.

O presente trabalho segue a pesquisa iniciada na dissertação de Carlos Eduardo de Souza [de Souza, 2003], a qual visava aumentar a rigidez e diminuir o peso de placas e cascas de materiais compostos sujeitos a diversos tipos de carregamento usando para tanto a orientação das fibras destes materiais. No trabalho aqui desenvolvido, asas feitas de material composto laminado, modeladas como placas planas são otimizadas com o intuito de dificultar o mecanismo de acoplamento aeroelástico, modificando as frequências naturais da estrutura, responsáveis pelo surgimento dos efeitos de *flutter* quando submetidas a um escoamento em sua superfície. Com isso, a velocidade do escoamento em que os efeitos de *flutter* irão surgir será aumentada, aumentando os limites de velocidade de projeto. Em um segundo passo uma otimização da topologia é aplicada, de forma que uma parte do ganho na etapa de otimização anterior se converta na redução do peso da estrutura, como objetivo de se encontrar um projeto que tenha uma resposta aeroelástica mais eficiente e um menor peso, quando comparadas as estruturas final e inicial.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é melhorar a performance de asas feitas de material composto, quando submetidas a um escoamento em sua superfície, de forma que efeitos de instabilidade oscilatória apareçam em velocidades maiores do escoamento. Para tanto foram utilizadas técnicas de otimização estrutural nas asas, e o modelo aeroelástico foi utilizado para conferência da efetividade do processo, e para auxiliar na otimização.

De forma detalhada pode-se especificar os objetivos deste trabalho como:

- estudar os efeitos da maximização das frequências naturais de asas submetidas a um escoamento em sua superfície, utilizando para isso não simplesmente a maximização aleatória de determinadas frequências, mas sim aquelas relacionadas aos modos de vibração responsáveis pelo início dos efeitos de *flutter*;
- comparar os resultados de duas estratégias distintas de otimização, usando um método que escolhe e maximiza um determinado autovalor no início do processo de otimização, através de uma análise aeroelástica e outro por diferenças finitas que atualiza o autovalor a ser otimizado em cada passo do algoritmo, usando a sensibilidade da velocidade de início de *flutter* em relação aos autovalores;
- implementar a otimização topológica após a otimização de orientação, com a fi-

nalidade de definir estruturas mais leves que as originais, mas que apresentem velocidades superiores para o início de *flutter*.

1.2 Organização do Trabalho

Para uma maior facilidade de entendimento, a implementação do trabalho foi dividida em cinco partes. O modelo estrutural foi separado do modelo aeroelástico, uma vez que a análise realizada foi feita de forma separada em ambos modelos.

No capítulo 2 o modelo estrutural foi apresentado, fazendo-se uma rápida descrição das equações de equilíbrio e a resolução das mesmas através do método dos elementos finitos. O elemento finito implementado no trabalho foi descrito, assim como uma rápida revisão sobre materiais compostos, as transformações de coordenadas e uma revisão rápida sobre a teoria de laminação aplicada.

No capítulo 3 o modelo aeroelástico foi apresentado, uma rápida apresentação dos fundamentos da aeroelasticidade, um histórico sobre a técnica de *aeroelastic tailoring* e um exemplo de como foi apresentada a solução e os pontos de interesse da análise realizada também foram descritos neste capítulo.

No capítulo 4 foi introduzida a otimização estrutural, um breve histórico, conceitos mais importantes, a formulação e solução de um problema de otimização foram apresentados. Também foi incluída uma seção sobre otimização topológica, suas particularidades em relação à otimização estrutural e alguns métodos introduzidos para se chegar a uma melhor interpretação da topologia encontrada.

O capítulo 5 organizou as estratégias e a implementação dos métodos descritos no capítulo anterior, e a forma como foram encontrados os resultados no capítulo seguinte, um fluxograma de cada estratégia implementada foi apresentado neste capítulo.

O capítulo 6 é o de resultados, os tipos de estrutura testados e os valores obtidos para as diferentes estratégias aplicadas foram comparados.

O capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho, fazendo-se as análises finais dos resultados e apresentando publicações com os resultados parciais desta pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

2. MODELO ESTRUTURAL

Para o presente trabalho, uma formulação utilizando o método dos elementos finitos foi implementada na solução das equações de equilíbrio e posterior análise modal realizada no modelo estrutural. Essa formulação precisa conter a análise das equações de equilíbrio da mecânica infinitesimal linear, lidar com materiais compostos laminados e por fim montar as matrizes que resolvem o problema de autovalores e autovetores. Apenas com estas etapas bem compreendidas foi possível se obter um processo de otimização com resultados confiáveis, uma vez que a otimização utilizou-se de parâmetros calculados na análise de elementos finitos, assim como o modelo aeroelástico.

Este capítulo visa apresentar os aspectos básicos necessários na resolução do problema estabelecido, portanto apresenta-se nas próximas seções as questões básicas resolvidas como as soluções das equações de equilíbrio da elasticidade linear, o elemento finito implementado, a formulação de materiais compostos laminados, e os componentes necessários para a solução do problema modal, etapas cumpridas pelo modelo estrutural que foram posteriormente utilizadas pelo modelo aeroelástico apresentado na sequência.

2.1 Elasticidade Linear Infinitesimal

O problema que trata da resolução das equações de equilíbrio que governam a lei da elasticidade linear infinitesimal é bastante difundido e encontrado em diversos livros básicos sobre elasticidade para engenharia como [Boresi, 1965], [Timoshenko e Goodier, 1951] entre outros e não foram discutidas em detalhes neste trabalho.

Abaixo serão apresentados os aspectos básicos para o entendimento e sequência do trabalho, onde foram baseadas as soluções dos capítulos seguintes. Apenas a apresentação das equações necessárias para o desenvolvimento dos métodos a seguir implementados foram expressos.

Para a caracterização do problema desejado, considera-se um corpo genérico ocupando a região Ω no espaço (figura 2.1), sujeito as condições de carregamento e deslocamento

ilustrados.

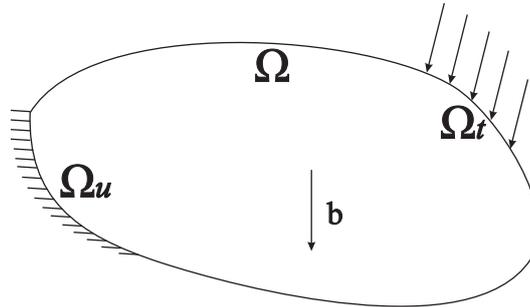


Figura 2.1 – Problema de Elasticidade Linear Infinitesimal.

Para a dinâmica transiente o sistema de equações governantes pode ser representado como a série de equações descritas abaixo. Primeiro, a equação de equilíbrio é descrita pela equação 2.1

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \gamma \ddot{u}_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor de Cauchy, x_j são as coordenadas de um ponto qualquer do corpo, b_i representa as forças de corpo, γ é a massa específica do material constituinte do corpo e \ddot{u}_i é a aceleração de um ponto qualquer do corpo, válido em todo o domínio Ω .

A relação constitutiva é dada pela eq. 2.2:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad , \quad (2.2)$$

onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo elástico, um tensor de quarta ordem que relaciona as deformações $\boldsymbol{\epsilon}$ com as tensões $\boldsymbol{\sigma}$, λ e μ são as constantes de Lamé e $\boldsymbol{\delta}$ é o símbolo de Kronecker.

A relação cinemática para um modelo linear infinitesimal é dado pela eq. 2.3, para tanto os termos de alta ordem de deformação foram negligenciados:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

As condições de contorno essenciais (condições de Dirichlet) são

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p \quad \text{em} \quad \Omega_u \quad , \quad (2.4)$$

onde na equação 2.4, \mathbf{u} é o vetor contendo os deslocamentos de um dado ponto dentro de

Ω_u , esses valores são prescritos em \mathbf{u}_p .

Finalmente as condições de contorno naturais (Neumann) são dadas na equação 2.5

$$\sigma_{ij}n_j = t_i \quad \text{em} \quad \Omega_t \quad , \quad (2.5)$$

onde \mathbf{t} é o vetor contendo o carregamento aplicado na superfície indicada por Ω_t , \mathbf{n} é o vetor normal à superfície nessa região.

Utilizando-se as equações 2.1 a 2.5 é possível solucionar o problema de elasticidade linear infinitesimal, portanto as considerações apresentadas nesta seção foram desenvolvidas ao longo do trabalho.

2.2 Método dos Elementos Finitos

O trabalho aqui desenvolvido é coberto pela teoria da elasticidade linear infinitesimal, para tanto é necessário que se apresente uma forma de resolver as equações diferenciais que surgem das equações de equilíbrio impostas nessa teoria. Nesse trabalho o método dos elementos finitos foi a ferramenta utilizada para a solução de tais equações. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica utilizada para construir soluções aproximadas de problemas. Este método envolve a divisão do domínio do problema em pequenos subdomínios, os elementos finitos, e utiliza o método variacional para construir uma aproximação da solução sobre o conjunto dos elementos finitos [Becker et al., 1981]. O método dos elementos finitos é uma ferramenta poderosa e amplamente utilizada na solução de equações diferenciais.

Existe uma vasta bibliografia citando o MEF, sua aplicabilidade e limitações, não sendo portanto do escopo deste trabalho uma descrição detalhada do método. Uma revisão completa deste método pode ser encontrada por exemplo nos bons textos de Hughes [Hughes, 1987] e Zienkiewicz [Zienkiewicz e Taylor, 2000b]. Para o entendimento da metodologia aplicada foi feita uma breve explicação abaixo, utilizando MEF para resolver um problema genérico de elasticidade linear infinitesimal.

Considera-se o corpo apresentado na figura 2.1 e as cinco equações apresentadas de 2.1 até 2.5. A forma variacional de tais equações (forma fraca) pode ser escrita usando os

procedimentos descritos por Zienkiewicz [Zienkiewicz e Taylor, 2000b]:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \gamma \ddot{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i \, d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta u_i t_i \, d\Omega_t = 0 \quad , \quad (2.6)$$

na forma matricial, a equação 2.6 pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \gamma \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Omega_t = 0 \quad . \quad (2.7)$$

Aproximações do elemento finito para deslocamento e deslocamento virtual podem ser escritas como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e \quad , \quad (2.8)$$

onde \mathbf{N} é um vetor que contém as funções de forma associadas aos nós do elemento finito, \mathbf{u}^e é um vetor que contém os deslocamentos nodais aproximados. Utilizando-se as equações 2.3 e 2.8 para a deformação virtual podemos escrever que

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{F} \delta \mathbf{u}^e \quad , \quad (2.9)$$

onde \mathbf{F} é uma matriz de transformação deslocamento-deformação. Essa matriz da forma como foi implementada no trabalho está descrita no ANEXO II.

Lembrando ainda que $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{u}^e \quad , \quad (2.10)$$

onde \mathbf{C} é a matriz com as relações constitutivas. Substituindo as relações apresentadas de 2.8 até 2.10, pode-se reescrever a eq. 2.7 como

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left(\ddot{\mathbf{u}}^{eT} \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \gamma \mathbf{N} \, d\Omega^e}_{\mathbf{M}^e} + \mathbf{u}^{eT} \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \, d\Omega^e}_{\mathbf{K}^e} - \underbrace{\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega^e + \int_{\Omega_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, d\Omega_t^e \right)}_{\mathbf{f}^e} \right) = 0 \quad (2.11)$$

considerando $\delta \mathbf{u}^{eT} \neq 0$ escreve-se a eq. 2.11 como

$$\sum_{e=1}^{nelem} [\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e] = 0 \quad , \quad (2.12)$$

considerando a hipótese de modelo linear, pelo princípio da superposição, pode-se escrever a equação 2.12 como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad (2.13)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e rigidez da estrutura, respectivamente, $\ddot{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u} são os vetores aceleração e deslocamento, respectivamente, e \mathbf{f} é o vetor de forças.

2.2.1 Solução do Problema Modal

Para resolver o problema modal, parte-se da equação determinada em 2.13, para vibrações livres a equação anterior pode ser escrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.14)$$

faz-se então, a seguinte transformação para \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t) \quad , \quad (2.15)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t) \quad , \quad (2.16)$$

onde $\boldsymbol{\phi}$ representa uma amplitude modal, ω a frequência e t o tempo. A equação 2.14 pode ser reescrita então como

$$\omega^2 \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t) \mathbf{M} = \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t) \mathbf{K} \quad , \quad (2.17)$$

que é simplificada para

$$\omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi} \quad , \quad (2.18)$$

reescrevendo a eq. 2.18 para a forma

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \{\boldsymbol{\phi}\} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.19)$$

onde está estabelecido um problema de autovalores, fazendo-se $\{\boldsymbol{\phi}\} = \mathbf{0}$, chega-se à solução trivial; portanto para que tenha-se uma solução diferente da trivial é necessário que o primeiro

termo seja zero,

$$\det [(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})] = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

com isso tem-se um problema de autovalores que pode ser escrito na sua forma usual fazendo-se a substituição $\lambda = \omega^2$

$$\det [(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})] = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

O problema de autovalores estabelecido na equação 2.21 pode ser resolvido por qualquer programa padrão de solução de autovalores, atenção especial deve ser dada ao método de solução escolhido, uma vez que dependendo do tamanho das matrizes envolvidas o custo computacional deve ser um fator a ser levado em consideração.

Para o presente trabalho, foi aplicado um procedimento que utiliza um método de Arnoldi aumentado que combina uma rotina de blocos com o método de Krylov aumentado apresentado por Baglama [Baglama, 2008], implementado no MATLAB. O próximo passo portanto, é a determinação das matrizes de rigidez e de massa para a resolução da equação 2.21. A próxima seção apresenta o elemento finito e o método para a obtenção e montagem das matrizes relacionadas acima.

2.2.2 Elemento Finito de Casca

As hipóteses de Kirchhoff-Love são de que a placa ou casca é tão fina que pode ser considerada apenas por sua superfície, as deflexões a que a placa ou casca está sujeita são muito pequenas, a tensão normal à superfície é negligenciada e as normais à superfície média permanecem normais e inextensíveis após sofrer uma deformação. Estas hipóteses formam a teoria de placas e cascas finas para pequenos deslocamentos. Desde então, outras teorias de placas e cascas foram introduzidas baseadas nessas primeiras aproximações, diferentes apenas em alguns aspectos relativos à derivação [Qatu, 2004]. Após a apresentação de uma série de teorias ao longo da primeira metade do século XX, os pesquisadores concluem que, para uma teoria consistente para placas e cascas semi-espessas ou espessas, tanto efeitos de inércia rotacional quanto deformação cisalhante deveriam ser incluídas na formulação. Entre os trabalhos mais importantes que trataram desse tema, estão os trabalhos de Reissner

[Reissner, 1941] e Mindlin [Mindlin, 1951].

Para este trabalho, foi aplicado um elemento finito baseado no trabalho de Ahmad, [Ahmad et al., 1970]. No início da década de 1970 Ahmad apresentou um trabalho no qual era desenvolvido e testado um elemento finito de casca com o objetivo de se trabalhar com estruturas como por exemplo paredes de represas e torres de resfriamento. Esse elemento surge a partir da degeneração de um elemento sólido tridimensional (figura 2.2). Essa degeneração é caracterizada pela redução em uma das dimensões do elemento sólido, passando a ser esta grandeza tratada como a espessura. Nessa formulação se considerou que as normais à superfície média do elemento permanecem retas após a deformação do elemento, porém não necessariamente permaneceriam normais à superfície. Com esse advento, foi possível representar as deformações cisalhantes. Até aquele momento eram utilizadas formulações de elementos finitos de placa baseados na hipótese de Kirchhoff-Love na qual o componente cisalhante era nulo [Paschoalini, 1995].

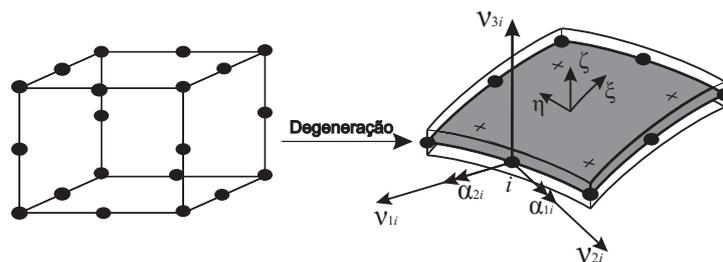


Figura 2.2 – Elemento Sólido Tridimensional e Elemento de Ahmad

O movimento de cada nó do elemento é representado por 5 graus de liberdade, três deslocamentos (u_i, v_i, w_i) e duas rotações $(\alpha_{1i}$ e $\alpha_{2i})$, as coordenadas geométricas do elemento são representadas pelo vetor nodal ν_{3i} e os vetores ν_{1i} e ν_{2i} normais ao primeiro. Dessa forma foi possível representar os graus de liberdade referentes aos pontos das superfícies inferior e superior do sólido através dos nós localizados em uma superfície intermediária. Para esse elemento foram usados dois pontos de integração na direção ζ e (3×3) pontos de integração no plano $(\xi$ e $\eta)$, sendo portanto uma integração consistente [Bathe, 1996]. As funções de forma da família serendipity completavam a formulação para a integração do elemento, com oito nós na superfície média do elemento. As funções de forma para o elemento finito são apresentadas no ANEXO I.

O elemento de Ahmad, porém, comportou-se bem para simular cascas semi-espessas,

dentro da teoria de Mindlin-Reissner, mas não apresentou resultados tão satisfatórios quando a formulação era direcionada para placas finas, não atendendo assim a teoria de Kirchhoff-Love.

Com o surgimento das técnicas de integração reduzida, proposta por Zienkiewicz, [Zienkiewicz e Taylor, 2000a] o elemento de Ahmad atingiu uma considerável melhora de desempenho para o caso de placas e cascas finas. Na proposta de Zienkiewicz a integração (3 x 3) foi substituída por uma integração (2 x 2) na superfície de referência, o que caracteriza a integração reduzida. O elemento de Zienkiewicz também usou as funções de interpolação tipo serendipity, elementos desse tipo são caracterizados pela subtração do nó originalmente colocado no centro do elemento. Neste caso o elemento conta com oito nós na superfície média.

2.2.3 Determinação do Campo de Deslocamentos do Elemento

O elemento finito implementado possui 8 nós, as seções ao longo da espessura são geradas por linhas retas. O sistema referencial local do elemento é constituído pelas coordenadas curvilíneas ξ e η localizadas na superfície média e a coordenada linear ζ na direção da espessura do elemento. As coordenadas curvilíneas ($\xi = \pm 1$) e ($\eta = \pm 1$) determinam as faces laterais e $\zeta = \pm 1$ determina as faces externas do elemento.

Para determinação do campo de deslocamentos do elemento finito implementado no presente trabalho, dividiu-se o desenvolvimento em duas etapas. Primeiro determinou-se o deslocamento do nó i no plano médio do elemento.

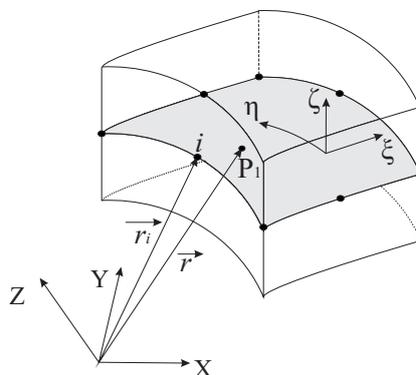


Figura 2.3 – Deslocamento de um ponto no plano médio.

Considerando-se um sistema cartesiano global de referência (X, Y, Z) , a posição de

um ponto P_1 qualquer na superfície média pode ser representada pelo vetor posição $\vec{\mathbf{r}}$ e o vetor $\vec{\mathbf{r}}_i$ representa a posição do nó i na superfície média (figura 2.3).

O vetor $\vec{\mathbf{r}}$ pode ser interpolado a partir dos vetores nodais $\vec{\mathbf{r}}_i$ e as funções de interpolação $N_i(\xi, \eta)$ associadas a cada um dos nós (eq. 2.22)

$$\vec{\mathbf{r}}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \vec{\mathbf{r}}_i \quad , \quad (2.22)$$

onde n é o número de nós do elemento.

Para a determinação de um ponto qualquer do elemento fora da superfície média utiliza-se a equação 2.23. Sendo t_i a espessura do elemento no nó i , um ponto qualquer aqui representado por P_2 será dado pelo vetor $\vec{\mathbf{s}}_i$ obtido como segue

$$\vec{\mathbf{s}}_i(\zeta) = \zeta \frac{t_i}{2} \vec{\nu}_{3i} \quad , \quad (2.23)$$

onde $\vec{\nu}_{3i}$ é um versor normal à superfície média no nó i .

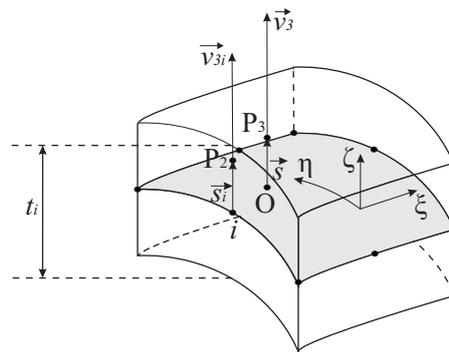


Figura 2.4 – Deslocamento de um ponto fora do plano médio.

Da mesma forma que no caso anterior, um ponto P_3 qualquer localizado fora da superfície média do elemento é definido pelo vetor $\vec{\mathbf{s}}$ (figura 2.4). Esse vetor é então interpolado a partir dos vetores $\vec{\mathbf{s}}_i$ e das funções de interpolação $N_i(\xi, \eta)$ dos nós da superfície média

$$\vec{\mathbf{s}}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \vec{\mathbf{s}}_i \quad , \quad (2.24)$$

pode-se escrever agora a equação 2.24 com a definição dada na eq. 2.22,

$$\vec{s}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \sum_{i=1}^n N(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \vec{\nu}_{3i} \quad . \quad (2.25)$$

A partir das definições estabelecidas acima, foi possível se determinar o campo de deslocamentos do elemento finito. Quando o elemento finito é deformado, o nó i , localizado na superfície média apresenta um deslocamento \vec{d}_i , cujas componentes nas direções globais (X, Y, Z) são u_i, v_i, w_i respectivamente. De acordo com o modelo cinemático de Mindlin-Reissner, se um elemento reto da placa é normal à superfície média da mesma, após a deformação ele permanece reto, mantém o comprimento (pois $\epsilon_z = 0$) mas não será mais normal à superfície média do elemento.

Portanto agora, quando se considera o vetor \vec{s}_i , normal à superfície média do elemento mas que define o ponto P_2 fora dessa superfície, ele continua reto mas não mais normal à superfície após a deformação. Para o caso mais genérico de solitação, o modelo apresenta duas rotações responsáveis por retirar o vetor \vec{s}_i da posição normal à superfície média. Essas rotações estão representadas em 2.26 por α_{1i} e α_{2i} . Com isso o ponto Q assume então a posição Q' e por consequência um deslocamento final $\vec{\Delta}_i$ de acordo com a figura 2.5 que será dado pela equação abaixo. É importante lembrar que a equação 2.26 é válida para a hipótese de pequenos deslocamentos.

$$\vec{\Delta}_i = \vec{d}_i + \mathbf{s}_i \alpha_{1i} \vec{\nu}_{1i} - \mathbf{s}_i \alpha_{2i} \vec{\nu}_{2i} \quad , \quad (2.26)$$

onde $\vec{\nu}_{1i}$ e $\vec{\nu}_{2i}$ são os versores tangentes à superfície média no nó i , s_i é o módulo do vetor \vec{s}_i que é dado por

$$\mathbf{s}_i = \zeta \frac{t_i}{2} \quad , \quad (2.27)$$

substituindo 2.27 em 2.26, obtem-se:

$$\vec{\Delta}_i(\zeta) = \vec{d}_i + \zeta \frac{t_i}{2} \vec{\nu}_{1i} \alpha_{2i} - \zeta \frac{t_i}{2} \vec{\nu}_{2i} \alpha_{1i} \quad . \quad (2.28)$$

Com a equação 2.28 foi possível determinar o deslocamento de um ponto P_1 qualquer localizado ao longo da espessura t_i no nó i .

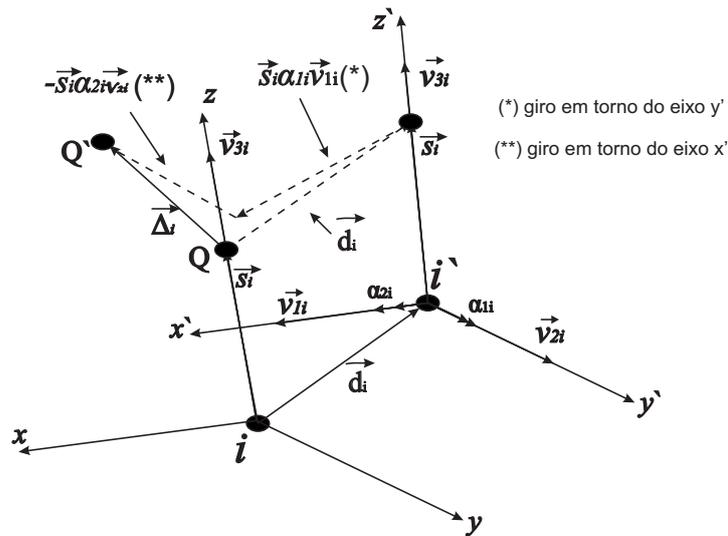


Figura 2.5 – Deslocamento Δ_i apresentado pelo ponto Q .

Para determinar o deslocamento de um ponto Q qualquer localizado no elemento de casca (figura 2.5) é necessário interpolar os deslocamentos dos n nós com as funções de interpolação de cada nó da superfície média do elemento finito

$$\vec{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \vec{\Delta}_i(\zeta) \quad , \quad (2.29)$$

substituindo agora o valor de $\vec{\Delta}_i$ determinado na equação 2.28 na equação 2.29 obtém-se:

$$\vec{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \vec{d}_i + \zeta \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{2} \vec{v}_{1i} \alpha_{2i} - \zeta \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{2} \vec{v}_{2i} \alpha_{1i} \quad . \quad (2.30)$$

Considerando u, v, w respectivamente as componentes de deslocamento $\vec{\Delta}$ nas direções X, Y e Z do sistema global de referência, u_i, v_i, w_i as componentes do deslocamento \vec{d}_i , ν_{11}, ν_{12} e ν_{13} as componentes do versor \vec{v}_1 e finalmente ν_{21}, ν_{22} e ν_{23} as componentes de \vec{v}_2 , a equação 2.30 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} \nu_{11i} \\ \nu_{12i} \\ \nu_{13i} \end{Bmatrix} \alpha_{2i} \\
&\quad - \zeta \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} \nu_{21i} \\ \nu_{22i} \\ \nu_{23i} \end{Bmatrix} \alpha_{1i} \quad . \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Uma vez determinada a equação para o deslocamento do elemento finito de casca, é necessário agora o mapeamento do elemento mestre e as devidas mudanças de coordenadas para o domínio físico. Para isso é necessário o cálculo do Jacobiano de tais elementos. A matriz jacobiana pode ser escrita como:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Os termos da matriz jacobiana estão escritos de forma explícita no ANEXO II. O determinante da matriz jacobiana é o Jacobiano, e a condição necessária e suficiente para que seja possível realizar as transformações de coordenadas é que o Jacobiano seja diferente de zero.

$$|J| = \det [\mathbf{J}] \neq 0 \quad . \quad (2.33)$$

2.3 Materiais Compostos

Materiais compostos são aqueles que possuem dois ou mais materiais combinados em uma escala macroscópica para formar um terceiro material com propriedades diferentes das propriedades dos materiais primários. A vantagem de materiais compostos é que, se bem projetados eles exibem as melhores qualidades de seus constituintes e geralmente qualidades que nenhum deles sozinhos possuem [Jones, 1999]. Materiais compostos podem ser separados em três grandes grupos, materiais fibrosos nos quais são misturadas fibras dentro de uma matriz, materiais laminados os quais são formados por camadas de diferentes materiais e

finalmente materiais particulados que constituem em partículas soltas em uma matriz.

Também é possível surgirem combinações desses grandes grupos, como é o caso do material laminados reforçado por fibras que nada mais são do que materiais fibrosos dispostos em uma série de lâminas. Esses materiais combinam as propriedades desses dois tipos de materiais.

Materiais laminados reforçados por fibras para aplicações estruturais são geralmente feitos na forma de finas camadas, chamadas lâminas [Reddy, 2004]. A orientação de cada lâmina e a sequência de construção das camadas pode ser escolhida para se obter a resistência e rigidez para uma aplicação específica. Um exemplo de sequência de laminação está na figura 2.6. O material que foi utilizado neste trabalho é um composto laminado reforçado por fibras. Para o presente trabalho é importante destacar que foram consideradas as ligações entre uma lâmina e a seguinte como adesão perfeita.

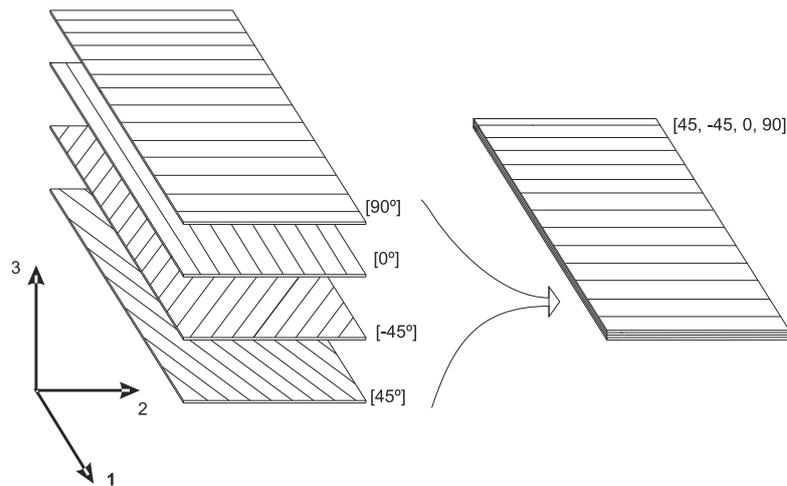


Figura 2.6 – Exemplo de sequência de laminação

Este tipo de material tem como características principais a alta resistência, baixo peso, alta rigidez entre outros.

No estudo de materiais compostos laminados é comum utilizar dois eixos coordenados, um para a placa laminada, que foi identificada nesse trabalho pelos eixos 1, 2 e 3, e o eixo coordenado da lâmina que foi representado por x, y e z sendo que o eixo x sempre estará colocado no sentido da fibra, ou seja, o eixo y estará sempre perpendicular ao comprimento da fibra, figura 2.7.

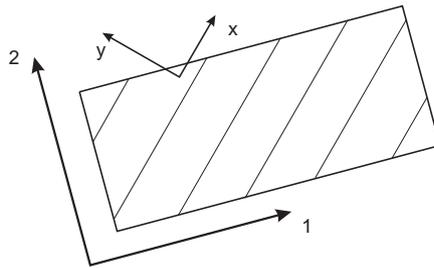


Figura 2.7 – Eixos coordenados utilizados no trabalho

É de fundamental importância para o entendimento do trabalho a compreensão da nomenclatura dos eixos coordenados, uma vez que a orientação inicial das lâminas foi dada pelo ângulo formado entre o eixo do laminado (eixo 1) e o eixo de cada lâmina (eixo x), assumindo-se positivos os movimentos no sentido anti-horário.

Pelo sistema de referência adotado, a numeração das lâminas foi dada de baixo para cima, pois o eixo 3 está direcionado para cima. Para o presente trabalho a descrição da sequência de laminação pode ser escrita como:

$$[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N] \quad , \quad (2.34)$$

para um material laminado simétrico podemos reduzir a descrição feita em 2.34, onde

$$[\theta_1, \theta_2]_s \quad , \quad (2.35)$$

ou seja,

$$[\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1] \quad . \quad (2.36)$$

A figura 2.8 mostra a numeração empregada neste trabalho para especificar a sequência de laminação do laminado.

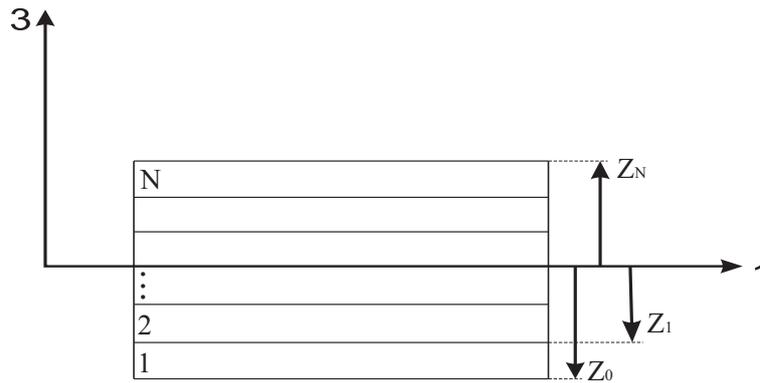


Figura 2.8 – Numeração empregada no trabalho

2.3.1 Comportamento Macromecânico de uma Lâmina

A lei de Hooke generalizada apresentada em 2.2 relaciona tensões com deformações e foi desenvolvida aqui para apresentar as simplificações que podem ser feitas no modelo estrutural estudado.

