UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Taís da Silva

IDEIAS ASSOCIADAS À FRAÇÃO: abordagens históricas e didáticas

Porto Alegre
2010

Taís da Silva

IDEIAS ASSOCIADAS À FRAÇÃO: abordagens históricas e didáticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Lucia Helena Marques Carrasco

Porto Alegre
2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço à professora Lucia, minha orientadora, por sua paciência e incomensurável dedicação na orientação deste Trabalho.

Às amigas Jussara, Juliana e Renata, pelo apoio e encorajamento, além das importantes contribuições que deram durante a realização deste trabalho.

Ao meu primo Fábio.

E, enfim, à Taís Aline que foi minha parceira de todas as horas e para todas as situações.

Dedico este trabalho...

...à minha mãe (e pai) Eloide, pelo duplo papel que desempenhou com tanta maestria e dedicação, presenteando-me com seu apoio, seu carinho e sua compreensão em todos os momentos da minha vida.

"O que me preocupa não é o grito dos violentos, nem dos corruptos, nem dos desonestos, nem dos sem caráter ou dos sem ética. O que mais me preocupa é o silêncio dos bons."

Martin Luther King

RESUMO

Neste estudo são enfatizados aspectos históricos e abordagens didáticas relativos às frações, tendo em vista a teia de sentidos e significados a que estão ligadas, em particular os de medida, quociente e razão. Através de um levantamento qualitativo acerca da abordagem do assunto em questão nos livros de Ensino Fundamental e apoiada nos autores Romanatto, David, Onuchic, Lopes e Bertoni, entre outros, procurou-se avaliar as possibilidades de ampliação do tratamento conceitual dos números racionais e da utilização da fração, essa entendida como ferramenta numérica. Após o estudo historiográfico e com base nas alternativas pedagógicas estudadas, foi realizado um estudo de caso na Escola Etadual de Ensino Médio Anne Frank, com o objetivo de investigar se o que está sendo ensinando, relativo a frações, têm significado para os alunos. Para tal, organizou-se um instrumento com várias situações-problema que poderiam ser resolvidas através do uso de frações, no entanto não havia convergência entre as ideias e os significados atribuídos a essas frações, de modo a tornar possível a problematização e a reflexão sobre o uso das mesmas. De modo geral, todas as estratégias utilizadas na produção deste trabalho foram no sentido de avaliar a adequabilidade do ensino de frações no Ensino Fundamental e de destacar algumas escolhas metodológicas e alguns recursos didáticos para o ensino dos conteúdos onde as frações se fazem presentes.

Palavras-chave: **Ensino. 2. Frações. 3. História da Fração. 4**. **Números Racionais**.

ABSTRACT

This work shows the historical aspects and some didactic approaches related to fractions, taking into account the web of meaning and sense aspects that fractions are connected to, particularly those of dimension, quotient, ratio and straight line point.
Based on a qualitative study carried out with the prevailing literature used at Elementary Schools, and based on authors like Romanatto, David, Onuchich, Lopes, Bertoni, et al., it aims to evaluate the possibilities from conceptual treatment of the rational numbers as well the use of fractions.

After reviewing some pedagogical alternatives and the historiographical study, a case of study was carried out at Anne Frank School to determine whether what was being taught in class about fractions were meaningful for the students. In order to do so, it was designed an instrument to simulate some problem situations that could be solved through the use of fractions. However, there was not enough convergence between the ideas and the meanings assigned to fractions, so it was impossible to create the necessary reflection about the use of fractions. Basically, all the methods applied to produce this work aimed to determine the suitability of fraction teaching at Elementary School level and highlight some methodological options and didactic resources available for the teaching of fractions.

Keywords: Teaching. 2. Fractions. 3. Fractions History. 4. Rational Numbers.

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há aproximadamente dois anos, em conversa informal com uma professora de matemática do Ensino Fundamental da Rede Estadual, surgiram questões relativas às dificuldades de aprendizagem dos alunos. Percebi, através do relato da professora, que as dificuldades não estavam ligadas aos conteúdos que ela estava ministrando, mas a conteúdos que eram pré-requisitos desses. Dentre eles, o que mais me chamou atenção foi FRAÇÃO. Não apenas por ser um assunto enfatizado pela professora, mas por já ter observado, durante minhas práticas de estágio, que os alunos não entendem o que são frações e não sabem resolver operações com as mesmas. Assim, comecei a estudar esse assunto com mais profundidade.

Em junho deste ano, ao iniciar minhas atividades profissionais, como decente, com duas turmas de sexta série, levantei a hipótese, com relação ao tema em questão, de que o mais importante seria ressaltar o que é uma fração[1], de modo que os alunos pudessem transitar entre os diversos sentidos[2] atribuídos a essa representação simbólica, mesmo que para isso fosse necessário "abrir mão", muitas vezes, da parte operatória. A partir dessa experiência optei por desenvolver meu trabalho de conclusão do curso de graduação abordando o tema citado, mais especificamente, enfocando a questão: o que é uma fração, o que é um número racional e quais são as possíveis maneiras de abordá-los, ou seja, quais são suas *personalidades*[3].

Devido a complexidade do tema há muita divergência a despeito de quais sentidos abordar durante o estudo, este trabalho deixará mais explicitado três dos muitos e diversos sentidos atribuídos ao número fracionário, por diferentes autores, são eles: a medida, o quociente e a razão. Isso não restringe meu trabalho de maneira nenhuma, pois me dou a liberdade, no decorrer deste trabalho, de fazer referencia a outros significados, apenas ilustrativamente.

---

[1] Esse tema será tratado no Capítulo 3.

[2] A ideia de relacionar diversos sentidos à fração será fundamentada, ao longo deste texto, nos autores David e Fonseca (1997); Lopes (2008), entre outros.

[3] Termo usado por Romanatto (1999), expressando relações (como medida, razão, quociente, entre outras) que o número racional pode assumir. Observa-se, ainda, que, nos PCNs, se faz referência a esses diversos sentidos ou personalidades, tanto ao dirigir-se às frações como aos números racionais (SANT'ANNA; BITTENCOURT E OLSSON, 2008).

E as divergências não param por aí. Pois temos o dilema do termo correto para designar os sentidos alcançados pelos números fracionários, ou os contextos em que podemos encontrar estas representações, e ainda, como abordar cada representação desse número. Podemos expressar estes sentidos ou significados atribuídos aos números racionais com palavras como personalidade e subconstruto.

No segundo capítulo faço uma breve contextualização histórica do surgimento das frações, abordando de maneira muito sucinta a forma como elas apareceram em certos lugares de que se tem algum tipo de documentação comprobatória.

No capítulo três abordo relações entre a prática pedagógica e a pesquisa em Educação Matemática com relação ao tema em estudo. Para isso, utilizo diversos livros e artigos, que serão citados oportunamente, além de duas teses.

No âmbito da prática pedagógica, analiso, no quarto capítulo, três coleções de livros didáticos no que diz respeito à forma como os conteúdos relacionados à fração são tratados, detendo-me no tipo de abordagem e na linguagem utilizada. Neste capítulo amplio um pouco meu alcance, no que se refere a quantidade de sentidos amparados. Pois é importante verificar todos os sentidos, referentes a fração, abordados pelos livros didáticos, apesar de alguns desses sentidos não serem tão explicitados em me trabalho quanto os três já citados no parágrafo anterior.

No capítulo cinco, tomando como referência o tipo de material de apoio a que o professor tem acesso (neste caso, os livros didáticos) e algumas das tendências nessa área, elaboro uma atividade que sintetiza os tipos de problemas utilizados nos livros e a proponho, para fins de investigação, a alunos de oitava série. A discussão de tal atividade é realizada com o objetivo de elucidar as *personalidades* da fração, conforme citado acima.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Acredito que seja ingênuo perguntar quem criou as frações e onde elas surgiram pela primeira vez, mas também acredito que tanto professores quanto alunos gostariam muito de ter as respostas a essas perguntas. Talvez essa última crença decorra da ilusão de que a história das frações possa ajudar na superação das dificuldades enfrentadas no estudo desse assunto.

Escrever sobre a história da matemática é como garimpar uma mina de ouro. Com muito estudo e muita procura encontramos pequenos fragmentos para tentar reconstituir alguns fatos ou pensamentos de época.

Segundo Godefroy (1997), a relação que une um progresso matemático à concepção cientifica e filosófica do mundo não deixa de ser uma relação de aprofundamento da nossa concepção de número. "O progresso e a perfeição das matemáticas estão intimamente ligados à prosperidade do estado." (NAPOLEÃO BONAPART, *apud* GODEFROY, 1997, p.101). Assim, a evolução da humanidade pode se verificar na evolução da matemática, pois a evolução das ciências está intrínseca ao aprimoramento da matemática.

2.1 Na Babilônia

Destaco de Cajori (2007) a informação de que há aproximadamente 3.500 anos, no sistema de numeração Babilônico[4] (posicional e de base 60), encontramos uma representação que remete ao que hoje enxergamos como fração. A fração era vista como número. Por exemplo: "o número 1 30 representa não só $1 \times 60 + 30 = 90$, mas, também, $1 + \frac{30}{60} = 1\frac{1}{2}$, ou, na verdade, qualquer múltiplo de um desses dois números pelo fator 60^m, cabendo ao contexto tornar as coisas claras" (*ibid*, p. 23).

Os babilônicos também eram capazes de calcular os inversos, tinham tábuas de multiplicação, que eram muito grandes por causa da base 60. Essas

[4] A Babilônia foi, considerando somente os povos ocidentais, o berço da escrita (CAJORI, 2007).

enormes tábuas eram reduzidas a tabelas decimais por distributividade (CAJORI, 2007).

> Os escribas possuíam, além disso, tabelas completas de multiplicações e de cálculos de inversos, as quais lhes bastava consultar para efectuar os produtos e as divisões, visto que dividir por um número é, evidentemente, o mesmo que multiplicá-lo pelo seu inverso. Estavam, portanto aptos a calcular numerosas fracções rapidamente e com exactidão. (GODEFROY, 1997, p. 35).

Além disso, segundo esse autor, os babilônicos tinham contato com números de expansão infinita através do inverso dos números estudados nas regras de multiplicação. E nomeavam estes de *números irregulares.* Assim, os números com expansão decimal finita eram os *números regulares.*

Sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, mas, segundo Cajori (2007), na Babilônia era feita uma aproximação para esse número, dentre outros deste conjunto, representada por *1 , 24 ; 51 ; 10* o que no nosso sistema de numeração decimal significa $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1{,}41421296296\ldots$. Temos aqui uma excelente aproximação, principalmente considerando os conhecimento da época e os recursos disponíveis.

Dentre outras heranças que os babilônicos nos deixaram, Godefroy (1997) reconhece as medidas de tempo minutos e segundos, e Cajori (2007) ressalta o sistema sexagesimal para frações, como se vê abaixo:

> Cientistas (e os grego antigos) usaram o sistema posicional sexagesimal para frações, seguindo os passos dos astrônomos babilônicos. Isto permanece verdadeiro para os cientistas da Europa até cerca de 1500 da nossa era, quando então o nosso sistema decimal entrou em uso. (CAJORI, 2007, p.31)

Observo, a partir destas primeiras garimpagens históricas, que os babilônicos tinham as seguintes ideias relacionadas ao número fracionário: de partição do 60 (o denominador era sempre constante e igual a 60), de medida e de operador multiplicativo.

2.2 No Egito

Para Aristóteles a matemática originou-se no Egito. Podemos notar as noções de divisão e de proporção na matemática desenvolvida por esse povo, como na história do Rei Sésotris[5], citada por diversos autores, entre eles Cajori, Godefroy e Vasconcelos.

Segundo Cajori (2007), em um papiro escrito por Ahmes[6] podemos encontrar problemas que parecem implicar um conhecimento rudimentar de proporção, além do registro de operações entre frações como a soma e também a multiplicação. Esse autor ainda nos mostra que o modo operatório dos egípcios era diferente do atual. Eram mantidos os numeradores constantes e os denominadores variáveis. O termo *fração* se restringia a frações unitárias, isto é, frações com numerador constante e igual a um. “Assim, escreviam $\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$ no lugar de $\frac{2}{5}$ [...]” (CAJORI, 2007, p. 38).

Destaco de Cajori (2007) que as frações que não podiam ser escritas com o numerador um eram escritas desdobradas na soma de frações de numerador um. O costume era escrever o denominador com um ponto em cima. E para representar qualquer fração pela soma de frações unitárias usava-se uma tabela dada no papiro de Ahmes, em que todas as frações da forma $\frac{2}{2n+1}\ com\ cada\ n\ \epsilon\ [1\ ,49]$ eram reduzidas à soma de frações unitárias.

Ainda segundo o autor citado acima esse povo também tinha uma excelente aproximação de $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604\ ...$, na forma fracionária, já que não tinham conhecimento dos irracionais.

