Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

UM ESTUDO COMBINATÓRIO E COMPARATIVO DE IDENTIDADES TETA PARCIAIS DE ANDREWS E RAMANUJAN

Dissertação de Mestrado

DIEGO ROMEIRA CIGARAN CHAVES

Porto Alegre, 08 de fevereiro de 2011

Dissertação submetida por Diego Romeira Cigaran Chaves[*] , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Banca examinadora:
Profª. Drª. Bárbara Seelig Pogorelsky (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Carlos Hoppen (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Vilmar Trevisan (IM - UFRGS)

[*]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Resumo

Neste trabalho, estudamos duas identidades teta uma devida a Ramanujan e outra a Andrews. Provamos essas identidades de forma analítica e as interpretamos através de argumentos combinatórios como funções geradoras para o número de partições contadas considerando pesos para elas. A partir das demonstrações analítics deduzimos também algumas identidades envolvendo funções partições.

Abstract

In this work, we study two theta identities one of them due to Ramanujan and the other due to Andrews. We prove them in an analytical way and we interpret them using combinatorial arguments as generating functions for partitions counted attributing weights to them. From the analytical proofs we also deduce some identities involving partition functions.

Índice

Introdução

Nesta dissertação, apresentaremos alguns resultados envolvendo séries teta e partições de inteiros, analisados sob um ponto de vista analítico e combinatório. Temos como principal objetivo a partir do estudo das séries teta parciais abaixo devidas a Ramanujan e Andrews,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}(-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2},$$

compararmos diferentes contagens de partições através da atribuição de pesos às partições. Sendo os pesos considerados nesse trabaho obtidos através dos saltos entre partes, número de partes ímpares da partição, número de partes pares e tamanho de corda de uma partição. Outro foco do presente trabalho é através das demonstrações analíticas ds identidades teta a dedução de algumas identidades envolvendo funções partição.

Para isso iniciamos o trabalho, no Capítulo 1, apresentando alguns resultados necessários para o embasamento da teoria que segue. Esse capítulo está dividido em duas seções: na primeira, encontram-se algumas definições e resultados básicos envolvendo partições de inteiros. Na segunda, enunciamos a Identidade do Produto

Triplo de Jacobi, o Teorema q-Binomial e alguns de seus corolários necessários em muitos pontos do trabalho.

No Capítulo 2, tomamos como principal referência o trabalho de K. Alladi [2], onde analisamos a identidade teta encontrada no Caderno Perdido de Ramanujan. O Caderno Perdido de Ramanujan consiste em um manuscrito de 87 folhas soltas e sem numeração, escritas por Ramanujan, contendo mais de 600 fórmulas. Esses manuscritos foram escritos em seu último ano de vida e depois de sua morte sua esposa os doou para a Universidade de Madras na Índia. O material foi mandado para G. Hardy na Universidade de Cambridge, onde foi enviado para a biblioteca da universidade. Quase 50 anos depois, G. Andrews encontrou o Caderno Perdido na biblioteca de Cambridge. Desde então vários livros já foram publicados com provas das fórmulas encontradas no Caderno Perdido de Ramanujan, dentre eles [7] e [8].

Começamos o Capítulo 2 estudando um caso particular da Identidade Teta de Ramanujan, interpretaremos a identidade obtida como um teorema envolvendo partições de inteiros e daremos uma prova para ele. Em seguida, analisaremos a Identidade de Ramanujan em sua forma geral como um teorema de partições com peso. Finalizando o Capítulo 2, deduziremos uma identidade companheira da Identidade de Ramanujan, provando-a combinatoriamente e analiticamente.

Para o Capítulo 3, tomamos por base o trabalho de K. Alladi [3], onde começamos analisando as Identidades de Andrews e Gauss e os teoremas envolvendo partições com peso que podem ser associados a eles. Em seguida, através da representação analítica de um desses teoremas, obtemos algumas estimativas para funções partições.

No último capítulo, estudamos um Teorema de Andrews, sua relação com o teorema associado à Identidade de Ramanujan e com o teorema associado a Identidade de Andrews. E por fim o demonstramos de três maneiras distintas.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste primeiro capítulo, introduzimos algumas definições e resultados básicos necessários para o desenvolvimento da teoria que segue.

1.1 Conceitos Básicos

Começamos pela definição do nosso objeto de estudo, uma partição de um inteiro.

Definição 1.1.1. *Uma partição π de um inteiro n é uma decomposição de n como soma de inteiros λ_1, λ_2, ..., λ_k tais que* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$.

Durante a dissertação, $\sigma(\pi)$ é a soma das partes de uma partição π, e usaremos a notação P_d para o conjunto das partições cujas partes são todas distintas e $\mathcal{O}$ para o conjunto das partições cujas partes são todas ímpares. Usaremos também a seguinte notação

$$(a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1})$$

para n um inteiro não negativo e a um número complexo. Dessa forma podemos definir

$$(a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(a;q)_n = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j),$$

para $|q|<1$.

Além da representação $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ para uma partição π, usamos a representação por gráfico de Ferrers, onde cada parte λ_i da partição corresponde a uma linha com λ_i pontos. Por exemplo, o gráfico de Ferrers para a partição 7+4+2+2+1 é

$$\begin{array}{lllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & & & & & &
\end{array}$$

Definimos a operação conjugação num gráfico de Ferrers como uma reflexão em torno da diagonal do gráfico. Por exemplo a representação conjugada da partição acima é

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

obtendo que a partição conjugada de $7+4+2+2+1$ é $5+4+2+2+1+1+1$. Através dessa operação, podemos obter o seguinte teorema.

Teorema 1.1.2. *O número de partições de n com maior parte k é o mesmo número de partições de n em k partes.*

Usaremos também durante este trabalho funções geradoras. A função geradora de uma sequência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ é definida como sendo a série formal de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$. Assim, por exemplo, se A é um conjunto de partições, e para todo $n \geq 0$, denotamos por $a(n)$ o número de partições de n pertencentes a A, a função geradora para as partições de A é

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n.$$

Ou seja, a função geradora de um conjunto A de partições é a série de potências tal que para todo n o coeficiente de q^n é o número de partições de n pertencentes ao conjunto A.

Analisando o seguinte produtório $(-q; q)_\infty$, que por definição é

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1 + q^m) = (1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^k) \cdots$$

e usando a propriedade $q^a \cdot q^b = q^{a+b}$, o produtório acima se torna a soma de potências de q, onde o número de vezes que q^n aparece é exatamente o número de formas que podemos escrever n como soma de partes distintas. Sendo assim $(-q; q)_\infty$ é uma representação para a função geradora para partições em partes distintas. Esse produto infinito converge para $|q| < 1$. Isso pode ser visto facilmente a partir dos seguintes teoremas que podem ser encontrados em [1]:

Teorema 1.1.3. *Se o $\prod_{m=1}^{\infty} |1 + z_m|$ converge então o produto $\prod_{m=1}^{\infty}(1 + z_m)$ também converge.*

Teorema 1.1.4. *$\prod_{m=1}^{\infty} |1 + z_m|$ converge se e somente se $\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| < \infty$.*

Para partições sem restrição para repetições de partes, a função geradora é

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} q^{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} q^{2(k_2)}\right) \cdots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} q^{n(k_n)}\right) \cdots$$

onde cada potência $q^{j\cdot k}$, interpretamos como j partes de tamanho k. E utilizando a soma da série geométrica a expressão acima fica da seguinte forma

$$\frac{1}{(1-q)}\frac{1}{(1-q^2)}\cdots\frac{1}{(1-q^m)}\cdots = \frac{1}{(q;q)_\infty}.$$

Assim obtemos a função geradora $1/(q;q)_\infty$ para as partições sem restrição.

E utilizando somente partes ímpares, obtemos que a função geradora para partições em $\mathcal{O}$ é $1/(q;q^2)_\infty$.

Podemos observar que adicionando um número arbitrário de colunas de tamanho até n ao gráfico de Ferrers da partição mínima $m+(m-1)+(m-2)+\cdots+1$, podemos obter todas as partições com m partes distintas. Como $\sigma(\pi)$ para π partição mínima é $m(m+1)/2$, que denotaremos por T_m, e adicionar colunas de tamanho até m é o mesmo que multiplicarmos $1/(q;q)_m$ à função geradora de partições mínimas, obtemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{T_m}}{(q;q)_m}$$

é uma representação para a função geradora para partições em partes distintas. Utilizando a outra representação encontrada anteriormente, obtemos a seguinte identidade

$$(-q;q)_\infty = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{T_m}}{(q;q)_m}$$

Agora enunciaremos alguns teoremas cujas demonstrações omitiremos, mas podem ser encontradas em [5].

Teorema 1.1.5. (Teorema de Euler) *Seja $\mathcal{O}(n)$ a notação para o número de partições de n em $\mathcal{O}$, e seja $P_d(n)$ a notação para o número de partições de n em P_d. Então*

$$\mathcal{O}(n) = P_d(n).$$

Ou, equivalentemente, usando funções geradoras

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = (-q;q)_\infty.$$

Teorema 1.1.6. (Teorema do Número Pentagonal de Euler) *Seja $D_e(n)$ a notação para o número de partições de n em P_d, onde o número de partes é par, e seja $D_o(n)$ a notação para o número de partições de n em P_d, onde o número de partes é ímpar. Então*

$$D_e(n) - D_o(n) = (-1)^k, \quad \text{se} \quad n = (3k^2 \pm k)/2, \quad \text{e} \quad 0, \quad \text{caso contrário.}$$

Ou, equivalentemente, usando funções geradoras

$$(q;q)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

Podemos observar que a série do lado direito da função geradora acima converge para $|q| < 1$. Esse fato segue pelos testes da razão ou da raiz.