Uma vez que a tensão e a deformação são tensores de segunda ordem, um tensor que relaciona esses dois entes será um tensor de quarta ordem, e este é o caso do tensor \mathbf{C} . Para um problema tridimensional, o tensor \mathbf{C} possui 81 incógnitas (3^4), ou seja, seriam necessárias 81 constantes para que fosse possível descrever uma relação entre tensão e deformação para um material elástico linear genérico. Porém, a partir de algumas considerações é possível reduzir o número de incógnitas. O fato de os tensores tensão e deformação serem simétricos nos levam às duas simplificações descritas abaixo:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad (2.37)$$

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (2.38)$$

As observações feitas em 2.37 e 2.38 reduzem de 81 para 36 o número de constantes necessárias para a determinação completa da relação constitutiva. Se agora derivarmos a energia de deformação específica, a sua forma quadrática irá sugerir mais uma simetria no tensor constitutivo, a prova pode ser conferida em muitos livros sobre materiais compostos

como [Jones, 1999] e [Reddy, 1984].

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad (2.39)$$

Com isso chega-se a 21 constantes diferentes no tensor constitutivo. Pode-se representar a relação constitutiva na forma compacta como

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

As relações apresentadas em 2.40 caracterizam materiais anisotrópicos, pois não há planos de simetria para as propriedades dos materiais. Segundo Jones, 1999, esses materiais podem ser referenciados também pelo termo triclinicos, ou seja, os três eixos do material são oblíquos entre si.

Se no entanto houverem dois planos ortogonais de simetria das propriedades do material, o mesmo é dito ortotrópico. Nesses casos não há interação entre tensões cisalhantes e deformações normais, assim como também não há entre tensões normais e deformações cisalhantes. A relação tensão-deformação é representada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

nesse caso tem-se 9 constantes elásticas. Para o presente trabalho, o material aplicado é ortotrópico e portanto a equação 2.41 representa a relação tensão-deformação de interesse. Os componentes da matriz de flexibilidade \mathbf{S} são determinados experimentalmente de maneira

mais direta do que os da matriz de rigidez, e considerando-se $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ podemos escrever

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

As constantes elásticas necessárias para a construção da matriz apresentada em 2.42 são os seguintes:

E_1, E_2 e E_3 = módulo de elasticidade (Young) nas direções 1, 2 e 3 respectivamente;

ν_{12}, ν_{23} e ν_{31} = coeficientes de Poisson;

G_{12}, G_{23} e G_{31} = módulos de cisalhamento nos planos 1-2, 2-3 e 3-1, respectivamente.

2.3.2 Estado Plano de Tensões

Considerando-se o estado plano de tensões (EPT) e uma relação para a deformação normal apresentada por Hughes [Hughes, 1987] e Jones [Jones, 1999] retirou-se mais uma componente da relação tensão deformação apresentada acima, e pode-se escrever uma relação para a deformação correspondente ao eixo z (nas coordenadas da lâmina)

$$\epsilon_z = \frac{1}{C_{33}} (\sigma_z - C_{13}\epsilon_x - C_{23}\epsilon_y), \quad (2.43)$$

considerando o estado plano de tensões, $\sigma_z = 0$, reescreve-se 2.43 como

$$\epsilon_z = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13}\epsilon_x + C_{23}\epsilon_y). \quad (2.44)$$

Com a consideração feita na equação 2.44 a matriz da relação constitutiva \mathbf{C} passa a ter a dimensão de 5 x 5 e pode ser escrita como a matriz constitutiva final da direção principal do laminado '-dpl'.

$$\mathbf{C}^{dpl} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Os termos da eq. 2.45 foram obtidos como descrito na eq. 2.46

$$\begin{cases} C_{ij}^{dpl} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}, & \text{se } i, j = 1, 2 \\ \text{ou} \\ C_{ij}^{dpl} = C_{ij}, & \text{se } i, j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (2.46)$$

A matriz \mathbf{C}^{dpl} da forma como foi escrita em 2.46 é conhecida como matriz de rigidez reduzida do estado plano de tensões e foi expressa nas coordenadas da lâmina e não do laminado, sendo necessário que se faça uma transformação para as coordenadas globais do laminado.

2.4 Transformação de Coordenadas

A figura 2.9 mostra todos os sistemas de coordenadas envolvidas na formulação do problema proposto. A etapa de transformação de coordenadas foi de vital importância nesse trabalho, além do mais a variável de projeto do problema de otimização da orientação, é o ângulo formado entre a posição do sistema localizado na casca do elemento e um outro que varia de acordo com a direção principal do laminado. Os eixos coordenados do sistema da direção principal do laminado foram representados por $\{e_x^{dpl}, e_y^{dpl}, e_z^{dpl}\}$ os eixos coordenados do sistema local são $\{e_x^{slc}, e_y^{slc}, e_z^{slc}\}$ e finalmente o sistema global foi representado por $\{e_1^{sgl}, e_2^{sgl}, e_3^{sgl}\}$.

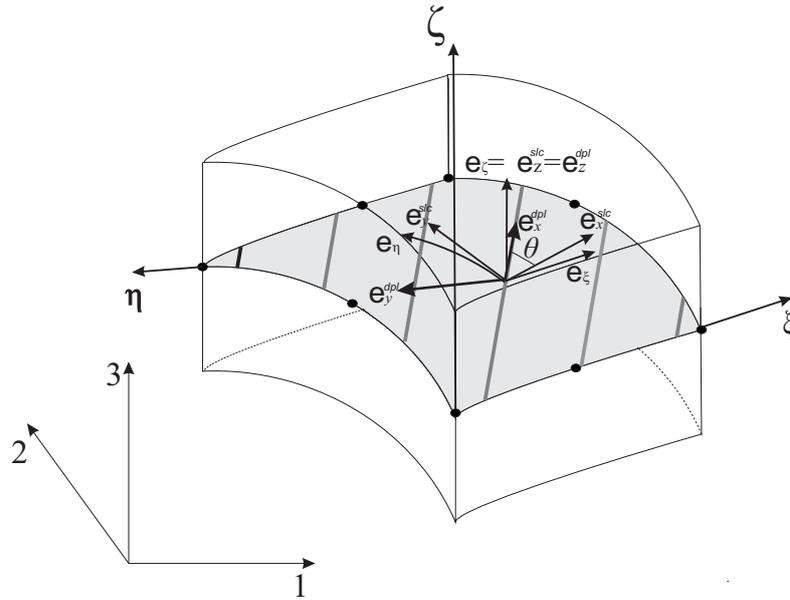


Figura 2.9 – Sistemas coordenados apresentados no trabalho.

A técnica utilizada para as transformações, bem como a determinação dos versores e vetores abaixo apresentada pode ser encontrada em Hughes, 1987.

Determinação do Sistema Coordenado Local

Em cada ponto de integração do elemento, um sistema cartesiano de referência foi montado de maneira que dois eixos fossem tangentes à lâmina através desse ponto, o outro eixo era perpendicular à mesma. Os vetores base foram calculados construindo-se inicialmente os versores tangentes às direções dos eixos coordenados ξ e η .

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{x}_{,\xi}}{\|\mathbf{x}_{,\xi}\|}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{\mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\eta}\|}, \quad (2.48)$$

as equações 2.47 e 2.48 são suficientes para determinar \mathbf{e}_3^{slc}

$$\mathbf{e}_3^{slc} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|}, \quad (2.49)$$

o versor apresentado em 2.49 é o mesmo versor \mathbf{e}_3^{dpl} , conforme pode ser visto na figura 2.9.

Porém os versores apresentados em 2.47 e 2.48 não são perpendiculares entre si, a menos que o elemento finito seja retangular (malhas regulares). Uma formulação que permite trabalhar com malhas não regulares pode ser descrito seguindo os procedimentos apresentados abaixo.

O sistema local da casca pode ser determinado considerando-se que o ângulo formado entre \mathbf{e}_1^{slc} e \mathbf{e}_ξ é o mesmo que o formado entre \mathbf{e}_2^{slc} e \mathbf{e}_η . Portanto a base \mathbf{e}_1^{slc} e \mathbf{e}_2^{slc} é tão próxima quanto possível de \mathbf{e}_ξ e \mathbf{e}_η [Hughes, 1987].

Então:

$$\mathbf{e}_1^{slc} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta), \quad (2.50)$$

$$\mathbf{e}_2^{slc} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta), \quad (2.51)$$

onde

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta)}{\left\| \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta) \right\|}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{\mathbf{e}_3^{slc} \times \mathbf{e}_\alpha}{\left\| \mathbf{e}_3^{slc} \times \mathbf{e}_\alpha \right\|}. \quad (2.53)$$

Dado os sistemas de coordenadas do laminado e o sistema da casca, foi necessário rotacionar estes eixos da forma correta, de maneira que possa se obter a matriz com a relação constitutiva no sistema global para a montagem da matriz de rigidez do elemento e consequentemente da matriz de rigidez global.

A matriz de transformação \mathbf{T} passa as coordenadas do laminado para o sistema localizado na casca. Segundo Hughes, a matriz de transformação pode ser escrita como uma matriz 6 x 6, porém o estado plano de tensões sugere a retirada da terceira linha dessa matriz

ficando

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & n_1 l_3 + n_3 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

sendo,

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(\mathbf{e}_1^{dpl}, \mathbf{e}_1^{slc}); & m_1 &= \cos(\mathbf{e}_2^{dpl}, \mathbf{e}_1^{slc}); & n_1 &= \cos(\mathbf{e}_3^{dpl}, \mathbf{e}_1^{slc}) \\ l_2 &= \cos(\mathbf{e}_1^{dpl}, \mathbf{e}_2^{slc}); & m_2 &= \cos(\mathbf{e}_2^{dpl}, \mathbf{e}_2^{slc}); & n_2 &= \cos(\mathbf{e}_3^{dpl}, \mathbf{e}_2^{slc}) \\ l_3 &= \cos(\mathbf{e}_1^{dpl}, \mathbf{e}_3^{slc}); & m_3 &= \cos(\mathbf{e}_2^{dpl}, \mathbf{e}_3^{slc}); & n_3 &= \cos(\mathbf{e}_3^{dpl}, \mathbf{e}_3^{slc}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

A matriz representada em 2.54 foi utilizada em duas rotações, do sistema do laminado para o sistema da casca e do sistema da casca para o sistema de coordenadas global. A primeira transformação, pode ser descrita por

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta)_k & \sin^2(\theta)_k & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta)_k \sin(\theta)_k \\ \sin^2(\theta)_k & \cos^2(\theta)_k & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta)_k \sin(\theta)_k \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta)_k & -\sin(\theta)_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta)_k & \cos(\theta)_k & 0 \\ -2\sin(\theta)_k \cos(\theta)_k & 2\sin(\theta)_k \cos(\theta)_k & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta)_k - \sin^2(\theta)_k \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

onde o sub-índice indica a k -ésima camada do laminado. Com a matriz apresentada em 2.56 foi possível determinar a matriz constitutiva rotacionada para o sistema local da casca, conforme a equação 2.57 abaixo

$$\mathbf{C}_k^{slc} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{C}_k^{dpl} \mathbf{T}_1. \quad (2.57)$$

A terceira coluna dessa matriz pode ser retirada. De Souza, 2003, sugere que os termos não-nulos de \mathbf{C}_k^{slc} fossem explicitados para economia de tempo computacional, uma vez que esses termos foram utilizados também na derivada em relação à variável de projeto.

Para passar agora do sistema local do elemento para o sistema global, foi necessário

mais uma transformação. A transformação anterior foi realizada mantendo-se o eixo 3 na mesma posição para os dois sistemas, uma vez que o sistema local do elemento e o que acompanha a direção do laminado estão no mesmo plano. Porém foi necessário que se fazer uma transformação no espaço, utilizando-se novamente a matriz apresentada em 2.54. Os vetores \mathbf{l} , \mathbf{m} e \mathbf{n} podem ser escritos agora como

$$\begin{cases} \mathbf{l} = \{e_{11}^{slc} + e_{12}^{slc} + e_{13}^{slc}\}^T \\ \mathbf{m} = \{e_{21}^{slc} + e_{22}^{slc} + e_{23}^{slc}\}^T \\ \mathbf{n} = \{e_{31}^{slc} + e_{32}^{slc} + e_{33}^{slc}\}^T \end{cases} \quad (2.58)$$

A matriz de transformação no espaço (T_2) então foi escrita como

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} (e_{11}^{slc})^2 & (e_{12}^{slc})^2 & (e_{13}^{slc})^2 & e_{21}^{slc}e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc}e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc}e_{21}^{slc} \\ (e_{21}^{slc})^2 & (e_{22}^{slc})^2 & (e_{23}^{slc})^2 & e_{22}^{slc}e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc}e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc}e_{22}^{slc} \\ 2e_{12}^{slc}e_{13}^{slc} & 2e_{22}^{slc}e_{23}^{slc} & 2e_{32}^{slc}e_{33}^{slc} & e_{22}^{slc}e_{33}^{slc} + e_{23}^{slc}e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc}e_{33}^{slc} + e_{13}^{slc}e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc}e_{23}^{slc} + e_{13}^{slc}e_{22}^{slc} \\ 2e_{11}^{slc}e_{13}^{slc} & 2e_{21}^{slc}e_{23}^{slc} & 2e_{31}^{slc}e_{33}^{slc} & e_{21}^{slc}e_{33}^{slc} + e_{23}^{slc}e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc}e_{33}^{slc} + e_{13}^{slc}e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc}e_{23}^{slc} + e_{13}^{slc}e_{21}^{slc} \\ 2e_{11}^{slc}e_{12}^{slc} & 2e_{21}^{slc}e_{22}^{slc} & 2e_{31}^{slc}e_{32}^{slc} & e_{21}^{slc}e_{32}^{slc} + e_{22}^{slc}e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc}e_{32}^{slc} + e_{12}^{slc}e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc}e_{22}^{slc} + e_{12}^{slc}e_{21}^{slc} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

com isso foi possível finalmente escrever a matriz constitutiva rotacionada na coordenada global

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{T}_2^T \mathbf{C}_k^{slc} \mathbf{T}_2 \quad . \quad (2.60)$$

2.5 Teoria de Laminação da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem

A teoria clássica de laminação ou CLT (*Classical Lamination Theory*), baseia-se nas hipóteses de Kirchhoff para placas, sejam elas:

- linhas retas e perpendiculares à superfície média (normais transversais) antes da deformação, permanecem retas depois da deformação;
- as normais transversais são inextensíveis, a placa não apresenta deformação em z ;
- as normais transversais rotacionam de forma a permanecerem perpendiculares à superfície média após a deformação.

As duas primeiras afirmações implicam em dizer que deslocamentos transversais são independentes das coordenadas transversais (espessura) e que $\epsilon_{33} = 0$. A terceira afirmação

sugere que as deformações cisalhantes ϵ_{13} e ϵ_{23} são iguais a zero.

Na teoria de laminação da deformação cisalhante de primeira ordem ou FSDT (*First-Order Deformation Laminated Theory*), a hipótese de Kirchhoff foi relaxada removendo-se a terceira parte ou seja, as normais ao plano médio da placa não permanecem perpendiculares à superfície média da placa após a deformação. Isto serviu para introduzir as deformações cisalhantes transversais na teoria [Reddy, 2004]. Em comparação com a CLT, a teoria de primeira ordem forneceu uma boa relação entre eficiência computacional e precisão do comportamento global da estrutura para placas laminadas finas e semi-espessas [Zhang e Yang, 2009]. Com as mesmas hipóteses e restrições da teoria clássica de laminação, o campo de deslocamentos da teoria de primeira ordem ficou na seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\alpha_2 \quad , \\ v &= v_0 + z\alpha_1 \quad , \\ w &= w_0 \quad , \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \tag{2.62}$$

onde $(u_0, v_0, w_0, \alpha_2, \alpha_1)$ são os valores desconhecidos a serem determinados. Os três primeiros termos (u_0, v_0, w_0) são os deslocamentos de um ponto localizado na superfície média da placa, e (α_2, α_1) são as rotações do vetor normal transversal em torno do eixo x e y , respectivamente (figura 2.10).

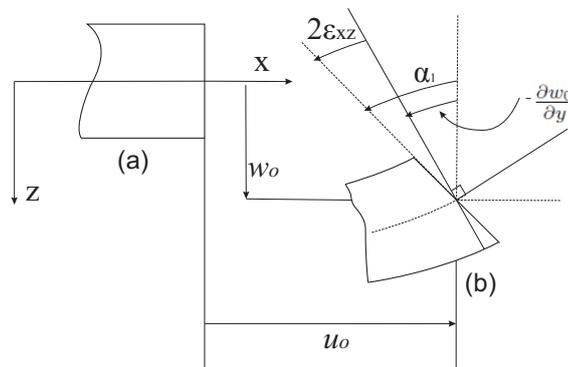


Figura 2.10 – Geometria (a) indeformada e (b) deformada de uma placa na hipótese da teoria de primeira ordem.

Usando notação matricial pode-se escrever as deformações infinitesimais como

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ 2\epsilon_{xz}^0 \\ 2\epsilon_{yz}^0 \\ 2\epsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^1 \\ \epsilon_{yy}^1 \\ 2\epsilon_{xz}^1 \\ 2\epsilon_{yz}^1 \\ 2\epsilon_{xy}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \alpha_1 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \alpha_2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

onde $(\epsilon_{xx}^0, \epsilon_{yy}^0, 2\epsilon_{xz}^0, 2\epsilon_{yz}^0, 2\epsilon_{xy}^0)$ são as deformações de membrana, e $(\epsilon_{xx}^1, \epsilon_{yy}^1, 2\epsilon_{xz}^1, 2\epsilon_{yz}^1, 2\epsilon_{xy}^1)$ são os termos associados à curvatura. Chamando o primeiro vetor de $\boldsymbol{\epsilon}^0$ e o vetor de curvaturas de $\boldsymbol{\kappa}$, pode-se escrever a equação 2.63 na forma de um vetor como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.64)$$

Considerando agora a matriz de rigidez transformada apresentada em 2.60, e usando a eq. 2.64 podemos escrever a relação tensão-deformação abaixo

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\epsilon} = \bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\epsilon}^0 + z\bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.65)$$

As camadas podem ser somadas, então os esforços normais a que o laminado está sujeito podem ser escritos como

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \boldsymbol{\sigma}_k dz, \quad (2.66)$$

sendo N o número de camadas que compõe o laminado, $\boldsymbol{\sigma}_k$ é a tensão na k -ésima camada e z_k a distância do plano médio do laminado ao início da k -ésima camada.

Aqui uma pequena observação com relação a uma particularidade dessa teoria deve ser feita. Como visto nas equações 2.63 e 2.66, percebe-se que os termos relativos às forças transversais (N_{xz}, N_{yz}) serão constantes ao longo da integração na espessura, porém sabe-se que para vigas e placas laminadas compostas as tensões cisalhantes transversais variam pelo menos quadraticamente [Reddy, 2004]. Essa diferença entre o estado de tensão verdadeiro e o medido pela teoria de primeira ordem pode ser corrigido multiplicando-se essas forças resultantes do cisalhamento transversal por um parâmetro K , chamado de coeficiente de correção do cisalhamento. Esse fator depende das propriedades da lâmina e do esquema de

laminação. Uma definição mais detalhada sobre esse coeficiente e o método para determiná-lo pode ser encontrados em bibliografias que tratam de materiais laminados, como por exemplo em Reddy [Reddy, 2004].

Usando a equação 2.65 pode-se escrever então

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\epsilon}^0 dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\kappa} z dz \right) , \quad (2.67)$$

ou retirando da integral os termos constantes

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^N \left(\bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\epsilon}^0 \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz + \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\kappa} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z dz \right) . \quad (2.68)$$

A equação apresentada em 2.68 pode ser escrita em uma forma compacta

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon}^0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} , \quad (2.69)$$

onde \mathbf{A} é a matriz de rigidez extensional e pode ser definida como:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_{k+1} - z_k) , \quad (2.70)$$

e a matriz \mathbf{B} contém os elementos responsáveis pelo acoplamento extensão-flexão

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) . \quad (2.71)$$

A matriz apresentada na eq. 2.70 pode ser descrita como a que contém os valores de rigidez extensional da placa e a matriz apresentada na eq. 2.71 uma matriz de rigidez do acoplamento extensão-flexão. Esse último efeito não é óbvio, uma vez que ele sugere que aplicando esforços de tração no sentido do comprimento da placa, a mesma irá apresentar flexão ou que aplicando esforços de flexão, a mesma irá apresentar deformações normais em sua superfície. Porém se imaginarmos um laminado composto de duas placas com rigidez diferente, quando um esforço normal for aplicado, as duas lâminas apresentarão resistências diferentes e portanto uma curvatura aparece. Também é fácil imaginar que para placas simétricas, os termos da matriz \mathbf{B} serão nulos.

De maneira similar, os momentos aplicados podem ser descritos como

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z \, dz = \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.72)$$

onde a matriz \mathbf{D} apresenta os termos relacionados à flexão da placa e pode ser descrita como

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad . \quad (2.73)$$

As relações descritas acima podem ser agrupadas e resumidas em uma única relação

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad . \quad (2.74)$$

A matriz formada em 2.74 pelos elementos de \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} é conhecida como matriz de rigidez do laminado, e foram usadas no decorrer do trabalho para a determinação da matriz de rigidez das placas estudadas, com a única diferença de que foi aplicado um procedimento sugerido por Kumar e Palaninathan, [Kumar e Palaninathan, 1997] no qual os termos dessa matriz foram trabalhados de forma a se retirar a dependência da espessura na integração para obtenção da matriz de rigidez. O procedimento é apresentado mais adiante.

2.5.1 Equações de Halpin-Tsai

Para o cálculo do processo de otimização implementado neste trabalho, foi necessário antes se determinar as cinco propriedades mostradas em 2.42. Porém, uma dificuldade que surgiu é a de que as propriedades do laminado foram dadas separadamente, ou seja, foi fácil conseguir as propriedades do material constituinte da base e do material de que são feitas as fibras do laminado.

As propriedades do conjunto nem sempre são conhecidas pois obviamente as mesmas variam conforme a proporção de cada constituinte. A dificuldade aumenta à medida que placas de material laminado são testadas na configuração final, com várias lâminas sobrepostas. Os ensaios acabam indicando as propriedades do laminado e não da lâmina. Porém o processo de otimização implementado neste trabalho necessita das propriedades de cada lâmina que constituem o laminado.

Halpin e Tsai, [Halpin e Tsai, apud Jones, 1999], desenvolveram um procedimento

de interpolação que pode ser aplicado para a determinação das propriedades direcionais de uma lâmina, conhecendo-se as quantidades em volume de fibras e matriz do componente. Segundo Jones, o procedimento tem resultados bastante precisos desde que o volume de fibra não seja próximo de 100 %.

$$E_1 \cong E_f V_f + E_m V_m, \quad (2.75)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m, \quad (2.76)$$

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \gamma \chi V_f}{1 - \chi V_f}, \quad (2.77)$$

$$\chi = \frac{\left(\frac{M_f}{M_m}\right) - 1}{\left(\frac{M_f}{M_m}\right) + \gamma}, \quad (2.78)$$

onde

M = módulo do material composto: E_2, G_{12} ou ν_{23} ,

M_f = módulo da fibra: E_f, G_f ou ν_f ,

M_m = módulo da matriz: E_m, G_m ou ν_m .

A maior dificuldade no uso das equações de Halpin-Tsai está na determinação de valores apropriados para γ . Porém, para fibras circulares em um arranjo quadrado, os valores obtidos por Halpin-Tsai usando $\gamma = 2$ para determinação de E_2 e $\gamma = 1$ para G_{12} ficaram bastante próximos dos valores que foram obtidos por Adams e Doner's [Adams e Doner's, apud Jones, 1999].

Uma vez conhecidas as propriedades do laminado como um todo através de ensaios de laboratório, foi possível utilizar as equações acima para se determinar as propriedades de uma lâmina apenas através de processos iterativos, até que se obteve as propriedades de cada lâmina de forma tal que o conjunto representava o modelo completo.

2.6 Obtenção das Matrizes de Rigidez e Massa

O elemento finito apresentado neste trabalho foi desenvolvido através da degeneração de um elemento sólido tridimensional como já explicado. Naquele trabalho apenas material isotrópico foi considerado. Panda e Natarajan [Panda e Natarajan, 1981], estenderam o conceito de elemento degenerado para cascas laminadas.

2.6.1 Matriz de Rigidez

Partindo-se do conceito estabelecido no trabalho de Ahmad, a matriz de rigidez pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \, d\Omega_e \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad , \end{aligned} \quad (2.79)$$

fazendo-se agora uma mudança de variáveis proposta por Panda e Natarajan representada na equação 2.80 tornou-se possível a montagem da matriz de rigidez para laminados

$$d\zeta = \frac{h_k}{t} d\zeta_k \quad , \quad (2.80)$$

e a equação 2.79 se torna

$$\mathbf{K}_e = \sum_{k=1}^{nl} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} |J| \frac{h_k}{t} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta_k \quad , \quad (2.81)$$

onde nl é o número de lâminas que compõe o material.

Essa formulação entretanto, aumentou consideravelmente o tempo computacional para o cálculo das matrizes do sistema, ficando viável apenas para estruturas com um número reduzido de lâminas.

Neste trabalho, utilizou-se uma formulação desenvolvida por Kumar e Palaninathan [Kumar e Palaninathan, 1997] onde z assume o lugar de $\zeta \frac{t}{2}$ e os elementos do inverso da matriz jacobiana são considerados constantes na direção da espessura. A integração é exata na direção da espessura. Com isso a matriz de deformação \mathbf{F} ficou dividida em duas partes,

ambas independentes da espessura. A matriz \mathbf{F} passou a ser expressa agora por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + z\mathbf{F}_2 \quad , \quad (2.82)$$

com isso a matriz de rigidez para cada elemento passou a ser escrita como

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{F}_1^T \mathbf{A} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{B} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{D} \mathbf{F}_2] |J| d\eta d\xi \quad . \quad (2.83)$$

As matrizes \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 bem como os elementos que formam as mesmas foram apresentados no ANEXO II. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} são apresentadas em 2.70, 2.71 e 2.73, respectivamente.

2.6.2 Matriz de Massa

A matriz de massa precisa ainda ser determinada para a montagem do problema modal. A definição da matriz de massa é dada em [Hughes, 1987]. As matrizes de massa dos elementos podem ser montadas de duas maneiras, as chamadas matrizes de massa consistentes ou as matrizes de massa concentradas, a última também é conhecida pelo termo em inglês *lumped mass matrix*. Para esse trabalho foram empregadas matrizes de massa concentrada.

Como regra geral, a construção da matriz de massa \mathbf{M} encontra paralelo na construção da matriz de rigidez \mathbf{K} da estrutura. A matriz de massa dos elementos individuais são formadas em coordenadas locais, transformadas em globais e montadas na matriz de massa global da mesma forma que na matriz de rigidez. Na prática, a montagem das matrizes de rigidez e massa podem ser feitas de maneira idêntica. Porém uma diferença notável entre ambas matrizes é que no caso da matriz de massa concentrada existe a possibilidade de armazenamento dos dados da matriz de cada elemento ser feita na forma de um vetor, e a matriz global ser diagonal, o que resulta em um esforço computacional muito menor no caso de ser necessário que se encontre \mathbf{M}^{-1} .

Portanto, a montagem da matriz de massa para a malha de elementos finitos pode ser feita da maneira descrita abaixo.

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \gamma \mathbf{N} \, d\Omega_e \quad , \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} N_i \gamma N_j, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad , \quad (2.85)$$

onde os termos relacionados às rotações assumem valor igual a zero.

2.7 Massa Modal Efetiva

Um estudo importante a ser realizado em uma análise modal é o cálculo de quantos modos de vibração serão extraídos na resolução do problema de autovalores. Isso foi feito determinado-se a massa modal efetiva, ou seja, determinando-se a importância de cada modo de vibração [Irvine, 2010].

Considerando uma análise modal pelo método dos elementos finitos, a determinação apenas de uma quantidade significativa de modos vibração, deixando-se de extrair modos que dificilmente seriam excitados resulta em uma análise mais rápida e de resultados tão expressivos quanto se considerar muitos modos com pouca participação na análise, isso é importante também para a análise aeroelástica realizada, uma vez que tanto quanto menor for o número de modos a serem analisados, menor será o tempo computacional para a análise. Pode-se descrever o procedimento de análise como abaixo.

Seja Φ a matriz que contém os autovetores, uma matriz de massa generalizada pode ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi, \quad (2.86)$$

seja agora um vetor de influência que representa os deslocamentos das massas resultante de uma aplicação estática. Pode-se definir um vetor de coeficientes $\bar{\mathbf{I}}$ como

$$\bar{\mathbf{I}} = \Phi^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{I}. \quad (2.87)$$

A matriz de fator de participação modal Γ_i para o modo i é dada por

$$\Gamma_i = \frac{\bar{\Gamma}_i}{\bar{m}_{ii}}, \quad (2.88)$$

onde m_{ii} representa o termo ii da matriz $\bar{\mathbf{M}}$ apresentada em 2.86, a massa modal efetiva $m_{ef,i}$ para o modo i é

$$m_{ef,i} = \frac{\bar{\Gamma}_i^2}{\bar{m}_{ii}}, \quad (2.89)$$

onde a equação 2.89 representa a massa modal efetiva do modo i do domínio que está sendo estudado, e a soma das i massas efetivas representa a massa total do corpo. Admite-se que os modos responsáveis por cerca de 95 por cento da massa total da estrutura sejam suficientes para a análise.

3. MODELO AEROELÁSTICO

Aeroelasticidade é a ciência que estuda o comportamento de estruturas que estão sujeitas à forças aerodinâmicas e deformação estrutural agindo em conjunto. A mudança da forma da superfície quando sujeita à forças que provém da interação entre fluido e estrutura causarão também uma variação do campo de pressão dessa superfície. O termo aeroelasticidade foi usado a primeira vez por Cox e Pugsley no começo da década de 1930 para chamar atenção a esse tipo de problema [Weisshaar, 1995], e compreende uma série de disciplinas em conjunto, como aerodinâmica, estruturas e inércia. Collar, em 1946, apresentou na forma de um triângulo essas interações entre disciplinas e os problemas que descreviam as mesmas. Com o passar do tempo, muitas outras interações foram identificadas, principalmente a necessidade da adição de controle ao triângulo (figura 3.1). A adição deste último caracterizou o que ficou conhecido como aeroservoelasticidade [Shirk e Hertz, 1986].

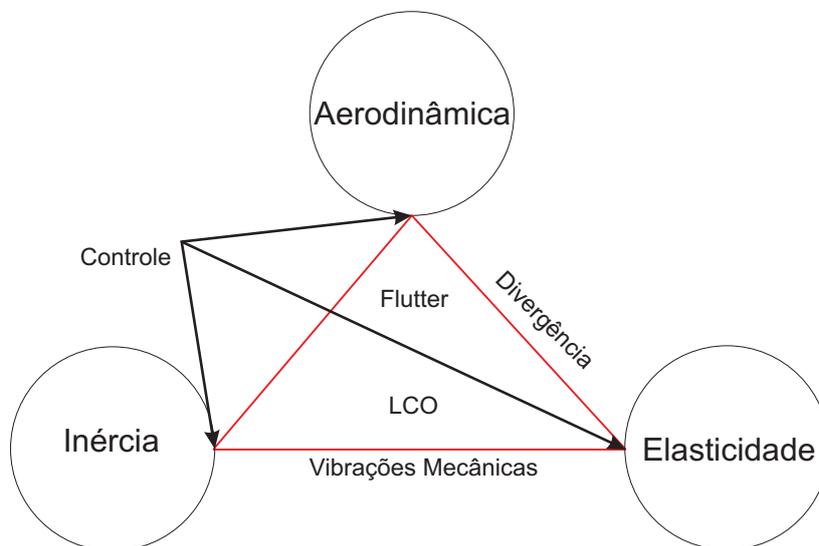


Figura 3.1 – Triângulo de Collar (com adição de controle).

O triângulo de Collar ilustra as diversas interações possíveis e os diversos problemas que podem ser resolvidos separadamente. Segundo de Souza [de Souza, 2010], o problema

de aeroelasticidade pode ser analisado de uma série de maneiras, como por exemplo:

- análise estática, como exemplo a análise de problemas de divergência;
- análise de estabilidade, como exemplo a análise de *flutter*;
- análise de resposta, em que se avaliam o comportamento do sistema em resposta a uma excitação como rajada ou atuação de controle.