[5] O Rei Sésotris dividiu toda a terra egípcia entre os egípcios a fim de arrecadar impostos sobre a terra. E, para cada pessoa de quem o Nilo tirasse um pedaço de terra, o imposto era diminuído proporcionalmente à perda.

[6] Em 1700 a. C. foi copiado de uma fonte remotamente datada de 3400 a. C. (CAJORI, 2007).

2.3 Na Grécia

No início do século VII a. C., com o início das atividades mercantis, desenvolveu-se na Grécia um senso especulativo acerca do conhecimento, em particular, da matemática, que, segundo Vasconcelos (2007), era uma preocupação com a generalização e com a especulação sobre a natureza dos números.

Na Grécia temos a fração como medida, como razão, como proporção. Esta última, a proporção, teve por base a música, mais precisamente um instrumento chamado monocórdio, estudado pelos Pitagóricos[7].

> O estudo da música e as relações matemáticas das notas musicais levaram os Pitagóricos a considerar razões entre inteiros, que representariam razões entre os comprimentos das cordas dos instrumentos musicais. Perceberam que a relação entre uma nota musical e a mesma nota musical uma oitava acima era de dois para um, em termos de comprimento de corda vibrante. (VASCONCELOS, 2007, p. 23).

Segundo Cajori (2007), nesta sociedade as frações não eram chamadas de números. Pois a palavra *número* na Grécia era entendida como *inteiro positivo.* Assim, os números eram descontínuos enquanto as magnitudes (grandezas) eram contínuas.

> As frações eram denotadas primeiro escrevendo o numerador marcado com um acento, a seguir o denominador marcado com dois acentos e escrito duas vezes. No caso das frações com a unidade para numerador, o α’ era omitido e o denominador escrito uma só vez. (CAJORI, 2007, p. 90).

Utilizando o sistema de numeração grego, destaco dois exemplos de representação de frações.

$$\lambda'\beta'\mu\varepsilon''\ \mu\varepsilon'' = \frac{32}{45}$$

$$\mu\theta'' = \frac{1}{49}$$

Godefroy (1997) salienta que Eudoxo (408-355), membro da academia platônica, redefine o número, como sendo a relação entre duas grandezas, ou seja:

[7] Seguidores da Escola que se desenvolveu numa colônia grega no sul da península Itálica. Tinham um intenso e peculiar interesse pela matemática, mas principalmente pela geometria.

“Trata-se de comparar dois números $x = \frac{a}{b}$ $e\ y = \frac{c}{d}$ " (*ibid.,* p 51), usando o ancestral do m.m.c., para reduzir as duas frações ao mesmo denominador.

Temos, ainda, segundo Godefroy (1997), a fração como proporcionalidade, no trabalho de quadratura do triângulo retângulo.

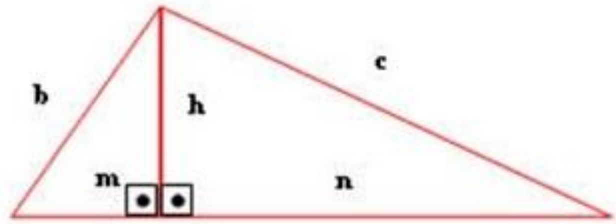


Figura 1 – Proporcionalidade na semelhança de triângulos

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m}$$

2.4 Em Roma

Os romanos utilizavam uma espécie de ábaco para calcular. E nesse ábaco podiam representar inclusive algumas frações, bem como, a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão das mesmas. Este processo é descrito por Cajori (2007) nas páginas 105 e 106 como se estivessem utilizando uma calculadora. Segundo este autor, não se deve esperar muito mais que isso, devido ao desdém dos romanos para com qualquer matemática que não fosse prática.

2.5 Na China

Para Cajori (2007), os chineses, em 1100 a. C., já utilizavam as frações. Podemos verificar isso no Chou-Pei[8]. Nele encontramos a área do triângulo como sendo $\frac{1}{2} \times b \times h$, além de área de círculos e trapézios. Essa forma de representar a área do triângulo apresenta vestígios de que os racionais eram utilizados pelos chineses por volta de 1100 a. C., com a função de um operador multiplicativo.

[8] Publicação anônima, segundo Cajori, escrita provavelmente muito antes do sec. II a. C.

Ainda, segundo Cajori (2007), no que diz respeito à aritmética utilizada em transações mercantis podíamos encontrar frações como:

> Porcentagem e proporção, divisão proporcional, raiz[9] quadrada e cúbica de números. Certas partes exibem uma preferência por frações unitárias. Divisão por uma fração é feita invertendo a fração e multiplicando, porém as regras de operações são geralmente estabelecidas em linguagem obscura. (*ibid.*, p. 116)

2.6 Na Índia

Alguns séculos mais tarde, por volta do ano 600, foram encontrados vários problemas no trabalho do hindu Brahmagupta, envolvendo raciocínio de medida, de parte-todo e várias operações com esses números. Cajori (2007) relata e exemplifica com as relações métricas nos triângulos retângulos e em cálculos de áreas.

O tratado *Clássico Aritmético de Chang Ch'iu-Chien* do século VI, que é um comentário do Chou-pei, segundo Cajori (2007), aborda problemas sobre proporção através da semelhança de triângulos.

Em um dos manuscritos do S'Ulvasutras[10] aparece a construção geométrica da fração e encontra-se uma curiosa expressão para $\sqrt{2}$, aproximado com precisão de 5 casas , como sendo $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{3\times 4\times 34}$. O que me chama atenção aqui, é que as frações são todas unitárias (de numerador um). (CAJORI, 2007).

Na época de desenvolvimento das navegações supõe-se ter começado uma troca de informações tanto entre povos orientais quanto entre povos ocidentais e entre ocidentais e orientais também. Uma das justificativas para essa afirmação é dada por Cajori (2007) "As frações sexagesimais aparecem no *Almagesto de Ptolomeu* no ano de 130 d. C. [...] A origem Babilônica[11] das frações sexagesimais usadas pelos hindus não é negada por ninguém." (p. 140).

---

[9] Aqui as raízes não são consideradas números irracionais, tem-se apenas aproximações na forma racional.

[10] O S'Ulvasutras foi o primeiro período da história da matemática hindu e terminou por volta de 200 d. C. (CAJORI, 2007).

[11] Tábuas babilônicas datadas de 1600 a 2300 a. C.

Na aritmética de Bakhshâli, por volta do séc. XII, a forma de operar com os racionais já abrangia os inteiros. Como podemos notar na citação de Cajori (2007) abaixo:

> Nas frações, o número é escrito sobre o denominador sem a linha divisória. Os inteiros eram escritos como frações de denominador 1. Ou seja, Nas frações mistas a parte inteira era colocada acima da fração. Assim $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix} = 1\frac{1}{3}$. [...] A adição era indicada por ***yu***, abreviação de ***yuta***. (CAJORI, 2007, p. 144).

Destaco um exemplo apresentado por Cajori : “Pha $12 \begin{matrix}5\\1\end{matrix} \quad \begin{matrix}7\\1\end{matrix} \quad yu$ significava na nossa linguagem atual $\frac{5}{1}+\frac{7}{1}=12.$" (*ibid.,* p.144).

3 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Como foi explicitado no capítulo anterior, em nossa contextualização histórica encontramos alguns registros de sentidos e significados ligados ao número racional e sua representação fracionária e também como se desenvolveram esses conhecimentos. Esses sentidos são abordados mais detalhadamente no texto de David e Fonseca (1997), que escrevem sobre a variedade de perspectivas envolvidas quando trabalhamos com os números racionais. Lopes (2008) nos fala sobre as frações e sua importância, trazendo motivos para manter este conteúdo no currículo do Ensino Fundamental. Também Romanatto (1999) traz contribuições neste campo, como se vê abaixo.

> O número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos. (p. 37)

3.1 O que é Fração

Começo pelo conceito de medir (contar). Este é equivalente a “[...] comparar duas grandezas de mesma espécie [...]” (CARAÇA, 2003 p. 29). Mas, além disso, quando se fala em medição, para uma melhor compreensão e para que essa medição realmente sirva ao seu propósito é necessário eleger um parâmetro, uma referência. “Há, portanto, o problema de medida, três fases distintas: 1 – escolha da unidade; 2 – comparação com a unidade; e 3 – expressão do resultado dessa comparação por um número." (CARAÇA, 2003, p. 30).

Comparando *um certo* segmento que não comporta um número inteiro de vezes a medida unitária temos uma fração da unidade, somente uma parte dela é necessária para completar a medida do tal segmento.

Coloco para contemplação dois exemplos retirados de Caraça (2003, p. 33-34).

Exemplo 1:

O segmento $\overline{AB}$ medido com a unidade $\overline{CD} = u$, mede 4. Dividindo a unidade $\overline{CD}$ em 3 partes iguais e tomando como nova unidade uma dessas partes é possível considerar dois aspectos:

1- A medida de $\overline{AB}$ considerando a terça parte de $\overline{CD}$ como unidade é 12;

2- A medida de $\overline{AB}$ considerando $\overline{CD} = u$ como unidade é tanto 4 unidades *u,* quanto 12 terças partes de *u.*

Ou seja, o resultado pode ser expresso com o número 4 ou com a razão (quociente) $\frac{12}{3}$.

Exemplo 2:

O segmento $\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. E agora, como fazer para exprimir ainda numericamente a medição de $\overline{AB}$ utilizando o segmento $\overline{CD}$ como unidade?

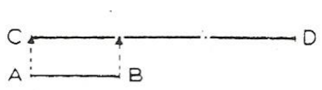
Divide-se $\overline{CD}$ num número de partes iguais suficientes para que cada uma delas caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$, conforme a figura. A medida de $\overline{AB}$ em relação à nova unidade é 11. "[...] essa medida é dada pela razão dos dois números 11 e 3. Mas essa razão não existe em números inteiros, visto que o número 11 não é divisível por 3". (CARAÇA, 2003, p. 29)

Chega-se assim a uma encruzilhada, onde se pode seguir por dois caminhos: ou renunciamos a ação de medir o segmento $\overline{AB}$ do exemplo 2. Ou complementamos o conjunto que já temos de maneira que ele passe a comportar esses casos. Em casos como esse segundo "se queremos resolver a dificuldade, devemos criar um novo campo numérico, de modo a reduzir essa impossibilidade." (CARAÇA, 2003, p. 35)

Esse conjunto aperfeiçoado vem a ser chamado de Conjunto dos Números Racionais[12]. E obedece a seguinte definição:

[12] "O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é o conjunto das frações ordinárias, mas sim o conjunto das quantidades numéricas que elas representam; ou seja, $\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações ordinarias submetidas à seguinte noção de igualdade: sendo a, b, A, B números inteiros com b e B não-nulos, teremos que a/b=A/B quando e só quando aB=Ab." (RIPOLL, RIPOLL e SILVEIRA, 2006, p. 54)

Dados:



Tal que $\overline{AB} = m$ e $\overline{CD} = u = n$. Tem-se $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$. Ao número $\frac{m}{n}$ chamamos de fracionário.

Tenho aí meu objeto de estudo, a fração. É, portanto, um número racional (ou melhor, a representação de uma certa quantidade numérica) e n é, obviamente, diferente de zero. Esse novo conjunto numérico tem duas vantagens que me chamam muita atenção. São elas: “1- É possível exprimir a medida dum segmento tomando outro segmento como unidade; 2- A divisão de números inteiros m e n agora pode exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$” (CARAÇA, 2003, p.36-37).

E, ainda mais do que essas duas vantagens, o campo racional “constitui uma generalização dos inteiros” (CARAÇA, 2003, p.37). E, desta forma, tem todas as propriedades que o conjunto dos inteiros tem.

Mas, assim como ouve a crítica aos Inteiros, há uma crítica a esse campo numérico: “[...] existe sempre uma alíquota de $\overline{CD}$ que seja parte $\overline{AB}$?” (CARAÇA, 2003, p.48). Essa crítica provocou, como já era de se esperar, a ampliação do campo numérico, mas esse é uma problema que não pretendo discutir no âmbito deste trabalho.

Para finalizar esta seção, onde procurei tratar mais formalmente da Fração, retomo minha garimpagem histórica, mas, desta vez, ressaltando uma época em que o pensamento matemático estava mais voltado para explicações formais e modelos abstratos. Nesta época os números já não eram entendidos apenas em termos de sua utilidade e aplicação e matemáticos importantes como Cantor e Dedekind desenvolvem um novo campo teórico – a teoria dos conjuntos.