Teorema 1.1.7. (Transformação de Heine) *Com as séries abaixo convergindo, temos que*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(q;q)_n (c;q)_n} t^n &= \frac{(b;q)_\infty (at;q)_\infty}{(c;q)_\infty (t;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t;q)_n (c/b;q)_n}{(q;q)_n (at;q)_n} b^n \\
&= \frac{(c/b;q)_\infty (bt;q)_\infty}{(c;q)_\infty (t;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b;q)_n (abt/c;q)_n}{(q;q)_n (bt;q)_n} (c/b)^n \\
&= \frac{(abt/c;q)_\infty}{(t;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/b;q)_n (c/a;q)_n}{(q;q)_n (c;q)_n} (abt/c)^n
\end{aligned}$$

1.2 Produto Triplo de Jacobi e Teorema q-Binomial

Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar a identidade conhecida como Identidade do Produto Triplo de Jacobi e alguns de seus corolários que serão necessários no desenvolvimento do trabalho, bem como o Teorema q-Binomial. Também omitiremos as demonstrações desses teoremas, que podem ser encontradas em [5].

Teorema 1.2.1. (Produto Triplo de Jacobi)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = (q^2;q^2)_\infty (-zq;q^2)_\infty (-z^{-1}q;q^2)_\infty$$

para $|q| < 1$, $z \neq 0$.

Corolário 1.2.2. (Gauss) *Para todo* q *com* $|q| < 1$ *vale*

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}.$$

Teorema 1.2.3. (Série q-Binomial)

$$\frac{1}{(zq;q)_N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q;q)_{N+m-1}}{(q;q)_m (q;q)_{N-1}} z^m q^m$$

para $|z| < 1$, *e* $|q| < 1$.

Corolário 1.2.4. (Euler) *Para* $|t| < 1$, $|q| < 1$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{(q;q)_m} = \frac{1}{(t;q)_\infty} \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(q;q)_m} = (-t;q)_\infty.$$

Capítulo 2

Uma Identidade de Ramanujan

Neste capítulo, seguiremos o trabalho desenvolvido em [2], no qual é apresentada a identidade teta abaixo, encontrada no Caderno Perdido de Ramanujan, bem como o teorema de partições de inteiros que pode ser obtido através dela.

Teorema 2.0.5.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}(-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2} \tag{2.1}$$

Começamos analisando um caso particular e o teorema que podemos obter a partir desse caso particular.

2.1 Um caso particular de (2.1) e sua Interpretação como um Teorema de Partições

Nessa seção analisaremos o caso particular de (2.1) em que $a = 1$ e o teorema de partições de inteiros que podemos associar a essa identidade. Fazendo a substituição e simplificando a expressão obtemos:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{T_n}(-q;q)_{n-1}}{(q^2;q^2)_n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{T_n}(1+q)\cdots(1+q^{n-1})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{T_n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-1})(1-q^{2n})}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{T_n}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{T_n}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}. \tag{2.2}$$

Interpretaremos combinatoriamente a igualdade acima. Começamos por observar que o fator

$$\frac{q^{T_n}}{(q;q)_n}$$

é a função geradora para partições em n partes distintas.

Na série da esquerda de (2.2), em vez do termo acima, temos o termo

$$\frac{(-1)^n q^{T_n}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})}$$

o qual podemos interpretar como a partir da partição mínima, representada por q^{T_n}, sejam inseridos um número arbitrário de colunas de tamanho variando de 1 até $n-1$, representado por $(q;q)_{n-1}$, e as colunas de tamanho n são inseridas aos pares, representado por $(1-q^{2n})$, dessa maneira a menor parte da partição permanece ímpar após o processo. O fator $(-1)^n$ conta a paridade do número de partes. Logo,

$$\frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^n R(j,n)q^j,$$

onde $R(j,n)$ é o número de partições de j em n partes distintas com a parte menor ímpar. E somando sobre todos os n

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^n R(j,n)q^j,$$

e trocando a ordem das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R(j,n) q^j,$$

note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R(j,n) = R_e(j) - R_o(j),$$

onde $R_e(j)$ é a notação para o número de partições de j em um número par de partes distintas com menor parte ímpar, e $R_o(j)$ é a notação para o número de partições de j em úm número ímpar de partes distintas com menor parte ímpar. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{T_n}}{(q;q)_{n-1}(1-q^{2n})} = \sum_{j=0}^{\infty} [R_e(j) - R_o(j)] q^j.$$

Assim (2.2) pode ser reescrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{R_e(n) - R_o(n)\} q^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \tag{2.3}$$

e vemos então que (2.2) é equivalente ao seguinte teorema.

Teorema 2.1.1. *Sejam $R_e(n)$ e $R_o(n)$ como acima, então*

$$R_e(n) - R_o(n) = (-1)^k \text{ se } n = k^2, \text{ e } 0, \text{ caso contrário.}$$

Como podemos observar nos seguintes exemplos. As partições de 8 em partes distintas com menor parte ímpar são 7+1, 5+3, 5+2+1, 4+3+1. Assim $R_e(8) = 2$ e $R_o(8)$ e então $R_e(8) - R_o(8) = 2 - 2 = 0$. As partições de 9 em partes distintas com menor parte ímpar são 9, 8+1, 6+3, 6+2+1, 5+3+1. Assim $R_e(9) = 2$ e $R_o(9)$ e então $R_e(9) - R_o(9) = 2 - 3 = -1$.

Demonstração: A expressão do lado esquerdo de (2.3) pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{R_e(n) - R_o(n)\} q^n = -q(q^2;q)_\infty - q^3(q^4;q)_\infty - q^5(q^6;q)_\infty - \cdots$$

pois cada termo $-q^{2n-1}(q^{2n};q)_\infty$ gera as partições em partes distintas com menor parte $2n-1$, onde as partições com um número par de partes são contadas positivamente e as com um número ímpar de partes são contadas negativamente, e assim

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\{R_e(n)-R_o(n)\}\,q^n &= -(q;q)_\infty\left[\frac{q}{(q;q)_1}+\frac{q^3}{(q;q)_3}+\frac{q^5}{(q;q)_5}+\cdots\right]\\ &= -(q;q)_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}}.\end{aligned}$$

Observamos que a série acima $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}}$, pode ser interpretada como a componente ímpar da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{(q;q)_n}$, se introduzirmos uma variável z, como explicamos a seguir.

Sendo $f(z;q)$ a função geradora para partições sem qualquer tipo de restrição, temos que

$$f(z;q)=\frac{1}{(zq;q)_\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^n}{(q;q)_n},$$

onde no termo do meio z conta o número de partes presentes na partição, já que para cada parte vinda de um dos termos $(zq;q)_k$ teremos um z multiplicando. Enquanto que no termo da direita, z conta a maior parte da partição, pois em cada termo vemos que teremos uma parte n devido a presença do fator q^n e o fator $(q;q)_n$ acrescenta partes de tamanho no máximo n. Mas ambas as partições são equivalentes por meio de conjugação. Tomando a parte ímpar em relação a z dos dois termos, temos então

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(zq;q)_\infty}-\frac{1}{(-zq;q)_\infty}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}q^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}}.$$

Fazendo a substituição $z=-1$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(-q;q)_\infty}-\frac{1}{(q;q)_\infty}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-q^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}}.$$

Multiplicando por $(q;q)_\infty$, segue que

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}-1\right\}=-(q;q)_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}},$$

obtendo assim que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{R_e(n) - R_o(n)\} q^n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} - 1 \right\}.$$

Pelo Corolário 1.2.2 temos que

$$\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

e assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{R_e(n) - R_o(n)\} q^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

provando então o teorema. ■

2.2 Interpretação de (2.1) como um Teorema de Partições

Nesta seção, analisaremos (2.1) em sua forma geral como um teorema envolvendo partições com peso.

Primeiro definiremos o seguinte peso para uma partição.

Definição 2.2.1. *Seja π uma partição, $\pi : b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$, considerando os saltos $b_i - b_{i+1}$, com $b_{\nu+1} = 0$. Definimos o peso ω_i do i-ésimo salto como sendo a^{δ_i}, onde δ_i é o menor inteiro maior ou igual a $(b_i - b_{i+1})/2$.*

Definição 2.2.2. *Seja π uma partição, $\pi : b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$, definimos o peso ω para π como*

$$\omega(\pi) = (-1)^\nu \prod_{i=1}^{\nu} a^{\delta_i}$$

com δ_i como na definição anterior e a um número complexo.

Nosso objetivo nesse capítulo é provar o seguinte teorema, que mostraremos equivalente a (2.1) a seguir.

Teorema 2.2.3. *Seja π uma partição em partes distintas, com menor parte ímpar, então*

$$\sum_{\sigma(\pi)=n,\pi\in P_{d,o}} \omega(\pi) = (-a)^k, \text{ se } n = k^2, \text{ e } 0, \text{ caso contrário.}$$

Que podemos observar no caso $n = 9$, as partições de 9 em partes distintas com menor parte ímpar são 9, 8+1, 6+3, 6+2+1 e 5+3+1, e seus pesos são $\omega(9) = (-1)^1 a^5 = -a^5$, $\omega(8+1) = (-1)^2 a^4 a^1 = a^5$, $\omega(6+3) = (-1)^2 a^2 a^2 = a^4$, $\omega(6+2+1) = (-1)^3 a^2 a^1 a^1 = -a^4$ e $\omega(5+2+1) = (-1)^3 a^1 a^1 a^1 = -a^3$.

$$\sum_{\sigma(\pi)=9,\pi\in P_{d,o}} \omega(\pi) = -a^5 + a^5 + = a^4 - a^4 - a^3 = -a^3 = (-a)^3$$

Já notamos que q^{T_n} representa a partição mínima em n partes distintas. O fator $(-1)^n$ do lado esquerdo de (2.1) conta a paridade do número de partes. E a potência de a será utilizada para a contagem do peso da partição.