Neste trabalho foi dada atenção ao problema de estabilidade de uma estrutura sujeita a esforços aeroelásticos, e, supondo o sistema linear, a formulação foi aplicada para análise do problema de *flutter*.

A teoria linear indica que existe uma pressão dinâmica limite na qual a amplitude do movimento da placa ou casca passa a ser não-estável e passa a aumentar com o tempo. Tais efeitos são conhecidos, de uma maneira geral por *flutter*. *Flutter* é uma instabilidade dinâmica auto-excitada. Ela depende do acoplamento de dois ou mais modos de vibração nos quais suas oscilações criam forças aerodinâmicas que permitem a transferência de energia da corrente de ar para a estrutura e com isso as amplitudes dos modos crescem com o tempo [Weisshaar, 1995].

Porém, efeitos de não linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos oscilatórios geram tensões no plano que acabam por fazer com que efeitos estabilizantes apareçam e seja possível que se trabalhe, portanto, com velocidades maiores do que as previstas na teoria linear. Esse efeito é conhecido por oscilação de ciclo limite, ou pelo termo em inglês LCO (*limit cycle oscillation*). Mas, apesar de tratáveis esses efeitos oscilatórios são indesejáveis pois podem causar problemas como fadiga da estrutura. Portanto em muitos casos a prevenção do surgimento do *flutter* passa a ser o primeiro critério de projeto dessas estruturas.

A figura 3.2 simula uma possível resposta no tempo de um ponto sofrendo distúrbios localizado em uma asa durante voo. Com a velocidade do escoamento correspondendo ao ponto A, a resposta é amortecida e qualquer distúrbio inicial tende a estabilizar com o tempo. Com o aumento da velocidade do escoamento passando para o ponto B, um distúrbio inicial produz um movimento oscilatório harmônico com amplitude fixa, e uma tentativa de levar a velocidade do escoamento ao ponto representado por C, faria a amplitude da resposta crescer muito rapidamente, o que levaria a estrutura a um movimento não estável.

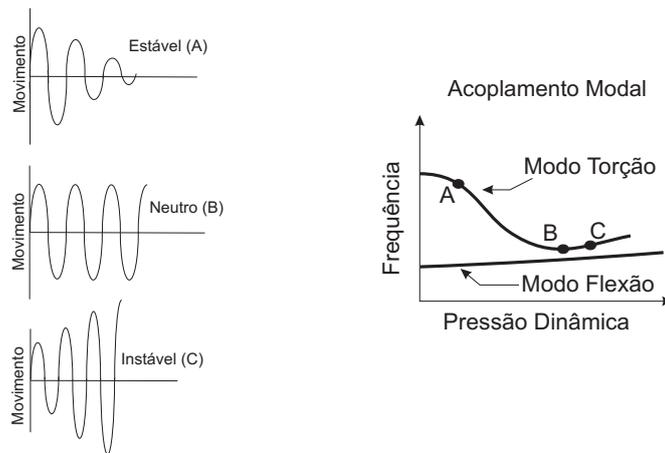


Figura 3.2 – Frequência e resposta dinâmica de um ponto na asa a diferentes velocidades.

Se uma força senoidal com valores de máximos e mínimos fixos a uma frequência específica for aplicada à asa em operação na pressão dinâmica estabelecida por A, as frequências naturais do sistema aeroelástico são observadas.

Com o aumento da pressão dinâmica, os valores dessas duas frequências mudam em função da deformação induzida pelas forças aerodinâmicas que atuam na asa.

No ponto B, se a força senoidal for retirada, um dos modos será amortecido aerodinamicamente e cairá com o tempo. O outro, porém não será amortecido como mostra o caso B. No ponto C, as condições do escoamento criam uma situação que permite a asa obter energia do fluxo de ar e transformá-la em energia cinética para a asa. Como resultado dessa interação, a amplitude de oscilação cresce exponencialmente, a menos que efeitos não-lineares impeçam o fenômeno. Em suma a figura 3.2 indica que o surgimento iminente do *flutter* pela combinação de movimentos está relacionado à tendência de duas ou mais frequências acoplarem.

3.1 Fundamentos da Aeroelasticidade

A resposta aeroelástica de um veículo em voo é o resultado da interação das forças inerciais e estruturais, forças aerodinâmicas induzidas pela deformação estática ou dinâmica da estrutura e forças externas causadoras de distúrbios [ZONA-Technology, 2006]. A equação

do movimento pode ser escrita como em 3.1

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

Na equação 3.1 os termos $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{K}\mathbf{x}$ são as forças de inércia e estrutural elástica, respectivamente. O vetor \mathbf{f} representa as forças aerodinâmicas aplicadas à estrutura e podem ser divididas em duas partes, incluindo parcelas devidas a excitações como rajada e controle e as parcelas de aerodinâmica não-estacionária, dependendo dos graus de liberdade estruturais.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_e(t), \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{f}_a(x)$ representa as forças aerodinâmicas induzidas pela deformação estrutural, e $\mathbf{f}_e(t)$ o vetor de forças externas. Como o primeiro vetor depende da deformação estrutural $\mathbf{x}(t)$, essa relação pode ser interpretada como uma realimentação (*feedback*) aerodinâmica (figura 3.3), esse *feedback* pode causar instabilidade, como *flutter* ou desconforto para o piloto em função de mudanças na capacidade de controlar a aeronave.

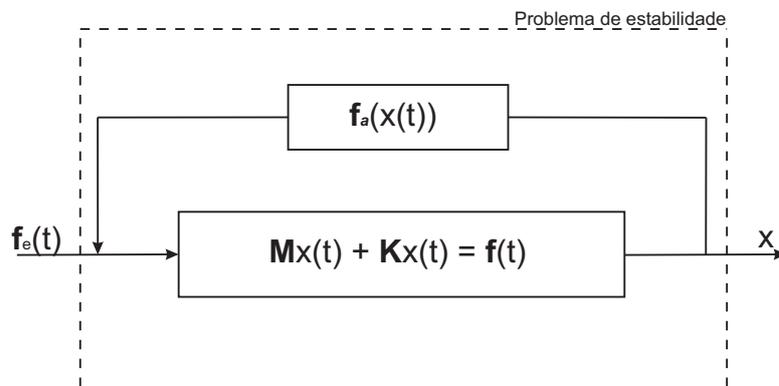


Figura 3.3 – Diagrama do problema de aeroelasticidade.

Utilizando este conceito, a equação 3.1 pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e(t), \quad (3.3)$$

o lado esquerdo da equação 3.3 é na verdade um sistema dinâmico fechado auto-excitado pelo carregamento aerodinâmico incremental não estacionário [ZONA-Technology, 2006]. Análise de *flutter* geralmente envolve a busca pela estabilidade de uma estrutura sujeita a esforços

aeroelásticos em termos de sua velocidade de voo e altitude ou de sua correspondente pressão dinâmica. Se $\mathbf{f}_a(\mathbf{x})$ é uma função não-linear com respeito a $\mathbf{x}(t)$, a análise pode ser realizada por um procedimento iterativo resolvendo a seguinte equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}_a(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.4)$$

com $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ como condições de contorno, sendo especificadas em $t = 0$.

No entanto, a resolução deste problema requer alto esforço computacional uma vez que só é possível através de procedimentos conhecidos como métodos de dinâmica computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*).

Ao invés disso, a prática usual na análise de *flutter* é transformar a equação 3.4 para o domínio da frequência de forma a se poder empregar uma aerodinâmica não estacionária definida por movimentos harmônicos simples, também neste domínio.

Conseqüentemente a estabilidade do sistema aeroelástico pode ser investigada através de problemas de autovalor assumindo a variação de parâmetros tal como a pressão dinâmica.

Antes de se passar para a etapa de solução do problema estabelecido, é necessário perceber que o problema apresentado em 3.4 está dividido em duas partes: estrutural e aerodinâmico. Temos do lado esquerdo da equação do movimento um modelo estrutural em que as matrizes e vetores por ele representados encontram-se identificados pela malha de elementos finitos criada para o modelo estrutural e a parte direita da equação está representada por outro modelo físico, ou seja, não necessariamente os pontos de controle do modelo aeroelástico e do modelo estrutural coincidem.

A observação feita acima introduziu uma outra transformação necessária para equiparar os dois modelos. Surgiu a necessidade de se representar as coordenadas físicas em outros pontos. Isto foi alcançado fazendo-se a seguinte transformação

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{G}_s \mathbf{x}_e, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{G}_s é uma matriz que interpola a forma dos deslocamentos do modelo estrutural para o modelo aerodinâmico, dada por uma transformação por *splines* apresentada por Harder e Desmarais [Harder e Desmarais, 1972].

Dando segmento na análise, por ser usado um modelo linear, assumiu-se que pe-

quenos deslocamentos e o princípio da superposição pode ser aplicado, e isso permitiu o uso de uma formulação de matrizes generalizadas. Por essa aproximação, a parte estrutural foi representada pelas frequências naturais e seus respectivos autovetores. Uma forma mais completa do desenvolvimento do modelo dinâmico estrutural na base modal pode ser encontrado em [ZONA-Technology, 2006].

O deslocamento estrutural pode ser aproximado pela relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi} \bar{\mathbf{x}}, \quad (3.6)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}$ é o vetor de deslocamentos generalizado e $\mathbf{\Phi}$ é uma matriz contendo os autovetores em cada coluna provenientes da análise modal realizada no modelo estrutural.

Reescreve-se a equação do movimento sem amortecimento da seguinte maneira

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}, \quad (3.7)$$

que pode ser reescrita como

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}, \quad (3.8)$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}$ são as matrizes de massa e rigidez generalizadas, respectivamente.

Modelo Aerodinâmico

Os primeiros trabalhos em aeroelasticidade em que se considerava o problema de *flutter*, usavam a teoria aerodinâmica potencial com um operador que é função da frequência reduzida, definida adiante, para representar a sustentação e momentos em um aerofólio bi-dimensional (seção típica). Mais tarde, esse modelo bi-dimensional foi ampliado através do uso de várias seções típicas colocadas lado a lado, o que consistia no método das faixas (restrita a asas de grande alongamento). Em seguida, novas formulações foram sendo criadas com o intuito de se resolverem casos cada vez mais gerais, criando-se assim, os métodos de painel. O uso de painéis permitiu novas aproximações, onde agora as asas podem ser de baixo alongamento, e em escoamentos compressíveis.

No fim da década de 1960, Albano e Rodden [Albano e Rodden, 1969], apresentaram detalhadamente a descrição do método *Doublet Lattice* (DLM, *Doublet Lattice Method*) para

a análise do modelo aerodinâmico, Giesing também apresenta uma descrição do método [Giesing et al., 1971]. Para o presente trabalho, a análise aeroelástica é feita através do software ZAERO, que usa uma variação do DLM, o método ZONA6.

Tais métodos requeriam que a asa fosse discretizada em pequenos painéis, definidos como painéis aerodinâmicos. Cada painel aerodinâmico continha um ponto de controle onde as condições de contorno eram impostas (figura 3.4).

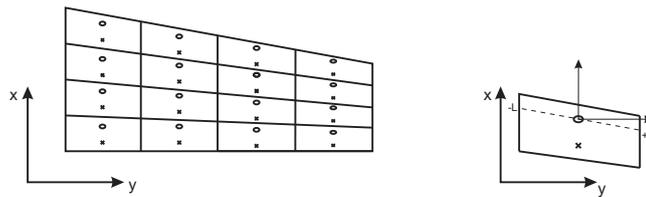


Figura 3.4 – (a) Asa discretizada em painéis para o método Doublet-Lattice e pontos de controle. (b) Sistema de coordenadas local de cada painel

As equações integrais foram então aproximadas pelo somatório das integrais associadas a cada painel aerodinâmico, a exemplo do método DLM. A linha dipolo (*doublet*) foi colocada a $\frac{1}{4}$ do comprimento da corda de cada painel da asa e o deslocamento $w(x,y,z)$ foi calculado a uma distância de $\frac{3}{4}$ de comprimento de corda, ambos pontos localizados na metade de cada painel. A figura 3.4 mostra uma asa dividida em painéis e a localização de cada ponto.

A solução do método baseia-se na equação do potencial aerodinâmico generalizado, para um escoamento bi-dimensional, compressível e em um campo assumido irrotacional (essa condição é válida para as regiões do escoamento onde a viscosidade é desprezível). A solução aproximada foi feita pela superposição de efeitos das soluções de dipolos. Foi então montada uma matriz de coeficientes de influência onde os termos ij dessa matriz são os efeitos causados pela aplicação do i -dipolo no j -ponto de controle dos painéis.

Considerando-se o deslocamento dos pontos de controle aerodinâmicos como \mathbf{q}_a , um vetor que contém esses pontos, as forças aerodinâmicas resultantes nos painéis aerodinâmicos em função deste deslocamento foram definidas por

$$\mathbf{f}_a = q_\infty \mathbf{A}(ik) \mathbf{q}_a \quad (3.9)$$

onde $q_\infty = \frac{\rho V}{2}$ é a pressão dinâmica, sendo V a velocidade do fluido e ρ a densidade do fluido, $k = \frac{wb}{V}$ é a frequência reduzida, sendo w a frequência harmônica, b é a semi-corda de referência. A matriz de coeficientes de influência aerodinâmico $\mathbf{A}(ik)$ é função da frequência reduzida e do número de *Mach*.

Portanto, o vetor de forças aerodinâmicas generalizado é dado por

$$\tilde{\mathbf{f}} = \Phi \mathbf{G}_s \mathbf{f}_a = q_\infty \Phi \mathbf{G}_s^T \mathbf{A}(ik) \mathbf{q}_a. \quad (3.10)$$

Porém, a equação 3.10 ainda não estava pronta para ser colocada em 3.8, pois os termos ainda estavam escritos em função dos pontos de controle aerodinâmicos. Para escrever 3.10 em termos dos pontos definidos pela malha estrutural do MEF podemos substituir o vetor que contém os deslocamentos aerodinâmicos como

$$\mathbf{q}_a = \Phi_a \Upsilon = \mathbf{G}_s \Phi \Upsilon, \quad (3.11)$$

assim pode-se escrever finalmente o vetor de forças aerodinâmicas expresso nos pontos descritos pelo MEF

$$\tilde{\mathbf{f}} = q_\infty \Phi \mathbf{G}_s^T \mathbf{A}(ik) \mathbf{G}_s \Phi \Upsilon. \quad (3.12)$$

Posto dessa forma pode-se representar agora uma matriz de coeficientes de influência aerodinâmicos generalizada $\mathbf{Y}(ik)$ que seria a matriz $\mathbf{A}(ik)$ escrita nos pontos do MEF.

$$\mathbf{Y}(ik) = \Phi^T \mathbf{G}_s^T \mathbf{A}(ik) \mathbf{G}_s \Phi. \quad (3.13)$$

Agora todos os termos podem ser escritos na sua forma generalizada. Com isso ambos os lados da equação 3.8 tinham o tamanho do número de modos desejados para a análise. Pode-se reescrever 3.8 como:

$$-w^2 \tilde{\mathbf{M}} \Upsilon + \tilde{\mathbf{K}} \Upsilon = q_\infty \mathbf{Y}(ik) \Upsilon, \quad (3.14)$$

ou separando as variáveis

$$\left[-w^2 \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{K}} - q_\infty \mathbf{Y}(ik) \right] \boldsymbol{\Upsilon} = 0. \quad (3.15)$$

Tem-se portanto em 3.15 um problema de estabilidade com soluções diferentes da trivial sendo buscadas. Existe uma série de métodos que resolvem o problema acima. Para este trabalho foi utilizado o método g descrito por Chen [Chen, 2000], que é uma variação do método $p-k$. Uma explicação detalhada do método g pode ser encontrado em [ZONA-Technology, 2006].

Basicamente, o que se busca nesses métodos é encontrar não somente o ponto onde ocorre o começo da instabilidade causada pelo escoamento do fluido (ar) no corpo, como também o modo de vibração a parâmetros associados tais como a frequência e o amortecimento. Neste trabalho, estuda-se apenas o ponto de começo de *flutter* e o modo responsável, não estando-se interessado em estudar o comportamento da estrutura em condições subcríticas (antes do *flutter*).

A figura 3.5 mostra uma análise de *flutter* usando o método g , e a forma como se determina o ponto e o modo de interesse na análise.

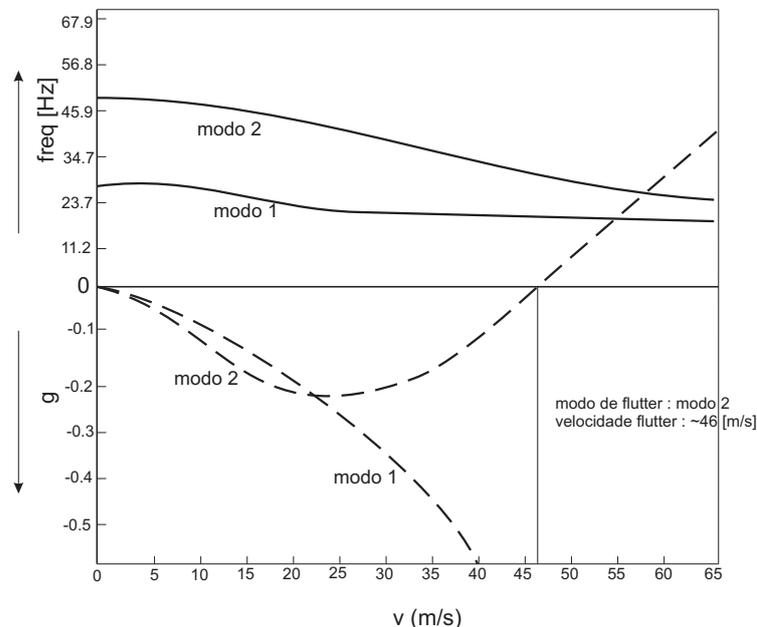


Figura 3.5 – Exemplo de uma análise de estabilidade usando o método g .

Resumidamente, o método g indica que para valores de amortecimento negativo a

estrutura é estável, enquanto valores positivos indicam instabilidade. O ponto de *flutter* portanto ocorre quando g é nulo.

3.2 “Aeroelastic Tailoring”

Apesar de a busca por redução de peso nos componentes ser um problema que sempre estará presente no projetos de aeronaves, a incorporação de materiais compostos nos projetos trouxe outros benefícios para os projetistas. Redução de peso sempre será uma restrição no problema estrutural, porém a busca real de projetistas dessa área é por performance. Antes de mais nada, *aeroelastic tailoring* deve ser considerado como uma maneira de maximizar performance.

Uma definição para a técnica foi dada por Shirk e Hertz, em 1986 a qual busca de forma geral estabelecer a área de atuação do procedimento:

“*Aeroelastic Tailoring* é a incorporação das características de rigidez direcional no projeto estrutural de uma aeronave para controlar a deformação aeroelástica, estática ou dinâmica, de tal modo que a performance estrutural e aerodinâmica dessa aeronave sejam afetadas de uma maneira benéfica”.

Existem similaridades com a metodologia de controle, muitas vezes empregadas no projeto de asas de aeronaves. Por exemplo, em controles ativos a superfície aeroelástica pode ser modificada por existir uma superfície de controle e um sistema de sensores para controlar a resposta dinâmica. Enquanto que, na inexistência de uma fonte de energia externa, *aeroelastic tailoring* utiliza uma espécie de lei de controle pré-programada para modificar o comportamento do sistema. Partindo desse princípio, a estrutura funciona como sensor e atuador, onde a lei de controle está implícita na estrutura na forma das relações constitutivas.

3.2.1 Breve Histórico

O conceito de projeto por trás de *aeroelastic tailoring* não é novo. Um trabalho de Munk [Munk, 1949] apresentou um projeto de um propulsor de madeira (figura 3.6) no qual as fibras do material foram orientadas de forma a favorecer a performance do propulsor quando aplicadas as cargas.

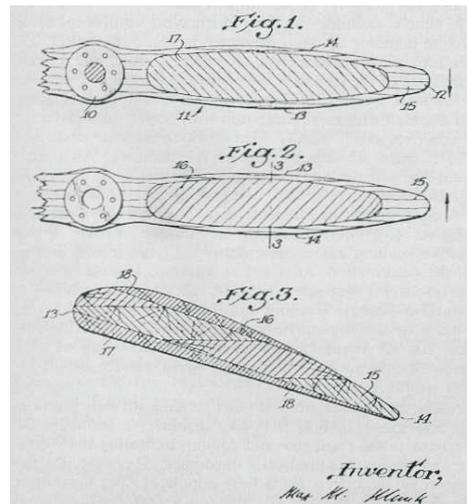


Figura 3.6 – Projeto do propulsor de Munk.

Quatro anos após a patente do invento de Munk, um modelo de asa conhecido na época como *aero-isoclinic wing* foi incorporada ao projeto do Short S. B. 4 Sherpa [Keith-Lucas, 1953]. A construção foi em grande parte de abeto (um tipo de madeira) e componentes de liga leve em pontos estratégicos.



Figura 3.7 – Short SB. 4 Sherpa.

No final da década de 1960, materiais laminados avançados começaram a encontrar utilidade nos projetos de aeronaves e começaram a ser empregados de forma a se encontrar o melhor formato de utilização e também na redução de peso das estruturas. Utilizando-se a direção das fibras como parâmetro o termo *aeroelastic tailoring* começava a ser usado. Em 1969 o termo *Aeroelastic Tailoring* foi introduzido para descrever o trabalho de Wad-doups e colaboradores em um estudo com materiais compostos avançados para a melhora de desempenhos em projetos, eles demonstraram que se poderia utilizar as propriedades di-

recionais destes materiais para produzir um acoplamento entre as deformações de flexão e torção [Shirk e Hertz, 1986].

Em 1974, Krone [Krone, 1974] trabalhando em otimização aeroelástica na sua tese de doutorado, descobriu que era possível resolver o problema da divergência de asas com enflechamento negativo utilizando uma formulação de otimização com materiais compostos. Os dados foram utilizados como partida para o projeto do X-29 (figura 3.8), que teve o seu primeiro voo em 1984.



Figura 3.8 – X-29.

Nos últimos 15 anos, o número de trabalhos nessa área tem crescido muito. Patil [Patil, 1997] trabalhou com asas de material composto simuladas como vigas de seção transversal retangular e estudou o comportamento aerodinâmico variando o ângulo de ataque e algumas configurações do laminado, Veers [Veers et al., 1998] fez um estudo utilizando *aeroelastic tailoring* para estudar as deformações a que turbinas estão sujeitas, e usando as propriedades direcionais dos compósitos, minimizar as perdas de energia.

Weisshaar [Weisshaar et al., 1998] aplicou técnicas de *aeroelastic tailoring* para melhorar a performance de veículos aéreos não-tripulados, nesse trabalho foram estudados características de controle e diminuição de arrasto utilizando material laminado.

Maute [Maute e Allen, 2004] aplicou otimização topológica para obter a estrutura interna de uma asa (reforço), usando para tanto uma formulação multiobjetivo na qual eram levadas em conta a parte estrutural e aerodinâmica.

Kameyama [Kameyama e Fukunaga, 2007] utilizou parâmetros de laminação como variáveis de projeto para a otimização de asas simuladas como placas compostas. Nesse

trabalho algoritmos genéticos foram utilizados. Algoritmos genéticos foram também assunto em *aeroelastic tailoring* no trabalho de Manan [Manan et al., 2010], no qual foram utilizados quatro tipos de algoritmos de otimização diferentes para resolver o problema de otimização de uma asa simulada como uma placa composta de 6 lâminas, os resultados obviamente apontaram que os algoritmos contínuos apresentam resultados melhores mesmo para problemas mais simplificados.

Attaran [Attaran et al., 2010] também trabalhou com placas planas de material composto laminado, parâmetros como o ângulo das fibras do laminado e espessura das lâminas eram alterados com intuito de aumentar a velocidade de *flutter*. Porém o ângulo de orientação das fibras dentro de uma mesma lâmina era sempre o mesmo, ou seja, o número de variáveis de projeto era o número de lâminas da placa.

3.2.2 “Fiber Steering”

O desenvolvimento de materiais compostos e avançados foi absorvido pela indústria aeronáutica e rapidamente empregados por técnicas como por exemplo *aeroelastic tailoring*. Como geralmente acontece, a produção técnica e os resultados teóricos alcançados andam um passo à frente dos métodos de fabricação e os modelos teóricos nem sempre encontram possibilidade imediata de fabricação. Muitos resultados encontrados em bons trabalhos na área esbarram na dificuldade de produção dos componentes, e muitos trabalhos acabam direcionados a encontrar a melhor configuração ‘fabricável’ da estrutura que atendem as condições de contorno desejadas.

O projeto de asas de avião é um bom exemplo destas limitações. Enquanto uma asa em voo apresenta majoritariamente esforços de flexão e torsão, é intuitivo imaginar que para se criar estruturas mais rígidas que se oponham aos esforços de flexão, lâminas orientadas na direção longitudinal da asa sejam indicadas, enquanto para os esforços de torção um ângulo de 45 graus para as fibras seja mais indicado. O que ocorre é que a sequência de laminação indicada acaba determinando a orientação de cada lâmina que vai se opor a cada esforço de maneira individual, ou seja, a variável de projeto é o ângulo da fibra porém, ele acaba sendo o mesmo para todas as fibras daquela lâmina.

Porém, materiais compostos laminados podem ter uma utilização muito mais poderosa e eficiente se a rigidez e resistência de um material reforçado por fibras puder ser

diferente dentro da mesma lâmina, isso seria facilmente obtido se fosse possível alterar o ângulo de orientação das fibras ao longo do plano do laminado. O problema se encontra justamente no que foi citado anteriormente, como se fabricar laminados com diferentes ângulos de orientação dentro do plano do laminado.

Uma técnica chamada *Fiber steering* ou *Tow steering* [ADOPTTECH, 2010] tem crescido bastante nos últimos anos e tem apresentado resultados cada vez mais satisfatórios. Essa técnica permite a variação da orientação das fibras através da mudança da orientação das fibras ao longo do comprimento. Por enquanto, são permitidas mudanças apenas suaves no caminho percorrido pela fibra conforme a figura 3.9.

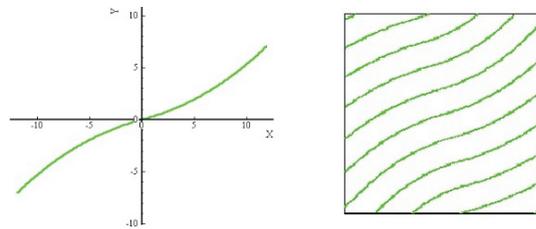


Figura 3.9 – Resultados utilizando *fiber steering*.

A Universidade de Bristol [Bristol, 2010], na Inglaterra também desenvolveu uma máquina capaz de produzir laminados com orientação aleatória, desde que a mudança de direção seja pequena.

4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Processos de otimização, de uma maneira geral, são direcionados a encontrar a melhor resposta possível para um dado problema. Estudos sobre redução de custos e tempos de processos, melhora na utilização das ferramentas disponíveis ou no próprio projeto das mesmas, aumento no tempo de vida útil de materiais ou equipamentos entre outros têm sido objeto de pesquisa já a algumas décadas.

A necessidade da busca por redução de peso de estruturas ou da mudança da forma estrutural de componentes visando o melhor aproveitamento de seu uso sem o comprometimento da integridade estrutural dos mesmos tem sido motivo de estudo a mais de um século. Nos dias de hoje a redução, por exemplo, do peso de sistemas de transporte, sobre tudo na indústria aérea e espacial tem sido motivo de estudo bastante amplo no desenvolvimento de técnicas de otimização. Pode-se citar não só a redução de peso, mas a utilização mais inteligente de uma estrutura os principais atrativos que o projeto ótimo pode oferecer. A busca pelo produto melhor, e ao mesmo tempo mais competitivo vem sendo o foco principal do desenvolvimento das modernas técnicas de otimização, que vem se desenvolvendo com rapidez nos últimos anos. Uma área de bastante interesse que pode ser citada é a ainda crescente utilização de materiais compostos, que vem se desenvolvendo e ainda está longe de encontrar toda a sua aplicabilidade.

Os processos de otimização já se tornaram uma ferramenta de extrema importância nos projetos que desejam se tornar competitivos. E serão mais necessários à medida que novos materiais sejam desenvolvidos, de forma a se obter a melhor utilização possível para as novas tecnologias.

4.1 Breve Histórico da Otimização Estrutural

A resolução dos primeiros trabalhos científicos de otimização estrutural são atribuídos a Maxwell na década de 1860, no qual seu objetivo era calcular o campo de tensões principais a que um determinado volume estaria sujeito, considerando condições de contorno. Usando

teoria da elasticidade, Maxwell colocou barras dispostas de forma a estarem ali-nhadas sobre o campo de direções de tensões principais calculados, com isso ele chegou a uma estrutura de treliças onde os componentes (barras) estariam sujeitas a esforços apenas de compressão e tração. Essa configuração é o projeto ótimo onde a estrutura obtida suporta o carregamento aplicado com o menor volume de material. Posteriormente Michel, em 1904 utilizou a idéia para projetar diversos tipos de estruturas com a menor quantidade de material. Como os resultados obtidos por Michel eram considerados impossíveis de serem construídos na época, os seus trabalhos ficaram esquecidos por algumas décadas. O desenvolvimento das técnicas de programação linear por Dantzig em 1948, [Dantzig, 1963], juntamente com o advento da computação digital, conduziram à aplicação de técnicas de programação matemática ao projeto de vigas e pórticos no regime plástico, como descrito por Heyman em 1956, [Vanderplaats, 1999].

Um dos primeiros avanços nos métodos modernos de programação matemática (PM) para otimização estrutural foi feito por Schmit, em 1960, ele introduziu a idéia de unir a análise estrutural por meio do método dos elementos finitos e um método de programação matemática não-linear para criar projetos de ótimo automatizados [Cheng, 1994]. Os primeiros trabalhos usando PM sofreram com a incapacidade de resolver problemas em larga escala, complicados e com muitas variáveis de projeto.

4.2 Conceitos Básicos

Antes da formulação do problema de otimização é importante se criar os conceitos relativos ao processo, tais como função objetivo, variáveis de projeto e restrições. A transcrição de um problema de otimização em uma formulação matemática é um passo crítico no processo de resolução do problema [Arora, 2004]. Se a formulação do problema em um projeto é imprópria, a solução do problema muito provavelmente será inaceitável. Por exemplo, se uma restrição crítica não for incluída na formulação, provavelmente, essa restrição estará violada no ponto ótimo. Portanto uma atenção especial será necessária para a formulação do problema de otimização.

A literatura a respeito desses conceitos é rica nos dias de hoje, sendo encontrados bons textos a respeito de otimização em muitos livros. Neste trabalho a explicação destes conceitos básicos se baseia principalmente nos textos de [Arora, 2004] e [Haftka e Gürdal, 1991].

4.2.1 Variáveis de Projeto

As variáveis de projeto são os parâmetros que podem ser alterados na busca pelo ótimo. A escolha das variáveis de projeto é crítica para o sucesso do processo de otimização. É de suma importância ter certeza de que as variáveis escolhidas representam bem o modelo a ser estudado.

As variáveis de projeto podem ser divididas em variáveis discretas e contínuas, sendo as primeiras aquelas que assumem valores dentro de um conjunto ou um universo finito de possibilidades e as contínuas podem assumir qualquer valor dentro do universo de possibilidades. É importante notar que as variáveis de projeto podem assumir a classificação que se deseja na otimização em função da necessidade ou da capacidade de reproduzi-las posteriormente. Por exemplo, se é desejado encontrar a melhor orientação das fibras de um material composto a fim de se maximizar sua rigidez dado um carregamento específico, pode-se utilizar ambos os tipos de variáveis de projeto. Se o desejo for descobrir a melhor orientação dentre todas possíveis, seria necessário trabalhar com um conjunto de variáveis contínuas do tipo $\{\theta \in X | \theta = (-90^\circ < \theta < 90^\circ)\}$. Já se por algum motivo de fabricação, não seja possível que se considere qualquer direção como resposta viável, o que é comum quando se deseja reproduzir os resultados, devem-se utilizar variáveis discretas, por exemplo, o conjunto $\{\theta \in X | \theta = (-90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)\}$.

Variáveis de projeto que são comumente consideradas contínuas, geralmente passam a ser discretas por questões construtivas. Na maioria dos problemas de projeto estrutural, tende-se a desconsiderar a natureza discreta das variáveis de projeto em problemas de otimização estrutural [Haftka e Gürdal, 1991]. Uma vez que o projeto ótimo é obtido, utiliza-se o valor discreto mais próximo do ponto ótimo. Essa aproximação é geralmente feita por que trabalhar com variáveis discretas costuma imprimir um custo maior do que trabalhar com variáveis contínuas.

