

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

EFEITOS DE FLUTUAÇÕES  
NAS PROPRIEDADES CRÍTICAS E TRICRÍTICAS  
DO MODELO DE POTTS DE TRÊS ESTADOS  
COM QUEBRA DE SIMETRIA\*

*Marcia Cristina Bernardes Barbosa*

Tese realizada sob a orientação do Professor Walter Karl Theumann, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

\* Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Porto Alegre

1988

"...

*o amor jamais acaba."*

- I Cor 13 -

À Deborah

"...

*Join the crazed institution of the stars, be the man that you think (know) you really are".*

- Ian Anderson -

Ao Felipe

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS .....	3
RESUMO .....	4
1. INTRODUÇÃO .....	7
2. O MODELO DE POTTS DE TRÊS ESTADOS E SUAS REALIZAÇÕES CONTÍNUAS .....	27
2.1 O Modelo e a sua Versão Contínua .....	27
2.2 Expansão de Landau para a Energia Livre .....	37
2.3 Realizações Físicas do Modelo de Potts .....	48
2.3.1 Sistemas Magnéticos com Anisotropia Cúbica sob a Ação de Campo Magnético Externo Não Diagonal $\vec{h}/[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$ .....	48
2.3.2 O $\text{SrTiO}_3$ sob Tensão Não Diagonal $\vec{p}/[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$ .....	59
2.4 Resumo .....	77
3. INFLUÊNCIA DE FLUTUAÇÕES E DE QUEBRA DE SIMETRIA NO COMPORTAMENTO CRÍTICO E TRICRÍTICO DO MODELO DE POTTS DE TRÊS ESTADOS .....	79
3.1 Introdução .....	79
3.2 Equações do Grupo de Renormalização .....	83
3.2.1 Introdução .....	83
3.2.2 Eliminação das Componentes Altas de Fourier .....	84
3.2.3 Renumeração das Componentes Baixas de Fourier .....	88
3.2.4 Renumeração do Número de Graus de Liberdade .....	91
3.2.5 $\ell$ Infinitesimal .....	92
3.3 Influência de Flutuações e de Quebra de Simetria no Comportamento Crítico e Tricrítico do Modelo de Potts de Três Estados: Um Estu- do em $d = 6 - \epsilon$ Dimensões .....	101
3.3.1 Solução das Relações de Recorrência .....	101
3.3.2 Estudo da Influência de Flutuações e da Quebra de Simetria no Comportamento Crítico do Modelo de Potts de Três Estados em $d = 6 - \epsilon$ Dimensões .....	121
3.3.3 Estudo do Efeito de Flutuações e de Quebra de Simetria no Comportamento Tricrítico do Modelo de Potts de Três Estados em $d = 6 - \epsilon$ Dimensões .....	130
3.3.4 Razões de Parâmetros Críticos e Tricríticos .....	138

3.4	Influência de Flutuações e de Quebra de Simetria no Comportamento Crítico e Tricrítico do Modelo de Potts de Três Estados: Um Estudo em $d = 4 - \epsilon$ Dimensões .....	140
3.4.1	Forma de Escala em $d = 4 - \epsilon$ Dimensões .....	140
3.4.2	Solução das Relações de Recorrência em $d = 4 - \epsilon$ Dimensões .....	141
3.4.3	Estudo da Influência de Flutuações e de Quebra de Simetria no Comportamento Crítico do Modelo de Potts de Três Estados em $d = 4 - \epsilon$ Dimensões .....	151
3.4.4	Estudo da Influência de Flutuações e da Quebra de Simetria no Comportamento Tricrítico do Modelo de Potts de Três Estados em $d = 4 - \epsilon$ Dimensões .....	160
3.4.5	Razões de Parâmetros Críticos e Tricríticos .....	168
3.5	Aplicação ao $\text{SrTiO}_3$ .....	172
4.	EQUAÇÃO DE ESTADO E RAZÃO DE SUSCEPTIBILIDADES CALCULADAS ACIMA E ABAIXO DE $T_c$ .....	180
4.1	Introdução .....	180
4.2	Funções Termodinâmicas .....	180
4.3	Curva de Coexistência entre as Fases I e II e Equação de Estado do $\text{SrTiO}_3$ .....	210
4.3.1	Curva de Coexistência entre as Fases I e II .....	210
4.3.2	Equação de Estado para o $\text{SrTiO}_3$ sob a Ação de uma Pressão $p$ Segundo a Direção $[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$ .....	213
5.	RESUMO E CONCLUSÕES .....	222
	ABSTRACT .....	230
	APÊNDICE A	
	CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE $a_1(k), a_2(k), b_1(k_1, k_2), b_2(k_1, k_2), c_1(k_1, k_2, k_3), c_2(k_1, k_2, k_3)$ e $c_3(k_1, k_2, k_3)$ e $d$ .....	231
	APÊNDICE B	
	CÁLCULO DE $I_i, J_i(k), L_i(k_1, k_2)$ e $T_i(k_1, k_2, k_3)$ .....	255
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	261

## AGRADEÇO A

*Walter Karl Theumann pela orientação;*

*Rui e Paula Barbosa por me possibilitarem uma  
formação científica;*

*Maria Cecília do Amaral e a Ana Neri J. Nunes  
pela datilografia dos trabalhos relacionados  
a esta tese.*

## RESUMO

Estudam-se os efeitos de flutuações nas propriedades críticas e tricríticas do modelo de Potts anisotrópico de três estados na presença de um campo externo, na teoria de campos contínuos. Partindo de uma extensão da teoria de transições de fase de Landau, introduzem-se transformações do grupo de renormalização, em primeira ordem em  $\epsilon = d_c - d$ , para gerar relações de recorrência. Estas equações diferenciais são resolvidas em dois casos: (a)  $d_c = 6$ , a dimensionalidade crítica de teorias  $\phi^3$ ; (b)  $d_c = 4$ , a dimensionalidade crítica de teorias  $\phi^4$  (modelo XY). Em ambos os casos, obtêm-se razões não universais de temperaturas  $\frac{t}{t_c}$ , de magnetizações  $\frac{m_t}{m_c}$  e de campos externos  $\frac{h_t}{h_c}$  do modelo XY nos pontos crítico e tricrítico do modelo de Potts. Tais resultados são aplicados ao estudo da transição de fase estrutural do  $\text{SrTiO}_3$  sob a ação de uma pressão não diagonal  $\vec{p} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  levando a uma razão não universal de  $\frac{\delta_t}{\delta_c}$ . Procuram-se formas de escala explícitas e universais para a susceptibilidade, a magnetização e a parte singular da energia livre obtendo-se na região crítica em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões, obtendo-se um "crossover" do comportamento do modelo XY ao comportamento do modelo de Potts. Obtém-se que a razão entre a susceptibilidade calculada acima e abaixo do ponto crítico é uma quantidade universal.

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de transições de fases é um tema de muito interesse na atualidade. Em muitos casos, as várias fases que um dado sistema pode assumir são bem diferenciadas e transições entre elas se dão de forma abrupta. Variando-se algum parâmetro da teoria, a temperatura, por exemplo, duas fases podem tornar-se mais e mais semelhantes em suas propriedades até que, num dado ponto, suas diferenças desaparecem. Além deste ponto não há duas fases, uma única fase homogênea persiste. Para exemplificar melhor, tomemos um sistema magnético. Para baixas temperaturas, na ausência de campo externo, tal sistema encontra-se ordenado em duas possíveis fases: magnetização  $+M_0$  e magnetização  $-M_0$ . A transição entre estas duas fases se dá de forma abrupta com  $\Delta M = 2M_0$ . Aumentando a temperatura, no entanto,  $M_0$  torna-se cada vez menor, a transição entre as fases  $+M_0$  e  $-M_0$  torna-se menos abrupta. No limite de  $T \rightarrow T_c^-$ , teremos  $M_0(T) = 0$  e a transição se dá de forma contínua. Para  $T \geq T_c$ , o sistema apresenta uma única fase de  $M_0 = 0$ : fase desordenada (Fig. 1.1)<sup>1,2</sup>.

Mais formalmente definimos transições onde derivadas de primeira ordem de potenciais termodinâmicos relevantes mudam descontinuamente em função de suas variáveis como transições de fase de primeira ordem (Fig. 1.1). Para o caso magnético, a magnetização  $M = -(\partial F / \partial H)_T$ , onde  $F$  é a energia livre de Gibbs e  $H$  é o campo magnético aplicado, muda de valor abruptamente, ao mudarmos o sinal do campo externo aplicado (Fig. 1.2) para  $T < T_c$ .

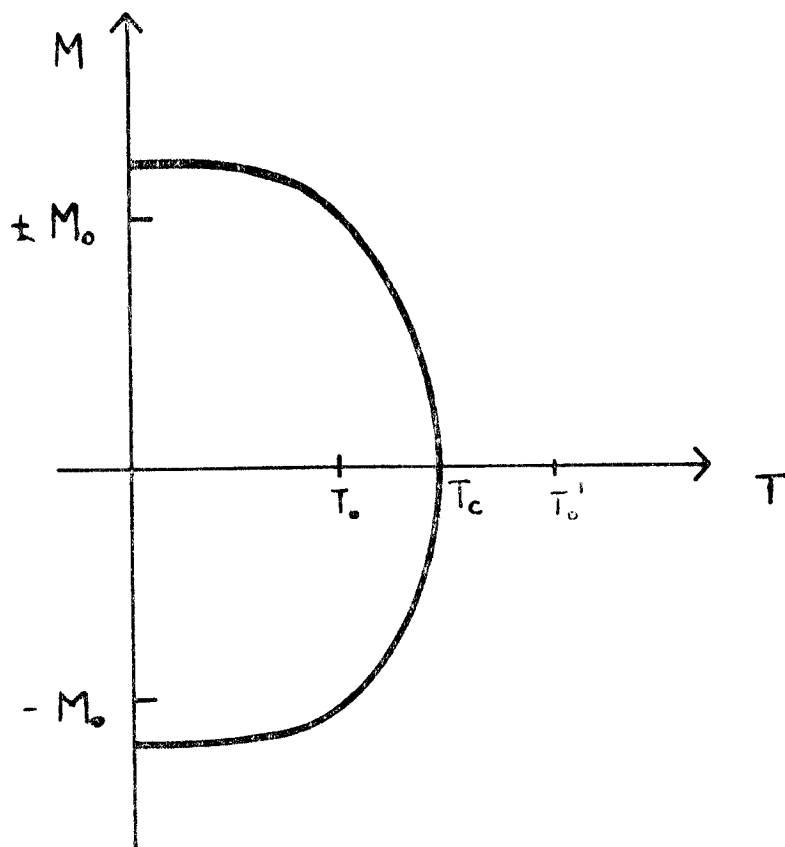


Figura 1.1 - Gráfico de magnetização  $\times$  temperatura para um sistema magnético na ausência de campo externo aplicado.  
 (a) Para  $T_0 < T_c$  o sistema apresenta duas fases distintas com  $M = \pm M_0$ ; (b) Para  $T_0' > T_c$  o sistema apresenta uma única fase com  $M = 0$ . Em  $T = T_c$  há uma transição de fase contínua de segunda ordem.



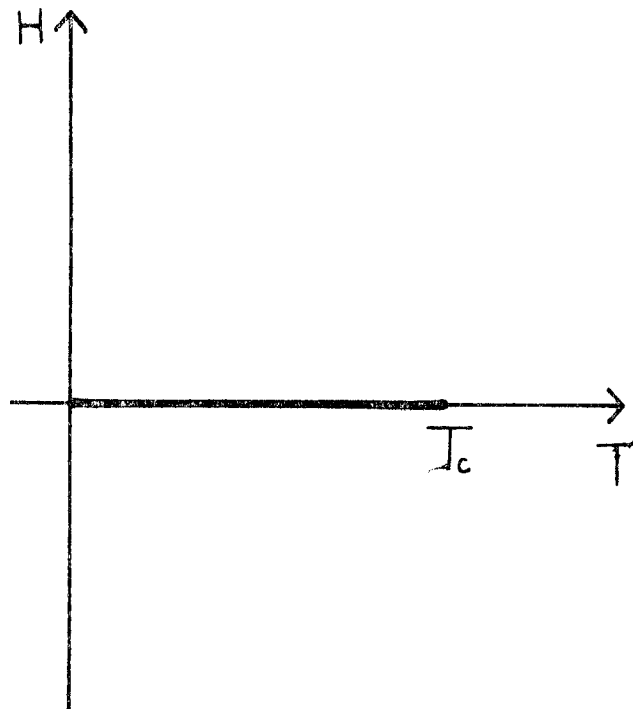


Figura 1.2 - Gráfico de campo externo em função da temperatura. (a)  $T < T_c$ . Neste caso, para  $H \geq 0$ , o sistema encontra-se ordenado com magnetização  $M = +M_0$ ; para  $H \leq 0$ , o sistema ordena-se com  $M = -M_0$ . Em  $H = 0$  as duas fases coexistem. Na passagem por  $H = 0$  há uma mudança abrupta no valor da magnetização (transição de fase de primeira ordem); (b) Para  $T > T_c$ , em  $H = 0$ , a magnetização  $M = 0$ . Na passagem de  $H$  por zero a magnetização muda de sinal continuamente em  $T = T_c$  (transição de fase de segunda ordem).

Por outro lado, transições nas quais as derivadas de primeira ordem permanecem contínuas, mas derivadas de ordem superior sejam divergentes em determinados pontos, são, em geral, denominadas transições de fase contínuas de segunda ordem. Para o caso magnético, a magnetização  $M$  será contínua, mas a susceptibilidade  $\chi = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial H^2}\right)_T$  apresenta uma divergência em  $T = T_c$  (Fig. 1.3).

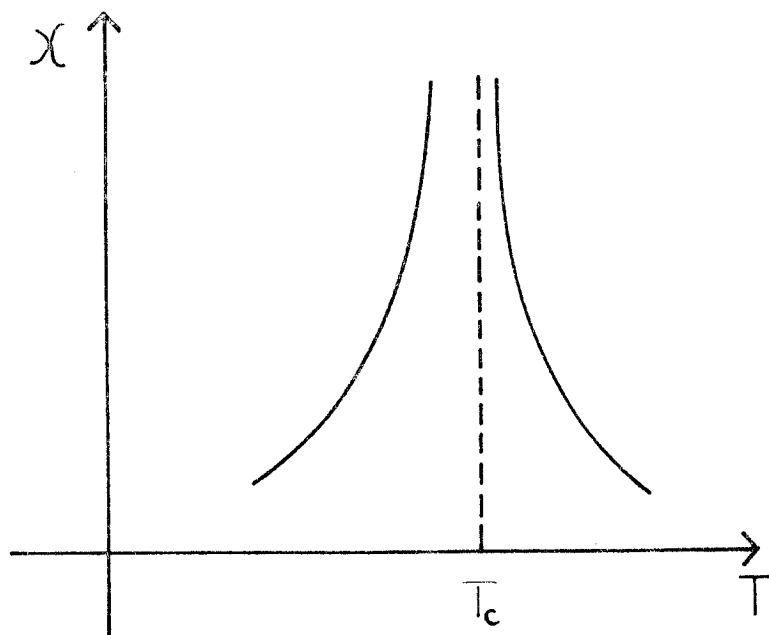


Figura 1.3 - Gráfico de susceptibilidade em função de temperatura  
- a susceptibilidade diverge em  $T = T_c$ .

Ainda neste problema, o calor específico  $C = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_H$  apresenta uma divergência em  $T = T_c$ .

Transições de fase contínuas de segunda ordem podem ainda serem definidas com base na simetria do sistema<sup>1</sup>. Neste caso, a transição ocorre, quando há uma quebra espontânea de simetria, ou seja, o sistema passa de uma fase desordenada (mais simétrica)

a ordenada (menos simétrica) continuamente.

Um problema de interesse no estudo de fenômenos críticos é a determinação das leis assintóticas que governam a aproximação ao ponto crítico. Tal aproximação é representada por expoentes: são os expoentes críticos<sup>2</sup>. Assim, a energia livre associada ao comportamento assintótico será dada por (na ausência de campo externo):

$$F(t \gtrless 0) = |t|^{2-\alpha} \underline{\Phi}^{\pm}(t) \quad (1.1)$$

no limite de  $t \rightarrow 0^+$  se  $t > 0$  ou  $t \rightarrow 0^-$  se  $t < 0$ , onde  $t = \frac{T - T_c}{T_c}$  é a temperatura reduzida e onde  $\alpha$  é o expoente associado à divergência do calor específico na temperatura crítica  $T = T_c$  e onde as funções  $\Phi^+(t)$  e  $\Phi^-(t)$  fornecem correções ao comportamento crítico para valores acima e abaixo de  $T_c$  respectivamente, podendo ser expressas como

$$\underline{\Phi}^{\pm}(t) = A^{\pm} + B^{\pm} |t|^{\omega} \quad (1.2)$$

Obteve-se que os expoentes críticos, como por exemplo  $\alpha$ , são quantidades universais<sup>3</sup>. Para melhor compreendermos esta universalidade e a que ela está associada, tomemos, por exemplo, a susceptibilidade de um sistema magnético. Podemos escrevê-la em termos das correlações das flutuações na magnetização<sup>4</sup>

$$\chi = \langle (\delta M)^2 \rangle = \int d\vec{r} d\vec{r}' \langle \delta m(\vec{r}) \delta m(\vec{r}') \rangle \quad (1.3)$$

$$M \equiv \int d\vec{r} \quad m(\vec{r}) \quad (1.4)$$

onde  $m(\vec{r})$  é a densidade de magnetização e  $\xi$  é o alcance das correlações de sorte que a susceptibilidade por unidade de volume é dada por:

$$\frac{\chi}{V} = \int d\vec{r} \quad \langle \delta m(\vec{r}) \delta m(0) \rangle \quad (1.5)$$

Sabemos que a susceptibilidade na região crítica diverge. Como isto ocorre? Ora, a densidade de magnetização não diverge. A única possível fonte de divergência está que ao nos aproximarmos do ponto crítico, o alcance da integração torna-se cada vez maior. Fisicamente isto significa que as correlações de flutuações da magnetização envolvem regiões cada vez maiores. O alcance das correlações é chamado de comprimento de correlação  $\xi$ . Na região crítica a susceptibilidade diverge porque  $\xi$  diverge.

Voltemos, agora, à hipótese de universalidade. A origem física desta hipótese está na observação de que fenômenos críticos são dominados por flutuações na magnetização, por exemplo, as que aparecem em escalas  $\xi$  que são muito maiores que o alcance da interação interatômica. Assim, tais flutuações não enxergam os detalhes do potencial.

Deduz-se daí que o comportamento crítico independe dos detalhes do sistema tais como parâmetro de rede. Quantidades termodinâmicas dependerão de tais parâmetros de forma tal que uma simples reescala de variáveis elimine tal dependência<sup>4</sup>. Depreendemos daí que tais quantidades termodinâmicas podem ser expressas como

funções homogêneas de seus parâmetros<sup>4,5</sup>. A hipótese de homogeneidade traz, portanto, duas consequências: (a) os expoentes críticos apresentam relações entre si dadas, por exemplo, por:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (1.6)$$

$$\alpha + \beta(1 + \delta) = 2 \quad (1.7)$$

$$\nu d = 2 - \alpha \quad (1.8)$$

onde  $\alpha$  é o expoente associado ao calor específico  $C \sim t^{-\alpha}$ ,  $\beta$  a magnetização  $M \sim t^\beta$ ,  $\gamma$  a susceptibilidade  $\chi \sim t^{-\gamma}$ ,  $\delta$  ao comportamento do campo magnético com a magnetização na temperatura crítica  $h \sim M^\delta$ ,  $\nu$  o expoente associado ao comprimento de correlação  $\xi \sim t^{-\nu}$ ; (b) podemos reescrever a energia livre (e outras quantidades termodinâmicas) na região crítica como<sup>4,5</sup>

$$\bar{F}(t, h) = b^{-d} F(t b^a, h b^c) \quad (1.9)$$

Se tomarmos  $b = \xi$  onde  $\xi$  é o comprimento de correlação:

$$\bar{F}(t, h) = \xi^{-d} F(t \xi^a, h \xi^c) \quad (1.10)$$

Como na região crítica  $\xi = xt^{-\nu}$  e  $h = yt^{+\Delta}$ , a energia livre, nesta região, será dada por:

$$F(t, h) = t^{-\frac{d}{\nu}} f(\gamma) \quad (1.11)$$

onde  $a \equiv + \frac{1}{\nu}$  e  $c \equiv + \frac{\Delta}{\nu}$  e onde  $\nu$  é o expoente associado ao comportamento crítico do comprimento de correlação e  $\Delta$  o expoente associado ao campo.

Desta forma reduzimos o problema de uma função de duas variáveis,  $F(t, h)$ , à uma função desconhecida  $f(y)$  e uma variável  $t$  que determinam a forma de escala da energia livre com a temperatura. Observamos que os expoentes críticos são universais, enquanto que  $f(y)$  e  $x$  dependem do detalhe do sistema considerado.

A hipótese de universalidade reduz os diversos comportamentos críticos a um número limitado de classes, onde cada classe possui em comum a simetria do parâmetro de ordem, o alcance da interação e a dimensão. Dentro de cada classe, os expoentes críticos serão idênticos e as formas de escala  $x$  e  $f(y)$  das quantidades termodinâmicas terão a mesma forma funcional embora dependam de parâmetros  $x$  e  $y$  característicos de cada sistema<sup>4,5</sup>.

Stauffer et al.<sup>6</sup> generalizaram a hipótese de universalidade termodinâmica através da hipótese de dois fatores de escala (two-scales-factor) para funções de correlação. Esta hipótese estabelece que funções de correlação são universais a menos de dois fatores de escala. Isto significa que dados dois fatores de escala como, por exemplo,  $x = t M^{-1/\beta}$  e  $z = h M^{-\delta}$ , podemos determinar as amplitudes de quantidades termodinâmicas e, além disso, podemos relacioná-las. Assim, quando duas quantidades termodinâmicas apresentarem a mesma dependência com estes fatores de escala, a razão entre estas quantidades não universais será universal.

Assim, obtiveram-se razões universais de calor específico  $\frac{C^+}{C^-}$ , susceptibilidade  $\frac{\chi^+}{\chi^-}$ , comprimento de correlação  $\frac{\xi^+}{\xi^-}$  e parte singular da energia livre calculados acima e abaixo da temperatura crítica respectivamente<sup>6-9</sup>.

Esta universalidade provém do fato de que perturbações tais como temperatura e campo magnético ( $t$  e  $h$ ) que levam o sistema para temperaturas inferiores à crítica são as mesmas que levam o sistema a temperaturas superiores à crítica. No caso da energia livre, por exemplo, o fato da forma funcional de  $\phi^+(t)$  com  $t$  ser a mesma que a forma funcional de  $\phi^-(t)$  com  $t$  tem como consequência a universalidade de  $\phi^+(t)/\phi^-(t)$ .

O comportamento crítico do sistema depende basicamente de sua simetria. Perturbações tais como a inclusão de um campo magnético externo, a inclusão de uma pressão externa ou uma anisotropia interna mudam a simetria original do problema, levando, conseqüentemente a uma mudança de comportamento crítico.

Tomemos, para exemplificar, um sistema magnético de duas componentes descrito pelo modelo XY. Tal sistema apresenta um ponto crítico em  $t = 0$  que separa uma fase desordenada de uma fase ordenada onde o sistema poderá se ordenar segundo qualquer uma de suas duas componentes (Fig. 1.1 e 1.2)<sup>10</sup>. A presença de uma anisotropia  $g$  entre as componentes gerará uma diferenciação no comportamento crítico de cada componente. Haverá, então, uma linha crítica  $t_1 \equiv t + g = 0$  associada a uma componente e outra  $t_2 \equiv t - g = 0$  associada à outra (Fig. 1.4)<sup>11</sup>.

Para descreverem-se estes novos comportamentos críticos, estendeu-se a hipótese de scaling (1.1), ou seja, supôs-se que<sup>12</sup>

$$\bar{F}(t, g) = |t|^{2-\alpha} \Phi_i^{\pm} \left( \frac{|g|}{t^\phi}, t \right) \quad i = 1, 2 \quad (1.12)$$

onde  $t = \frac{T - T_b}{T_b}$  é a temperatura reduzida do modelo simétrico ( $g=0$ ),  $\alpha$  é o expoente associado ao calor específico do caso simétrico e onde  $\phi$  é o expoente de "crossover" que conduz do ponto bicrítico a uma das duas linhas críticas. As funções  $\Phi_i^+(z, t)$  e  $\Phi_i^-(z, t)$  com  $i = 1, 2$  e  $z \equiv |g|/t^\phi$  fornecem o comportamento nas proximidades das linhas críticas  $i = 1, 2$  para a região da fase desordenada (+) e ordenada (-).

O comportamento singular das linhas críticas está contido nestas funções. Obteve-se que este comportamento é dado por<sup>12</sup>:

$$\Phi_{i_1}^{\pm}(z, t) = (z - z_{c_1})^{2-\alpha_I} \left[ a_1^{\pm}(z) + b_1^{\pm}(z) |t|^\omega + \dots \right] \quad (1.13)$$

$$\Phi_{i_2}^{\pm}(z, t) = (z - z_{c_2})^{2-\alpha_I} \left[ a_2^{\pm}(z) + b_2^{\pm}(z) |t|^\omega + \dots \right] \quad (1.14)$$

onde  $\alpha_I$  é o expoente associado à singularidade do calor específico do modelo de Ising (modelo de uma componente) e  $z - z_{c_1} = 0$  e  $z - z_{c_2} = 0$  são as linhas críticas. No limite  $g \rightarrow 0$ ,  $\Phi_1^{\pm} = \Phi_2^{\pm} = \Phi^{\pm}$ . Assim o efeito da quebra de simetria  $g$  é o de levar o sistema de um comportamento XY ( $\alpha = \frac{\epsilon}{10}$ ) à um comportamento Ising ( $\alpha_I = \frac{\epsilon}{6}$ ).



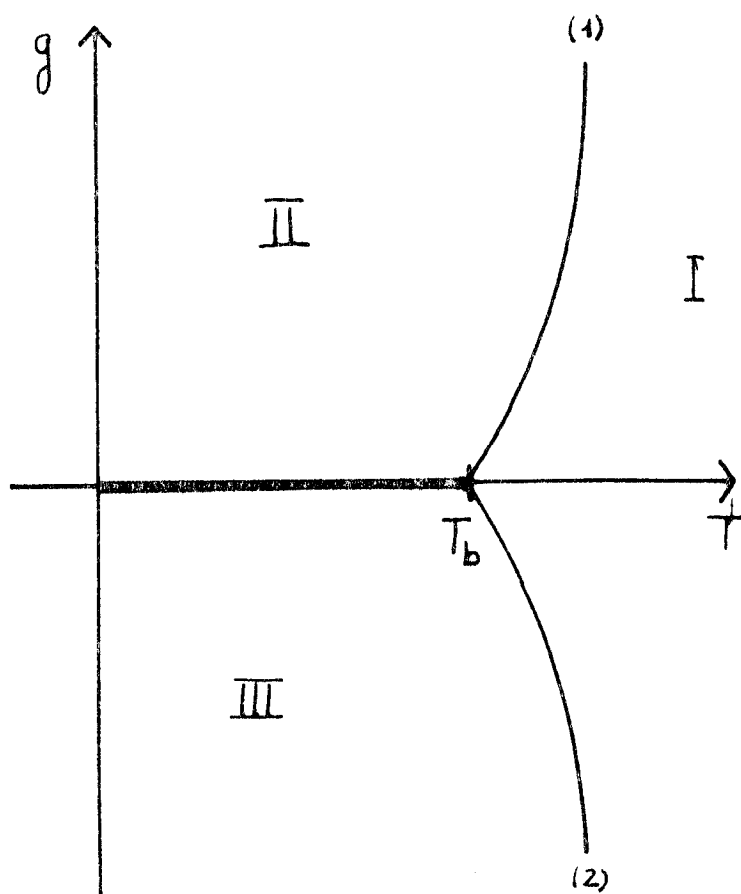


Figura 1.4 - Diagrama  $T \times g$  para o modelo XY com anisotropia<sup>11</sup>.

O sistema apresenta 3 fases: (a) Desordenada (Fase I); (b) Ordenada segundo uma componente para  $g > 0$  (Fase II); (c) Ordenada segundo a outra componente para  $g < 0$  (Fase III). As fases I e II e I e III estão separadas por linhas de segunda ordem determinadas por  $|g|/t^\phi = z_{c_1}$  (1) e  $|g|/t^\phi = z_{c_2}$  (2) respectivamente. Tais linhas encontram-se em  $g = 0$  no ponto bicrítico onde  $T = T_b$  (temperatura crítica do sistema simétrico). As fases II e III encontram-se separadas por uma transição de fase de primeira ordem (linha cheia).

Além deste "crossover" muito interessante, obtiveram-se dois outros resultados.

Em primeiro lugar, averiguou-se que a razão  $\bar{\epsilon}_1^+(t,z)/\bar{\epsilon}_1^-(t,z)$

é universal, indicando, assim, que não só a forma funcional de  $\phi_1^+$  com  $t$  é a mesma que a de  $\phi_1^-(t,z)$ , como também a forma funcional com  $z$  ( $t$  e  $z$  são os parâmetros que levam o sistema para fora das linhas críticas) é a mesma<sup>12</sup>.

Em segundo lugar, observou-se que os valores da temperatura reduzida nas linhas críticas,  $t_{c_1}$  e  $t_{c_2}$ , determinados a  $g$  fixo por  $z = z_{c_1}$  e  $z = z_{c_2}$  respectivamente, apresentam razão de parâmetros  $t_{c_1}/t_{c_2} \sim z_{c_2}/z_{c_1}$  universal. Tal universalidade de razão de parâmetros está associada ao fato de que uma única perturbação  $g$  leva o sistema a linha crítica (1) ou a linha crítica (2) (Fig. 1.4).

É conhecido que o comportamento crítico de sistemas físicos depende basicamente de sua simetria. Perturbações que alterem a simetria do problema podem levar: (a) a um crossover de um comportamento crítico a outro via ponto bicrítico<sup>11,12</sup>; (b) a um crossover de uma transição de primeira a segunda ordem via ponto tricrítico<sup>13,14</sup>; (c) ao desaparecimento de uma transição de primeira ordem em um ponto crítico<sup>13,14</sup>.

Neste trabalho, iremos nos concentrar no estudo destas duas últimas possibilidades. Com este propósito, consideraremos a versão "standard"<sup>15,16</sup> do modelo de Potts de três estados, estados estes projetados em um sistema de duas componentes, de sorte que na sua formulação contínua o hamiltoniano será dado por<sup>17</sup>:

$$H(\phi, \psi) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ r(\phi^2 + \psi^2) + (\nabla\phi)^2 + (\nabla\psi)^2 \right] + w(\phi^3 - 3\phi\psi^2) + u(\phi^2 + \psi^2)^2 \right\} \quad (1.15)$$

onde  $r$  é o parâmetro relacionado à temperatura  $r = \frac{T - T_0}{T_0}$  e onde  $(\phi, \psi)$  são as componentes dos campos associadas às componentes dos estados de Potts. Resultados via teoria de Landau<sup>1</sup> para o hamiltoniano acima fornecem que o sistema sofre uma transição de fase de primeira ordem para  $r = \frac{w^2}{2u}$  de uma fase I  $\langle \phi \rangle = \langle \psi \rangle = 0$  (fase desordenada) ou para uma fase II  $\langle \phi \rangle = -\frac{w}{2u}$  e  $\langle \psi \rangle = 0$  (fase ordenada) ou para uma fase III  $\langle \phi \rangle \neq 0$  e  $\langle \psi \rangle \neq 0$  (fase ordenada).

Este modelo descreve algumas realizações físicas tais como:

- (a) Transição magnética que ocorre com ferromagnetos cúbicos com eixos fáceis ao longo das arestas dos cubos ao aplicarmos um campo magnético externo segundo a diagonal do cubo.
- (b) Transição estrutural de trigonal a pseudotetragonal que ocorre com o  $\text{SrTiO}_3$  (titanato de estrôncio) sob a ação de uma pressão diagonal<sup>19</sup>.

Uma anisotropia interna entre as componentes dos estados de Potts, quebra a simetria entre os campos  $\psi$  e  $\phi$  em todos os termos do hamiltoniano gerando, na presença de um campo externo paralelo a uma das componentes de Potts, o seguinte hamiltoniano<sup>a</sup>:

$$H(\phi, \psi) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_1 \phi^2 + r_2 \psi^2 + (\nabla \phi)^2 + (\nabla \psi)^2 \right] + w_1 \phi^3 - 3w_2 \phi \psi^2 + u_1 \phi^4 + 2u_2 \phi^2 \psi^2 + u_3 \psi^4 - h_1 \phi \right\} \quad (1.16)$$

<sup>a</sup>Maiores detalhes da obtenção deste hamiltoniano serão dados no Capítulo 2.

onde  $r_1 \equiv r + g$ ,  $r_2 \equiv r - g$ ,  $w_1 \equiv w + 3g_w$ ,  $w_2 \equiv w - g_w$ ,  $u_1 = u + g_u - \frac{1}{3} g'_u$ ,  $u_2 = u + g'_u$  e  $u_3 = u - g_u - \frac{1}{3} g'_u$ , sendo  $g$ ,  $g_w$ ,  $g_u$  e  $g'_u$  parâmetros de quebra de simetria. Na ausência da anisotropia interna,  $r_1 = r_2 = r$ ,  $w_1 = w_2 = w$ ,  $u_1 = u_2 = u_3 = u$ , e  $h_1 = 0$  na ausência de campo externo. Resultados via teoria de Landau<sup>20</sup>, para o hamiltoniano acima, fornecem que o sistema, para  $h_1 < 0$ , sofre uma transição de primeira ordem de uma fase I onde  $\langle \phi \rangle \neq 0$  e  $\langle \psi \rangle = 0$  mas  $\langle \phi \rangle \rightarrow 0$  ao  $h_1 \rightarrow 0$  (fase desordenada) para uma fase II onde  $\langle \phi \rangle \neq 0$  e  $\langle \psi \rangle = 0$  mas  $\langle \phi \rangle \neq 0$  ao  $h_1 \rightarrow 0$  (fase ordenada). Esta transição acaba em um ponto crítico. O sistema sofre, para  $h_1 > 0$ , uma transição de primeira ordem da fase I a uma fase III onde  $\langle \phi \rangle \neq 0$  e  $\langle \psi \rangle \neq 0$ . Esta transição transforma-se em de segunda ordem em um ponto tricrítico (Fig. 2.2).

Além do diagrama de fases (Fig. 2.2), foram obtidos os valores dos parâmetros de temperatura  $r$ , de campo magnético  $h_1$  e de magnetização  $\langle \phi \rangle = M$  nos pontos crítico e tricrítico via teoria de campo médio de Landau considerando todas as quebras de simetria<sup>20</sup>.

Nesta tese, apresentamos e discutimos os resultados de estudos sistemáticos da influência conjunta de flutuações e de quebras de simetria externas sobre o comportamento crítico e tricrítico do modelo de Potts de três estados bem como de algumas realizações físicas a ele associadas.

Para compreender o problema e estabelecer os objetivos do nosso trabalho, voltemos ao hamiltoniano (1.15). Na ausência do termo trilinear e de campo externo  $h_1$ , este hamiltoniano é idêntico ao do modelo XY<sup>10</sup>, que apresenta, em  $r = 0$ , uma transição de segunda ordem de uma fase I desordenada  $\langle \phi \rangle = \langle \psi \rangle = 0$  ou a uma fa-

se ordenada II  $\langle \phi \rangle \neq 0$  e  $\langle \psi \rangle = 0$  ou a uma fase ordenada III  $\langle \phi \rangle = 0$  e  $\langle \psi \rangle \neq 0$ .

Interpretamos o termo trilinear como uma perturbação responsável pelo "crossover" do comportamento de segunda ordem XY ao comportamento de primeira ordem do modelo de Potts<sup>21</sup>.

Igualmente interpretamos o campo externo  $h_1$  e as quebras de simetria quadrática, trilinear e quártica como perturbações.

Com isto, estendemos a hipótese de escala (1.11) da forma:

$$F(t, w, g, g_w, g_u, g'_u, h_1) = t^{2-\alpha} f \left[ \frac{w}{t^{\phi_w}}, \frac{g}{t^\phi}, \frac{g_w}{t^{\phi'_w}}, \frac{g_u}{t^{\phi_u}}, \frac{g'_u}{t^{\phi'_u}}, \frac{h_1}{t^\Delta} \right]$$

$$= [w^{1/\phi_w}]^{2-\alpha} \Phi \left[ \frac{t}{w^{1/\phi_w}}, \frac{g}{w^{\phi/\phi_w}}, \frac{g_w}{w^{\phi'_w/\phi_w}}, \frac{g_u}{w^{\phi_u/\phi_w}}, \frac{g'_u}{w^{\phi'_u/\phi_w}}, \frac{h_1}{w^{\Delta/\phi_w}} \right] \quad (1.17)$$

onde  $t = \frac{T - T_b}{T_b}$  é a temperatura reduzida do modelo XY ( $T_b$  é a temperatura do ponto bicrítico), onde  $\phi_w$  é o expoente relativo ao "crossover" do comportamento XY a Potts, onde  $\phi$ ,  $\phi'_w$ ,  $\phi_u$ ,  $\phi'_u$  são os expoentes associados às quebras de simetria quadrática, trilinear e quárticas respectivamente e onde  $\Delta$  é o expoente associado à presença de um campo magnético externo e o expoente  $\alpha$  é o relativo à singularidade do calor específico do modelo XY. De  $\Phi$  sairão as singularidades associadas aos pontos crítico e tricrítico respectivamente. Tais singularidades ficam explicitadas ao reescrevermos

$\Phi_c^\pm(x_1, x_2, \dots)$  na região crítica para temperaturas abaixo (-) e acima (+) da temperatura crítica como:

$$\Phi_c^\pm(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \cong A_c^\pm (x_1 - x_c)^{2-\alpha_c} \quad (1.18)$$

onde  $x_1 \equiv \frac{t}{1/\phi_w}$ ,  $x_2 \equiv \frac{g}{\phi/\phi_w}$ ,  $x_3 \equiv \frac{g_w}{\phi'_w/\phi_w}$ ,  $x_4 \equiv \frac{g_u}{\phi_u/\phi_w}$ ,  $x_5 \equiv \frac{g'_u}{\phi'_u/\phi_w}$  e  $x_6 \equiv \frac{h_1}{\Delta/\phi_w}$ , onde  $x_c$  é uma função de  $x_2, x_3, x_4, x_5$

e  $x_6$  tal que  $x_1 - x_c = 0$  no ponto crítico e onde  $\alpha_c$  é o expoente que fornece o comportamento singular do calor específico no ponto crítico. Igualmente na região tricrítica reescrevemos  $\Phi_t^\pm$  como:

$$\Phi_t^\pm(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \cong A_t^\pm (x_1 - x_t)^{2-\alpha_t} \quad (1.19)$$

onde  $\alpha_t$  é o expoente associado à singularidade do calor específico na região de segunda ordem acima do ponto tricrítico e onde  $x_t$  é uma função de  $x_2, x_3, x_4, x_5$  e  $x_6$  tal que  $x_1 - x_t = 0$  no ponto tricrítico.

Observamos que  $x_1 = x_c$  e  $x_1 = x_t$  definem a temperatura reduzida  $t$  no ponto crítico e no ponto tricrítico respectivamente.

Blankshtein & Aharony<sup>14</sup> acharam, que sob efeito de flutuações, na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, a razão de temperaturas  $\frac{x_c}{x_t} \sim \frac{t_c}{t_t}$  é universal. Igualmente eles obtiveram que as razões de campo magnético  $\frac{h_c}{h_t}$  e de magnetização  $\frac{M_c}{M_t}$  são universais.

Este resultado é um pouco surpreendente, pois para ter-

mos esta universalidade precisamos supor que perturbações que levam ao ponto crítico são as mesmas que levam ao ponto tricrítico.