O fator $(aq^2; q^2)_n$ no denominador é interpretado como inserindo pares de colunas idênticas de comprimento no máximo n no gráfico de Ferrers da partição mínima. A partição resultante após a inserção desses pares de coluna é uma partição com menor parte ímpar e os saltos entre as partes também ímpares.

O fator a^n do numerador, pode ser visto como atribuindo peso 1 para cada salto da partição mínima, pois $b_i - b_{i+1} = 1$ e então δ_i, tomado como na Definição 2.2.1, é igual a 1 para todos os saltos da partição mínima. O a em $(aq^2; q^2)_n$ conta o número de pares de colunas inseridas. E para cada par de colunas adicionado, o valor de δ_i aumenta exatamente uma unidade. Sendo assim a potência de a resultante na partição é exatamente o peso atribuído a essa partição.

O fator $(-q; q)_{n-1}$ no numerador deve ser interpretado como a inserção de colunas distintas de comprimento no máximo $n-1$ no gráfico de Ferrers da partição em n partes distintas com saltos ímpares entre as partes. Cada coluna inserida muda a paridade de um salto de ímpar para par, mas o salto entre a menor parte e 0, a menor parte exatamente, não muda porque nenhuma coluna de comprimento n é inserida. Então a menor parte permanece ímpar, mas os saltos acima da menor parte podem ser tanto pares quanto ímpares.

Dessa forma, construímos todas as partições em n partes distintas com menor parte ímpar partindo da partição mínima e inserindo colunas na sua forma. Note que, quando a paridade de um salto $b_i - b_{i+1}$ muda de ímpar para par devido a inserção de uma coluna, o valor de δ_i, precisamente o menor inteiro maior ou igual a $(b_i - b_{i+1})/2$, não muda. Também, como $(-q;q)_{n-1}$ não envolve o parâmetro a, essa inserção de colunas devida a presença de $(-q;q)_{n-1}$ não muda o valor de $\prod a^{\delta_i}$.

Finalmente, como o número de partes não muda com a inserção de colunas, o fator $(-1)^n$ permanece o mesmo. Assim interpretamos o lado esquerdo de (2.1) como a função geradora

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_\omega(n) q^n,$$

onde $R_\omega(n)$ é definido como

$$R_\omega(n) = \sum_{\sigma(\pi)=n, \pi \in P_{d,o}} \omega(\pi).$$

E assim (2.2.3) é a versão combinatória de (2.1).

Agora daremos uma prova da identidade (2.1), e consequentemente provaremos o Teorema 2.2.3.

Demonstração: Pelo Teorema da Série q-Binomial

$$\frac{1}{(aq^2;q^2)_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^2;q^2)_{n+j-1}}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{n-1}} a^j q^{2j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}(-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n q^{T_n}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}a^j\frac{(q^2;q^2)_{n+j-1}}{(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_{n-1}}(-q;q)_{n-1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n q^{T_n}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}a^j\frac{(q^2;q^2)_{n+j-1}}{(q^2;q^2)_j(q;q)_{n-1}}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-a)^n q^{T_n}q^{2j}a^j\frac{(q^2;q^2)_{n+j-1}}{(q^2;q^2)_j(q;q)_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Fazendo a troca de variável $n+j=m$ na segunda série do lado direito, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}(-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}(-a)^{m-j}q^{T_{m-j}}a^j q^{2j}\frac{(q^2;q^2)_{m-1}}{(q^2;q^2)_j(q;q)_{m-j-1}}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}(-a)^m(q^2;q^2)_{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j q^{2j}q^{T_{m-j}}}{(q^2;q^2)_j(q;q)_{m-j-1}}.
\end{aligned}$$

Para chegarmos ao resultado que queremos basta mostrar que

$$(q^2;q^2)_{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j q^{2j}}{(q^2;q^2)_j}\frac{q^{T_{m-j}}}{(q;q)_{m-j-1}}=q^{m^2},$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j q^{2j}}{(q^2;q^2)_j}\frac{q^{T_{m-j}}}{(q;q)_{m-j-1}}=\frac{q^{m^2}}{(q^2;q^2)_{m-1}}.$$

Temos que

$$\frac{q^{m^2}}{(q^2;q^2)_{m-1}}=q^{m^2}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}(q^2)^{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}(q^4)^{k_2}\right)\cdots\left(\sum_{k_{m-1}=0}^{\infty}(q^{2m-2})^{k_{m-1}}\right),$$

onde podemos observar que q^{m^2} pode ser interpretado como a partição em partes distintas ímpares $1+3+\cdots+(2m-1)$, e cada uma das séries pode ser vista como a inserção de pares de colunas de tamanho até $m-1$, obtendo assim partições em partes ímpares distintas com menor parte 1.

Contando o número de partes com a indeterminada z e somando sobre todos os números de partes para obter todas as partições em partes ímpares distintas com menor parte 1, obtemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2;q^2)_{m-1}} = zq(-zq^3;q^2)_\infty \tag{2.4}$$

pois o lado direito da equação acima é a função geradora das partições em partes ímpares distintas em que a menor parte é 1. O expoente de z conta o número de partes e o expoente de q indica o número que está sendo particionado.

Podemos modificar essa expressão da seguinte maneira

$$zq(-zq^3;q^2)_\infty = zq(-zq^3;q^2)_\infty \frac{(-zq^2;q^2)_\infty}{(-zq^2;q^2)_\infty} = \frac{zq(-zq^2;q)_\infty}{(-zq^2;q^2)_\infty}. \tag{2.5}$$

Pelo Corolário 1.2.4,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(t;q)_\infty}.$$

Fazendo $t = -zq$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-zq)^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(-zq;q)_\infty},$$

e, substituindo q por q^2, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n q^{2n}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(-zq^2;q^2)_\infty}. \tag{2.6}$$

De forma análoga ao que foi feito com a expressão acima, da segunda identidade do Corolário 1.2.4, trocamos n por $n-1$ de forma que a série comece a partir do termo $n = 1$, de onde obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}{(q;q)_{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(q;q)_n} = (-t;q)_\infty.$$

Fazendo $t = zq^2$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1} q^{\frac{1}{2}(n^2+n-2)}}{(q;q)_{n-1}} = (-zq^2;q)_\infty,$$

e, multiplicando por zq,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q;q)_{n-1}} = zq(-zq^2;q)_\infty. \tag{2.7}$$

Assim, substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5) e (2.4), temos que

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2;q^2)_{m-1}} &= zq(-zq^3;q^2)_\infty = \frac{zq(-zq^2;q)_\infty}{(-zq^2;q^2)_\infty} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n q^{2n}}{(q^2;q^2)_n}\right\} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q;q)_{n-1}}\right\}\end{aligned}$$

e comparando os coeficientes de z^m obtemos

$$\frac{q^{m^2}}{(q^2;q^2)_{m-1}} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j q^{2j}}{(q^2;q^2)_j} \frac{q^{T_{m-j}}}{(q;q)_{m-j-1}}$$

provando assim o Teorema 2.2.3. ■

2.3 Uma Companheira para a Identidade de Ramanujan

Nesta seção seguiremos o trabalho desenvolvido por Alladi em [2], onde usaremos o mesmo método que usamos na seção anterior para provar a identidade (2.1), para obtermos uma identidade "companheira"da identidade (2.1), que enunciamos a seguir

Teorema 2.3.1. *Identidade Companheira da Identidade de Ramanujan*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}}.$$

Começamos observando a seguinte expressão obtida na seção anterior

$$zq(-zq^3;q^2)_\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2;q^2)_{m-1}},$$

onde a expressão do lado direito é a função geradora para as partições em partes ímpares distintas, com menor parte 1. Aqui vamos provar a seguinte equação similar à anterior, a qual podemos observar como sendo a função geradora para partições em partes ímpares distintas

$$(-zq;q^2)_\infty = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2;q^2)_m}. \tag{2.8}$$

Começamos observando que

$$\begin{aligned}(-zq;q^2)_\infty &= (1+zq)(1+zq^3)(1+zq^5)\cdots = \frac{(1+zq)(1+zq^2)(1+zq^3)(1+zq^4)\cdots}{(1+zq^2)(1+zq^4)\cdots} \\ &= \frac{(-zq;q)_\infty}{(-zq^2;q^2)_\infty}.\end{aligned}$$

E pelo Corolário 1.2.4

$$(-t;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q;q)_n},$$

de onde, substituindo $t = zq$, obtemos

$$(-zq;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{T_n}}{(q;q)_n}.$$

Combinando com (2.6), temos que

$$(-zq;q^2)_\infty = \frac{(-zq;q)_\infty}{(-zq^2;q^2)_\infty} = \left\{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l q^{T_l}}{(q;q)_l}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^j q^{2j}}{(q^2;q^2)_j}\right\}.$$

Assim, provar (2.8) é equivalente a mostrar

$$\left\{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l q^{T_l}}{(q;q)_l}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^j q^{2j}}{(q^2;q^2)_j}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2;q^2)_m}.$$

Comparando os coeficientes de z^m, queremos mostrar que

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j q^{2j}}{(q^2;q^2)_j} \frac{q^{T_{m-j}}}{(q;q)_{m-j}} = \frac{q^{m^2}}{(q^2;q^2)_m},$$

que é equivalente a

$$q^{m^2} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j q^{2j} q^{T_{m-j}} \frac{(q^2;q^2)_m}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{m-j}} (-q;q)_{m-j}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(-a)^m$ e somando sobre m o que queremos mostrar é equivalente a

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m q^{m^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j q^{2j+T_{m-j}} (-q;q)_{m-j} \frac{(q^2;q^2)_m}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{m-j}},$$

pois, vendo as séries acima como funções na variável a, as séries convergem para $|a| < 1$ e $|q| < 1$. Portanto, valendo a igualdade acima para todo a com $|a| < 1$, então os coeficientes dos a^m são iguais nos dois lados, e portanto vale a expressão anterior.