4.2.2 Função Objetivo

A função objetivo ou função custo representa o que se quer otimizar e deve ser função das variáveis de projeto escolhidas. Elas são nada mais nada menos do que funções ou um conjunto de funções que podem ser melhoradas e usadas como uma medida da efetividade do projeto em que se trabalha. O número de funções com que se deseja trabalhar é o

número de funções objetivo que a otimização irá empregar. Quando o problema requer que se busque extremizar (minimizar ou maximizar) mais de uma função objetivo, o problema é dito multi-objetivo. Em problemas de otimização estrutural, peso, deslocamento, flambagem, frequências de vibração, custo ou quaisquer combinações das mesmas podem ser usadas como função objetivo [Haftka e Gürdal, 1991].

4.2.3 Restrições de Projeto

Mesmo podendo alterar as variáveis de projeto, estas estão sujeitas a certos limites. Por exemplo, ao diminuir o diâmetro de uma barra, temos que este diâmetro está limitado pela tensão máxima que o material pode suportar.

Necessita-se então que se imponham certos limites na busca pelo ótimo do projeto, e esses limites são conhecidos como restrições de projeto e estas podem ser aplicadas a qualquer grandeza envolvida no problema.

Às restrições impostas nas variáveis de projeto damos o nome de restrições laterais como, por exemplo, limitar o diâmetro de um tubo no intervalo $[D^{min}, D^{max}]$ onde D é uma variável de projeto. A restrição pode ser escrita como

$$D^{min} < D_i < D^{max} \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

As restrições podem também ser classificadas em restrições de igualdade e desigualdade como em 4.2 e 4.3, respectivamente:

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad (4.2)$$

$$h_k(x) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \quad . \quad (4.3)$$

Com isso pode-se escrever um problema de otimização selecionado-se a massa por exemplo como função objetivo e as demais tensões como restrições de projeto, a equação 4.4 descreve um exemplo de um problema com restrição

$$\begin{array}{l} \min \quad m \\ \text{su}j.a \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 < \sigma_{1m\acute{a}x}; \\ \sigma_2 < \sigma_{2m\acute{a}x}; \\ \sigma_3 < \sigma_{3m\acute{a}x}. \end{array} \right. \end{array} \quad (4.4)$$

Também se pode citar as restrições de comportamento que são aquelas impostas na resposta final da estrutura como, por exemplo, limitar um deslocamento de determinado ponto de uma estrutura a um valor específico. Porém deve-se atentar para o fato de que essas restrições envolvem um alto custo computacional e deve ser considerado um ponto de atenção especial na formulação do problema de otimização.

O problema de otimização pode ter quantas restrições quantas forem necessárias, porém deve-se ter em mente que quanto maior o número de restrições do problema, maior o seu custo computacional.

Outro tópico importante de ser citado é quando as restrições impostas são de ordem de grandeza bastante diferentes. Isso pode acontecer, por exemplo, quando estamos lidando com uma estrutura do tipo treliça e queremos restringir algum limite de tensão e deslocamento ao mesmo tempo. A tensão será da ordem de MPa e os deslocamentos quando muito em mm e isso pode levar o algoritmo a erros de condicionamento. Para evitar esses problemas pode-se simplesmente normalizar as restrições

$$X_i(x) \leq X_{m\acute{a}x,i} \rightarrow \frac{X_i}{X_{m\acute{a}x,i}} \leq \bar{X}_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

4.2.4 Mínimos Locais e Globais

Uma função objetivo descrita por $f : X \subseteq \Re^n \rightarrow \Re$ pode ter dois tipos básicos de mínimos, locais e globais.

- Mínimos locais: a função custo $f(x)$ tem um mínimo local (mínimo relativo) no ponto x^* no domínio viável se o valor da função é o menor no ponto x^* comparado com todos os outros pontos x em uma pequena vizinhança viável de x^* , ou seja,

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (4.6)$$

- **Minimos Globais:** a função custo $f(x)$ tem um mínimo global no ponto x^* se a desigualdade 4.6 serve para todos os pontos x no domínio viável, então x^* é chamado mínimo global único ou estrito.

Essas definições nos mostram que para o mínimo local, testa-se a desigualdade 4.6 apenas para regiões pequenas do domínio ao redor do ponto x^* , e para o teste do mínimo global, testa-se para o domínio inteiro. Nota-se com isso que a função custo $f(x)$ pode ter vários mínimos globais desde que os valores da função sejam os mesmos em todos estes pontos. Ao mesmo tempo, pode-se ter múltiplos mínimos locais em pequenas regiões do domínio viável. A figura 4.1 ilustra esses casos.

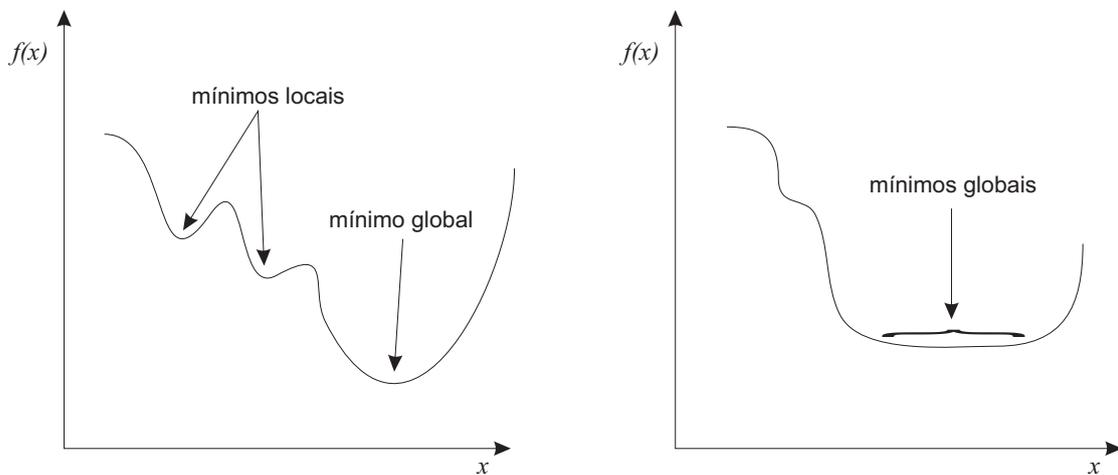


Figura 4.1 – Casos possíveis de funções

4.3 Formulação do Problema de Otimização

Existe uma vasta bibliografia que trata de formulações para problemas de otimização, para este capítulo foram consideradas algumas literaturas bastante citadas em otimização estrutural, Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1991], Arora [Arora, 2004], Pedersen [Pedersen, 2003].

A maneira mais geral possível de escrever uma formulação de um problema otimização é:

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 \text{su.j. } & a \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_g, \\
 & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, n_h, \\
 & a_k^{inf} \leq x_k \leq a_k^{sup} \quad k = 1, \dots, n_a
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $f(x)$ é o vetor que contém as variáveis de projeto, g , h e a são as matrizes que contém as restrições de desigualdade, igualdade e laterais, respectivamente, n_g , n_h e n_a são os números de restrições.

A figura 4.2 ilustra uma representação geométrica de um problema de otimização estrutural com todos os seus componentes. Definido-se um sistema de coordenadas n -dimensional, onde cada eixo coordenado do espaço é limitado por uma das variáveis de projeto. Chama-se espaço de projeto o espaço onde qualquer ponto é projeto candidato. Já o espaço das soluções, levando em conta as restrições é chamado de espaço das soluções admissíveis.

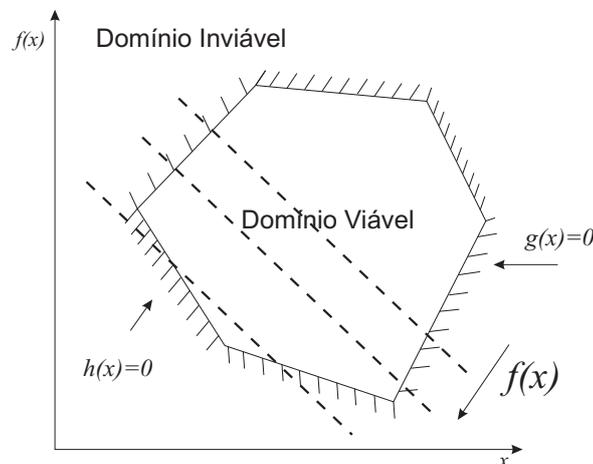


Figura 4.2 – Espaço de Projeto

O problema como foi apresentado, de minimizar o funcional, pode ser escrito como maximizar o funcional sem perda no objetivo geral da otimização, ou seja, minimizar f significa o mesmo que maximizar $-f$ ou $\frac{1}{f}$.

A formulação acima descrita, porém pode apresentar uma série de complicações para o funcionamento do algoritmo, geralmente o processo de otimização não oferece um

bom comportamento se a função objetivo ou alguma de suas restrições não forem funções suaves e contínuas no seu domínio (continuamente diferenciáveis), forem não-lineares, estarem representadas por complicadas iterações entre as variáveis de projeto ocasionando o surgimento de valores não únicos para a solução ótima da função objetivo, ou o surgimento de ótimos locais.

Segundo Arora [Arora, 2004], as qualidades que um bom algoritmo de otimização deve possuir são robustez, generalidade, precisão, facilidade de uso e eficiência. O algoritmo deve ser capaz de convergir para o ponto ótimo independente da estimativa inicial, o algoritmo deve ser capaz de tratar restrições de igualdade tanto quanto restrições de desigualdade, precisa convergir para o ponto de ótimo com a precisão desejada, o algoritmo deve ser implementado de tal maneira que exija o mínimo de entradas possível por parte do usuário e deve ter uma taxa de convergência alta tratando eficientemente restrições lineares. Essas qualidades, obviamente fazem parte de uma lista que nem sempre é possível de ser atingida pelo programador especialmente os menos experientes, porém fazem parte de uma lista que pode servir muito bem como pontos a serem desejados quando da formulação do algoritmo, e tanto quanto mais perto desses objetivos for possível chegar, melhor será o resultado final do processo de otimização.

4.4 Programação Matemática

Programação matemática pode ser vista como a ferramenta utilizada para resolver o problema de otimização. É através de programação matemática que será feito o estudo da extremização do funcional que surge quando se monta o problema de otimização, conforme descrito na seção anterior. Portanto é recomendável que se conheça os limites de aplicação e o alcance de cada tipo de programação para que se aplique de modo correto a ferramenta na solução do problema de otimização.

Existem diversos tipos de programação matemática aplicada ao problema de otimização estrutural, e em geral pode-se encontrar descrições detalhadas sobre o assunto nos livros de otimização citados ao longo deste trabalho. Abaixo segue uma breve descrição do método de programação linear e uma técnica utilizada para resolver problemas de otimização não-lineares usando programação linear.

4.4.1 Programação Linear

Basicamente, programação linear ou LP (*Linear Programming*) se destina a solução de problema de otimização em que a função objetivo e as restrições sejam funções lineares em relação às variáveis de projeto. Isso implica que a derivada da função objetivo em relação à variável de projeto (sensibilidade) é constante. O que significa que o extremo de um problema de programação linear está localizado nas fronteiras do domínio viável, uma vez que não há gradientes nulos no interior do domínio [Haftka e Gürdal, 1991].

Uma programação linear é dita estar escrita em sua forma padrão se estiver representada por:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde \mathbf{c} é um vetor $n \times 1$ sendo n o número de variáveis, \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$ com m sendo o número de restrições e \mathbf{b} um vetor $m \times 1$. Qualquer programação linear que inclua desigualdades pode ser colocadas no formato padrão através da inserção de variáveis de folga ou *surplus variables*.

4.4.2 Programação Linear Sequencial

O conceito por trás da programação linear sequencial (SLP-*Sequential Linear Programming*) é muito simples. O objetivo é criar aproximações lineares da função objetivo e restrições não lineares através da expansão das mesmas em séries de Taylor. Dessa forma os valores das funções objetivo e restrições são obtidas de maneira muito mais rápida e simples quando necessário, além do mais a aproximação convexa para o problema permite a aplicação de limites móveis para as variáveis de projeto durante o processo, o que não seria possível utilizando outros métodos [Fonseca, 1997].

Programação linear sequencial se torna uma boa escolha pela robustez, grande quantidade de algoritmos que trabalham com o método e simplicidade frente a outros métodos de programação, como por exemplo o MAM (Método das Assíntotas Móveis).

A transformação do problema de otimização não linear em um linear pode ser descrito através da expansão mostrada na eq. 4.9

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = f(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x^*) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \\
\text{su}j. \quad & a \quad g(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x^*) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x^*} \leq 0 \\
& h(x) = h(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x^*) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \\
& \mathbf{a}_i^{inf} \leq x_i - x_i^* \leq \mathbf{a}_i^{sup}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde n é o número de variáveis de projeto e a última equação em 4.9 são os limites móveis adicionados artificialmente no problema, na forma de restrições laterais.

Como os valores obtidos por expansão em séries de Taylor valem somente em regiões próximas de x^* (figura 4.3), a determinação destes limites é de vital importância para o sucesso do algoritmo de otimização, se forem escolhidos limites muito pequenos, o processo de otimização torna-se muito demorado e caso os limites sejam muito grandes há o risco de o algoritmo não conseguir atingir o ponto ótimo.

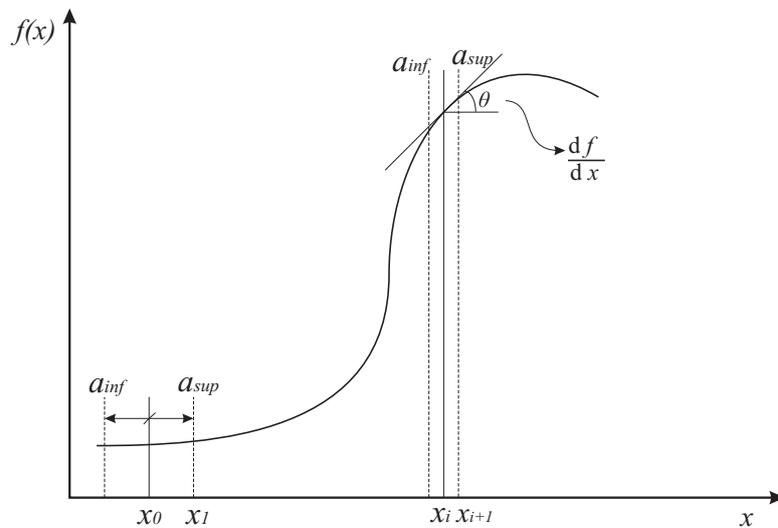


Figura 4.3 – Exemplo de expansão por séries de Taylor

Para o presente trabalho, os limites móveis foram calculados com o mesmo procedimento já aplicado nos trabalhos de Fonseca, [Fonseca, 1997], Sant'Anna [Sant'Anna, 2002] e de Souza [de Souza, 2003]. Essa forma de aplicar as restrições laterais para os limites móveis da expansão por Taylor apresentaram muito bons resultados e auxiliam o algoritmo a encontrar a correta solução.

Basicamente os limites móveis foram calculados fazendo-se uma análise do histórico

das três últimas iterações do algoritmo e considerando

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (x_{i-1} - x_{i-2}), \\ \Delta_2 &= (x_{i-2} - x_{i-3}),\end{aligned}\tag{4.10}$$

onde x_{i-1} , x_{i-2} e x_{i-3} eram os valores das variáveis de projeto obtidos nas iterações anteriores, considerando-se i a iteração atual. O produto entre Δ_1 e Δ_2 foi denominado a e esse produto determinava se os limites móveis seriam aumentados ou diminuídos

$$a = \Delta_1 \Delta_2 \quad ,\tag{4.11}$$

$$\begin{cases} l_i = (1 + \delta)l_{i-1}, & \text{se } a \leq 0 \\ l_i = (1 - \delta)l_{i-1}, & \text{se } a > 0 \end{cases} \quad ,\tag{4.12}$$

onde l_i era o tamanho dos limites e δ era o fator que determinava a variação do limite móvel, para mais ou para menos e esse fator deve ser escolhido de acordo com a experiência. Normalmente um acréscimo ou decréscimo de 20 por cento nos limites móveis ($\delta = 0.2$) é o suficiente para a dinâmica dos limites.

Assim sendo, as restrições laterais podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{inf} = x_i - l_i \\ a_{sup} = x_i + l_i \end{cases} \quad .\tag{4.13}$$

Apesar da necessidade do procedimento descrito acima para determinação dos limites em 4.13, o método SLP ainda consegue ser preferível para estes tipos de cálculo, pois mesmo assim ainda é muito mais fácil e prático de ser aplicado quando comparado a outros métodos de programação matemática.

4.5 Otimização Topológica

O propósito da otimização topológica é encontrar o *lay-out* ótimo de uma estrutura dentro de uma região pré-especificada (domínio). As únicas quantidades conhecidas no problema são por exemplo, as cargas aplicadas, as possíveis condições de apoio, o volume da estrutura a ser construída e algumas restrições adicionais de projeto [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Comumente, a função custo de um problema de otimização topológica é a minimização de

volume do domínio com flexibilidade, frequências naturais, flambagem entre outros como restrições. O método determina que cada ponto do domínio pode assumir valores entre 0 (sem material) e 1 (presença de material), sendo possível porém que valores intermediários apareçam no domínio, de acordo com o modelo definido.

Otimização topológica passou a ser um tema discutido no meio acadêmico a partir do trabalho publicado por Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi, 1988]. A partir de então, foi amplamente absorvido na indústria aeronáutica e automobilística, principalmente na Europa, EUA e Japão.

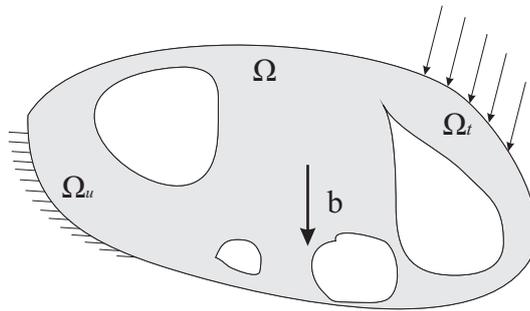


Figura 4.4 – Problema geral de otimização topológica

A figura 4.4 ilustra o problema mostrando um domínio de referência Ω , no qual são buscados o subconjunto Ω^{mat} que representa o ótimo. Para o problema de otimização topológica a aproximação para o conjunto de tensores admissíveis consiste em

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ijkl} &\in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \\ \mathbf{C}_{ijkl} &= 1_{\Omega^{mat}} \mathbf{C}_{ijkl}^0 \\ 1_{\Omega^{mat}} &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^{mat}, \\ 0 & \text{se } x \in \frac{\Omega}{\Omega^{mat}}, \end{cases} \\ \int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega &= \text{Vol}(\Omega^{mat}) \leq V \quad , \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde a última integral calcula a quantidade de material disponível, o tensor \mathbf{C}_{ijkl} é o tensor constitutivo que define o material isotrópico base, e normalmente se escreve a primeira linha de 4.14 para indicar o espaço de funções integráveis de Lebesgue, que indica que a distribuição de material pode assumir valores descontínuos.

A aproximação geralmente usada para resolver esse problema é substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas e então introduzir alguma forma de penalização que conduza

a solução à forma discreta de 0 ou 1 [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Para que isso ocorra é necessário que se encontre um mecanismo que leve os resultados para a forma desejada. O mecanismo que penaliza as densidades intermediárias pode ser obtido através de interpolação não-linear, conhecida como SIMP (*Solid isotropic material with penalization*), descrito abaixo.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ijkl}(x) &= \rho^q(x) \mathbf{C}_{ijkl}^0, \quad q > 1, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \, d\Omega &\leq V; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \quad , \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde o termo $\rho(x)$ não deve ser confundido com a massa específica do material. Em outras palavras utilizando SIMP na formulação do problema de otimização, as densidades intermediárias se convertem em um alto custo para o processo que acaba evitando esses valores no projeto ótimo.

Outro tipo de penalização bastante encontrada em problemas de otimização é a penalização da função objetivo, esse procedimento geralmente é aplicado em problemas de minimização do volume. A função objetivo pode ser penalizada da seguinte maneira

$$s(\rho) = \int_{\Omega} \rho^{\frac{1}{p}} \, d\Omega \quad p > 1 \quad . \quad (4.16)$$

Porém, se por um lado o procedimento descrito acima ajuda o algoritmo de otimização a encontrar soluções mais próximas de 0-1, ele também pode transformar a função objetivo em uma função não convexa, caso ela seja originalmente convexa. De maneira que o mínimo encontrado que seria global, possa vir a ser um mínimo local [Mosmann, 2003].

Uma maneira encontrada para contornar esse problema e que é aplicada neste trabalho é conhecida como Método da Continuação (MC), que será aplicada conforme descrito nos trabalhos de Cardoso [Cardoso, 2000], de Souza [de Souza, 2003] entre outros. Nesse método, o problema de otimização topológica é dividido em duas partes ou mais, sendo a primeira etapa resolvida com o expoente p em 4.16 igual a 1, ou seja, sem penalização da função objetivo. Essa forma garante que a solução encontrada seja um mínimo, independente da topologia ser composta por muita densidades intermediárias.

O segundo passo consiste em aplicar um valor maior que 1 para p em 4.16, que em termos práticos irá reduzir a quantidade de elementos com densidade intermediária comparados à topologia encontrada no primeiro passo do MC. De Souza, em 2003 ainda sugere

ainda um reforço na penalização da função objetivo através da seguinte formulação

$$s(\rho) = \int_{\Omega} \left[\rho^{\frac{1}{p}} + \alpha \rho (1 - \rho) \right] d\Omega \quad , \quad (4.17)$$

onde o termo α é um parâmetro escolhido heurísticamente. Para a primeira parte do MC, o termo α deve ser obviamente 0, na segunda etapa um valor de 0,3 é suficiente para bons resultados. A figura 4.5 abaixo mostra o efeito dos parâmetros p e α na função objetivo.

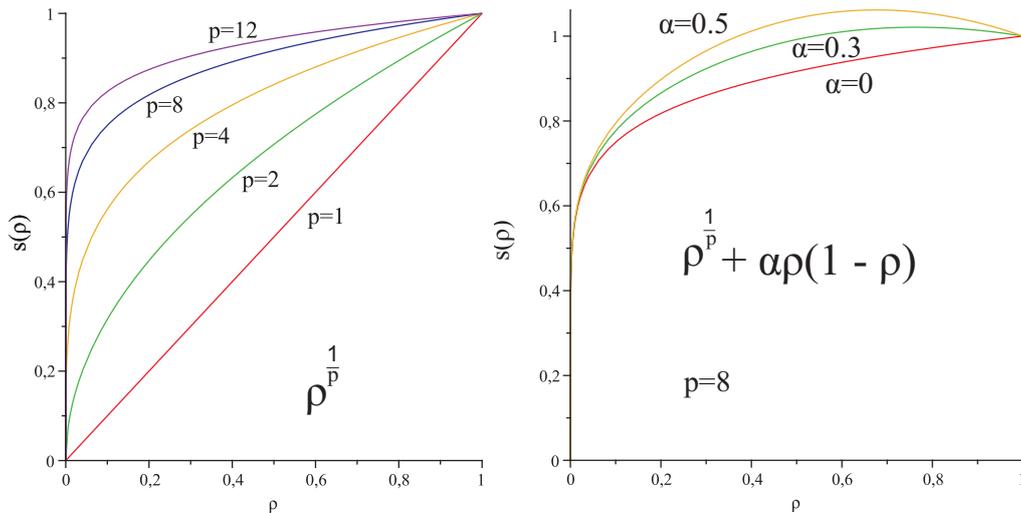


Figura 4.5 – Penalização da função objetivo como em 4.16 (à esquerda) e para diversos α com $p=8$ (à direita).

O método da continuação, entretanto, não fornece garantia de que a topologia irá convergir para o ponto desejado, Stolpe e Svanberg [Stolpe e Svanberg, 2001] apresentam uma série de exemplos onde o método pode falhar, independente do valor da penalização.

Um problema prático que surge da otimização topológica de laminados é a possibilidade de que surjam cavidades dentro da estrutura, ou seja, algumas lâminas internas do laminado tiveram uma redução total ou parcial durante o processo de otimização (figura 4.6). Isso implica na necessidade de abrir buracos dentro do laminado, ou até mesmo que se chegue a uma estrutura onde uma determinada lâmina interna simplesmente suma no processo de otimização.



Figura 4.6 – Laminado otimizado apresentando cavidades internas.

Neste trabalho utilizou-se a estratégia de otimizar apenas as lâminas externas no processo de otimização topológica, e restringindo-se os limites em que $\rho(x)$ pode atuar cria-se uma topologia onde as camadas externas possuem ou material base ($\rho(x) = 1$) ou material penalizado onde $\rho(x)$ assume um valor mínimo, uma fração não nula do material base.

5. ESTRATÉGIA E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

Nos capítulos anteriores a revisão bibliográfica referente ao trabalho desenvolvido foi apresentada de uma forma mais genérica, neste capítulo está a implementação na prática da teoria para a solução dos problemas específicos desta pesquisa. Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento do problema de otimização e as estratégias desenvolvidas para obtenção dos resultados.

Como foi explicado anteriormente o método aplicado para resolver o problema de otimização foi a programação linear sequencial, que necessita por sua vez das derivadas da função objetivo e restrições (análise de sensibilidade) em função da variável de projeto. Neste trabalho foi criada uma rotina em MATLAB para a análise de elementos finitos e para a programação linear foram utilizados tanto o LINPROG do MATLAB quanto a rotina DSPLP desenvolvida em FORTRAN. Os cálculos foram realizados em ambiente Windows em um computador Core Duo 2.4 GHz.

5.1 Maximização de Autovalores

O problema de otimização foi aplicado ao modelo estrutural e seus efeitos medidos no modelo aeroelástico através das interpolações do capítulo 3. O desenvolvimento descrito abaixo então, refere-se ao modelo estrutural com a malha de elementos finitos sendo empregada.

O primeiro problema a ser considerado foi o da maximização da frequência da placa estudada. Para tanto foi desenvolvida uma formulação sem restrições, de forma que o algoritmo possa encontrar a configuração que maximiza a frequência que se deseja otimizar.

$$\max \frac{\lambda}{\lambda^0} \quad , \quad (5.1)$$

onde λ^0 é o primeiro autovalor calculado, associado ao modo de flutter, antes do primeiro passo de otimização, esse artifício é aplicado apenas para normalizar os resultados encontra-

dos.

A análise de sensibilidade do problema descrito em 5.1 com a variável de projeto sendo θ (orientação das fibras da placa composta). O problema de autovalores foi descrito como

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0, \quad (5.2)$$

multiplicando 5.2 por $\boldsymbol{\phi}^T$

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0 \quad , \quad (5.3)$$

derivando agora 5.3 em relação à variável de projeto θ , obtêm-se

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial \theta_i} (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \theta_i} + \boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad . \quad (5.4)$$

A equação 5.4 pode ser simplificada usando a igualdade determinada em 5.2 e 5.3

$$\boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad , \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} = \frac{\boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}} \quad , \quad (5.7)$$

aqui pode-se fazer algumas considerações relativas à formulação apresentada na eq. 5.7. O denominador foi ortonormalizado em relação aos autovetores e o segundo termo entre parênteses é nulo, uma vez que não há variação de massa em relação à orientação das fibras do laminado, equações 5.8 e 5.9.

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}, \quad (5.8)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e Φ é uma matriz cujas colunas são os ϕ autovetores

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad (5.9)$$

portanto pode-se simplificar 5.7 para a forma

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} = \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} \phi \quad , \quad (5.10)$$

onde o sub-índice i representa o número de variáveis de projeto.

Portanto para determinar a equação da função objetivo para o cálculo pelo algoritmo de programação linear empregado neste trabalho, faltou apenas determinar a derivada da matriz de rigidez em relação à variável de projeto θ . O cálculo dessa derivada é apresentada no APÊNDICE B.

5.1.1 Autovalores Repetidos

Um problema que surge da otimização de autovalores como feito acima é a possibilidade do algoritmo encontrar dois autovetores associados ao mesmo autovalor (problema de autovalores repetidos) o que pode acarretar em dificuldade na convergência do problema de otimização, a figura 5.1 ilustra um caso em que a maximização de um determinado autovalor acabou por fazê-lo coincidir com o autovalor seguinte.

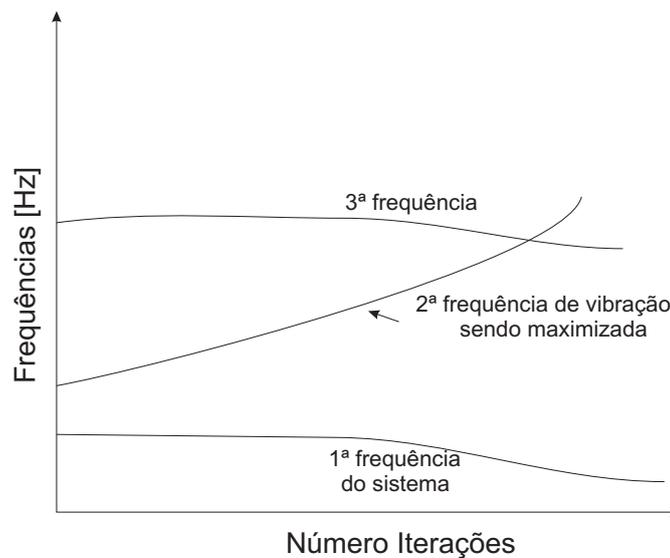


Figura 5.1 – Problema de autovalor repetido

Para resolver o problema foi implementado no algoritmo um método que trata de autovalores repetidos, uma explicação mais detalhada deste tipo de problema pode ser encontrada em Seyranian [Seyranian et al., 1994], e Ojalvo [Ojalvo, 1988] entre outros.

Seja um autovalor λ que possui dois autovetores associados ϕ_1 e ϕ_2

$$\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2, \quad (5.11)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (5.12)$$

que satisfazem as condições :

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = 1, \quad (5.13)$$

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = \lambda. \quad (5.14)$$

Substituindo a equação 5.11 na equação 5.3 , escreve-se

$$(\alpha\phi_1^T + \beta\phi_2^T) (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0, \quad (5.15)$$

derivando a eq. 5.15 em função da variável de projeto θ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha\phi_1^T)}{\partial\theta_i} (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) + \\ & (\alpha\phi_1^T + \beta\phi_2^T) (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{M}) \frac{\partial(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}{\partial\theta_i} + \\ & (\alpha\phi_1^T + \beta\phi_2^T) \left(\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\theta_i} \right) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Com as considerações feitas na eq. 5.2 pode-se reduzir a eq. 5.16 para

$$(\alpha\phi_1^T + \beta\phi_2^T) \left(\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\theta_i} \right) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0. \quad (5.17)$$

Multiplicando-se os dois primeiros termos entre parênteses, e reagrupando termos obtêm-se

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 \phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_1 + \beta^2 \phi_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_2 + \\
& \alpha \beta \left[\phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_2 + \phi_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_1 \right] = \\
& \qquad \qquad \qquad \alpha \beta \phi_2^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \phi_1 - \alpha \beta \phi_1^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \phi_2 + \\
& \qquad \qquad \qquad \alpha^2 \phi_1^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \phi_1 + \beta^2 \phi_2^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \phi_2, \tag{5.18}
\end{aligned}$$

considerando-se que os produtos $\phi_1^T \phi_2$ e $\phi_2^T \phi_1$ são iguais, pode-se reduzir a eq. 5.18 para a forma

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 \phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_1 + \beta^2 \phi_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_2 + 2\alpha \beta \phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_2 = \\
& \qquad \qquad \qquad \alpha^2 \phi_1^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \phi_1 + \beta^2 \phi_2^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \phi_2 \tag{5.19}
\end{aligned}$$

pode-se agora escrever uma matriz Ψ_{nm} cujos termos são

$$\Psi_{nm} = \phi_n^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \phi_m, \tag{5.20}$$

onde os sub-índices n e m variam de 1 até o número de autovalores repetidos. Para a conclusão do exemplo, considerou-se o número de autovalores repetidos igual a 2. Pode-se agrupar as equações 5.19 e 5.18 e com isso obtêm-se

$$\alpha^2 \Psi_{11} + \beta^2 \Psi_{22} + 2\alpha \beta \Psi_{12} = \left(\alpha^2 \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 + \beta^2 \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i}. \tag{5.21}$$

Utilizando-se as relações expressas na eq. 5.12 e na eq. 5.13 pode-se reduzir a eq. 5.21 para

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} = \alpha^2 \Psi_{11} + \beta^2 \Psi_{22} + 2\alpha \beta \Psi_{12}. \tag{5.22}$$

Derivando-se a equação 5.22 em relação a α e β :

$$2\alpha \Psi_{11} + 2\beta \Psi_{12} = 0, \tag{5.23}$$

$$2\beta\Psi_{22} + 2\alpha\Psi_{12} = 0. \quad (5.24)$$

As equações descritas em 5.23 e em 5.24 podem ser agrupadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.25)$$

onde os autovalores de Ψ passam a ser os valores buscados, a escolha por qual autovalor será buscado depende da formulação, se o problema é de minimização ou maximização.