Na ausência de quebra de simetria,  $w$  é a única perturbação. Neste caso, a universalidade é esperada já que tanto o ponto crítico como o tricrítico serão provenientes de uma única perturbação. Na presença de um segundo parâmetro perturbativo, a quebra de simetria quadrática  $g$ , como os pontos críticos e tricrítico são diferentes combinações destes dois parâmetros ( $w$  e  $g$ ), a universalidade obtida por Blankschtein e Aharony<sup>14</sup> é, no mínimo, surpreendente.

Então, iremos mostrar, neste trabalho, como a influência conjunta de flutuações e de quebra de simetria total (incluímos a quebra de simetria trilinear e quártica), no cálculo das razões  $\frac{t_t}{t_c}$ ,  $\frac{h_t}{h_c}$  e  $\frac{M_t}{M_c}$ , as tornam não universais.

Com a finalidade de confirmar ainda mais tais resultados, calculamos estas razões para o modelo de Potts de três estados onde  $w$  não é uma perturbação. Neste caso, os pontos crítico e tricrítico são independentes e mesmo na ausência de quebra de simetria,  $\frac{h_t}{h_c}$  e  $\frac{M_t}{M_c}$  são não universais.

Insistimos na importância do fato de tais razões serem não universais, pois universalidade permite a realização de medidas sem preocupação com os parâmetros do sistema (parâmetro de rede, temperatura em que a medida é feita, etc ...).

Baseando-se na suposta universalidade de  $\frac{h_t}{h_c}$  Blankschtein e Aharony, obtiveram, para o  $\text{SrTiO}_3$  sob tensão não diagonal  $p // [1 + \delta, 1 + \delta, 1 - 2\delta]$ ,  $\frac{\delta_t}{\delta_c}$  universal<sup>32</sup>.

Com nossos resultados, iremos mostrar que  $\frac{\delta_t}{\delta_c}$  é não universal e que correções de não universalidade são relevantes.

Outra questão de interesse, é o estudo do "crossover" do comportamento XY ao comportamento crítico de Potts. Para tanto, com base na forma de escala (1.17), obteremos formas explícitas para a parte singular da energia livre, para a magnetização e para a susceptibilidade na região crítica. Destas funções, obteremos a forma como se dá o "crossover".

Vimos anteriormente que sistemas simples, onde um número reduzido de parâmetros (temperatura e quebra de simetria quadrática) leva o sistema para fora do ponto crítico, apresentam razões de quantidades termodinâmicas calculadas acima e abaixo do ponto crítico universais.

No nosso caso, temos um sistema com vários parâmetros ( $t, w, g, g_w, g_u, g'_u$ ) que levam o sistema para fora do ponto crítico.

Iremos demonstrar que tais parâmetros aparecem em combinações tais que as razões de quantidades termodinâmicas tais como a razão de susceptibilidades calculadas acima e abaixo do ponto crítico, são universais.

O diagrama de fases (Fig. 2.2) para o modelo de Potts de três estados descrito no começo deste capítulo<sup>a</sup> foi obtido com análise de campo médio<sup>11</sup>. Iremos obter correções de flutuações para a região crítica de tal diagrama. Esta correção modifica a forma da linha de coexistência entre as fases I e II.

Com base neste novo diagrama de fases, iremos obter a forma de escala dos parâmetros  $\delta$  e  $p$  (do  $\text{SrTiO}_3$ ) com a temperatura, chamando especial atenção para o fato de que tais formas de es

<sup>a</sup>Maiores detalhes encontram-se no Capítulo 2.



cala dependem substancialmente da correção de flutuações.

Este trabalho encontra-se dividido da seguinte maneira:

- (a) No capítulo 2, um capítulo de revisão e de extensão de trabalhos anteriores de outros autores, estudamos o modelo de Potts de três estados na presença de quebra de simetria e campo externo, e obtemos o hamiltoniano contínuo de Potts com quebra de simetria total e na presença de campo externo. Reproduzimos resultados conhecidos<sup>20</sup> para o diagrama de fases, para os parâmetros  $r$ ,  $h$  e  $M$  nos pontos críticos e tricríticos e para a equação de estado. Mostramos a relação entre as transições magnéticas que ocorrem com ferromagnetos cúbicos sob a ação de campo externo não diagonal e a transição de Potts na presença de quebra de simetria geral e campo externo  $h_1$ , generalizando trabalho de Mukamel et al.<sup>13</sup>. Reproduzimos a relação entre a transição estrutura do  $\text{SrTiO}_3$  sob pressão não diagonal  $p$  e as transições de Potts na presença de quebra de simetria geral e campo externo  $h_1$ . Aplicamos resultados de campo médio ao  $\text{SrTiO}_3$ , reproduzindo resultados conhecidos<sup>20</sup>.
- (b) No capítulo 3, discutimos a influência de flutuações sobre o valor dos parâmetros  $r$ ,  $h_1$  e  $M$  nos pontos crítico e tricrítico. Para tanto, usamos teoria renormalizada de perturbações. Através da aplicação das transformações do grupo de renormalização sobre o hamiltoniano nu ("bare"), geramos relações de recorrência  $d$ -dimensionais. Resolvemos tais relações em dois casos:  $d = 4 - \epsilon$  dimensões e  $d = 6 - \epsilon$  dimensões. No primeiro caso, o termo trilinear  $w$  é interpretado como uma perturbação em um modelo XY que é renormalizável em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões; e, no

segundo caso, resolvemos o problema para o modelo de Potts completo que é renormalizável em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões. Obtemos, para estes dois casos, os parâmetros de temperatura  $t$ , magnetização  $M$  e campo magnético  $h$  nos pontos crítico e tricrítico, bem como as razões  $\frac{t}{t_c}$ ,  $\frac{M}{M_c}$  e  $\frac{h}{h_c}$ . Mostramos que estas razões são não universais e que, como consequência a razão  $\frac{\delta}{\delta_c}$ , onde  $\delta$  é o parâmetro de anisotropia do  $\text{SrTiO}_3$  sob pressão  $p // [1 + \delta, 1 + \delta, 1 - 2\delta]$  é não universal.

(c) No capítulo 4 estudamos mais em detalhe o "crossover" do modelo XY ao comportamento crítico de Potts. Obtemos, para tanto, os expoentes  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  associados ao comportamento do calor específico, da susceptibilidade e da magnetização respectivamente. Tais expoentes são analisados em duas regiões: ao  $w \rightarrow 0$ , ou seja, na região do comportamento XY e para  $w \neq 0$  na proximidade do ponto crítico de Potts. Verificamos, então, que nesta região, o modelo de Potts apresenta expoentes do modelo de Ising. Ainda neste capítulo, obtemos razão universal de susceptibilidades calculadas acima e abaixo do ponto crítico. Encerramos o capítulo 4, mostrando a relevância de correções de flutuações sobre a forma da linha de coexistência entre as fases I e II (Fig. 2.2). Como consequência disto, estabelecemos uma forma de escala entre os parâmetros  $\delta$  e  $p$  do  $\text{SrTiO}_3$  sob tensão  $p // [1 + \delta, 1 + \delta, 1 - 2\delta]$  com a temperatura.

(d) No capítulo 5, fazemos uma síntese das conclusões a que chegamos.

## 2. O MODELO DE POTTS DE TRÊS ESTADOS E SUAS REALIZAÇÕES CONTÍNUAS

### 2.1 O Modelo e a sua Versão Contínua

O modelo de Potts é uma generalização do modelo de Ising (spins clássicos em dois estados). Assim como o modelo de Ising descreve spins em interação que podem ser paralelos ou antiparalelos, pode-se imaginar um modelo que descreva sistemas de spins confinados a um plano, com cada spin apontando para uma das  $p$ 's direções especificadas pelos ângulos<sup>15,16</sup>

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{p} \quad n = 1 \dots p \quad (2.1)$$

Tal modelo chama-se modelo de Potts planar e seu hamiltoniano é dado por

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J(\theta_{ij})$$
$$J(\theta) = - \cos \theta \quad (2.2)$$

onde a soma sobre  $\langle ij \rangle$  é sobre sítios vizinhos e  $J(\theta)$  é proporcional ao cosseno do ângulo entre os estados em que se encontram dois sítios quaisquer.

Outro, seria o modelo de Potts "standard" dado por uma interação não nula se os spins vizinhos estiverem no mesmo estado, ou seja,

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle}^N J_{ij} \delta_{\alpha, \beta} \quad j \alpha, \beta = 1, \dots, p \quad (2.3)$$

onde a soma  $\langle ij \rangle$  é sobre sítios vizinhos e  $\alpha$  e  $\beta$  são os estados nos quais os spins  $i$  e  $j$  se encontram.

Outra formulação do modelo de Potts standard seria descrevendo a  $\delta(\alpha, \beta)$  de forma a ressaltar a sua simetria em um espaço de  $p-1$  dimensões, ou seja<sup>16</sup>

$$\delta_{\alpha, \beta} = \frac{1}{p} \left\{ 1 + p \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}^{\beta} \right\} \quad (2.4)$$

onde  $\vec{a}^{\alpha}$  são  $p$  vetores apontando para os vértices de um hipertetraedro de  $p-1$  dimensões. Tais vetores representam os estados de Potts.

Para o modelo de Potts de três estados, teremos três vetores  $\vec{a}^1, \vec{a}^2$  ou  $\vec{a}^3$  apontando para os vértices de um triângulo. Tais vetores são projetados em um espaço bidimensional e suas componentes são dadas por (Fig. 2.1):

$$\begin{aligned} \vec{a}^1 &\equiv \left( \frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right) \\ \vec{a}^2 &\equiv \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \vec{a}^3 &\equiv \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

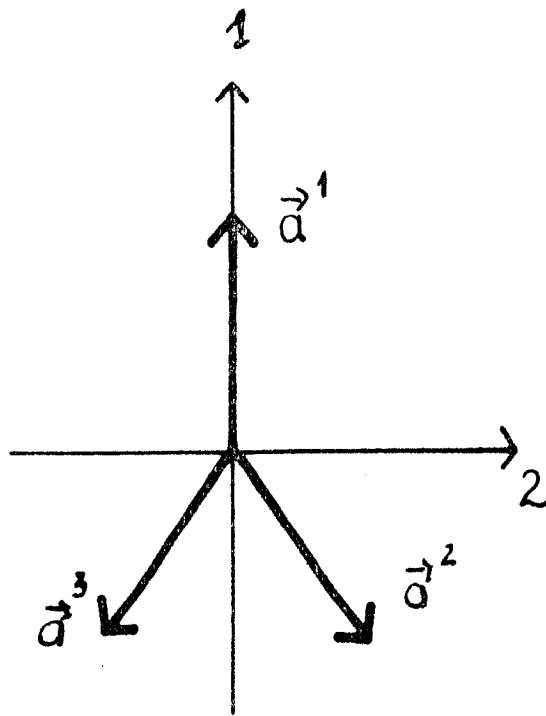


Figura 2.1 - Representação dos três estados de Potts.

Os três estados de Potts  $\vec{a}^1$ ,  $\vec{a}^2$  e  $\vec{a}^3$  estão representados em um sistema de duas componentes.

A simetria entre os três estados de Potts pode ser quebrada se sob o sistema for aplicado um campo externo paralelo à componente 1 (eixo 1 da figura 2.1) e se supusermos que para cada componente há um acoplamento  $J_{ij}$  diferente, ou seja, (2.3) e (2.4) serão reescritos como:

$$-\beta H = \sum_{\langle ij \rangle}^N [J_{ij} s_i s_j + K_{ij} \sigma_i \sigma_j] + \sum_i^N h_i s_i \quad (2.6)$$

onde os spins  $\vec{S}_i \equiv (s_i, \sigma_i)$  ( $s_i$  e  $\sigma_i$  são as componentes de  $\vec{S}_i$ ) estão em um dos três estados  $\vec{a}^1$ ,  $\vec{a}^2$  ou  $\vec{a}^3$  de Potts e onde  $J_{ij}$  e  $K_{ij}$  são os termos de troca associados às componentes 1 e 2 respectivamente.

Usando a transformação de Hubbard-Stratonowich<sup>21,22</sup> iremos obter a influência desta anisotropia no hamiltoniano de campos contínuos associado ao modelo.

A transformação consiste numa generalização da identidade matemática:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{as^2+bs} = e^{-b^2/4a} \int dy e^{-ay^2+y(b+2as)} \quad (2.7)$$

Escrevemos a função de partição associada ao hamiltoniano (2.6) como:

$$\begin{aligned} Z = \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \int \prod_{ij}^N d\bar{\phi}_i d\bar{\psi}_j \exp \left\{ - \sum_{\langle ij \rangle}^N \left[ \bar{\phi}_i J_{ij} \bar{\phi}_j + \bar{\psi}_i K_{ij} \bar{\psi}_j \right] + \right. \\ \left. + \sum_i^N h_i \bar{\phi}_i + \sum_{\langle ij \rangle}^N \left[ 2 \bar{\phi}_i J_{ij} s_j + 2 \bar{\psi}_i K_{ij} \sigma_j \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \sum_{\langle ij \rangle}^N h_i J_{ij}^{-1} h_j \right\} \sqrt{\frac{\prod_{ij} J_{ij} K_{ij}}{\pi}} \quad (2.8) \end{aligned}$$

onde a soma sobre  $\{s_i, \sigma_i\}$  é sobre as possíveis configurações do spin  $\vec{S}_i \equiv (s_i, \sigma_i)$ . Expandimos a exponencial associada às componentes do spin, da forma:

$$\sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \exp \sum_j^N f = \prod_j' \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \left[ 1 + f + \frac{f^2}{2!} + \frac{f^3}{3!} + \frac{f^4}{4!} + \dots \right]$$

$$f \equiv \sum_i^N \left[ 2 \bar{\phi}_i J_{ij} s_j + 2 \bar{\psi}_i K_{ij} \sigma_j \right] \quad (2.9)$$

Como desejamos manter até a ordem quártica nos campos, desprezamos  $O(f^5)$ . Tomando a exponencial do logarítmo e expandindo o logarítmo, obtemos<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \exp \sum_j' \ln \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \left[ 1 + f + \frac{f^2}{2} + \dots \right] &= \exp \sum_j' \left\{ \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \left[ f + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{3!} + \frac{f^4}{4!} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[ \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \left( f + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{3!} \right) \right]^2 + \frac{1}{3} \left[ \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} \left( f + \frac{f^2}{2} \right) \right]^3 - \frac{1}{4} \left[ \sum_{\{s_i, \sigma_i\}} f \right]^4 + O(f^5) \right\} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Dado que  $\sum_{\{\sigma_j, s_j\}} f \equiv 0$  (já que  $\sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_i = \sum_{\{s_i\}} s_i = 0$ ), so mamos sobre as configurações  $\{\sigma_j, s_j\}$  em (2.10) obtendo:

<sup>a</sup> A soma sobre  $j$  indicada  $\sum_j^N$  está restrita ao fato de ser só sobre primeiros vizinhos de  $\sum_i^N$  onde  $\sum_j' \sum_i \equiv \sum_{\langle ij \rangle}$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{\{s_i, \sigma_i\}} e^{\sum_j f} &= \exp \sum_j^N \left\{ \sum_{\ell, i}^N \left[ 2 J_{ij} J_{\ell j} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell + 2 K_{ij} K_{\ell j} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_\ell \right] + \right. \\
&+ \frac{2\sqrt{6}}{9} \sum_{i, \ell, m}^N \left[ J_{ij} J_{\ell j} J_{mj} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell \bar{\phi}_m - 3 J_{ij} K_{\ell j} K_{mj} \bar{\phi}_i \bar{\psi}_\ell \bar{\psi}_m \right] - \\
&- \frac{5}{3} \sum_{i, \ell, m, n}^N \left[ J_{ij} J_{\ell j} J_{mj} J_{nj} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell \bar{\phi}_m \bar{\phi}_n + 2 J_{ij} J_{\ell j} K_{mj} K_{nj} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell \bar{\psi}_m \bar{\psi}_n \right] \\
&\left. - \frac{5}{3} \sum_{i, \ell, m, n}^N K_{ij} K_{\ell j} K_{mj} K_{nj} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_\ell \bar{\psi}_m \bar{\psi}_n \right\} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Substituindo-se (2.11) em (2.8) obtemos uma função de partição independente do spin dada por:

$$\begin{aligned}
Z &= \int \prod_i d\bar{\phi}_i d\bar{\psi}_j \exp \left\{ - \sum_{\langle ij \rangle}^N \left[ \bar{\phi}_i J_{ij} \bar{\phi}_j + \bar{\psi}_i K_{ij} \bar{\psi}_j \right] + \right. \\
&+ \sum_i^N h_i \bar{\phi}_i + \sum_{\langle j; \ell i \rangle}^N \left[ 2 J_{ij} J_{\ell j} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell + 2 K_{ij} K_{\ell j} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_\ell \right] + \\
&+ \frac{2\sqrt{6}}{9} \sum_{\langle j; \ell i m \rangle}^N \left[ J_{ij} J_{\ell j} J_{mj} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell \bar{\phi}_m - 3 J_{ij} K_{\ell j} K_{mj} \bar{\phi}_i \bar{\psi}_\ell \bar{\psi}_m \right] - \\
&- \frac{5}{3} \sum_{\langle j; \ell i m n \rangle}^N \left[ J_{ij} J_{\ell j} J_{mj} J_{nj} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell \bar{\phi}_m \bar{\phi}_n + 2 J_{ij} J_{\ell j} K_{mj} K_{nj} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_\ell \bar{\psi}_m \bar{\psi}_n \right] \\
&\left. - \frac{5}{3} \sum_{\langle j; \ell i m n \rangle}^N K_{ij} K_{\ell j} K_{mj} K_{nj} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_\ell \bar{\psi}_m \bar{\psi}_n \right\} e^{-\frac{1}{4} \sum_{\langle ij \rangle} \left[ h_i J_{ij}^{-1} h_j - 2 \ln \frac{K_{ij} J_{ij}}{h} \right]} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Reescrevemos  $h$ ,  $\bar{\phi}_i$ ,  $\bar{\psi}_i$ ,  $K_{ij}$  e  $J_{ij}$  em termos de suas componentes de Fourier dadas por:



$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_i &= \bar{\phi}(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q^{1/0} \bar{\phi}_q e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \\
\bar{\psi}_i &= \bar{\psi}(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q^{1/0} \bar{\psi}_q e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \\
K_{ij} &= K(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{N} \sum_q^{1/0} K_q e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \\
J_{ij} &= J(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{N} \sum_q^{1/0} J_q e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \\
h_i &= h_1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Supomos que a interação é de curto alcance, ou seja, para  $q \equiv |\vec{q}| \ll a^{-1}$ ,

$$\begin{aligned}
K_q &\cong K_0 [1 - a^2 q^2] \\
J_q &\cong J_0 [1 - a^2 q^2]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde  $a$  é o parâmetro de rede. Substituindo-se (2.13) e (2.14) na função de partição (2.12), teremos que:

$$Z = \int \prod_{q, \hat{q}} d\bar{\phi}_q d\bar{\psi}_q e^{-\mathcal{H}_{ef}} \tag{2.15a}$$

onde  $H_{ef}$  é o hamiltoniano efetivo dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{eff}} = & C + \sum_q^{1/a} J_0 [1 - 2J_0] \bar{\phi}_q \bar{\phi}_{-q} + \sum_q^{1/a} K_0 [1 - 2K_0] \bar{\psi}_q \bar{\psi}_{-q} - \\
& - a^2 \sum_q^{1/a} J_0 [1 - 4J_0] q^2 \bar{\phi}_q \bar{\phi}_{-q} - a^2 \sum_q^{1/a} K_0 [1 - 4K_0] q^2 \bar{\psi}_q \bar{\psi}_{-q} \\
& - \frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{N}} \sum_{q_1, q_2}^{1/a} \left[ J_0^3 \bar{\phi}_{q_1} \bar{\phi}_{q_2} \bar{\phi}_{-q_1-q_2} - 3 J_0 K_0^2 \bar{\phi}_{q_1} \bar{\psi}_{q_2} \bar{\psi}_{-q_1-q_2} \right] \\
& + \frac{5}{3N} \sum_{q_1, q_2, q_3}^{1/a} \left[ J_0^4 \bar{\phi}_{q_1} \bar{\phi}_{q_2} \bar{\phi}_{q_3} \bar{\phi}_{-q_1-q_2-q_3} + \right. \\
& \left. + 2 J_0^2 K_0^2 \bar{\phi}_{q_1} \bar{\phi}_{q_2} \bar{\psi}_{q_3} \bar{\psi}_{-q_1-q_2-q_3} + K_0^4 \bar{\psi}_{q_1} \bar{\psi}_{q_2} \bar{\psi}_{q_3} \bar{\psi}_{-q_1-q_2-q_3} \right] - \\
& - \sqrt{N} h_1 \sum_q^{1/a} \bar{\phi}_q
\end{aligned} \tag{2.15b}$$

onde  $C$  é uma constante independente dos campos.

Na ausência de flutuações, de campo externo e de termos de  $O(\phi^3)$  (teoria livre),  $1 - 2J_0 = 0$  e  $1 - 2K_0 = 0$  permitem o crescimento arbitrário das amplitudes dos campos  $\bar{\phi}_q$  e  $\bar{\psi}_q$ , gerando divergências nas funções de correlação. A tais divergências está associado o comportamento crítico do sistema, nas temperaturas críticas da teoria livre,  $T_0$  e  $T_0'$  dadas por:

$$1 - 2J_0 = \frac{T - T_0}{T_0}$$

$$1 - 2K_0 = \frac{T - T_0'}{T_0'} \tag{2.16}$$

onde  $T_0$  é a temperatura crítica para o ordenamento segundo  $\phi_q$  (componente paralela ao campo externo) e  $T'_0$  a temperatura crítica associada ao ordenamento segundo  $\psi_q$  (componente perpendicular ao campo externo). Ao primeiro chamaremos de ordenamento longitudinal e ao segundo, ordenamento transversal.

Escrevemos a função de partição como uma expansão em torno de  $T_0$  e  $T'_0$ . Fazendo a transformada inversa de Fourier e fazendo a passagem ao contínuo, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z = \int d\phi d\psi e^{-\mathcal{H}_{\text{of}}} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{of}} = \int_1^d dx \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_1 \phi^2 + r_2 \psi^2 + (\nabla\phi)^2 + (\nabla\psi)^2 \right] + w_1 \phi^3 - 3w_2 \phi\psi^2 + \right. \\ \left. + u_1 \phi^4 + 2u_2 \phi^2\psi^2 + u_3 \psi^4 - h_1 \phi \right\} + r_0 \end{aligned} \quad (2.17b)$$

onde  $x \rightarrow x a^{-1}$  e onde  $\bar{\phi}(x a^{-1}) = \phi(x)$

$$r_0 = -\ln C$$

$$r_1 = \frac{T - T_0}{T_0}$$

$$r_2 = \frac{T - T'_0}{T'_0}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= -\frac{\sqrt{6}}{36} \left[ 1 - 3 \frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0} \right] \\
w_2 &= -\frac{\sqrt{6}}{36} \left[ 1 - \frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0} - 2 \frac{\bar{T} - \bar{T}_0'}{\bar{T}_0'} \right] \\
u_1 &= \frac{5}{48} \left[ 1 - 4 \frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0} \right] \\
u_2 &= \frac{5}{48} \left[ 1 - 2 \frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0} - 2 \frac{\bar{T} - \bar{T}_0'}{\bar{T}_0'} \right] \\
u_3 &= \frac{5}{48} \left[ 1 - 4 \frac{\bar{T} - \bar{T}_0'}{\bar{T}_0'} \right]
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde  $r_0$  é uma constante independente dos campos que será mantida, pois contribui na construção da parte singular da energia livre.

O hamiltoniano (2.17) pode ainda ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{eff}} &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_1 \phi^2 + r_2 \psi^2 + (\nabla \phi)^2 + (\nabla \psi)^2 \right] + w_1 \phi^3 - \right. \\
&\quad \left. - 3w_2 \phi \psi^2 + u_1' (\phi^2 + \psi^2)^2 + u_2' (\phi^4 + \phi^2 \psi^2) - h_1 \phi \right\} + r_0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde  $u_1' = u_3$  e  $u_2' = u_1 = u_3$  e onde usou-se o fato de que  $u_1 + u_3 - 2u_2 = 0$ .

Na ausência de quebra de simetria, o hamiltoniano acima recai no de Potts simétrico com  $r_1 = r_2 = r$ ,  $w_1 = w_2 = w$ ,  $u_1^i = u$  e  $u_2^i = 0$ .

Na ausência de flutuações espaciais,  $\nabla\phi = 0$  e  $\nabla\psi = 0$ ,  $\mathcal{H}_{\text{ef}}$  é a expansão de Landau para a energia livre se  $\phi$  e  $\psi$  minimizam a expressão<sup>20</sup>.

## 2.2 Expansão de Landau para a Energia Livre

Na ausência de flutuações, Fontanari e Theumann<sup>20</sup> estudaram, usando a expansão de Landau para a energia livre<sup>1</sup>, o modelo de Potts de três estados na presença de campo externo e com quebra de simetria geral.

Repetiremos aqui alguns resultados mais relevantes, resultados estes que serão úteis para o restante deste trabalho.

Na ausência de flutuações na eq. (2.19), a energia livre de Landau é dada por

$$F(\phi, \psi) = \frac{1}{2} [r_1 \phi^2 + r_2 \psi^2] + w_1 \phi^3 - 3 w_2 \phi \psi^2 + \\ + u_1^i (\phi^2 + \psi^2)^2 + u_2^i (\phi^4 + \phi^2 \psi^2) - h_1 \phi \quad (2.20)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são determinadas minimizando a expressão, ou seja, são as soluções das equações

$$\left. \frac{\delta F}{\delta \phi} \right|_{\substack{\phi = \bar{\phi} \\ \psi = \bar{\psi}}} = r_1 \bar{\phi} + 3w_1 \bar{\phi}^2 - 3w_2 \bar{\psi}^2 + 4(u_1' + u_2') \bar{\phi}^3 + \quad (2.21) \\ + 4 \bar{\phi} \bar{\psi}^2 (u_1' + \frac{u_2'}{2}) - h_1 = 0$$

$$\left. \frac{\delta F}{\delta \psi} \right|_{\substack{\psi = \bar{\psi} \\ \phi = \bar{\phi}}} = r_2 \bar{\psi} - 6w_2 \bar{\phi} \bar{\psi} + 4u_1' \bar{\psi}^3 + 4 \bar{\phi}^2 \bar{\psi} (u_1' + \frac{u_2'}{2}) = 0 \quad (2.22)$$

que definem três fases dadas por

$$\text{Fase I: } \bar{\phi} \neq 0, \quad \bar{\psi} = 0; \quad \bar{\phi} \rightarrow 0, \quad h_1 \rightarrow 0$$

$$\text{Fase II: } \bar{\phi} \neq 0, \quad \bar{\psi} = 0; \quad \bar{\phi} \not\rightarrow 0, \quad h_1 \rightarrow 0$$

$$\text{Fase III: } \bar{\phi} \neq 0, \quad \bar{\psi} \neq 0 \quad (2.23)$$

Nas fases I e II,  $\bar{\psi} = 0$ . Neste caso reescrevemos a energia livre como:

$$F(\hat{\phi}, 0) = \frac{1}{2} \tilde{r}_1 \hat{\phi}^2 + \tilde{u}_1 \hat{\phi}^4 - \tilde{h}_1 \hat{\phi} + f\left(-\frac{w_1}{4 \tilde{u}_1}\right) \quad (2.24)$$

e a condição de mínimo (2.21) como

$$\tilde{r}_1 \hat{\phi} + 4 \tilde{u}_1 \hat{\phi}^3 - \tilde{h}_1 = 0 \quad (2.25)$$

onde fizemos um deslocamento em  $\bar{\phi}$ <sup>a</sup> da forma

$$\bar{\phi} \equiv \hat{\phi} - \frac{w_1}{4 \tilde{u}_1} \quad (2.26)$$

que gerou parâmetros

$$\tilde{r}_1 = r_1 - \frac{3}{4} \frac{w_1^2}{\tilde{u}_1} \quad (2.27)$$

$$\tilde{u}_1 = u_1' + u_2' \quad (2.28)$$

$$f\left(-\frac{w_1}{4 \tilde{u}_1}\right) = \frac{r_1 w_1^2}{32 \tilde{u}_1^2} - \frac{3}{256} \frac{w_1^4}{\tilde{u}_1^3} + \frac{h_1 w_1}{4 \tilde{u}_1} \quad (2.29)$$

$$\tilde{h}_1 = h_1 - \frac{w_1^3}{8 \tilde{u}_1^2} + \frac{r_1 w_1}{4 \tilde{u}_1} \quad (2.30)$$

Note-se, que  $F(\bar{\phi}, 0)$ , Eq. (2.24), é basicamente a energia livre de Landau do modelo de Ising<sup>10</sup>.

Para  $\tilde{h}_1 = 0$ , a expressão (2.25), mínimo da energia livre (2.24), apresenta três soluções

<sup>a</sup>A escolha deste deslocamento ficará clara a seguir.

$$(a) \hat{\phi} = 0 \quad , \text{ ou seja, } \bar{\phi} = - \frac{w_1}{4\tilde{u}_1} \quad (2.31)$$

$$(b) \hat{\phi} = + \sqrt{\frac{-\tilde{r}_1}{4\tilde{u}_1}} \quad , \text{ ou seja, } \bar{\phi} = - \frac{w_1}{4\tilde{u}_1} + \sqrt{\frac{-\tilde{r}_1}{4\tilde{u}_1}} \text{ em } \tilde{r}_1 < 0 \quad (2.32)$$

$$(c) \hat{\phi} = - \sqrt{\frac{-\tilde{r}_1}{4\tilde{u}_1}} \quad , \text{ ou seja, } \bar{\phi} = - \frac{w_1}{4\tilde{u}_1} - \sqrt{\frac{-\tilde{r}_1}{4\tilde{u}_1}} \text{ em } \tilde{r}_1 < 0 \quad (2.33)$$

Para  $\tilde{r}_1 > 0$ ,  $\hat{\phi} = 0$  é o mínimo; para  $\tilde{r}_1 < 0$ , (b) e (c) definem dois mínimos de igual energia livre. Nesta região coexistem duas fases. É a região de coexistência entre as fases I e II. Tal coexistência de fases desaparece ao tomarmos  $\tilde{h}_1 \neq 0$  (o modelo de Ising não tem transição se  $\tilde{h}_1 \neq 0$ ). Ora,  $\tilde{h}_1 = 0$  dado por (Eq. (2.30))

$$h_1 = - \frac{r_1 w_1}{4\tilde{u}_1} + \frac{w_1^3}{8\tilde{u}_1^2} \quad (2.34)$$

define a linha de coexistência entre as fases I e II. Em  $\tilde{r}_1 = 0$  as três soluções coincidem, e temos aí o ponto crítico. Neste ponto a magnetização do sistema original descrito pela Eq. (2.20), com  $\bar{\psi} = 0$ , e definida por  $M \equiv \bar{\phi}$ , é dada por  $\bar{\phi} = - \frac{w_1}{4\tilde{u}_1}$  (justamente o valor de deslocamento de  $\bar{\phi}$  em (2.26)).

Introduzimos os parâmetros de quebra de simetria



$$w_1 = w + 3g_w = w [1 + 3G_w]$$

$$w_2 = w - g_w = w [1 - G_w]$$

$$u_1' + u_2' = u + g_u - \frac{1}{3} g_u' = u [1 + G_u - \frac{1}{3} G_u']$$

$$u_1' + \frac{u_2'}{2} = u + g_u' = u [1 + G_u']$$

$$r_1 = r + g$$

$$r_2 = r - g$$

$$G = \frac{4}{9} \frac{ug}{w^2} \tag{2.35}$$

onde  $r$ ,  $w$  e  $u$  são os parâmetros quadrático, trilinear e quártico da teoria simétrica de campos contínuos com simetria  $S_3$ , o grupo de permutações de 3 elementos, e onde  $g$ ,  $g_w$ ,  $g_u$  e  $g_u'$  são os parâmetros relativos à quebra de simetria quadrática, trilinear e quárticas. De posse destas definições, reescrevemos a magnetização crítica dada por  $\bar{\phi} = -\frac{w_1}{4\tilde{u}_1}$  como:

$$\bar{\phi}_c = -\frac{w}{4u} \left[ 1 + 3G_w - G_u + \frac{1}{3} G_u' \right] \tag{2.36}$$

Como  $\tilde{r}_1 = 0$  é que define o ponto crítico, o valor do parâmetro de temperatura  $r$  no ponto crítico (usando a Eq. (2.27))

é dado por

$$r_c = \frac{3}{4} \frac{w^2}{u} \left[ 1 - 3G + 6G_w - G_u + \frac{1}{3} G_u' \right] \quad (2.37)$$

Finalmente, substituindo-se a expressão acima em (2.34), obtemos o valor do campo crítico dado por:

$$h_{1c} = -\frac{1}{16} \frac{w^3}{u^2} \left[ 1 + 9G_w - 2G_u + \frac{2}{3} G_u' \right] \quad (2.38)$$

Usando (2.35), reescrevemos a curva de coexistência,  $\tilde{h}_1 = 0$  (2.34), da forma:

$$H_1 = -\frac{R}{3} \left[ 1 + 3G_w - G_u + \frac{G_u'}{3} \right] - \frac{G}{3} + \frac{2}{27} \left[ 1 + 9G_w - 2G_u + \frac{2}{3} G_u' \right] \quad (2.39)$$

onde

$$R = \frac{4}{9} \frac{ru}{w^2}$$

$$H_1 = \frac{16}{27} \frac{hu^2}{w^3} \quad (2.40)$$

A expressão (2.22) apresenta, além da solução trivial:

$$(a) \quad \bar{\psi} = 0 \quad (2.41)$$

que define as fases I e II, a solução

$$(b) \bar{\psi} = \pm \sqrt{\frac{r_2 - 6w_2 \bar{\phi} + 4 \left(u_1' + \frac{u_2'}{2}\right) \bar{\phi}^2}{-4u_1'}} \quad (2.42)$$

que define a fase III. Se (a) e (b) apresentarem valores diferentes, estas duas fases (I e III) encontram-se separadas por uma transição de fase de primeira ordem<sup>a</sup>. Agora, se

$$\bar{\phi} = r_2 - 6w_2 \bar{\phi} + 4 \left(u_1' + \frac{u_2'}{2}\right) \bar{\phi}^2 \quad (2.43)$$

determinado por (2.42) for também nulo, (a) e (b) coincidem. Neste caso,  $\bar{\phi} = 0$  define a curva de segunda ordem entre as fases I e III. Substituindo-se  $\bar{\phi}$  determinado por  $\bar{\phi} = 0$  em (2.21), obtemos que esta curva é dada por:

$$h_1 = \frac{3}{4} \frac{r_2 w_2}{u_1' + \frac{u_2'}{2}} + \frac{27}{8} \frac{w_1 w_2^2}{u_1' + \frac{u_2'}{2}} + \frac{27}{4} \frac{w_2^3 (u_1' + u_2')}{\left(u_1' + \frac{u_2'}{2}\right)^4} - 9 \frac{r_2 w_2 (u_1' + u_2')}{\left(u_1' + \frac{u_2'}{2}\right)^2} - \frac{3 r_2 w_1}{\left(u_1' + \frac{u_2'}{2}\right)} \pm B \quad (2.44)$$

<sup>a</sup> A curva de coexistência entre as fases I e III é determinada numericamente igualando-se as energias livres para  $\bar{\psi}$  dado por (a) e por (b)<sup>20</sup>.

$$\begin{aligned}
\bar{B} = & \left[ 1 - \frac{16}{9} \frac{r_2 (u_1' + u_2')}{w_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{3}{4} \frac{r_1 w_2}{(u_1' + \frac{u_2'}{2})} - \frac{3 r_2 w_2 (u_1' + u_2')}{(u_1' + \frac{u_2'}{2})^2} + \right. \\
& \left. + \frac{27}{4} \frac{w_2^3 (u_1' + u_2')}{(u_1' + \frac{u_2'}{2})} + \frac{27}{8} \frac{w_1 w_2^2}{(u_1' + \frac{u_2'}{2})^2} \right] \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Esta curva encontra a curva de primeira ordem que aparece se  $\bar{\phi}$ , Eq. (2.43), for diferente de zero em um ponto: o ponto tricrítico.

Determinamos o ponto tricrítico substituindo-se (2.42) em (2.21) e exigindo que a equação:

$$\begin{aligned}
& \left[ u_1' + u_2' - \frac{(u_1' + \frac{u_2'}{2})^2}{u_1'} \right] \bar{\phi}^{-3} + \left[ 3w_1 + 9w_2 \frac{(u_1' + \frac{u_2'}{2})}{u_1'} \right] \bar{\phi}^{-2} + \\
& + r_1 - \frac{u_1' + u_2'/2}{u_1'} r_2 - \frac{9}{2} \frac{w_2^2}{u_1'} - h_1 + \frac{3w_2 r_2}{4u_1'} = 0 \quad (2.46)
\end{aligned}$$

apresente uma única raiz<sup>20</sup>. Perturbativamente por iteração em  $G$ ,  $G_w$ ,  $G_u$  e  $G_u'$  essa raiz é dada por:

$$\bar{\phi} = \frac{3}{16} \frac{w}{u} \left[ 1 - G - 2G_w + \frac{15}{32} G_u + \frac{1}{8} G_u' \right] \quad (2.47)$$

Na obtenção desta expressão usamos as definições (2.35).

Substituindo-se (2.47) em (2.43), obtemos o valor do parâmetro de temperatura  $r$  no ponto tricrítico dado por:

$$r_t = \frac{9}{4} \frac{w^2}{u} \left\{ \frac{7}{16} + \frac{5}{9} G - \frac{5}{4} G_w + \frac{45}{256} G_u - \frac{7}{64} G_u' \right\} \quad (2.48)$$

Substituindo-se (2.48) em (2.44), obtemos o valor do campo magnético externo no ponto tricrítico,

$$h_{it} = \frac{81}{256} \frac{w^3}{u^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} G - \frac{11}{3} G_w + \frac{49}{48} G_u - \frac{13}{16} G_u' \right\} \quad (2.49)$$

De posse destes resultados, traçam-se diagramas de fase típicos (Fig. 2.2 e Fig. 2.3)<sup>14,20</sup>.

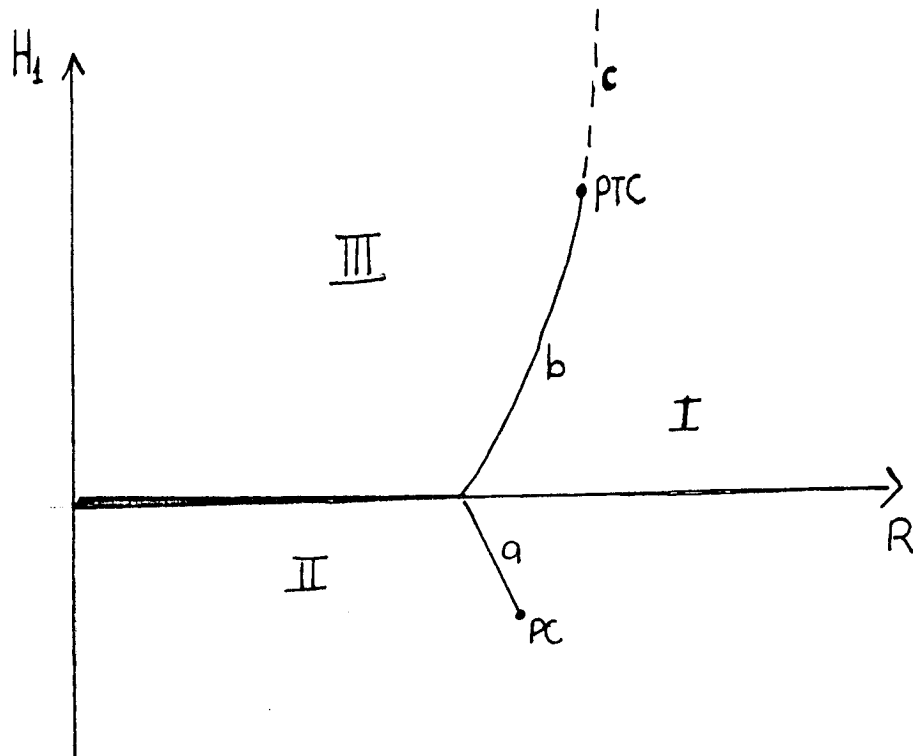


Figura 2.2 - Diagrama de fases  $H_1$ - $R$  na ausência de quebra de simetria<sup>14</sup>.