Fazendo $n = m - j$ a expressão acima é equivalente a

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m q^{m^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^{n+j} (-1)^j \frac{(q^2;q^2)_{n+j}}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_n} q^{2j+T_n} (-q;q)_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n q^{T_n} (-q;q)_n \sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{2j} \frac{(q^2;q^2)_{n+j}}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_n} \qquad (2.9) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n q^{T_n} (-q;q)_n \frac{1}{(aq^2;q^2)_{n+1}}
\end{aligned}$$

onde a soma interna do segundo termo acima foi calculada usando a série q-binomial.

De (2.1) e de (2.9) temos que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m q^{m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}},$$

de onde obtemos o Teorema 2.3.1,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}}.$$

Daremos a seguir duas provas para essa identidade, uma analítica e outra combinatória. Começamos pela demonstração analítica, onde primeiro provaremos o seguinte lema, onde para $n \geq 0$, seja a_n e b_n a notação para os n-ésimos termos do lado direito e esquerdo do Teorema 2.3.1, respectivamente.

Lema 2.3.2. *Para* $n \geq 0$, *temos*

$$a_n = \frac{b_n(1+q^n)}{(1-aq^{2n+2})}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) &- (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \\ &= a_n a q^{2n+2} = \frac{(-a)^n q^{T_n}(-q;q)_n a q^{2n+2}}{(aq^2;q^2)_{n+1}},\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n+1}) &- (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \\ &= b_{n+1}(1+q^{n+1}) = a_{n+1}(1-aq^{2n+2}) \\ &= \frac{(-a)^{n+1} q^{T_{n+1}}(-q;q)_{n+1}}{(aq^2;q^2)_{n+1}}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Demonstração: Usando a definição dos coeficientes a_n e b_n

$$\frac{b_n(1+q^n)}{(1-aq^{2n+2})} = \frac{(-a)^n q^{T_n}(-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n} \frac{(1+q^n)}{(1-aq^{2n+2})} = \frac{(-a)^n q^{T_n}(-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} = a_n$$

logo (2.10) vale.

Para provar (2.11), primeiro vemos pela definição de a_n que

$$a_n a q^{2n+2} = \frac{(-a)^n q^{T_n}(-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} a q^{2n+2}$$

a outra igualdade provaremos utilizando indução.

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}a_0 - b_0 &= \frac{(-a)^0 q^{T_0}(-q;q)_0}{(aq^2;q^2)_1} - 1 = \frac{1}{1-aq^2} - 1 \\ &= \frac{1-1+aq^2}{1-aq^2} = \frac{aq^2}{1-aq^2} = a_0 a q^2 \\ &= a_0 a q^{2\cdot 0+2}.\end{aligned}$$

Logo, a igualdade vale para $n = 0$. Supondo válido para n, provaremos para $n + 1$

$$
\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (b_0 + b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1}) \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_{n+1} - b_{n+1} \\
&= a_n a q^{2n+2} + a_{n+1} - b_{n+1} \\
&= a_{n+1} \frac{(-1)q^{n+1}(1 - aq^{2n+4})}{(1 + q^{n+1})} + a_{n+1} - a_{n+1} \frac{(1 - aq^{2n+4})}{(1 + q^{n+1})} \\
&= a_{n+1} \left\{ \frac{(-1)q^{n+1}(1 - aq^{2n+4})}{(1 + q^{n+1})} + 1 - \frac{(1 - aq^{2n+4})}{(1 + q^{n+1})} \right\} \\
&= a_{n+1} \left\{ \frac{(-1)q^{n+1}(1 - aq^{2n+4}) + (1 + q^{n+1}) - (1 - aq^{2n+4})}{(1 + q^{n+1})} \right\} \\
&= a_{n+1} \left\{ \frac{-q^{n+1} + aq^{3n+5} + 1 + q^{n+1} - 1 + aq^{2n+4}}{(1 + q^{n+1})} \right\} \\
&= a_{n+1} \left\{ \frac{aq^{2n+4}(1 + q^{n+1})}{(1 + q^{n+1})} \right\} = a_{n+1} a q^{2n+4}
\end{aligned}
$$

e assim (2.11) fica provado.

E para provar (2.12) usamos o resultado obtido em (2.11)

$$
\begin{aligned}
&(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n+1}) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \\
&= b_{n+1} - [(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - (b_0 + b_1 + \cdots + b_n)] \\
&= b_{n+1} - a_n a q^{2n+2} = \frac{(-a)^{n+1} q^{T_{n+1}} (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} - \frac{aq^{2n+2}(-a)^n q^{T_n} (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} \\
&= \frac{(-a)^n (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} [q^{T_{n+1}} + q^{2n+2} q^{T_n}] = \frac{(-a)^n (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} [q^{T_{n+1}} + q^{n+1} q^{T_{n+1}}] \\
&= \frac{(-a)^n q^{T_{n+1}} (-q;q)_n (1 + q^{n+1})}{(aq^2;q^2)_{n+1}} = \frac{(-a)^n q^{T_{n+1}} (-q;q)_{n+1}}{(aq^2;q^2)_{n+1}}
\end{aligned}
$$

e para provar as outras igualdades usamos a definição de a_n

$$
\frac{(-a)^n q^{T_{n+1}} (-q;q)_{n+1}}{(aq^2;q^2)_{n+1}} = \frac{(-a)^n q^{T_{n+1}} (-q;q)_{n+1}}{(aq^2;q^2)_{n+2}} (1 - aq^{2n+2}) = a_{n+1}(1 - aq^{2n+2})
$$

e a definição de b_n

$$
\frac{(-a)^n q^{T_{n+1}} (-q;q)_n}{(aq^2;q^2)_{n+1}} = \frac{(-a)^n q^{T_{n+1}} (-q;q)_{n+1}}{(aq^2;q^2)_{n+1}} (1 + q^{n+1}) = b_{n+1}(1 + q^{n+1})
$$

provando assim (2.12), e consequentemente o lema. ■

Usando o lema provamos o Teorema 2.3.1, pois, como a diferença entre os $n+1$ primeiros termos da primeira série e os n primeiros termos da segunda série é $b_{n+1}(1+q^{n+1})$, $(1+q^{n+1})$ é limitado para $|q|<1$ e $b_{n+1}\to 0$, pois em (2.1)

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}(-q;q)_{n-1}}{(aq^2;q^2)_n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}$$

e, para $|q|<1$ e $|a|<1$, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}$$

converge. Provando assim analiticamente o Teorema 2.3.1.

Provaremos agora o Teorema 2.3.1 combinatoriamente.

Na Seção 2.2 vimos que o lado esquerdo da identidade é a função geradora das partições em partes distintas com menor parte ímpar. Na série do lado direito temos em cada termo o fator extra

$$\frac{1+q^n}{1-aq^{2n+2}}.$$

O fator $1+q^n$ adiciona ou não uma coluna de tamanho n ao gráfico de Ferrers da partição. Se adicionarmos a coluna, obtemos uma partição em partes distintas com menor parte par. E caso não adicionemos a coluna, ficamos com partições em partes distintas com menor parte ímpar. Assim obtemos todas as partições em partes distintas.

O fator $1/(1-aq^{2n+2})$ adiciona pares de colunas de tamanho $n+1$ ao gráfico de Ferrers de uma partição com exatamente n partes distintas. Assim ficamos com uma partição com menor parte par, e o número de partes igual a $n+1$, mudando assim a paridade do número de partes.

Assim as partições em partes distintas com menor parte par são contadas duas vezes com paridades diferentes, e levando em conta a soma $(-1)^n+(-1)^{n+1}$, as partições com menor parte par acabam sendo contadas com peso 0. Dessa maneira somente as partições em partes distintas com menor parte ímpar contribuem para a soma do lado direito do Teorema 2.3.1. Essas são precisamente as partições contadas na série do lado esquerdo, provando assim a identidade combinatoriamente.

Capítulo 3

Identidades de Andrews e de Gauss

Nesse capítulo seguimos o trabalho desenvolvido em [3]. Inicialmente apresentamos uma outra representação para (2.1) devida a Andrews. Demonstramos essa identidade e estudamos o teorema envolvendo partições com peso que ele induz.

Também estudaremos como uma famosa identidade de Gauss pode ser obtida a partir da Identidade de Andrews e usaremos a mesma abordagem para obter um novo teorema envolvendo partições com peso.

Finalmente estudaremos algumas aplicações dos resultados obtidos nesse capítulo, obtendo estimativas para algumas funções partição.

3.1 As Identidades de Andrews e de Gauss

Nesta seção apresentamos a Identidade de Andrews e a demonstramos de duas maneiras diferentes, uma utilizando a Transformação de Heine e outra de maneira análoga à demonstração da identidade (2.1). A seguir a interpretaremos como um teorema envolvendo partições com peso.

Teorema 3.1.1. *Identidade de Andrews*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}.$$

Primeiro demonstraremos o resultado acima utilizando a Transformação de Heine.