Realizou-se a análise aeroelástica em separado da análise estrutural e otimização, e depois interpolou-se para o modelo de finitos através do procedimento descrito no capítulo 3. Para a análise aeroelástica, no entanto, foi necessário que se calculasse os modos de vibração e frequências no modelo estrutural e se utilizasse como dados de entrada para a rotina que calcula o *flutter* na asa em estudo, além de uma lista de velocidades para o fluido, número de Mach, densidade do ar e dados geométricos da asa. O problema de estabilidade foi resolvido pelo *software* ZAERO [ZONA-Technology, 2006].

Após a primeira análise aeroelástica, o modo e frequência de *flutter* foram determinados, e então o problema de otimização foi escrito como a maximização do autovalor correspondente a esse modo de vibração da estrutura, e o algoritmo buscou o valor máximo possível para esse autovalor, usando a direção principal de cada elemento finito da lâmina como variável de projeto.

O fluxograma da figura 5.2 ilustra os passos para a 1ª análise realizada na asa em estudo. Nesse caso a análise aeroelástica foi feita apenas para guiar o começo do processo de otimização, ou seja, qual autovalor será maximizado no processo, através da leitura do arquivo de saída produzido pelo ZAERO. A leitura forneceu qual o modo de vibração responsável pelo surgimento de *flutter* e o autovalor correspondente escolhido pelo algoritmo para ser extremizado. Por fim uma nova análise e leitura dos dados foi feita de forma a se determinar a velocidade de início de *flutter* da estrutura otimizada.

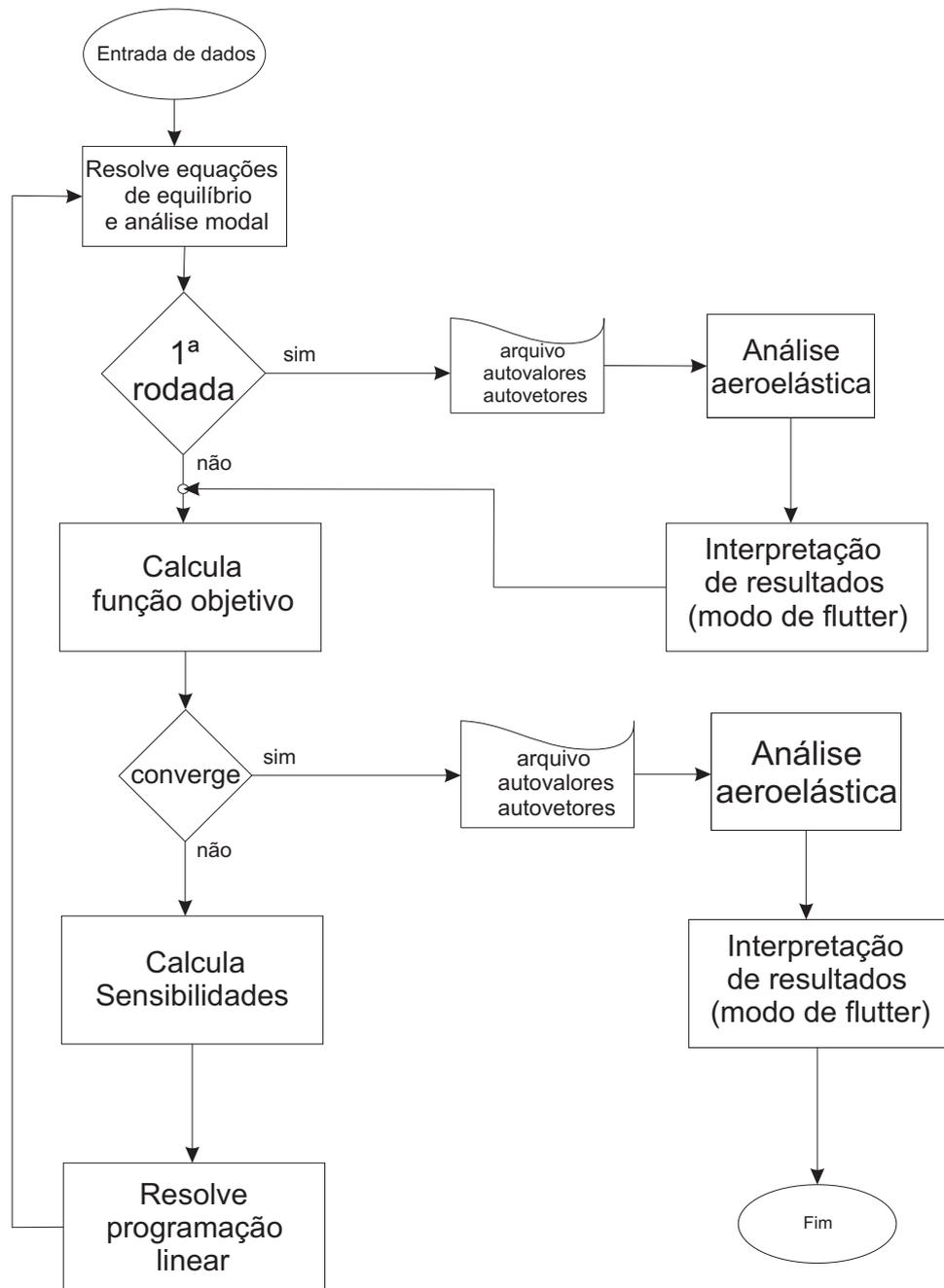


Figura 5.2 – Fluxograma do problema de maximização dos autovalores

5.2 Diferenças Finitas à Frente

Como pode ser visto na análise anterior, o algoritmo de otimização precisou apenas uma vez de uma análise aeroelástica na asa e depois o procedimento foi totalmente realizado pelo modelo estrutural, seguindo o autovalor escolhido no início do procedimento.

Não é possível que se analise a sensibilidade da velocidade de *flutter* em relação à variação das frequências da estruturas, que estavam mudando em relação às novas orientações das fibras. Porém é intuitivo pensar que, em determinado momento do procedimento de otimização a configuração da orientação das fibras na placa seja tal que uma análise aeroelástica instantânea na asa indique outro modo de vibração como o modo responsável pelo surgimento dos efeitos de *flutter*.

Com isso em mente foi realizada uma segunda estratégia de análise para a otimização dos autovalores utilizando o método de diferenças finitas à frente na qual aplica-se uma pequena perturbação no conjunto de autovalores calculados e testa-se a reação do modelo aeroelástico realizando uma nova análise para cada perturbação. A cada passo de otimização, o gradiente indicou o modo que está causando *flutter* e o processo de otimização maximizou aquele autovalor, podendo portanto mudar o autovalor em análise a cada iteração. A essa estratégia foi dado o nome de Método de Otimização Aeroelástico por Diferenças Finitas e será chamado a partir daqui pela sigla MOADF.

A derivada da velocidade de *flutter* (Vf) em relação aos autovalores é dada por

$$\frac{\partial Vf}{\partial \lambda_i} = \frac{Vf(\lambda_i + \Delta\lambda) - Vf(\lambda)}{\Delta\lambda}, \quad (5.26)$$

onde i vai de 1 até o número de modos (n_{modos}) que entrarão na análise aeroelástica.

Não se deve colocar uma perturbação muito grande na análise de diferenças finitas, pois a atualização via otimização não poderá ‘cumprir’ um salto grande do valor da frequência aumentada, com isso uma pequena perturbação $\Delta\lambda$ de 0,001 já é suficiente. Essa perturbação foi então aplicada separadamente a cada uma das frequências, a velocidade de *flutter* foi medida e o resultado guardado, depois de percorrer todas as frequências, aquela que, perturbada causou o maior aumento na velocidade de *flutter* foi escolhida como a frequência maximizada no processo de otimização. O algoritmo então volta ao processo original. Estes passos foram realizados sempre a cada rodada do algoritmo, até que a diferença entre as velocidades tenha sido menor que um critério estabelecido. O fluxograma abaixo mostra o procedimento utilizado para o MOADF. As rotinas que leem os arquivos de saída do ZAERO e orientam o processo de otimização foram desenvolvidas em MATLAB.

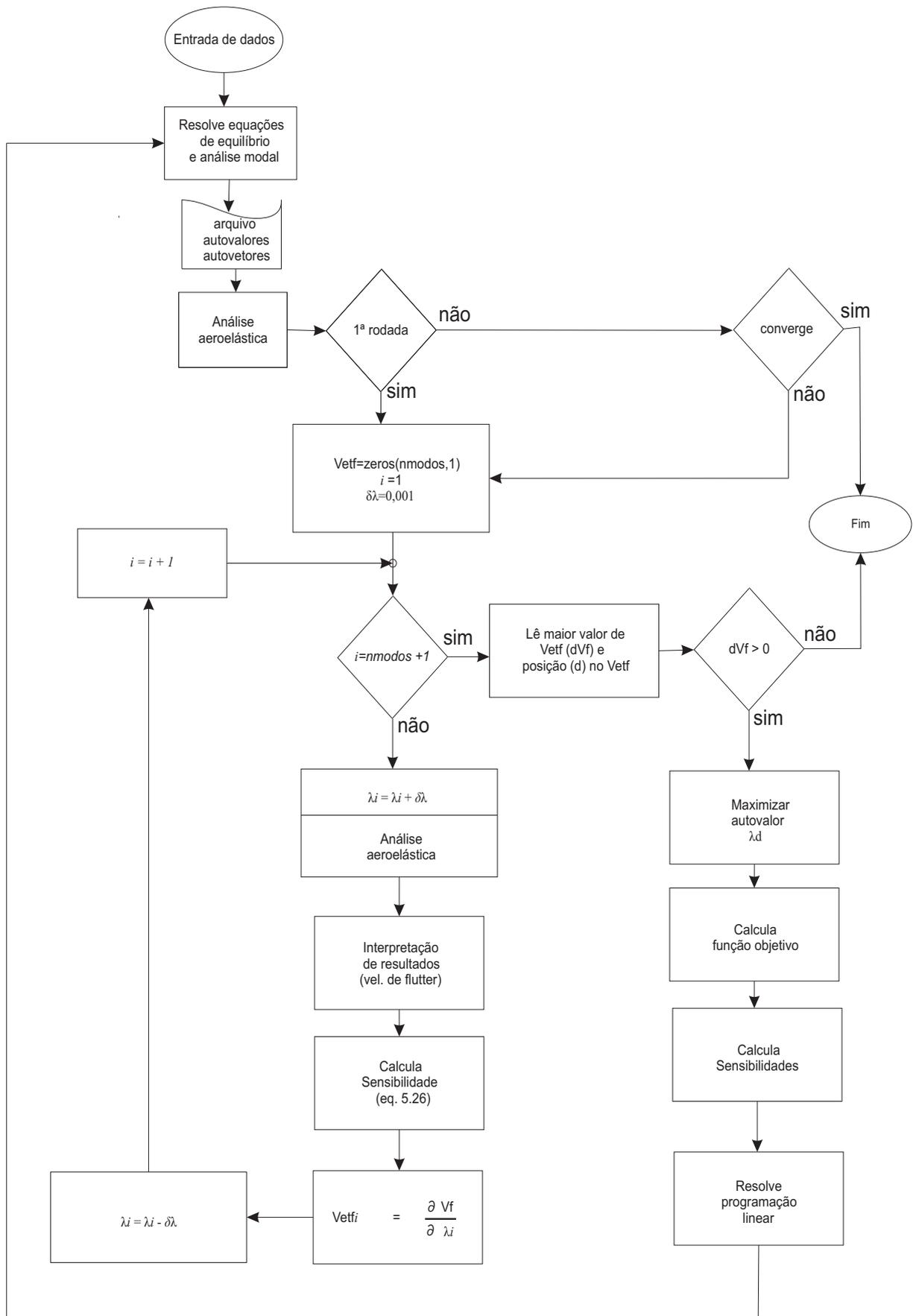


Figura 5.3 – Fluxograma da Otimização usando MOADF.

5.3 Minimização do Volume com Restrição a Frequência Natural

A última estratégia implementada neste trabalho foi a otimização topológica da estrutura visando a diminuição do volume de material base das asas estudadas. Uma vez otimizado os autovalores e conseqüentemente a velocidade do escoamento com que os efeitos de *flutter* sugiram, a otimização topológica retirou material das asas, com uma restrição de frequência natural pois naturalmente a perda de massa causou uma redução na frequência da estrutura e também na velocidade de *flutter*.

O problema de otimização topológica com restrição de frequências naturais pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & s(\rho) = \rho^T \mathbf{V} \\ \text{sujeito a} \quad & \lambda(\rho) - \lambda_{lim} \geq 0 \\ & 0 < \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde λ_{lim} é um valor limite em que a frequência pode baixar, e nesse trabalho esse valor foi estabelecido como um quinto do ganho obtido na etapa anterior de maximização da frequência usando a orientação das fibras como variável de projeto. Portanto sempre foi realizada uma otimização como a explicada na seção 5.1, antes do algoritmo trocar para a otimização topológica, de forma que todos os resultados de diminuição da massa apresentem um ganho em relação à estrutura inicial.

A função objetivo penalizada pode ser escrita como em 5.28

$$s(\rho) = \int_{\Omega} \left[\rho^{\frac{1}{p}} + \alpha \rho (1 - \rho) \right] d\Omega \quad , \quad (5.28)$$

a linearização da função objetivo em relação à variável de projeto foi escrita como uma expansão por séries de Taylor, como descrito anteriormente

$$s = s^0 - \left(\frac{\partial s^0}{\partial \rho} \right)^T \rho^0 + \left(\frac{\partial s^0}{\partial \rho} \right)^T \rho \quad , \quad (5.29)$$

onde os termos entre parênteses podem ser expressos como abaixo

$$\frac{\partial s_{np}}{\partial \rho} = \left[\frac{1}{p} \rho_{np}^{\frac{1}{p}-1} + \alpha (1 - 2\rho_{np}) \right] \mathbf{V}_{np} \quad , \quad (5.30)$$

sendo np o valor associado a cada variável de projeto.

A restrição deste problema de otimização já foi linearizada para ao problema anterior, de maximização de autovalores, porém utilizando a variável de projeto sendo o ângulo entre fibras θ . A equação obtida em 5.7 é, na verdade, uma equação genérica de sensibilidade e pode ser deduzida da mesma forma para qualquer variável de projeto, apenas trocando-se a variável. Para o caso de se analisar a sensibilidade dos autovalores em relação à densidade, a equação torna-se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_i} = \frac{\boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_i} \right) \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}} \quad , \quad (5.31)$$

onde pode-se fazer algumas considerações. A exemplo do caso anterior o denominador de 5.31 é igual a 1. A derivada em relação à massa apresenta valores muito pequenos se comparados à derivada em relação à rigidez, portanto pode-se desprezar o segundo termo entre parênteses. Com essas considerações pode-se reescrever 5.31 como

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_i} = \boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \right) \boldsymbol{\phi} \quad . \quad (5.32)$$

Finalmente, com a linearização da função objetivo e restrições, pode-se partir para a otimização usando programação linear. A derivada da matriz de rigidez em relação à variável de projeto ρ está desenvolvida no APÊNDICE B.

O fluxograma da otimização topológica está na figura 5.4. Esse procedimento difere do primeiro apresentado, de maximização dos autovalores, apenas quando da convergência do primeiro nível de otimização, a maximização dos autovalores usando a orientação das fibras. Após a convergência dessa etapa a otimização topológica inicia retirando material base das camadas escolhidas e após a convergência dessa etapa uma nova leitura dos resultados da análise aeroelástica foram feitos.

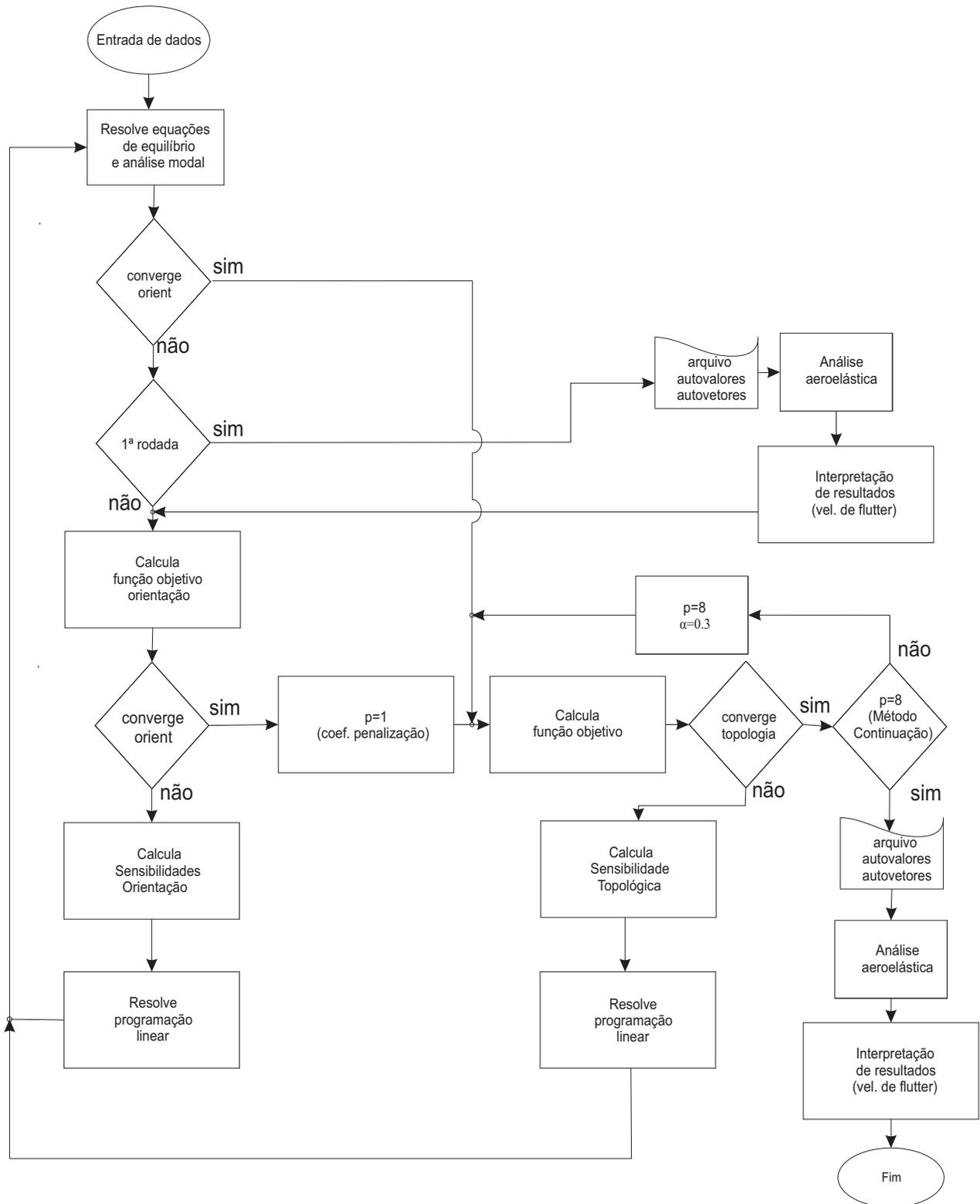


Figura 5.4 – Fluxograma do processo de otimização topológica das asas.

6. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos utilizando a metodologia descrita nos capítulos anteriores. A tabela 6.1 mostra as propriedades de uma lâmina da placa plana através da aplicação do modelo de Halpin-Tsai, que serviu como base para validar o modelo numérico, sendo a direção 1 a direção da fibra, e a figura 6.1 mostra o modelo físico que foi ensaiado para validação da malha de elementos finitos. Esse modelo possui duas lâminas dispostas na configuração $[0, 90]$. Este é o modelo que foi usado para a primeira análise de otimização.

Para o modelo aerodinâmico, foram fixados valores de número de *Mach* inicial igual a 0,1 e densidade do ar de $1,225 [kg/m^3]$. Os limites de velocidade do fluido para o estudo foram escolhidos empiricamente, de forma a encontrar *flutter* na análise.

Tabela 6.1 – Propriedades de uma lâmina.

$E_1 = 29.090 \text{ GPa}$	$G_{12} = 2.726 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.1434$
$E_2 = 8.841 \text{ GPa}$	$G_{13} = 2.726 \text{ GPa}$	$\nu_{13} = 0.1434$
$E_3 = 8.841 \text{ GPa}$	$G_{23} = 1.205 \text{ GPa}$	$\nu_{23} = 0.2933$

A densidade de cada lâmina é de $1793 [kg/m^3]$, as dimensões de cada lâmina foram mantidas fixas em $0,45 [m] \times 0,08 [m] \times 0,0005 [m]$.

A tabela 6.2 mostra os resultados obtidos no ensaio com o modelo físico e com o modelo numérico para as primeiras frequências naturais da placa, onde os valores estão em Hertz [Hz]. O ensaio para obtenção das frequências naturais do modelo físico foram feitas no laboratório de ensaios do GMAp (Grupo de Mecânica Aplicada) da faculdade de engenharia mecânica da UFRGS.

Esses dados apresentados serviram para todas as outras lâminas ensaiadas neste trabalho. Para todos os casos tanto a malha de elementos finitos quanto o método de painéis para a análise aeroelástica foram mantidas inalteradas. A malha de elementos finitos tem

Tabela 6.2 – Valores das primeiras frequências naturais do modelo numérico e real [Hz].

	Ensaio	Numérico
1º flexão	3,5	3,18
1º torção	17,5	16,56
2º flexão	20,0	20,09
1º flexo-torção	54,0	52,57

288 elementos em cada lâmina, o modelo de painéis tem 36 elementos. A figura 6.2 mostra a malha de elementos finitos e a discretização em painéis das placas, respectivamente.

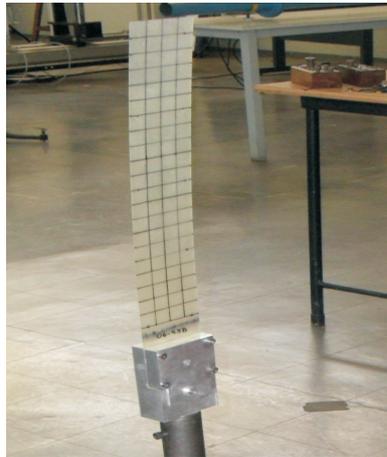


Figura 6.1 – Modelo testado.

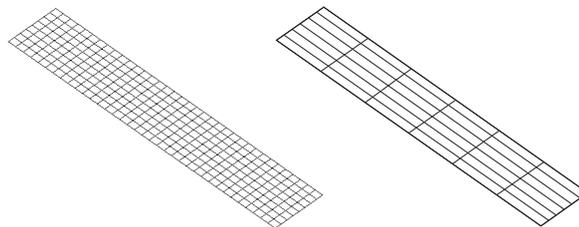


Figura 6.2 – Asa discretizada para o método de elementos finitos (esquerda) e para o método de painel (direita).

6.1 Otimização da Orientação

Os primeiros resultados dizem respeito apenas a otimização da orientação das fibras do laminado. Para esses modelos foram feitas as análises da maximização dos autovalores e por diferenças finitas, em ambos os casos foi realizada a análise aeroelástica do modelo para conferência dos resultados. Para os primeiros resultados, três modelos foram testados, $[0, 90]$, $[0, 90]_s$ e $[0, 45, 90]_s$. Os primeiros resultados são apresentados para a maximização direta do autovalor determinado na análise aeroelástica conforme o fluxograma apresentado em 5.2, em seguida são apresentados os resultados obtidos utilizando a estratégia apresentada no fluxograma em 5.3. Em ambas a programação linear visou atualizar o ângulo θ .

6.1.1 Asa $[0, 90]$

Para o primeiro modelo a análise inicial por elementos finitos determinou os modos de vibração e frequências naturais da placa plana. Conforme o procedimento descrito em 5.2, primeiro foi feito uma análise modal, de forma a determinar no modelo aeroelástico quais modos eram responsáveis pelo surgimento dos efeitos de *flutter* e qual frequência deve ser otimizada.

A figura 6.3 mostra os modos de vibração da placa plana e suas correspondentes frequências de excitação.

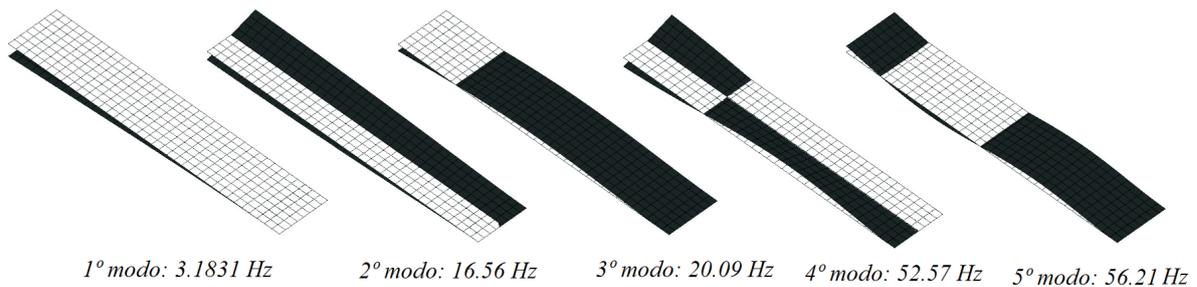


Figura 6.3 – Análise modal inicial da asa $[0, 90]$.

De posse das formas modais e dos respectivos valores de frequência, a primeira análise aeroelástica pode ser realizada. A figura 6.4 mostra os resultados da análise aeroelástica na placa, apresentadas na forma VGF (velocidade por amortecimento e frequência).

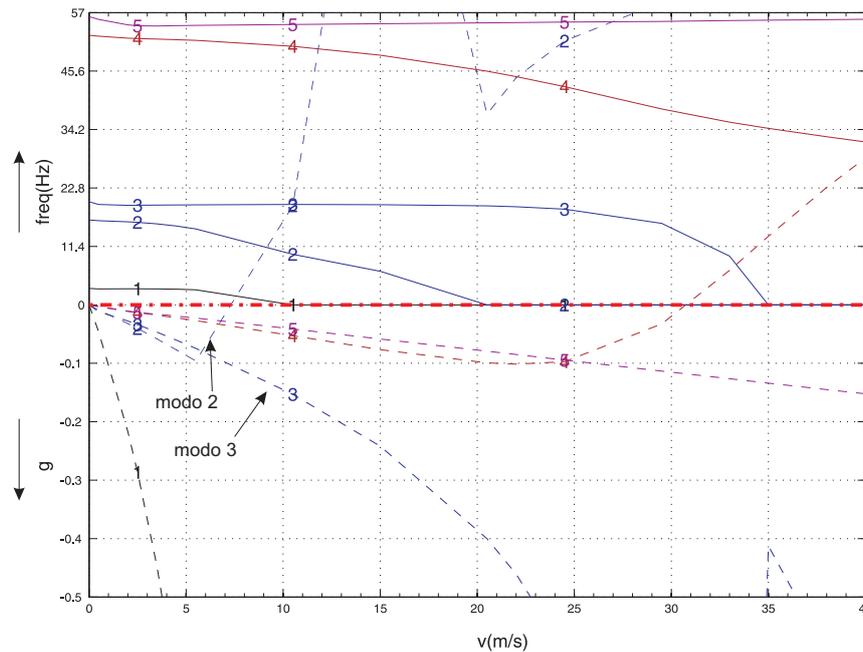


Figura 6.4 – Análise aeroelástica inicial da asa [0, 90].

Conforme a teoria apresentada na seção 3, o gráfico VGF mostra que para o modelo apresentado, um ponto de surgimento de *flutter* ocorreu por volta de 7 [m/s], ocasionado pelo 2º modo de vibração.

A escolha do autovalor pode ser na verdade qualquer um dos dois associados aos modos aeroelásticos que acoplam. A idéia é distanciar os seus valores de forma a dificultar o acoplamento dos referidos modos.

No entanto, pode-se promover outro mecanismo de acoplamento. Para que tal mecanismo seja menos crítico que o inicialmente observado, é desejável que o autovalor seja maximizado pois, mesmo ocorrendo um segundo mecanismo de acoplamento, certamente ele ocorrerá para frequências maiores, e conseqüentemente para a ocorrência do *flutter* será necessário mais energia do escoamento para a promoção da coalescência dos modos, ou seja, a velocidade de *flutter* será maior.

Portanto formula-se o processo de otimização para a maximização do segundo autovalor, que da análise modal (6.3) mostrou ser o autovalor relacionado ao primeiro modo torcional da asa estudada.

A figura 6.5 mostra a orientação final obtida para as lâminas da asa [0, 90], a qual convergiu após 35 iterações. Todas as asas foram engastadas na origem do eixo 1.

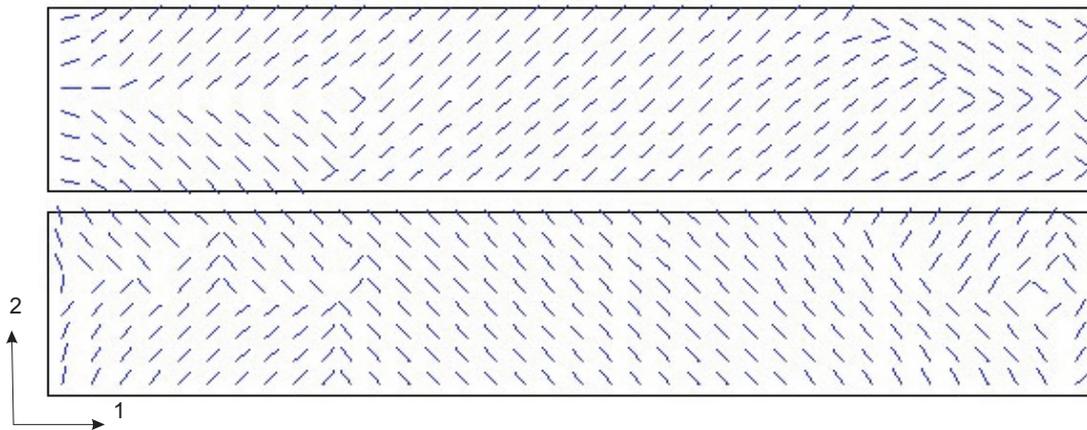


Figura 6.5 – Otimização da orientação para a asa $[0, 90]$ usando a primeira estratégia.

A figura 6.6 mostra a evolução da função objetivo durante o processo de otimização da orientação das fibras.

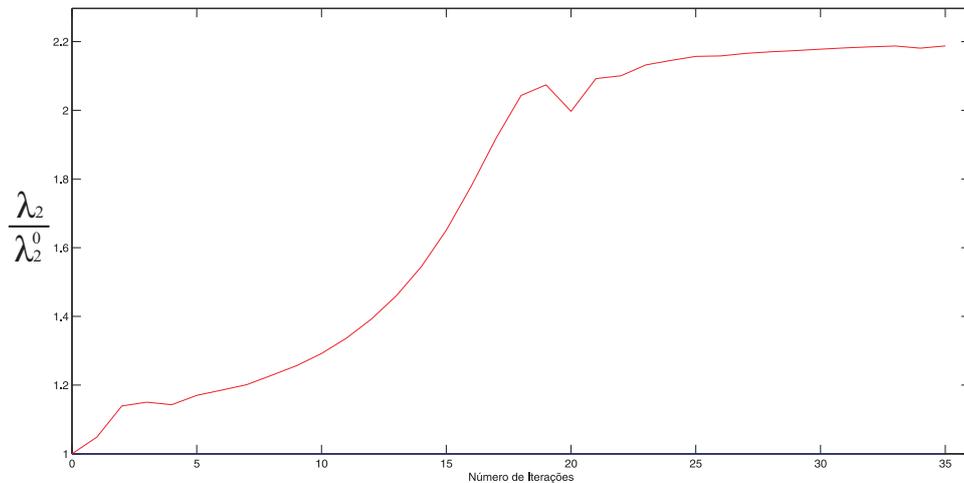


Figura 6.6 – Função Objetivo da otimização de orientação.

A análise modal realizada após o processo de otimização (figura 6.7) mostra que o autovalor relacionado ao modo de torção agora é o correspondente à terceira frequência natural da asa. Em outras palavras, o processo de otimização das fibras da placa alterou a forma dos modos de vibração da estrutura, de modo que a frequência em que surge o primeiro modo torcional foi aumentada em mais de duas vezes.

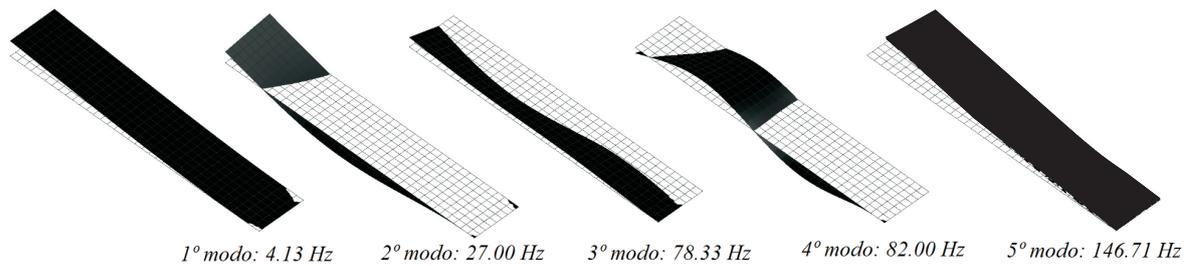


Figura 6.7 – Modos de Vibração e frequências naturais da asa após o processo de otimização.