A base da matemática vem abalar-se no início do século XX com a *Crise dos Fundamentos*[13]. O problema recai sobre o conceito de número que aceitávamos até o final do século XIX. Tínhamos com clareza, primeiramente o uso desse conceito para a contagem através de uma relação biunívoca de qualquer conjunto para com o conjunto dos números naturais. Com a necessidade provocada pela evolução da

[13] Expressão retirada de Godefroy (1997, p.127).

matemática, as partições são incorporadas. E posteriormente o mesmo acontece com os números negativos e com o zero. Mas nenhuma dessas evoluções demorou mais ou foi mais penosa que a árdua tarefa de transpor a barreira dos racionais para a aquisição do conhecimento dos números reais. Nesta época Cantor vai tentar encontrar uma saída para a *crise dos fundamentos*, com sua teoria de conjuntos. Dentre as várias contribuições teóricas de Cantor, ressalto que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável através de uma bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$.

3.2 Os subconstrutos

Utilizam-se bolos, pizzas e barras de chocolate para apresentar exemplos e explicações do conceito e das operações com frações. Começando a falar de algo assim, Lopes (2008) destaca das obras de Behr (1983) e Vergnaud (1983) a ideia de que a palavra fração está relacionada a uma diversidade de sentidos. Lopes chega a referir-se a frações como “[...] um ‘megaconceito’, constituído (construído) por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito.” (*ibid.*, p.8). Assim, optei por dedicar esta seção para falar dos subconstructos, dada a reincidência do uso deste termo entre teóricos que tratam do assunto FRAÇÕES.

A palavra subconstruto é utilizada, pelos autores, como sinônimo para a palavra ‘significado’ e também para a palavra ‘sentido’. E dessa maneira será utilizada por mim neste trabalho.

Em David e Fonseca (1997), no texto intitulado *Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária* encontrei algumas referências a essa questão. Nele são apresentadas 4 abordagens (subconstrutos) do número fracionário. 1- Como medida, 2- Como quociente, 3- Como razão e 4- Como operador.

Podemos observar que em Silva *et al* (2000) encontramos outras duas abordagens. Os autores destacam os subconstrutos indicados por Kieran (1976)[14]:

> [...] 1- frações ordinárias [...], 2- frações decimais [...], 3- Classes de equivalência [...], 4- razões expressas na forma $\frac{p}{q}$ [...], 5- operadores

[14] Autor de: On Mathematical cognitive and instructional foundations of rational number.

> multiplicativos [...], 6- quocientes de divisões na forma $x = \frac{p}{q}$, 7- medidas ou pontos numa reta numérica. (SILVA *et al,* 2000, p.17),

e, na mesma linha, os indicados por Behr (1983) “[...] 1- parte do todo comparado, 2- um decimal, 3- uma razão, 4- uma divisão indicada (quociente), 5- um operador e 6- uma medida de quantidades contínuas e discretas.” (SILVA *et al*, 2000, p. 16).

Em David (1997) encontramos quatro dos subcontrutos acima, porém mais esmiuçadas. No primeiro caso, referindo-se ao subconstruto de ‘medida’ “[...] a representação simbólica é concebida como um *bloco único* [...] e o tratamento dado a essas frações já se reporta, de uma maneira geral, à idéia de comparação da parte com o todo.” (*ibid.*, p. 57); no segundo caso a divisão indicada, tem-se neste caso o subconstruto ‘quociente’ “[...] surge como uma estratégia para se resolver um problema com a ideia de partilha.” (*ibid.*, p. 61); o terceiro subconstruto é a razão, “[...] uma razão é uma expressão da relação entre os elementos de um par ordenado de números, quantidades ou grandezas.” (*ibid.*, p. 62), expressando um *índice comparativo.* E por último a fração como operador, deste eu não tratarei neste trabalho.

Segundo Lopes (2008) é unanimidade entre os especialistas da área de educação matemática, que “[...] não é possível isolar cada uma das ideias envolvidas com as frações e suas interpretações [...]” (*ibid.*, p. 9). E ainda, que a fração deve ser mais bem trabalhada no currículo, onde “[...] seu ensino é essencial e inegociável.” (*ibid.*, p. 20). Mas, “[...] o modo como se apresenta para os alunos tal tópico tem se revelado na maioria das vezes como um obstáculo para a sua plena compreensão.” (ROMANATTO, 1999, p. 37).

As abordagens “[...] explicitam a necessidade de estabelecer ligações existentes entre os diversos subconstructos que formam esse conceito, para melhor desenvolver sua compreensão.” (SILVA *et al*, 1997, p. 17).

> Optando por um tratamento mais conceitual, entretanto vamo-nos deparar com a necessidade de refletir sobre as diversas idéias associadas à representação fracionária do número racional e de selecionar modelos apropriados e oportunos que confiram sentido à sua abordagem. (DAVID, 1997, p. 56).

Bertoni (2008) também fala sobre a relevância do trabalho com frações e da sua necessidade para a ampliação dos conceitos envolvendo os números racionais, assim como os subconstrutos já mencionados.

3.3 Sobre quando abordar o tema

Segundo Lopes (2008) “[...] o uso direto das frações tende a se tornar cada vez mais raros.” (p. 5). Em seguida, argumenta que não há mais aplicações. O que é reafirmado por Sant’Anna, Bittencourt e Olsson (2006), que se apóiam nos PCN’s para escrever um artigo onde dizem que os números decimais estão mais presentes em situações do dia-a-dia. E, assim, o papel dos números fracionários se reduz a pré-requisito para conteúdos posteriores.

Isso seria passível de contestação por parte dos educadores mais tradicionais. Mas não é, pois mesmo que os primeiros estudos com os números racionais, em relação aos conceitos e às propriedades, fossem somente objetivando essa função de mero pré-requisito, ainda assim, seria relevante sua abordagem.

> Na perspectiva da própria *Matemática*, serão justamente estes primeiros estudos com os números racionais, particularmente em sua forma fracionária, que fundamentarão o trabalho com as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino fundamental. (DAVID, 1997, p. 56)

Justamente contrariando Sant’Anna, Bittencourt e Olsson (2006) e Lopes (2008) e apoiada no texto de David (1997) que estou desenvolvendo este texto, considerando que ainda há importantes aplicações de frações. Além disso, muitos processos necessitam deste conteúdo e de suas representações e o desenvolvimento cognitivo proporcionado por ele é muito importante.

No que tange a aspectos psicológicos:

> O trabalho com os números racionais surge como uma oportunidade privilegiada para promover o desenvolvimento e a expansão de estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual. (DAVID, 1997, p. 56).

David também nos traz uma tendência no ensino de frações: “Muitas propostas já sugerem um tratamento mais moderado das operações e um investimento maior e mais cuidadoso, no aspecto conceitual.” (DAVID, 1997, p. 56).

Não é justo com nossos alunos que este saber seja abordado tão pontualmente e somente em algumas séries do ensino fundamental. Lopes (2008) nos expõe uma proposta de ensino na qual:

> O objetivo, entre outros, é o desenvolvimento deste sentido numérico em níveis progressivos de complexidade, de modo a poder ser explorado em todas as séries do ensino fundamental (*ibid.*, p. 11).

Lopes (2008) nos impõe, por outro lado, uma barreira, expressa pela dificuldade de contextualizar este conteúdo para as crianças. Com adultos seria muito mais fácil[15]. Parece-me que ele induz a pensar sobre o nível de escolarização adequado para um melhor aprofundamento deste conteúdo.

3.4 Sobre como iniciar a abordagem

Passo agora a tratar a questão do ensino de frações, sob o ponto de vista metodológico.

> Um caminho promissor para o processo de ensinar e de aprender os números racionais seria o professor eleger atividades, exemplos ou situações problema que pudessem concretizar os mais variados contextos nos quais tais números fossem empregados. (ROMANATTO, 1999, p. 37).

O que se vê nas propostas de ensino é uma incessante busca por contextualização, numa tentativa de fazer sentido ao aluno, para que este entenda melhor o conteúdo. Para Romanatto (1999) a intenção é a melhor possível, mas também vê que o objetivo não vem sendo alcançado. Lopes (2008) também reforça esta posição quando afirma: “A contextualização é inadequada, crianças deste início de século estão distantes de atividades técnicas específicas.” (*ibid.,* p. 7).

[15] Lopes (2008) cita no artigo alguns contextos em que aparecem frações no mundo adulto: capítulos da Constituição Federal dentre outras leis; cálculos de heranças; partilha de bens; indenizações trabalhistas; além dos tradicionais livros de receitas.

> Quando perguntamos a um aluno: o que representa $\frac{3}{4}$; 0,75 ou a 75% podemos estar nos referindo tanto a relações iguais ou distintas como a contextos iguais ou distintos [...] São nesses diferentes contextos que devem ser construídas, adquiridas ou investigadas as mais diferentes relações que fundamentarão as noções, princípios e operações envolvendo esse tipo de número. (ROMANATTO, 1999, p. 40-41).

Lopes (2008) destaca de Freudenthal (1973) uma importante consideração sobre este tema:

> [...] a matemática é uma atividade humana, surge como materialização da realidade, logo a aprendizagem matemática deve originar-se dessa realidade, isto não significa mantê-la conectada apenas aos fenômenos do mundo real [...]. (FREUDENTHAL, 1973 *apud* LOPES, 2008, p. 11).

Aproveito aqui para destacar a palavra *apenas* da citação anterior, onde o autor afirma que a realidade é importante e que sempre que possível devemos utilizá-la. Mas se esse não for o caso, não há porque ficar inventando histórias mirabolantes. Há que se utilizar o abstrato.

Bertoni (2008) apresenta um relato de três experiências, uma com material manipulativo, outra fazendo uso de figuras geométricas com posterior reflexão abstrata e, por último, usando problemas comuns do dia-a-dia. Nos seus trabalhos, através de seus vinte anos de experiência, essa autora (conforme ela própria cita no artigo) acabou convergindo para a resolução de situações matemáticas reais, que tem significado para o aluno.

> Na verdade, tanto o material manipulativo anteriormente utilizado (fichas e canudos), quanto às figuras geométricas associadas a abstrações reflexivas nos causavam certa inquietação, por parecerem de certo modo artificiais [...]. (BERTONI, 2008, p. 220).

4 AS CONCEPÇÕES FRACIONÁRIAS NOS LIVROS DIDÁTICOS

O foco desse levantamento temático dos livros didáticos fundamenta-se em quatro questões que considero importantes: a forma como o livro introduz o conteúdo, se já traz a definição diretamente ou se começa com algum recurso didático ou aplicação; o campo de generalização dos conceitos, se ele trata de casos gerais ou se enfatiza apenas exemplos particulares; a linguagem utilizada pelo autor, se ela é rebuscada e excessivamente formal ou se utiliza linguagem mais acessível ao aluno; e, finalmente, os tipos de exercícios apresentados, se eles são mecânicos ou se proporcionam reflexão.

4.1 Coleção 1 – A conquista da matemática - 2009

No livro correspondente ao sexto ano o autor separa os números racionais em dois capítulos: “A representação fracionária dos números racionais” e “A representação decimal dos números racionais”. Começa o primeiro capítulo dando exemplos de situações onde encontramos a representação fracionária e tenta mostrar para que servem as frações.

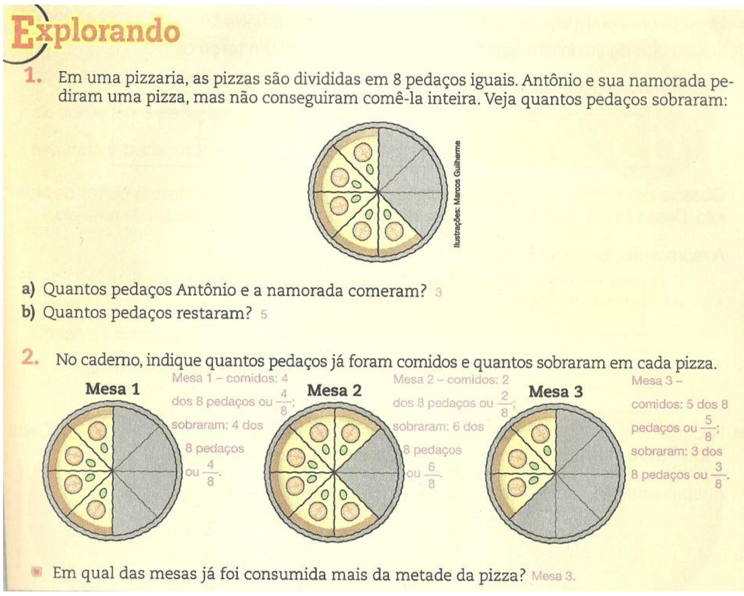


Figura 2 – Situação introdutória para noção de número fracionário

Como se vê na figura acima, o autor explora as clássicas situações com pizzas ou barras de chocolate, já comentadas nos referenciais teóricos. Também apresenta uma informação equivocada sobre a história das frações, afirmando que os números racionais apareceram pela primeira vez no Egito. O conteúdo, de modo geral, é apresentado através de situações problema, expressas por figuras que se apóiam na ideia de superfície, para explorar o subconstruto parte-todo.