De (2.39) obtém-se a linha de coexistência (a) entre as fases I e II. Esta linha acaba em um ponto crítico determinado por (2.37) e (2.38). A curva de coexistência (b) entre as fases I e III (curva cheia) é determinada numericamente. A curva (c) de segunda ordem (curva pontilhada) entre as fases I e III, é obtida de (2.44) e (2.45). Esta curva encontra a de primeira ordem no ponto tricrítico, determinado por (2.48) e (2.49). Todas estas expressões são tomadas a  $G = G_w = G_u = G'_u = 0$ .

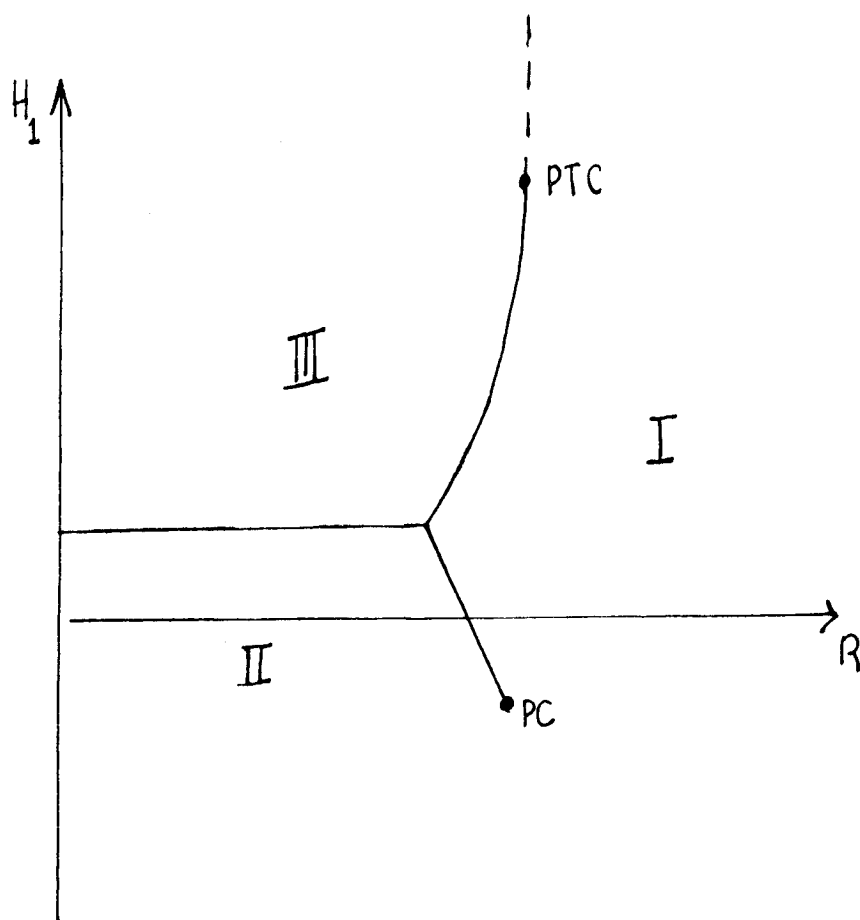


Figura 2.3 - Diagrama de fases  $H_1$ - $R$  na presença de quebra de simetria<sup>20</sup>.  
 Para  $G = -0.0298$ ,  $G_u = G'_u = 0$  e  $G_w = -0,0067$ , o diagrama  
 acima apresenta diferenças quantitativas em relação a Fig.  
 2.2 (sem quebra de simetria).

### 2.3 Realizações Físicas do Modelo de Potts

#### 2.3.1 Sistemas Magnéticos com Anisotropia Cúbica sob a Ação de Campo Magnético Externo Não Diagonal $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$

Sistemas magnéticos com anisotropia cúbica tais como o Fe, NdAl<sub>2</sub>, DyAl<sub>2</sub>, etc ... foram largamente estudados<sup>23-25</sup>. Experimentalmente sabe-se que, na ausência de campo externo, tais sistemas se ordenam segundo um de seus eixos fáceis [100], [010] ou [001]. Tal transição é de segunda ordem. Sob a ação de um campo externo  $\vec{h} // [111]$ , diagonal, haverá um ordenamento inicial paralelo ao campo para  $|\vec{h}| > h_A$  onde  $h_A$  é função da anisotropia cúbica e da temperatura. Diminuindo-se o valor de  $|\vec{h}|$ , verifica-se que, para  $|\vec{h}| = h_A$  ocorre um segundo ordenamento segundo um dos três eixos fáceis<sup>13</sup>. Esta transição é de primeira ordem (Fig. 2.4)<sup>15</sup>. Sob a ação de um campo não diagonal  $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  observa-se que, para um dado valor de  $\delta$ , a transição de primeira ordem passa a ser de segunda (Fig. 2.4)<sup>26</sup>.



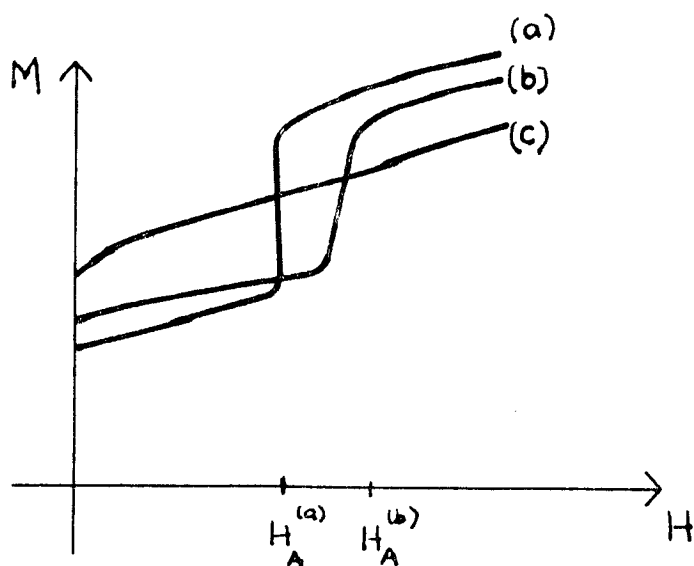


Figura 2.4 - Este é um gráfico obtido experimentalmente onde a temperatura fixa desenha-se a curva de magnetização paralela ao campo  $\times$  campo magnético aplicado nas direções (a)  $[111]$ , (b)  $[11\frac{2}{3}]$ , (c)  $[11\frac{1}{3}]$ . Observa-se entre (b) e (c) a transformação da transição de primeira ordem em uma de segunda em um ponto tricrítico<sup>25</sup>.

Podemos associar tais sistemas a um hamiltoniano de campos contínuos de três componentes que contenha um termo de anisotropia cúbica e um termo de campo externo dado por<sup>13</sup>:

$$\mathcal{H}_0 = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (r \phi^2 + (\nabla \phi)^2) + u \phi^4 + v (\phi_x^4 + \phi_y^4 + \phi_z^4) - \vec{h} \cdot \vec{\phi} \right\} \quad (2.50)$$

onde  $\phi \equiv (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ ,  $r$  é a variável de temperatura,  $\vec{h}$  é o campo externo aplicado e  $v$  é o termo de anisotropia cúbica.

Na ausência de flutuações, o mínimo da energia livre de Landau associada ao hamiltoniano (2.50)<sup>1</sup>, para  $h = 0$  e para um termo de anisotropia cúbica pequeno ( $|v| \ll |u|$ )  $v < 0$  é dado, para  $r < 0$ , por  $\vec{\phi} = (\bar{\phi}_0, 0, 0)$  ou  $\vec{\phi} = (0, \bar{\phi}_0, 0)$  ou  $\vec{\phi} = (0, 0, \bar{\phi}_0)$ , ou seja, o sistema ao ordenar-se o fará segundo um dos três eixos fáceis [100], [010] ou [001]. Este fato pode ser facilmente verificado notando-se que a energia livre associada a um ordenamento  $\vec{\phi} \equiv \left( \frac{\bar{\phi}_0}{\sqrt{3}}, \frac{\bar{\phi}_0}{\sqrt{3}}, \frac{\bar{\phi}_0}{\sqrt{3}} \right)$ , ordenamento segundo a direção [111], é maior que a associada ao ordenamento segundo um dos eixos fáceis. Na presença de um campo externo diagonal  $\vec{h} // [111]$ , estabelece-se uma competição entre o termo de campo que tende a ordenar o sistema diagonalmente  $\left[ \vec{\phi} \equiv \left( \frac{\bar{\phi}_0}{\sqrt{3}}, \frac{\bar{\phi}_0}{\sqrt{3}}, \frac{\bar{\phi}_0}{\sqrt{3}} \right) \right]$  e o termo de anisotropia cúbica que favorece o ordenamento segundo um dos eixos fáceis. Para valores altos do campo  $|\vec{h}| \gg h_A$  ( $h_A \sim v \bar{\phi}_0^3$ ), o sistema se ordena paralelamente ao campo. Baixando-se o valor do campo o termo de anisotropia cúbica torna-se relevante. Ao  $|\vec{h}| = h_A$ , ocorre uma transição de primeira ordem de um ordenamento diagonal à cúbico<sup>13</sup>.

Mukamel et al.<sup>13</sup> obteve que a energia livre de Landau associada a (2.50), na região de transição de primeira ordem, pode ser escrita como a energia livre do modelo de Potts de três estados. Neste sentido a transição de fase em  $|\vec{h}| = h_A$  é a de Potts.

Generalizando o trabalho de Mukamel et al., incluindo flutuações e quebra de simetria, iremos demonstrar, nesta seção, que o hamiltoniano que descreve a transição de sistemas cúbicos magnéticos sob a ação de um campo externo não diagonal  $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  com  $\delta \ll 1$ , é equivalente ao do modelo de Potts de três estados com quebra de simetria quadrática, trilinear e quártica e na presença de um campo  $h_1 \sim 0(\delta)$ . Esta equivalência permite a utiliza-

ção dos resultados obtidos para Potts no estudo dos sistemas magnéticos. Esta aplicação será, no entanto, deixada para um trabalho futuro.

Partimos do hamiltoniano (2.50), fazemos uma transformação da forma:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{\phi_x}{\sqrt{3}} (1+\delta) + \frac{\phi_y}{\sqrt{3}} (1+\delta) + \frac{\phi_z}{\sqrt{3}} (1-2\delta) \\ \phi_1 &= \frac{\phi_x}{\sqrt{2}} - \frac{\phi_y}{\sqrt{2}} \\ \phi_2 &= \frac{\phi_x}{\sqrt{6}} (1-2\delta) + \frac{\phi_y}{\sqrt{6}} (1-2\delta) - \frac{2\phi_z}{\sqrt{6}} (1+\delta)\end{aligned}\quad (2.51)$$

e obtemos um hamiltoniano equivalente ao da Eq. (2.50), dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [r\phi^2 + (\nabla\phi)^2] + u\phi^4 + \frac{v}{g} \left[ 3\phi_0^4 + 24\sqrt{2}\phi_0^3\phi_2 + \right. \right. \\ &\quad + 18(1-2\delta)\phi_0^2\phi_2^2 + 18(1+2\delta)\phi_0^2\phi_1^2 + 18\sqrt{2}(1-\delta)\phi_0\phi_2\phi_1^2 - \\ &\quad - 6\sqrt{2}(1+3\delta)\phi_0\phi_2^3 + \frac{9}{2}(1+\frac{8}{3}\delta)\phi_2^4 + \frac{9}{2}\phi_1^4 + \\ &\quad \left. + 9(1-4\delta)\phi_2^2\phi_1^2 \right] - h\sqrt{3}\phi_0 \left. \right\}\end{aligned}\quad (2.52)$$

onde  $\vec{h} \equiv [h_x, h_y, h_z]$  com  $h_x = h_y = h_z = h$ .

Ao hamiltoniano (2.52) associamos uma energia livre, na ausência de flutuações, cujos mínimos são dados por:

$$\left. \frac{\delta F}{\delta \phi_0} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = r \bar{\phi}_0 + 4u \bar{\phi}_0^3 + 4u \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_1^2 + 4u \bar{\phi}_0^2 \bar{\phi}_2^2 + \frac{v}{9} \left\{ 12 \bar{\phi}_0^3 + \right. \\ \left. + 72 \sqrt{2} \delta \bar{\phi}_0^2 \bar{\phi}_2 + 36 (1-2\delta) \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_2^2 + 36 (1+2\delta) \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_1^2 \right. \\ \left. + 18 \sqrt{2} (1-\delta) \bar{\phi}_2 \bar{\phi}_1 - 6 \sqrt{2} (1+3\delta) \bar{\phi}_2^3 \right\} - h \sqrt{3} = 0 \quad (2.53)$$

$$\left. \frac{\delta F}{\delta \phi_1} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = r \bar{\phi}_1 + 4u \bar{\phi}_1^3 + 4u \bar{\phi}_0^2 \bar{\phi}_1 + 4u \bar{\phi}_2^2 \bar{\phi}_1 + \\ + \frac{v}{9} \left\{ 36 (1+2\delta) \bar{\phi}_0^2 \bar{\phi}_1 + 36 \sqrt{2} (1-\delta) \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + \right. \\ \left. + 18 \bar{\phi}_1^3 + 18 (1-4\delta) \bar{\phi}_2^2 \bar{\phi}_1 \right\} = 0 \quad (2.54)$$

$$\left. \frac{\delta F}{\delta \phi_2} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = r \bar{\phi}_2 + 4u \bar{\phi}_2^3 + 4u \bar{\phi}_0^2 \bar{\phi}_2 + 4u \bar{\phi}_1^2 \bar{\phi}_2 + \frac{v}{9} \left\{ 24 \sqrt{2} \delta \bar{\phi}_0^3 + \right. \\ \left. + 36 (1-2\delta) \bar{\phi}_0^2 \bar{\phi}_2 + 18 \sqrt{2} (1-\delta) \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_1^2 - 18 \sqrt{2} (1+3\delta) \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_2^2 + \right. \\ \left. + 18 \left(1 + \frac{8}{3} \delta\right) \bar{\phi}_2^3 + 18 (1-4\delta) \bar{\phi}_2 \bar{\phi}_1^2 \right\} = 0 \quad (2.55)$$

cujas soluções definem as seguintes fases:

- i) Fase I:  $\bar{\phi}_0 \neq 0$ ,  $\bar{\phi}_1 = 0$ ,  $\bar{\phi}_2 = O(\delta)$ ;  $\bar{\phi}_0 \rightarrow 0$  ac  $h \rightarrow 0$   
 $\bar{\phi}_2 \rightarrow 0$  ac  $\delta \rightarrow 0$
- ii) Fase II:  $\bar{\phi}_0 \neq 0$ ,  $\bar{\phi}_1 = 0$ ,  $\bar{\phi}_2 = O(\delta)$ ;  $\bar{\phi}_0 \neq 0$  ac  $h \rightarrow 0$   
 $\bar{\phi}_2 \rightarrow 0$  ac  $\delta \rightarrow 0$

iii) Fase III:  $\bar{\phi}_0 \neq 0$ ,  $\bar{\phi}_1 = 0$ ,  $\bar{\phi}_2 = O(\delta)$ ;  $\bar{\phi}_0 \rightarrow 0$  ac  $h \rightarrow 0$   
 $\bar{\phi}_2 \rightarrow 0$  ac  $\delta \rightarrow 0$

iv) Fase IV:  $\bar{\phi}_0 \neq 0$ ,  $\bar{\phi}_1 \neq 0$ ,  $\bar{\phi}_2 \neq 0$  (2.56)

Para campos  $|\vec{h}| \gg h_A$  muito grandes, o sistema terá preferência por ordenar-se segundo as fases I e II (ordenamento paralelo ao campo). Reescrevemos, neste caso,  $\phi_0 = \tilde{\phi}_0 + \bar{\phi}_0$  onde  $\langle \phi_0 \rangle = \bar{\phi}_0$  e de (2.53)  $\bar{\phi}_0$  será solução de:

$$\bar{\phi}_0^3 + \frac{r}{4(u + \frac{v}{3})} \bar{\phi}_0 - \frac{h\sqrt{3}}{4(u + \frac{v}{3})} = 0 \quad (2.57)$$

onde desprezamos termos  $O(\delta^2)$ .

O hamiltoniano (2.52) poderá ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_0 \tilde{\phi}_0^2 + (\nabla \tilde{\phi}_0)^2 \right] + \tilde{w}_0 \tilde{\phi}_0^3 + \tilde{u}_0 \tilde{\phi}_0^4 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_1 \phi_1^2 + \tilde{r}_2 \phi_2^2 + (\nabla \phi_1)^2 + (\nabla \phi_2)^2 \right] + \tilde{w}_1 \phi_2^3 - 3\tilde{w}_2 \phi_1^2 \phi_2 + \\ & + \tilde{u}_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \tilde{u}_2 (\phi_2^4 - 3\phi_1^2 \phi_2^2) + \tilde{w}_3 \phi_1^2 \tilde{\phi}_0 + \tilde{w}_4 \phi_2^2 \tilde{\phi}_0 + \\ & + \tilde{u}_3 \phi_1^2 \tilde{\phi}_0^2 + \tilde{u}_4 \phi_2^2 \tilde{\phi}_0^2 + \tilde{u}_5 \phi_2^3 \tilde{\phi}_0 + \tilde{u}_6 \phi_2 \phi_1^2 \tilde{\phi}_0 + \tilde{w}_5 \phi_2 \tilde{\phi}_0^3 + \\ & \left. + \tilde{r}_3 \phi_2 \tilde{\phi}_0 + \tilde{u}_7 \phi_2 \tilde{\phi}_0^3 - \tilde{h}_2 \phi_2 \right\} + F_0(\bar{\phi}_0) \quad (2.58) \end{aligned}$$

onde

$$F_0(\bar{\phi}_0) = \frac{1}{2} r \bar{\phi}_0^2 + (u + \frac{v}{3}) \bar{\phi}_0^4 - h \bar{\phi}_0 \sqrt{3}$$

$$\tilde{r}_0 = r + 12(u + \frac{v}{3}) \bar{\phi}_0^{-2}$$

$$\tilde{r}_1 = r + 4(u + v) \bar{\phi}_0^2 + 8v\delta \bar{\phi}_0^2$$

$$\tilde{r}_2 = r + 4(u + v) \bar{\phi}_0^2 - 8v\delta \bar{\phi}_0^2$$

$$\tilde{r}_3 = 8\sqrt{2} v \delta \bar{\phi}_0^2$$

$$\tilde{w}_0 = 4(u + \frac{v}{3}) \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{w}_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v \bar{\phi}_0 (1 + 3\delta)$$

$$\tilde{w}_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v \bar{\phi}_0 (1 - \delta)$$

$$\tilde{w}_3 = 4(u + v) \bar{\phi}_0 + 8v\delta \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{w}_4 = 4(u + v) \bar{\phi}_0 - 8v\delta \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{w}_5 = 8\sqrt{2} v \delta \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{u}_0 = u + \frac{v}{3}$$

$$\tilde{u}_1 = u + \frac{v}{2}$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{4}{3} v \delta$$

$$\tilde{u}_3 = 2(u+v) + 4v\delta$$

$$\tilde{u}_4 = 2(u+v) - 4v\delta$$

$$\tilde{u}_5 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v (1+3\delta)$$

$$\tilde{u}_6 = 2\sqrt{2} v (1-\delta)$$

$$\tilde{u}_7 = \frac{8\sqrt{2}}{3} v \delta$$

$$\tilde{h}_2 = -\frac{8\sqrt{2}}{3} v \delta \bar{\phi}^3$$

(2.59)

Para  $r < 0$ , o sistema está na fase II, ou seja, já está ordenado segundo  $\phi_0$  ( $\langle \phi_0 \rangle = \bar{\phi}_0$ ). Mantendo  $r$  fixo (temperatura fixa), mas diminuindo-se o valor do campo externo aplicado, em  $|\vec{h}| = h_A$ , teremos que o termo de anisotropia cúbica  $v$ , que favorece o ordenamento segundo um dos três eixos fáceis, provoca um segundo ordenamento ou segundo  $\phi_2$ , ou segundo  $(\phi_1, \phi_2)$ . Como, nesta região,  $\bar{\phi}_0$  é não crítico, iremos integrá-lo, tomando o traço parcial sobre a função de partição associada à (2.58), obtendo o seguinte hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_1 \phi_1^2 + r_2 \phi_2^2 + (\nabla \phi_1)^2 + (\nabla \phi_2)^2 \right] + w_1 \phi_2^3 - \right. \\ \left. - 3w_2 \phi_1^2 \phi_2 + u_1 \phi_1^4 + 2u_2 \phi_1^2 \phi_2^2 + u_3 \phi_2^4 - h_1 \phi_2 \right\} \quad (2.60)$$

$$r_1 = r + 4(u+v) \bar{\phi}_0^{-2} + 8v\delta \bar{\phi}_0^{-2}$$

$$r_2 = r + 4(u+v) \bar{\phi}_0^{-2} - 8v\delta \bar{\phi}_0^{-2}$$

$$w_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v \bar{\phi}_0 \left\{ 1 + 3\delta \left[ 1 + 16 \frac{(u+v) \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12(u+\frac{v}{3}) \bar{\phi}_0^{-2}} \right] \right\}$$

$$w_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v \bar{\phi}_0 \left\{ 1 - \delta \left[ 1 + 16 \frac{(u+v) \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12(u+\frac{v}{3}) \bar{\phi}_0^{-2}} \right] \right\}$$



$$u_1 = \left(u + \frac{v}{2}\right) - \frac{8(u+v)^2 \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}} - 32 \frac{(u+v)v\delta \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}}$$

$$u_2 = \left(u + \frac{v}{2}\right) - \frac{8(u+v)^2 \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}} - 2v\delta - 16 \frac{v^2\delta \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}}$$

$$u_3 = \left(u + \frac{v}{2}\right) - \frac{8(u+v)^2 \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}} + \frac{4}{3}v\delta + 32 \frac{(u+v)v\delta \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}} + \frac{32}{3} \frac{v^2\delta \bar{\phi}_0^{-2}}{r + 12\left(u + \frac{v}{3}\right) \bar{\phi}_0^{-2}}$$

$$h_1 = - \frac{8\sqrt{2}}{3} \delta \bar{\phi}_0^{-3} v \quad (2.61)$$

No caso de  $\delta = 0$ , ou seja, para  $\vec{h} // [111]$ , o hamiltoniano (2.60) é o do modelo de Potts de três estados simétrico<sup>a</sup>. Este modelo prevê uma transição de fase de primeira ordem que, na ausência de flutuações, é dada por<sup>26</sup>:

$$r_1 = r_2 = \frac{w_1^2}{2u_3} \quad (2.62)$$

ou seja, substituindo-se os parâmetros (2.61) acima, obtemos<sup>13</sup>

$$h = h_A \sim 2.9 \bar{\phi}_0^{-3} v \quad (2.63)$$

<sup>a</sup>Ver o hamiltoniano (2.17b) tomando  $r_1 = r_2 = r$ ,  $w_1 = w_2 = w$ ,  $u_1 = u_2 = u_3 = u$  e  $h_1 = 0$ .

fornece o campo crítico para o qual se dá a transição de primeira ordem. Ainda na ausência de flutuações, obtém-se que esta transição se dá com um salto de magnetização dado por<sup>26</sup>:

$$\langle \phi_2 \rangle = - \frac{w_1}{2u_3} \quad (2.64)$$

ou seja, substituindo-se os parâmetros (2.61), teremos um salto de magnetização dado por<sup>13</sup>:

$$\langle \phi_2 \rangle \sim - 0.3 \bar{\phi}_0 \quad (2.65)$$

Estes resultados foram confirmados experimentalmente de forma qualitativa<sup>25</sup>. Resultados teóricos mais precisos podem ser obtidos mediante a inclusão de flutuações, o que deixaremos para um trabalho posterior<sup>a</sup>.

No caso de  $\delta \neq 0$ , ou seja, para  $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$ , o hamiltoniano (2.60) é o do modelo de Potts de três estados com quebra de simetria e na presença de campo externo (comparar (2.60) com (2.19)). Qualitativamente, na ausência de flutuações, podemos prever que a transição de fase de primeira ordem irá desaparecer para um  $\delta = \delta_c$  em um ponto crítico e em  $\delta = \delta_t$  em um ponto tricrítico onde  $\delta_c$  e  $\delta_t$  são proporcionais ao valor do campo magnético externo  $h_1$  de Potts nos pontos crítico e tricrítico, respectivamente.

<sup>a</sup>A obtenção de um hamiltoniano já se constitui um primeiro passo na obtenção de resultados com flutuações.

te (ver seção 2.1.2). Resultados quantitativos exigiriam análise numérica mais precisa e a inclusão de flutuações, o que deixaremos para um trabalho futuro. Experimentalmente detectou-se a presença do ponto tricrítico<sup>25</sup>.

### 2.3.2 O SrTiO<sub>3</sub> sob Tensão Não Diagonal $\vec{p} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$

Muito se tem estudado o SrTiO<sub>3</sub> já que fenômenos multicríticos estão a ele associados<sup>27</sup>. Investigações experimentais, através de diversas técnicas, demonstram que, a temperatura de 105 K, o cristal sofre uma transição estrutural de uma fase cúbica a tetragonal<sup>28,29</sup>. Estabeleceu-se que tal transição é de segunda ordem<sup>30</sup>.

Em sua fase cúbica, o SrTiO<sub>3</sub> apresenta cada átomo de Ti rodeado por seis oxigênios, formando um octaedro (Fig. 2.5). O campo cristalino sobre o átomo de Ti é formado principalmente por sua interação com os oxigênios. A experiência sugere<sup>30</sup> que o octaedro gira de um ângulo  $\pm\psi$  ao longo de um dos três eixos [100], [001] ou [010] ao sistema se ordenar<sup>30</sup>.

Como o octaedro gira de um ângulo  $\pm\psi$ , a rede fica alterada. Formam-se, na verdade, duas subredes com ângulos alternados (Fig. 2.6)<sup>30</sup>. A nova rede não é mais cúbica, e sim tetragonal.

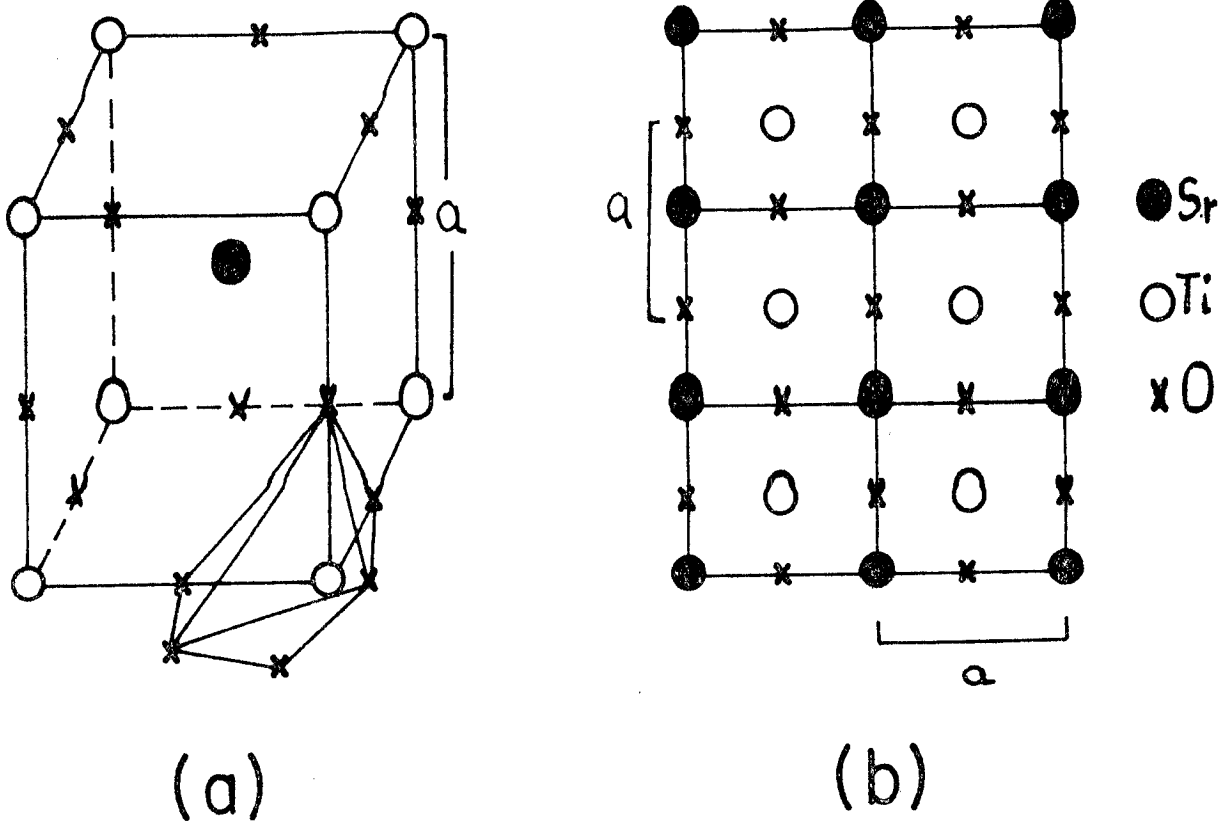


Figura 2.5 - Estrutura cúbica do SrTiO<sub>3</sub>. (a) Para  $T > 105$  K o SrTiO<sub>3</sub> apresenta a estrutura cúbica onde átomos de Ti são rodeados por seis oxigênios formando um octaedro. (b) Visão do plano perpendicular ao eixo [001] da rede cúbica (a) onde nota-se uma estrutura periódica de periodicidade  $\underline{a}$ .

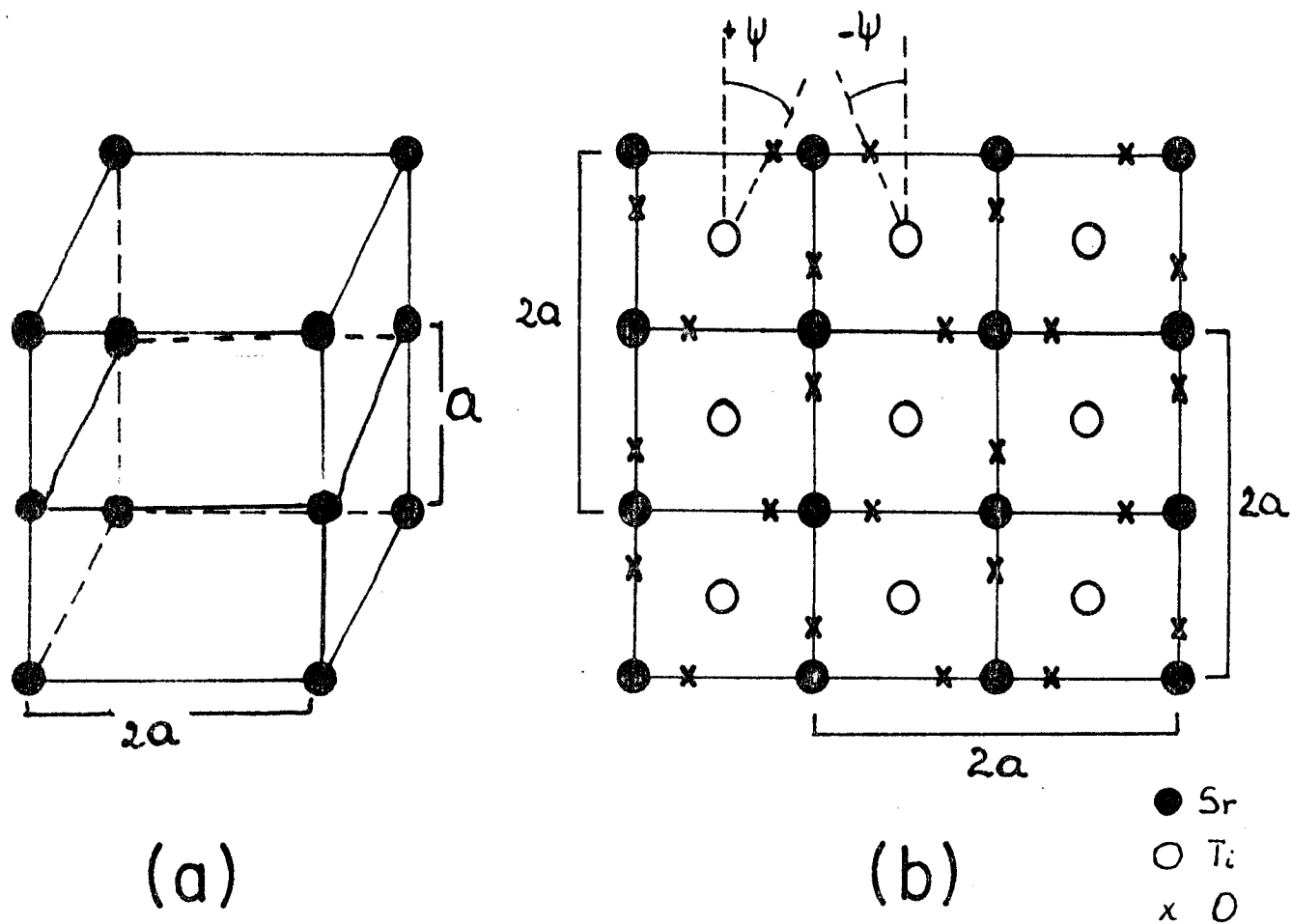


Figura 2.6 - Estrutura tetragonal do  $\text{SrTiO}_3$ <sup>30</sup>. (a) Para  $T = 105 \text{ K}$  o  $\text{SrTiO}_3$  sofre uma transição estrutural assumindo uma forma tetragonal. Tal transição é de segunda ordem e se dá com um parâmetro de ordem que é função de  $\psi$ ; (b) O octaedro original sofre rotações alternadas segundo um eixo  $[001]$ , por exemplo. A rede fica idêntica neste eixo, mas no plano perpendicular a este eixo a periodicidade passa de  $a$  a  $2a$ . Assim sendo, a rede passa de cúbica  $a \times a \times a$  a tetragonal  $2a \times 2a \times a$ .

Como a transição de fase acima descrita, está associada à rotação  $\pm\psi$  do octaedro  $\text{TiO}_6$ , parece razoável estabelecer-se como parâmetro de ordem o deslocamento do oxigênio, deslocamento este associado a esta rotação e dado por:

$$\phi_k = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \psi_k \quad (2.66)$$

onde  $a$  é o parâmetro de rede e  $\psi$  é o ângulo de rotação<sup>28</sup>. Baseando-se na simetria do cristal construiu-se uma energia livre de Landau para o problema<sup>28</sup>. Posteriormente generalizou-se este procedimento gerando-se um hamiltoniano da forma<sup>31,32</sup>:

$$\mathcal{H} = \int_a^\infty d^3x \left\{ \frac{1}{2} K \phi^2 + C (\nabla \phi)^2 + u_0 (\phi^2)^2 + v_0 (\phi_0^4 + \phi_1^4 + \phi_2^4) \right\} - \int_a^\infty \left\{ b_e T_{ij} (3\phi_i^2 - \phi^2) + b_t T_{ij} \phi_i \phi_j \right\} d^3x \quad (2.67)$$

onde  $a$  é o parâmetro de rede e onde somente  $K$  depende fortemente da temperatura. A primeira integral está associada ao fato do sistema apresentar eixos de simetria  $[100]$ ,  $[001]$  e  $[010]$ .

A segunda integral inclui a ação de uma tensão elástica  $\{T_{ij}\} \equiv \overleftrightarrow{T}$  externa sobre o sistema e sua influência sobre o deslocamento do oxigênio. A forma específica desta integral provém de questões de simetria. As componentes  $T_{ij}$  da tensão elástica são dadas por:

$$T_{ij} = - p \alpha_i \alpha_j \quad (2.68)$$

onde  $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  é um vetor unitário que estabelece a direção da tensão.

Os parâmetros deste hamiltoniano a 4.2 K em cgs são dados por<sup>28,33</sup>:

$$\begin{aligned} K &= -3.08 \cdot 10^{25} \\ u_0 &= 1.89 \cdot 10^{43} \\ V_c &= -3.09 \cdot 10^{42} \\ b_t &= -1.98 \cdot 10^{45} \\ b_e &= 7.34 \cdot 10^{14} \\ C &= 6 \cdot 10^{11} \\ a &= 10^{-8} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para uma tensão diagonal  $\vec{\alpha} // [111]$ , obteve-se experimentalmente que o sistema se ordena inicialmente através de uma transição de segunda ordem de uma fase pseudocúbica a trigonal. Tal transição pode ser visualizada através de uma rotação do octaedro  $TiO_6$  em torno de um eixo  $[111]$  (Fig. 2.7). Para temperaturas menores que a da transição cúbica-trigonal, baixando-se o valor da pressão a uma pressão crítica, ocorre um novo ordenamento. O sistema sofre uma transição de primeira ordem de uma fase trigonal a pseudotetragonal. Tal transição pode ser entendida como devida à

competição entre o termo de anisotropia cúbica  $v_0(\phi_0^4 + \phi_1^4 + \phi_2^4)$  que favorece o ordenamento tetragonal e o termo de pressão que favorece o ordenamento trigonal. Uma visão geral da transição é dado pelo diagrama de fases (Fig. 2.8).

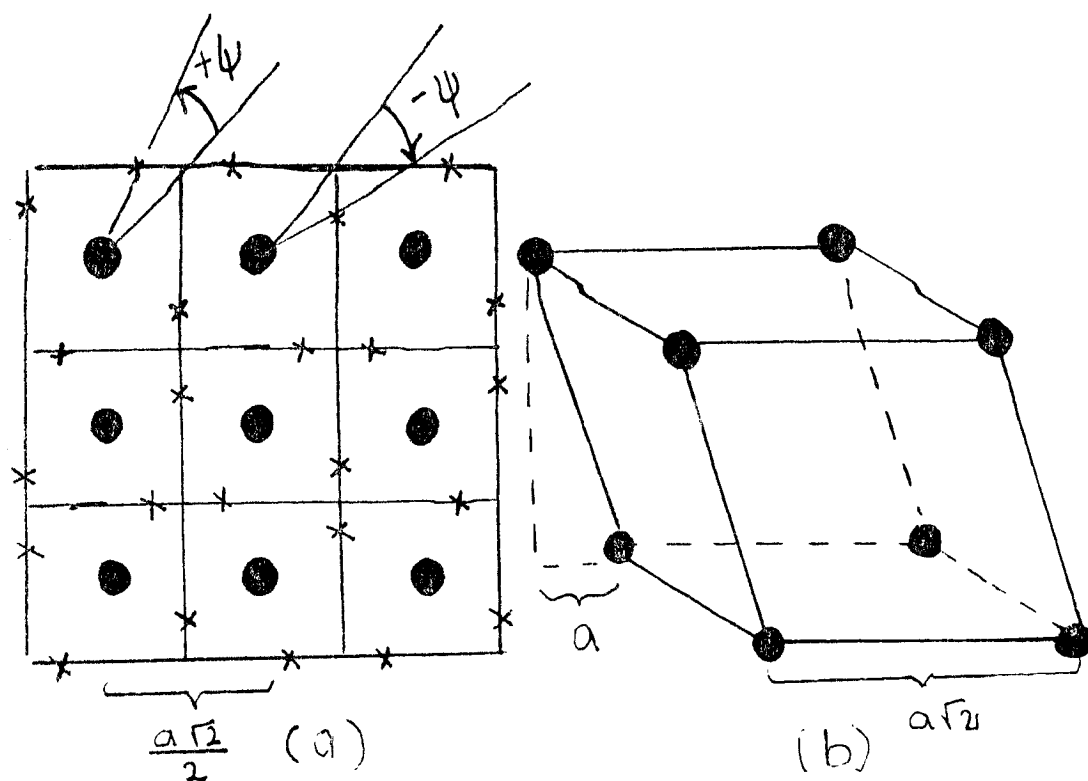


Figura 2.7 - Transição cúbica a trigonal. (a) Visão do plano perpendicular ao eixo  $[111]$ . Uma tensão externa provoca o efeito equivalente ao de girar o sistema de um ângulo segundo o eixo  $[111]$ ; (b) Do giro do ângulo surge uma fase trigonal.