O próximo passo é a análise aeroelástica da nova estrutura, utilizando os mesmos parâmetros da análise inicial apenas fornecendo o novo conjunto de autovetores e autovalores como dados de entrada.

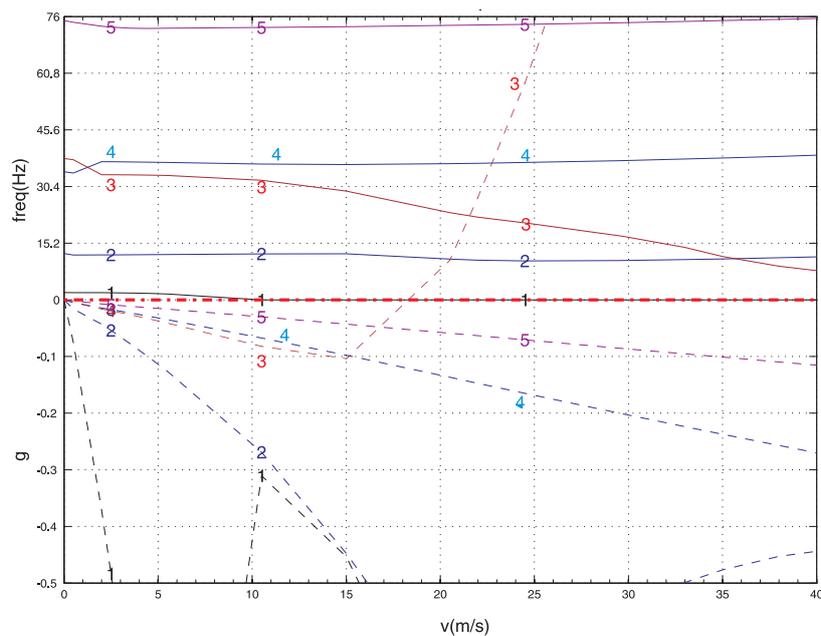


Figura 6.8 – Curvas VGF da estrutura usando a primeira estratégia.

A figura 6.8 mostra o ganho na velocidade de *flutter* da asa que teve as fibras otimizadas em relação a asa com a configuração original, que passou de 7 [m/s] para 18,8 [m/s]. Pode-se avaliar também das figuras 6.8 e 6.7 que existe um acoplamento entre o segundo e terceiro modo, porém ele surge a maiores valores de frequência do que anteriormente.

A segunda estratégia utilizando o mesmo modelo é aplicando-se diferenças finitas à

frente. Agora o fluxograma apresentado em 5.3 ilustra o procedimento na qual a otimização foi direcionada ao autovalor que está relacionado ao modo de vibração que instantaneamente está causando o *flutter*. Como geralmente acontece com o método de diferenças finitas este procedimento é bastante caro computacionalmente, uma vez que necessita de uma análise aeroelástica a cada rodada de otimização.

A figura 6.9 mostra os modos de vibração da asa utilizando MOADF para otimizar os autovalores.

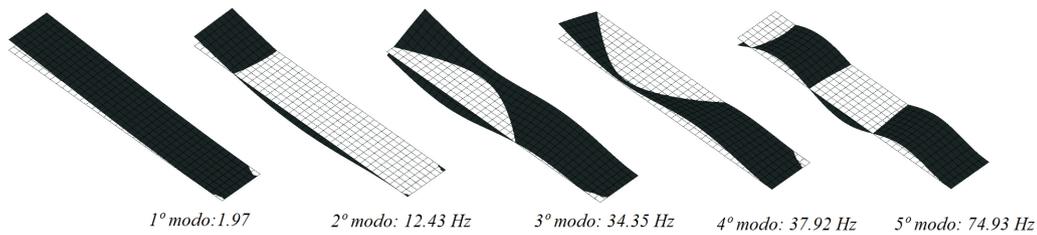


Figura 6.9 – Modos de vibração da asa $[0, 90]$ após usar MOADF.

Novamente percebe-se que o terceiro modo de vibração passa a ser o torcional, e diferença entre valores e modos de vibração se comparados ao método aplicado anteriormente pouco mudam.

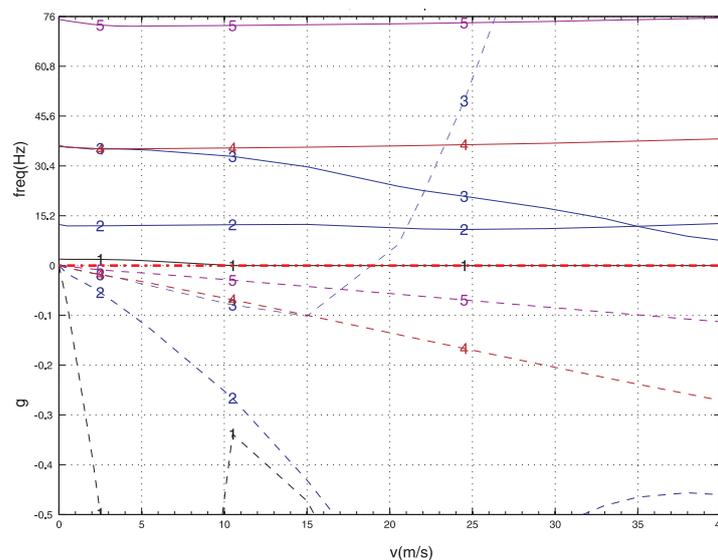


Figura 6.10 – Curvas VGF da estrutura otimizada usando MOADF.

A análise plotada acima indica pequenas diferenças na comparação com os resultados

ilustrados na aproximação anterior, de $18,8 [m/s]$ para $19,7 [m/s]$. A diferença principal está na forma dos modos mais altos, a velocidade de *flutter* quase não sofreu alterações. O resultado é coerente uma vez que durante as análises aeroelásticas se observou pouco mudanças do modo de *flutter*. Os resultados convergiram em 23 iterações. A figura 6.11 mostra a configuração final da orientação das fibras após a aplicação de MOADF.

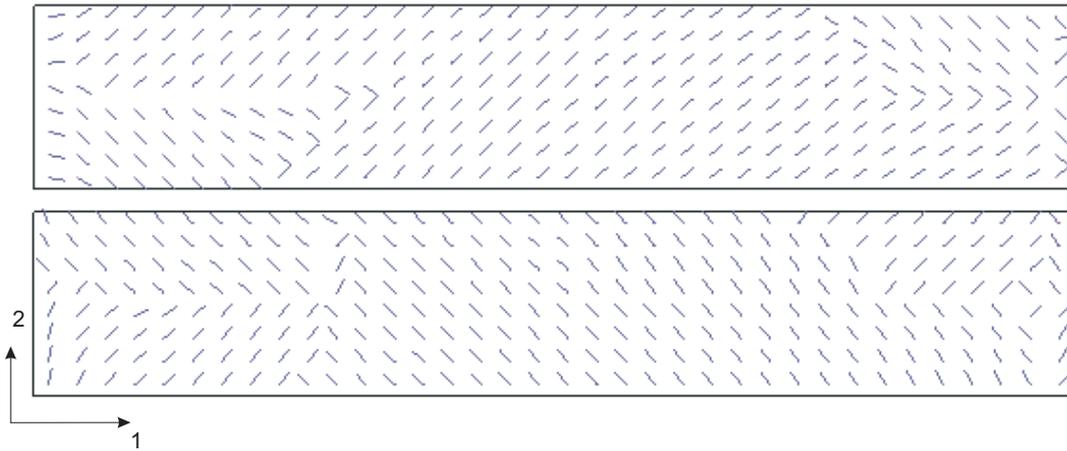


Figura 6.11 – Configuração das fibras após MOADF.

Os resultados indicam que não houve uma grande diferença entre as duas estratégias, porém o ganho se comparado à análise feita na estrutura original mostrou resultados expressivos.

6.1.2 Asa $[0, 90]_s$

O próximo modelo a ser estudado foi uma asa modelada como placa plana simétrica $[0, 90]_s$. Basicamente é o mesmo modelo anterior acrescido de simetria, o que espera-se torne a asa agora estudada mais rígida e portanto os efeitos da interação do fluido com a estrutura sejam percebidos para velocidades maiores do escoamento.

A análise modal inicial da estrutura é apresentada na figura 6.12 abaixo

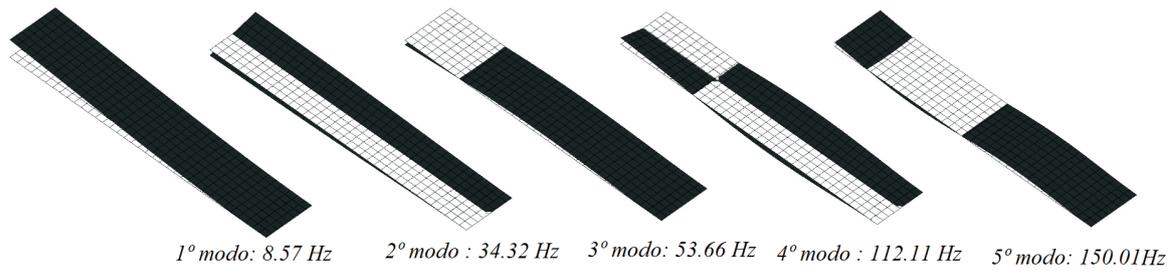


Figura 6.12 – Modos e frequências de vibração da asa $[0, 90]_s$.

A análise aeroelástica inicial da asa forneceu os valores de velocidade de *flutter*, seguindo a ordem de resultados apresentada na subseção anterior, apresenta-se os resultados retirados dos gráficos VGF. Os gráficos de todos os resultados estão no APÊNDICE A.

Mais uma vez a análise forneceu a indicação de que o segundo modo de vibração está relacionado aos efeitos de *flutter*, e segundo a análise modal realizada esse modo é o primeiro modo de torção da asa, com velocidade sendo $26,4 [m/s]$. O algoritmo de otimização irá maximizar mais uma vez o segundo autovalor.

A análise modal da estrutura utilizando a primeira estratégia está representada na figura 6.13

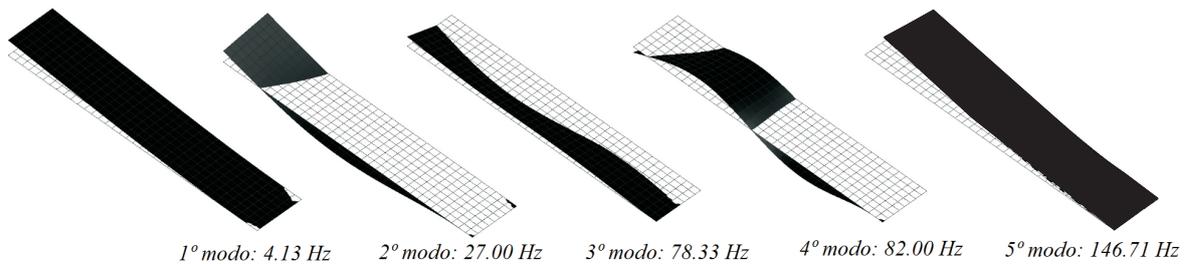


Figura 6.13 – Análise Modal da asa $[0, 90]_s$ otimizada.

A evolução da função objetivo do processo é mostrada na figura 6.14

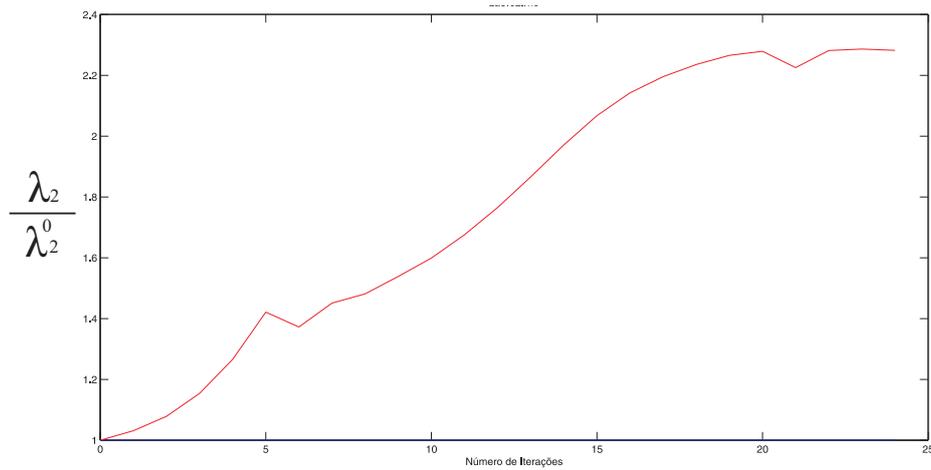


Figura 6.14 – Função objetivo da otimização da orientação da asa $[0, 90]_s$.

A configuração das fibras de cada lâmina está abaixo (figura 6.15), a análise aeroelástica da asa otimizada mostra os novos valores da velocidade de *flutter*, os resultados indicam que a velocidade para a estrutura otimizada ficou em $55,7 [m/s]$.

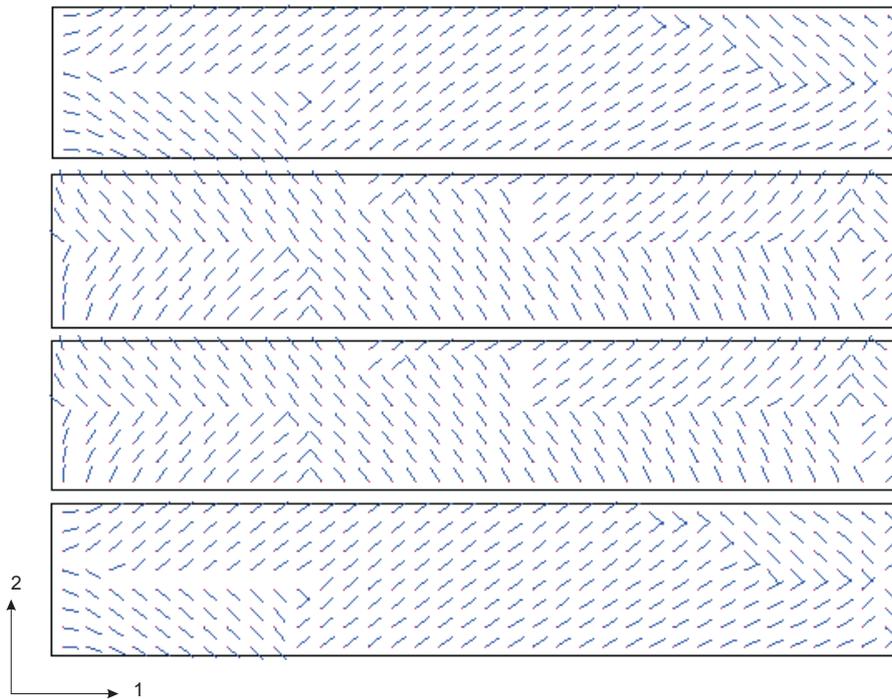


Figura 6.15 – Configuração das fibras de cada lâmina.

Abaixo seguem os resultados da análise por diferenças finitas para a mesma configuração de asa.

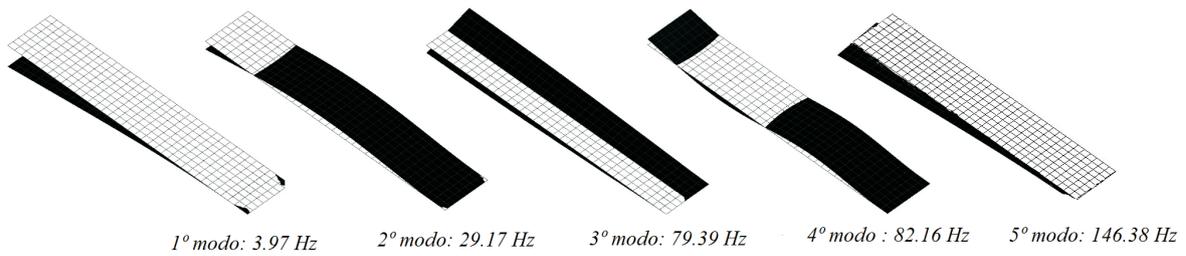


Figura 6.16 – Análise modal da asa otimizada seguindo MOADF.

A análise aeroelástica na asa otimizada por MOADF indicou uma velocidade de início de *flutter* de $60,6 [m/s]$. Os resultados são cerca de 9 % melhores do que os obtidos realizando a 1ª estratégia, conforme indicado nos resultados anteriores. A configuração final das lâminas também diferiu um pouco das obtidas anteriormente (figura 6.17).

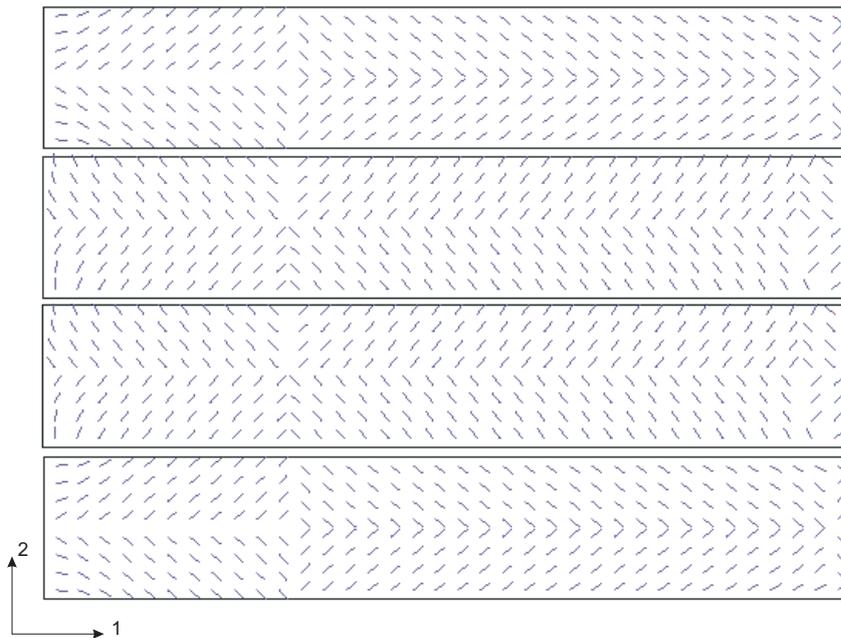


Figura 6.17 – Configuração das fibras da asa $[0, 90]_s$ após MOADF.

Os resultados obtidos para velocidade de início de *flutter* estão organizados na tabela 6.3 abaixo

Tabela 6.3 – Comparação das velocidades de início de *flutter* para as estratégias.

Inicial	Análise Inicial	MOADF
26,4 [m/s]	55,7 [m/s]	60,6 [m/s]

6.1.3 Asa [0, 45, 90]_s

Na última configuração estudada na otimização da orientação foi acrescida uma lâmina orientada inicialmente a 45°, colocada entre as lâminas 0 e 90. A figura 6.18 mostra a primeira análise modal da asa.

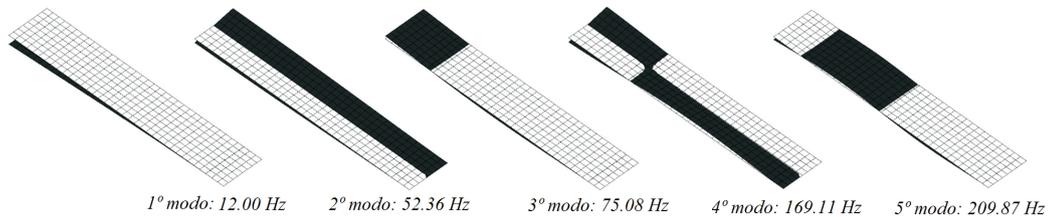


Figura 6.18 – Análise modal inicial na placa simétrica de 6 lâminas.

Segundo a análise aeroelástica da asa com seis lâminas, o primeiro modo torcional (2º modo) foi o responsável pelo surgimento dos efeitos de *flutter*, com velocidade de 48,4 [m/s] e mais uma vez a primeira estratégia será maximizar o segundo autovalor.

A figura 6.19 mostra os resultados da análise modal da estrutura otimizada.

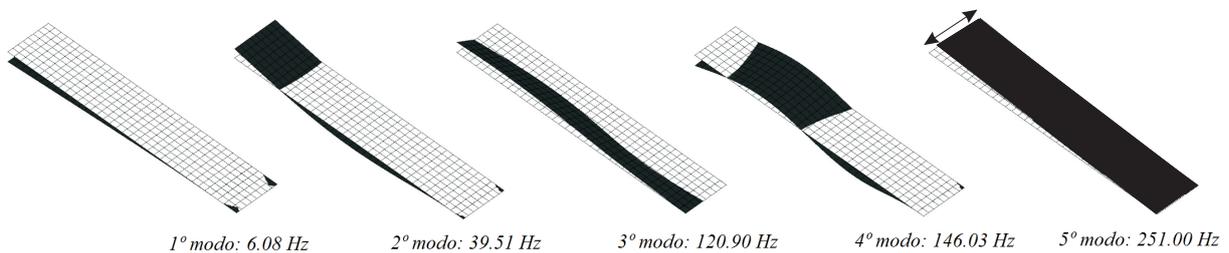


Figura 6.19 – Análise modal ao fim da primeira estratégia.

A função objetivo mostra a evolução do algoritmo até encontrar a solução (figura 6.20), a solução convergiu após 40 iterações.

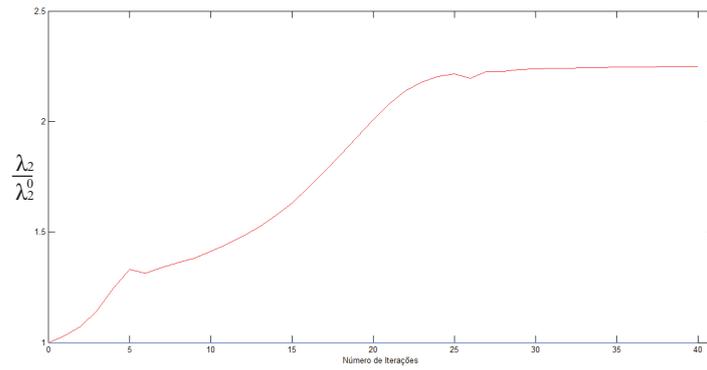


Figura 6.20 – Evolução da maximização.

A configuração das fibras após a otimização é mostrada em 6.21

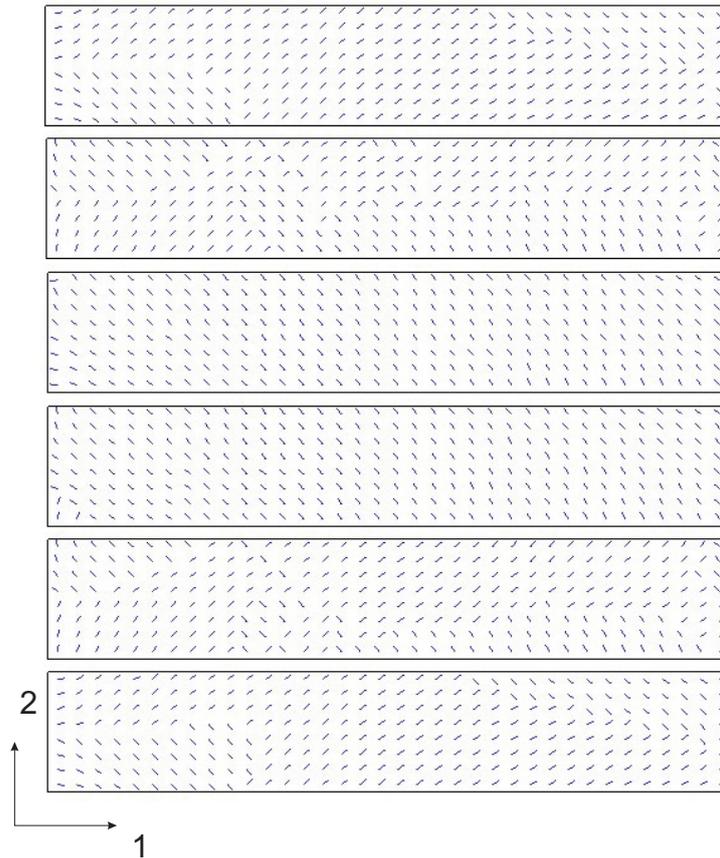


Figura 6.21 – Configuração das fibras da asa após a primeira estratégia.

Os resultados mostram um ganho importante na velocidade de *flutter* de maneira similar aos resultados das asas testadas anteriormente, $102,6 [m/s]$. O próximo passo foi

a análise por MOADF para a mesma asa, com a mesma configuração inicial, seguindo a estratégia implementada.

Após 22 iterações o algoritmo convergiu, seguindo o critério adotado para a análise. A figura 6.22 mostra a análise modal realizada após a aplicação do MOADF.

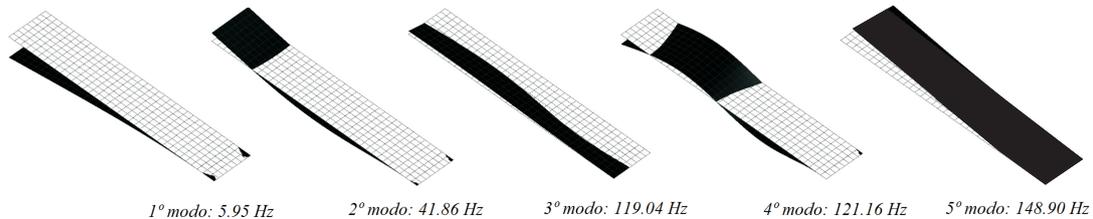


Figura 6.22 – Análise modal após MOADF.

Os resultados da análise indicam uma melhora ainda maior para a velocidade de *flutter* se comparados com a primeira estratégia indo agora para $109,1 [m/s]$, um ganho de cerca de 6 % em relação aos valores obtidos usando a primeira estratégia.

Por fim, a configuração das fibras após o MOADF é mostrado na figura 6.23

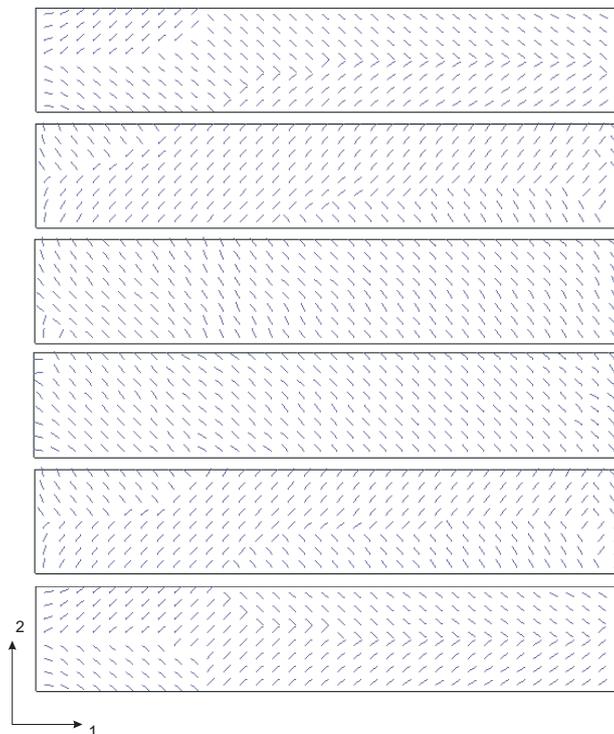


Figura 6.23 – Configuração final da asa de 6 lâminas usando MOADF.

Na tabela 6.4, os valores de início de *flutter* foram colocados para cada estratégia

Tabela 6.4 – Comparação das velocidades de início de *flutter* para as estratégias.

Inicial	Análise Inicial	MOADF
48,4 [m/s]	102,6 [m/s]	109,1 [m/s]

6.1.4 Comparação de Resultados

A tabela 6.5 mostra um comparativo para todas as asas ensaiadas mostrando o número de iterações para a convergência e tempo computacional para todos os métodos empregados nesse capítulo. A figura 6.24 mostra as três asas ensaiadas e os resultados para velocidade de *flutter* nas configurações inicial e otimizadas.

Tabela 6.5 – Comparação dos resultados para as diferentes estratégias.

	Núm. Iterações Análise Inicial/tempo	Núm. Iterações MOADF/tempo
Asa[0, 90]	35/2117 [s]	22/3575 [s]
Asa[0, 90] _s	24/1141 [s]	17/2276 [s]
Asa[0, 45, 90] _s	40/2020 [s]	22/2976 [s]

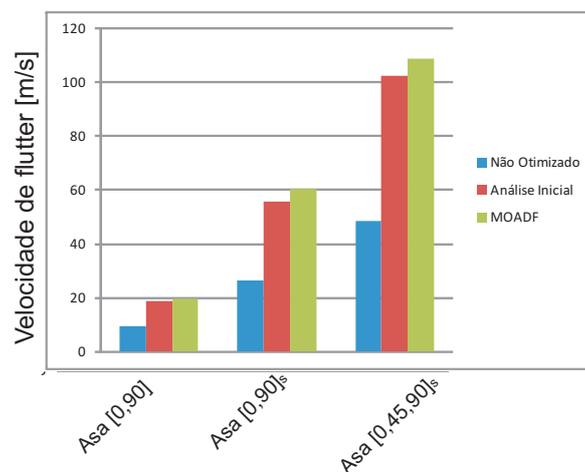


Figura 6.24 – Resumo dos Resultados das estratégias implementadas.

6.2 Otimização Topológica

Os resultados apresentados a seguir dizem respeito à formulação do problema de otimização considerando alterações da topologia da estrutura. Para todos os resultados apresentados foram considerados um coeficiente de penalização do tensor constitutivo q igual a 5, e as penalizações da função objetivo são dadas por p igual a 8 e α igual a 0,3.

Foram testados dois tipos de configuração de asas diferentes, a primeira simulada como uma placa $[0, 0]_s$ e a segunda $[0, 0, 0]_s$, as limitações citadas na seção 4.5 impossibilitaram a estratégia de se otimizar simultaneamente as duas lâminas internas da placa de 4 lâminas ou duas consecutivas da placa de 6 lâminas. Por isso, a estratégia implementada foi de otimizar as lâminas externas de ambas as placas, ou seja, as lâminas de número 1 e 4 da primeira e as de número 1 e 6 da segunda.

Apesar de não ser o escopo deste trabalho, os resultados apresentados anteriormente mostram que o fenômeno conhecido como divergência surgiu de forma mais acentuada nas placas após o processo de otimização. Isso em função do procedimento, como foi escrito não se preocupar com esse fenômeno, porém como observou-se em todos os casos o fenômeno ocorre no primeiro modo, sempre o primeiro de flexão.

Na tentativa de atenuar tais efeitos, optou-se na otimização topológica por deixar as lâminas que não teriam suas topologias alteradas na configuração de 0° , ou seja, com as fibras orientadas ao longo do comprimento da placa, de forma resistir de uma maneira melhor à flexão.

6.2.1 Asa $[0, 0]_s$

Os primeiros resultados são para a asa de 4 lâminas que teve as lâminas internas mantidas a 0° e as externas otimizadas. A tabela 6.6 mostra os valores das frequências naturais da placa original.

A análise aeroelástica realizada na estrutura original indica o 2° modo de vibração como o responsável pelo surgimento dos efeitos de *flutter*, em uma velocidade de $26,3 [m/s]$. O processo de otimização maximizou o segundo autovalor, após a convergência da orientação a otimização topológica reduziu a densidade de forma que a frequência em estudo caiu até o limite estabelecido em λ_{lim} . O gráfico da função objetivo é mostrado na figura 6.25

Tabela 6.6 – Análise modal inicial da asa de 4 lâminas.

Modo	Frequência [Hz]
1º flexão	8,96
1º torção	34,56
2º flexão	56,07
1º flexo-torção	113,47
3º flexão	156,69

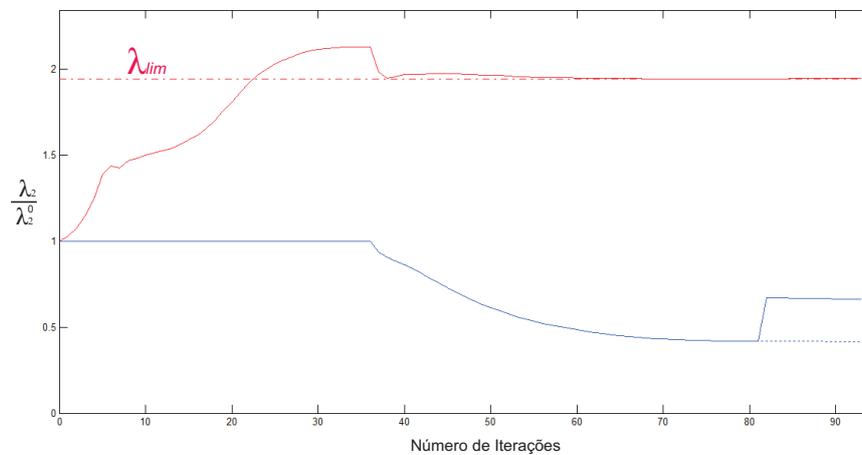


Figura 6.25 – Função objetivo para o processo de otimização da orientação e topológica.