Em seguida temos uma atividade didática abordando o mesmo subconstruto. Trata-se de entregar tiras de papel aos alunos e pedir que eles dobrem cada fita em duas partes iguais, após em três partes iguais, e assim sucessivamente. O conceito de fração dado pelo livro do sexto ano enfatiza o subconstruto referente à medida, ou seja, apresenta prioritariamente atividades onde são estabelecidas relações parte-todo.

Após, ainda no capítulo referido acima, são colocados mais exemplos e, na sequência, o autor direciona para a resolução de problemas, sem um estudo prévio sobre os algoritmos ou as propriedades envolvidas. Nessas situações são utilizadas representações geométricas para auxiliar no raciocínio e na resolução dos exercícios.

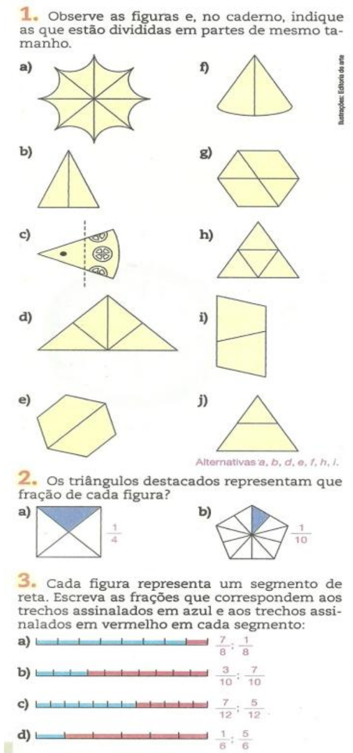
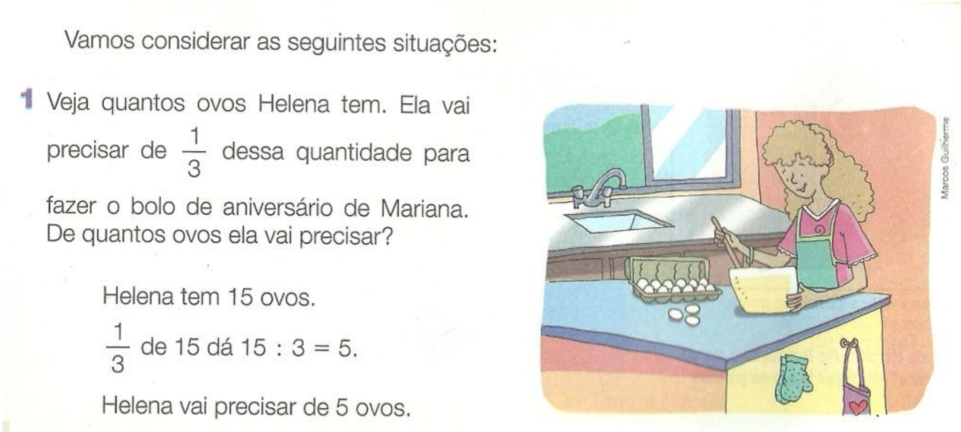


Figura 3 – Exercícios que recorrem à representação geométrica

Observo que, apesar das explicações apresentadas neste capítulo só tratarem do subconstruto de medida, os exercícios incluem situações onde as frações funcionavam como operador, como no exemplo a baixo.



Vamos considerar as seguintes situações:

1 Veja quantos ovos Helena tem. Ela vai precisar de $\frac{1}{3}$ dessa quantidade para fazer o bolo de aniversário de Mariana. De quantos ovos ela vai precisar?

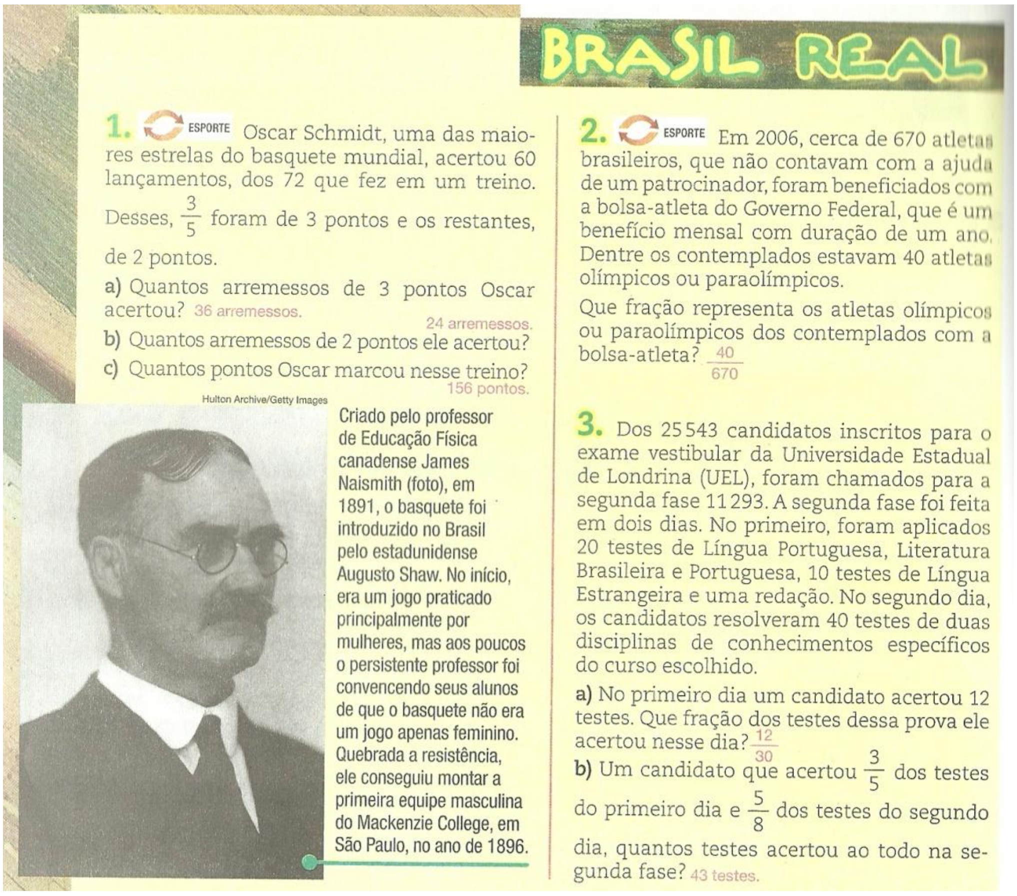
Helena tem 15 ovos.

$\frac{1}{3}$ de 15 dá 15 : 3 = 5.

Helena vai precisar de 5 ovos.

Figura 4 – Situação matemática envolvendo operador multiplicativo

Os exercícios trazem a realidade dos alunos e provocam uma reflexão acerca do conteúdo e até mesmo dos assuntos transdisciplinares abordados.



BRASIL REAL

1. ESPORTE Oscar Schmidt, uma das maiores estrelas do basquete mundial, acertou 60 lançamentos, dos 72 que fez em um treino. Desses, $\frac{3}{5}$ foram de 3 pontos e os restantes, de 2 pontos.

a) Quantos arremessos de 3 pontos Oscar acertou? 36 arremessos.

b) Quantos arremessos de 2 pontos ele acertou? 24 arremessos.

c) Quantos pontos Oscar marcou nesse treino? 156 pontos.

Hulton Archive/Getty Images

Criado pelo professor de Educação Física canadense James Naismith (foto), em 1891, o basquete foi introduzido no Brasil pelo estadunidense Augusto Shaw. No início, era um jogo praticado principalmente por mulheres, mas aos poucos o persistente professor foi convencendo seus alunos de que o basquete não era um jogo apenas feminino. Quebrada a resistência, ele conseguiu montar a primeira equipe masculina do Mackenzie College, em São Paulo, no ano de 1896.

2. ESPORTE Em 2006, cerca de 670 atletas brasileiros, que não contavam com a ajuda de um patrocinador, foram beneficiados com a bolsa-atleta do Governo Federal, que é um benefício mensal com duração de um ano. Dentre os contemplados estavam 40 atletas olímpicos ou paraolímpicos.

Que fração representa os atletas olímpicos ou paraolímpicos dos contemplados com a bolsa-atleta? $\frac{40}{670}$

3. Dos 25 543 candidatos inscritos para o exame vestibular da Universidade Estadual de Londrina (UEL), foram chamados para a segunda fase 11 293. A segunda fase foi feita em dois dias. No primeiro, foram aplicados 20 testes de Língua Portuguesa, Literatura Brasileira e Portuguesa, 10 testes de Língua Estrangeira e uma redação. No segundo dia, os candidatos resolveram 40 testes de duas disciplinas de conhecimentos específicos do curso escolhido.

a) No primeiro dia um candidato acertou 12 testes. Que fração dos testes dessa prova ele acertou nesse dia? $\frac{12}{30}$

b) Um candidato que acertou $\frac{3}{5}$ dos testes do primeiro dia e $\frac{5}{8}$ dos testes do segundo dia, quantos testes acertou ao todo na segunda fase? 43 testes.

Figura 5 – Exercícios que integram questões do cotidiano

Também são explorados algoritmos; propriedades tais como comparação de frações, frações equivalentes e frações irredutíveis; e nomenclaturas específicas e adequadas das frações, sempre utilizando situações para iniciar a abordagem.

Figura 6 – Exemplo de uma situação matemática

O livro utiliza muitos exemplos sem deixar a generalização de lado. O desenvolvimento do assunto acontece numa linguagem de fácil compreensão para os alunos. Podemos notar que o autor considera a maturidade cognitiva dos alunos ao fazer as generalizações, pois no primeiro volume, para o sexto ano, as generalizações ocorrem em linguagem escrita, com frases da linguagem falada. Já no sétimo ano o autor faz uso de linguagem matemática para essas generalizações. Por exemplo, a figura 7 foi retirada do livro de sexto ano, e a figura oito do livro de sétimo ano.

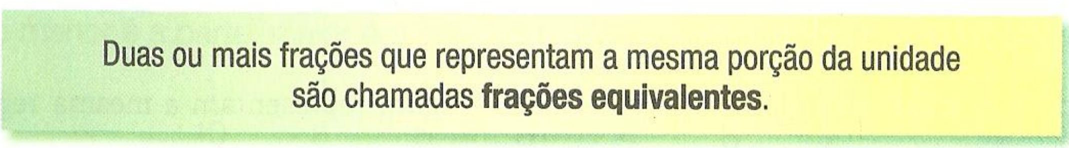
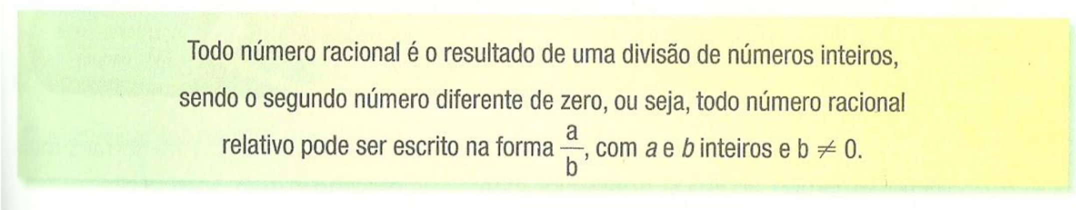

Duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas **frações equivalentes**.

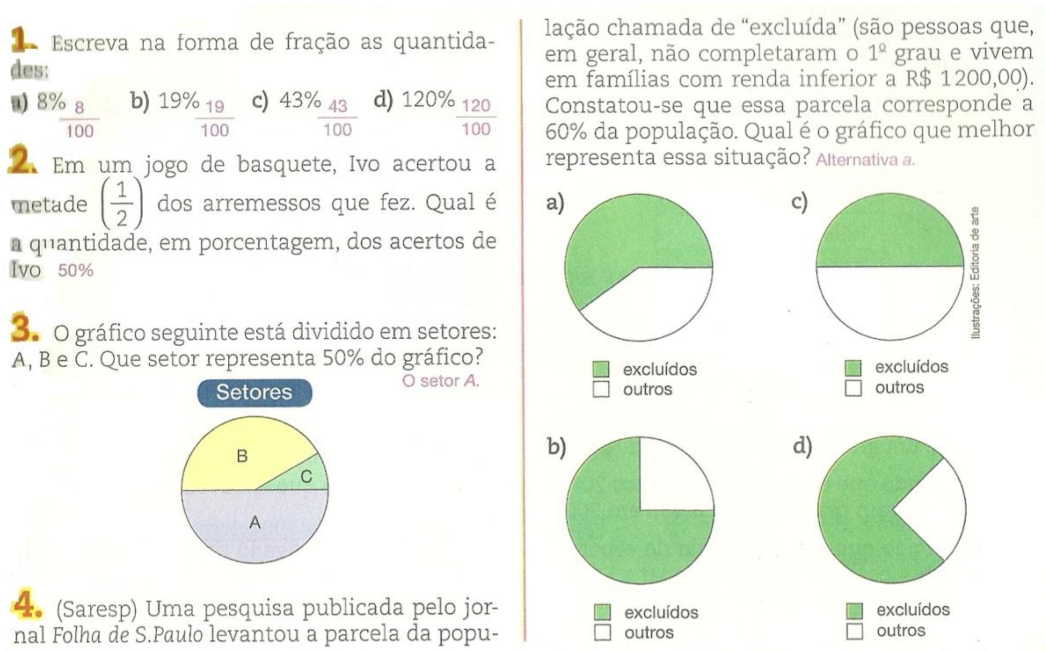
Figura 7 – Definição de conceitos no livro do 6º ano



Todo número racional é o resultado de uma divisão de números inteiros, sendo o segundo número diferente de zero, ou seja, todo número racional relativo pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

Figura 8 – Definição de conceitos no livro do 7º ano

Na seção *A Forma Fracionária dos Números Racionais,* ainda no capítulo do sexto ano, o autor aborda a fração relacionando-a a porcentagem. Para tanto, faz uso de problemas norteadores e também faz uso de gráficos nos exercícios.