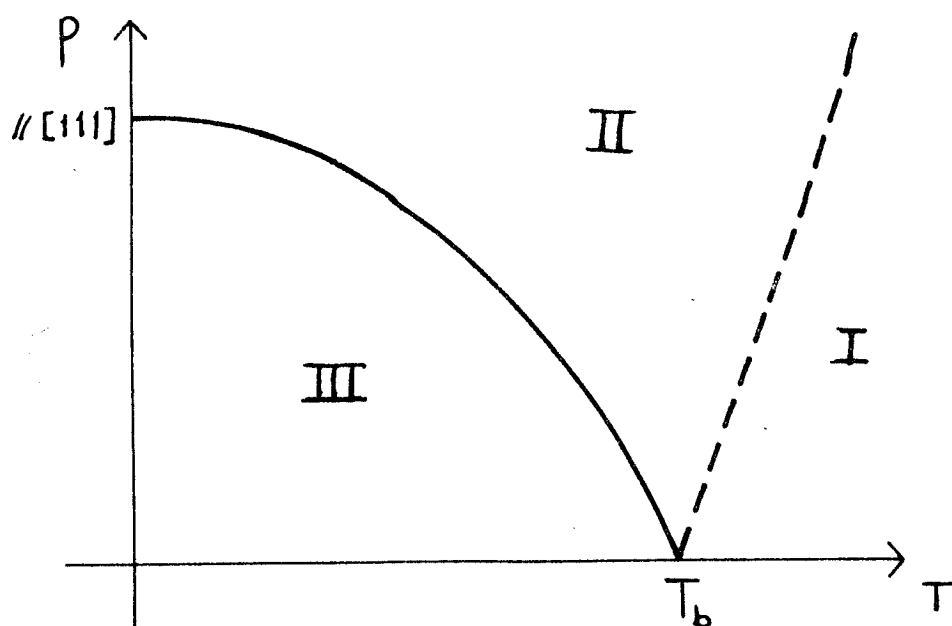


Figura 2.8 - Diagrama de fases  $p \times T$  para o  $\text{SrTiO}_3$ . Sob a ação de uma pressão diagonal  $p//[111]$  o sistema inicialmente passa de uma fase I (pseudocúbica) a II (trigonal) através de uma transição de fase de segunda ordem (linha pontilhada). Baixando-se a temperatura, o sistema passa da fase II (trigonal) à III (pseudotetragonal) através de uma transição de primeira ordem (linha cheia). Esta última é a transição de Potts simétrico<sup>19</sup>.

Blankschtein et al.<sup>32</sup> demonstraram que a transição trigonal-pseudotetragonal do  $\text{SrTiO}_3$  associa-se a transição de primeira ordem prevista pelo modelo de Potts de três estados simétrico.

Para uma tensão externa  $\vec{\alpha} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  levemente não diagonal ( $\delta \ll 1$ ), da fase trigonal atingem-se duas possíveis fases que no limite de  $\delta \rightarrow 0$  convergem para a fase pseudotetragonal (Fig. 2.9). Tais transições associam-se às previstas pelo modelo de Potts de três estados na presença de campo externo e de quebra de simetria<sup>20,32</sup>.

Na ausência de flutuações, obteve-se que a energia livre de Landau associada à transição trigonal-pseudotetragonal 1 ou trigonal-pseudotetragonal 2 é a do modelo de Potts de três estados com quebra de simetria total e campo externo. Generalizaremos tal resultado, mostrando que o hamiltoniano (incluindo flutuações) associado a estas transições é equivalente ao da seção 2.1.

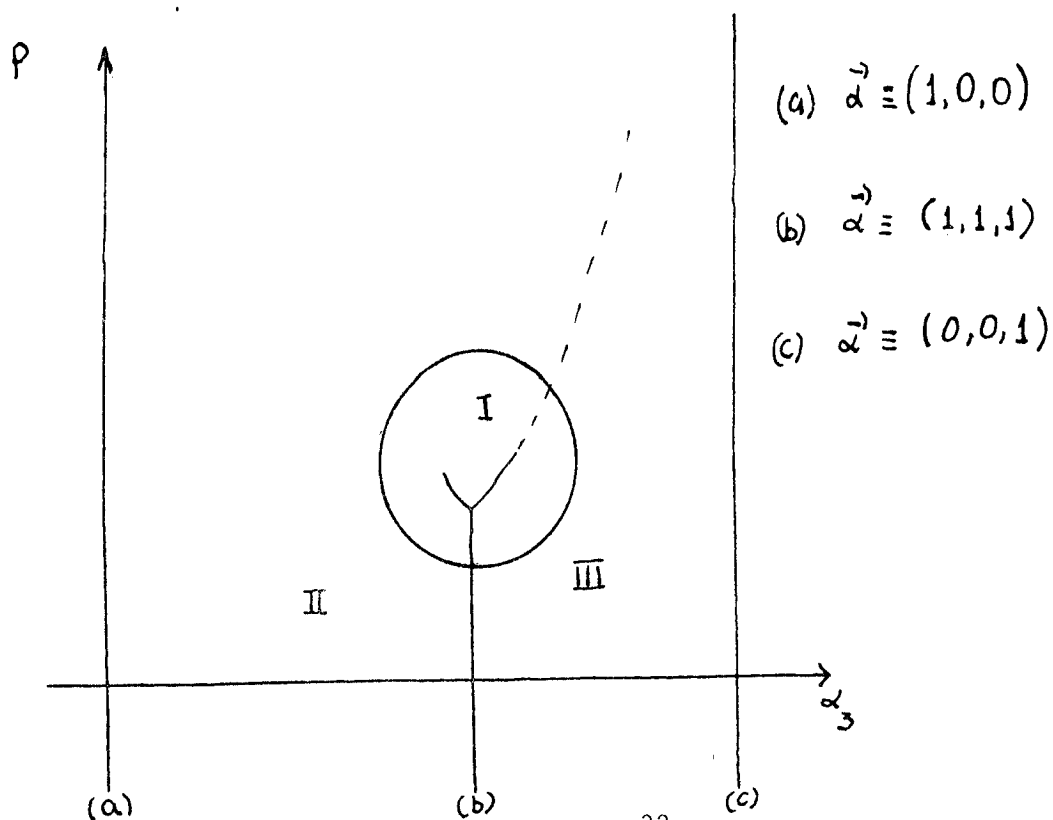


Figura 2.9 - Diagrama de fase  $p - \alpha_3$  do  $\text{SrTiO}_3$ <sup>32</sup>. Diagrama de fases numérico do módulo da pressão versus terceira componente ( $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ) do vetor unitário que fornece a direção da pressão. As linhas cheias indicam transições de primeira ordem, as pontilhadas de segunda. A região assinalada com um círculo é representada pelo modelo de Potts de três estados com quebra de simetria e na presença de campo externo. (I) representa a fase trigonal; (II) uma fase pseudotetragonal 1 e (III) uma fase pseudotetragonal 2.

Para tanto, fazemos uma rotação nos campos  $\phi$ 's da forma:

$$\hat{\phi}_0 = \sqrt{\beta C a^{d-2}} (\phi_0 + \phi_1 + \phi_2) / \sqrt{3}$$

$$\hat{\phi}_1 = \sqrt{\beta C a^{d-2}} (\phi_1 - \phi_2) / \sqrt{2}$$

$$\hat{\phi}_2 = \sqrt{\beta C a^{d-2}} (\phi_0 + \phi_1 - 2\phi_2) / \sqrt{2}$$

(2.70)

e uma transformação nas coordenadas  $a^{-1}x \equiv \bar{x}$  de modo que hamiltoniano (2.67) possa ser escrito como:

$$\begin{aligned} H = \rho \mathcal{H} = & \int d\bar{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_0 \hat{\phi}_0^2 + r_1 \hat{\phi}_1^2 + r_2 \hat{\phi}_2^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 \right] + \right. \\ & + u_0' |\phi|^4 + v_0' \left[ \frac{1}{3} \hat{\phi}_0^4 + 2 \hat{\phi}_0^2 (\hat{\phi}_1^2 + \hat{\phi}_2^2) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\sqrt{2}}{3} (\hat{\phi}_2^3 - 3\hat{\phi}_1^2 \hat{\phi}_2) \hat{\phi}_0 + \frac{1}{2} (\hat{\phi}_1^2 + \hat{\phi}_2^2)^2 \right] + g_{13} \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde os parâmetros são dados por:

$$r_0 = \left\{ K + \frac{2}{3} b_t p + O(\delta^2) \right\} a^2 / c$$

$$= K' + \frac{2}{3} b_t' p$$

$$r_1 = \left\{ K - \frac{1}{3} b_t p + \frac{2}{3} (6b_e - b_t) p \delta + O(\delta^2) \right\} a^2 / c$$

$$= K' - \frac{1}{3} b_t' p + \frac{2}{3} (6b_e' - b_t') p \delta$$

$$r_2 = \left\{ K - \frac{1}{3} b_t p - \frac{2}{3} (6b_e - b_t) p \delta + O(\delta^2) \right\} a^2 / c$$

$$= K' - \frac{1}{3} b_t' p - \frac{2}{3} (6b_e' - b_t') p \delta$$

$$u_0' = a^{4-d} u_0 / \beta c^2$$

$$v_0' = a^{4-d} v_0 / \beta c^2$$

$$K' = K a^2 / c$$

$$b_e' = b_e a^2 / c$$

$$b_t' = b_t a^2 / c$$

$$g_{13} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} (12b_e + b_t) p \delta + O(\delta^2) \right\} a^2 / c \quad (2.72)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} (12b_e' + b_t') p \delta + O(\delta^2)$$

Como para  $p > 0$ ,  $r_0 < r_1, r_2$ , o sistema se ordenará inicialmente segundo  $\hat{\phi}_0$ , ou seja, segundo uma direção diagonal do  $\underline{cu}$

bo. Esta é a transição de uma fase pseudocúbica à trigonal. Tal transição ocorre quando o octaedro  $\text{TiO}_6$  gira ao redor de um eixo  $[111]$  (Fig. 2.7).

Na fase trigonal  $\hat{\phi}_0 = \bar{\phi}_0 + \phi_0$ ,  $\hat{\phi}_1 = \phi_1$ ,  $\hat{\phi}_2 = \phi_2$  já que os valores médios  $\langle \phi_1 \rangle$  e  $\langle \phi_2 \rangle$  são nulos. Podemos reescrever o hamiltoniano em termos da parte de flutuação dos campos, obtendo:

$$\begin{aligned}
 H = \int_1^\infty d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_0 \phi_0^2 + \tilde{r}_1 \phi_1^2 + \tilde{r}_2 \phi_2^2 + (\nabla \phi)^2 \right] + \tilde{w}_0 \phi_0^3 + \tilde{u}_0 \phi_0^4 + \right. \\
 + \tilde{w}_1 (\phi_2^3 - 3 \phi_2 \phi_1) + \tilde{w}_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \phi_0 + g_{13} \phi_0 \phi_2 - h_1 \phi_2 + h_0 \phi_0 + \\
 \left. + \tilde{u}_1 (\phi_2^2 + \phi_1^2)^2 + \tilde{u}_2 (\phi_2^3 - 3 \phi_1^2 \phi_2) \phi_0 + \tilde{u}_3 (\phi_2^2 + \phi_1^2) \phi_0^2 + F_0(\bar{\phi}_0) \right\}
 \end{aligned}$$

(2.73)

onde

$$\tilde{r}_0 = r_0 + 12 \left( u_0' + \frac{v_0'}{3} \right) \bar{\phi}_0^{-2}$$

$$\tilde{r}_1 = r_1 + 4 \left( u_0' + v_0' \right) \bar{\phi}_0^{-2}$$

$$\tilde{r}_2 = r_2 + 4 \left( u_0' + v_0' \right) \bar{\phi}_0^{-2}$$

$$\tilde{w}_0 = 4 \left( u_0' + \frac{v_0'}{3} \right) \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{w}_1 = - \frac{2\sqrt{2}}{3} v_0' \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{w}_2 = 4 (u_0' + v_0') \bar{\phi}_0$$

$$\tilde{u}_0 = u_0' + \frac{v_0'}{3}$$

$$\tilde{u}_1 = u_0' + \frac{v_0'}{2}$$

$$\tilde{u}_2 = - \frac{2\sqrt{2}}{3} v_0'$$

$$\tilde{u}_3 = 2 (u_0' + v_0')$$

$$h_0 = r_0 \bar{\phi}_0 + 4 \left( u_0' + \frac{v_0'}{3} \right) \bar{\phi}_0^5$$

$$F_0(\bar{\phi}_0) = \frac{1}{2} r_0 \bar{\phi}_0^2 + \left( u_0' + \frac{v_0'}{3} \right) \bar{\phi}_0^4$$

De posse do hamiltoniano (2.73) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 \rangle &= \frac{1}{Z} \int \phi_0 e^{-H} \\ &= \frac{-\tilde{w}_2 [\langle \phi_1^2 \rangle + \langle \phi_2^2 \rangle] - g_{13} \langle \phi_2 \rangle}{\tilde{r}_0} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Após o ordenamento inicial  $\langle \hat{\phi}_0 \rangle = \bar{\phi}_0$ , baixando a temperatura o sistema sofrerá um segundo ordenamento segundo  $\phi_1$  ou segundo  $(\phi_2, \phi_1)$ . Como, neste sentido,  $\phi_0$  é não crítico, tomamos o traço parcial sobre  $\phi_0$  eliminando do hamiltoniano sua presença explícita. Com isto, (2.73) assumirá a forma:

$$\begin{aligned} H_{ef} &= \int_1^{\infty} d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \hat{r}_1 \phi_1^2 + \hat{r}_2 \phi_2^2 + (\nabla \phi)^2 \right] + w_1 \phi_2^3 - 3w_2 \phi_1^2 \phi_2 + \right. \\ &\quad \left. + u_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + u_2 (\phi_2^4 - 3\phi_1^2 \phi_2^2) - h_1 \phi_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.76)$$

com parâmetros dados por:

$$\hat{r}_1 = \tilde{r}_1 = r_1 + 4(u_0' + v_0') \bar{\phi}_0^2$$

$$\hat{r}_2 = \tilde{r}_2 = r_2 + 4(u_0' + v_0') \bar{\phi}_0^2$$

$$w_1 = \tilde{w}_1 + \frac{\tilde{w}_2}{\tilde{r}_0} g_{13}$$



$$w_2 = \tilde{w}_1 - \frac{\tilde{w}_2}{3\tilde{r}_0} g_{13}$$

$$u_1 = \tilde{u}_1 - \frac{\tilde{w}_2^2}{2\tilde{r}_0}$$

$$u_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{v_0'}{\tilde{r}_0} g_{13}$$

(2.77)

$$h_1 = -g_{13} \bar{\phi}_0$$

onde usando-se que  $\bar{\phi}_0$  é tal que minimize  $F(\bar{\phi}_0)(h_0 = 0)$  (ver (2.74)), ou seja, usando-se que

$$\bar{\phi} = \sqrt{\frac{-r_0}{4(u_0' + \frac{v_0'}{3})}} \quad (2.78)$$

teremos que:

$$\hat{r}_1 = r_1 - r_0 \left( \frac{u_0' + v_0'}{u_0' + \frac{v_0'}{3}} \right)$$

$$\hat{r}_2 = r_2 - r_0 \left( \frac{u_0' + v_0'}{u_0' + \frac{v_0'}{3}} \right)$$

$$w_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v_0' \left[ 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{u_0' + v_0'}{r_0 v_0} g_{13} \right] \sqrt{\frac{-r_0}{4(u_0' + \frac{v_0'}{3})}}$$

$$w_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v_0' \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{u_0' + v_0'}{v_0' r_0} g_{13} \right] \sqrt{\frac{-r_0}{4(u_0' + \frac{v_0'}{3})}}$$

$$u_1 = -\frac{v_0'}{6} \frac{7u_0' + 5v_0'}{u_0' + \frac{v_0'}{3}}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} v_0' \frac{g_{13}}{r_0}$$

$$h_1 = -g_{13} \sqrt{\frac{-r_0}{4(u_0' + \frac{v_0'}{3})}} \quad (2.79)$$

Para  $\delta = 0$ , ou seja,  $r_1 = r_2$ ,  $w_1 = w_2$ ,  $u_2 = h_1 = 0$ , o hamiltoniano (2.76) nada mais é que do modelo de Potts de três estados simétrico na ausência de campo externo. Tal modelo prevê uma transição de fase de primeira ordem em  $r_1 = -w_1^2/2u_1$ <sup>26</sup>, na qual o sistema passa de uma fase desordenada de Potts ( $\langle \phi_1 \rangle = 0$ ) (fase trigonal para o SrTiO<sub>3</sub>) a ordenada de Potts (fase pseudotetragonal do SrTiO<sub>3</sub>) ( $\langle \phi_1 \rangle = -w_1/2u_1$ ). A tais parâmetros de Potts associam-se os do SrTiO<sub>3</sub><sup>32</sup>:

$$\bar{\phi}_0 = 6.88 \cdot 10^{-10} \text{ cm} \quad (2.80)$$

$$P_p = 23 \text{ kg mm}^{-2} \quad (2.81)$$

onde usamos os parâmetros (2.69) em (2.72) e em (2.78) e (2.79).

De  $\langle \phi_1 \rangle = -w_1/2u_1$  sai que "salto" na magnetização diagonal de Potts é dado por:

$$\langle \phi_c \rangle = -0.54 \cdot 10^{-10} \text{ cm} \quad (2.82)$$

onde usou-se (2.69), (2.72) e (2.79) bem como (2.75).

Para  $\delta \neq 0$ , o hamiltoniano (2.76) é equivalente ao do modelo de Potts de três estados com quebra de simetria quadrática, trilinear e quártica e na presença de campo externo. Na ausência de flutuações, aplicando-se resultados de campo médio (seção 2.1), pode-se prever que haja uma transição de fase de primeira ordem entre as fases trigonal (fase I de Potts) e pseudotetragonal 1 (fase II de Potts) que acaba em um ponto crítico dado por<sup>20,32</sup>:

$$\bar{\Phi}_c = 6.904 \cdot 10^{-10} \text{ (} 6.9 \cdot 10^{-10} \text{)} \quad (2.83)$$

$$\delta_c = 0.0077 \text{ (} 0.0081 \text{)} \quad (2.84)$$

$$\rho_c = 25.15 \text{ (} 25 \text{)} \quad (2.85)$$

em unidades de cgs e onde usou-se (2.36), (2.37) e (2.38), bem como (2.69), (2.72) e (2.79). Os resultados entre parênteses desconsideram a quebra de simetria trilinear e quártica<sup>32</sup>.

Ainda aplicando resultados de campo médio, pode-se prever que haja uma transição de fase de primeira ordem entre as fases trigonal (fase I de Potts) e pseudotetragonal 2 (fase III de Potts) que se transforme em de segunda ordem em um ponto tricrítico dado por<sup>20,32</sup>:

$$\bar{\phi}_t = 6.933 \cdot 10^{-10} \left( 7 \cdot 10^{-10} \right) \quad (2.86)$$

$$\delta_t = -0.0378 \left( -0.042 \right) \quad (2.87)$$

$$P_t = 27.39 \quad (28) \quad (2.88)$$

em unidades de cgs. Novamente os resultados entre parênteses desconsideram a quebra de simetria trilinear e quártica. Para obtermos os resultados acima, usamos (2.47), (2.48) e (2.49), bem como (2.69), (2.72) e (2.79).

Comparando os resultados obtidos para os pontos crítico e tricrítico na presença<sup>20</sup> ou não<sup>32</sup> de quebra de simetria trilinear e quártica, observamos que os primeiros corrigem os últimos em cerca de 6%.

Com a finalidade de completar a análise de campo médio realizada por Blankschtein et al., podemos obter, usando (2.34), a curva de primeira ordem que separa a fase trigonal (Potts I) da pseudotetragonal 1 (Potts II) dada por:

$$\frac{P}{K} = \frac{-0.738 \cdot 10^{-16}}{1 - 0.0106 \cdot 10^3 \delta} \quad (2.89)$$

onde usamos (2.72) e (2.79). Na expressão anterior, desconsideramos a quebra de simetria trilinear e quártica.

Igualmente usando (2.44) e (2.45), obtemos uma expressão para a curva de segunda ordem que separa as fases trigonal e pseudotetragonal 2 (Potts III) dada por:

$$\delta = \frac{10.36 \cdot 10^{-19} K/p + 6.11 \cdot 10^{-13} \pm 6 F(P/K) 10^{-19} K/p \mp 0.79 \cdot 10^{-3} F(P/K)}{-20.56 \mp 10.79 F(P/K) \mp \frac{16.086}{F(P/K)}}$$

$$F\left(\frac{P}{K}\right) \equiv \left\{ \frac{1.45 + 2.3 \cdot 10^{16} P/K}{1 - 0.132 \cdot 10^{16} P/K} + 1 \right\}^{1/2} \quad (2.90)$$

onde usamos (2.69), (2.72) e (2.79). Na expressão acima, desconsideramos a quebra de simetria trilinear e quártica.

#### 2.4 Resumo

Neste capítulo, inicialmente fizemos uma descrição sumária do modelo de Potts de três estados, obtendo sua formulação contínua. Chamamos especial atenção ao fato de que uma anisotropia no termo de troca do hamiltoniano discreto dá origem a quebras de simetria nos termos quadráticos, trilineares e quárticos do hamiltoniano contínuo. Revimos alguns resultados conhecidos de campo médio. Estabelecemos que sistemas magnéticos com anisotropia cúbica sob a ação de um campo magnético não diagonal  $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  são realizações físicas do modelo, generalizando o trabalho de

Mukamel et al.<sup>13</sup>.

Reobtivemos que o  $\text{SrTiO}_3$  sob uma tensão não diagonal  $\vec{p} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  é uma realização física do modelo. Aplicamos os resultados de campo médio de Potts a este composto. Obtivemos, estendendo o trabalho de Blankschtein et al.<sup>32</sup>, uma equação de estado  $\delta/K$  vs.  $p/K$  para a transição de primeira ordem entre as fases trigonal e pseudotetragonal 1 e de segunda ordem, entre as fases trigonal e pseudotetragonal 2.

Nos próximos capítulos obteremos uma forma sistemática de incluir flutuações aos resultados até aqui obtidos. Eles constituem a parte central deste trabalho que tem por objetivo principal estudar o efeito de flutuações sobre os parâmetros e funções termodinâmicos.

### 3. INFLUÊNCIA DE FLUTUAÇÕES E DE QUEBRA DE SIMETRIA NOS COMPORTAMENTOS CRÍTICO E TRICRÍTICO DO MODELO DE POTTS DE TRÊS ESTADOS

#### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, reobtivemos os parâmetros relativos à temperatura, magnetização e campo magnético nos pontos crítico e tricrítico de Potts em uma teoria de campo médio. Neste capítulo, iremos obter a influência de flutuações sobre tais parâmetros. Para tanto, precisamos de uma forma sistemática de incluí-las. Isto é o que iremos obter a seguir.

Inicialmente, partimos do hamiltoniano (2.15b) e o reescrevemos como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} = & N \tilde{h}_0 + \frac{1}{2!} \sum_{q=0}^1 \left\{ q^2 \tilde{\psi}_q \tilde{\psi}_{-q} + q^2 \tilde{\phi}_q \tilde{\phi}_{-q} + \tilde{r}_1 \tilde{\phi}_q \tilde{\phi}_{-q} + \tilde{r}_2 \tilde{\psi}_q \tilde{\psi}_{-q} \right\} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q_1, q_2=0}^1 \left\{ \tilde{w}_1 \tilde{\phi}_{q_1} \tilde{\phi}_{q_2} \tilde{\phi}_{-q_1-q_2} - 3 \tilde{w}_2 \tilde{\phi}_{q_1} \tilde{\psi}_{q_2} \tilde{\psi}_{-q_1-q_2} \right\} + \\
 & + \frac{1}{N} \sum_{q_1, q_2, q_3=0}^1 \left\{ u_1 \tilde{\phi}_{q_1} \tilde{\phi}_{q_2} \tilde{\phi}_{q_3} \tilde{\phi}_{-q_1-q_2-q_3} + 2u_2 \tilde{\phi}_{q_1} \tilde{\phi}_{q_2} \tilde{\psi}_{q_3} \tilde{\psi}_{-q_1-q_2-q_3} + u_3 \tilde{\psi}_{q_1} \tilde{\psi}_{q_2} \tilde{\psi}_{q_3} \tilde{\psi}_{-q_1-q_2-q_3} \right\} \\
 & + \sqrt{N} \sum_{q=0}^1 \tilde{h}_q \phi_q
 \end{aligned} \tag{3.1a}$$

onde fizemos uma transformação nos campos dada por  $\phi_q = \tilde{\phi}_q + M$  e  $\tilde{\psi}_q = \psi_q$  com  $\langle \phi_q \rangle = M$  e  $\langle \psi_q \rangle = 0$  de forma a estarmos restritos às fases I e II de Potts. Com esta transformação os parâmetros em (3.1a) relacionam-se aos em (2.15) via:

$$\tilde{r}_0 = r_0 + \frac{1}{2} r_1 M^2 + w_1 M^3 + u_1 M^4 - h_1 M$$

$$\tilde{r}_1 = r_1 + 6 w_1 M + 12 u_1 M^2$$

$$\tilde{r}_2 = r_2 - 6 w_2 M + 4 u_2 M^2$$

$$\tilde{w}_1 = w_1 + 4 u_1 M$$

$$\tilde{w}_2 = w_2 - \frac{4}{3} u_2 M$$

$$\tilde{h} = h_1 - r_1 M - 3 w_1 M^2 - 4 u_1 M^3$$

(3.1b)



Fazendo esta mesma transformação dos campos para o hamiltoniano (2.17b), obtemos:

$$\mathcal{H} = N \tilde{r}_0 + \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\nabla \tilde{\phi})^2 + (\nabla \tilde{\psi})^2 + \tilde{r}_1 \tilde{\phi}^2 + \tilde{r}_2 \tilde{\psi}^2 \right] + \tilde{w}_1 \tilde{\phi}^3 - \tilde{w}_2 \tilde{\phi} \tilde{\psi}^2 + u_1 \tilde{\phi}^4 + 2u_2 \tilde{\phi}^2 \tilde{\psi}^2 + u_3 \tilde{\psi}^4 - \tilde{h} \tilde{\phi} \right\} \quad (3.2)$$

De posse de  $\mathcal{H}$ , podemos escrever quantidades físicas tais como a susceptibilidade, a magnetização, etc, fazendo uma expansão da exponencial da parte não quadrática (nos campos) do hamiltoniano acima.

Tomemos a susceptibilidade longitudinal dada pela função de correlação de dois campos  $\langle \tilde{\phi} \tilde{\phi} \rangle$  a momento nulo<sup>33</sup>. Para acoplamentos  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  pequenos, expandimos as exponenciais e obtemos:

$$\begin{aligned} \chi &= \langle \tilde{\phi} \tilde{\phi} \rangle \Big|_{q=0} \\ &= \frac{\int d\tilde{\phi} d\tilde{\psi} \tilde{\phi} \tilde{\phi} \exp \left\{ - \int d^d q \frac{1}{2} \left[ q^2 \tilde{\phi}^2 + q^2 \tilde{\psi}^2 + \tilde{r}_1 \tilde{\phi}^2 + \tilde{r}_2 \tilde{\psi}^2 \right] \right\}}{\int d\tilde{\phi} d\tilde{\psi} e^{-\mathcal{H}}} \\ &= \tilde{r}_1^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Segundo esta expressão, a susceptibilidade será divergen

te para  $\tilde{r}_1 = 0$  que define, à esta ordem, a temperatura crítica como  $\tilde{r}_1 = T - T_c^{(0)}$ .

A ordens seguintes, nesta expansão, teremos:

$$\chi^{-1} = \tilde{r}_1 + 12u_1 \int_0^1 \frac{d^d q}{q^2 + \tilde{r}_1} - 18\tilde{w}_1^2 \int_0^1 \frac{d^d q}{(q^2 + \tilde{r}_1)^2} \quad (3.4)$$

onde mantivemos termos até a ordem de um loop (cada loop corresponde a uma integral de momento). Neste caso, a susceptibilidade longitudinal divergirá para uma temperatura dada pelo zero da expressão:

$$\bar{T}_1 = \tilde{r}_1 + 12u_1 \int_0^1 \frac{d^d q}{q^2} - 18\tilde{w}_1^2 \int_0^1 \frac{d^d q}{q^4} \quad (3.5)$$

Substituindo-se (3.5) em (3.4), o inverso da susceptibilidade será dado por:

$$\chi^{-1} = \bar{T}_1 - 12u_1 \bar{T}_1 \int_0^1 \frac{d^d q}{q^2(q^2 + \bar{T}_1)} - 36\tilde{w}_1^2 \bar{T}_1 \int_0^1 \frac{d^d q}{q^2(q^2 + \bar{T}_1)^2} \quad (3.6)$$

Observamos que as integrais divergem no limite infravermelho na região crítica (ao  $T_1 \rightarrow 0$ ) para dimensões  $d \leq 4$  e  $d \leq 6$ , respectivamente. A forma "standard" de evitar as divergências é fazer uma expansão fora da região crítica e utilizar o grupo de renormalização para fazer um mapeamento à região crítica.

Do que foi visto anteriormente, podemos concluir que campo médio<sup>a</sup> (zero loops) funciona bem para teorias  $u_1 \tilde{\phi}^4$  em  $d > 4$  dimensões e para teorias  $\tilde{w}_1 \tilde{\phi}^3$  em  $d > 6$  dimensões, já que correções de flutuações (um loop) são não divergentes nestes dois casos. Apresentaremos, a seguir, uma forma sistemática de incluir flutuações sem divergências.

## 3.2 Equações do Grupo de Renormalização

### 3.2.1 Introdução

Nosso objetivo, nesta seção, será o de construir, a partir do hamiltoniano  $\mathcal{H}$  dado por (3.1a), um hamiltoniano  $\mathcal{H}(\ell)$  através da eliminação das componentes de Fourier dos campos  $\phi_{\vec{q}}, \psi_{\vec{q}}$  com  $e^{-\ell} < |\vec{q}| < 1$  mantendo a função de partição inalterada. A relação entre  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}(\ell)$  fornece o gerador do grupo de renormalização e consequentemente as relações entre os parâmetros não renormalizados  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots$  relativos a  $\mathcal{H}$  e os renormalizados  $\tilde{r}_1(\ell), \tilde{r}_2(\ell) \dots$  relativos a  $\mathcal{H}(\ell)$ . Como  $\mathcal{H}(\ell)$  leva o sistema fora da região crítica podemos, usando seus parâmetros, calcular quantidades físicas sem o perigo das divergências infravermelhas.

Para obtermos  $\mathcal{H}(\ell)$ , seguiremos os seguintes passos<sup>35</sup>:

- (a) Eliminaremos todas as componentes dos campos com  $e^{-\ell} < |\vec{q}| < 1$  tomando o traço parcial sobre elas. Tal procedimento reduz o

<sup>a</sup>Os resultados obtidos na ausência de flutuações são os mesmos que os da ordem de zero loops, onde  $\chi^{-1} \sim (T - T_c)^{-1}$ .

número de graus de liberdade de  $N$  a  $N(\ell) = N e^{-d\ell}$ ;

(b) Renumeraremos e reescalaremos tais componentes de forma a termos

$$0 < |\vec{q}'| < 1 \quad \text{onde} \quad |\vec{q}'| = |\vec{q}| e^{\ell};$$

(c) Estenderemos o sistema em todas as dimensões por um fator de es

cala  $e^{-\ell}$ , substituindo  $N$  por  $N(\ell) e^{d\ell}$ ;

(d) Tomaremos  $\ell$  infinitesimal de forma a obtermos relações diferenciais entre os parâmetros renormalizados e não renormalizados através da linearização das transformações do grupo de renormalização.

### 3.2.2 Eliminação das componentes altas de Fourier

Para eliminarmos parte das componentes de Fourier, separamos cada somatório em (3.1a) em dois termos dados por:

$$\sum_{q=0}^1 \equiv \sum_{q=0}^{e^{-\ell}} + \sum_{q=e^{-\ell}}^1 \quad (3.7)$$

e definimos por  $k$  às componentes de Fourier com  $e^{-\ell} > q > 0$  (componentes baixas) e por  $q$  as restantes (componentes altas). Além disso, expandimos as exponenciais trilineares e quárticos nos campos. Procedendo assim, a função de partição associada a (3.1a) será reescrita como:

$$Z = \int \prod_{\kappa} d\phi_{\kappa} d\psi_{\kappa} \int \prod_{q} d\phi_q d\psi_q e^{-\mathcal{H}(1_{|k| < e^{-\ell}})} \left\{ 1 - A + \frac{A^2}{2!} \dots \right\} e^{-\hat{\mathcal{H}}}$$

onde

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_q \left[ (\tilde{r}_1 + q^2) \phi_q \phi_{-q} + (\tilde{r}_2 + q^2) \psi_q \psi_{-q} \right]$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 (|k\rangle\langle e^{-p}|) &\equiv N \tilde{r}_0 + \frac{1}{2} \sum_k \left[ (\tilde{r}_1 + k^2) \phi_k \phi_{-k} + (\tilde{r}_2 + k^2) \psi_k \psi_{-k} \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k_1, k_2} \left[ w_1 \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{-k_1-k_2} - 3 w_2 \phi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{-k_1-k_2} \right] + \frac{1}{N} \sum_{k_1, k_2, k_3} \left[ u_1 \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \phi_{-k_1-k_2-k_3} \right. \\ &\left. + 2u_2 \phi_{k_1} \phi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3} + u_3 \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3} \right] - \sum_k \tilde{h}_k \phi_{-k} \end{aligned}$$

e a parte não quadrática expandida é

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \sum_{q_1, q_2} \left[ \tilde{w}_1 \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{-q_1-q_2} - 3 \tilde{w}_2 \phi_{q_1} \psi_{q_2} \psi_{-q_1-q_2} \right] + \right. \\ &\left. + \sum_{q_1, k_2} \left[ \tilde{w}_1 \phi_{q_1} \phi_{k_2} \phi_{-q_1-k_2} - \tilde{w}_2 \left( 6 \psi_{q_1} \psi_{k_2} \phi_{-q_1-k_2} + 3 \psi_{q_1} \phi_{k_2} \psi_{q_1-k_2} \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{N} \left\{ \sum_{q_1, q_2, q_3} \left[ u_1 \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \phi_{-q_1-q_2-q_3} + 2u_2 \phi_{q_1} \phi_{q_2} \psi_{q_3} \psi_{-q_1-q_2-q_3} + \right. \right. \\ &\left. + u_3 \psi_{q_1} \psi_{q_2} \psi_{q_3} \psi_{-q_1-q_2-q_3} \right] + \sum_{q_1, q_2, k_3} \left[ 6u_1 \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{k_3} \phi_{-q_1-q_2-k_3} + \right. \\ &\left. + 2u_2 \phi_{q_1} \phi_{q_2} \psi_{k_3} \psi_{-q_1-q_2-k_3} + 8u_2 \phi_{q_1} \psi_{q_2} \phi_{k_3} \psi_{-q_1-q_2-k_3} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2u_2 \left[ \psi_{q_1} \psi_{q_2} \phi_{k_3} \phi_{-q_1-q_2-k_3} + 6u_3 \psi_{q_1} \psi_{q_2} \psi_{k_3} \psi_{-q_1-q_2-k_3} \right] + \\
& + \sum_{q_1, k_2, k_3} \left[ 6u_1 \phi_{q_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \phi_{-q_1-k_2-k_3} + 2u_2 \psi_{q_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \psi_{-q_1-k_2-k_3} + \right. \\
& + 8u_2 \phi_{q_1} \phi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-q_1-k_2-k_3} + 2u_2 \phi_{q_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \phi_{-q_1-k_2-k_3} + \\
& \left. + 6u_3 \psi_{q_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-q_1-k_2-k_3} \right] \Big\} - \sqrt{N} \sum_q \tilde{h} \phi_{-q} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

onde, por simplicidade, suprimimos os tils dos campos.

Tomamos o traço parcial sobre as componentes  $q$  dos campos, obtendo à ordem de um loop<sup>a</sup>

$$Z = \int \prod_k d\phi_k d\psi_k e^{-\hat{\mathcal{H}}(k) e^{-\rho}} \left\{ 1 - \hat{\mathcal{H}}_1(k) \right\} \left[ \prod_q (q^2 + \tilde{r}_1)(q^2 + \tilde{r}_2) \right]^{-1/2} \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_1 \equiv & \sum_k \frac{1}{2} \left[ a_1(k) \phi_k \phi_{-k} + a_2(k) \psi_k \psi_{-k} \right] + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k_1, k_2} \left[ b_1(k_1, k_2) \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{-k_1-k_2} - \right. \\
& \left. - 3b_2(k_1, k_2) \phi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{-k_1-k_2} \right] + \frac{1}{N} \sum_{k_1, k_2, k_3} \left[ c_1(k_1, k_2, k_3) \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \phi_{-k_1-k_2-k_3} + \right. \\
& \left. + 2c_2(k_1, k_2, k_3) \phi_{k_1} \phi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3} + c_3(k_1, k_2, k_3) \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3} \right] + \\
& + \sqrt{N} \sum_k d \phi_{-k} \quad (3.9a)
\end{aligned}$$

<sup>a</sup> Um loop é uma integral em momento.

onde

$$a_1(k) = a_{11} I_1 u_1 + a_{12} I_2 u_2 + a_{13} J_1(k) \tilde{w}_1^2 + a_{14} J_2(k) \tilde{w}_2^2$$

$$a_2(k) = a_{21} I_1 u_2 + a_{22} I_2 u_3 + a_{23} J_3(k) \tilde{w}_2^2$$

$$b_1(k_1, k_2) = b_{11} J_1(k_1) \tilde{w}_1 u_1 + b_{12} J_2(k_1) \tilde{w}_2 u_2 + b_{13} L_1(k_1, k_2) \tilde{w}_1^3 + \\ + b_{14} L_2(k_1, k_2) \tilde{w}_1^3$$

$$b_2(k_1, k_2) = b_{21} J_1(k_1) \tilde{w}_1 u_2 + b_{22} J_2(k_1) \tilde{w}_2 u_3 + b_{23} J_3(k_1) \tilde{w}_2 u_3 + \\ + b_{24} L_3(k_1, k_2) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^2 + b_{25} L_4(k_1, k_2) \tilde{w}_2^3$$

$$c_1(k_1, k_2, k_3) = c_{11} J_1(k_1) u_1^2 + c_{12} J_2(k_1) u_2^2 + c_{13} L_1(k_1, k_2) \tilde{w}_1^2 u_1 + \\ + c_{14} L_2(k_1, k_2) \tilde{w}_1^2 u_2 + c_{15} T_1(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_1^4 + c_{16} T_2(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_2^4$$

$$c_2(k_1, k_2, k_3) = c_{21} J_1(k_1) u_1 u_2 + c_{22} J_2(k_1) u_2 u_3 + c_{23} J_3(k_1) u_2^2 + \\ + c_{24} L_1(k_1, k_2) \tilde{w}_1^2 u_2 + c_{25} L_2(k_1, k_2) \tilde{w}_2^2 u_3 + c_{26} L_3(k_1, k_2) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 u_2 + \\ + c_{27} L_4(k_1, k_2) \tilde{w}_2^2 u_2 + c_{28} L_5(k_1, k_2) \tilde{w}_2^2 u_1 + c_{29}^{(1)} T_3(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_2^2 u_1 + \\ + c_{29}^{(2)} T_4(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^3 + c_{29}^{(3)} T_5(k_1, k_2, k_3)$$

$$C_3(k_1, k_2, k_3) = C_{31} J_1(k_1) u_1^2 + C_{32} J_2(k_1) u_3^2 + C_{33} L_3(k_1, k_2) \tilde{w}_2^2 u_2 + \\ + C_{34} L_4(k_1, k_2) \tilde{w}_2^2 u_3 + C_{35} T_4(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_2^4$$

$$d = d_{11} I_1 \tilde{w}_1 + d_{12} I_2 \tilde{w}_2 \quad (3.9b)$$

onde os coeficientes  $d_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  são calculados no apêndice A e as somas  $I_i$ ,  $J_i(k)$ ,  $L_i(k_1, k_2)$  e  $T_i(k_1, k_2, k_3)$  são calculadas, sob sua forma integral, no apêndice B. O produto em  $q$  em (3.9) é proveniente das integrais gaussianas:

$$\int \frac{\pi}{q} d\phi_q d\psi_q e^{-\mathcal{H}[k < e^q]} = \left[ \frac{\pi}{q} (\tilde{r}_1 + q^2)(\tilde{r}_2 + q^2) \right]^{-1/2} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Renumeração das componentes baixas de Fourier

Após a eliminação das componentes altas de Fourier, os vetores  $k$  restantes são somados de  $0 < |k| < e^{-\lambda}$ . Fazemos uma renumeração das componentes de Fourier através de uma transformação de variáveis  $k \rightarrow k' \equiv k e^{\lambda}$  de sorte que as novas somas irão de  $0 < |k'| < 1$ . A mudança de variáveis tem como consequência que



$$a_{ij}(k) = a_{ij}(k'e^{-l})$$

$$J_i(k) = J_i(k'e^{-l})$$

$$\phi_k = \phi_{k'e^{-l}}$$

$$\psi_k = \psi_{k'e^{-l}}$$

(3.11)

$$\mathcal{H}_b(|k| < e^{-l}) = \hat{\mathcal{H}}_b(|k'| < 1)$$

Reescrevemos os campos em forma padrão, com um fator de escala

$$\phi_{k'e^{-l}} = e^{\frac{1}{2}(2-\eta_1)l} \phi_{k'}$$

$$\psi_{k'e^{-l}} = e^{\frac{1}{2}(2-\eta_2)l} \psi_{k'} \quad (3.12)$$

Esta reescala nos campos multiplica o traço por um fator de  $e^{[(2-\eta_1/2-\eta_2/2)N(l)]l}$  onde  $N(l)$  é o número de componentes altas dos campos.