Demonstração: Começamos observando que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty \\
&\qquad = (q^2;q^2)_\infty(aq;q^2)_\infty \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q^2;q^2)_n(aq;q^2)_n} \right\}.
\end{aligned}$$

A seguir utilizamos a Transformação de Heine e a modificamos da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n} t^n &= \frac{(b;q)_\infty(at;q)_\infty}{(c;q)_\infty(t;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_k(t;q)_k}{(q;q)_k(at;q)_k} b^k \\
&= \frac{(b;q)_\infty(at;q)_\infty}{(c;q)_\infty(t;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-c)(b-cq)\cdots(b-cq^{k-1})(t;q)_k}{(q;q)_k(at;q)_k},
\end{aligned}$$

onde vemos que para $a = b = 0$, a expressão se torna

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_n(c;q)_n} t^n &= \frac{1}{(c;q)_\infty(t;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)(-cq)\cdots(-cq^{k-1})(t;q)_k}{(q;q)_k} \\
&= \frac{1}{(c;q)_\infty(t;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k(t;q)_k}{(q;q)_k} q^{\frac{k(k-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Onde substituindo q e t por q^2, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^2;q^2)_n(c;q^2)_n} q^{2n} &= \frac{1}{(c;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k(q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k} q^{k(k-1)} \\
&= \frac{1}{(c;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-c)^k q^{k(k-1)}
\end{aligned}$$

e por último substituindo c por aq,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^2;q^2)_n(aq;q^2)_n} q^{2n} = \frac{1}{(aq;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-aq)^k q^{k(k-1)}$$
$$= \frac{1}{(aq;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k q^{k^2}$$

chegamos ao Teorema 3.1.1.

De outra maneira, utilizando um argumento similar ao utilizado para demonstrar (2.1), demonstraremos a identidade abaixo.

Demonstração: Começamos com a seguinte identidade para as funções geradoras para partições sem restrições

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(zq;q)_\infty},$$

onde, substituindo z por q^k, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(k+1)}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^{k+1};q)_\infty}.$$

Multiplicando por $(q;q)_\infty$, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(k+1)}(q^{n+1};q)_\infty = (q;q)_k.$$

Substituindo q por q^2, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n(k+1)}(q^{2n+2};q^2)_\infty = (q^2;q^2)_k.$$

Dividindo ambos os lados por $(q^2;q^2)_k$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(k+1)}(q^{2n+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_k} = 1.$$

Multiplicando por $(-a)^k q^{k^2}$ e somando sobre k, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k q^{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(k+1)}(q^{2n+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k q^{k^2}.$$

Invertendo a ordem das somas

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}\frac{q^{2nk}}{(q^2;q^2)_k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}. \tag{3.1}$$

Expandindo $(aq^{2n+1};q^2)_\infty$ como uma série, pelo Corolário 1.2.4 temos que

$$(aq^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-aq^{2n+1})^k q^{k(k-1)}}{(q^2;q^2)_k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k q^{k^2+2kn}}{(q^2;q^2)_k}. \tag{3.2}$$

E então utilizando (3.2) em (3.1) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}.$$

que é exatamente o Teorema 3.1.1.

Agora interpretaremos o Teorema 3.1.1 como um teorema envolvendo partições com peso. Como podemos observar pelo fator $(aq^{2n+1};q^2)_\infty$ na Identidade de Andrews, para cada potência de q com expoente ímpar teremos um fator a multiplicando, assim definimos o seguinte peso para partições, que utilizaremos para deduzir o teorema que podemos associar à identidade.

Definição 3.1.2. *Seja $\pi : b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$ uma partição, a um número complexo e $\nu_0(\pi)$ a notação para o número de partes ímpares de π. Definimos o peso ω_0 de π como*

$$\omega_0(\pi) = (-1)^\nu a^{\nu_0(\pi)}.$$

Com o peso $\omega_0(\pi)$ definido como acima, podemos ver que para partições π pertencentes ao conjunto P_d das partições distintas, temos

$$\sum_{\pi\in P_d,\sigma(\pi)\geq 0}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)} = (q^2;q^2)_\infty(aq;q^2)_\infty. \tag{3.3}$$

E considerando $P_{d,e}$ o conjunto das partições com partes distintas com menor parte par. Temos a seguinte identidade

$$\sum_{\pi\in P_{d,e},\sigma(\pi)\geq 1}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} -q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty. \tag{3.4}$$

Diminuindo (3.4) de (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in P_d,\sigma(\pi)\geq 0}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)} - &\sum_{\pi\in P_{d,e},\sigma(\pi)\geq 1}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)}\\ &= (q^2;q^2)_\infty(aq;q^2)_\infty - \sum_{n=1}^{\infty} -q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty \qquad (3.5)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty.\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\sum_{\pi\in P_d,\sigma(\pi)\geq 0}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)} - \sum_{\pi\in P_{d,e},\sigma(\pi)\geq 1}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)} = \sum_{\pi\in P_{d,o},\sigma(\pi)\geq 1}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)}, \qquad (3.6)$$

onde $P_{d,o}$ é o conjunto das partições em partes distintas com menor parte ímpar.

E assim utilizando o Teorema 3.1.1 e (3.6) em (3.5), obtemos

$$\sum_{\pi\in P_{d,o},\sigma(\pi)\geq 0}\omega_0(\pi)q^{\sigma(\pi)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}. \qquad (3.7)$$

E assim, provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.3. *Seja $\pi \in P_{d,o}$ e ω_o como na Definição 3.1.2, então*

$$\sum_{\sigma(\pi)=n,\pi\in P_{d,o}}\omega_0(\pi) = (-a)^k, \text{ se } n = k^2, \text{ e } 0, \text{ caso contrário.}$$

Como podemos observar no seguinte exemplo, as partições de 9 em partes distints com menor parte ímpar são 9, 8+1, 6+3, 6+2+1 e 5+3+1 e seus pesos são $\omega_0(9) = (-1)^1a^1 = -a$, $\omega_0(8+1) = (-1)^2a^1 = a$, $\omega_0(6+3) = (-1)^2a^1 = a$, $\omega_0(6+2+1) = (-1)^3a^1 = -a$ e $\omega_0(5+3+1) = (-1)^3a^3 = -a^3$. Assim

$$\sum_{\sigma(\pi)=9,\pi\in P_{d,o}}\omega_0(\pi) = -a + a + a - a - a^3 = -a^3 = (-a)^3.$$

Agora estudaremos a seguinte identidade devida a Gauss vendo como pode ser provada a partir do Teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.4.

$$\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{T_k} \tag{3.8}$$

No Teorema 3.1.1 substituindo a por aq, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(aq^{2n+2};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{k^2+k}.$$

Agora substituindo q^2 por q

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n}(q^{n+1};q)_\infty(aq^{n+1};q)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k q^{T_k}, \tag{3.9}$$

e fazendo $a = -1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n}(q^{n+1};q)_\infty(-q^{n+1};q)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} q^{T_k},$$

multiplicando cada termo $(1-q^k)(1+q^k) = (1-q^{2k})$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n}(q^{2n+2};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} q^{T_k}$$

e reescrevendo $(q^{2n+2};q^2)_\infty = (q^2;q^2)_\infty/(q^2;q^2)_n$,

$$(q^2;q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q^2;q^2)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{T_k}.$$

Pelo Corolário 1.2.4, a expressão acima é o mesmo que

$$(q^2;q^2)_\infty \frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{T_k}$$

que é a Identidade 3.8, que queríamos provar.

Agora usaremos a definição de corda de uma partição que damos a seguir e o processo chamado de subtração euleriana para demonstrar uma identidade similar à apresentada acima e usaremos essa abordagem para deduzir alguns teoremas envolvendo partições com peso.

Definição 3.1.5. *Seja $\pi : b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$ uma partição de um inteiro n. Chamamos de corda o conjunto formado pelas k maiores partes tal que $b_i \neq b_{i+1}$ para $1 \leq i \leq k$ e $b_{k+1} = b_{k+2}$. E k é o comprimento da corda.*

Ou seja, uma corda é formada pelas maiores partes que não se repetem na partição. Por exemplo, a corda da partição $12+10+7+5+5+3+1$ é $(12, 10, 7)$, que possui tamanho 3, a corda da partição $6+4+4+2+2+2$ é (6), que possui tamanho 1 e para a partição $3+3+2+1+1+1$ observamos que a corda é vazia, pois a maior parte da partição se repete, logo possui tamanho 0.

Definição 3.1.6. *Seja π uma partição, de um inteiro n, com corda de comprimento l, definimos o peso $\omega_s(\pi)$ como sendo $l + 1$.*

Assim no exemplo acima $\omega_s(12+10+7+5+5+3+1) = 4$, $\omega_s(10+7+5+5+3+1) = 2$ e $\omega_s(3+3+2+1+1+1) = 1$.

Se, em (3.9), substituimos a por $-a$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^{n+1}; q)_\infty (-aq^{n+1}; q)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} a^k q^{T_k}.$$

Em seguida dividimos ambos os lados por $(q; q)_\infty$, obtendo assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_n} (-aq^{n+1}; q)_\infty = \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a^k q^{T_k}. \tag{3.10}$$

Agora provaremos combinatoriamente (3.10). Usando que $1/(q; q)_\infty$ é a função geradora para partições sem restrições, reescrevemos (3.10), como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_n} (-aq^{n+1}; q)_\infty &= \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a^k q^{T_k} \\
&= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a^k q^{T_k} \right\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} q^m \sum_{k} a^k p(m - T_k),
\end{aligned}$$

obtendo assim a seguinte identidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q;q)_n}(-aq^{n+1};q)_\infty = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \sum_k a^k p(m-T_k), \tag{3.11}$$

Assim o lado direito de (3.11) é a função geradora para soma com pesos, onde os pesos são tomados como a^k, da função partição sobre valores transladados $p(m-T_k)$.

Para analisar o lado esquerdo de (3.11), começamos por notar que o fator $\frac{q^n}{(q;q)_n}$ é a função geradora para partições com maior parte n, e o fator $(-aq^{n+1};q)_\infty$ é a função geradora para partições em partes distintas tal que as partes são maiores que n e a potência de a é o número de partes da partição.

Sendo assim, o lado esquerdo de (3.11) é a função geradora para as bi-partições (π_1, π_2), onde π_1 é uma partição sem qualquer restrição e π_2 é uma partição em partes distintas tal que suas partes são maiores do que as partes de π_1 e a potência de a conta o número de partes de π_2. Note que π_2 pode ser inclusive a partição vazia. Usaremos a definição de corda para interpretar essa decomposição.