1. Escreva na forma de fração as quantidades:

a) 8% $\frac{8}{100}$ b) 19% $\frac{19}{100}$ c) 43% $\frac{43}{100}$ d) 120% $\frac{120}{100}$

2. Em um jogo de basquete, Ivo acertou a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ dos arremessos que fez. Qual é a quantidade, em porcentagem, dos acertos de Ivo 50%

3. O gráfico seguinte está dividido em setores: A, B e C. Que setor representa 50% do gráfico? O setor A.

4. (Saresp) Uma pesquisa publicada pelo jornal *Folha de S.Paulo* levantou a parcela da população chamada de "excluída" (são pessoas que, em geral, não completaram o 1º grau e vivem em famílias com renda inferior a R$ 1200,00). Constatou-se que essa parcela corresponde a 60% da população. Qual é o gráfico que melhor representa essa situação? Alternativa a.

Figura 9 – Problemas envolvendo porcentagem e gráficos

O livro do sétimo ano é escrito da mesma forma que o livro de sexto ano. Em todos os volumes desta coleção, a maioria dos conteúdos é introduzida e desenvolvida com base na resolução de problemas.

No sétimo volume as frações são vistas como parte de um conjunto numérico, o conjunto dos racionais, enquanto no livro do sexto ano elas eram vistas como uma forma de número qualquer, sem mencionar a que conjunto elas pertenciam, esta menção é colocada somente no título principal do capítulo: A forma fracionária dos números racionais.

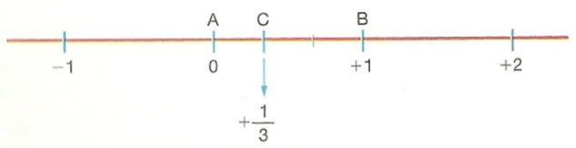
No volume do sétimo ano já encontramos os números fracionários e decimais no mesmo capítulo e relacionados entre si. O capítulo relativo ao conjunto dos racionais começa com a resolução de problemas, utiliza alguns exemplos e generaliza conceitos e propriedades.

Nesta fase o autor já relaciona o número fracionário a um ponto na reta numérica e a partir daí deixa de lado a supremacia dos problemas e utiliza várias atividades, sendo que, estas fazem os alunos refletirem sobre os algoritmos e propriedades.

Já sabemos que os números inteiros podem ser representados em uma reta numérica. O mesmo ocorre com os números racionais relativos, como veremos nos exemplos a seguir.

1 Representar na reta numérica o número racional $+\frac{1}{3}$.

Sabemos que o número $+\frac{1}{3}$ está localizado entre os números inteiros 0 e +1. Então, vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais e considerar uma dessas partes, a partir do ponto *A*, para a direita.



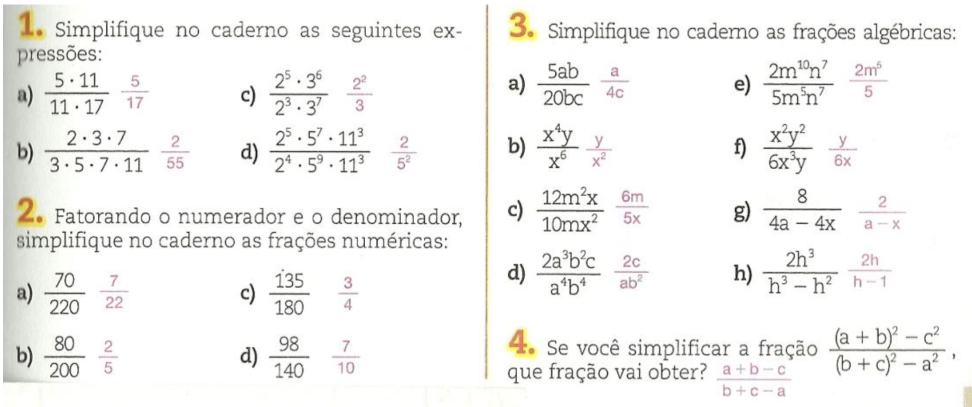
O ponto *C* chama-se **imagem geométrica** do número racional $+\frac{1}{3}$. O número $+\frac{1}{3}$ é chamado **abscissa** do ponto *C*.

Figura 10 – A fração como ponto na reta

Em capítulo posterior encontramos (ainda no volume do sétimo ano) uma parte dedicada ao subconstruto referente à razão e também à proporção. Nesse capítulo o autor mostra onde aplicar esses conceitos. Explora de maneira instigante esta personalidade da fração e faz uso de muitos exemplos e muitas aplicações. Finaliza utilizando problemas para trabalhar com os alunos.

Este volume também aborda a proporção utilizando problemas, exemplos e generalizando ao introduzir e explicar esse conteúdo. Isso acontece quando o autor passa às propriedades das proporções e também às porcentagens.

No terceiro volume desta coleção, destinado ao oitavo ano, observamos as frações como simplesmente objetos algébricos e os exercícios são repetitivos e mecânicos.



1. Simplifique no caderno as seguintes expressões:

a) $\frac{5 \cdot 11}{11 \cdot 17}$ → $\frac{5}{17}$

b) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$ → $\frac{2}{55}$

c) $\frac{2^5 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^7}$ → $\frac{2^2}{3}$

d) $\frac{2^5 \cdot 5^7 \cdot 11^3}{2^4 \cdot 5^9 \cdot 11^3}$ → $\frac{2}{5^2}$

2. Fatorando o numerador e o denominador, simplifique no caderno as frações numéricas:

a) $\frac{70}{220}$ → $\frac{7}{22}$

b) $\frac{80}{200}$ → $\frac{2}{5}$

c) $\frac{135}{180}$ → $\frac{3}{4}$

d) $\frac{98}{140}$ → $\frac{7}{10}$

3. Simplifique no caderno as frações algébricas:

a) $\frac{5ab}{20bc}$ → $\frac{a}{4c}$

b) $\frac{x^4y}{x^6}$ → $\frac{y}{x^2}$

c) $\frac{12m^2x}{10mx^2}$ → $\frac{6m}{5x}$

d) $\frac{2a^3b^2c}{a^4b^4}$ → $\frac{2c}{ab^2}$

e) $\frac{2m^{10}n^7}{5m^5n^7}$ → $\frac{2m^5}{5}$

f) $\frac{x^2y^2}{6x^3y}$ → $\frac{y}{6x}$

g) $\frac{8}{4a-4x}$ → $\frac{2}{a-x}$

h) $\frac{2h^3}{h^3-h^2}$ → $\frac{2h}{h-1}$

4. Se você simplificar a fração $\frac{(a+b)^2-c^2}{(b+c)^2-a^2}$, que fração vai obter? → $\frac{a+b-c}{b+c-a}$

Figura 11 – Exercícios algébricos e mecânicos do livro de 8º ano

O livro do nono ano não traz nada que aborde diretamente qualquer subconstruto fracionário.

4.2 Coleção 2 – Matemática: Ideias e Desafios - 2006

A edição da coleção analisada foi publicada em 2006, por esse motivo o livro ainda carrega as denominações por séries.

No volume da quinta série temos um capítulo inteiro destinado às frações. Designa exclusivamente sobre o subconstruto parte-todo. Trata dos conceitos deste número e de outros conceitos, algoritmos e propriedades ligados a ele. Outro capítulo, subsequente, tem por finalidade abordar as operações e problemas relacionados a este tema.

O autor abre o capítulo que trata de frações com uma sugestão de recurso didático para introduzir a idéia principal de parte-todo, o Tangram[16]. Além disso, ele mostra algumas aplicações deste tipo de número e recorre à contextualização histórica para dar sentido ao assunto tratado. Utiliza também a noção do subconstruto da divisão na explicação.

Há utilização de muitos exemplos e figuras representativas fazendo alusão a conjuntos contínuos, como a medida em uma corda, e discretos, como a comparação entre dois conjuntos de bolas.

---

[16] Tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) Com essas peças podemos formar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las.

Os exercícios deste capítulo são bem diversificados. Temos desde problemas difíceis, que exigem determinação do aluno e ajuda do professor até exercícios mecânicos ou braçais. Há vários exemplos de problemas envolvendo o assunto, mas não consta uma receita pronta ou um passo a passo de como resolvê-los.

Temos as propriedades colocadas sem muitos exemplos, com uma breve explicação e muitos exercícios. Em uma seção deste capítulo o autor relaciona a fração com noções de porcentagem e estatística, utilizando somente uma situação real. Após, retorna à prática de exercícios.

Em seguida temos o capítulo dos racionais que é introduzido com vários exemplos que envolvem o subconstruto da divisão. Depois de alguns exemplos encontramos generalizações. O capítulo termina fazendo uma considerável abordagem do trabalho na calculadora, quando estão envolvidos os números racionais, passando assim à forma decimal desses números, através de frações decimais, em muitos exemplos. Quanto aos exercícios, os considero muito reais e significativos, de tal forma que, suponho, fazem sentido ao aluno.

Na seção seguinte passamos à representação dos números fracionários na reta e, referente a esse subconstruto, há muitos exercícios, bem diversificados. Na sequência, o autor volta aos exemplos sem generalização.

Temos ainda um capítulo destinado à medida. Nesse aparece uma mistura de notação decimal com fracionária para desenvolver a ideia de partição e medida. Traz muito exemplos, muitas aplicações e contextualização histórica, assim como curiosidades. Os exercícios são acessíveis, com a predominância de problemas. É um capítulo bem extenso e trabalhoso.

No segundo livro, o de 6ª série, as frações aparecem dentro do capítulo dos números racionais. O autor tenta despertar o interesse do aluno com relação ao assunto, mostrando diversas aplicações dos números racionais. Introduz esse conteúdo através do subconstruto da divisão, fazendo uso de situações práticas para isso.

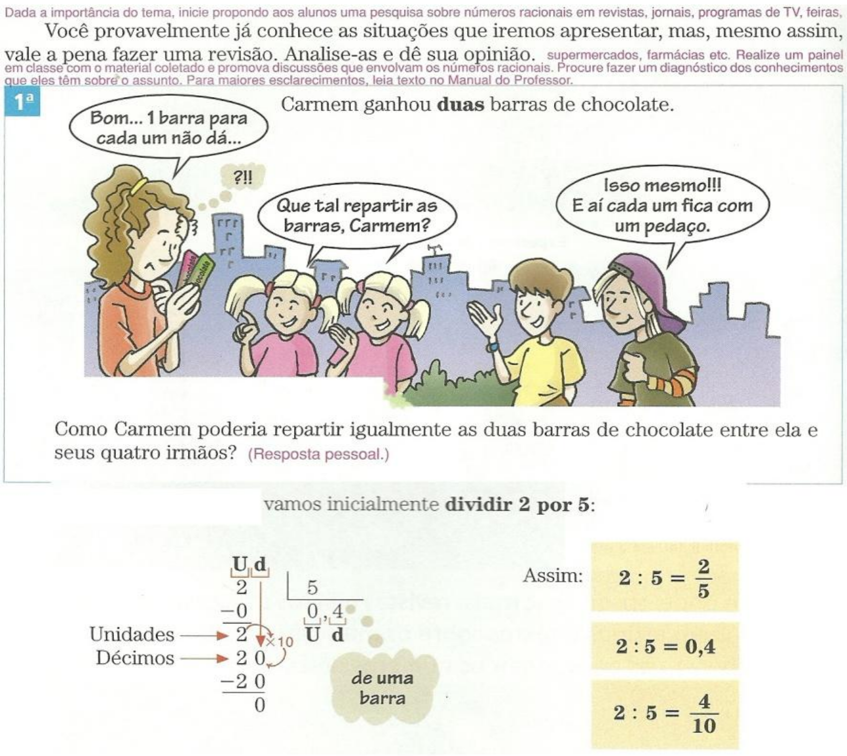


Figura 12 – A utilização do subconstruto da divisão

O autor procura deixar claro a relação existente entre o número fracionário e o número decimal, recorrendo a representações geométricas para mostrar que essas duas formas numéricas representam a mesma quantidade como é mostrado abaixo.