Estas transformações aplicadas na função de partição (3.9) modificam-na. Ela apresenta, então, a forma:

$$Z = \int \prod_{k'} d\phi_{k'} d\psi_{k'} e^{(2-\frac{\eta_1}{2}-\frac{\eta_2}{2})N(l)l} e^{-\hat{\mathcal{H}}_b(k)} \left\{ 1 - \hat{\mathcal{H}}_b(k'e^{-l}) - \hat{\mathcal{H}}_s \right\}$$

(3.13)

onde

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{H}}_6(k') = & N \tilde{r}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k'} \left[ (k'^2 + \tilde{r}_1) e^{(2-\eta_1)\ell} \phi_{k'} \phi_{-k'} + \right. \\
 & + (k'^2 + \tilde{r}_2) e^{(2-\eta_2)\ell} \psi_{k'} \psi_{-k'} \left. \right] + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'_1, k'_2} \left[ \tilde{w}_1 e^{\frac{3}{2}(2-\eta_1)\ell} \phi_{k'_1} \phi_{k'_2} \phi_{-k'_1-k'_2} - \right. \\
 & - 3 \tilde{w}_2 e^{\frac{3}{2}(2-\frac{\eta_1}{3}-\frac{2}{3}\eta_2)\ell} \phi_{k'_1} \psi_{k'_2} \psi_{-k'_1-k'_2} \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{N} \sum_{k'_1, k'_2, k'_3} \left[ u_1 e^{(4-2\eta_1)\ell} \phi_{k'_1} \phi_{k'_2} \phi_{k'_3} \phi_{-k'_1-k'_2-k'_3} + \right. \\
 & + 2u_2 e^{(4-\eta_1-\eta_2)\ell} \phi_{k'_1} \phi_{k'_2} \psi_{k'_3} \psi_{-k'_1-k'_2-k'_3} + u_3 e^{(4-2\eta_2)\ell} \psi_{k'_1} \psi_{k'_2} \psi_{k'_3} \psi_{-k'_1-k'_2-k'_3} \left. \right] + \\
 & + \sqrt{N} \sum_{k'} \tilde{h} \phi_{-k'} e^{\frac{1}{2}(2-\eta_1)\ell}
 \end{aligned}$$

(3.14)

e

$$\hat{\mathcal{H}}_3 = \frac{1}{2} \sum_{k'} \ln \left[ (q^2 + \tilde{r}_1)(q^2 + \tilde{r}_2) \right] \quad (3.15)$$

onde  $\hat{\mathcal{H}}_3$  é proveniente da exponenciação do produto em que aparece em (3.9).

### 3.2.4 Renumeração do número de graus de liberdade

Ao somarmos sobre as componentes de Fourier  $q$ , diminuímos o número de graus de liberdade de  $N$  a  $N(\ell) = N e^{-d\ell}$ . Devemos reescrever o hamiltoniano como função de  $N(\ell)$ . Substituímos na função de partição (3.13),  $N = N(\ell) e^{d\ell}$  e obtemos:

$$Z = \int \prod_{\kappa} d\phi_{\kappa} d\psi_{\kappa} e^{\frac{1}{2}(4-\eta_1-\eta_2)N(\ell)\ell} e^{-\hat{\mathcal{H}}_0(\kappa)} \left\{ 1 - \hat{\mathcal{H}}_1(\kappa e^{\ell}) - \hat{\mathcal{H}}_3 \right\} \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0(\kappa) = & N(\ell) \tilde{r}_0 e^{d\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \left[ (k^2 e^{-2\ell} + \tilde{r}_1(\ell)) e^{(2-\eta_1)\ell} \phi_{\kappa} \phi_{-\kappa} + \right. \\ & \left. + (k^2 e^{-2\ell} + \tilde{r}_2(\ell)) e^{(2-\eta_2)\ell} \psi_{\kappa} \psi_{-\kappa} \right] + \frac{1}{\sqrt{N(\ell)}} \sum_{\kappa_1, \kappa_2} \left[ \tilde{w}_1(\ell) e^{(3-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\eta)\ell} \phi_{\kappa_1} \phi_{\kappa_2} \phi_{-\kappa_1-\kappa_2} \right. \\ & \left. - 3 \tilde{w}_2(\ell) e^{(3-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\eta_1-\eta_2)\ell} \phi_{\kappa_1} \psi_{\kappa_2} \psi_{-\kappa_1-\kappa_2} \right] + \\ & + \frac{1}{N(\ell)} \sum_{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3} \left[ u_1(\ell) e^{(4-d-2\eta_1)\ell} \phi_{\kappa_1} \phi_{\kappa_2} \phi_{\kappa_3} \phi_{-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3} + \right. \\ & \left. + 2u_2(\ell) e^{(4-d-\eta_1-\eta_2)\ell} \phi_{\kappa_1} \phi_{\kappa_2} \psi_{\kappa_3} \psi_{-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3} + u_3(\ell) e^{(4-d-2\eta_2)\ell} \psi_{\kappa_1} \psi_{\kappa_2} \psi_{\kappa_3} \psi_{-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3} \right] - \\ & - \sqrt{N(\ell)} \sum_{\kappa} \tilde{h} e^{(1+\frac{d}{2}-\frac{\eta_1}{3})\ell} \phi_{\kappa} \end{aligned} \quad (3.17)$$

e onde, por simplicidade, eliminamos as linhas (') da notação das componentes de Fourier  $k$ .

### 3.2.5 $\ell$ infinitesimal

Ao tomarmos  $\ell$  infinitesimal, podemos expandir  $e^\ell \cong 1 + \ell$ . Ficamos sô com os termos lineares. Desta forma, (3.16) pode ser reescrita como:

$$Z = \int \prod d\phi_k d\psi_k \exp\left\{-\mathcal{H}(\ell=0) - \ell \left[ \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2} - 2 \right] N(\ell) - [\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3] \ell \right\}$$

(3.18)

onde<sup>a</sup>

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\hat{\mathcal{H}}_1}{\ell}$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{\hat{\mathcal{H}}_3}{\ell}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\ell=0) + \ell \mathcal{H}_2$$

<sup>a</sup> A expressão de  $\hat{\mathcal{H}}$  sai de (3.9) onde os coeficientes e as integrais acham-se nos apêndices A e B, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{02} = & N(\ell) d \tilde{r}_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ [(2-\eta_1) \tilde{r}_1 - \eta_1 k^2] \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} + [(2-\eta_2) \tilde{r}_2 - \eta_2 k^2] \psi_{\mathbf{k}} \psi_{-\mathbf{k}} \right\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{N(\ell)}} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \left\{ \left[ 3 - \frac{3}{2} \eta_1 - \frac{d}{2} \right] \tilde{w}_1 \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} - 3 \left[ 3 - \frac{\eta_1}{2} - \eta_2 - \frac{d}{2} \right] \tilde{w}_2 \phi_{\mathbf{k}_1} \psi_{\mathbf{k}_2} \psi_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \right. \\
& + \frac{1}{N(\ell)} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \left\{ [4 - 2\eta_1 - d] u_1 \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3} + \right. \\
& + 2 [4 - \eta_1 - \eta_2 - d] u_2 \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \psi_{\mathbf{k}_3} \psi_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3} + [4 - 2\eta_2 - d] u_3 \psi_{\mathbf{k}_1} \psi_{\mathbf{k}_2} \psi_{\mathbf{k}_3} \psi_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3} \left. \right\} - \\
& - N(\ell) \sum_{\mathbf{k}} \left[ 1 - \frac{\eta_1}{2} - \frac{d}{2} \right] \tilde{h} \phi_{-\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

(3.19)

Esta função de partição pode ainda ser escrita como:

$$Z = \int \prod_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}} d\psi_{\mathbf{k}} e^{-\mathcal{H}_0(\ell)}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0(\ell) = & N(\ell) \tilde{r}_0(\ell) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ [ \tilde{r}_1(\ell) + \tilde{r}_3(\ell) k^2 ] \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} + \right. \\
& + [ \tilde{r}_2(\ell) + \tilde{r}_4(\ell) k^2 ] \psi_{\mathbf{k}} \psi_{-\mathbf{k}} \left. \right\} + \frac{1}{\sqrt{N(\ell)}} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \left[ \tilde{w}_1(\ell) \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3 \tilde{w}_2(\ell) \phi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{-k_1-k_2} \Big] + \frac{1}{N(\ell)} \sum_{k_1, k_2, k_3} \left[ u_1(\ell) \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \phi_{-k_1-k_2-k_3} + \right. \\
& + 2 u_2(\ell) \phi_{k_1} \phi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3} + u_3(\ell) \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3} \Big] - \\
& - \sqrt{N(\ell)} \sum_k \tilde{h}(\ell) \phi_k \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Reescrevemos cada um dos parâmetros da expressão acima, para  $\ell = \delta$  infinitesimal como:

$$\tilde{r}_0(\ell) = \tilde{r}_0(0) + \ell \frac{d\tilde{r}_0}{d\ell} \tag{3.21}$$

Substituindo-se tais parâmetros em (3.20) e comparando com (3.17), obtemos que:

$$\frac{d\tilde{r}_0}{d\ell} = d\tilde{r}_0 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{\eta_1}{2} - \frac{\eta_2}{2} \right) + \frac{K_d}{2} \ln \left[ (1 + \tilde{r}_1)(1 + \tilde{r}_2) \right]$$

$$\frac{d\tilde{r}_1}{d\ell} = (2 - \eta_1) \tilde{r}_1 - 18 K_d \tilde{w}_1^2 \tilde{q}_1^2 - 18 K_d \tilde{w}_2^2 \tilde{q}_2^2 + 12 K_d u_1 \tilde{q}_1 + 4 K_d u_2 \tilde{q}_2$$

$$\frac{d\tilde{r}_2}{d\ell} = (2 - \eta_2) \tilde{r}_2 - 36 K_d \tilde{w}_2^2 \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 + 4 K_d u_2 \tilde{q}_1 + 12 K_d u_3 \tilde{q}_2$$

$$\frac{d\tilde{r}_3}{d\ell} = -\eta_1 + 18K_d \left( \tilde{q}_1^3 - \frac{4}{d} \tilde{q}_1^4 \right) \tilde{w}_1^2 + 18K_d \left( \tilde{q}_2^3 - \frac{4}{d} \tilde{q}_2^4 \right) \tilde{w}_2^2$$

$$\frac{d\tilde{r}_4}{d\ell} = -\eta_2 + 36K_d \left( \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 + \tilde{q}_2^2 \tilde{q}_1 - \frac{4}{d} \tilde{q}_1^3 \tilde{q}_2 - \frac{4}{d} \tilde{q}_2^3 \tilde{q}_1 \right) \tilde{w}_2^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}_1}{d\ell} = & \left( 3 - \frac{d}{2} - \frac{3}{2} \eta_1 \right) \tilde{w}_1 + 36K_d \tilde{q}_1^3 \tilde{w}_1^3 - 36K_d \tilde{q}_2^3 \tilde{w}_2^2 - \\ & - 36K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{w}_1 u_1 + 12K_d \tilde{q}_2^2 \tilde{w}_2 u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}_2}{d\ell} = & \left( 3 - \frac{d}{2} - \frac{\eta_1}{2} - \eta_2 \right) \tilde{w}_2 - 36K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^2 + 36K_d \tilde{q}_1 \tilde{q}_2^2 \tilde{w}_2^3 + \\ & + 4K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{w}_1 u_2 - 12K_d \tilde{q}_2^2 \tilde{w}_2 u_3 - 16K_d \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \tilde{w}_2 u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\ell} = & (4 - d - 2\eta_1) u_1 + 216K_d \tilde{q}_1^3 \tilde{w}_1^3 u_1 + 72K_d \tilde{q}_2^3 \tilde{w}_2^2 u_2 - \\ & - 36K_d \tilde{q}_1^2 u_1^2 - 4K_d \tilde{q}_2^2 u_2^2 - 162K_d \left[ \tilde{q}_1^4 \tilde{w}_1^4 + \tilde{q}_2^4 \tilde{w}_2^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du_2}{dl} = & (4-d-\eta_1-\eta_2)u_2 + 36 K_d \tilde{q}_1^3 \tilde{w}_1^3 u_2 - 144 K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 u_2 + \\
& + 108 K_d \tilde{q}_2^3 \tilde{w}_1^2 u_3 + 180 K_d \tilde{q}_1 \tilde{q}_2^2 \tilde{w}_2^2 u_2 + 108 K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 \tilde{w}_2^2 u_1 \\
& - 12 K_d \tilde{q}_1^2 u_1 u_2 - 16 K_d \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 u_2^2 - 12 K_d \tilde{q}_2^2 u_2 u_3 - \\
& - 324 K_d \tilde{q}_1^3 \tilde{q}_2 \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2^2 + 324 K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^3 - \\
& - 324 K_d \tilde{q}_1 \tilde{q}_2^3 \tilde{w}_2^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du_3}{dl} = & (4-d-2\eta_2)u_3 + 216 K_d \tilde{q}_2^2 \tilde{q}_1 \tilde{w}_2^2 u_1 + 72 K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 \tilde{w}_2^2 u_2 - \\
& - 4 K_d \tilde{q}_1^2 u_2 - 56 K_d \tilde{q}_2^2 u_3 - 324 K_d \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 \tilde{w}_2^4
\end{aligned}$$

$$\tilde{q}_i \equiv \frac{1}{1 + \tilde{r}_i} \quad ; i = 1, 2$$

$$K_d = \frac{g \bar{\Pi}^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{3.22}$$

Na ausência da quebra de simetria, ou seja, para  $r_1 = r_2 = r$ ,  $w_1 = w_2 = w$ ,  $u_1 = u_2 = u_3 = u$  e em  $d = 6 - \varepsilon$  dimensões, as



relações acima recaem nas obtidas anteriormente para o modelo de Potts de três estados simétrico com campo externo<sup>26</sup>.

Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, ou seja, para  $w_1 = w_2 = w$  e  $u_1 = u_2 = u_3 = u$  e em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões, as relações acima recaem nas obtidas para o modelo de Potts de três estados com quebra de simetria quadrática e na presença de campo externo<sup>14</sup>.

Examinemos as transformações feitas: (a) diminuimos o número de graus de liberdade de  $N$  a  $N(\ell) = N e^{-d\ell}$ ; (b) reescalamos o sistema definindo  $k' = e^\ell k$  de forma a preservarmos a densidade espacial de graus de liberdade  $N k^d = N(\ell) k'^d$ ; (c) tomamos  $\phi_k = \phi_{k'} e^{-\ell} = e^{(2-\eta_1)\ell/2} \phi_k$ , de forma a preservarmos a magnitude das flutuações dos campos.

De acordo com estas transformações, a função de correlação de dois campos  $G(\ell=0)$  relaciona-se à de dois campos renormalizados  $G(\ell)$  via<sup>34</sup>:

$$\begin{aligned} G(k, \mathcal{H}) &= \langle \phi_k \phi_{-k} \rangle \\ &= e^{(2-\eta_1)\ell} \langle \phi_k(\ell) \phi_{-k}(\ell) \rangle \\ &= e^{(2-\eta_1)\ell} G(k e^\ell, \mathcal{H}') \end{aligned}$$

(3.23)

onde  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  são respectivamente o hamiltoniano nu (bare) e o iterado. Estes se relacionam via

$$\mathcal{H}' = R \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 + \ell \frac{d\mathcal{H}_0}{d\ell} + O(\ell^2) \quad (3.24)$$

onde  $R$  define as transformações do grupo de renormalização.

Variando-se os parâmetros do hamiltoniano inicial (variando  $\ell$ ), localizamos um hamiltoniano fixo  $\mathcal{H}_0^*$  invariante frente a transformações adicionais, ou seja, invariante frente a  $R$ , logo  $d\mathcal{H}_0^*/d\ell = 0$ .

Examinemos (3.23). Sabemos que a função de correlação no ponto fixo é de longo alcance<sup>34</sup>. O hamiltoniano associado a este ponto é, neste sentido, crítico. Na região crítica, a função de correlação de dois campos é dada por<sup>34</sup>:

$$\langle \phi_{\kappa} \phi_{-\kappa} \rangle \cong \frac{1}{\kappa^{2-\hat{\eta}_1}} \quad (3.25)$$

onde  $\hat{\eta}_1$  é o expoente crítico da função de correlação. Substituindo-se (3.25) em (3.23), obtemos que a função de correlação  $G(\ell=0)$  dada por:

$$\langle \phi_{\kappa} \phi_{-\kappa} \rangle \sim \frac{1}{\kappa^{2-\hat{\eta}_1}} e^{-(\eta_1 - \hat{\eta}_1)\ell} \quad (3.26)$$

independerá do processo de renormalização (independente de  $\ell$ ) se o parâmetro de reescala dos campos  $\eta_1$  for igual ao expoente crítico  $\hat{\eta}_1$ .

No ponto fixo, sabemos que  $\frac{d\tilde{r}_3}{d\ell} = \frac{d\tilde{r}_4}{d\ell} = 0$ . Assim sendo,

neste ponto, os parâmetros de reescala dos campos, e  $\eta_1$  e  $\eta_2$  e, conseqüentemente, os expoentes críticos  $\eta_1$  e  $\eta_2$  serão dados por:

$$\eta_1 = 18 K_d \left( \tilde{q}_1^3 - \frac{4}{d} \tilde{q}_1^4 \right) \tilde{w}_1^2 + 18 K_d \left( \tilde{q}_2^3 - \frac{4}{d} \tilde{q}_2^4 \right) \tilde{w}_2^2 \quad (3.27)$$

$$\eta_2 = 36 K_d \left( \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 + \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 - \frac{4}{d} \tilde{q}_1^3 \tilde{q}_2 - \frac{4}{d} \tilde{q}_2^3 \tilde{q}_1 \right) \tilde{w}_2^2 \quad (3.28)$$

Na fase desordenada ( $M=0$ ) e no ponto crítico ( $r_1=0$ ), as expressões acima serão dadas, respectivamente, por:

$$\eta_1 = 18 K_d \left( \frac{d-4}{d} \right) (w_1^2 + w_2^2) - 9 r_2 K_d \left( 6 - \frac{32}{d} \right) w_2^2 \quad (3.29)$$

$$\eta_2 = 36 K_d \left( \frac{d-4}{d} \right) w_2^2 - 9 r_2 K_d \left( 6 - \frac{32}{d} \right) w_2^2 \quad (3.30)$$

Na fase desordenada ( $M=0$ ) nas na região tricrítica ( $r_2 = 0$ ) as expressões (3.27) e (3.28) assumirão a forma:

$$\eta_1 = 18 K_d \left( \frac{d-4}{d} \right) (w_1^2 + w_2^2) - 9 r_1 K_d \left( 6 - \frac{32}{d} \right) w_2^2 \quad (3.31)$$

$$\eta_2 = 36 K_d \left( \frac{d-4}{d} \right) w_2^2 - 9 r_1 K_d \left( 6 - \frac{32}{d} \right) w_2^2 \quad (3.32)$$

Estas expressões na ausência de quebra de simetria e em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões recaem em

$$\eta = 12 K_6 \omega^2 \quad (3.33)$$

conforme o obtido por Pytte<sup>26</sup>.

Em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões e na ausência de quebra de simetria,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , conforme o obtido anteriormente<sup>14</sup>.

O nosso próximo passo será resolvermos as relações de recorrência (3.22) para obtermos expressões explícitas para os parâmetros renormalizados  $\tilde{r}_1(\ell)$ ,  $\tilde{r}_2(\ell)$ , ... como funções de  $\ell$  e dos parâmetros iniciais.

Para resolvermos tais relações, precisamos fixar a dimensão a ser usada, ou seja, precisamos estabelecer qual é a dimensão crítica  $d_c$  da teoria, acima da qual campo médio é válido e abaixo da qual calcularemos a influência de flutuações.

Conforme foi visto na seção 3.1, teorias em  $w\phi^3$  apresentam dimensão crítica  $d_c = 6$  dimensões, enquanto que teorias em  $u\phi^4$  apresentam dimensão crítica  $d_c = 4$  dimensões. A dimensão crítica mais apropriada a ser tomada seria, portanto, no caso de  $u\phi^4 + w\phi^3$ , é  $d_c = 6$  dimensões. Na próxima seção incluiremos flutuações, estudando o problema em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões, onde  $\epsilon \ll 1$ .

No caso, no entanto, de um problema onde o acoplamento trilinear  $w$  é uma perturbação, podemos reinterpretar o nosso modelo  $u\phi^4 + w\phi^3$  como um modelo XY, ou seja, uma teoria em  $\phi^4$  com duas componentes com uma perturbação  $w\phi^3$ . Neste caso, tomamos a dimensão crítica do modelo XY,  $d_c = 4$  dimensões.

### 3.3 Influência de Flutuações e de Quebra de Simetria no Comportamento Crítico e Tricrítico do Modelo de Potts de Três Estados: Um Estudo em $d = 6 - \epsilon$ Dimensões

#### 3.3.1 Solução das relações de recorrência

O estudo de teorias na presença de dois acoplamentos é complexo. Em geral, estabelece-se um dos acoplamentos como uma perturbação<sup>14,36</sup>, relegando a um segundo plano sua influência.

Muito embora em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões o acoplamento quártico seja aparentemente irrelevante<sup>26</sup>, para o nosso estudo, não o é, sendo o responsável pelo aparecimento da transição de primeira ordem<sup>26</sup>, pontos crítico e tricrítico<sup>14</sup>.

A presença de dois acoplamentos igualmente relevantes gera um sistema de relações de recorrência de difícil solução.

Iremos obter, neste trabalho, uma solução aproximada restrita a certo intervalo de valores para os acoplamentos  $u$  e  $w$ , intervalo este conveniente para o estudo dos pontos crítico e tricrítico. O estudo do problema mais geral será deixado para um trabalho posterior.

Passemos, portanto, à solução. Tendo isto em mente, reescreveremos os  $q_i(\ell)$ 's dados por (3.17) como:

$$\tilde{q}_i(\ell) = \tilde{r}_i^2 + 1 - \tilde{r}_i(\ell) - \frac{\tilde{r}_i^3(\ell)}{1 + \tilde{r}_i(\ell)}$$

$$\tilde{q}_i(\ell) \tilde{q}_j(\ell) = - \left[ \tilde{r}_i(\ell) + \tilde{r}_j(\ell) \right] + \frac{\tilde{r}_i(\ell) + \tilde{r}_j(\ell) + 2\tilde{r}_i(\ell)\tilde{r}_j(\ell) + \tilde{r}_i^2(\ell)\tilde{r}_j(\ell) + \tilde{r}_i(\ell)\tilde{r}_j^2(\ell)}{[1 + \tilde{r}_i(\ell)][1 + \tilde{r}_j(\ell)]}$$

$$\tilde{q}_i^2 \tilde{q}_j = 1 - \frac{\tilde{r}_j^2(\ell) + 2\tilde{r}_i(\ell)\tilde{r}_j(\ell) + \tilde{r}_i^2(\ell)\tilde{r}_j^2(\ell) + 2\tilde{r}_i(\ell) + \tilde{r}_i^2(\ell)}{[1 + \tilde{r}_i(\ell)]^2 [1 + \tilde{r}_j(\ell)]} \quad (3.34)$$

Definimos novos parâmetros renormalizados

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(\ell) &= \tilde{r}_i(\ell) + \frac{1}{2} f_{\tilde{r}_i}(\ell) \\ \tilde{W}_i(\ell) &= \tilde{w}_i(\ell) + \frac{1}{2} f_{\tilde{w}_i}(\ell) \\ U_i(\ell) &= u_i(\ell) + \frac{1}{2} f_{u_i}(\ell) \\ \tilde{H}(\ell) &= \tilde{h}(\ell) + \frac{1}{2} f_{\tilde{h}}(\ell) \end{aligned} \quad (3.35)$$

que substituídos em (3.22) juntamente com (3.34) gerarão:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}_i}{d\ell} &= \frac{d\bar{T}_i}{d\ell} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\ell} f_{\tilde{r}_i} \\ &= (2 - \eta_1) \bar{T}_1 + 36 K_6 \tilde{W}_1^2 \bar{T}_1(\ell) + 36 K_6 \tilde{W}_2^2 \bar{T}_2 + 12 K_6 U_1(\ell) \bar{T}_1^2(\ell) + \\ &+ 4 K_6 U_2(\ell) \bar{T}_2^2(\ell) - \frac{1}{2} \left\{ 2 f_{\tilde{r}_1}(\ell) + 36 K_6 \tilde{W}_1^2(\ell) \left[ 1 + \frac{3 \bar{T}_1^2(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\bar{T}_1^3(\ell)}{[1 + \bar{T}_1(\ell)]^2} \right] + 36 K_6 \tilde{W}_2^2 \left[ 1 + \frac{3 \bar{T}_2^2(\ell)}{1 + \bar{T}_2(\ell)} - \frac{\bar{T}_2^3(\ell)}{[1 + \bar{T}_2(\ell)]^2} \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 24 K_6 U_1(\ell) \left[ 1 - \bar{T}_1(\ell) - \frac{\bar{T}_1^3(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} \right] - 8 K_6 U_2(\ell) \left[ 1 - \right. \\
 & \left. - \bar{T}_2(\ell) - \frac{\bar{T}_2^3(\ell)}{1 + \bar{T}_2(\ell)} \right] \Bigg\} \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

onde supusemos que  $f_{\bar{T}_1}(\ell) \sim O(u, w^2)$ . Tomamos, agora, que os termos explicitamente  $O(u, w^2)$  relacionam-se a  $f_{\bar{T}_1}(\ell)$  (os termos entre chaves). Desta forma, a relação de recorrência para  $\bar{T}_1(\ell)$  será dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{T}_1}{d\ell} = & (2 - \eta_1) \bar{T}_1 + 36 K_6 W_1^2 \bar{T}_1 + 36 K_6 W_2^2 \bar{T}_2 + 12 K_6 U_1 \bar{T}_1^2 + \\
 & + 4 K_6 U_2 \bar{T}_2^2 \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

onde não colocamos, por simplicidade, explicitamente a dependência em  $\ell$  e a relação de recorrência para  $f_{\bar{T}_1}(\ell)$  por:

$$\begin{aligned}
 \frac{df_{\bar{T}_1}}{d\ell} = & 2 f_{\bar{T}_1}(\ell) + 36 K_6 W_1^2 \left[ 1 + \frac{3 \bar{T}_1^2(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} - \frac{\bar{T}_1^3(\ell)}{[1 + \bar{T}_1(\ell)]^2} \right] + 36 K_6 W_2^2 \left[ 1 + \frac{3 \bar{T}_2^2(\ell)}{1 + \bar{T}_2(\ell)} \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{T}_2^3(\ell)}{[1 + \bar{T}_2(\ell)]^2} \right] - 24 K_6 U_1(\ell) \left[ 1 - \bar{T}_1(\ell) - \frac{\bar{T}_1^3(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} \right] - 8 K_6 U_2(\ell) \left[ 1 - \bar{T}_2(\ell) - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{T}_2^3(\ell)}{1 + \bar{T}_2(\ell)} \right] \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Substituímos

$$d \left\{ \frac{f_{\tilde{r}_1}}{\tilde{r}_1} e^{-2\ell} \right\} = -2 \frac{f_{\tilde{r}_1}}{\tilde{r}_1} e^{-2\ell} + e^{-2\ell} \frac{d f_{\tilde{r}_1}}{d\ell} \quad (3.39)$$

em (3.38) e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ell} \left\{ \frac{f_{\tilde{r}_1}}{\tilde{r}_1} e^{-2\ell} \right\} &= 36 K_6 W_1^2 \left[ e^{-2\ell} + \frac{3 \bar{T}_1 \tilde{r}_1(\ell) - \bar{T}_1^2 \tilde{r}_1^2(\ell)}{(1 + \bar{T}_1)^2} \right] + 36 K_6 W_2^2 \left[ e^{-2\ell} + \right. \\ &+ \left. \frac{3 \bar{T}_2 \tilde{r}_2(\ell) - \bar{T}_2^2 \tilde{r}_2^2(\ell)}{(1 + \bar{T}_2)^2} \right] - 24 K_6 U_1 \left[ e^{-4\ell} - \bar{T}_1 e^{-2\ell} - \frac{\bar{T}_1^2 \tilde{r}_1(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} \right] - \\ &- 8 K_6 U_2 \left[ e^{-4\ell} - \bar{T}_2 e^{-2\ell} - \frac{\bar{T}_2^2 \tilde{r}_2(\ell)}{1 + \bar{T}_2(\ell)} \right] \quad (3.40) \end{aligned}$$

Integrando os dois lados de 0 a  $\ell$  e usando que:

$$\int_0^\ell \frac{\bar{T}_1 e^{2\hat{\ell}}}{1 + \bar{T}_1 e^{2\hat{\ell}}} d\hat{\ell} + O(\epsilon) = \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{T}_1(0)] - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{T}_1] + O(\epsilon)$$

$$\int_0^\ell \frac{\bar{T}_1^2 e^{4\hat{\ell}}}{1 + \bar{T}_1 e^{2\hat{\ell}}} d\hat{\ell} + O(\epsilon) = -\frac{1}{2} \frac{\bar{T}_1(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} + \frac{1}{2} \frac{\bar{T}_1}{1 + \bar{T}_1} + \int_0^\ell \frac{\bar{T}_1(\hat{\ell})}{1 + \bar{T}_1(\hat{\ell})} d\hat{\ell} + O(\epsilon)$$

(3.41)



obtemos:

$$\begin{aligned}
 e^{-2l} f_{\tilde{r}_1}(l) - f_{\tilde{r}_1}(0) = & \left\{ -18 K_6 \tilde{W}_1^2(l) \left[ 1 - 2 \bar{T}_1(l) \ln[1 + \bar{T}_1(l)] - \frac{\bar{T}_1^2(l)}{1 + \bar{T}_1(l)} \right] - \right. \\
 & - 18 K_6 \tilde{W}_2^2(l) \left[ 1 - 2 \bar{T}_2(l) \ln[1 + \bar{T}_2(l)] - \frac{\bar{T}_2^2(l)}{1 + \bar{T}_2(l)} \right] + \\
 & + 12 K_6 U_1(l) \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_1(l) + \bar{T}_1^2(l) \ln[1 + \bar{T}_1(l)] \right] + \\
 & \left. + 4 K_6 U_2(l) \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_2(l) + \bar{T}_2^2(l) \ln[1 + \bar{T}_2(l)] \right] \right\} e^{-2l} + \\
 & + 18 K_6 W_1^2 \left[ 1 - 2 \bar{T}_1 \ln[1 + \bar{T}_1] - \frac{\bar{T}_1^2}{1 + \bar{T}_1} \right] + 18 K_6 W_2^2 \left[ 1 - \right. \\
 & \left. - 2 \bar{T}_2 \ln[1 + \bar{T}_2] - \frac{\bar{T}_2^2}{1 + \bar{T}_2} \right] - 12 K_6 U_1 \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_1 - \right. \\
 & \left. + \bar{T}_1^2 \ln[1 + \bar{T}_1] \right] - 4 K_6 U_2 \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_2 + \bar{T}_2^2 \ln[1 + \bar{T}_2] \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

onde facilmente identificamos  $f_{\tilde{r}_1}(l)$  com o termo entre chaves dado por:

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{r}_1}(l) = & -18 K_6 \tilde{W}_1(l) \left[ 1 - 2 \bar{T}_1(l) \ln [1 + \bar{T}_1(l)] - \frac{\bar{T}_1^2(l)}{1 + \bar{T}_1(l)} \right] - \\
& -18 K_6 \tilde{W}_2(l) \left[ 1 - 2 \bar{T}_2(l) \ln [1 + \bar{T}_2(l)] - \frac{\bar{T}_2^2(l)}{1 + \bar{T}_2(l)} \right] + \\
& + 12 K_6 U_1(l) \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_1(l) + \bar{T}_1^2(l) \ln [1 + \bar{T}_1(l)] \right] + \\
& + 4 K_6 U_2(l) \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_2(l) + \bar{T}_2^2(l) \ln [1 + \bar{T}_2(l)] \right]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Procedendo da mesma forma com as demais relações de recorrência de (3.22), obtemos relações para os novos parâmetros renormalizados dadas por<sup>a</sup>:

$$\frac{d\bar{T}_2}{dl} = (2 - \eta_2) \bar{T}_2 + 36 K_6 \tilde{W}_2^2 [\bar{T}_1 + \bar{T}_2] + 12 K_6 U_3 \bar{T}_2^2 + 4 K_6 U_2 \bar{T}_1^2 \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}_1}{dl} = & \left( \frac{\epsilon}{2} - \frac{3}{2} \eta_1 \right) \tilde{W}_1 + 36 K_6 \tilde{W}_1^3 - 36 K_6 \tilde{W}_2^3 + 72 K_6 U_1 \tilde{W}_1 \bar{T}_1 - \\
& - 24 K_6 \tilde{W}_2 U_2 \bar{T}_2
\end{aligned} \tag{3.45}$$

<sup>a</sup> Por simplicidade, nas relações de recorrência não explicitaremos a dependência em  $l$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{W}_2}{d\ell} = & \left( \frac{\epsilon}{2} - \frac{\eta_1}{2} - \eta_2 \right) \tilde{W}_2 - 36 K_6 \tilde{W}_1 \tilde{W}_2^2 + 36 K_6 \tilde{W}_2^3 - 8 K_6 \tilde{W}_1 U_2 \bar{T}_1 + \\ & + 24 K_6 \tilde{W}_2 U_3 \bar{T}_2 + 16 K_6 \tilde{W}_2 U_2 [\bar{T}_1 + \bar{T}_2] \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{d\ell} = & (-2 + \epsilon - 2\eta_1) U_1 + 216 K_6 U_1 \tilde{W}_1^2 + 72 K_6 U_2 \tilde{W}_2^2 + 72 K_6 U_1^2 \bar{T}_1 + \\ & + 8 K_6 U_2^2 \bar{T}_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_2}{d\ell} = & (-2 + \epsilon - \eta_1 - \eta_2) U_2 + 36 K_6 U_2 \tilde{W}_1^2 - 144 K_6 U_2 \tilde{W}_1 \tilde{W}_2 + \\ & + 180 K_6 U_2 \tilde{W}_2^2 + 108 K_6 U_3 \tilde{W}_2^2 + 108 K_6 U_1 \tilde{W}_2^2 + \\ & + 24 K_6 U_1 U_2 \bar{T}_1 + 16 K_6 U_2 [\bar{T}_1 + \bar{T}_2] + \\ & + 24 K_6 U_2 U_3 \bar{T}_2 \end{aligned}$$

(3.48)

$$\begin{aligned} \frac{dU_3}{d\ell} = & (-2 + \epsilon - 2\eta_2) U_3 + 216 K_6 U_3 \tilde{W}_2^2 + 72 K_6 U_2 \tilde{W}_1^2 + \\ & + 72 K_6 U_3^2 \bar{T}_2 + 8 K_6 U_2^2 \bar{T}_1 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\frac{d\tilde{H}}{d\ell} = \left(4 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\eta_1}{2}\right) \tilde{H} - 3 K_6 \tilde{W}_1 \bar{T}_1^2 + 3 K_6 \tilde{W}_2 \bar{T}_2^2 \quad (3.50)$$

e expressões para  $f_{\tilde{r}_2}(\ell)$  e  $f_{\tilde{h}}(\ell)$  dadas por:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{r}_2} = & 12 K_6 U_1 \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_2 + \bar{T}_2^2 \ln [1 + \bar{T}_2] \right] + 4 K_6 U_2 \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_1 + \right. \\ & \left. + \bar{T}_1^2 \ln [1 + \bar{T}_1] \right] - 36 K_6 \tilde{W}_2^2 \left[ 1 + \frac{\bar{T}_1^2}{\bar{T}_2 - \bar{T}_1} \ln [1 + \bar{T}_1] + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{T}_2^2}{\bar{T}_1 - \bar{T}_2} \ln [1 + \bar{T}_2] \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$f_{\tilde{h}} = -3 K_6 \tilde{W}_1 \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_1 + \bar{T}_1^2 \ln [1 + \bar{T}_1] \right] + 3 K_6 \tilde{W}_2 \left[ \frac{1}{2} - \bar{T}_2 + \bar{T}_2^2 \ln [1 + \bar{T}_2] \right]$$

(3.52)

Como  $f_{\tilde{w}_i} \sim O(w^{3/2})$  e  $f_u \sim O(U^2)$  desprezaremos estes fatores e consideraremos  $\tilde{w}_i \sim w_i$  e  $U_i \sim u_i$ . Os fatores  $f_{\tilde{w}_i}$  e  $f_u$  contribuiriam nas expressões de  $\tilde{r}_1(\ell)$  e  $\tilde{r}_2(\ell)$  só à ordem de dois loops, portanto, é razoável desprezã-los aqui.

Suponhamos agora que, assim como os parâmetros não renormalizados  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots$  relacionam-se aos não reescalados  $r_1, r_2, w_1, w_2, \dots$  via (3.1b), nossos novos parâmetros renormalizados  $T_1(\ell), T_2(\ell), \tilde{w}_1(\ell) \dots$  relacionam-se a novos parâmetros renormalizados não reescalados  $t_1(\ell), t_2(\ell), w_1(\ell) \dots$ <sup>a</sup>, mediante as mesmas relações, ou seja, via

$$\begin{aligned} T_1(\ell) &= t_1(\ell) + 6 w_1(\ell) M(\ell) + 12 u_1(\ell) M(\ell)^2 \\ T_2(\ell) &= t_2(\ell) - 6 w_2(\ell) M(\ell) + 4 u_2(\ell) M(\ell)^2 \\ \tilde{w}_1(\ell) &= w_1(\ell) + 4 u_1(\ell) M(\ell) \\ w_2(\ell) &= w_2(\ell) - \frac{4}{3} u_2(\ell) M(\ell) \\ \tilde{H}(\ell) &= H(\ell) - t_1(\ell) M(\ell) - 3 w_1(\ell) M(\ell)^2 - 4 u_1(\ell) M(\ell)^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Substituindo-se estas expressões na relação de recorrência para  $\frac{d\tilde{w}_1(\ell)}{d\ell}$  (3.45), obtemos:

<sup>a</sup>  $t_1(\ell)$  e  $t_2(\ell)$  são novos parâmetros renormalizados relativos ao hamiltoniano (2.17b) a campo  $h_1$  nulo.