Dada uma partição qualquer π de corda de comprimento l, para todo $k \leq l$ podemos separar as k maiores partes de π para formar uma partição π_4, e chamamos a partição formada pelas partes restantes π_3. Observamos π_4 é uma partição em partes distintas e que suas partes são maiores que as partes de π_3. Observamos também que tal decomposição pode ser feita de $l+1$ maneiras e que o lado esquerdo de (3.11) representa essa decomposição.

Uma decomposição diferente que pode ser feita é, a partir de uma partição sem retrições de um inteiro m de corda de comprimento l, escolhemos um $k \leq l$ e subtraímos $k-1$ da maior parte, $k-2$ da segunda menor parte, e assim sucessivamente até subtrairmos 0 da k-ésima maior parte, chamamos esse processo de subtração euleriana. A partir disso obtemos uma partição de $m - T_k$ em ao menos k partes.

O processo descrito acima pode ser revertido, a partir de uma partição de um inteiro qualquer em ao menos k partes, adicionamos $k-1$ à maior parte, $k-2$ à segunda menor parte, ..., e 0 à k-ésima maior parte, obtemos uma partição cujo comprimento de corda é $\geq k$.

Podemos observar que, em ambas as decomposições, a potência de a conta o número de partes de uma das partições obtidas. No primeiro caso, o número de partes da partição π_2 em partes distintas e, no segundo caso, da partição mínima.

Assim enquanto o lado esquerdo de (3.11) conta a divisão de uma partição usando cordas, o lado direito lida com a soma da função partição transladada por um número triangular. Pelo que vimos acima as duas são iguais pela subtração euleriana, provando assim (3.11) e (3.10).

Usando a abordagem utilizada acima deduziremos um outro teorema envolvendo partições com peso. Começamos considerando o caso especial $a=1$ em (3.10),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q;q)_n}(-q^{n+1};q)_\infty = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k+1)/2}$$

e utilizando (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q;q)_n}(-q^{n+1};q)_\infty &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = \frac{(q;q)_\infty(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty(q;q^2)_\infty} \\ &= \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = (-q^2;q^2)_\infty\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Observando que

$$\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} = 1 + \frac{2q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} = 1 + 2(q^{2m-1} + q^{2(2m-1)} + \cdots) \tag{3.13}$$

e definindo o seguinte peso para partições onde partes pares não se repetem

Definição 3.1.7. *Seja π^* uma partição de um inteiro n onde as partes pares não se repetem, e na qual aparecem $\nu_{d,o}(\pi^*)$ partes ímpares diferentes. Definimos o peso $\omega_\nu(\pi^*)$ como sendo $2^{\nu_{d,o}(\pi^*)}$.*

A partir de (3.13), vemos que o produto à direita de (3.12) é a função geradora para partições em que as partes pares não se repetem e essas partições π^* são contadas com peso $\omega_\nu(\pi)$.

Assim combinando os argumentos acima com (3.12), (3.11) e (3.10) obtemos o seguinte teorema envolvendo os pesos ω_s e ω_ν

Teorema 3.1.8. *Seja G o conjunto de todas as partições nas quais as partes pares não repetem. Seja π^* com o peso ω_ν. Então*

$$\sum_{\sigma(\pi)=n} \omega_s(\pi) = \sum_k p(n - T_k) = \sum_{\pi^* \in G, \sigma(\pi^*)=n} \omega_\nu(\pi^*)$$

Como podemos obervar no caso particular $n = 4$, as partições de 4 são 4, 3+1, 2+2, 2+1+1 e 1+1+1+1 e o peso ω_s de cada uma é $\omega_s(4) = 2$, $\omega_s(3 + 1) = 3$, $\omega_s(2 + 2) = 1$, $\omega_s(2 + 1 + 1) = 2$ e $\omega_s(1 + 1 + 1 + 1) = 1$. Assim

$$\sum_{\sigma(\pi)=4} \omega_s(\pi) = 2 + 3 + 1 + 2 + 1 = 9,$$

$$\sum_k p(4-T_k) = p(4-T_0)+p(4-T_1)+p(4-T_2) = p(4-0)+p(4-1)+p(4-3) = p(4)+p(3)+p(1) = 5+3$$

e as partições de 4 em que as partes pares não se repetem são 4, 3+1, 2+1+1 e 1+1+1+1, logo

$$\sum_{\pi^* \in G, \sigma(\pi^*)=4} \omega_\nu(\pi^*) = \omega_\nu(4)+\omega_\nu(3+1)+\omega_\nu(2+1+1)+\omega_\nu(1+1+1+1) = 2^0+2^2+2+1+1+2^1+2^1 = 1+$$

A partir da seguinte definição de peso deduziremos mais um teorema envolvendo partições com peso.

Definição 3.1.9. *Seja $\tilde{\pi}$ uma partição de um inteiro n onde as partes ímpares não se repetem, e na qual aparecem $\nu_{d,e}(\tilde{\pi})$ partes pares diferentes. Definimos o peso $\omega_{\nu_e}(\tilde{\pi})$ como sendo $2^{\nu_{d,e}(\tilde{\pi})}$.*

Sendo A o conjunto das partições onde as partes ímpares não se repetem, temos que a função geradora para as partições $\tilde{\pi} \in A$ é

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

Observando a seguinte forma de decompor a função geradora para a função partição $p(n)$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{(-q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty(q;q)_\infty} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} = (-q;q^2)_\infty \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

E analogamente a (3.13), vemos que

$$\frac{1+q^{2m}}{1-q^{2m}} = 1 + 2(q^{2m} + q^{2(2m)} + q^{4(2m)} + \cdots)$$

e assim chegamos ao seguinte teorema

Teorema 3.1.10. *Seja A o conjunto de todas as partições nas quais as partes ímpares não se repetem. Seja $\tilde{\pi}$ com o peso ω_{ν_e}. Então*

$$p(n) = \sum_{\tilde{\pi} \in A, \sigma(\tilde{\pi})=n} \omega_{\nu_e}(\tilde{\pi}).$$

Que podemos observar no exemplo a seguir para $n = 4$, as partições de 4 são 4, 3+1, 2+2, 2+1+1 e 1+1+1+1, logo p(4)=5 e suas partições em que as partes ímpares não se repetem são 4, 3+1 e 2+2, logo

$$\sum_{\tilde{\pi} \in A, \sigma(\tilde{\pi})=4} \omega_{\nu_e}(\tilde{\pi}) = \omega_{\nu_e}(4) + \omega_{\nu_e}(3+1)\omega_{\nu_e}(2+2) = 2^1 + 2^0 + 2^1 = 2+1+2 = 5 = p(4).$$

3.2 Representação Analítica do Teorema 3.1.3 e Algumas Consequências

Nesta seção estudaremos a representação analítica abaixo para o Teorema 3.1.3, que é mais clara do que a apresentada no Teorema 3.1.1 . E a seguir veremos alguns teoremas como consequência envolvendo estimativas para algumas funções partição.

Começamos observando que a expressão abaixo é a função geradora para partições em partes distintas com menor parte ímpar, onde a potência de a conta o número de partes ímpares da partição.

$$\sum_{n=1}^{\infty} -aq^{2n-1}(q^{2n};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty$$

Dessa forma, o Teorema 3.1.3 pode ser escrito da seguinte maneira

$$\sum_{n=1}^{\infty} -aq^{2n-1}(q^{2n};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{k=1}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}, \tag{3.14}$$

a qual podemos reescrever como

$$\sum_{n=1}^{\infty} -aq^{2n-1}(q^{2n};q^2)_\infty(aq^{2n+1};q^2)_\infty \frac{(aq;q^2)_n}{(aq;q^2)_n} = \sum_{k=1}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -aq^{2n-1}(q^{2n};q^2)_\infty \frac{(aq;q^2)_\infty}{(aq;q^2)_n} = \sum_{k=1}^{\infty}(-a)^k q^{k^2}$$

e para o caso especial $a = 1$, obtemos

$$-(q;q^2)_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n}(q^{2n};q^2)_\infty = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}. \tag{3.15}$$

Pelo Corolário 1.2.2, temos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} = \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}.$$

Podemos reescrever o lado esquerdo da equação acima como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} &= \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^k q^{k^2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} \\
&= \sum_{k=\infty}^{1}(-1)^{-k} q^{(-k)^2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2},
\end{aligned}$$

obtendo dessa forma que

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}=\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty},$$

que é equivalente a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}-1\right\}. \tag{3.16}$$

Assim, substituindo (3.16) em (3.15), obtemos

$$-(q;q^2)_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n}(q^{2n};q^2)_\infty=\frac{1}{2}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}-1\right\}.$$

Dividindo ambos os lados por $-(q;q^2)_\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n}(q^{2n};q^2)_\infty=-\frac{1}{2(q;q^2)_\infty}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}-1\right\} \tag{3.17}$$

e, utilizando o Teorema de Euler,

$$(-q;q)_\infty=\frac{1}{(q;q^2)_\infty}$$

a equação (3.17) se torna

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n}(q^{2n};q^2)_\infty=\frac{(-q;q)_\infty-(q;q)_\infty}{2}. \tag{3.18}$$

Substituindo $t=zq$ no Corolário 1.2.4, temos que

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q;q)_n}=(-zq;q)_\infty$$

tomando a componente ímpar para a função em z acima, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}q^{n(2n-1)}}{(q;q)_{2n-1}}=\frac{(-zq;q)_\infty-(zq;q)_\infty}{2}$$

e, avaliando em $z=1$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(2n-1)}}{(q;q)_{2n-1}}=\frac{(-q;q)_\infty-(q;q)_\infty}{2} \tag{3.19}$$

e então, substituindo (3.19) em (3.18), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n}(q^{2n};q^2)_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(2n-1)}}{(q;q)_{2n-1}}.$$

Dividindo ambos os lados por $(q^2;q^2)_\infty$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n(q^2;q^2)_{n-1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(2n-1)}}{(q;q)_{2n-1}}$$

que podemos reescrever como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(2n-1)}}{(q;q)_{2n-1}}. \tag{3.20}$$

Daremos agora uma demonstração combinatória para (3.20). O lado esquerdo de (3.20), é a função geradora para partições com maior parte ímpar, mas através da conjugação, temos que pode ser vista como a função geradora das partições π em um número ímpar de partes. Escrevemos π da seguinte forma

$$\pi = \sum_{i\geq 1} f_i \cdot i,$$

onde i é um inteiro, representando as partes que aparecerão em π, e $f_i \geq 0$ é a frequência em que a parte i aparece na partição.