Onde, na figura acima, a linha vermelha indica como anteriormente, a maximização do autovalor escolhido, a linha vermelha tracejada é valor de λ_{lim} como explicado anteriormente 20 % do valor máximo atingido pelo autovalor. A linha azul é o nível de otimização, a otimização topológica da estrutura que se inicia no momento que o primeiro nível converge.

A tabela 6.7 mostra os valores encontrados para as frequências naturais e respectivos modos de vibração das asas de 4 lâminas, após o término do processo, o 1º modo de torção foi aumentado em cerca de 94 %, mesmo com a retirada de material na otimização topológica.

A estrutura obtida após o processo de otimização 6.26 mostra distribuição de fibras e de material de todas as placas, onde na figura, a parte escura indica presença de material com a densidade conforme a original do material, e as partes ‘claras’ da placa indicam presença de material com uma milésima parte da densidade em relação à densidade original (limite

Tabela 6.7 – Análise modal ao fim do processo de otimização.

Modo	Frequência [Hz]
1º flexão	5,60
2º flexão	33,62
1º torção	67,04
1º flexo-torção	86,86
3º flexão	144,81

inferior para a variável de projeto $\rho(x)$).

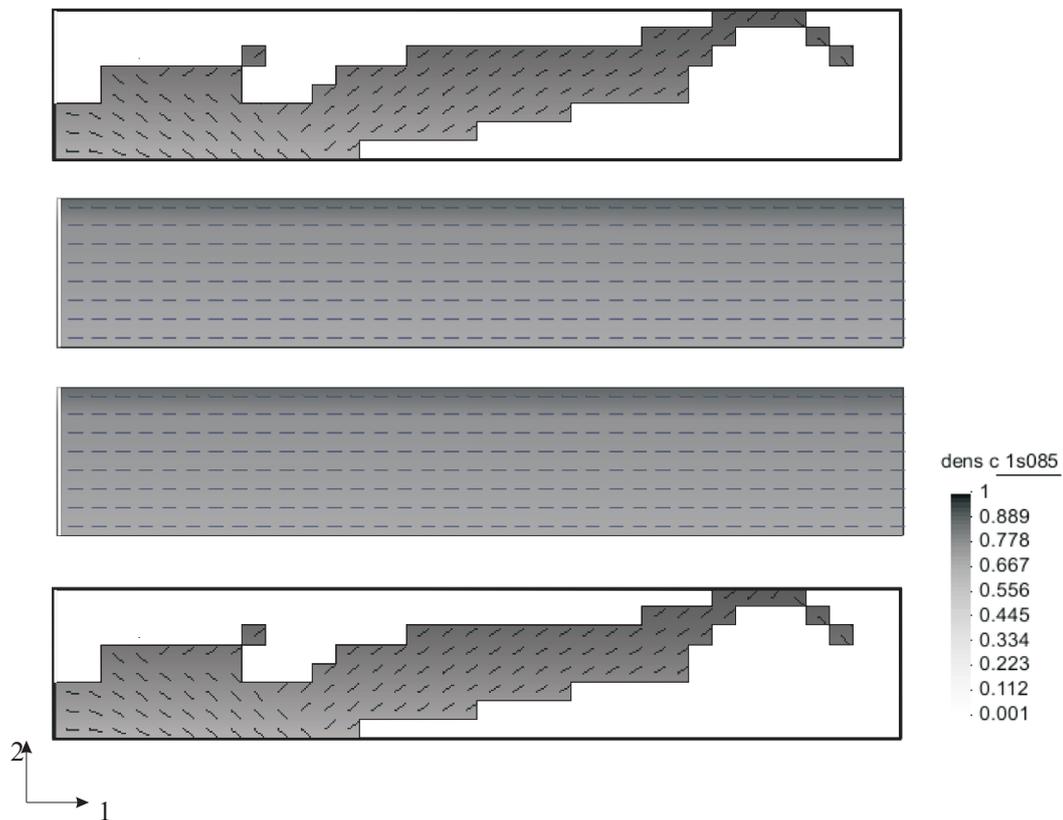


Figura 6.26 – Lâminas 1 e 4 com a topologia otimizada.

Os resultados apresentados a seguir dizem respeito a dois momentos do processo de otimização, foram medidas as velocidades de início de *flutter* para a estrutura quando a otimização de orientação convergiu e ao término do processo, quando o segundo nível de

otimização converge (tabela 6.8)

Tabela 6.8 – Comparação das velocidades de início de *flutter* ao término de cada nível.

Inicial	Otimização Orientação	Otimização Topológica
26, 28 [m/s]	55, 69 [m/s]	40, 53 [m/s]

A redução de volume do material de base das lâminas com a topologia otimizada foi de 58,3 %, porém a topologia encontrada indicou bastante áreas com densidade intermediária. Após a convergência dessa etapa, na iteração 81, a penalização da função objetivo transformou a topologia para uma configuração de valores mínimos e máximos estabelecidos, e em mais 12 iterações a redução de volume ficou em 34 % considerando apenas as duas lâminas otimizadas, considerando-se todas as lâminas a redução ficou em 18 %. Isso significa que, considerando-se a estrutura inteira a massa que originalmente era de 130 gramas foi reduzida para 107 gramas.

6.2.2 Asa [0, 0, 0]_s

O mesmo procedimento foi aplicado para uma estrutura com mais duas lâminas internas, com o objetivo de se observar a redução de volume do material base nas asas externas. Exatamente os mesmos critérios foram aplicados para esse exemplo.

A tabela 6.9 mostra os valores encontrados para as frequências naturais e respectivos modos de vibração das asas de 6 lâminas.

Tabela 6.9 – Análise modal ao fim do processo de otimização.

Modo	Frequência [Hz]
1° flexão	13, 43
1° torção	51, 71
2° flexão	84, 10
1° flexo-torção	169, 79
3° flexão	234, 83

A análise aeroelástica inicial dos modos e frequências da asa acima indicaram o 2°

modo de vibração como o responsável pelo começo dos efeitos de *flutter* a uma velocidade de 47,36 [m/s].

A função objetivo da otimização em dois níveis está na figura 6.27. O processo de maximização dos autovalores convergiu na iteração 21. A minimização do volume sem penalizar a função objetivo convergiu na iteração 64, e após penalizar o processo terminou na iteração 74.

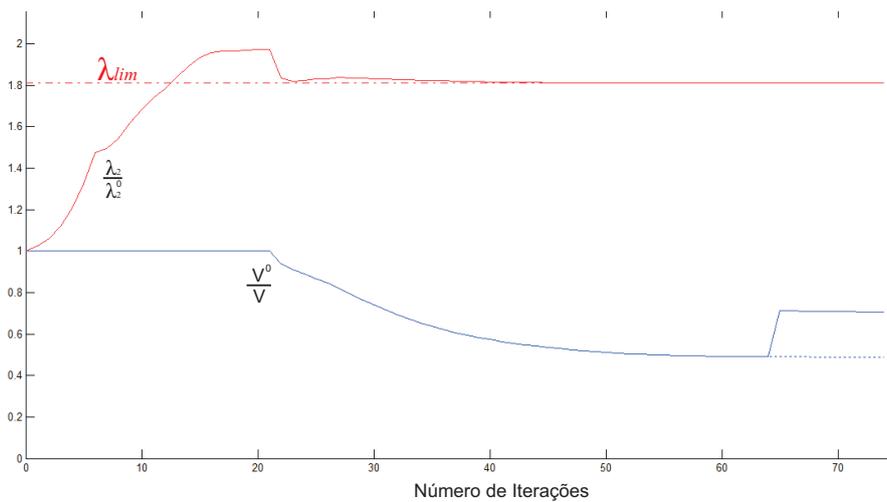


Figura 6.27 – Evolução da função objetivo em dois níveis para a asa de 6 lâminas.

Para esse caso a massa original da asa é de 193,6 gramas. A redução do volume de material base ficou, ao final do processo, em torno de 51 %. Com isso a massa final da asa otimizada ficou em 163,15 gramas, uma redução de 16 %.

A tabela 6.10 mostra o ganho na maximização do autovalor relacionado ao modo de torção, que inicialmente era o segundo modo de vibração e agora é o terceiro.

A topologia final das lâminas da asa e a distribuição das fibras no volume está representada na figura 6.28 abaixo.

Tabela 6.10 – Análise modal ao fim do processo de otimização da asa de 6 lâminas.

Modo	Frequência [Hz]
1º flexão	10,02
2º flexão	59,76
1º torção	93,58
1º flexo-torção	160,74
3º flexão	214,00

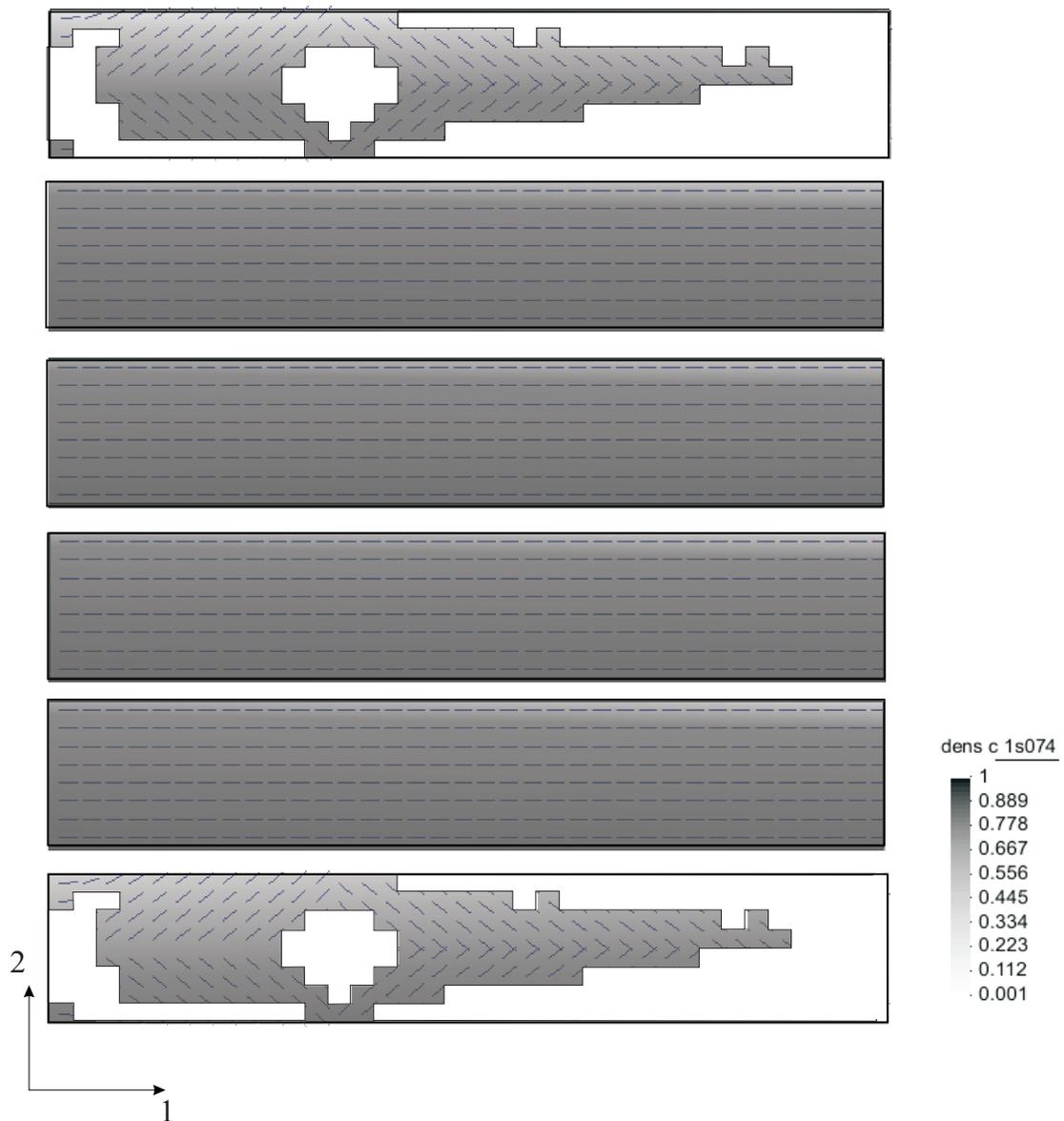


Figura 6.28 – Topologia final das lâminas da asa otimizada.

6.3 Organização dos Resultados

Apenas para que se organize os resultados obtidos, da mesma forma que na seção anterior, a tabela 6.11 mostra todos os resultados obtidos para as duas asas que tiveram suas topologias alteradas. Os ganhos em velocidade de *flutter* e redução de massa da estrutura, número de iterações e tempo computacional. As curvas VGF de todas as análises estão no APÊNDICE A.

Tabela 6.11 – Organização dos resultados da otimização em dois níveis.

	4 Lâminas	6 Lâminas
Velocidade início <i>flutter</i> [m/s]	26, 28	47, 36
Velocidade <i>flutter</i> ao fim da orientação [m/s]	55, 69	93, 29
Velocidade <i>flutter</i> ao fim da topológica [m/s]	40, 53	78, 39
Número de iterações da orientação	27	21
Número de iterações da topologia	72	64
Número de iterações da penalização	80	74
Massa inicial [kg]	0, 130	0, 193
Massa ao final do processo [kg]	0, 107	0, 163
Tempo computacional total [s]	6144	6583

Na tabela acima, a velocidade de *flutter* para o ponto de convergência da orientação aparece apenas para ilustrar a perda nesse sentido quando a otimização topológica foi aplicada, pois obviamente a diminuição do volume de material base causou uma redução da velocidade de início destes efeitos.

6.4 Asa acrescida de massa

O último experimento realizado foi colocar massa concentrada na extremidade das mesmas asas de 6 lâminas testadas anteriormente. O procedimento é o mesmo anterior, apenas acrescentando à matriz de massa termos relativos à massa e inércia que um elemento anexado à estrutura provocaria (figura 6.29). Como o elemento finito utilizado neste trabalho não conta com o termo relacionado ao *drilling* (rotação em torno do eixo 3), o termo de inércia foi acrescido apenas à posição referente à rotação em torno do eixo 1. Uma barra esbelta

de $0,08 [m]$, massa de 50 gramas na forma como mostrado na figura abaixo foi colocada exatamente na metade da largura da asa.

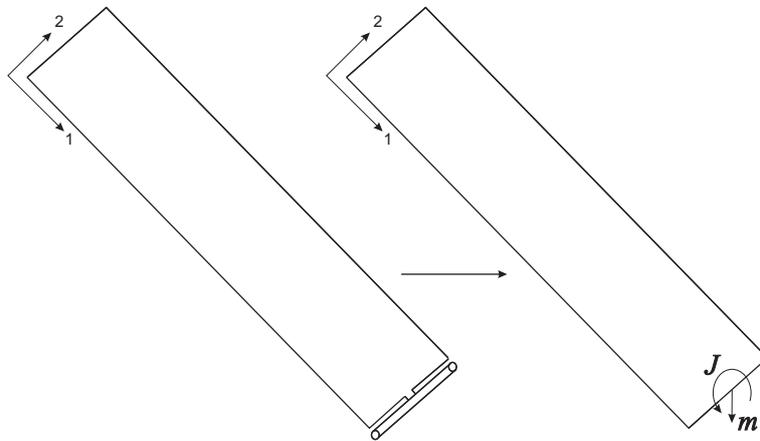


Figura 6.29 – Massa acoplada à ponta da asa.

A estratégia é exatamente a mesma anterior, apenas colocou-se massa adicional à estrutura referente ao acoplamento na extremidade da mesma. A análise modal da asa está na tabela 6.12 abaixo.

Tabela 6.12 – Análise modal inicial da asa com massa adicional.

Modo	Frequência [Hz]
1º flexão	10,34
1º torção	51,71
2º flexão	67,16
1º flexo-torção	132,70
2º flexo-torção	169,78

A análise aeroelástica indicou, como nos outros casos, que o primeiro modo de torção ou segundo modo de vibração da estrutura foi o causador do início dos efeitos de instabilidade. A função objetivo do processo de otimização está na figura 6.30. O primeiro nível convergiu com 32 iterações, a topologia na iteração 77 e a penalização na iteração 85.

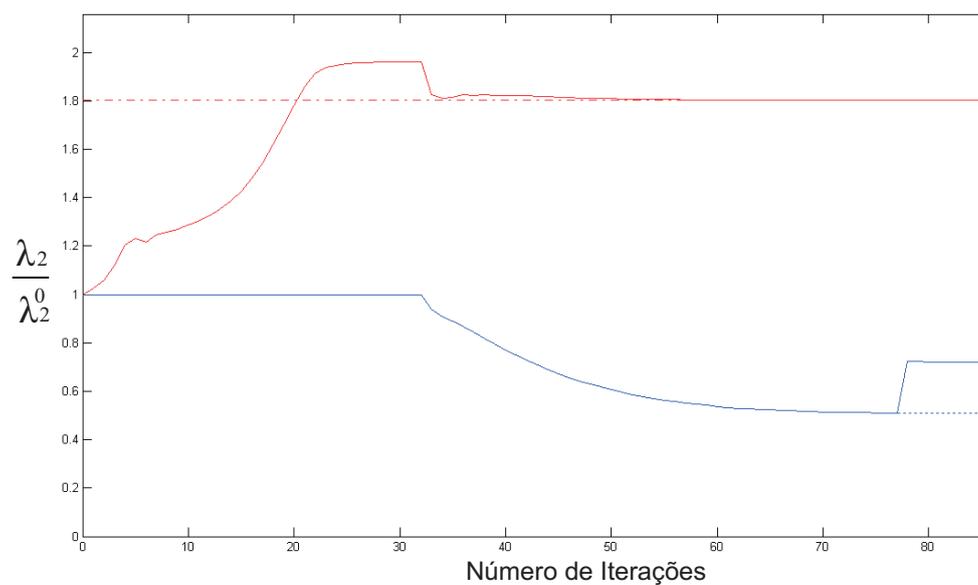


Figura 6.30 – Função objetivo da otimização da asa com massa adicionada.

A tabela 6.13 mostram a análise modal final realizada na estrutura com as frequências naturais e respectivos modos de vibração.

Tabela 6.13 – Análise modal ao fim do processo de otimização.

Modo	Frequência [Hz]
1º flexão	7,22
2º flexão	44,40
1º torção	93,29
1º flexo-torção	98,85
3º flexão	162,51

A figura 6.31 mostra a topologia das lâminas otimizadas, as 4 lâminas internas são exatamente iguais àquelas mostradas na seção anterior para a asa de 6 lâminas.

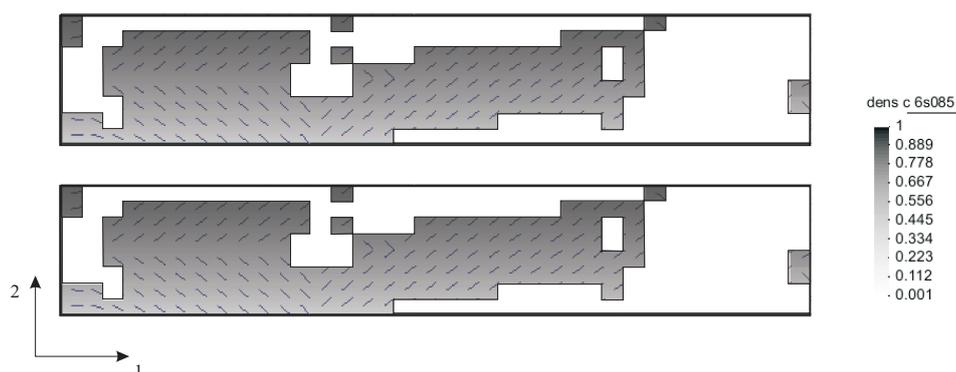


Figura 6.31 – Topologia das lâminas 1 e 6 para a asa com massa na ponta.

A redução no volume do material base nas lâminas mostradas acima ficou em 28 %. A massa total da estrutura inicial considerando-se a massa acoplada é de 243 gramas. Com a otimização a massa total foi reduzida para 225,5 gramas.

A tabela 6.14 organiza todos os resultados obtido na última análise realizada.

Tabela 6.14 – Organização dos resultados da otimização em dois níveis.

	Asa com massa concentrada
Velocidade início <i>flutter</i> [m/s]	52,62
Velocidade <i>flutter</i> ao fim da orientação [m/s]	81,99
Velocidade <i>flutter</i> ao fim da topológica [m/s]	65,99
Número de iterações da orientação	32
Número de iterações da topologia	77
Número de iterações da penalização	85
Massa inicial [kg]	0,243
Massa ao final do processo [kg]	0,225
Tempo computacional total [s]	7822

Os resultados da tabela 6.14 resumem os efeitos da otimização aplicada à asa com massa na extremidade livre. Os resultados para o fim da orientação apenas ilustram a queda de velocidade causada pela retirada de material base.

7. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho indicaram que a metodologia empregada para tratar dos efeitos de estabilidade das estruturas estudadas obteve sucesso. Em todas as análises os resultados de velocidade do escoamento aumentaram consideravelmente quando são maximizados os autovalores relacionados aos modos de vibração que deram início aos efeitos de instabilidade. Apesar de o MOADF apresentar em todos os casos resultados melhores para velocidade de início de *flutter*, o método utilizando apenas a análise aeroelástica inicial da estrutura para guiar o processo de otimização mostrou resultados também muito satisfatórios e com um esforço computacional menor. A estratégia utilizada para reduzir o peso das estruturas também obteve resultados satisfatórios, resultando em estruturas mais leves e com desempenho superior quanto ao comportamento fluido-estrutura das originais. O algoritmo de otimização empregado apresentou-se robusto em todos os casos testados, encontrando os valores extremos das funções objetivo com e sem restrições de maneira rápida e eficiente.

Neste trabalho também discutiu-se o que pode ser uma possível maneira de se fabricar estruturas como as obtidas no estudo. Se não possível ainda, a fabricação de tais componentes encontra trabalhos avançados nesta área, como os vistos nas técnicas chamadas de *fiber steering*. O nível de desenvolvimento destas técnicas já fornecem argumento necessário para o estudo de materiais laminados reforçados por fibras com as mais diversas configurações.

É importante destacar que neste trabalho apenas os efeitos relacionados ao *flutter* foram estudados, outros efeitos tão importantes quanto, como por exemplo divergência, não foram tratados nesta abordagem. Obviamente para um estudo completo do comportamento aeroelástico de uma asa, este e outros efeitos devem ser abordados na solução do problema.

Porém, os resultados apresentados neste trabalho estabeleceram a importância do emprego das técnicas de *aeroelastic tailoring* na fabricação e estudo de asas deste tipo, e também que tais técnicas trabalhem com especial atenção aos métodos de otimização

estrutural, não só à análise aeroelástica.

Resultados Publicados

Abaixo segue a lista onde já foram ou estão sendo publicados alguns resultados da pesquisa realizada neste trabalho:

- De Leon, D. M., de Souza, C. E. Aeroelastic Tailoring of a Laminated Composite Flat-plate Wing. **I Workshop on Recent Advances in Aeroelasticity: Computation, Experiment and Theory**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica-ITA. 2010;

- De Leon, D. M., de Souza, C. E., Fonseca, J. S. O., da Silva, R. G. A. Aeroelastic Tailoring of Composite Plates Through Eigenvalues Optimization. *Mecânica Computacional*, volume 29, páginas 609 – 623. Mecom-Cilamce, Buenos Aires, Argentina, 2010;

- De Leon, D. M., de Souza, C. E., Fonseca, J. S. O., da Silva, R. G. A. Aeroelastic Tailoring of Composite Flat-Plate Wing Through Eigenvalues Optimization and Forward Finite Difference. *Proceedings of International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*. Paris, França. 2011. (Submetido).

Sugestões para trabalhos futuros

Como esta é apenas uma primeira aproximação para o problema, muita coisa ainda pode e deve ser feita. Com o desenvolvimento do trabalho, alguns tópicos que se mostraram importantes e não puderam ser implementados no transcorrer do trabalho são citados, como exemplo:

- a linguagem de programação utilizada neste trabalho possui uma série de limitações, principalmente em desempenho para tratar problemas como, por exemplo, um número muito grande de variáveis, malha mais refinada, e número elevados de lâminas. Uma linguagem compilada seria importante para poder tratar de problemas mais complexos;

- como citado anteriormente, apenas o problema de *flutter* foi tratado, o que significa que problemas tão importantes quanto, como por exemplo divergência, não foram tratados nesta abordagem, sendo importante uma análise que leve em conta tais efeitos, especialmente em laminados flexíveis como os estudados neste trabalho;

- apesar de ser possível de prever os efeitos de estabilidade com uma análise linear,

resultados muito mais apurados podem ser obtidos partindo-se para uma análise não-linear do fenômeno, para tanto seria necessário implementar um elemento finito não-linear na análise estrutural das placas simuladas, a implementação de tal elemento na análise do problema seria um grande avanço para o trabalho.

- com relação ao modelo aeroelástico, uma melhora na avaliação do escoamento, considerando viscosidade pode ser feito;

- os resultados obviamente são teóricos, portanto seria extremamente interessante que fossem construídos e testados protótipos das asas estudadas, de forma que se pudesse verificar na prática o comportamento das estruturas otimizadas.

Este trabalho colaborou para o estudo do comportamento dinâmico de asas simuladas como placas planas, e sugeriu metodologias de estudo para o problema de *flutter*. Além de uma série de possíveis futuros trabalhos nessa área.

Referências Bibliográficas

ADOPTTECH. <http://www.adoptech.com/fibersteering/main.html>. Página consultada em 14 de Abril, 2010.

Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C. Analysis of Thick and Thin Shell Structure by Curved Finite Elements, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 2, p. 419–451, 1970.

Albano, E. and Rodden, W. P. A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows, **AIAA Journal**, vol. 7, p. 279–285, 1969.

Arora, J. S. **Introduction to Optimum Design**. Elsevier Academic Press, 2nd edition, 2004.

Attaran, A., Majid, D., Basri, S., Rafie, A. M., and Abdullah, E. Structural Optimization of an Aeroelastically Tailored Composite Flat Plate Made of Woven Fiberglass/Epoxy, **Aerospace Science and Technology**, vol. 1, p. 1–9, 2010.

Baglama, J. Augmented Block Householder Arnoldi Method, **Linear Algebra and its Applications**, vol. 429, p. 2315–2334, 2008.

Bathe, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1996.

Becker, E. B., Carey, G. F., and Oden, J. T. **Finite Elements (An Introduction)**. volume 1. Prentice-Hall, 1981.

Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N. Generating Optimal Topologies In Structural Design Using a Homogenization Method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer - Verlag, 2003.

Boresi, A. P. **Elasticity in Engineering Mechanics**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1965.

Bristol, U. <http://www.bris.ac.uk/composites/>. Página Consultada em 14 de Abril, 2010.

Cardoso, E. L. **Controle da Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

Chen, P. C. Damping Perturbation Method for Flutter Solution: The g-method., **AIAA Journal**, vol. 38(9), p. 1519–1524, 2000.

Cheng, H.-C. **The Optimal Shape/Topology Design of Structures for Dynamic Problems Using a Homogenization Method**. PhD thesis, The University of Michigan, 1994.

Dantzig, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Priceton Publish Press, 1963.

de Souza, C. E. **Otimização em dois Níveis da Orientação e da Topologia de Cascas Laminadas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.

de Souza, C. E. <http://www.ita.br/~carloses/>. Página consultada em 04 de Outubro, 2010.

EADS Deutschland GmbH, C. R. C. **The research requirements of the transport sectors to facilitate an increased usage of composite materials, Part 1 : The Composite Material Research Requirements of the Aerospace Industry**, 2004.

Fonseca, J. S. O. **Design of Microstructures of Periodic Composite Materials**. PhD thesis, University of Michigan, 1997.

Giesing, J., Kalman, T., and Rodden, W. **Subsonic Unsteady Aerodynamics for General Configurations**. Technical report affdl-tr-71-5, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Air Force Systems Command, Ohio, 1971.

Haftka, R. and Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1991.

Harder, R. L. and Desmarais, R. N. Interpolation Using Surface Splines, **Journal of Aircraft**, vol. 9, p. 189–191, 1972.

Hertz, T. J., Shirk, M. H., Ricketts, R. H., and Weisshaar, T. A. **Aeroelastic Tailoring with Composites Applied to Forward Swept Wings**. Technical report, Flight Dynamics Laboratory (FIBR) AF Wright Aeronautical Laboratories, 1981.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, 1987.

Irvine, T. <http://www.vibrationdata.com/tutorials2/ModalMass.pdf>.
Página consultada em 14 de Outubro, 2010.

Jones, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Scripta Book Company, Washington, 2nd edition, 1999.

Kameyama, M. and Fukunaga, H. Optimum Design of Composite Plate Wings for Aeroelastic Characteristics Using Lamination Parameters, **Computers & Structures**, vol. 85, p. 213–224, 2007.

Keith-Lucas, D. Sherpa Takes the Air, **Flight and Aircraft Engineers**, vol. 64, p. 535, 1953.

Krone, N. J. J. **Divergence Elimination with Advanced Composites**. PhD thesis, University of Maryland, College Park, MD., 1974.

Kumar, W. P. P. and Palaninathan, R. Finite Element Analysis of Laminated Shells with Exact Through-Thickness Integration, **Computers and Structures**, vol. 63(1), p. 173–184, 1997.

Manan, A., Vio, G. A., Harmim, M. Y., and Cooper, J. E. Optimization of Aeroelastic Composite Structures Using Evolutionary Algorithms, **Engineering Optimization**, vol. 42(2), p. 171–184, 2010.

Maute, K. and Allen, M. Conceptual Design of Aeroelastic Structures by Topology Optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 27, p. 27–42, 2004.

Mindlin, R. D. Influence of Rotary Inertia and Shear in Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 18, p. 31–38, 1951.

Mosmann, R. M. **Otimização Topológica de Estruturas Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade, Volume e Frequência Natural**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.

Munk, M. M. **Propeller Containing Diagonally Disposed Fibrous Material**. U. S. Patent 2.484.308.1111, 1949.

Ojalvo, I. U. Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies, **AIAA Journal**, vol. 26(3), p. 361–366, 1988.

Panda, S. and Natarajan, R. Analysis of Laminated Composite Shell Structures by Finite Element Method, **Computers & Structures**, vol. 14, p. 225–230, 1981.

Paschoalini, A. T. **Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Dinâmica de Placas e Cascas**. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 1995.

Patil, M. J. Aeroelastic Tailoring of Composite Box Beams, **American Institute for Aeronautics and Astronautics**, pages 1–9, 1997.

Pedersen, P. **Optimal Design - Structures and Materials, Problems and Tools**. Technical University of Denmark. ISBN - 8790416066, 2003.

Qatu, M. S. **Vibration of Laminated Plates and Shells**. British Library, 2004.

Reddy, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. John Willey & Sons, Inc., 1984.

Reddy, J. N. **Mechanics of Composite Plates and Shells - Theory and Analysis**. 2nd edition, 2004.

Reissner, E. New Derivation of the Equations of the Deformation of Elastic Shells, **The American Journal of Mathematics**, vol. 63, p. 177–184, 1941.

Sant’Anna, H. M. **Otimização Topológica de Estruturas Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

Seyranian, A., Lund, E., and Olhoff, N. Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems, **Structural Optimization**, vol. 8, p. 207–227, 1994.

Shirk, M. H. and Hertz, T. J. Aeroelastic Tailoring - Theory, Practice and Promise, **Journal of Aircraft**, vol. 23, p. 6–18, 1986.

Stolpe, M. and Svanberg, K. On the Trajectories of Penalization Methods for Topology Optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 21, p. 128–139, 2001.

Timoshenko, S. and Goodier, J. N. **Theory of Elasticity**. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951.

Vanderplaats, G. N. Structural Design Optimization Status and Direction, **Journal of Aircraft**, vol. 36, p. 11–20, 1999.

Veers, P., Bir, G., and Lobitz, D. **Aeroelastic Tailoring in Wind-Turbine Blade Applications**. Sandia National Laboratories, Wind Energy Technology Department, New Mexico and National Renewable Energy Laboratory, National Wind Technology Center, Colorado. USA., 1998.