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{w}_1}{d\ell} &= \frac{d}{d\ell} [w_1 + 4u_1 M] \\
&= \frac{d}{d\ell} w_1 + 4 \left[ u_1 \frac{dM}{d\ell} + M \frac{du_1}{d\ell} \right] \\
&= \left( \frac{e}{2} - \frac{3}{2} \eta_1 \right) [w_1 + 4u_1 M] + 36 K_6 [w_1 + 4u_1 M]^3 - \\
&\quad - 36 K_6 \left[ w_2 - \frac{4}{3} u_2 M \right]^3 + 72 K_6 u_1 [w_1 + 4u_1 M] [t_1 + 6w_1 M] - \\
&\quad - 24 K_6 u_2 \left[ w_2 - \frac{4}{3} u_2 M \right] [t_2 - 6w_2 M] + O(M^2)
\end{aligned}
\tag{3.54}$$

De (3.47) tiramos  $\frac{du_1(\ell)}{d\ell}$ . Descontando este fator, identificamos os termos independentes de  $M(\ell)$  como a relação de recorrência  $\frac{dw_1(\ell)}{d\ell}$  e os dependentes de  $M(\ell)$  com a relação  $\frac{dM(\ell)}{d\ell}$  dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_1}{d\ell} &= \left( \frac{e}{2} - \frac{3}{2} \eta_1 \right) w_1 + 36 K_6 w_1^3 - 36 K_6 w_2^3 + 72 K_6 u_1 w_1 t_1 - \\
&\quad - 24 K_6 u_2 w_2 t_2
\end{aligned}
\tag{3.55}$$

$$\frac{dM}{dl} = \left(2 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\eta_1}{2}\right) M \quad (3.56)$$

Procedendo-se da mesma forma com as relações para  $\frac{d\tilde{w}_2(l)}{dl}$ ,  $\frac{dT_1(l)}{dl}$ ,  $\frac{dT_2(l)}{dl}$  e  $\frac{d\tilde{H}(l)}{dl}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{dl} = & \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\eta_1}{2} - \eta_2\right) w_2 - 36 K_6 w_2^2 w_1 + 36 K_6 w_2^3 - \\ & - 8 K_6 u_2 w_1 t_1 + 16 K_6 u_2 w_2 (t_1 + t_2) + \\ & + 24 K_6 u_3 w_2 t_1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{dl} = & (2 - \eta_1) t_1 + 36 K_6 w_1^2 t_1 + 36 K_6 w_2^2 t_2 + \\ & + 12 K_6 u_1 t_1^2 + 4 K_6 u_2 t_2^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt_2}{dl} = & (2 - \eta_2) t_2 + 36 K_6 w_2^2 (t_1 + t_2) + 12 K_6 u_3 t_2^2 + \\ & + 4 K_6 u_2 t_1^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\frac{d\hat{h}}{d\ell} = \left(4 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\eta_i}{2}\right) - 3K_6 w_1 t_1^2 + 3K_6 w_2 t_2^2 \quad (3.60)$$

Com o objetivo de avaliarmos em separado a influência de flutuações e de quebra de simetria, reescrevemos cada um dos novos parâmetros renormalizados como formados de uma parte simétrica e de um termo de quebra de simetria. Assim:

$$t_i(\ell) = t(\ell) + g_i(\ell) \quad , \quad i = 1, 2$$

$$w(\ell) = w(\ell) + g_{w_i}(\ell) \quad ; \quad i = 1, 2$$

$$u_i(\ell) = u(\ell) + g_{u_i}(\ell) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$h(\ell) = \hat{h}(\ell) + g_h(\ell)$$

$$M(\ell) = m(\ell) + g_M(\ell)$$

$$g_1(\ell) = -g_2(\ell) = g(\ell) \quad (3.61)$$

onde  $t(\ell)$ ,  $w(\ell)$ ,  $u(\ell)$ ,  $\hat{h}(\ell)$  e  $m(\ell)$  são parâmetros renormaliza



dos relativos à teoria simétrica<sup>26</sup>, enquanto que os  $g(\ell)$ 's são parâmetros renormalizados relativos à quebra de simetria.

Em  $g_h(\ell)$  e  $g_M(\ell)$  encontra-se o efeito da quebra de simetria quadrática, trilinear e quártica sobre o campo e a magnetização. Tal efeito só aparece por renormalização.

Substituindo-se (3.61) em (3.58) e (3.59), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{d\ell} &= \frac{dt}{d\ell} + \frac{dg}{d\ell} \\ &= (2 - \eta_1) (t + g) + 36 K_6 (w + g_{w_1})^2 (t + g) + \\ &\quad + 36 K_6 (w + g_{w_2})^2 (t - g) + 12 K_6 (u + g_{u_1}) (t + g)^2 + \\ &\quad + 4 K_6 (u + g_{u_2}) (t - g)^2 \end{aligned} \tag{3.62}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dt_2}{d\ell} &= \frac{dt}{d\ell} - \frac{dg}{d\ell} \\ &= (2 - \eta_2) (t - g) + 72 K_6 (w + g_{w_2})^2 t + \\ &\quad + 12 K_6 (u + g_{u_1}) (t - g)^2 + 4 K_6 (u + g_{u_2}) (t + g)^2 \end{aligned} \tag{3.63}$$

onde estas expressões geram a relação de recorrência para a temperatura reduzida renormalizada da teoria simétrica<sup>26</sup> dada por:

$$\frac{dt}{dl} = (2-\eta)t + 72 K_6 w^2 t + 16 K_6 u t^2 \quad (3.64)$$

e para a quebra de simetria quadrática dada por:

$$\frac{dg}{dl} = (2-\eta)g + 16 K_6 u g + 120 K_6 w t g_w - 12 K_6 t^2 g_u \quad (3.65)$$

De (3.62) e (3.63) obtivemos que as quebras de simetria trilineares  $g_{w_1}(\ell)$  e  $g_{w_2}(\ell)$  não são independentes, relacionando-se via

$$g_{w_1}(\ell) + 3 g_{w_2}(\ell) = 0 \quad (3.66)$$

de sorte que definimos:

$$g_w(\ell) = -g_{w_2}(\ell) = \frac{1}{3} g_{w_1}(\ell) \quad (3.67)$$

e que as quebra de simetria quárticas  $g_{u_1}(\ell)$ ,  $g_{u_2}(\ell)$  e  $g_{u_3}(\ell)$  não

são independentes, relacionando-se via:

$$3 \int_{u_1} q(l) + 2 \int_{u_2} q(l) + 3 \int_{u_3} q(l) = 0 \quad (3.68)$$

de sorte que definimos:

$$\int_{u_2} q(l) \equiv \int_u q'(l)$$

$$\int_{u_1} q(l) = \int_u q(l) - \frac{1}{3} \int_u q'(l) \quad (3.69)$$

e onde  $\eta = 12 K_6 w^{26}$ .

Substituímos (3.61), (3.67) e (3.69) nas relações de recorrência para  $\frac{dw_1}{dl}$ ,  $\frac{dw_2}{dl}$ ,  $\frac{dM(l)}{dl}$ ,  $\frac{dh(l)}{dl}$ ,  $\frac{du_1(l)}{dl}$ ,  $\frac{du_2(l)}{dl}$  e  $\frac{du_3(l)}{dl}$  dadas por (3.55), (3.57), (3.56), (3.60) e (3.47) a (3.49), respectivamente, gerando:

$$\frac{dw}{dl} = \left( \frac{\epsilon}{2} - \frac{3}{2} \eta \right) w + 48 K_6 u t w \quad (3.70)$$

$$\frac{du}{dl} = (-2 + \epsilon - 2\eta) + 288 K_6 u w^2 + 80 K_6 u^2 t \quad (3.71)$$

$$\frac{d\hat{h}}{dl} = \left(4 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\eta}{2}\right) \hat{h} \quad (3.72)$$

$$\frac{dm}{dl} = \left(2 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\eta}{2}\right) m \quad (3.73)$$

que juntamente com (3.64) compõe o conjunto de relações de recorrência relativas ao problema na ausência de quebra de simetria<sup>26</sup>. Mesmo neste caso, não foi apresentada na literatura nenhuma solução para este conjunto de relações acopladas.

Obtemos, também, das substituições descritas acima, relações de recorrência para as quebras de simetrias dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dg_w}{dl} = & \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{5}{2}\eta\right) g_w + 156 K_6 w^2 g_w + 80 K_6 u t g_w + \\ & + 32 K_6 u w g + 8 K_6 w t [3g_u - 2g'_u] \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg'_u}{dl} = & (-2 + \epsilon - 2\eta) g'_u + 96 K_6 u t g'_u - \\ & - 864 K_6 w u g_w \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_u}{d\ell} = & (-2 + \epsilon - 2\eta) g_u + 216 K_6 w^2 g_u + 816 K_6 w g_w u + \\ & + 144 K_6 u t g_u + 64 K_6 u^2 g \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\frac{dg_h}{d\ell} = \left(4 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\eta}{2}\right) g_h - 12 K_6 w t g - 12 K_6 t g_w \quad (3.77)$$

$$\frac{dg_m}{d\ell} = \left(2 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\eta}{2}\right) g_m + 12 K_6 w m g_w \quad (3.78)$$

Estabelecemos anteriormente  $\epsilon$  como um parâmetro pequeno ( $\epsilon \ll 1$ ). Se o acoplamento trilinear simétrico não renormalizado  $w$  for de ordem  $\epsilon^{1/2}$ , o renormalizado  $w(\ell) \sim w e^{\epsilon\ell/2}$ , a mais baixa ordem em  $\epsilon$ , também será de ordem  $\epsilon^{1/2}$ . Neste caso, observamos que termos de um loop nas relações de recorrência (3.64) a (3.78) serão de ordem  $\epsilon$  superior aos de zero loops. Além disso,  $u(\ell) t(\ell)$  que é de ordem de um loop também será de ordem  $\epsilon$ , ou seja,  $u t \sim u(\ell) t(\ell) \sim 0(\epsilon)$ . Não podemos, por este motivo, desprezar termo algum nas relações de recorrência que formam, assim, um sistema de equações fortemente acopladas.

Para resolvermos estas relações, sugerimos que os parâmetros renormalizados simétricos apresentem a forma:

$$t(l) = t e^{2l} e^{\epsilon F_t(l)} \sim t e^{2l} \left\{ 1 + \epsilon F_t(l) \right\} \quad (3.79)$$

$$w(l) = w e^{\epsilon F_w(l)} \sim w \left\{ 1 + \epsilon F_w(l) \right\} \quad (3.80)$$

$$u(l) = u e^{-2l} e^{\epsilon F_u(l)} \sim u e^{-2l} \left\{ 1 + \epsilon F_u(l) \right\} \quad (3.81)$$

$$\hat{h}(l) = \hat{h} e^{4l} e^{\epsilon F_h(l)} \sim \hat{h} e^{4l} \left\{ 1 + \epsilon F_h(l) \right\} \quad (3.82)$$

$$m(l) = m e^{2l} e^{\epsilon F_m(l)} \sim m e^{2l} \left\{ 1 + \epsilon F_m(l) \right\} \quad (3.83)$$

onde supomos que  $F(l) < 0(\frac{1}{\epsilon})$  não apresentam contribuições da forma  $\frac{1}{\epsilon}$ . Substituindo-se (3.79) a (3.83) nas relações de recorrência (3.64) e (3.70) a (3.73), obtemos:

$$\epsilon F_t(l) = \left[ 60 K_6 \omega^2 + 16 K_6 u t \right] l \quad (3.84)$$

$$\epsilon F_w(l) = \left[ \frac{\epsilon}{2} - 18 K_6 \omega^2 + 48 K_6 u t \right] l \quad (3.85)$$

$$\epsilon F_u(\ell) = \left[ \epsilon + 264 K_b w^2 + 80 K_b u t \right] \ell \quad (3.86)$$

$$\epsilon F_M(\ell) = \left[ -\frac{\epsilon}{2} - 6 K_b w^2 \right] \ell \quad (3.87a)$$

$$\epsilon F_h(\ell) = \left[ -\frac{\epsilon}{2} + 6 K_b w^2 \right] \ell \quad (3.87b)$$

Ao fazermos a aproximação  $F(\ell) < \frac{1}{\epsilon}$ , estamos na verdade, restringindo a nossa solução a valores de  $\ell < \frac{1}{\epsilon}$ . Esta aproximação será consistente, como veremos nas próximas seções, com os valores de  $\ell$  necessários para o estudo das regiões crítica e tricrítica.

Fazemos o mesmo com relação aos parâmetros renormalizados responsáveis pela quebra de simetria, ou seja,

$$g(\ell) = g e^{2\ell} e^{\epsilon F_g(\ell)} \cong g e^{2\ell} \left\{ 1 + \epsilon F_g(\ell) \right\} \quad (3.88)$$

$$g_w(\ell) = g_w e^{\epsilon F_{g_w}(\ell)} \cong g_w \left\{ 1 + \epsilon F_{g_w}(\ell) \right\} \quad (3.89)$$

$$g_u(\ell) = g_u e^{-2\ell} e^{\epsilon F_{g_u}(\ell)} \cong g_u e^{-2\ell} \left\{ 1 + \epsilon F_{g_u}(\ell) \right\} \quad (3.90)$$

$$g'_u(\ell) = g'_u e^{-2\ell} e^{\epsilon F'_{g'_u}(\ell)} \cong g'_u e^{-2\ell} \left\{ 1 + \epsilon F'_{g'_u}(\ell) \right\} \quad (3.91)$$

$$g_M(l) = g_M e^{2l} e^{\epsilon F(l)} = g_M e^{2l} \left\{ 1 + \epsilon F_{g_M}(l) \right\} \quad (3.92)$$

$$g_h(l) = g_h e^{4l} e^{\epsilon F_{g_h}(l)} = g_h e^{4l} \left\{ 1 + \epsilon F_{g_h}(l) \right\} \quad (3.93)$$

Substituímos as expressões acima em (3.65) e em (3.74) a (3.78), obtendo

$$\epsilon \bar{F}_g(l) = \left[ -12 K_6 w^2 + 16 K_6 u t + \frac{120 K_6 w t g_w + 12 K_6 t^2 g_u}{g} \right] l \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \epsilon F_{g_w}(l) = & \left[ \frac{\epsilon}{2} + 138 K_6 w^2 + 80 K_6 u t \right] l + \\ & + \left[ \frac{32 K_6 u w g + 8 K_6 w t (3 g_u - 2 g'_u)}{g_w} \right] l \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\epsilon F_{g'_u}(l) = \left[ \epsilon - 24 K_6 w^2 + 96 K_6 u t - \frac{864 w u g_w}{g'_u} \right] l \quad (3.96)$$

$$\epsilon F_{g_u}(l) = \left[ \epsilon + 192 K_6 w^2 + 144 K_6 u t + \frac{64 K_6 w^2 g + 816 w u g_w}{g_u} \right] l \quad (3.97)$$



$$\epsilon F_{g_m}(\ell) = \left[ -\frac{\epsilon}{2} + 6K_6 w^2 + \frac{12K_6 w m g_w}{g_m} \right] \ell \quad (3.98)$$

$$\epsilon F_{g_h}(\ell) = \left[ -\frac{\epsilon}{2} - 6K_6 w^2 - 12K_6 \frac{(wtg + t^2 g_w + wHg_w)}{g_h} \right] \ell \quad (3.99)$$

De posse das relações de recorrência e de suas soluções em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões, iremos estudar o comportamento crítico e tricrítico do modelo.

### 3.3.2 Estudo da influência de flutuações e da quebra de simetria no comportamento crítico do modelo de Potts de três estados em $d = 6 - \epsilon$ dimensões

No caso do campo externo aplicado ser negativo  $h_1 < 0$ , teremos que  $M < 0$  (da fase I) e conseqüentemente  $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$  (lembramos que  $r_1$  e  $r_2$  são dados por (3.1b)). Neste caso, o sistema irá se ordenar segundo a componente do campo  $\tilde{\phi}$  (fase II). Como a componente  $\tilde{\psi}$  não se ordena, podemos tomar o traço sobre ela. Obtemos, assim, a partir do hamiltoniano renormalizado  $\mathcal{H}(\ell)$  (3.20), um hamiltoniano efetivo (sem alterar a função de partição) dado por:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = - \ln \int \prod_k d\tilde{\psi}(k) e^{-\mathcal{H}(\ell)}$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = - \ln \int \prod_k d\tilde{\Psi}(k) e^{-\mathcal{H}(\phi)} \left\{ 1 - A + \frac{A^2}{2!} \dots \right\} e^{-\frac{1}{2} \int d^d q (q^2 + \tilde{r}_2) \tilde{\Psi}(q) \tilde{\Psi}(-q)}$$

$$A \equiv -3\tilde{w}_2(\ell) \int d^d q d^d q' \tilde{\Psi}(q) \tilde{\Psi}(q') \tilde{\phi}(-q-q') +$$

$$+ 2\mathcal{U}_2(\ell) \int d^d q d^d q' d^d q'' \tilde{\Psi}(q) \tilde{\Psi}(q') \tilde{\phi}(q'') \tilde{\phi}(-q-q'-q'') +$$

$$+ \mathcal{U}_3(\ell) \int d^d q d^d q' d^d q'' \tilde{\Psi}(q) \tilde{\Psi}(q') \tilde{\Psi}(q'') \tilde{\Psi}(-q-q'-q'')$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = C + \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_{\text{eff}} \tilde{\phi}^2 + (\nabla \tilde{\phi})^2 \right] + w_{\text{eff}} \tilde{\phi}^3 + \mathcal{U}_{\text{eff}} \tilde{\phi}^4 - h_{\text{eff}} \tilde{\phi} \right\} d^d x$$

(3.100)

onde  $C$  é uma constante e onde

$$\mathcal{H}(\phi) = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_1(\ell) \tilde{\phi}^2 + (\nabla \tilde{\phi})^2 \right] + \tilde{w}_1(\ell) \tilde{\phi}^3 + \mathcal{U}_1(\ell) \tilde{\phi}^4 - \right.$$

$$\left. - \tilde{h}(\ell) \tilde{\phi} \right\} d^d x \quad (3.101)$$

$$r_{\text{eff}} = \tilde{r}_1(\ell) + 4u_2(\ell) \int \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)} - 18 \tilde{w}_2^2(\ell) \int \frac{d^6 q}{[q^2 + \tilde{r}_2(\ell)]^2} \quad (3.102)$$

$$w_{\text{eff}} = \tilde{w}_1(\ell) + O(\epsilon^{3/2}) \quad (3.103)$$

$$u_{\text{eff}} = u_1(\ell) + O(\epsilon^2) \quad (3.104)$$

$$h_{\text{eff}} = \tilde{h}(\ell) + 3\tilde{w}_2(\ell) \int \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)} \quad (3.105)$$

e onde  $\int d^6 q \equiv \int_0^1 K_6 q^5 dq$  com  $K_6 \equiv \pi^3$ .

Resolvemos as integrais acima. Substituímos  $\tilde{r}_1(\ell)$  e  $\tilde{h}(\ell)$  por suas expressões em função de  $T_1(\ell)$  e  $\tilde{H}(\ell)$  dadas por (3.35), (3.43) e (3.52). Fora da região crítica da componente  $\tilde{\psi}$ , tomamos  $\tilde{r}_2(\ell) \sim 0(1)$  obtendo que os parâmetros  $r_{\text{eff}}$  e  $h_{\text{eff}}$  do hamiltoniano efetivo serão dados por:

$$r_{\text{eff}} = T_1(\ell) + 9K_6 \tilde{w}_1^2(\ell) \left[ 1 - 2T_1(\ell) \ln(1+T_1(\ell)) - \frac{T_1^2(\ell)}{1+T_1(\ell)} \right] - 6K_6 u_1(\ell) \left[ \frac{1}{2} - T_1(\ell) + T_1^2(\ell) \ln(1+T_1(\ell)) \right] - 9K_6 \tilde{w}_2^2(\ell) \quad (3.106)$$

$$h_{\text{eff}} = \tilde{H}(\ell) + \frac{3}{2} \tilde{w}_1(\ell) \left[ \frac{1}{2} - T_1(\ell) + T_1^2(\ell) \ln(1 + T_1(\ell)) \right] \quad (3.107)$$

onde além das substituições citadas, calculamos as integrais.

Como na composição de  $\tilde{w}_1(\ell)$  aparece um parâmetro  $M(\ell)$ , podemos tomá-lo tal que anule  $\tilde{w}_1(\ell)$ . Neste caso, o hamiltoniano efetivo (3.100) apresenta para  $h_{\text{eff}} = t_{\text{eff}} = 0$  um ponto crítico que separa uma fase desordenada ( $t_{\text{eff}} > 0$ ) onde  $\langle \tilde{\phi} \rangle = 0$  de uma fase ordenada ( $t_{\text{eff}} < 0$ ) onde  $\langle \tilde{\phi} \rangle \neq 0$ .  $t_{\text{eff}}$  é a temperatura reduzida associada ao modelo de Potts de dois estados sendo dada por<sup>26</sup>:

$$t_{\text{eff}} = r_{\text{eff}} + 6 K_0 u_{\text{eff}} \left[ \frac{1}{2} - t_{\text{eff}} + t_{\text{eff}}^2 \ln(1 + t_{\text{eff}}) \right] \quad (3.108)$$

De (3.106) e (3.108) obtemos que a esta temperatura reduzida associa-se o parâmetro  $T_1(\ell) = t_{\text{eff}}$ . Observamos também que  $M(\ell)$  só fornecerá o valor da magnetização do sistema original (hamiltoniano (2.15b)) onde  $\langle \phi \rangle = \langle \tilde{\phi} \rangle + M(\ell)$  para  $t_{\text{eff}} \geq 0$ , ou seja, para  $\langle \tilde{\phi} \rangle = 0$  e que tal magnetização é dada por  $w_{\text{eff}} = 0$ . Substituindo  $w_{\text{eff}} = 0$  em (3.107), obtemos  $h_{\text{eff}} = \tilde{H}(\ell)$ .

Pelo que foi visto acima, o ponto crítico fica determinado pelo conjunto de condições:

$$w_{\text{eff}} = \tilde{w}_1(\ell) = 0 \quad (3.109)$$

$$t_{\text{eff}} = T_1(\ell) = 0 \quad (3.110)$$

$$h_{\text{eff}} = \tilde{H}(\ell) = 0 \quad (3.111)$$

onde desprezamos termos de ordem superior em  $\varepsilon$ . Temos ainda a condição de estarmos fora da região crítica da componente  $\tilde{\psi}$ , ou seja,

$$\bar{T}_2(\ell) = 1 \quad (3.112)$$

De  $w_{\text{eff}} = \tilde{w}_1(\ell) = 0$ , teremos que:

$$M(\ell) = \frac{-w_1(\ell)}{4 u_1(\ell)} \quad (3.113)$$

onde usamos a definição de  $\tilde{w}_1(\ell)$  dada por (3.53). À ordem de zero loops ( $\varepsilon = 0$ ), a expressão acima é a da magnetização crítica, coincidindo com o resultado de campo médio (2.36). Reescrevemos  $M(\ell)$  da forma:

$$M(\ell) = -\frac{w(\ell)}{4 u(\ell)} \left[ 1 + 3 \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} - \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} + \frac{g_u'(\ell)}{3u(\ell)} \right] + O(g^2) \quad (3.114)$$

onde usamos (3.61) para separar a parte simétrica da não simétrica e interpretamos esta última como uma perturbação.

Substituímos (3.53) em (3.110) e (3.112). Usamos ainda  $M(\ell)$  dado por (3.114) e os demais parâmetros dados por (3.61). Fa

zendo isto obtemos respectivamente:

$$T_1(\ell) = t(\ell) + g(\ell) - \frac{3}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} - \frac{9}{2} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} g_w(\ell) + \frac{3}{4} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} \left[ g_u(\ell) - \frac{1}{3} g_u'(\ell) \right] = 0 \quad (3.115)$$

$$T_2(\ell) = t(\ell) - g(\ell) + \frac{7}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} + 3 \frac{w(\ell)}{u(\ell)} g_w(\ell) + \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} \left[ -2g_u(\ell) + \frac{11}{12} g_u'(\ell) \right] = 1 \quad (3.116)$$

À ordem de zero loops, (3.115) fornecerá (lembramos que a esta ordem  $r \sim t$ ) a temperatura reduzida crítica  $r_c \sim t_c$  de campo médio obtida em (2.37).

Subtraindo-se (3.115) de (3.116), obtemos à ordem de zero loops:

$$e^{-2\ell_c} = -2g + \frac{5}{2} \frac{w^2}{u} + \frac{15}{2} \frac{wg_w}{u} + \frac{1}{4} \frac{w^2}{u^2} \left[ -11g_u + \frac{7}{6} g_u' \right] \quad (3.117)$$

$$\ell_c = -\frac{1}{2} \ln \frac{w^2}{u} - \frac{1}{2} \ln \left[ -\frac{9}{2} G + \frac{5}{2} + \frac{15}{2} G_w + \frac{1}{4} (-11G_u + \frac{7}{6} G_u') \right] \quad (3.118)$$

onde usamos que à ordem de zero loops, cada termo de (3.115) e (3.116) depende de  $\ell$  da forma  $e^{2\ell}$  (ver (3.79) a (3.83) e (3.88) a (3.92)). Usamos também as definições (2.35). Cabe notar que  $G$ ,  $G_w$ ,  $G_u$  e  $G'_u$  são quantidades adimensionais.

Os parâmetros renormalizados  $M(\ell)$ ,  $u(\ell)$  ... apresentam uma dependência com  $\ell$  dada por (3.79) a (3.83) e (3.88) a (3.92). Substituindo-se tais dependências e usando  $\ell$  dado por (3.118), obtemos uma magnetização crítica à ordem de um loop dada por:

$$M_c = -\frac{w}{4u} \left\{ 1 + 3G_w - G_u + \frac{1}{3}G'_u + \epsilon \left[ F_w(\ell_c) - F_u(\ell_c) + 3G_w [F_{g_w}(\ell_c) - F_w(\ell_c)] - G_u [F_{g_u}(\ell_c) - F_u(\ell_c)] + \frac{1}{3}G'_u [F_{g'_u}(\ell_c) - F_u(\ell_c)] + 4\frac{g_{M4}}{w} F_{g_M}(\ell_c) \right] \right\} \quad (3.119)$$

$$M_c = -\frac{w}{4u} \left\{ 1 + 3G_w - G_u + \frac{1}{3}G'_u \right\} \left\{ 1 + [156 - 36G + 288G_w - 39G_u + 64G'_u] K_0 w^2 \left( \ln \frac{w^2}{u} \right) \right\} \quad (3.120)$$

onde tomamos  $t = t_c$  com  $t_c$  dado por (2.37). Mantivemos termos até a ordem  $w^2 \ln \frac{w^2}{u} \sim \epsilon \ln e^{-2\ell_c} \sim \epsilon \ell_c$ . Como supusemos nas expressões de

(3.79) a (3.83); (3.88) a (3.92) que  $\ell < \frac{1}{\varepsilon}$ , teremos que  $\varepsilon\ell$  será um parâmetro pequeno de expansão. Este será o parâmetro de expansão que passaremos a usar.

Afirmamos anteriormente haver uma justificativa para considerar  $\varepsilon\ell < 1$ . Olhemos a expressão para a magnetização (3.113). À ordem de zero loops e na ausência de quebra de simetria, a magnetização crítica será dada por  $M_c = -\frac{W}{4u}$ . Tal magnetização deve ser pequena para manter a validade da expansão de Landau. Assim, como  $w \sim O(\varepsilon^{1/2})$ , devemos tomar  $u \sim O(A\varepsilon)$  ( $A \gg 1$ , mas  $A\varepsilon < 1$ ) para que  $M_c \sim O(\frac{1}{A\varepsilon^{1/2}} \ll 1)$ . Como  $\varepsilon\ell_c \cong \varepsilon \ln \frac{w^2}{u}$ , teremos que  $\varepsilon\ell_c \cong \varepsilon \ln A$ . Como  $\ln A < A$  e  $\varepsilon A < 1$ , teremos que  $\varepsilon\ell_c < 1$  que é justamente a nossa suposição inicial.

Na expressão (3.115) substituímos (3.79) a (3.83), (3.88) a (3.92) e  $\ell = \ell_c$  dado por (3.118), bem como tomamos iterativamente  $t = t_c$  com  $t_c$  dado por (2.37) nos termos de um loop, gerando:

$$t_c = \frac{w^2}{u} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{9}{4} G + \frac{9}{2} G_w - \frac{3}{4} \left[ G_u - \frac{1}{3} G_u' \right] \right\} \left\{ 1 + \left[ 180 + 288G + 72G_w - \frac{123}{2} \left( G_u - \frac{4}{3} G_u' \right) \right] K_6 w^2 \ln \frac{w^2}{u} \right\} \quad (3.121)$$

De (3.111) obtemos que

$$h(\ell) = t_1(\ell) M(\ell) + 3w_1(\ell) M^2(\ell) + 4u_1(\ell) M^3(\ell) \quad (3.122)$$



onde substituímos  $\tilde{H}(\ell)$  por (3.53). Substituindo-se  $M(\ell)$  por (3.113) obtemos:

$$h(\ell) = - \frac{w_1(\ell) t_1(\ell)}{4 u_1(\ell)} + \frac{3 w_1(\ell)}{8 u_1^2(\ell)} \quad (3.123)$$

Esta expressão, à ordem de zero loops, coincide com a de campo médio dada por (2.34). Substituindo-se (3.61) e  $t(\ell)$  dado por (3.115) na expressão acima, obtemos:

$$h(\ell) = - \frac{w^3(\ell)}{4 u^2(\ell)} \left\{ \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} - \frac{g_u(\ell)}{8 u(\ell)} + \frac{g'_u(\ell)}{24 u(\ell)} \right\} \quad (3.124)$$

onde, à ordem de zero loops, a expressão acima coincide com o resultado de campo médio dado por (2.38). Substituindo-se em (3.124) (3.79) a (3.83), (3.88) a (3.92),  $\ell = \ell_c$  dado por (3.118), bem como iterativamente  $t = t_c$  onde  $t_c$  é dado por (2.37), obtemos:

$$h_c = - \frac{w^3}{16 u^2} \left\{ 1 + 9G_w - 2 \left( G_u - \frac{1}{3} G'_u \right) \right\} \left\{ 1 + \left[ 294 - 18G + 195G_w - \right. \right. \\ \left. \left. - 105 G_u + 146 G'_u \right] K_6 w^2 \ln \frac{w^2}{u} \right\} \quad (3.125)$$

onde tomamos  $\tilde{h} + g_h = h$  em  $\ell = 0$ .

3.3.3 Estudo do efeito de flutuações e de quebra de simetria no comportamento tricrítico do modelo de Potts de três estados em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões

No caso do campo externo aplicado  $h_1$  ser positivo,  $M > 0$  (fase I), conseqüentemente  $\tilde{r}_1 > \tilde{r}_2$ . Neste caso, o sistema irá se ordenar segundo  $\tilde{\psi}$  (fase III). Como, neste caso,  $\tilde{\phi}$  serão não crítica, podemos tomar o traço sobre ela. Obtemos, então, partindo do hamiltoniano renormalizado  $\mathcal{H}(\ell)$  (3.20), um hamiltoniano efetivo dependente só de  $\tilde{\psi}$  sem, no entanto, alterar a função de partição. Tal hamiltoniano efetivo será dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} &= - \ln \int \prod_{\mathbf{k}} d\tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{-\mathcal{H}(\ell)} \\ &= - \ln \int \prod_{\mathbf{k}} d\tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{-\mathcal{H}(\tilde{\psi})} \left\{ 1 - A + \frac{A^2}{2} \dots \right\} e^{-\frac{1}{2} \int d^d q (q^2 + \tilde{r}_1) \tilde{\phi}(q) \tilde{\phi}(-q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\equiv \int d^d q d^d q' \left[ \tilde{w}_1(\ell) \tilde{\phi}(q) \tilde{\phi}(q') \tilde{\phi}(-q-q') - 3\tilde{w}_2(\ell) \tilde{\phi}(q) \tilde{\psi}(q') \tilde{\psi}(-q-q') \right] + \\ &+ \int d^d q d^d q' d^d q'' \left[ u_1(\ell) \tilde{\phi}(q) \tilde{\phi}(q') \tilde{\phi}(q'') \tilde{\phi}(-q-q'-q'') + \right. \\ &\left. + 2u_2(\ell) \tilde{\phi}(q) \tilde{\phi}(q') \tilde{\psi}(q'') \tilde{\psi}(-q-q'-q'') \right] - \int d^d q \tilde{h}(\ell) \tilde{\phi}(q) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = C + \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{\text{eff}} \tilde{\psi}^2 + (\nabla \tilde{\psi})^2 \right] + u_{\text{eff}} \tilde{\psi}^4 + v_{\text{eff}} \tilde{\psi}^6 \right\}$$

onde

$$\mathcal{H}(\tilde{\Psi}) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_2 \tilde{\Psi}^2 + (\nabla \tilde{\Psi})^2 \right] + u_3(\ell) \tilde{\Psi}^4 \right\} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} r_{\text{eff}} = & \tilde{r}_2(\ell) + 4 u_2(\ell) \int \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} - 6 \frac{\tilde{w}_2^2(\ell)}{\tilde{r}_1(\ell)} \left\{ \tilde{h}(\ell) - \right. \\ & \left. - 3 \tilde{w}_1(\ell) \int \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} \right\} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$u_{\text{eff}} = u_3(\ell) - \frac{9}{2} \frac{\tilde{w}_2^2(\ell)}{\tilde{r}_1(\ell)} \quad (3.129)$$

$$v_{\text{eff}} = O(\epsilon^2) \quad (3.130)$$

e onde  $\int d^6 q \equiv \int_0^1 q^5 K_6 dq \equiv \int_0^1 \pi^3 q^5 dq$ .

Dado que  $M(\ell)$  é a magnetização segundo  $\phi(\mathbf{x})$ , teremos  $\langle \phi \rangle = M(\ell)$  e conseqüentemente  $\langle \tilde{\phi}(\mathbf{x}) \rangle = 0$ , gerando:

$$\langle \tilde{\phi} \rangle = \frac{\int \prod d\tilde{\phi} d\tilde{\psi} \tilde{\phi} e^{-\mathcal{H}(\ell)}}{\int \prod d\tilde{\phi} d\tilde{\psi} e^{-\mathcal{H}(\ell)}} = 0$$

$$0 = \tilde{r}_1^{-1}(\ell) \left\{ \tilde{h}(\ell) + 3\tilde{w}_2(\ell) \int_0^1 \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)} - 3\tilde{w}_1(\ell) \int_0^1 \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} \right\}$$

$$\tilde{h}(\ell) = 3\tilde{w}_1(\ell) \int_0^1 \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} + 3\tilde{w}_2(\ell) \int_0^1 \frac{d^6 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)}$$

(3.131)

Substituimos (3.131) em (3.128). Calculamos as integrais. Substituimos  $\tilde{r}_2(\ell)$  por seu valor em (3.35) e (3.51) e obtemos:

$$\begin{aligned} r_{\text{eff}} = & T_2(\ell) - 6K_6 u_3(\ell) \left[ \frac{1}{2} - T_2(\ell) + T_2^2(\ell) \ln(1 + T_2(\ell)) \right] + \\ & + 9K_6 \tilde{w}_2^2(\ell) \left[ -T_2(\ell) + T_2^2(\ell) \ln \frac{(1 + T_2(\ell))}{T_2(\ell)} + \frac{2 \ln 2 - 2T_2^2(\ell)}{T_2(\ell) - 1} + \frac{5}{2} \right] \end{aligned}$$

(3.132)

onde usamos a condição de estar fora do ordenamento segundo  $\tilde{\phi}$ , ou

seja,

$$T_1(\ell) = 1 \quad (3.133)$$

Substituindo-se (3.35) e (3.52) em (3.131), bem como calculando as integrais e usando (3.133), obtemos:

$$\tilde{H}(\ell) = \frac{3}{2} \tilde{W}_2(\ell) \bar{T}_2^2(\ell) \ln T_2(\ell) \quad (3.134)$$

O hamiltoniano efetivo (3.126) nada mais é que o do modelo de Potts de dois estados<sup>26</sup>. Ele define, para  $u_{\text{eff}} < 0$  uma transição de primeira ordem que, em  $u_{\text{eff}} = 0$ , transforma-se em de segunda ordem em um ponto: o ponto tricrítico. Lembramos que a transição de segunda ordem apresenta temperatura reduzida  $t_{\text{eff}}$  nula dada por<sup>26</sup>:

$$t_{\text{eff}} = r_{\text{eff}} + 6 K_6 u_{\text{eff}} \left[ \frac{1}{2} - t_{\text{eff}} + t_{\text{eff}}^2 \ln(1 + t_{\text{eff}}) \right] \quad (3.135)$$

Substituindo-se (3.135) em (3.132), teremos que:

$$t_{\text{eff}} = \bar{T}_2(\ell) + O(\epsilon) \quad (3.136)$$

Desta forma no ponto tricrítico, teremos

$$t_{\text{eff}} = \bar{T}_2(\ell) = 0 \quad (3.137)$$

$$u_{\text{eff}} = u_3(\ell) - \frac{q}{2} \frac{\tilde{w}_2(\ell)}{\tilde{r}_1(\ell)} = 0 \quad (3.138)$$

$$\tilde{H}(\ell) = 0 \quad (3.139)$$

onde (3.139) resultou de substituímos (3.137) em (3.134).

De (3.133) e (3.138), obtemos que a magnetização  $M(\ell)$  será dada por:

$$M(\ell) = \frac{3}{4} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \left[ 1 + \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} - \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] - \frac{\sqrt{2u(\ell)}}{4u(\ell)} \left[ 1 - \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{7g'_u(\ell)}{6u(\ell)} \right] \quad (3.140)$$

onde usamos (3.53) e (3.61). Substituindo-se (3.140) em (3.133) e em (3.137), obtemos, respectivamente:

$$T_1(\ell) = t(\ell) + \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \left[ \frac{45}{4} + \frac{u(\ell)g(\ell)}{w^2(\ell)} - \frac{q}{2} \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} + \frac{27}{4u(\ell)} (g_u(\ell) - 3g'_u(\ell)) \right] - \frac{6w(\ell)\sqrt{2u(\ell)}}{u(\ell)} \left[ 1 + \frac{g_u(\ell)}{4u(\ell)} - \frac{13}{6} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] + \frac{3}{2} - 4 \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} = 1 \quad (3.141)$$

$$T_2(\ell) = t(\ell) - \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \left[ \frac{q}{4} + \frac{u(\ell)g(\ell)}{w^2(\ell)} - \frac{q}{2} \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} - \frac{q}{4} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{4}{3} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] = 0 \quad (3.142)$$

onde usamos novamente (3.53) e (3.61). Na ausência de quebra de simetria, a subtração de (3.142) de (3.141) fornece que:

$$\frac{9}{8} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \sqrt{2 u(\ell)} = 1 \quad (3.143)$$

Substituindo-se por iteração esta expressão nos coeficientes das quebras de simetria  $G$ 's, obtemos que a subtração de (3.141) de (3.142) gerará:

$$1 = \frac{9}{8} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \sqrt{2 u(\ell)} \left\{ 1 + \frac{4}{27} \frac{g(\ell) u(\ell)}{w^2(\ell)} - \frac{2}{3} \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} + \right. \\ \left. + \frac{11}{32} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{1}{8} \frac{g_u'(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.144)$$

Substituindo-se (3.144) em (3.140) e em (3.142), obtemos, respectivamente:

$$M(\ell) = \frac{3}{16} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \left\{ 1 - \frac{4}{9} \frac{u(\ell)g(\ell)}{w^2(\ell)} - 2 \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} + \frac{15}{32} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{g_u'(\ell)}{8u(\ell)} \right\} \quad (3.145)$$

$$t(\ell) = \frac{9}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \left\{ \frac{7}{16} + \frac{5}{18} \frac{u(\ell)g(\ell)}{w^2(\ell)} - \frac{5}{4} \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} + \frac{45}{256} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{7}{64} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right\}$$

(3.146)

Substituindo-se (3.53) em (3.139)

$$h(\ell) = t_1(\ell) M(\ell) + 3 w_1(\ell) M^2(\ell) + 4 u_1(\ell) M^3(\ell) \quad (3.147)$$

Substituindo-se (3.61) bem como  $M(\ell)$  dado por (3.145) e  $t(\ell)$  dado por (3.146) na expressão acima:

$$h(\ell) = \frac{81}{256} \frac{w^3(\ell)}{u^2(\ell)} \left\{ 1 + \frac{8}{27} \frac{u(\ell)g(\ell)}{w^2(\ell)} - \frac{11}{3} \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} + \frac{49}{48} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{13}{36} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.148)$$

À ordem de zero loops, (3.145), (3.146) e (3.148) coincidem com as expressões obtidas via campo médio, dadas respectivamente por (2.47), (2.48) e (2.49) já que, a esta ordem, são independentes de  $\ell$ .