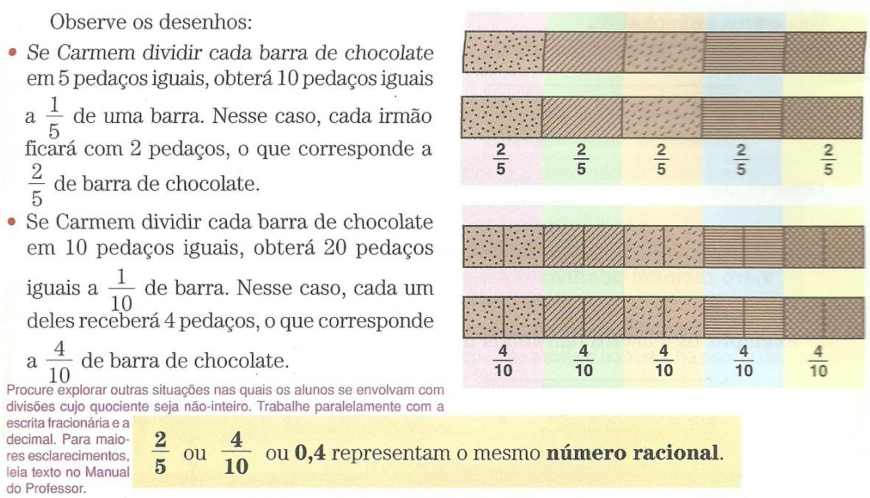
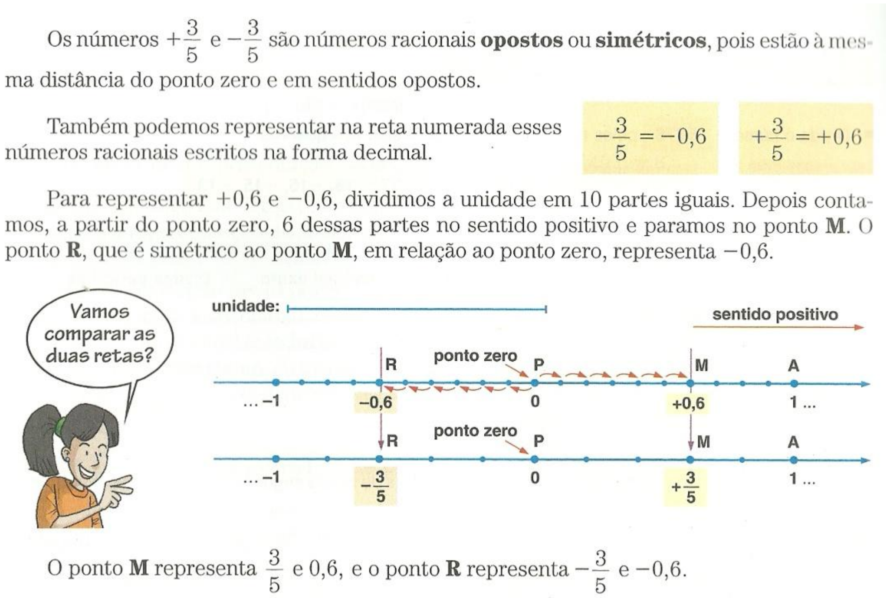


Figura 13 – Representação pictórica da situação matemática

Encontramos o diagrama de Venn quando se refere aos racionais como ampliação do conjunto numérico dos naturais, provavelmente motivado pela história evolutiva desse conjunto. Os exercícios são trabalhosos e mecânicos.

Outro subconstruto abordado é o de ponto na reta numérica



Os números $+\frac{3}{5}$ e $-\frac{3}{5}$ são números racionais **opostos** ou **simétricos**, pois estão à mesma distância do ponto zero e em sentidos opostos.

Também podemos representar na reta numerada esses números racionais escritos na forma decimal.

$-\frac{3}{5} = -0,6$ $\quad$ $+\frac{3}{5} = +0,6$

Para representar $+0,6$ e $-0,6$, dividimos a unidade em 10 partes iguais. Depois contamos, a partir do ponto zero, 6 dessas partes no sentido positivo e paramos no ponto **M**. O ponto **R**, que é simétrico ao ponto **M**, em relação ao ponto zero, representa $-0,6$.

O ponto **M** representa $\frac{3}{5}$ e 0,6, e o ponto **R** representa $-\frac{3}{5}$ e $-0,6$.

Figura 14 – Subconstruto ponto na reta

Em outro capítulo, bem separado do capítulo dos racionais, encontramos uma abordagem referente à razão e à proporção. Esse motiva, pois mostra alguns objetos parecidos que diferem em tamanho, portanto existe uma relação de proporção entre eles. A introdução do conceito de razão é feita através de situações matemáticas, já o de proporção é feito diretamente falando do conceito, sem situação norteadora ou recurso didático.

Encontramos uma sessão do capítulo de razão e proporção destinada à *possibilidade,* ou seja, à probabilidade, subconstruto relacionado em algumas das nossas referencias. Esta *personalidade* é abordada com muitos exercícios e exemplos, com explicações detalhadas, provocando reflexão no aluno. Mas, com quase nenhuma generalização ou escrita e nenhuma em linguagem matemática.

Encontramos, no volume da 7ª série, apenas uma menção ao conjunto dos racionais quando do estudo sobre os conjuntos que compõem o conjunto dos números reais. Ao fazer isso acaba revisando algumas propriedades.

Duas unidades do livro da 8ª série são destinadas ao subconstruto referente à proporcionalidade. Introduz o conteúdo diretamente com a explicação, seguido de exemplos, generalizações e muitas situações matemáticas e atividades diversificadas.

4.3 Coleção 3 – Vontade de Saber Matemática - 2009

Esta coleção possui um capítulo intitulado *Frações*. Nele desenvolve-se a ideia de parte-todo e, posteriormente, propriedades relacionadas a esse tema. O conteúdo é introduzido através de algumas aplicações, com indicação de lugares e situações onde podemos encontrar frações. Meio parágrafo é destinado à história da fração.

Uma situação problema, que tem por abordagem o subconstruto parte-todo, dá início aos trabalhos, seguida de conceitualizações e nomenclaturas. As atividades deste capítulo dão muita ênfase à representação geométrica e recorrem a ela constantemente. Há também muitos problemas reais do dia-a-dia.

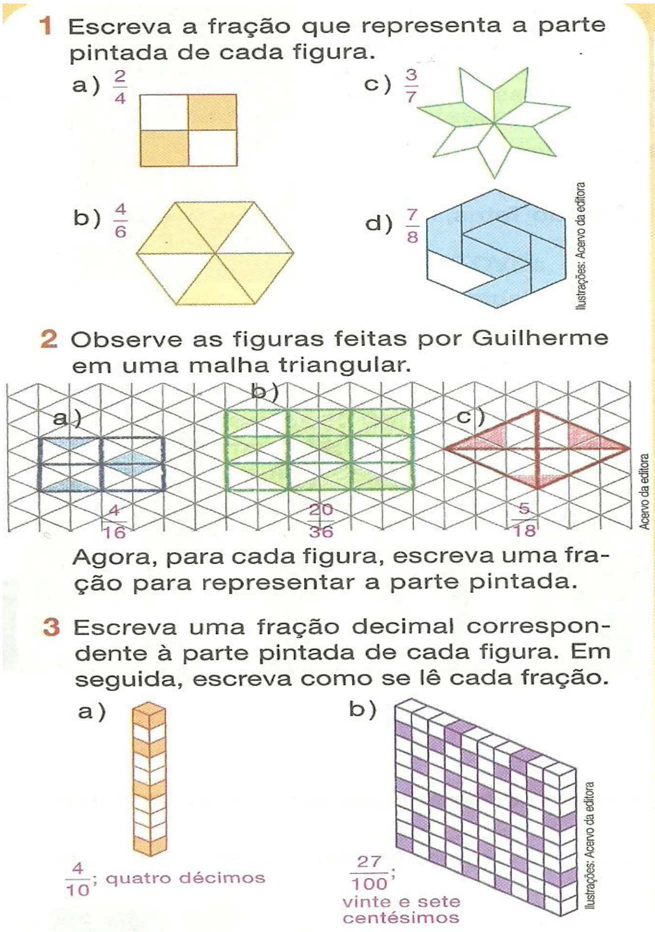
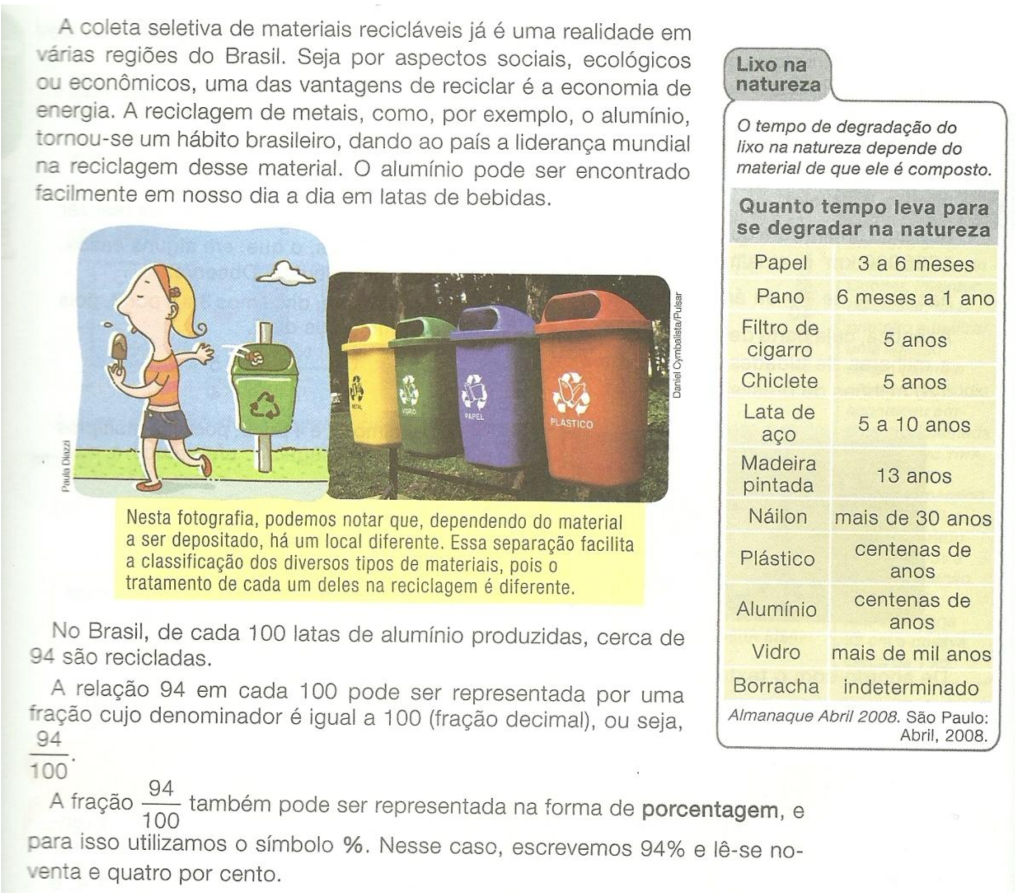


Figura 15 – Representação geométrica do subconstruto parte-todo

Encontramos uma seção relacionando frações e porcentagem. Este subconstruto é introduzido por uma situação empírica, que aborda um assunto transversal, o meio ambiente, com a separação de lixo. Tem por exercícios muitos problemas e, mais ainda, muitos exercícios que provocam a reflexão. E, enfim, no final do capítulo temos um texto sobre a história da fração no Egito.



A coleta seletiva de materiais recicláveis já é uma realidade em várias regiões do Brasil. Seja por aspectos sociais, ecológicos ou econômicos, uma das vantagens de reciclar é a economia de energia. A reciclagem de metais, como, por exemplo, o alumínio, tornou-se um hábito brasileiro, dando ao país a liderança mundial na reciclagem desse material. O alumínio pode ser encontrado facilmente em nosso dia a dia em latas de bebidas.

Nesta fotografia, podemos notar que, dependendo do material a ser depositado, há um local diferente. Essa separação facilita a classificação dos diversos tipos de materiais, pois o tratamento de cada um deles na reciclagem é diferente.

No Brasil, de cada 100 latas de alumínio produzidas, cerca de 94 são recicladas.

A relação 94 em cada 100 pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100 (fração decimal), ou seja, $\frac{94}{100}$.

A fração $\frac{94}{100}$ também pode ser representada na forma de **porcentagem**, e para isso utilizamos o símbolo %. Nesse caso, escrevemos 94% e lê-se noventa e quatro por cento.

Lixo na natureza

O tempo de degradação do lixo na natureza depende do material de que ele é composto.