Weisshaar, T. A. **Aircraft Aeroelastic Design and Analysis**. Class Notes. School of Astronautics and Aeronautics - Purdue University, 1995.

Weisshaar, T. A., Nam, C., and Batista-Rodriguez, A. Aeroelastic Tailoring for Improved UAV Performance, **AIAA Journal**, 1998.

Zhang, Y. X. and Yang, Z. H. Recent Developments in Finite Element Analysis for Laminated Composite Plates, **Composite Structures**, vol. 88, p. 147–157, 2009.

Zienkiewicz, O. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method - Solid Mechanics**. volume 2. Elsevier Academic Press, 5th edition, 2000a.

Zienkiewicz, O. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method - The Basis**. volume 1. Elsevier Academic Press, 5th edition, 2000b.

ZONA-Technology. **ZAERO Theoretical Manual**. ZONA Technology Inc., 9489 E. Ironwood Square Drive, Scottsdale, Arizona, USA., 15^a edition, 2006.

APÊNDICE A

As curvas VGF das estruturas estudadas neste trabalho são mostradas nesta seção, os valores obtidos para argumentar os resultados foram retirados desta análise.

Para o primeiro caso estudado, a placa laminada não simétrica, as curvas foram mostradas durante a apresentação dos resultados.

Otimização da orientação

Na otimização da orientação são apresentadas as curvas para o caso das placas simétricas.

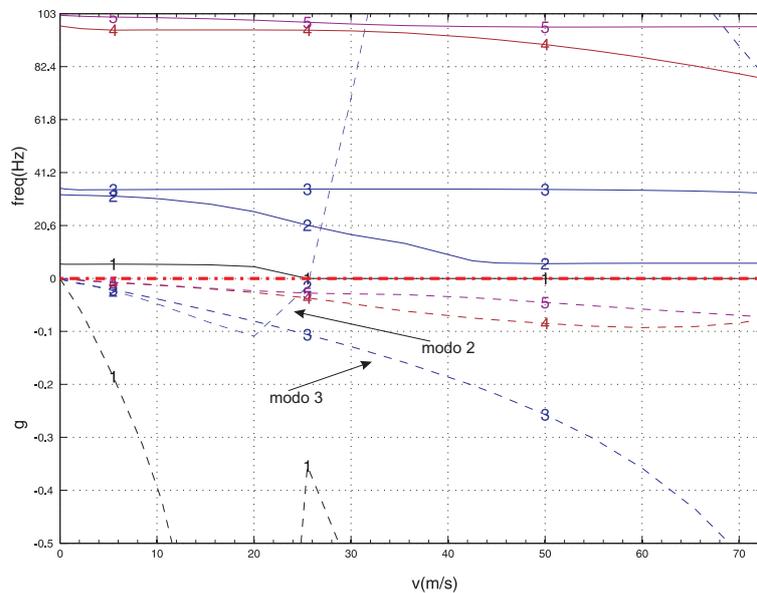


Figura 7.1 – Curvas VGF da asa $[0, 90]_s$.

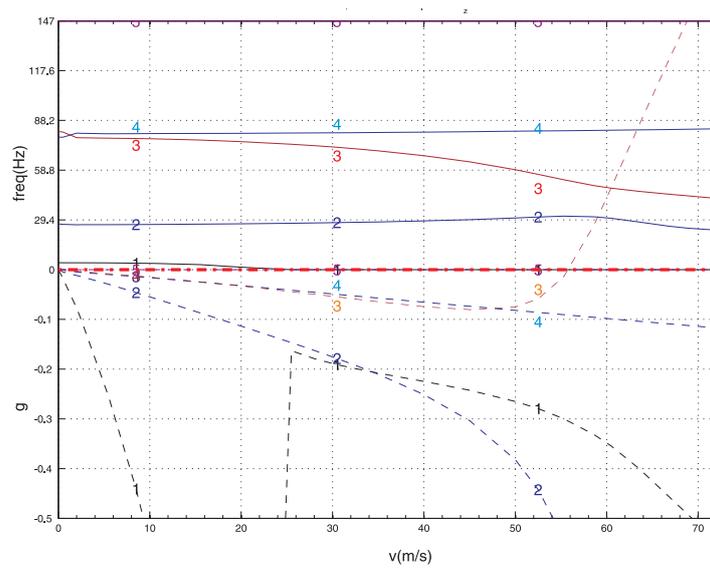


Figura 7.2 – Curvas VGF da asa $[0, 90]_s$ otimizada seguindo a análise inicial.

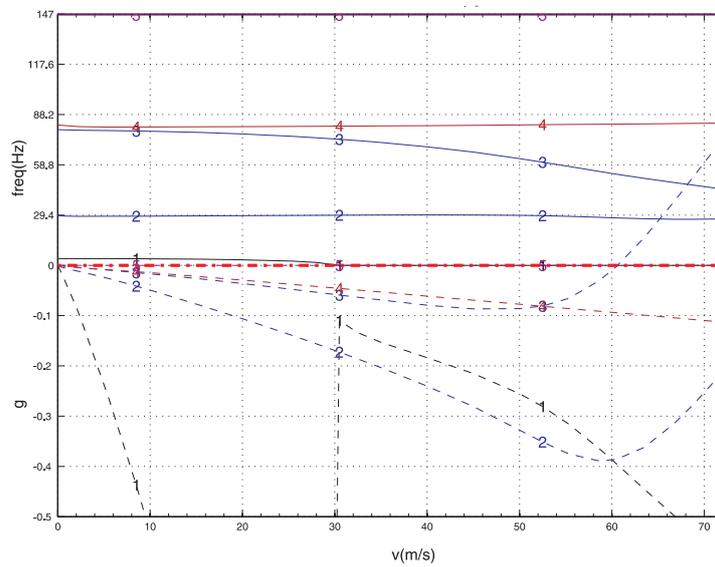


Figura 7.3 – Curvas VGF da asa $[0, 90]_s$ otimizada seguindo MOADF.

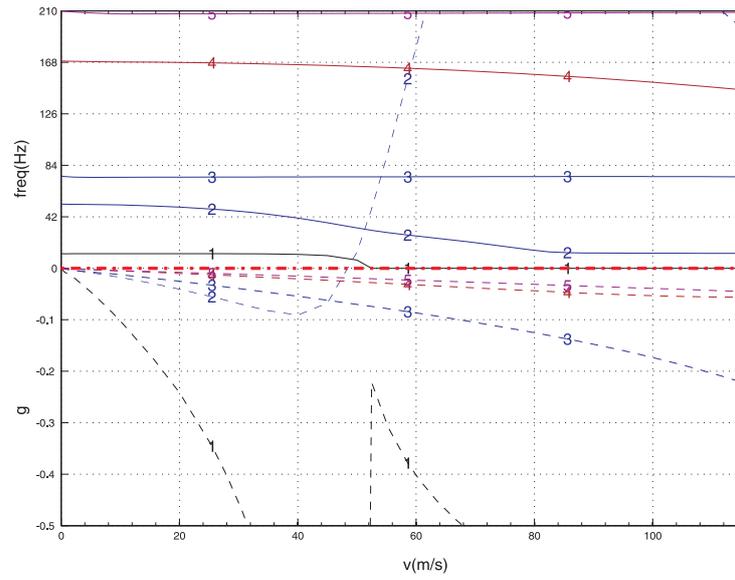


Figura 7.4 – Curvas VGF da asa $[0, 45, 90]_s$.

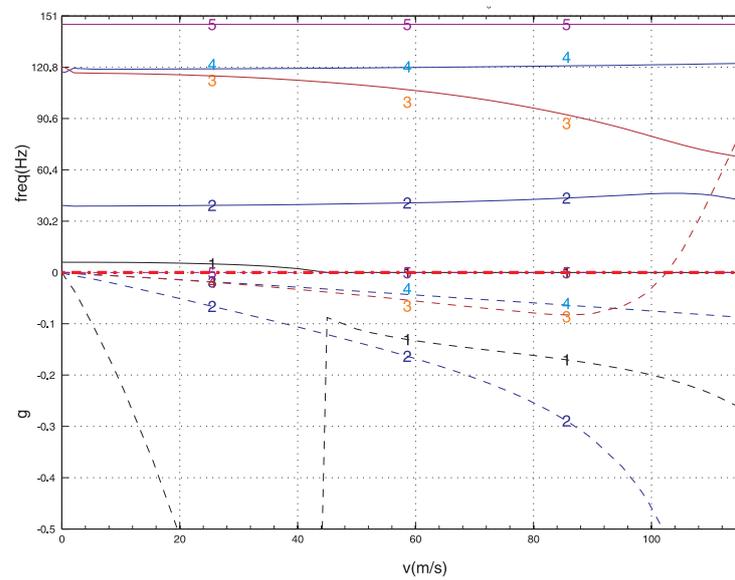


Figura 7.5 – Curvas VGF da asa $[0, 45, 90]_s$ após otimização.

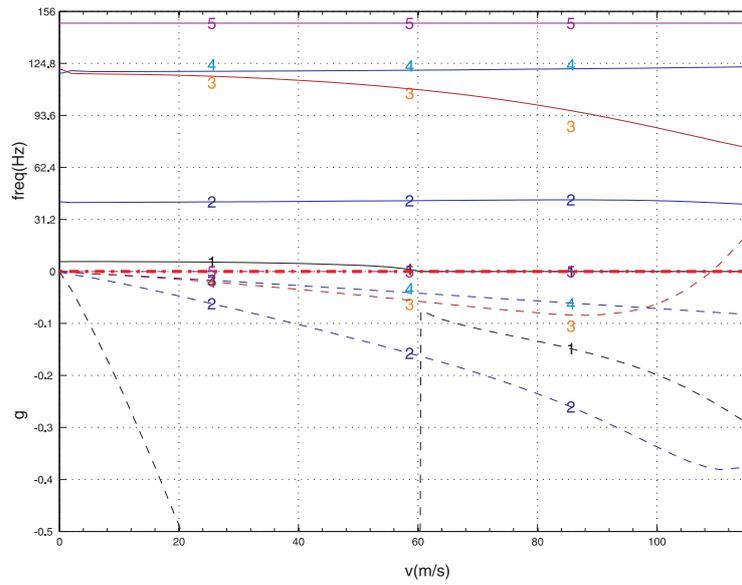


Figura 7.6 – Curvas VGF da asa $[0, 45, 90]_s$ após MOADF.

Otimização Topológica

Os dois casos estudados para otimização topológica são mostrados abaixo.

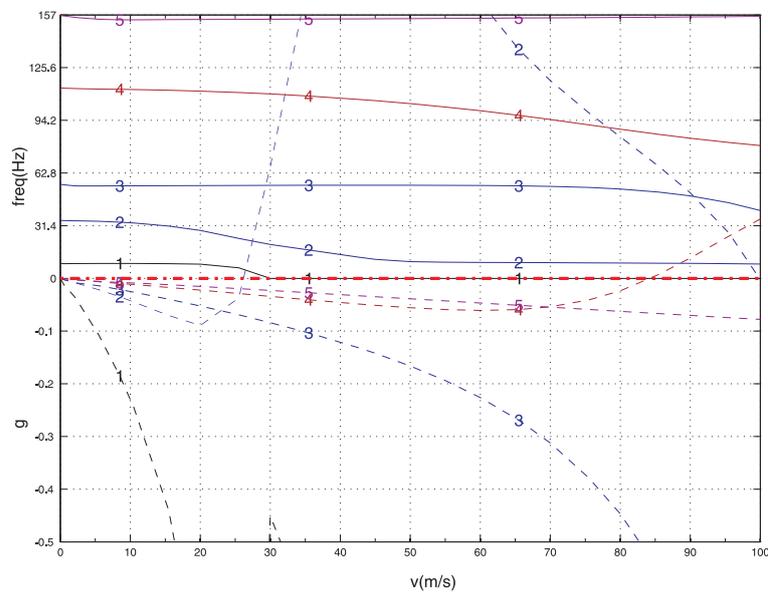


Figura 7.7 – Curvas VGF da asa $[0, 0]_s$.

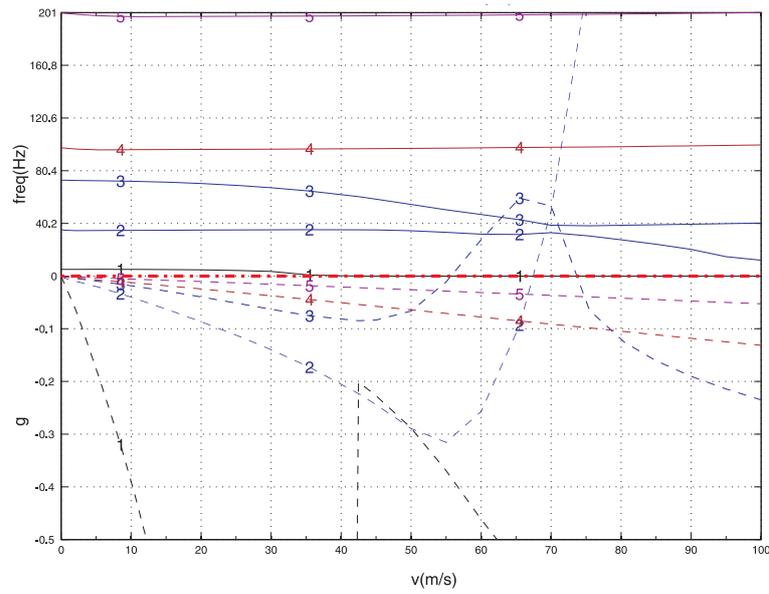


Figura 7.8 – Curvas VGF da asa $[0,0]_s$ após convergência da orientação.

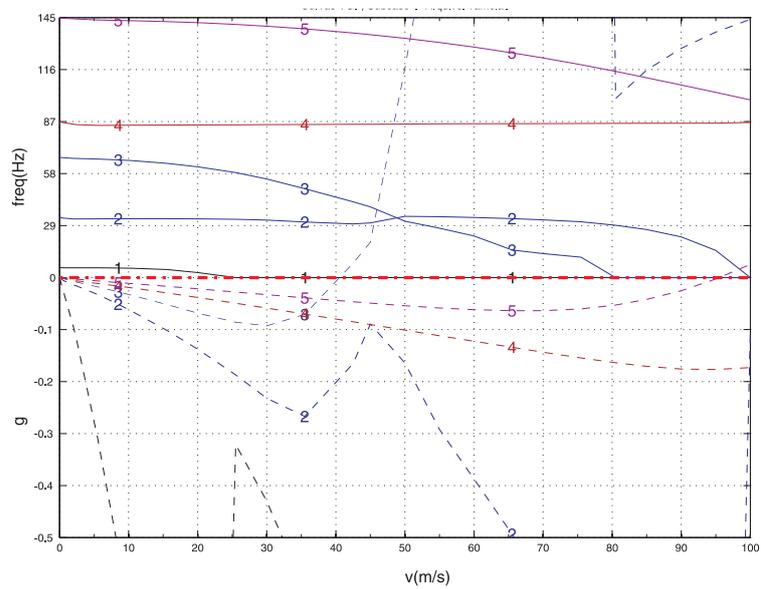


Figura 7.9 – Curvas VGF da asa $[0,0]_s$ após convergência da topologia.

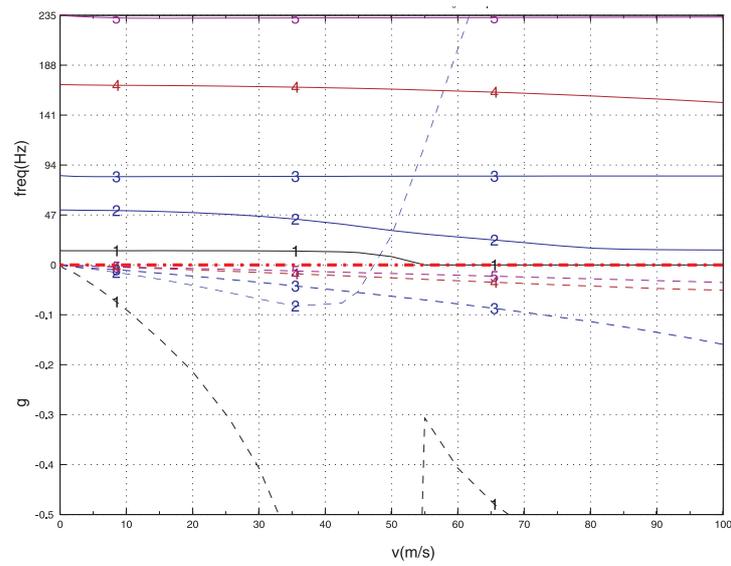


Figura 7.10 – Curvas VGF da asa $[0, 0, 0]_s$ antes da otimização.

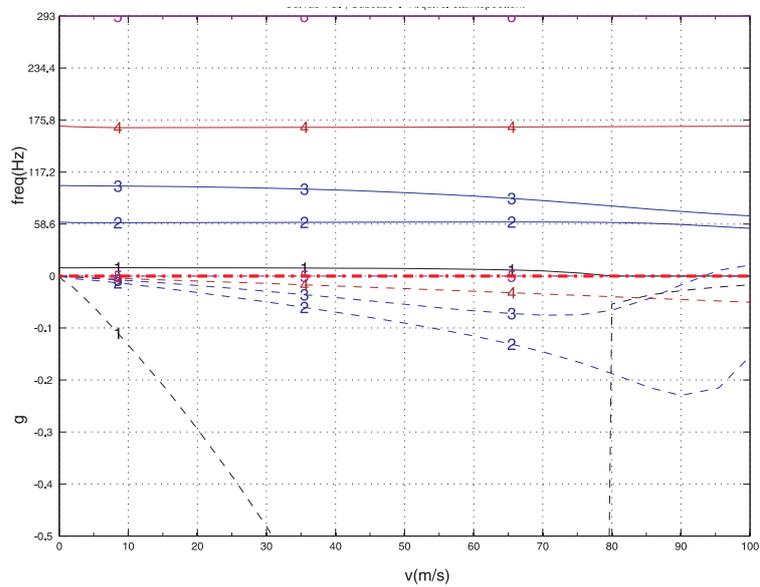


Figura 7.11 – Curvas VGF da asa $[0, 0, 0]_s$ após convergência da orientação.

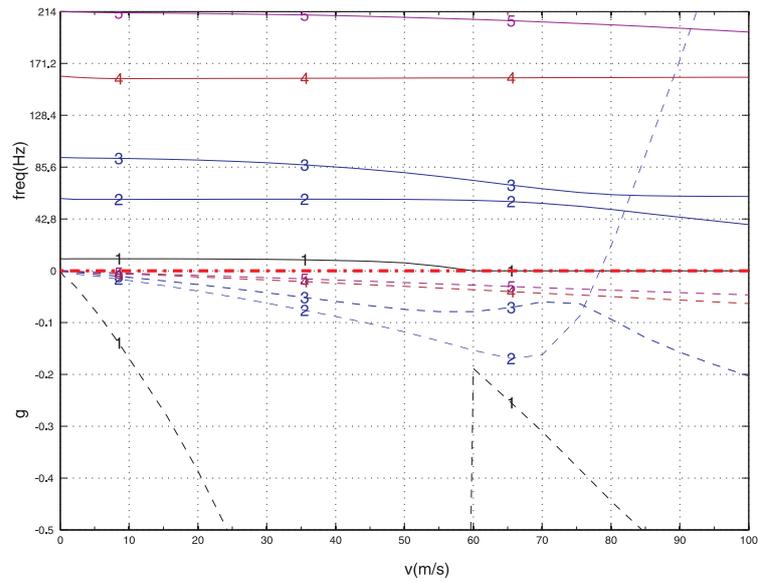


Figura 7.12 – Curvas VGF da asa $[0, 0, 0]_s$ após convergência da topologia.

Topológica com massa adicionada

Os últimos resultados são referentes à asa com a massa adicional.

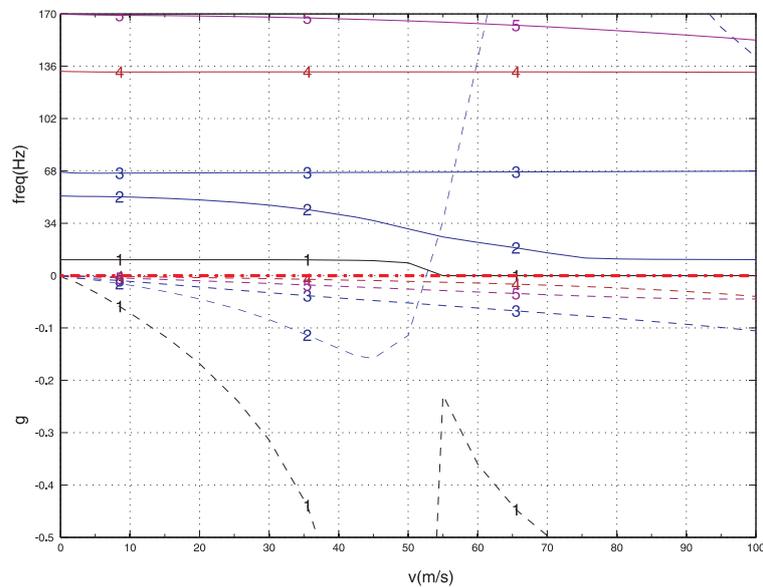


Figura 7.13 – Curvas VGF da asa com massa adicionada.

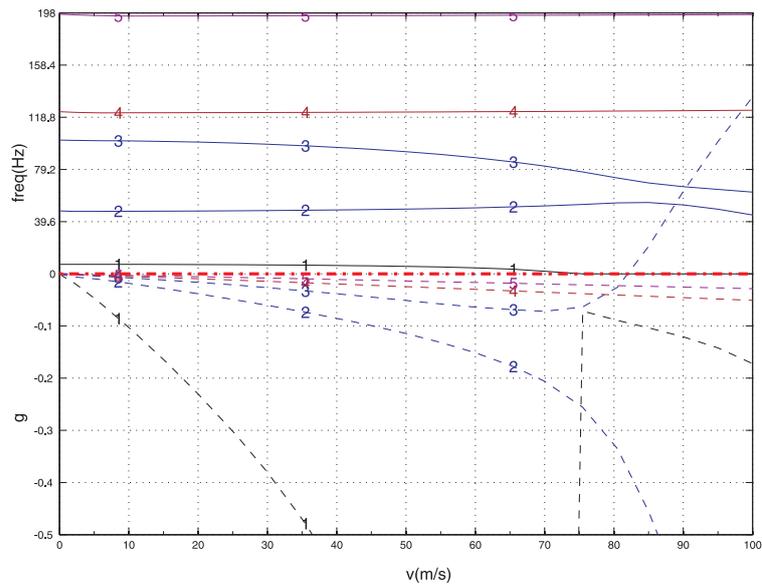


Figura 7.14 – Curvas VGF da asa com massa adicionada após convergência da orientação.

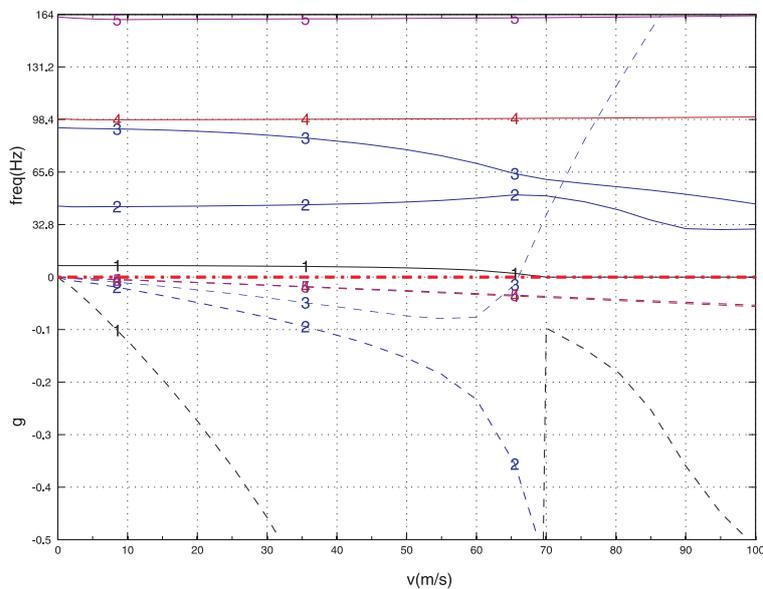


Figura 7.15 – Curvas VGF da asa com massa adicionada após convergência da topologia.

APÊNDICE B

As derivadas (sensibilidades) para o cálculo por programação linear exigem que obtenha-se expressões para a variação da rigidez da estrutura em função da variação da orientação das fibras (para maximização dos autovalores) e da rigidez da estrutura em função da variação de volume de material base no domínio (otimização topológica).

Para o primeiro caso, a derivada da matriz de rigidez em relação à variação do ângulo de orientação das fibras é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_k}{\partial \theta} &= \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_2 \right) \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi d\zeta, \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde k corresponde à lâmina que se quer otimizar, o vetor $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta}$ tem dimensões número de variáveis ($ndesvar$), onde $ndesvar$ é o número de elementos vezes o número de lâminas que serão otimizadas ($ndesvar = nelem \times notmlyr$).

Os termos derivados na equação 7.1 são descritos por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \theta} = (z_t - z_b)_k \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_k}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (z_t^2 - z_b^2)_k \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_k}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \theta} = \frac{1}{3} (z_t^3 - z_b^3)_k \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_k}{\partial \theta}, \end{array} \right. \quad (7.2)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{Q}}$ foi apresentada na eq. 2.60.

Para a otimização topológica a sensibilidade da rigidez em relação à variável de

projeto ρ é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_k}{\partial \rho} &= \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \rho} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \rho} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \rho} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \rho} \mathbf{F}_2 \right) \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi d\zeta. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Para a otimização topológica, a matriz constitutiva foi penalizada conforme descrito na equação 4.15, portanto os termos derivados de 7.3 são descritos por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \rho} = q\rho^{q-1} (z_t - z_b)_k \bar{\mathbf{Q}}_k \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \rho} = \frac{1}{2} q\rho^{q-1} (z_t^2 - z_b^2)_k \bar{\mathbf{Q}}_k \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \rho} = \frac{1}{3} q\rho^{q-1} (z_t^3 - z_b^3)_k \bar{\mathbf{Q}}_k \quad . \end{array} \right. \quad (7.4)$$

A completa linearização da restrição é escrita como

$$\left[\frac{\partial \lambda^0}{\partial \rho} \right]^T \rho = \lambda_{lim} - \lambda^0 + \left[\frac{\partial \lambda^0}{\partial \rho} \right]^T \rho^0. \quad (7.5)$$

ANEXO I

As funções de forma para o elemento quadrilátero linear isoparamétrico de 8 nós (serendipity) da figura 7.16, utilizado neste trabalho podem ser descritas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-1 - \xi - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (-1 + \xi - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (-1 + \xi + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-1 - \xi + \eta) \\ N_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\ N_8 &= \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \end{aligned} \tag{7.6}$$

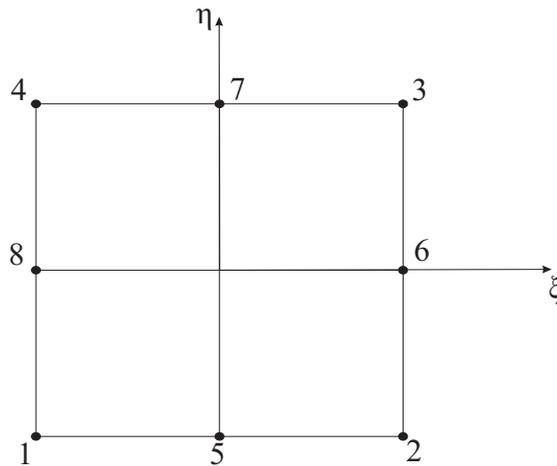


Figura 7.16 – Elemento finito quadrilátero linear isoparamétrico de 8 nós.

As derivadas das funções de forma também serão usadas e podem ser descritas como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta)(-1-\xi-\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(-1+\xi-\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(-1+\xi+\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta)(-1-\xi+\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_5}{\partial \xi} &= -\xi(1-\eta) \\
\frac{\partial N_6}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}(1-\eta^2) \\
\frac{\partial N_7}{\partial \xi} &= -\xi(1+\eta) \\
\frac{\partial N_8}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}(-1+\eta^2)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(-1-\xi-\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(-1+\xi-\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(-1+\xi+\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= +\frac{1}{4}(1+\xi)(-1-\xi+\eta) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_5}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}(-1+\xi^2) \\
\frac{\partial N_6}{\partial \eta} &= -\eta(1+\xi) \\
\frac{\partial N_7}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2) \\
\frac{\partial N_8}{\partial \eta} &= -\eta(1+\xi)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

ANEXO II

No capítulo 2 foi mostrado que deve-se escrever a matriz de rigidez de cada elemento como

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{F}_1^T \mathbf{A} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{B} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{D} \mathbf{F}_2] |J| d\eta d\xi \quad , \quad (7.9)$$

onde \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 eram formas de escrever a matriz original de transformação de coordenadas \mathbf{F} independente da espessura, de forma que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + z\mathbf{F}_2, \quad (7.10)$$

retorne à forma original.

Essa forma de escrever a matriz de transformação de coordenadas foi proposta por Kumar [Kumar e Palaninathan, 1997], e as matrizes \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 podem ser escritas como

$$\mathbf{F}_{1i} = \begin{bmatrix} f_4 & 0 & 0 & f_1 v_{1i1} & -f_1 v_{2i1} \\ 0 & f_5 & 0 & f_2 v_{1i2} & -f_2 v_{2i2} \\ 0 & 0 & f_6 & f_3 v_{1i3} & -f_3 v_{2i3} \\ f_6 & 0 & f_4 & f_1 v_{1i3} + f_3 v_{1i1} & -f_1 v_{2i3} - f_3 v_{2i1} \\ 0 & f_6 & f_5 & f_2 v_{1i3} + f_3 v_{1i2} & -f_2 v_{2i3} - f_3 v_{2i2} \\ f_5 & f_4 & 0 & f_1 v_{1i2} + f_2 v_{1i1} & -f_1 v_{2i2} - f_2 v_{2i1} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$\mathbf{F}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1_{i1}} & -f_4 v_{2_{i1}} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{1_{i2}} & -f_5 v_{2_{i2}} \\ 0 & 0 & 0 & f_6 v_{1_{i3}} & -f_6 v_{2_{i3}} \\ 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1_{i3}} + f_6 v_{1_{i1}} & -f_4 v_{2_{i3}} - f_6 v_{2_{i1}} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{1_{i3}} + f_6 v_{1_{i2}} & -f_5 v_{2_{i3}} - f_6 v_{2_{i2}} \\ 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1_{i2}} + f_5 v_{1_{i1}} & -f_4 v_{2_{i2}} - f_5 v_{2_{i1}} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

onde o subíndice i indica que deve-se calcular a matriz para cada um dos nós do elemento, os valores de f são descritos por:

$$\begin{aligned} f_1 &= J_{13}^{-1} N_i \frac{t}{2} \quad , \\ f_2 &= J_{23}^{-1} N_i \frac{t}{2} \quad , \\ f_3 &= J_{33}^{-1} N_i \frac{t}{2} \quad , \\ f_4 &= \left(J_{11}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad , \\ f_5 &= \left(J_{21}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad , \\ f_6 &= \left(J_{31}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{32}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde J são os elementos da matriz Jacobiana.

Considerando-se a equação 2.31, escreve-se os termos da matriz Jacobiana como

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left\{ u_i + \frac{\zeta t_i}{2} (\nu_{11i} \alpha_{2i} - \nu_{21i} \alpha_{1i}) \right\} \\ J_{12} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left\{ u_i + \frac{\zeta t_i}{2} (\nu_{11i} \alpha_{2i} - \nu_{21i} \alpha_{1i}) \right\} \\ J_{13} &= N_i \frac{t_i}{2} (\nu_{11i} \alpha_{2i} - \nu_{21i} \alpha_{1i}) \\ J_{21} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left\{ v_i + \frac{\zeta t_i}{2} (\nu_{12i} \alpha_{2i} - \nu_{22i} \alpha_{1i}) \right\} \\ J_{22} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left\{ v_i + \frac{\zeta t_i}{2} (\nu_{12i} \alpha_{2i} - \nu_{22i} \alpha_{1i}) \right\} \\ J_{23} &= N_i \frac{t_i}{2} (\nu_{12i} \alpha_{2i} - \nu_{22i} \alpha_{1i}) \\ J_{31} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left\{ w_i + \frac{\zeta t_i}{2} (\nu_{13i} \alpha_{2i} - \nu_{23i} \alpha_{1i}) \right\} \\ J_{32} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left\{ w_i + \frac{\zeta t_i}{2} (\nu_{13i} \alpha_{2i} - \nu_{23i} \alpha_{1i}) \right\} \\ J_{33} &= N_i \frac{t_i}{2} (\nu_{13i} \alpha_{2i} - \nu_{23i} \alpha_{1i}) \end{aligned} \quad (7.14)$$