À ordem de zero loops, de (3.134) obtemos



$$l_t = - \ln \left\{ \frac{g_w \sqrt{2u}}{8u} \left[ 1 + \frac{G}{9} - \frac{2}{3} G_w + \frac{11}{32} G_u - \frac{1}{8} G_u' \right] \right\} \quad (3.149)$$

onde usamos (3.79) a (3.83) e (3.88) a (3.92) e as definições (2.35).

Já à ordem de um loop, substituímos (3.79) a (3.83) e (3.88) a (3.92) em (3.145), (3.146) e (3.148) e obtemos respectivamente:

$$M_t = \frac{3}{16} \frac{w}{u} \left\{ 1 - G - 2G_w + \frac{15}{32} G_u - \frac{1}{8} G_u' \right\} \left\{ 1 + \left[ \frac{639}{4} + \frac{9}{4} G - \frac{51}{2} G_w + \frac{14499}{512} G_u - \frac{4119}{128} G_u' \right] K_6 w^2 \ln \frac{w^2}{u} \right\} \quad (3.150)$$

$$t_t = \frac{9}{4} \frac{w^2}{u} \left\{ \frac{7}{16} + \frac{5}{8} G - \frac{5}{4} G_w + \frac{45}{256} G_u - \frac{7}{64} G_u' \right\} \left\{ 1 + \left[ 180 - \frac{1845}{14} G - \frac{291}{7} G_w + \frac{57105}{1792} G_u + \frac{63234}{1792} G_u' \right] K_6 w^2 \ln \frac{w^2}{u} \right\} \quad (3.151)$$

$$h_t = \frac{81}{256} \frac{w^3}{u^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} G - \frac{11}{3} G_w + \frac{49}{48} G_u - \frac{13}{36} G_u' \right\} \left\{ 1 + \left[ \frac{2367}{8} - \frac{159}{2} G - \frac{3765}{8} G_w + \frac{11863}{256} G_u - \frac{19976}{256} G_u' \right] K_6 w^2 \ln \frac{w^2}{u} \right\} \quad (3.152)$$

onde usamos  $l_t$  dado por (3.149), bem como  $t = t_c$  dado por (2.48) (valor de zero loops) iterativamente nos termos de um loop.

### 3.3.4 Razões de parâmetros críticos e tricríticos

Um dos aspectos importantes do estudo de fenômenos críticos é o fato de haver quantidades universais. Tais quantidades são de fácil medida já que independem de propriedades específicas do sistema.

Em campo médio, razões entre temperatura crítica e tricrítica, magnetização crítica e tricrítica e campo magnético crítico e tricrítico são trivialmente universais, já que campo médio é um procedimento que apaga as características específicas do sistema. Somente com a inclusão de flutuações, podemos estar seguros da universalidade ou não de uma dada razão.

Assim sendo, a razão entre a temperatura tricrítica dada por (3.151) e a temperatura crítica dada por (3.121), apresenta a forma:

$$\frac{t_t}{t_c} = \frac{\frac{9}{4} \left[ \frac{7}{16} + \frac{5}{8} G - \frac{5}{4} G_w + \frac{45}{256} G_u - \frac{7}{64} G_u' \right]}{\left[ \frac{3}{4} - \frac{9}{4} G + \frac{9}{2} G_w - \frac{5}{24} (G_u - \frac{1}{3} G_u') \right]} \left\{ 1 + \left[ -\frac{5877}{14} G - \frac{795}{7} G_w - \frac{277521}{1792} G_u - \frac{322361}{1792} G_u' \right] K_6 w^2 \ln \frac{w'}{u} \right\} \quad (3.153)$$

esta expressão é obviamente não universal, pois depende de quanti

dades dimensionais  $w$  e  $u$ . Igualmente a razão entre a magnetização tricrítica dada por (3.150) e a magnetização crítica dada por (3.120) apresenta a forma:

$$\frac{M_t}{M_c} = - \frac{\frac{3}{4} \left( 1 - G - 2G_w + \frac{15}{32} G_u - \frac{1}{8} G_u' \right)}{\left( 1 + 3G_w - G_u + \frac{1}{3} G_u' \right)} \left\{ 1 + \left[ \frac{15}{4} + \frac{153}{4} G - \frac{627}{2} G_w - \frac{32931}{512} G_u' - \frac{61333}{512} G_u \right] K_0 w^2 \ln w^2 / u \right\} \quad (3.154)$$

esta expressão, dependente de  $w$  e  $u$  é não universal. Da mesma forma, a razão entre o campo magnético tricrítico dado por (3.152) e o campo magnético crítico dado por (3.125) apresenta a forma

$$\frac{h_t}{h_c} = - \frac{\frac{81}{16} \left( 1 + \frac{2}{3} G - \frac{11}{3} G_w + \frac{49}{48} G_u - \frac{13}{36} G_u' \right)}{\left[ 1 + 9G_w - 2 \left( G_u - \frac{1}{3} G_u' \right) \right]} \left\{ 1 + \left[ + \frac{15}{8} - \frac{123}{2} G - \frac{5325}{8} G_w - \frac{38703}{256} G_u - \frac{57352}{256} G_u' \right] K_0 w^2 \ln \frac{w^2}{u} \right\} \quad (3.155)$$

esta expressão também é não universal. Cabe notar que mesmo na ausência de quebra de simetria, estas duas últimas razões são não universais. Tal não universalidade não é, de fato, surpreendente

já que, em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões os pontos crítico e tricrítico são quantidades absolutamente independentes.

### 3.4 Influência de Flutuações e de Quebra de Simetria no Comportamento Crítico e Tricrítico do Modelo de Potts de três Estados: Um Estudo em $d = 4 - \epsilon$ dimensões

#### 3.4.1 Forma de escala em $d = 4 - \epsilon$ dimensões

O estudo de teorias com dois acoplamentos de igual relevância, como foi ressaltado na seção anterior, é muito complicado. Simplificamos tal problema tomando um dos acoplamentos como uma perturbação, no caso tomaremos o acoplamento trilinear como uma perturbação.

No limite simétrico, na ausência de campo externo e tomando-se o acoplamento trilinear nulo, o hamiltoniano (2.17b) será o do modelo XY que apresenta uma transição de fase contínua com expoentes críticos conhecidos<sup>10,14</sup>. Considerando o campo externo, as quebras de simetria e o acoplamento trilinear como perturbações em torno do modelo XY, estendendo a hipótese de scaling usual<sup>14,37</sup>, podemos escrever a energia livre associada ao sistema como:

$$F(t, w, g, g_w, g_u, g'_u, h) = t^{2-\alpha} f(w t^{-\phi_w}, g t^{-\phi}, g_w t^{-\phi'_w}, g_u t^{-\phi_u}, g'_u t^{-\phi'_u}, h t^{-\Delta})$$

(3.156)

onde  $t \equiv \frac{T - \hat{T}_c}{\hat{T}_c}$  é a temperatura reduzida do modelo XY e onde  $\hat{T}_c$  é a temperatura da transição de segunda ordem XY. Igualmente  $\phi$ ,  $\phi'_w$ ,  $\phi'_u$  e  $\phi''_u$  são expoentes associados às quebras de simetria;  $\phi'_w$  é associado à perturbação trilinear;  $\Delta$  é associado ao campo externo e  $\alpha$  é associado ao comportamento do calor específico no ponto crítico XY. Para este modelo a magnetização comporta-se como

$$M = \langle \phi \rangle \approx t^\beta \quad (3.157)$$

onde  $\beta$  é o expoente do modelo XY.

O modelo XY com perturbação trilinear  $w$  e quebra de simetria quadrática  $g$  e na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica foi estudado anteriormente<sup>14</sup>. Neste caso, obtiveram-se valores para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\phi'_w$  e  $\Delta$ <sup>14</sup>. Nesta seção, iremos obter  $\phi'_w$ ,  $\phi'_u$  e  $\phi''_u$ .

Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, foram obtidas<sup>14</sup> razões universais de temperatura, magnetização e campo magnético calculados nos pontos tricrítico e crítico. Nesta seção, iremos obter tais razões na presença de quebra de simetria trilinear e quártica.

### 3.4.2 Solução das relações de recorrência em $d = 4 - \epsilon$ dimensões

Com a finalidade de obtermos formas explícitas para os parâmetros renormalizados  $\tilde{r}_i(\ell)$ ,  $\tilde{w}_i(\ell)$ ,  $\tilde{u}_i(\ell)$ ,  $\tilde{h}(\ell)$  como função dos parâmetros não renormalizados da teoria XY simétrica  $t$  e  $u$ , como função das perturbações simétricas não renormalizadas  $h_1$  e  $w$

relativas ao campo externo e ao termo trilinear e como função dos parâmetros não renormalizados de quebra de simetria  $g$ ,  $g_w$ ,  $g_u$  e  $g'_u$ , iremos solucionar as relações de recorrência (3.22) expressas em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões.

Tendo isto em mente, reescreveremos os  $\tilde{q}_i(\ell)$  de forma a separar as contribuições explicitamente de  $O(\epsilon)$ , ou seja, reescreveremos os  $\tilde{q}_i(\ell)$  como:

$$\tilde{q}_i = -\tilde{r}_i + 1 + \frac{\tilde{r}_i^2}{1 + \tilde{r}_i} \quad (3.158)$$

$$\tilde{q}_i \tilde{q}_j = 1 - \frac{\tilde{r}_i + \tilde{r}_j + \tilde{r}_i \tilde{r}_j}{(1 + \tilde{r}_i)(1 + \tilde{r}_j)} \quad (3.159)$$

Substituímos as expressões acima na relação de recorrência para  $\frac{d\tilde{r}_1}{d\ell}$  (3.22):

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}_1}{d\ell} &= \frac{d\bar{T}_1}{d\ell} - \frac{1}{2} \frac{df_{\tilde{r}_1}}{d\ell} \\ &= 2\bar{T}_1 - 12 K_4 U_1 \bar{T}_1 - 4 K_4 U_2 \bar{T}_2 - 18 K_4 \tilde{W}_1^2 - 18 K_4 \tilde{W}_2^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ -24 K_4 U_1 \left[ 1 + \frac{\bar{T}_1^2}{1 + \bar{T}_1} \right] - 8 K_4 U_2 \left[ 1 + \frac{\bar{T}_2^2}{1 + \bar{T}_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 36 K_4 \tilde{W}_1^2 \left[ \frac{-2\bar{T}_1 - \bar{T}_1^2}{(1 + \bar{T}_1)^2} \right] + 36 K_4 \tilde{W}_2^2 \left[ \frac{-2\bar{T}_2 - \bar{T}_2^2}{(1 + \bar{T}_2)^2} \right] + 2 f_{\tilde{r}_1} \right\} \quad (3.160) \end{aligned}$$

e identificamos

$$\frac{d\bar{T}_1}{d\ell} = 2\bar{T}_1 - 12K_4 U_1 \bar{T}_1 - 4K_4 U_2 \bar{T}_2 - 18K_4 [\tilde{W}_1^2 + \tilde{W}_2^2] \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} f_{\tilde{Y}_1} = & 12K_4 U_1 \left[ 1 - \bar{T}_1 \ln(1 + \bar{T}_1) \right] + 4K_4 U_2 \left[ 1 - \right. \\ & \left. - \bar{T}_2 \ln(1 + \bar{T}_2) \right] - 18K_4 \tilde{W}_1^2 \left[ \ln(1 + \bar{T}_1) + \frac{\bar{T}_1}{1 + \bar{T}_1} \right] - \\ & - 18K_4 \tilde{W}_2^2 \left[ \ln(1 + \bar{T}_2) + \frac{\bar{T}_2}{1 + \bar{T}_2} \right] \end{aligned} \quad (3.162)$$

Procedendo da mesma maneira com as relações de recorrência para  $\frac{d\bar{r}_2}{d\ell}$ ,  $\frac{d\tilde{w}_i}{d\ell}$ ,  $\frac{d\tilde{u}_i}{d\ell}$  e  $\frac{d\tilde{h}}{d\ell}$ , obtemos tanto relações de recorrência para os novos parâmetros renormalizados  $T_2(\ell)$ ,  $\tilde{W}_i(\ell)$ ,  $U_i(\ell)$  e  $\tilde{H}(\ell)$  definidos em (3.35), dadas por:

$$\frac{d\bar{T}_2}{d\ell} = 2\bar{T}_2 - 12K_4 U_3 \bar{T}_2 - 4K_4 U_2 \bar{T}_1 - 36K_4 \tilde{W}_2^2 \quad (3.163)$$

$$\frac{d\tilde{W}_1}{d\ell} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \tilde{W}_1 - 36K_4 \tilde{W}_1 U_1 + 12K_4 \tilde{W}_2 U_2 \quad (3.164)$$

$$\frac{d\tilde{W}_2}{d\ell} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \tilde{W}_2 + 4K_4 \tilde{W}_1 U_2 - 16K_4 \tilde{W}_2 U_2 - 12K_4 \tilde{W}_2 U_3 \quad (3.165)$$

$$\frac{dU_1}{d\ell} = \epsilon U_1 - 36 K_4 U_1^2 - 4 K_4 U_2^2 \quad (3.166)$$

$$\frac{dU_2}{d\ell} = \epsilon U_2 - 12 K_4 U_1 U_2 - 12 K_4 U_2 U_3 - 16 K_4 U_2^2 \quad (3.167)$$

$$\frac{dU_3}{d\ell} = \epsilon U_3 - 36 K_4 U_3^2 - 4 K_4 U_2^2 \quad (3.168)$$

$$\frac{d\tilde{H}}{d\ell} = \left(3 - \frac{\epsilon}{2}\right) \tilde{H} + 3 K_4 \tilde{W}_1 \tilde{T}_1 - 3 K_4 \tilde{W}_2 \tilde{T}_2 \quad (3.169)$$

como

$$\begin{aligned} f_{\tilde{r}_2} = & 12 K_4 U_3 \left[ 1 - \tilde{T}_2 \ln(1 + \tilde{T}_2) \right] + 4 K_4 U_2 \left[ 1 - \tilde{T}_1 \ln(1 + \tilde{T}_1) \right] - \\ & - 36 \tilde{W}_2^2 \left[ \tilde{T}_1 \ln(1 + \tilde{T}_1) - \tilde{T}_2 \ln(1 + \tilde{T}_2) \right] / (\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2) \end{aligned} \quad (3.170)$$

$$f_{\tilde{r}_1} = -3 \tilde{W}_1 \left[ 1 - \tilde{T}_1 \ln(1 + \tilde{T}_1) \right] + 3 \tilde{W}_2 \left[ 1 - \tilde{T}_2 \ln(1 + \tilde{T}_2) \right] \quad (3.171)$$

onde tanto  $f_{\tilde{w}_i} \sim 0(w^3)$  como  $f_{u_i} \sim 0(u^2)$  fornecerão contribuições aos nossos cálculos. Por simplicidade, tomaremos  $\tilde{W}_i = \tilde{w}_i$  e  $U_i = u_i$ . Novamente esta aproximação gera correções à ordem de dois loops às expressões para  $\tilde{r}_1$  e  $\tilde{r}_2$ .

Suponhamos que os novos parâmetros renormalizados possam ser escritos como (3.61). Substituindo-se tais expressões na



relação de recorrência (3.164), obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}_1}{d\ell} &= \frac{dw_1}{d\ell} + 4 \left[ M \frac{du_1}{d\ell} + u_1 \frac{dM}{d\ell} \right] \\ &= \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) w_1 - 36 K_4 w_1 u_1 + 12 K_4 w_2 u_2 + 4 \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) u_1 - \right. \\ &\quad \left. - 36 k_4 u_1^2 - 4 k_4 u_2^2 \right\} M \end{aligned} \quad (3.172)$$

Substituindo-se  $\frac{du_1}{d\ell}$  dado por (3.166) na expressão acima, obtemos a uma relação de recorrência para  $\frac{dw_1}{d\ell}$  e outra para  $\frac{dM(\ell)}{d\ell}$  dados por

$$\frac{dw_1}{d\ell} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) w_1 - 36 K_4 w_1 u_1 + 12 K_4 w_2 u_2 \quad (3.173)$$

$$\frac{dM}{d\ell} = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) M \quad (3.174)$$

Procedendo-se da mesma forma com as relações de recorrência para  $\frac{d\tilde{w}_2}{d\ell}$ ,  $\frac{dT_1}{d\ell}$ ,  $\frac{dT_2}{d\ell}$  e  $\frac{d\tilde{H}(\ell)}{d\ell}$ , obtemos as relações de recorrência para os novos parâmetros renormalizados  $w_2(\ell)$ ,  $t_1(\ell)$ ,  $t_2(\ell)$  e  $h(\ell)$  associados ao hamiltoniano de (2.17b). Tais relações são dadas por:

$$\frac{dw_2}{d\ell} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) w_2 + 4 K_4 w_1 u_1 - 16 K_4 w_2 u_2 - 12 K_4 w_2 u_3 \quad (3.175)$$

$$\frac{dt_1}{d\ell} = 2t_1 - 12K_4 u_1 t_1 - 4K_4 u_2 t_2 - 18K_4 w_1^2 - 18K_4 w_2^2 \quad (3.176)$$

$$\frac{dt_2}{d\ell} = 2t_2 - 12K_4 u_3 t_2 - 4K_4 u_2 t_1 - 36K_4 w_2^2 \quad (3.177)$$

$$\frac{dh}{d\ell} = \left(3 - \frac{\epsilon}{2}\right) h + 3K_4 w_1 t_1 - 3K_4 w_2 t_2 \quad (3.178)$$

Com o objetivo de avaliarmos separadamente as influências de quebra de simetria e da perturbação trilinear  $w$ , reescreveremos os novos parâmetros renormalizados em termos de uma contribuição simétrica relativa ao modelo XY, função de  $t$  e  $u$ , uma perturbação trilinear simétrica  $w$ , correção de quebra de simetria ao modelo XY,  $(g, g_u, g'_u)$  e correção de quebra de simetria à perturbação trilinear  $g_w$ . Assim, reescrevemos

$$t_1(\ell) = t(\ell) + \tilde{g}(\ell) - \frac{9}{2} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \quad (3.179a)$$

$$\tilde{g}(\ell) = g(\ell) + \frac{9}{2} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} g_w(\ell) + \frac{3}{10} \frac{t(\ell)}{u(\ell)} g_u(\ell) + 9 \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g'_u(\ell) \quad (3.179b)$$

$$t_2(\ell) = t(\ell) - \tilde{g}(\ell) - \frac{9}{2} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \quad (3.180)$$

$$w_1(\ell) = w(\ell) + 3 \tilde{g}_w(\ell) \quad (3.181a)$$

$$\tilde{g}_w(l) = g_w(l) + \frac{3}{4} \frac{w(l)}{u(l)} g_u(l) + \frac{w(l)}{u(l)} g_u'(l) \quad (3.181b)$$

$$w_2(l) = w(l) - \tilde{g}_w(l) \quad (3.182)$$

$$u_1(l) = u(l) + g_u(l) - \frac{1}{3} g_u'(l) \quad (3.183)$$

$$u_2(l) = u(l) + g_u'(l) \quad (3.184)$$

$$u_3(l) = u(l) - g_u(l) - \frac{1}{3} g_u'(l) \quad (3.185)$$

$$h(l) = \hat{h}(l) + \tilde{g}_h(l) \quad (3.186)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_h(l) = & \frac{3}{4} \frac{w(l)}{u(l)} g_u(l) + \frac{27}{8} \frac{w(l)}{u(l)} \frac{g_u(l)}{w} - \frac{3}{4} \frac{t(l)}{u(l)} g_w(l) + \frac{27}{16} \frac{w^3(l)}{u^3(l)} g_u(l) - \\ & - \frac{27}{80} \frac{t(l)w(l)}{u^2(l)} g_u(l) - \frac{3}{2} \frac{t(l)w(l)}{u^2(l)} g_u'(l) \end{aligned} \quad (3.187)$$

Substituindo-se estas expressões na relação de recorrência para  $\frac{du_2}{dl}$  dada por (3.167), teremos que:

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dl} &= \frac{du}{dl} + \frac{dg_u'}{dl} \\ &= \epsilon u - 40k_4 u^2 + \epsilon g_u' - 48k_4 u g_u' \end{aligned} \quad (3.188)$$

de forma que obtemos uma relação de recorrência para o acoplamento quártico da teoria simétrica dada por:

$$\frac{du}{d\ell} = \epsilon u - 40 k_4 u^2 \quad (3.189)$$

e uma relação de recorrência para uma das quebras de simetria quártica

$$\frac{dg_u^1}{d\ell} = \epsilon g_u^1 - 48 k_4 u g_u^1 \quad (3.190)$$

Procedendo-se da mesma forma com  $\frac{du_1}{d\ell}$ ,  $\frac{dw_i}{d\ell}$ ,  $\frac{dt_i}{d\ell}$  e  $\frac{d\hat{h}}{d\ell}$  dadas, respectivamente, pelas expressões (3.166) e de (3.173) a (3.178), obtemos relações de recorrência para o modelo XY simétrico dadas por:

$$\frac{dt}{d\ell} = 2t - 16 k_4 u t \quad (3.191)$$

$$\frac{d\hat{h}}{d\ell} = \left(3 - \frac{\epsilon}{2}\right) \hat{h} \quad (3.192)$$

$$\frac{dM}{d\ell} = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) M \quad (3.193)$$

onde  $t(\ell)$  é a nova temperatura renormalizada para o modelo XY simétrico.  $\hat{h}(\ell)$  e  $M(\ell)$  são o novo campo e a magnetização renormalizada. Obtemos também, a relação de recorrência para a perturbação trilinear  $w$

$$\frac{dw}{dl} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) w - 24 k_4 u w \quad (3.194)$$

bem como as relações de recorrência relativas às contribuições de quebra de simetria dadas por:

$$\frac{dg}{dl} = 2g - 8k_4 u g \quad (3.195)$$

$$\frac{dg_w}{dl} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) g_w - 40 k_4 u g_w \quad (3.196)$$

$$\frac{dg_u}{dl} = \epsilon g_u - 72 k_4 g_u \quad (3.197)$$

Tais relações apresentam como solução:

$$u(l) = \frac{u e^{\epsilon l}}{Q(l)} \quad (3.198)$$

$$t(l) = \frac{t e^{2l}}{Q(l)^{2/5}} \quad (3.199)$$

$$\hat{h}(l) = \hat{h} e^{\left(3 - \frac{\epsilon}{2}\right) l} \quad (3.200)$$

$$m(l) = M e^{\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) l} \quad (3.201)$$

$$w(l) = \frac{w e^{(1 - \frac{\epsilon}{2})l}}{Q(l)^{3/5}} \quad (3.202)$$

$$g(l) = \frac{g e^{2l}}{Q(l)^{1/5}} \quad (3.203)$$

$$g_w(l) = \frac{g_w e^{(1 + \frac{\epsilon}{2})l}}{Q(l)} \quad (3.204)$$

$$g'_u(l) = \frac{g'_u e^{\epsilon l}}{Q(l)^{6/5}} \quad (3.205)$$

$$g_u(l) = \frac{g_u e^{\epsilon l}}{Q(l)^{9/5}} \quad (3.206)$$

onde

$$Q(l) = 1 + \frac{4}{4^*} (e^{\epsilon l} - 1) \quad (3.207)$$

onde  $u^*$  é o ponto fixo do modelo XY dado por:

$$u^* = \frac{\epsilon}{40 K_u} \quad (3.208)$$

onde a temperatura reduzida não renormalizada do modelo XY  $t$  rela

ciona-se aos parâmetros do hamiltoniano não renormalizado simétrico via:

$$t = r + \frac{q}{2} \frac{w^2}{u} \quad (3.209)$$

e o novo campo externo  $\hat{h}$  não renormalizado, relaciona-se aos parâmetros do hamiltoniano inicial via:

$$\hat{h} = h_1 - \left\{ \frac{3}{4} \frac{w}{u} g + \frac{27}{8} \frac{w^2}{u^2} g_w + \frac{27}{16} \frac{w^3}{u^3} g'_u - \right. \\ \left. - \frac{3}{2u} \left( r + \frac{q}{2} \frac{w^2}{u} \right) \left[ \frac{1}{2} g_w + \frac{w}{u} \left( \frac{q}{40} g'_u + g_u \right) \right] \right\} \quad (3.210)$$

Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, ou seja, para  $g_w = g_u = g'_u = 0$ , os nossos resultados coincidem com os obtidos por Blankschtein et al.<sup>14</sup>, que desconsideraram estas duas quebras de simetria.

### 3.4.3 Estudo da influência de flutuações e de quebra de simetria no comportamento crítico do modelo de Potts de três estados em $d = 4 - \epsilon$ dimensões

No caso do campo externo aplicado ser negativo,  $h_1 < 0$ , a magnetização  $M$  será também negativa,  $M < 0$  (na fase I). Neste caso,  $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$  e o sistema se ordenará segundo  $\tilde{\phi}$ . Como  $\tilde{\psi}$  é não crítica, podemos tomar o traço parcial sobre  $\tilde{\psi}$ , obtendo a partir do  $h_a$

miltoniano  $\mathcal{H}(\ell)$ , um hamiltoniano efetivo, preservando a função de partição. Tal hamiltoniano efetivo será, então, dado por:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_{\text{eff}} \tilde{\phi}^2 + (\nabla \tilde{\phi})^2 \right] + w_{\text{eff}} \tilde{\phi}^3 + u_{\text{eff}} \tilde{\phi} - h_{\text{eff}} \tilde{\phi} \right\} d^d x \quad (3.211)$$

onde

$$r_{\text{eff}} = \tilde{r}_1(\ell) + 4 u_2(\ell) \int \frac{d^4 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)} - 18 \tilde{w}_2^2(\ell) \int \frac{d^4 q}{[q^2 + \tilde{r}_2(\ell)]^2} \quad (3.212)$$

$$h_{\text{eff}} = \tilde{h}(\ell) + 3 \tilde{w}_2(\ell) \int \frac{d^4 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)} \quad (3.213)$$

$$w_{\text{eff}} = \tilde{w}_1(\ell) \quad (3.214)$$

$$u_{\text{eff}} = u_1(\ell) \quad (3.215)$$

$$\int d^4 q \equiv \int_0^1 K_4 q^3 dq \quad ; \quad K_4 \equiv 2\pi^2 \quad (3.216)$$



Substituindo-se, em (3.212),  $\tilde{r}_1(\ell)$  por (3.35) e (3.162), resolvendo-se as integrais e usando a condição de estar fora do ordenamento segundo  $\tilde{\psi}$ , ou seja, usando

$$\bar{T}_2(\ell) = 1 \quad (3.217)$$

obtemos que

$$r_{\text{eff}} = \bar{T}_1(\ell) - 6 K_4 u_1(\ell) \left[ 1 - \bar{T}_1(\ell) \ln(1 + \bar{T}_1(\ell)) \right] + 9 K_4 \tilde{w}_2^2(\ell) + 9 K_4 \tilde{w}_1^2(\ell) \left[ \ln(1 + \bar{T}_1(\ell)) + \frac{\bar{T}_1(\ell)}{1 + \bar{T}_1(\ell)} \right] \quad (3.218)$$

Tomando-se  $M(\ell)$  tal que anule  $w_{\text{eff}}$ , teremos que o hamiltoniano efetivo é o do modelo de Ising. Tal modelo apresenta uma temperatura reduzida dada por<sup>10</sup>:

$$t_{\text{eff}} = r_{\text{eff}} + 6 K_4 u_{\text{eff}} \left[ 1 - r_{\text{eff}} \ln(1 + r_{\text{eff}}) \right] \quad (3.219)$$

Substituindo-se (3.219) em (3.218) obtemos que:

$$t_{\text{eff}} = \bar{T}_1(\ell) + O(w^2) \quad (3.220)$$

O modelo de Ising apresenta um ponto crítico em  $h_{\text{eff}} = t_{\text{eff}} = 0$ . Substituindo-se, em (3.213),  $\tilde{h}(\ell)$  por (3.35) e (3.171), resolvendo-se as integrais e usando a condição (3.217) de estar

fora do ordenamento segundo  $\tilde{\psi}$ , obtemos que

$$h_{\text{eff}} = \tilde{H}(\ell) + \frac{3}{2} K_u \tilde{w}_1(\ell) [1 - T_1(\ell) \ln(1 + T_1(\ell))] \quad (3.221)$$

Assim, o ponto crítico ficará determinado por:

$$w_{\text{eff}} = \tilde{w}_1(\ell) = 0 \quad (3.222)$$

$$t_{\text{eff}} = T_1(\ell) = 0 \quad (3.223)$$

$$h_{\text{eff}} = \tilde{H}(\ell) = 0 \quad (3.224)$$

De (3.222) obtemos que a magnetização  $M(\ell)$  será dada por:

$$M(\ell) = - \frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} = - \frac{w(\ell)}{4u(\ell)} \left\{ 1 + 3 \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} + \frac{5}{4} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} + \frac{3}{10} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.225)$$

onde usamos (3.61) e (3.179) a (3.187). Substituindo-se a expressão acima em (3.217) e em (3.223) obtemos:

$$\begin{aligned}
 T_2(\ell) = t(\ell) \left[ 1 - \frac{3}{10} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} \right] - g(\ell) - \frac{11}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} + \\
 + \frac{11}{8} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g_u(\ell) - \frac{43}{12} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g_u'(\ell) = 1 \quad (3.226)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1(\ell) = t(\ell) \left[ 1 + \frac{3}{10} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} \right] + g(\ell) - \frac{21}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \\
 - \frac{21}{8} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g_u(\ell) + \frac{17}{4} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g_u'(\ell) = 0 \quad (3.227)
 \end{aligned}$$

onde usamos (3.61) e de (3.179) a (3.187). Multiplicamos (3.227) e (3.226) respectivamente por  $\left[ 1 + \frac{3}{10} \frac{g_u'(\ell)}{u(\ell)} \right]$  e  $\left[ 1 - \frac{3}{10} \frac{g_u'(\ell)}{u(\ell)} \right]$ . Após, subtraímos as expressões resultantes, obtendo, à ordem de zero loops:

$$e^{-2\ell_c} = \frac{w^2}{u} f_c$$

$$f_c = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} G + \frac{17}{20} G_u - \frac{47}{6} G_u'$$

$$\ell_c = -\frac{1}{2} \ln \frac{w^2}{u} - \frac{1}{2} \ln f_c \quad (3.228)$$

onde usamos as expressões de (3.198) a (3.206) à ordem de zero loops e as definições (2.35). Substituímos  $e^{-\ell c}$  em  $Q(\ell)$  dado por (3.207), obtemos

$$\begin{aligned}
 Q(\ell_c) &= 1 + \frac{u}{u^*} (e^{\ell_c} - 1) \\
 &= e^{\ell_c} \left\{ 1 + \frac{u^* - u}{u^*} (e^{-\ell_c} - 1) \right\} \\
 &= e^{\ell_c} R
 \end{aligned} \tag{3.229}$$

onde  $R \equiv 1 + (u^* - u)/u^* (e^{-\ell c} - 1)$

Substituindo-se (3.228) e (3.229) nas dependências com  $\ell$  de (3.198) a (3.206) e estas expressões em (3.225), obtemos a magnetização no ponto crítico dada por (lembramos que  $\langle \vec{\phi} \rangle = M$ ):

$$\begin{aligned}
 M_c &= -\frac{w}{4u} \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{2/5} \left\{ 1 + 3G_w \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{2}{5}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{4} G_u \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{4}{5}} + \frac{10}{3} G_u^1 \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{1}{5}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.230}$$

Em  $u = u^*$

$$M_c = \frac{-1}{4\sqrt{u^*}} \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\beta/\phi} \left\{ 1 + 3G_w \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{5}} + \frac{5}{4} G_u \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{10}{3} G_u^1 \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} f_c^{\beta/\phi - 1/2} \quad (3.231)$$

onde  $\frac{\beta}{\phi} = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{5}$  e onde usamos

$$G \equiv \frac{4}{9} \frac{g_u}{w^2}, \quad G_w \equiv \frac{g_w}{w}, \quad G_u \equiv \frac{g_u}{u} \quad \text{e} \quad G_u^1 \equiv \frac{g_u^1}{u}$$

À ordem de zero loops ( $\epsilon=0$ ), a expressão (3.231) coincide com o resultado (2.36) obtido via campo médio se reescrevermos  $G$  e  $G_w$  como funções de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{G}_w$  dados por (3.179b) e (3.181b)

Substituindo-se (3.228) e (3.229) nas expressões de (3.198) a (3.206) e as expressões resultantes em (3.227), obtemos que a temperatura reduzida XY  $t$  calculada no ponto crítico de Potts será dada por:

$$t_c = \frac{9}{4} \left\{ \frac{7}{3} - G + \frac{7}{15} G_u \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{4}{5}} - \frac{17}{9} G_u^1 \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{1}{5}} \right\} \frac{w^2}{u} \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right) \right]^{1/5} \quad (3.232)$$

Em  $u = u^*$

$$t_c = \frac{9}{4} \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{1/\phi} f_c^{1/\phi - 1} \left\{ \frac{7}{3} - G + \frac{7}{15} G_u \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} - \frac{17}{9} G_u' \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.233)$$

onde  $\phi = 1 + \frac{\epsilon}{10}$ .

À ordem de zero loops ( $\epsilon = 0$ ), substituindo-se este valor de  $t_c$  em (3.209), obtemos um valor para  $r_c$  idêntico ao obtido em (2.37) via teoria de campo médio, se substituirmos  $G$  e  $G_w$  pelas expressões (3.179b) e (3.181b) funções de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{G}_w$ .

Substituindo-se  $M(\ell)$  dado por (3.225),  $t(\ell)$  dado por (3.227) na expressão (3.224), onde  $\tilde{H}(\ell)$  é dado por (3.61), e usando de (3.179) a (3.187), obtemos:

$$\hat{h}(\ell) = - \frac{w^3(\ell)}{16 u^2(\ell)} \left\{ 1 + \frac{12 u(\ell) g(\ell)}{w^2(\ell)} + \frac{17}{5} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{349}{3} \frac{g_u'(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.234)$$

Substituindo-se (3.228) e (3.229) nas expressões de (3.198) a (3.206), e as expressões resultantes em (3.234), obtemos o campo magnético  $\hat{h}$  calculado no ponto crítico dado por:

$$\hat{h}_c = -\frac{w^3}{16u^2} \left[ R \left( f_c \frac{w^2}{u} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{5}} \left\{ 1 + 27G + \right. \\ \left. + \frac{17}{5} G_u \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{4}{5}} - \frac{349}{3} G_u' \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \right\} \quad (3.235)$$

Em  $u = u^*$

$$\hat{h}_c = -\frac{1}{16\sqrt{u^*}} \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\Delta/\phi} f_c^{\Delta/\phi - 3/2} \left\{ 1 + 27G + \right. \\ \left. + \frac{17}{5} G_u \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{2}{5}\epsilon} - \frac{349}{3} G_u' \left( \frac{w^2}{u^*} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.236)$$

onde  $\frac{\Delta}{\phi} = \frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{10}$ .

À ordem de zero loops ( $\epsilon = 0$ ), substituindo-se  $\hat{h}_c$  em (3.210), obtemos um valor para  $h_1$  idêntico ao (2.38) obtido via teoria de campo médio, se substituirmos  $G$  e  $G_w$  por (3.179b) e (3.181b).

Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, a temperatura, a magnetização e o campo magnético críticos coincidem com resultados de Blankshtein e Aharony<sup>14</sup>.

3.4.4 Estudo da influência de flutuações e da quebra de simetria no comportamento tricrítico do modelo de Potts de três estados em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões

No caso de  $h_1 > 0$ , a magnetização  $M > 0$ , conseqüentemente  $\tilde{r}_1 > \tilde{r}_2$  e o sistema se ordena segundo a componente  $\tilde{\psi}$  dos campos. Como  $\tilde{\phi}$  é não crítica, tomamos  $T_1(\ell) = 1$  e podemos tomar o traço parcial sobre esta componente, obtendo a partir do hamiltoniano (3.13) um hamiltoniano efetivo semelhante ao (3.78) dado por:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ r_{\text{eff}} \tilde{\psi}^2 + (\nabla \tilde{\psi})^2 \right] + u_{\text{eff}} \tilde{\psi}^4 + v_{\text{eff}} \tilde{\psi}^6 \right\} \quad (3.237)$$

onde

$$r_{\text{eff}} = \tilde{r}_2(\ell) + 4 u_2(\ell) \int \frac{d^4 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} - 6 \frac{\tilde{w}_2(\ell)}{\tilde{r}_1(\ell)} \left\{ \tilde{h}(\ell) - 3 \tilde{w}_1(\ell) \int \frac{d^4 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} \right\} \quad (3.238)$$

$$u_{\text{eff}} = u_3(\ell) - \frac{9}{2} \frac{\tilde{w}_2^2(\ell)}{\tilde{r}_1(\ell)} + O(\epsilon^2) \quad (3.239)$$

$$v_{\text{eff}} = O(\epsilon)^{3/2} \quad (3.240)$$



$$\int d^4 q = \int_0^1 k_4 q^3 dq \quad ; \quad k_4 \equiv 2\pi^2 \quad (3.241)$$

Dado que  $M(\ell)$  é o parâmetro responsável pela magnetização do sistema, teremos (lembrar que  $\langle \phi \rangle = M(\ell)$ )

$$\langle \tilde{\phi} \rangle = 0$$

$$0 = \tilde{h}(\ell) + 3 \tilde{w}_2(\ell) \int \frac{d^4 q}{q^2 + \tilde{r}_2(\ell)} - 3 \tilde{w}_1(\ell) \int \frac{d^4 q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} \quad (3.242)$$

Substituindo-se  $\tilde{h}(\ell)$  obtido da expressão acima, na expressão para  $r_{\text{eff}}$  dada por (3.239) e calculando-se as integrais, obtemos:

$$\begin{aligned} r_{\text{eff}} = & T_2(\ell) - 6 k_4 \left[ u_1(\ell) - \frac{q}{2} \tilde{w}_2^2(\ell) \right] \left[ 1 - T_2(\ell) \ln(1 + T_2(\ell)) \right] - \\ & - 18 k_4 \tilde{w}_2^2(\ell) \left[ 1 - \frac{\ln 2}{1 - T_2(\ell)} + \frac{T_2^2(\ell)}{1 - T_2(\ell)} - \frac{T_2(\ell)}{2} \ln T_2(\ell) \right] \end{aligned} \quad (3.243)$$

onde usamos a expressão para  $\tilde{r}_2(\ell)$  (3.61) e (3.170), bem como  $T_1(\ell) = 1$ . Substituindo-se (3.61) e (3.171) em (3.242) e calculando-se as integrações, obtemos:

$$(3.244)$$

Conforme foi visto na seção 3.3.3, o hamiltoniano efetivo (3.237) descreve, para  $u_{\text{eff}} < 0$  uma transição de primeira ordem que transforma-se em de segunda ( $u_{\text{eff}} > 0$ ,  $t_{\text{eff}} = 0$ ) em um ponto tricrítico ( $u_{\text{eff}} = t_{\text{eff}} = 0$ ), onde  $t_{\text{eff}}$  é a temperatura reduzida para o modelo de Ising em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões, dada por<sup>10</sup>:

$$t_{\text{eff}} = r_{\text{eff}} + 6k_4 u_{\text{eff}} [1 - r_{\text{eff}} \ln(1 + r_{\text{eff}})] \quad (3.245)$$

De posse desta relação, estabelecemos o ponto tricrítico pelo conjunto de expressões:

$$t_{\text{eff}} = T_2(\ell) = 0 \quad (3.246)$$

$$u_{\text{eff}} = u(\ell) - \frac{q}{2} \frac{w^2(\ell)}{T_1(\ell)} \quad (3.247)$$

$$T_1(\ell) = 1 \quad (3.248)$$

De (3.247) obtemos que a magnetização renormalizada tricrítica será dada por:

$$M(\ell) = \frac{3}{4} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \left\{ 1 - \frac{g_w(\ell)}{w(\ell)} - \frac{3}{4} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - 2 \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right\} - \frac{1}{2\sqrt{2u}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{7}{6} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.249)$$

onde usamos (3.61) bem como (3.179) a (3.187).