Sabemos que o número total de partes é ímpar e que pode ser representado da seguinte forma

$$\sum_i f_i.$$

Podemos escrever f_i da seguinte forma

$$f_i = 2\lfloor f_i/2 \rfloor + \delta_i, \tag{3.21}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro $\leq x$, e δ_i é 0 ou 1. Podemos observar que, como $\sum_i f_i$ é ímpar, e

$$\sum_i f_i. = \sum_i 2\lfloor f_i/2 \rfloor + \delta_i = 2\sum_i \lfloor f_i/2 \rfloor + \sum_i \delta_i,$$

temos que $\sum_i \delta_i$ é também ímpar.

Utilizando (3.21), podemos escrever π na forma

$$\pi = \sum_{i\geq 1} \lfloor f_i/2 \rfloor 2i + \sum_i \delta_i \cdot i,$$

que podemos interpretar como a decomposição de π na forma $(\pi_2, \pi_{1,d})$, onde π_2 é uma partição em partes pares e $\pi_{1,d}$ é uma partição em partes distintas, já que $\delta_i = 0$ ou 1, e com número de partes $\sum_i \delta_i$, que sabemos ser ímpar.

E observando o lado direito de (3.20), podemos notar que é a função geradora para as bi-partições $(\pi_2, \pi_{1,d})$ descritas acima, provando dessa forma (3.20).

Usando os argumentos acima, além de provar a equação (3.20), deduziremos alguns teoremas envolvendo partições com peso, fazendo estimativas para algumas funções partição.

Reescrevendo a equação (3.18), obtemos

$$(-q;q)_\infty = (q;q)_\infty + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(q;q^2)_n}(q^{2n};q^2)_\infty. \tag{3.22}$$

A seguir definimos S como o conjunto de partições em que as partes pares não se repetem, existe pelo menos uma parte ímpar e as partes pares são maiores que as partes ímpares. Sendo $S(n)$ a notação para o número de partições de n em S, e $S_e(n)$ o número de partições de n em S, onde o número de partes pares é par, e $S_o(n)$ o número de partições de n em S, onde o número de partes pares é ímpar, observamos que nos termos da série à direita a partição possui uma parte ímpar devido ao fator q^{2n-1}, o fator $(q;q^2)_n$ pode ser interpretado como inserindo prtes ímpares de tamanho até $2n-1$ e pelo fator $(q^2n;q^2)_\infty$ vemos que as partes pares são distintas e maiores que as partes ímpares, e como para cada parte par multiplicamos por -1, as partições com um número par de partes pares são contadas positivamente e as com um número ímpar de partes pares são contadas negativamente, assim a série à direita de (3.22) é a função geradora para $S_e(n) - S_o(n)$.

E pelo Teorema do Número Pentagonal de Euler, temos que $(q;q)_\infty$ é a função geradora para ε_n, onde

$$\varepsilon_n = (-1)^k, \text{ se } n = (3k^2 \pm k)/2, \text{ e } 0, \text{ caso contrário.}$$

E interpretando $(-q;q)_\infty$ como a função geradora de $P_d(n)$, número de partições de n em partes distintas, obtemos o seguinte teorema

Teorema 3.2.1. *Para* $n \geq 1$,

$$P_d(n) = \varepsilon_n + 2(S_e(n) - S_o(n)).$$

Como pode ser visto no seguinte exemplo, as partições de 7 em partes distintas são 7, 6+1, 5+2, 4+3 e 4+2+1, logo $P_d(7) = 5$ e como $7 = (3 \cdot 2^2 + 2)/2$, $\varepsilon_7 = (-1)^2 = 1$. As partições de 7 em que as pates pares são distintas, pelo menos uma parte ímpar aparece, as partes pares são maiores que as partes ímpares e possui um número par de partes pares são 7, 5+1+1, 4+2+1, 3+3+1, 3+1+1+1+1 e 1+1+1+1+1+1+1, e as com um número ímpar de partes pares são 6+1, 4+3, 4+1+1+1 e 2+1+1+1+1+1. Assim $S_e(7) = 6$ e $S_o(7) = 4$. Dessa forma podemos ver o resultado do teorema acima.

$$\varepsilon_7 + 2(S_e(7) - S_o(7)) = 1 + 2(6-4) = 1 + 2 \cdot 2 = 5 = P_d(7)$$

Do Teorema do Número Pentagonal de Euler e pelo que podemos ver acima $P_d(n)$ é ímpar nos números pentagonais e par em todos os outros, o que podemos ver pela demonstração combinatória de Franklin para o Teorema do Número Pentagonal que pode ser vista em [6], onde as partições enumeradas por $P_d(n)$ são divididas em dois conjuntos de tamanho igual, exceto nos números pentagonais. O Teorema 3.2.1, se mostra interessante, pois relaciona a paridade de $P_d(n)$ com outro conjunto de partições.

Agora veremos outra consequencia interessante do Teorema 3.2.1. Pelo Teorema de Euler, temos que $P_d(n) = \mathcal{O}(n)$, e como toda partição em partes ímpares é uma partição em $S(n)$, temos que $S(n) \geq \mathcal{O}(n)$, e portanto $S(n) \geq P_d(n)$. Além disso, como uma partição em partes ímpares tem um número par de partes pares (zero), que não se repetem, logo

$$S_e(n) \geq P_d(n). \tag{3.23}$$

Reescrevendo o Teorema 3.2.1 da seguinte forma,

$$S_e(n) - S_o(n) = \frac{P_d(n)}{2} - \frac{\varepsilon_n}{2}$$

$$S_o(n) = S_e(n) - \frac{P_d(n)}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2}$$

e utiliziando (3.23), obtemos

$$S_o(n) \geq P_d(n) - \frac{P_d(n)}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{P_d(n)}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2}. \tag{3.24}$$

E, como $S(n) = S_e(n) + S_o(n)$, pela definição de $S_e(n)$ e $S_o(n)$, temos por (3.23) e (3.24), que

$$S(n) = S_e(n) + S_o(n) \geq \frac{P_d(n)}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2} + P_d(n)$$

de onde obtemos

Teorema 3.2.2. *Para* $n \geq 1$,

$$S(n) \geq \frac{3}{2}P_d(n) + \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Que podemos conferir no seguinte exemplo, $S(7) = S_e(7) + S_o(7) = 6 + 4 = 10$, e como $P_d(7) = 5$ temos que

$$\frac{3}{2}P_d(7) + \frac{\varepsilon_7}{2} = \frac{3}{2}5 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \leq 10 = S(7)$$

Usaremos agora um dos métodos utilizados anteriormente, para obter alguns teoremas similares aos anteriores. Bem como analisaremos o método de divisão em partes pares e ímpares de Euler e como pode ser utilizado para obter os resultados citados acima.

Aqui ao invés de considerarmos a componente ímpar de $(-q;q)_\infty$, consideraremos a sua componente par

$$\frac{(-q;q)_\infty + (q;q)_\infty}{2}.$$

Considerando a identidade

$$(-zq;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$$

tomamos sua componente par como função de z

$$\frac{(-zq;q)_\infty + (zq;q)_\infty}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} q^{n(2n+1)}}{(q;q)_{2n}}$$

e avaliando para $z = 1$, obtemos

$$\frac{(-q;q)_\infty + (q;q)_\infty}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q;q)_{2n}}. \tag{3.25}$$

Do Teorema 3.1.1, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty (aq^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k q^{k^2}$$

e, analogamente ao processo aplicado em (3.16), para $a = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty (q^{2n+1};q^2)_\infty &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} + 1\right\}.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $(q;q^2)_\infty$, temos que

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty (q^{2n+1};q^2)_\infty = \frac{1}{2(q;q^2)_\infty}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} + 1\right\}$$

e, utilizando o Teorema de Euler, concluímos que

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty (q^{2n+1};q^2)_\infty = \frac{(-q;q)_\infty}{2}\left\{\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} + 1\right\}.$$

Reescrevendo, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q;q^2)_n}(q^{2n+2};q^2)_\infty = \frac{(q;q)_\infty + (-q;q)_\infty}{2}. \tag{3.26}$$

E podemos reescrever (3.26) como

$$(-q;q)_\infty = -(q;q)_\infty + 2\left\{(q^2;q^2)_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q;q^2)_n}(q^{2n+2};q^2)_\infty\right\}. \tag{3.27}$$

Agora considerando T como o conjunto das partições que possuem pelo menos uma parte par, as partes pares não se repetem e as partes pares são maiores que as partes ímpares. Seja $T(n)$ o número de partições de n em T, $T_e(n)$ o número de partições em T tal que o número de partes pares é par e $T_o(n)$ o número de partições em T tal que o número de partes pares é ímpar. Podemos notar então que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q;q^2)_n}(q^{2n+2};q^2)_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{T_o(n) - T_e(n)\right\} q^n. \tag{3.28}$$