Quanto tempo leva para se degradar na natureza	
Papel	3 a 6 meses
Pano	6 meses a 1 ano
Filtro de cigarro	5 anos
Chiclete	5 anos
Lata de aço	5 a 10 anos
Madeira pintada	13 anos
Náilon	mais de 30 anos
Plástico	centenas de anos
Alumínio	centenas de anos
Vidro	mais de mil anos
Borracha	indeterminado

Almanaque Abril 2008. São Paulo: Abril, 2008.

Figura 16 – Tema transversal

Em outro capítulo, o dos Números Decimais, o livro traz uma relação entre decimais e frações. Trata-se da transformação das frações em decimais e vice-versa. É uma abordagem muito sucinta, que avalio como fraca e insuficiente.

Há também três capítulos sobre medidas. Tratam separadamente de medidas lineares, superficiais e volumétricas. Considerei estes capítulos como destinados às operações numéricas, mas principalmente com números racionais. São capítulos bem extensos e trabalhados até a exaustão. Trazem questões atuais e reflexivas, em minha opinião, muito pertinentes.

O segundo volume, destinado ao 7º ano, começa falando de frações já no primeiro capítulo. São apresentadas aplicações do conteúdo. E, para minha surpresa, este livro contempla claramente três subconstrutos, o de parte-todo, o de razão e o de divisão. O subconstruto, o de medida, será abordado em subcapítulo destinado a este fim, intitulado *Números positivos e números negativos*. Neste volume temos, assim como no anterior, algumas generalizações. Há também algoritmos, propriedades, exercícios e problemas.

A linguagem utilizada pelo autor é acessível, mas, a meu ver, não muito atraente.

No livro do 8º ano, no capítulo de conjuntos numéricos, temos um subcapítulo destinado aos números racionais. Neste as frações são mencionadas com o sentido de divisão. Já nos exercícios também encontramos a ideia parte-todo.

Já no 4º volume o autor aborda noções de razão e proporcionalidade de forma curta, resumida, com poucos exercícios e explicação insuficiente.

5 ESTUDO DE CASO

A metodologia empregada em minha pesquisa foi o Estudo de Caso. Esse tipo de metodologia é muito utilizada em pesquisas na área da educação matemática.

Este trabalho está todo centrado na Escola Estadual de Ensino Médio Anne Frank, pois foi nela que surgiu a ideia e nela que se desenvolveram as práticas de investigação. Essa instituição possui uma ótima estrutura, tanto física como de recursos humanos. A equipe educacional, cooperativa e engajada, torna a escola propicia ao ensino.

Trabalhei com estudo de caso sob uma perspectiva interpretativa e pragmática. Ou seja, mostra-se o ensino e a aprendizagem da fração em termos dos subconstrutos que constituíram meu objeto de estudo, através de uma perspectiva mais geral e do ponto de vista do pesquisador. Mais precisamente, o objeto de estudo é o conhecimento que os alunos de uma escola estadual detêm com relação à fração e seus subconstrutos, ao término do ensino fundamental.

5.1 Proposta de trabalho

Sessenta alunos de oitava série, da Escola Estadual de Ensino Médio Anne Frank foram convidados[17] para realizar alguns exercícios de verificação sobre seus conhecimentos e aptidões no que se refere à fração, em turno inverso ao seu turno de aula.

A realização destes exercícios tem o propósito de descrever a situação escolar encontrada, com relação à apreensão de conhecimentos no que se refere à fração. Para análise usei as falas dos alunos em entrevista, suas respostas escritas e observações de suas falas e de seus raciocínios durante a execução dos trabalhos

[17] Apareceram somente doze dos sessenta alunos convidados.

Não pretendo modificar a situação encontrada. O que quero é compreender melhor a situação. E chamar atenção para o que há de interessante, original ou surpreendente.

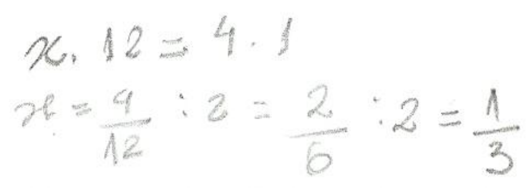
Minha principal hipótese é que o aluno, ao final do ensino fundamental, sabe reconhecer frações, mas tem dificuldades com, pelo menos, um subconstruto.

As situações matemáticas, separadas por subconstruto, que foram utilizadas no estudo, estão relacionadas abaixo, juntamente com a discussão das respostas dos alunos.

MEDIDA – PARTE-TODO

1) 4 meses representa uma parte do ano. Que fração podemos utilizar para representar essa parte?

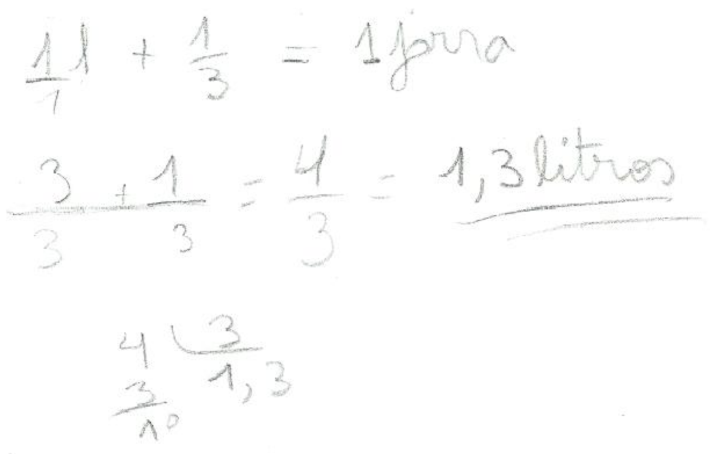
Todos os alunos responderam essa questão. A grande maioria, dez dos doze alunos, de maneira imediata. Metade desses alunos simplificou o resultado. Dois alunos utilizaram regra de três para chegar ao resultado. Como pedi que eles escrevessem o máximo que conseguissem, de forma que eu pudesse saber a maneira como eles tinham pensado, observei que um dos alunos resolveu diretamente pela regra de três, enquanto o outro, que fez uso deste recurso, não conseguiu desenvolver um raciocínio que lhe desse a resposta imediata.



2) Troque idéias com os colegas e descubra quantos litros cabem na jarra. Sabendo que nessa jarra cabe 1 litro de água, e ainda sobra $\frac{1}{3}$ *da jarra para completar. Quantos litros de água cabem nessa jarra?*

Figura 17 – Exercício 2

Na entrevista pude notar que quatro alunos erraram. E no caso de três deles foi por distração, pois queriam fazer o teste rápido, para terminar logo. O último deles não chegou a terminar a questão - encontrou o equivalente a $\frac{1}{3}$ da jarra, e deu por encerrada a resolução. Dois alunos não leram direito o desenho e não se deram conta que o $\frac{1}{3}$, na figura, era referente ao volume total da jarra e não à unidade de volume litro.



Um dos alunos nem sabia o que era $\frac{1}{3}$. Então tentou fazer alguma conta, mas não conseguiu seguir em frente e concluir.

3) Vitor e Helena partiram de Lages (SC) para um fim de semana de inverno em São Joaquim (SC), que fica a 76 quilômetros de Lages.
Em Lages, o termômetro marcava <u>1 °C</u> e <u>2 °C</u>, ou seja, entre <u>+ 1 °C</u> e <u>+ 2 °C</u>. Para sermos mais exatos, o termômetro marcava $\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}\right)$ graus Celsius acima de zero, ou seja, <u>+1,5 °C</u>. Em São Joaquim o termômetro indica uma temperatura entre 1

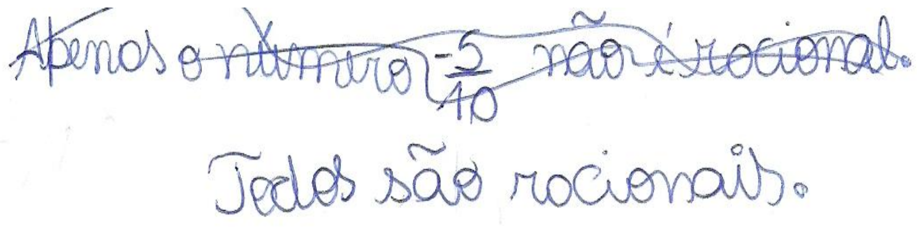
grau Celsius abaixo de zero e 2 graus Celsius abaixo de zero, ou seja, entre <u>*– 1 °C*</u> *e* <u>*– 2 °C*</u>*. Mais exatamente, o termômetro indica* $\left(-\mathbf{1}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}\right)$ *graus Celsius abaixo de zero, ou seja,* <u>*– 1 °C*</u>*. Quais dos números em destaque, no texto acima, são racionais?*

Figura 18 – Exercício 3

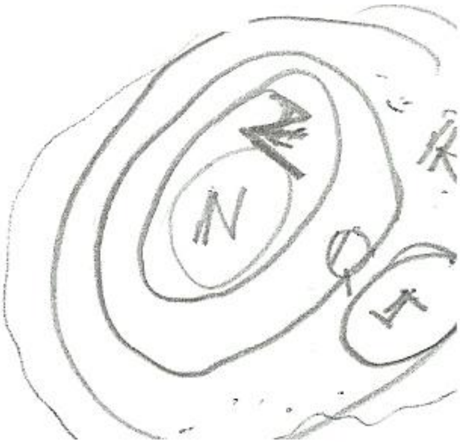
A resposta esperada era: TODOS. Mas como a questão era muito extensa confundiu um pouco os alunos.

Uma das alunas queria calcular algo que não sabia o que era e nem como calcular, tentou inventar alguma coisa. Depois, quando eu disse a ela que a maioria das questões não precisava de cálculo, ela voltou a rever a questão. Mesmo assim ela se confundiu um pouco, escreveu no teste que todos os números são racionais menos as frações, “Acho que as frações não fazem parte dos racionais”.

Apenas quatro alunos souberam responder corretamente essa questão e um deles não lembrava muito bem, pois escreveu a resposta certa e apagou. Um dos alunos falou: “Dos irracionais eu me lembro, mas os racionais não”. Outro achou que todos os números eram racionais menos o um.



Dois alunos ficaram um longo tempo discutindo essa questão e desenharam o diagrama de Venn.



DIVISÃO

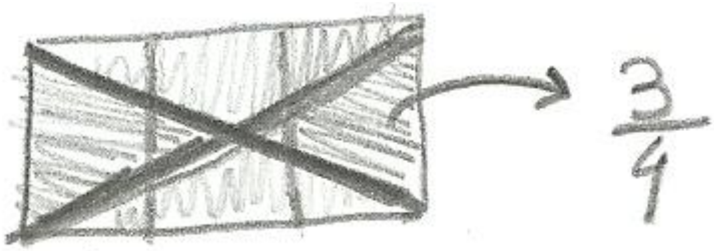
4) Maria, Pedro, João e Antônio receberam de herança três grandes lotes de terra retangulares, todos iguais e que devem ser igualmente distribuídos.

Figura 19 – Exercício 4

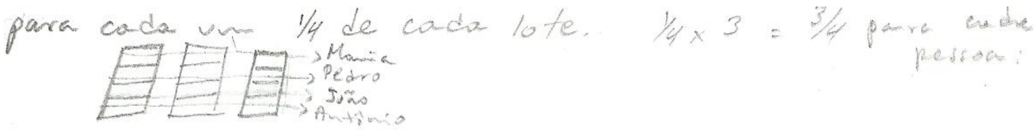
Como repartir igualmente essa herança entre os quatro?

Nesta situação cinco alunos utilizaram representações geométricas de apoio para a resolução. Três deles dividiram cada terreno em quatro partes e deu cada uma delas a um herdeiro. Seis alunos dividiram efetivamente o 3 pelo 4, obtendo um número decimal para representar quanto cada herdeiro receberia.

Uma menina após encontrar o resultado da maneira tradicional falou: “Espera que vou dividir de um jeito diferente. Bem legal”. Então, em vez de desenhar os três terrenos juntos, conforme mostra a figura 19, e repartir em retângulos menores para distribuir entre os quatro; ela juntou os três terrenos e desenhou as diagonais do retângulo formado pelos retângulos menores, dividindo igualmente os três terrenos entre os quatro herdeiros de uma maneira bem "diferente", como ela mesma falou.



Um dos alunos disse que foi dividindo o terreno até chegar num múltiplo de quatro e acabou chegando em $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ de cada terreno para cada herdeiro. Já outro aluno utilizou o subconstruto parte-todo em vez de usar o da divisão conforme era esperado.



5) Analise e dê sua opinião. Com quantos pedaços cada pessoa vai ficar?

Figura 20 – Exercício 5

Pensei, ao selecionar as questões, que nesta os alunos poderiam considerar que as barras não seriam divididas em partes iguais. Mas para eles era muito claro que as barras seriam divididas em partes iguais, a dúvida era se a Carmem estaria dando as duas barras para as quatro crianças ou se ela entraria na partilha, “Professora, ela vai comer também ou está de regime”. Portanto, apareceram duas respostas corretas $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$.