Pela definição de T, as partições contadas por $T(n)$ podem ou não possuir partes ímpares. Considerando π_0 uma partição em T que não possui partes ímpares, seja T^* o conjunto de tais partições. Sejam $T^*(n)$, $T_e^*(n)$ e $T_o^*(n)$, definidas de maneira análoga à maneira acima. Podemos observar que T^* é o conjunto das partições não vazias em partes pares distintas, logo

$$(q^2;q^2)_\infty = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{T_e^*(n) - T_o^*(n)\right\} q^n. \tag{3.29}$$

Pela definição de T^*, podemos ver que é um subconjunto de T, e que $\tilde{T} = T - T^*$ é conjunto da partições em T que possuem uma parte ímpar. Assim, utilizando (3.28) e (3.29) em (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}
(-q;q)_\infty &= -(q;q)_\infty + 2\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\{T_e^*(n) - T_o^*(n)\}\, q^n + \sum_{n=1}^{\infty}\{T_o(n) - T_e(n)\}\, q^n\right\} \\
&= -(q;q)_\infty + 2\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\{T_o(n) - T_o^*(n) - T_e(n) + T_e^*(n)\}\, q^n\right\} \\
&= -(q;q)_\infty + 2\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\tilde{T}_o(n) - \tilde{T}_e(n)\right\} q^n\right\}.
\end{aligned}$$

E então, analogamente ao Teorema 3.2.1, obtemos

Teorema 3.2.3. *Para* $n \geq 1$*,*

$$P_d(n) = -\varepsilon_n + 2(\tilde{T}_o(n) - \tilde{T}_e(n)).$$

Que podemos observar no seguinte exemplo para $n = 7$, vimos nos exemplos anteriores que $P_d(7) = 5$ e $\varepsilon_7 = 1$. as partições de 7 onde as partes pares são distintas, possui pelo menos uma parte par e uma parte ímpar e as partes ímpares são menores que as partes pares e que possuem um número ímpar de partes pares são 6+1, 4+3, 4+1+1+1 e 2+1+1+1+1+1 e que possui um número par de pates pares é 4+2+1, portanto $\tilde{T}_o(7) = 4$ e $\tilde{T}_e(7) = 1$. Dessa forma

$$-\varepsilon_7 + 2(\tilde{T}_o(7) - \tilde{T}_e(7)) = -1 + 2(4-1) = -1 + 2 \cdot 3 = 5 = P_d(7).$$

Só que, ao contrário de antes, não possuímos desigualdades de estimativas para o valor de $P_d(n)$.

Capítulo 4

Um Teorema de Andrews

Nesse capítulo, seguindo os trabalhos desenvolvidos por Alladi em [2] e [3], estudaremos o seguinte Teorema de partições de Andrews que lembra o Teorema 2.1.1. Observamos que mesmo que na definição de partição seja exigido que as partes sejam positivas, aqui permitiremos uma parte de tamanho 0.

Teorema 4.0.4. (Teorema de Andrews) *Sejam $\varepsilon_e(n)$, e $\varepsilon_o(n)$, a notação para o número de partições de n em partes distintas não negativas com menor parte par tais que o número de partes pares é par, e respectivamente ímpar. Então*

$$\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n) = 1 \text{ se } n = k^2, \text{ e } 0 \text{ caso contrário.}$$

Como podemos observar no seguinte exemplo, para $n = 9$, suas partições em partes distintas não negativas com menor parte par são as seguintes:

$9+0$	$5+4$
$8+1+0$	$5+4+0$
$7+2$	$5+3+1+0$
$7+2+0$	$4+3+2$
$6+3+0$	$4+3+2+0$
$6+2+1+0$	

Onde as partições enumeradas por $\varepsilon_e(9)$ são

$8+1+0$	$5+4+0$
$7+2+0$	$4+3+2$
$6+3+0$	

e as partições enumeradas por $\varepsilon_o(9)$ são

$9+0$	$5+4$
$7+2$	$5+3+1+0$
$6+2+1+0$	$4+3+2+0$

sendo assim $\varepsilon_o(9)-\varepsilon_e(9)=6-5=1$.

A seguir provaremos o teorema de três formas diferentes, analiticamente, combinatoriamente e como um caso particular do Teorema 3.1.3.

Começamos com a demonstração analítica apresentada por Stenger em [9] em resposta a um problema proposto por Andrews em [4].

Demonstração: A função geradora para $\varepsilon_o(n)-\varepsilon_e(n)$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(-q^{2n+1};-q)_\infty = \left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(-q;-q)_{2n}}\right\}, \qquad (4.1)$$

pois podemos observar que pelo fator q^2n, teremos partições com menor parte par, as partes serão distintas devido ao fator $(-q^{2n+1};-q)_\infty$ e como $(-q^{2n+1};-q)_\infty =$

$(-q^{2n+1};q^2)_\infty(q^{2n+2};q^2)_\infty$, vemos que para cada parte par na partição multiplicamos por -1, e contando a parte $2n$ as partições com um número ímpar de partes pares serão contadas positivamente e as com um número par de partes pares serão contadas negativamente.

Pelo Corolário 1.2.4 temos que

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(q;q)_n}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-tq^n)^{-1}.$$

Fazendo a substituição $t=q$ e também $t=-q$, temos

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(q;q)_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)},$$

e

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q)^n}{(q;q)_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^n)}.$$

Somando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(q;q)_{2n}}&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)}+\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)}+\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{(1-q^{2n})}\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)}+\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}).\end{aligned}$$

Trocando q por $-q$ e dividindo por 2, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(-q;-q)_{2n}}=\frac{1}{2}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})}+\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\right\},$$

e então (4.1) fica

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}(-q^{2n+1};-q)_\infty&=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(-q;-q)_{2n}}\right\}\\&=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})\right\}\frac{1}{2}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})}+\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.2.1, temos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1+zq^{2n+1})(1+z^{-1}q^{2n+1}).$$

Fazendo $z=1$, obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2$$

e então, substituindo na equação acima, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(-q^{2n+1};-q)_\infty &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2},\end{aligned}$$

obtendo assim o resultado desejado. ■

Agora apresentamos a demonstração combinatória seguindo o trabalho desenvolvido em [2] para o Teorema 4.0.4. Queremos provar a seguinte identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(-q^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(-q^{2n+1};-q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}.$$

Veremos a conexão entre o Teorema de Andrews e o Teorema 2.2.3. Dada uma partição em partes distintas não negativas com menor parte par, podemos ter a menor parte positiva, a menor parte nula e segunda menor parte par ou a menor parte nula e segunda menor parte ímpar.

Se a partir de uma partição λ com menor parte positiva adicionarmos zero como uma parte, obtemos uma partição λ' com menor parte zero e segunda menor parte par, onde a paridade do número de partes pares de λ é contrária da de λ' e assim se cancelam na diferença $\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n)$.

Dessa maneira as únicas partições que contribuem nessa diferença são as partições com menor parte zero e segunda menor parte ímpar. E então retirando a parte zero temos que

$$\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n) = \delta_e(n) - \delta_o(n)$$

onde $\delta_o(n)$ é a notação para o número de partições em partes distintas com menor parte ímpar e um número ímpar de partes pares, e $\delta_e(n)$ é a notação para o número de partições em partes distintas com menor parte ímpar e um número par de partes pares.

Seja λ partição de n par, em partes distintas com menor parte ímpar, temos que as partes ímpares aparecem aos pares, logo a paridade do número total de partes é a mesma do número de partes pares e assim

$$\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n) = \delta_e(n) - \delta_o(n) = R_e(n) - R_o(n),$$

onde $R_o(n)$ e $R_e(n)$ é como no Teorema 2.1.1 e de onde temos que

$$\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n) = R_e(n) - R_o(n) = (-1)^k = 1 \text{ se } n = k^2 \text{ e } 0 \text{ caso contrário.}$$

E caso n seja ímpar, teremos um número ímpar de partes ímpares, e sendo assim a paridade do número de partes é inversa à paridade do número de partes ímpares, e então

$$\begin{aligned}\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n) = \delta_e(n) - \delta_o(n) = R_o(n) - R_e(n) = \\ = -(-1)^k = -(-1) = 1 \text{ se } n = k^2 \text{ e } 0 \text{ caso contrário.}\end{aligned}$$

Sendo assim provamos combinatoriamente o Teorema 4.0.4 e estabelecemos uma correpondência com o Teorema 2.1.1.

Seguindo o trabalho desenvolvido em [3], daremos uma prova para o Teorema 4.0.4 como um caso particular do Teorema 3.1.3.

Se fizermos $a = -1$ no Teorema 3.1.1, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(q^{2n+2};q^2)_\infty(-q^{2n+1};q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2}$$

e, como observado antes, o lado esquerdo da identidade acima é a função geradora para $\varepsilon_o(n) - \varepsilon_e(n)$, provando assim o Teorema 4.0.4.

Referências Bibliográficas

[1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Variable*, Mcgraw-Hill, New York, 1979.

[2] Alladi, K., *"A Partial Theta Identity of Ramanujan and Its Number-Theoretic Interpretation"*, The Ramanujan Journal, vol. 20, 329-339, 2009.

[3] Alladi, K., *"A Combinatorial Study and Comparison of Partial Theta Identity of Andrews and Ramanujan"*, The Ramanujan Journal, vol. 23, 227-241, 2010.

[4] Andrews, G. E., *Problem 5865*, American Mathematical Monthly, vol. 79, p. 668, 1972.

[5] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[6] Andrews, G. E.; Eriksson, K., *Integer Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[7] Andrews, G. E.; Berndt; Bruce C., *Ramanujan's lost notebook. Part I*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 2005.

[8] Andrews, G. E.; Berndt; Bruce C., *Ramanujan's lost notebook. Part II*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 2009.

[9] Stenger, A., *"Solution to Problem 5865"*, American Mathematical Monthly, vol. 83, p. 1148, 1973.