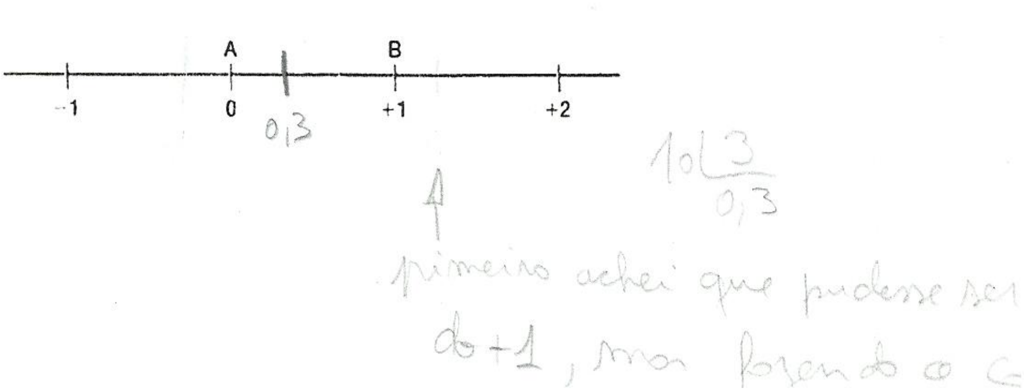
Somente uma pessoa fez representação geométrica para expressar a divisão das barras de chocolate.

PONTO NA RETA

6) Represente na reta numérica o número $\frac{1}{3}$.

Figura 21 – Exercício 6

Somente um aluno errou esta questão. A maioria procurou a representação decimal do número $\frac{1}{3}$, notação com a qual estão mais acostumados a trabalhar.



7) Joana está representando uma corrida em uma estrada assinalando em quilômetros, como na figura a seguir:

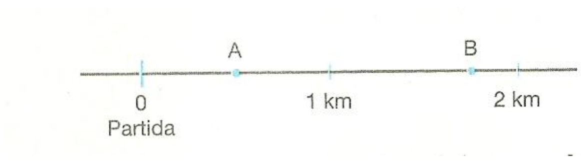
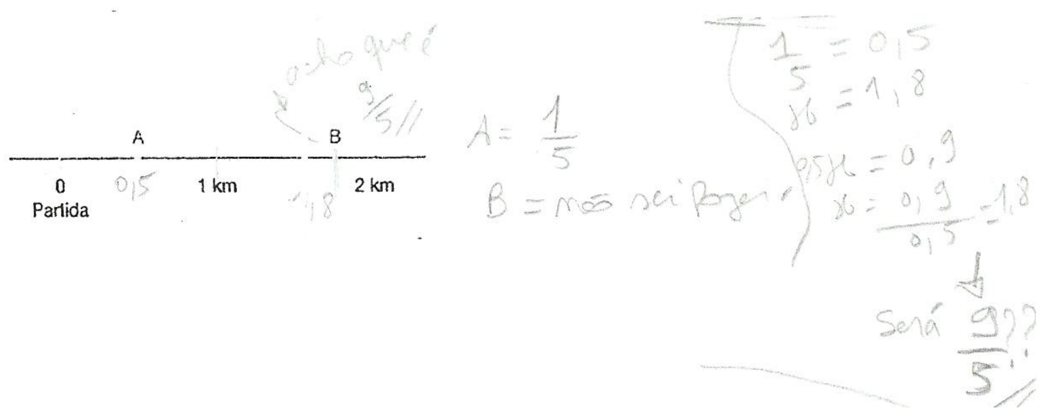


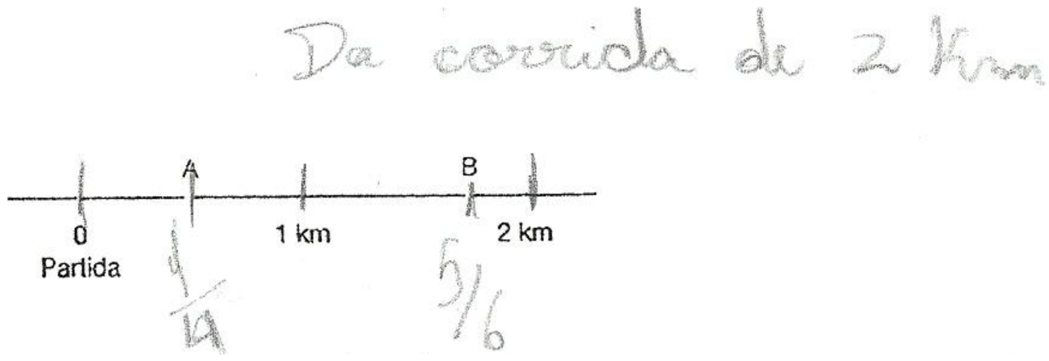
Figura 22 – Exercício 7

Joana marcou as posições de dois corredores com os pontos A e B. Quais números fracionários representam aproximadamente o que os corredores já percorreram?

Uma das alunas encontrou a resposta e tentou fazer algumas contas para justificar tal resposta. Mas essas contas parecem ter sido inventadas ou *forçadas.*



Duas pessoas erraram, e nos dois casos me parece que foi por distração provocada pela pressa. Uma dessas respostas considerou a marca dos 2 km como unidade e, portanto, o raciocínio que foi desenvolvido pode ser considerado o esperado pois os procedimentos utilizados na resolução foram os mesmos utilizados pelos alunos que trabalharam com o 1km como unidade.



Outro aluno transitou com desenvoltura e facilidade pelos múltiplos do metro. Escreveu 500m em resposta ao problema e na entrevista disse ora “meio quilômetro”, ora “quinhentos metros” com muita naturalidade.

8) Localizar cada um dos números $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{-3}{10}$ em uma das retas abaixo.

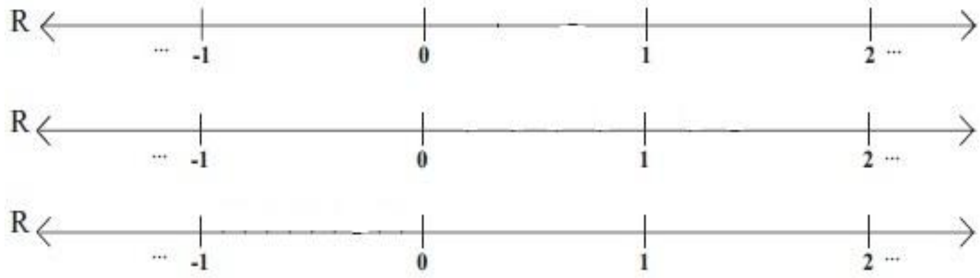
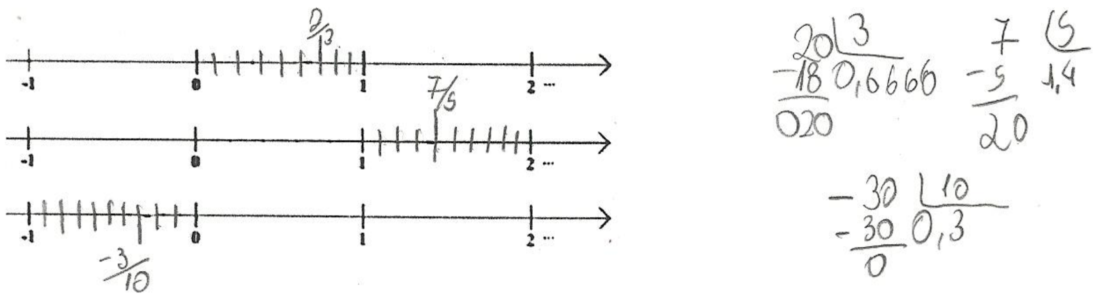


Figura 23 – Exercício 8

A estratégia mais utilizada foi dividir o numerador pelo denominador. “É que com o número com vírgula fica mais fácil”.



Um dos alunos ficou muito desconfiado dos *pontinhos* que aparecem levemente na figura (pistas deixadas por mim, para tornar o ponto encontrado mais preciso) “Aí professora, é pega ratão né”.

Outra estratégia era partir pictoricamente sem fazer contas, a medida do numerador pelo número de vezes indicado no denominador. O problema é que os alunos que tentaram isso se “perderam” com o número $\frac{7}{5}$. Alguns acharam que era “pega ratão” outros procuraram outra forma de resolver o problema e recaíram na forma usada pela maioria.

RAZÃO

9) Observe esta cena:

Figura 24 – Exercício 9

Qual a razão entre o número de acertos e o número total de arremessos à cesta feitos por Rafael?

Todos responderam essa questão. Além disso, quatro simplificaram, mas não souberam explicar por que o fizeram. Um aluno falou na entrevista: “Eu não sabia direito, então segui mais ou menos o raciocínio das anteriores, os 9 acertos eram uma parte dos 15 lançamentos, portanto, uma fração”.

10) A largura de um determinado automóvel é 2 metros. Uma miniatura desse automóvel foi construída utilizando a escala 1:40. Qual a medida da largura da miniatura?

Figura 25 – Exercício 10

Um aluno falou da professora de geografia, que ela já tinha falado em escala de mapas. “Aí, eu não entendi direito isso”.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizo esta monografia com a tentativa de perceber, da maneira mais ampla possível, todo o contexto que envolve o ensino de frações e suas *personalidades*.

Com este restrito e modesto diagnóstico pude identificar, descrever e comparar superficialmente alguns aspectos da situação atual do ensino de frações. Além disso, o acúmulo sistemático de descrições e reflexões permitiu-me compor um quadro compreensivo da situação. Este pode ser o ponto de partida para um esforço de explicação e de reformulação, tendo em vista estudos posteriores mais aprofundados.

O mapeamento de aspectos positivos e negativos, identificados nessa fase inicial de estudo, foi entendido como condição necessária para refletir e compreender as dimensões histórica, didática, epistemológica, metodológica etc., de modo a possibilitar, em fases posteriores, a explicitação mais acurada do conhecimento sobre o tema em questão.

Dessa forma possibilitando o fim do *desleixo* para com este tema, o qual deixa rastros que perduram muitas vezes até o ensino superior.

Neste estudo, busquei comparar tendências didático-pedagógicas, de modo a contribuir para um futuro desenvolvimento de práticas pedagógicas e, de modo a expor a viabilidade da pesquisa em sala de aula, contribuindo para o bom desempenho da difícil tarefa de educar.

A análise de questões críticas, relacionadas ao material didático disponível para o docente – se este contempla tudo ou, pelo menos, boa parte do que trazem os artigos sobre as tendências em educação matemática – leva-nos a refletir sobre o tema, de maneira mais detalhada e prática (levando em conta o que, de fato, chega aos alunos).

Destaco também que a maior dificuldade encontrada por mim na realização deste trabalho foi a diversidade de opiniões e linhas de estudo, que por diversas vezes tornaram minha pesquisa maçante e confusa.

Cheguei à conclusão de que o cerne da dificuldade de aprendizagem deste conteúdo consiste, justamente, nessa gama tão variada de ideias ou conceitos que podem ser representados por frações, ou seja, nas formas de aplicação tão diferenciadas. Cito como exemplo, os conceitos de medida, razão, pontos na reta e quociente. Suponho, portanto, que seja da diversidade encontrada neste conteúdo que brota e cresce as dúvidas e as dificuldades dos alunos.

7 REFERÊNCIAS

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Traduzido por Lázaro Coutinho. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

DAMICO, A. Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental. **Tese de Doutorado** - PUC, São Paulo, 2007. 313f.

DAVID, M. M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte (MG), v. 3, n. 14, p. 55-67, mar/abr, 1997.

GIOVANNI Jr., J. R.; CASTRUCCI, B. **Coleção a conquista da matemática**; 6º, 7º, 8º e 9º anos. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GODEFROY, G. **A aventura dos números**. Traduzido por Antônio Viegas. Portugal: Instituto Piaget, 1997.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Coleção Matemática**: Ideias e Desafios; 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. 14. ed. reform. São Paulo: Saraiva, 2005.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes “personalidades” do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

PONTE, J. P. Estudo de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 19, n. 25, p. 67, 2006.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números racionais, reais e complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

ROMANATTO, M. C. Número Racional: uma teia de relações. **Zetetiké**, Campinas (SP), v. 7, n. 12, p. 37-49, jul/dez, 1999.

SANT'ANNA, D. C.; BITTENCOURT, J.; OLSSON, S. Transposição e Mediação Didática no Ensino de Frações. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 20, n. 27, 2007.

SILVA, V. *et al.* Uma experiência de ensino de fração articulada ao decimal e à porcentagem. **Educação matemática em revista**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 8, p. 16-23, 2000.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Coleção vontade de saber**: 6º, 7º, 8º e 9º anos. São Paulo: FTD, 2009.

VASCONCELOS, I. C. P. Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola de ensino fundamental. 104f. **Dissertação de Mestrado** - UFRGS, Porto Alegre, 2007.