Substituindo-se (3.249) em (3.246) e em (3.248) bem como usando (3.61) e (3.179) a (3.187), obtemos respectivamente:

$$T_2(\ell) = t(\ell) - g(\ell) - \frac{27}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} + \frac{27}{20} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g_u(\ell) - \frac{9}{4} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g'_u(\ell) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{7}{10} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - \frac{4}{3} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] = 0 \quad (3.250)$$

$$T_1(\ell) = t(\ell) + g(\ell) + \frac{27}{4} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} - \frac{63}{4} \frac{w^2(\ell)}{u^2(\ell)} g'_u(\ell) -$$

$$- \frac{6 w(\ell) \sqrt{2 u(\ell)}}{u(\ell)} \left[ 1 - \frac{g_u(\ell)}{20 u(\ell)} - \frac{13}{6} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ 3 - \frac{3}{10} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} - 8 \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] = 1 \quad (3.251)$$

Na ausência de quebra de simetria, subtraindo-se (3.250) de (3.251) teremos que:

$$1 = 9 w(\ell) \frac{\sqrt{2 u(\ell)}}{8 u(\ell)} \quad (3.252)$$

Substituindo-se (3.252) nos termos de quebra de simetria em (3.250) e (3.251) e tomando-se a diferença entre as duas expressões resultantes, teremos

$$1 = \frac{9}{8} \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \sqrt{2 u(\ell)} \left[ 1 + \frac{4}{27} \frac{u(\ell)g}{w^2(\ell)} + \frac{7}{80} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} + \frac{13}{24} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right] \quad (3.253)$$

À ordem de dois loops, usando as expressões de (3.198) a (3.206), obtemos:

$$e^{\ell_t} = \frac{w}{\sqrt{u}} f_t$$

$$f_t = \frac{81}{32} \left\{ 1 + \frac{2}{3} G + \frac{7}{40} G_u + \frac{13}{12} G'_u \right\} \quad (3.254)$$

Substituindo-se (3.253) em (3.249), a magnetização terá a forma:

$$M(\ell) = \frac{w(\ell)}{u(\ell)} \left\{ \frac{3}{16} - \frac{3}{16} G(\ell) - \frac{3}{4} G_w(\ell) - \right. \\ \left. - \frac{783}{1280} G_u(\ell) - \frac{231}{128} G'_u(\ell) \right\} \quad (3.255)$$

onde usamos (2.35). Substituímos (3.254) e (3.229) nas expressões (3.198) a (3.206) e as expressões resultantes em (3.255). Obtemos, então, a magnetização no ponto tricrítico dada por:

$$M_t = \frac{1}{16} \frac{W}{4} \left\{ 3 - 3G - 12 G_w \left[ R \left( \frac{W^2}{4} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-2/5} - \right. \\ \left. - \frac{783}{80} G_u \left[ R \left( \frac{W^2}{4} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-4/5} - \frac{231}{8} G_u' \left[ R \left( \frac{W^2}{4} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-1/5} \right\} \left[ R \left( \frac{W^2}{4} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{1/5}$$

(3.256)

Em  $u = u^*$ 

$$M_t = \frac{1}{16 \sqrt{u^*}} \left( \frac{W^2}{4^*} \right)^{3/4} f_t^{3/4 - 1/2} \left\{ 3 - 3G - 12 G_w \left[ \frac{W^2}{4^*} f_t \right]^{-\frac{\epsilon}{5}} - \right. \\ \left. - \frac{783}{80} G_u \left[ \frac{W^2}{4^*} f_t \right]^{\frac{2\epsilon}{5}} - \frac{231}{8} G_u' \left[ \frac{W^2}{4^*} f_t \right]^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.257)$$

À ordem de zero loops ( $\epsilon = 0$ ), esta expressão coincide com o resultado de campo médio (2.47) se substituirmos  $G$  e  $G_w$  por funções de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{G}_w$  dadas por (3.179b) e (3.181b).

Substituindo-se (3.253) em (3.250), obtemos:

$$t(\ell) = \frac{9 W^2(\ell)}{64 u(\ell)} \left\{ 39 + \frac{40 u(\ell) g(\ell)}{9 W^2(\ell)} - \frac{39}{8} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} + \frac{73}{4} \frac{g_u'(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.258)$$

Substituindo-se (3.254) e (3.229) em (3.198) a (3.206), e as expressões resultantes em (3.258), obtemos a temperatura reduzida  $t_t$  calculada no ponto tricrítico de Potts dada por:

$$t_t = \frac{9}{64} \frac{w^2}{u} \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{5}} \left\{ 39 + 10G - \frac{39}{8} G_u \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{5}} + \frac{73}{4} G_u' \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{5}} \right\} \quad (3.259)$$

Em  $u = u^*$

$$t_t = \frac{9}{64} \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\frac{1}{\phi}} f_t^{\frac{1}{\phi}-1} \left\{ 39 + 10G - \frac{59}{8} G_u \left( \frac{w^2}{u^*} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{73}{4} G_u' \left( \frac{w^2}{u^*} f_t \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.260)$$

À ordem de zero loops ( $\epsilon = 0$ ), substituindo-se  $t_t$  em (3.209), obtemos  $r_t$  que apresentará o mesmo valor que o obtido em (2.48) via teoria de campo médio, se substituirmos  $G$  e  $G_w$  por funções de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{G}_w$  dadas por (3.179b) e (3.181b).

No ponto tricrítico  $\tilde{H}(\ell)$  dado por (3.242) será nulo. Substituindo-se (3.61),  $M(\ell)$  dado por (3.255), usando as expressões (3.179) a (3.187), bem como, usando  $t(\ell)$  dado por (3.258),

na expressão  $\tilde{H}(\ell) = 0$ , obtemos

$$\hat{h}(\ell) = \frac{81}{256} \frac{w^3(\ell)}{u^2(\ell)} \left\{ 1 - \frac{56}{27} \frac{u(\ell)g(\ell)}{w^2(\ell)} - \frac{87}{120} \frac{g_u(\ell)}{u(\ell)} + \right. \\ \left. + \frac{887}{36} \frac{g'_u(\ell)}{u(\ell)} \right\} \quad (3.261)$$

Substituindo-se (3.254) e (3.229) nas expressões de (3.198) a (3.206) e as expressões resultantes em (3.261), obtemos o campo magnético externo calculado no ponto tricrítico dado por:

$$\hat{h}_t = \frac{81}{256} \frac{w^3}{u^2} \left[ R \left( \frac{w}{u} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{\frac{4}{5}} \left\{ 1 - \frac{14}{3} G - \frac{87}{120} G_u \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{\frac{4}{5}} + \right. \\ \left. + \frac{887}{36} G'_u \left[ R \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right]^{-\frac{1}{5}} \right\} \quad (3.262)$$

Em  $u = u^*$

$$\hat{h}_t = \frac{81}{256} \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\Delta/\phi} \frac{f_t^{\Delta/\phi - 3/2}}{\sqrt{u^*}} \left\{ 1 - \frac{14}{3} G - \frac{87}{120} \left( \frac{w^2}{u^*} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \right. \\ \left. + \frac{887}{36} G'_u \left( \frac{w^2}{u^*} f_t \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.263)$$

À ordem de zero loops ( $\epsilon = 0$ ), substituindo-se  $\hat{h}_t$  em (3.210), obtemos  $h_{1t}$  idêntico ao obtido em (2.49) via teoria de campo médio, se substituirmos  $G$  e  $G_w$  por funções de  $\tilde{G}_w$  e  $\tilde{G}$  dadas por (3.179b) e (3.181b).

### 3.4.5 Razões de parâmetros críticos e tricríticos

Ao construirmos expressões para a temperatura reduzida XY, magnetização e campo magnético nos pontos crítico e tricrítico, podemos fazê-lo, separando cada um dos parâmetros da forma

$$x = A w^\theta \left\{ f(G_i, w) + \frac{u^* - u}{u^*} s(G_i, w) \right\} \quad (3.264)$$

onde  $x = t, m, \hat{h}$  e  $\theta = \frac{2}{\phi}, \frac{2\beta}{\phi}, \frac{2\Delta}{\phi}$ , respectivamente. Assim, a razão entre as temperaturas tricrítica e crítica, dadas respectivamente por (3.259) e (3.260) e por (3.232) e (3.233) terá, então, a forma:

$$\frac{t_t}{t_c} = \left\{ \frac{\frac{1}{16} \left[ 39 + 10G - \frac{39}{8} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{73}{4} G_u' \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right]}{\left[ \frac{7}{3} - G + \frac{7}{15} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} - \frac{17}{9} G_u' \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right]} \left( \frac{f_t}{f_c} \right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \right. \\ \left. - \left( \frac{f_t}{f_c} \right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \frac{1}{80} \left( \frac{u^* - u}{u^*} \right) \frac{39 + 10G + \frac{117}{8} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}}}{\frac{7}{3} - G - \frac{7}{3} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}}} \left[ \left( \frac{w^2}{u} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left( \frac{f_t}{f_c} - \frac{f_c}{f_t} \right)^{-1} \right] \right\}$$

(3.265)



onde em  $u = u^*$

$$\frac{t_t}{t_c} = \frac{+\frac{1}{16} [39 + 10G]}{[\frac{7}{3} - G]} \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \left\{ 1 - \frac{G_u}{40} \left[ 5 f_t^{2/5\epsilon} + 8 f_c^{2/5\epsilon} \right] \left(\frac{w^2}{4^*}\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \right. \\ \left. - G_u \left[ \frac{73}{148} f_t^{\epsilon/10} + \frac{17}{21} f_c^{\epsilon/10} \right] \left(\frac{w^2}{4^*}\right)^{\epsilon/10} \right\} \quad (3.266)$$

Analisemos inicialmente o caso de  $u = u^*$ . Neste caso, os dois primeiros termos de (3.266) são universais. Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, o termo entre chaves será igual a 1. Neste caso, a razão de temperaturas crítica e tricrítica será universal<sup>14</sup>. No caso, no entanto, da presença de quebra de simetria trilinear e quártica, tal universalidade é quebrada.

Para  $u \neq u^*$ , mesmo na ausência de quebra de simetria, a razão  $\frac{t_t}{t_c}$  será não universal. A universalidade, neste caso, é recuperada se tomarmos o limite de  $\left(\frac{w^2}{u}\right)^\epsilon \rightarrow 0$ <sup>14</sup>, ou seja,  $\frac{w^2}{u} \ll \epsilon$ .

A razão entre a magnetização tricrítica e crítica dadas respectivamente por (3.256) e (3.257) e por (3.230) e (3.231) terá, por sua vez, a forma:

$$\frac{M_t}{M_c} = \left\{ \frac{-\frac{1}{4} \left[ 3 - 3G - 12G_w \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{\epsilon}{5}} - \frac{783}{80} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} - \frac{231}{3} G_u' \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right]}{\left[ 1 + 3G_w \left( \frac{w^2}{u} f \right)^{\frac{\epsilon}{5}} + \frac{5}{4} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{10}{3} G_u' \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right]} \right\} \left( \frac{f_t}{f_c} \right)^{-\frac{\epsilon}{5}}$$

$$+ \left( \frac{f_t}{f_c} \right)^{\frac{1}{20}} \left( \frac{u^* - u}{u^*} \right)^{-\frac{\epsilon}{5}} \left\{ \frac{3 - 3G + 12G_w \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{\epsilon}{5}} + \frac{2349}{80} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_t \right)^{\frac{2\epsilon}{5}}}{\left[ 1 - 3G_w \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{\frac{\epsilon}{5}} - \frac{15}{4} G_u \left( \frac{w^2}{u} f_c \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} \right]} \left[ \left( \frac{w^2}{u} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left( f_t^{\frac{\epsilon}{5}} - f_c^{\frac{\epsilon}{5}} \right) - 1 \right] \right\} \quad (3.267)$$

onde em  $u = u^*$

$$\frac{M_t}{M_c} = -\frac{1}{4} [3 - 3G] \left( \frac{f_t}{f_c} \right)^{\frac{\epsilon}{5}} \left\{ 1 - G_w \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\frac{\epsilon}{5}} \left[ 4 f_t^{\frac{\epsilon}{5}} + 3 f_c^{\frac{\epsilon}{5}} \right] - \right.$$

$$\left. - G_u \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} \left[ \frac{261}{80} f_t^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{5}{41} f_c^{\frac{\epsilon}{5}} \right] - G_u' \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \left[ \frac{77}{8} f_t^{\frac{\epsilon}{10}} + \frac{10}{3} f_c^{\frac{\epsilon}{10}} \right] \right\}$$

(3.268)

Como anteriormente, a não universalidade de (3.268) só existe na presença de quebra de simetria trilinear e quártica<sup>14</sup>. Já no caso  $u \neq u^*$  somente no limite  $\left( \frac{w^2}{u} \right)^{\epsilon} \rightarrow 0$  e na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, esta razão será universal.

A razão entre os campos magnéticos tricrítico e crítico dados, respectivamente, por (3.262) e (3.263) e por (3.235) e (3.236) terá a forma:

$$\frac{\hat{h}_t}{\hat{h}_c} = \left\{ \frac{-\frac{81}{16} \left[ 1 - \frac{14}{3}G - \frac{87}{120}G_u \left(\frac{w^2}{u}f_t\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{887}{36}G_u' \left(\frac{w^2}{u}f_t\right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right]}{\left[ 1 + 27G + \frac{17}{5}G_u \left(\frac{w^2}{u}f_c\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} - \frac{349}{3}G_u' \left(\frac{w^2}{u}f_t\right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right]} \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \frac{81}{80} \left(\frac{u^* - u}{u^*}\right) \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \frac{\left[ 1 - \frac{14}{3}G + \frac{87}{40}G_u \left(\frac{w^2}{u}f_t\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} \right]}{\left[ 1 + 27G - \frac{51}{5}G_u \left(\frac{w^2}{u}f_c\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} \right]} \left[ \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} (f_t^{\frac{\epsilon}{2}} - f_c^{\frac{\epsilon}{2}}) - 1 \right] \right\} \quad (3.269)$$

onde em  $u = u^*$

$$\frac{\hat{h}_t}{\hat{h}_c} = -\frac{81}{16} \frac{\left[ 1 - \frac{14}{3}G \right]}{\left[ 1 + 27G \right]} \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \left\{ 1 - \left(\frac{w^2}{u^*}\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} \left[ \frac{87}{120}G_u f_t^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{17}{5}G_u f_c^{\frac{2\epsilon}{5}} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{w^2}{u^*}\right)^{\frac{\epsilon}{10}} \left[ \frac{887}{36}G_u' f_t^{\frac{\epsilon}{10}} + \frac{349}{3}G_u' f_c^{\frac{\epsilon}{10}} \right] \right\} \quad (3.270)$$

Igualmente aqui em  $u = u^*$  a não universalidade da razão de parâmetros é gerada pela presença das quebras de simetria tri-linear e quártica. Tomando-se  $G_u = G_u' = 0$ , a expressão será universal<sup>14</sup>. No caso de  $u \neq u^*$ , mesmo para  $G_u = G_u' = 0$ , a universalidade está condicionada a tomarmos  $\left(\frac{w^2}{u}\right)^\epsilon \rightarrow 0$ <sup>14</sup>.

### 3.5 Aplicação ao SrTiO<sub>3</sub>

Como foi demonstrado no capítulo 2 (seção 2.3), o SrTiO<sub>3</sub> sob a ação de uma pressão  $p$ , descrito pelo hamiltoniano (2.71), sofre, para altas temperaturas, (ver figura 2.7) uma transição de fase estrutural (de segunda ordem) de uma fase pseudocúbica, a trigonal. Baixando a temperatura, o sistema sofrerá um segundo ordenamento estrutural, desta vez será uma transição de fase de primeira ordem da fase trigonal para uma fase pseudotetragonal. Como, neste segundo ordenamento,  $\phi_0$  é não crítica, tomamos o traço sobre ela, obtendo o hamiltoniano de Potts (2.76) como função de parâmetros de (2.71).

Olhando tal procedimento, devemos chamar a atenção para o fato de que próximo ao ponto bicrítico, como a transição trigonal-pseudotetragonal está muito próxima à pseudocúbica-trigonal,  $\tilde{r}_0 \geq 0$  gerando, assim, divergências ao tomarmos o traço sobre  $\phi_0$  (ver (2.77)).

Se, no entanto, aplicarmos as transformações do grupo de renormalização a (2.73), geramos  $\tilde{r}_0(\ell_1) = 1$  e eliminamos tais divergências. Podemos, neste caso, tomar o traço sobre  $\phi_0(\ell_1)$  e, por conseguinte, obtemos um hamiltoniano (2.76) de Potts, onde cada um dos parâmetros (2.77) é função de parâmetros renormalizados função de  $\ell_1$  de (2.71). Para obtermos estes parâmetros renormalizados explicitamente, deveríamos gerar e resolver as relações de recorrência a eles associadas. Como isto encontra-se na literatura<sup>32</sup>, não iremos fazê-lo aqui. Usaremos, no entanto, os resultados<sup>32</sup> lá obtidos.

Longe do ponto bicrítico ( $\tilde{r}_0 \gg 0$ ) podemos tomar o tra

ço sobre  $\phi_0$  sem renormalização, ou seja, neste caso,  $\ell_1 = 0$ .

Para estudarmos o comportamento crítico e tricrítico associados à transição trigonal-pseudotetragonal, aplicamos conforme o descrito na seção 3.2, as transformações do grupo de renormalização ao hamiltoniano (2.76) (os parâmetros deste hamiltoniano serão função de  $\ell_1$  próximo do ponto bicrítico). No caso do ponto crítico, como  $\tilde{\phi}_2$  é não crítica, tomamos tais transformações até  $\tilde{r}_2(\ell_c) = 1$ ; no caso do ponto tricrítico, como  $\tilde{\phi}_1$  é não crítica, tomamos tais transformações até  $\tilde{r}_1(\ell_t) = 1$ .

De (3.270) sabemos que a razão entre o campo tricrítico de Potts e o campo crítico de Potts é dada por:

$$\frac{\hat{h}_t}{\hat{h}_c} \approx \frac{81}{16} \left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \left\{ 1 + a(G_u) \left(\frac{w^2}{u^*}\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + b(G'_u) \left(\frac{w^2}{u^*}\right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.271)$$

$$a(G_u) \equiv \frac{87}{120} G_{u_t} f_t^{\frac{2\epsilon}{5}} + \frac{17}{5} G_{u_c} f_c^{2\epsilon/5} \quad (3.272)$$

$$b(G'_u) \equiv \frac{887}{36} G'_{u_t} f_t^{\epsilon/10} + \frac{349}{3} G'_{u_c} f_c^{\epsilon/10} \quad (3.273)$$

onde  $G_{u_c}$ ,  $G'_{u_c}$ ,  $G_{u_t}$  e  $G'_{u_t}$  são os valores de  $G_u$  e  $G'_u$  nos pontos crítico e tricrítico, respectivamente.

De (2.72) e (2.77), obtemos:

$$\frac{\hat{h}_t}{\hat{h}_c} = \frac{\bar{\phi}_{o_t}(l_i) P_{o_t}(l_i) \delta_t(l_i)}{\bar{\phi}_{o_c}(l_i) P_{o_c}(l_i) \delta_c(l_i)} \quad (3.274)$$

Supondo que  $P_{o_t}(l_1) \sim P_{o_c}(l_1)$  e  $\bar{\phi}_{o_t}(l_1) \sim \bar{\phi}_{o_c}(l_1)$  o que em campo médio é verdadeiro (ver (2.83), (2.85), (2.86), (2.88)), obtemos que:

$$\frac{\hat{h}_t}{\hat{h}_c} \cong \frac{\delta_t}{\delta_c} \quad (3.275)$$

tanto para a região bicrítica como fora dela. Substituindo-se (3.275) em (3.271), obtemos que:

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} = - \frac{81}{16} \left( \frac{81}{80} \right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \left\{ 1 + a \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\frac{2\epsilon}{5}} + b \left( \frac{w^2}{u^*} \right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\} \quad (3.276)$$

Observemos detalhadamente esta expressão. À ordem de ze ro loops ( $\epsilon = 0$ ) a razão

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} \cong - \frac{81}{16} \cong - 5,062 \quad (3.277)$$

confere com a de campo médio dada pelas Eqs. (2.84) e (2.87) e é trivialmente universal. Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, em três dimensões ( $\epsilon = 1$ ), correções de flutuações

geração, uma razão dada por<sup>32</sup>

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} = - \frac{81}{16} \left( \frac{81}{80} \right)^{-0.1} \approx -5,056 \quad (3.278)$$

que corrige campo médio em cerca de 0.12%.

Para compatibilizarmos o hamiltoniano de Potts dado por (2.17b) e por (2.18) com o do  $\text{SrTiO}_3$  dado por (2.76) e (2.77) de vemos tomar

$$u_3(\text{Potts}) = u \quad (3.279)$$

e, conseqüentemente

$$u_1'(\text{SrTiO}_3) = u(\text{Potts}) \quad (3.280)$$

$$u_2'(\text{SrTiO}_3) = -\frac{2}{3} g_u'(\text{Potts}) \quad (3.281)$$

onde

$$G_u' \equiv \frac{g_u'}{u} \quad (3.282)$$

ou seja

$$G_{u_c}' = -\frac{3}{2} \frac{u_2'}{u_1'} \quad (3.283)$$

Substituindo-se  $u_1'$  e  $u_2'$  por suas expressões em (2.79)

$$G_u' = \frac{[7u_e' + 5v_0']}{[u_0' + \frac{v_0'}{3}]} \frac{[12b_e' + b_t']}{[K' + \frac{2}{3}b_t'p]} p \delta \quad (3.284)$$

Substituindo-se os parâmetros do  $\text{SrTiO}_3$  por (2.69) e  $p$  e  $\delta$  por seus valores calculados no ponto crítico dados por (2.84) e (2.85), obtemos

$$G_{u_c}' = 0.116 \cdot 10^{-2} \quad (3.285)$$

No ponto tricrítico de campo médio

$$G_{u_t}' = -0.616 \cdot 10^{-2} \quad (3.286)$$

onde substituímos  $p$  e  $\delta$  em (3.284) por seus valores no ponto tricrítico dados por (2.87) e (2.88).

Substituindo-se (3.279), (3.285) e (3.286) em (3.276) obtemos:

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} = - \frac{81}{16} \left(\frac{81}{30}\right)^{-\frac{\epsilon}{10}} \left\{ 1 - 0.21 \cdot 10^{-2} \left(\frac{w^2}{u^*}\right)^{\frac{2\epsilon}{5}} - 1.98 \cdot 10^{-2} \left(\frac{w^2}{u^*}\right)^{\frac{\epsilon}{10}} \right\}$$

(3.287)



Uma questão interessante é vermos qual o peso da correção não universal de flutuações e quebra de simetria sobre o valor da razão  $\delta_t/\delta_c$ . Tal correção corresponde à expressão não universal apresentada entre chaves. Para tanto, iremos tomar um possível valor de  $\frac{w^2}{u^*}$ . De (2.77) e (2.74) sabemos que

$$\frac{w^2}{u^*} = \left\{ -\frac{2\sqrt{2}}{3} v_0'(l_1) \bar{\phi}_0(l_1) \right\}^2 / u^* \quad (3.288)$$

Substituindo-se (2.78) em (3.288), obtemos

$$\frac{w^2}{u^*} = -\frac{2}{9} \frac{v_0'^2(l_1)}{[u_0'(l_1) + \frac{1}{3}v_0'(l_1)]} \frac{r_0(l_1)}{u^*} \quad (3.289)$$

Consideremos a região bicrítica. Nesta região,  $\tilde{r}_0$  é crítico e, conseqüentemente, iteram-se as relações de recorrência até  $\tilde{r}_0(l_1) = 1$ . De (2.74) e (2.78),  $r_0(l_1) = -\frac{1}{2}$ . Reescrevemos, então, (3.289) como:

$$\frac{w^2}{u^*} = \frac{1}{9} \left[ \frac{v_0'(l_1)}{u_0'(l_1)} \right]^2 \frac{[u_0'(l_1)]^2}{[u_0(l_1) + \frac{1}{3}v_0(l_1)] u^*} \quad (3.290)$$

Da solução das relações de recorrência relativas a (2.74)<sup>32</sup>, obtemos que

$$\frac{w^2}{u^*} \cong \frac{1}{9} \left( \frac{v_0'}{u_0'} \right)^2 \frac{u_0(l_1)}{u^*} + O \left( \frac{v_0'}{u_0'} \right)^3 \quad (3.291)$$

De (2.69) temos que  $\frac{v_0'}{u_0'} \sim \frac{1}{6}$  e da solução das relações de recorrência relativas ao hamiltoniano (2.74)<sup>32</sup>, tomamos  $u_0'(l_1) \cong u_H^*$  onde  $u_H^* = \frac{\epsilon}{44 K_4}$  é o ponto fixo do modelo de Heisemberg associada a (2.74).

Assim, dado que  $u^* = u_{XY} = \frac{\epsilon}{40 K_4}$ , obtemos que na região bicrítica,

$$\frac{w^2}{u^*} \cong 0.003 \quad (3.292)$$

Substituindo-se (3.292) e  $\epsilon = 1$  em (3.287), obtemos que a razão

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} \cong -5 \quad (3.293)$$

corrige em cerca de 1% o resultado universal (3.278) obtido na ausência de quebra de simetria quártica<sup>14</sup>.

Em termos experimentais, na verdade, cada uma destas correções é difícil de constatar. É notável, no entanto, ressaltar que a influência de flutuações e quebra de simetria trilinear (1%), desprezada por outros autores<sup>14</sup>, gera correções maiores que as obtidas só por flutuações (0.12%) e por eles considerada.

Neste capítulo, obtivemos correção de flutuações ao comportamento crítico e tricrítico do modelo de Potts de três esta-

dos.

Realizamos este estudo em dois casos distintos: (a) em  $d = 6 - \epsilon$  dimensões onde tanto o acoplamento trilinear como o quártico, são igualmente relevantes. Neste caso, obtivemos que flutuações (mesmo sem quebra de simetria) geram razões de parâmetros críticos e tricríticos não universais. Lembramos que, em campo médio, tais razões são trivialmente adimensionais; (b) em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões, onde  $\frac{w^2}{u} \ll 1$ . Neste caso, a presença de quebra de simetria trilinear e quártica, gera razões não universais.

Obtivemos, ainda, que como consequência da não universalidade da razão de campo magnético crítico e campo magnético tricrítico, a razão entre  $\frac{\delta_t}{\delta_c}$  (lembramos que  $\delta$  é o fator que fornece o quanto a pressão é não diagonal) para o  $\text{SrTiO}_3$  sobre pressão  $\vec{p} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  é não universal.

No próximo capítulo, estudaremos a equação de estado para este modelo.

## 4. EQUAÇÃO DE ESTADO E RAZÃO DE SUSCEPTIBILIDADES CALCULADAS ACIMA E ABAIXO DA TEMPERATURA CRÍTICA

### 4.1 Introdução

No capítulo anterior, vimos que podemos interpretar o modelo de Potts de três estados como um modelo XY sob a ação de uma perturbação trilinear. Na ausência de tal perturbação temos o modelo XY e, na sua presença, o modelo de Potts. A passagem de um comportamento a outro denomina-se usualmente de crossover<sup>33</sup>.

Nas próximas seções iremos estudar este crossover. Obteremos, para isto, o comportamento crítico de quantidades físicas tais como a magnetização, a susceptibilidade e a energia livre, bem como a razão de susceptibilidades calculadas acima e abaixo da temperatura crítica. Além disto, obteremos a influência de flutuações sobre a forma da curva de coexistência entre as fases I e II (a equação de estado  $h_1 \times r$ ). Finalmente, aplicaremos este resultado ao  $\text{SrTiO}_3$ .

### 4.2 Funções Termodinâmicas

A energia livre por grau de liberdade é dada por<sup>34</sup>:

$$F[\beta] = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z[\beta] \quad (4.1)$$

onde  $\beta = + 1/kT$  está contido em  $F$  e onde  $N$  é o número de graus

de liberdade e  $Z[\mathcal{H}]$  a função de partição associada a (3.1). Para o modelo XY simétrico ( $w_1 = w_2$ ;  $u_1 = u_2 = u_3 = u$  e  $r_1 = r_2 = r$ ), funções termodinâmicas tais como a susceptibilidade associada a (2.17b) apresentam divergências infravermelhas em  $r = 0$  como foi mostrado na seção 3.1. Com a finalidade de evitarmos tais divergências, aplicamos as transformações do grupo de renormalização conforme o explicado no capítulo anterior (seção 3.2). As transformações não mudam em nada a função de partição  $Z$ , produzem, no entanto, uma redução do número de graus de liberdade do sistema de  $N$  a  $N' = N e^{-d\ell}$ , de forma que a energia livre por grau de liberdade relaciona-se à energia livre por grau de liberdade renormalizada via:

$$\begin{aligned} F[\mathcal{H}] &= e^{-d\ell} F[\mathcal{H}(\ell)] \\ &= e^{-d\ell} \left\{ F_0[\mathcal{H}(\ell)] + F_1[\mathcal{H}(\ell)] \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde separamos a energia livre por grau de liberdade renormalizada em dois termos: um independente dos campos  $\tilde{\phi}$  e  $\tilde{\psi}$ ,  $F_0[\mathcal{H}(\ell)]$  e um dependente dos campos  $\tilde{\phi}$  e  $\tilde{\psi}$ ,  $F_1[\mathcal{H}(\ell)]$ . O primeiro termo provém de  $\tilde{r}_0(\ell)$  e será dado pela solução da relação de recorrência (3.22)

$$\frac{d\tilde{r}_0}{d\ell} = d\tilde{r}_0 - 1 + \frac{K_H}{2} \ln \left[ (1 + \tilde{r}_1(\ell))(1 + \tilde{r}_2(\ell)) \right] \quad (4.3)$$

cuja solução em  $d = 4 - \varepsilon$  dimensões é dada por:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_c(\ell) e^{-d\ell} &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} e^{-d\hat{\ell}} \left\{ K_4 \ln [1 + \tilde{r}_1(\hat{\ell})][1 + \tilde{r}_2(\hat{\ell})] - 2 \right\} d\hat{\ell} + \tilde{r}_0 \\
&= \frac{K_4}{2} \int_0^{\ell} e^{-d\hat{\ell}} \left\{ \ln [1 + \tilde{r}_1(\hat{\ell})][1 + \tilde{r}_2(\hat{\ell})] - 1 \right\} d\hat{\ell} + \frac{1}{2} r_1 M^2 + w_1 M^3 + u_1 M^4 - h_1 M
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

onde usamos  $\tilde{r}_0$  dado por (3.1b) e tomamos  $r_0 = \int_0^{\ell} e^{-d\hat{\ell}} [1 - K_4]$ . Lembramos que  $r_0$  é uma constante arbitrária e mudar seu valor não altera propriedades físicas associadas à energia livre.

Podemos resolver as integrais em (4.4). Tomemos a primeira e apliquemos uma solução por partes:

$$\begin{aligned}
\frac{K_4}{2} \int_0^{\ell} e^{-d\hat{\ell}} \ln [1 + \tilde{r}_1(\hat{\ell})] d\hat{\ell} &= \frac{K_4}{4d} (e^{-d\ell} - 1) + \\
&+ \frac{K_4}{d} \int_0^{\ell} e^{-d\hat{\ell}} \left[ \tilde{r}_1(\hat{\ell}) + \frac{\tilde{r}_1^3(\hat{\ell})}{1 + \tilde{r}_1(\hat{\ell})} - \tilde{r}_1^2(\hat{\ell}) \right] d\hat{\ell} - \\
&- \frac{K_4}{2d} \left\{ e^{-d\ell} \ln [1 + \tilde{r}_1(\ell)] - \ln (1 + \tilde{r}_1) \right\} \\
&= - \frac{K_4}{2d} \left\{ \frac{1}{2} - \tilde{r}_1 + \tilde{r}_1^2 \ln (1 + \tilde{r}_1) - \ln (1 + \tilde{r}_1) - \right. \\
&- e^{-d\ell} \left[ \frac{1}{2} - \tilde{r}_1(\ell) + \tilde{r}_1^2(\ell) \ln (1 + \tilde{r}_1(\ell)) - \ln (1 + \tilde{r}_1(\ell)) \right] - \\
&\left. - 2 \int_0^{\ell} e^{-d\hat{\ell}} \tilde{r}_1^2(\hat{\ell}) d\hat{\ell} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

onde usamos que  $\frac{d\tilde{r}_1}{d} = 2\tilde{r}_1$  à ordem de zero loops (ver (3.22)).

Para a segunda integral, obtemos uma expressão análoga. Substituindo-se estas duas integrais em (4.4) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_0(\ell) e^{-d\ell} = & -\frac{K_4}{2d} \left\{ 1 - \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + \tilde{r}_1^2 \ln(1+\tilde{r}_1) + \tilde{r}_2^2 \ln(1+\tilde{r}_2) + \right. \\
 & - \ln(1+\tilde{r}_1) - \ln(1+\tilde{r}_2) - e^{-d\ell} \left[ 1 - \tilde{r}_1(\ell) - \tilde{r}_2(\ell) + \right. \\
 & + \tilde{r}_1^2(\ell) \ln(1+\tilde{r}_1(\ell)) + \tilde{r}_2^2(\ell) \ln(1+\tilde{r}_1(\ell)) - \\
 & \left. \left. - \ln(1+\tilde{r}_1(\ell)) - \ln(1+\tilde{r}_2(\ell)) \right] - \right. \\
 & \left. - 2 \int_0^\ell e^{-d\hat{\ell}} \left[ \tilde{r}_1^2(\ell) + \tilde{r}_2^2(\ell) \right] d\hat{\ell} \right\} + \frac{1}{2} r_1 M^2 + w_1 M^3 + u_1 M^4 - h_1 M
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Olhemos com atenção a integral

$$I = -\frac{K_4}{d} \int_0^\ell e^{-d\hat{\ell}} \left[ \tilde{r}_1^2(\ell) + \tilde{r}_2^2(\ell) \right] d\hat{\ell} \tag{4.7}$$

tomemos  $\tilde{r}_1(\ell) = T_1(\ell) + 0(\varepsilon)$  e  $\tilde{r}_2(\ell) = T_2 + 0(\varepsilon)$ . Substituindo-se  $T_1(\ell)$  e  $T_2(\ell)$  por (3.53) obtemos:

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= - \frac{k_4}{d} \int_0^p e^{-d\hat{\ell}} \left[ \bar{t}_1^2(\hat{\ell}) + \bar{t}_2^2(\hat{\ell}) \right] d\hat{\ell} \\
&= - \frac{k_4}{d} \int_0^p e^{-d\hat{\ell}} \left\{ t_1^2(\hat{\ell}) + t_2^2(\hat{\ell}) + 2 t_1(\hat{\ell}) \left[ 6 w_1(\hat{\ell}) M(\hat{\ell}) + 12 u_1(\hat{\ell}) M^2(\hat{\ell}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2 t_2(\hat{\ell}) \left[ -6 w_2(\hat{\ell}) M(\hat{\ell}) + 4 u_2(\hat{\ell}) M^2(\hat{\ell}) \right] + \left[ 6 w_1(\hat{\ell}) M(\hat{\ell}) + 12 u_1(\hat{\ell}) M^2(\hat{\ell}) \right]^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -6 w_2(\hat{\ell}) M(\hat{\ell}) + 4 u_2(\hat{\ell}) M^2(\hat{\ell}) \right]^2 \right\} d\hat{\ell} \\
&= - \frac{k_4}{d} \int_0^p e^{-d\hat{\ell}} \left[ t_1^2(\hat{\ell}) + t_2^2(\hat{\ell}) \right] + \int_0^p k_4 \left\{ M(\hat{\ell}) \left[ \frac{3}{2} w_1(\hat{\ell}) t_1(\hat{\ell}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2} w_2(\hat{\ell}) t_2(\hat{\ell}) \right] + \frac{1}{2} M^2(\hat{\ell}) \left[ -18 (w_1^2(\hat{\ell}) + w_2^2(\hat{\ell})) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 12 u_1(\hat{\ell}) t_1(\hat{\ell}) - 4 u_2(\hat{\ell}) t_2(\hat{\ell}) \right] + M^3(\hat{\ell}) \left[ -72 w_1(\hat{\ell}) u_1(\hat{\ell}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 24 u_2(\hat{\ell}) w_2(\hat{\ell}) \right] + M^4(\hat{\ell}) \left[ -36 u_1^2(\hat{\ell}) - 4 u_2^2(\hat{\ell}) \right] \right\} e^{-d\hat{\ell}}
\end{aligned}$$



Os termos entre colchetes nada mais são que as relações de recorrência para

$$\frac{d}{d\hat{\ell}} \left[ e^{-(3-\frac{\epsilon}{2})\hat{\ell}} h(\hat{\ell}) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{\ell}} \left[ e^{-2\hat{\ell}} t_1(\hat{\ell}) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{\ell}} \left[ e^{-(1+\frac{\epsilon}{2})\hat{\ell}} w_1(\hat{\ell}) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{\ell}} \left[ e^{-\epsilon\hat{\ell}} u_1(\hat{\ell}) \right]$$

(4.9)

respectivamente, como podemos verificar das expressões (3.173) a (3.178). Substituímos (4.9) em (4.8) e calculamos as integrais, obtendo:

$$\begin{aligned}
I = & -\frac{k_4}{d} \int_0^l e^{-d\hat{e}} [t_1^2(\hat{e}) + t_2^2(\hat{e})] d\hat{e} + \int_0^l \left\{ - \left[ h(\hat{e}) \frac{dM(\hat{e})}{d\hat{e}} + \right. \right. \\
& + M(\hat{e}) \frac{dh(\hat{e})}{d\hat{e}} \left. \right] + \frac{1}{2} M(\hat{e}) \left[ t_1(\hat{e}) \frac{dM(\hat{e})}{d\hat{e}} + M(\hat{e}) \frac{dt_1(\hat{e})}{d\hat{e}} \right] + \\
& + M^2(\hat{e}) \left[ w_1(\hat{e}) \frac{dM(\hat{e})}{d\hat{e}} + M(\hat{e}) \frac{dw_1(\hat{e})}{d\hat{e}} \right] + M^3(\hat{e}) \left[ u_1(\hat{e}) \frac{dM(\hat{e})}{d\hat{e}} + \right. \\
& \left. + M(\hat{e}) \frac{du_1(\hat{e})}{d\hat{e}} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{k_4}{d} \int_0^l e^{-d\hat{e}} [t_1^2(\hat{e}) + t_2^2(\hat{e})] d\hat{e} + e^{-d\hat{e}} F[M(\hat{e})] - F[M]$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{k_4}{d} \int_0^l e^{-d\hat{e}} \left\{ \left[ t(\hat{e}) + g(\hat{e}) + \frac{9}{2} \frac{w(\hat{e})}{u(\hat{e})} g_w(\hat{e}) + \frac{3}{10} \frac{t(\hat{e})}{u(\hat{e})} g_u(\hat{e}) - \right. \right. \\
& - \frac{9}{2} \frac{w^2(\hat{e})}{u(\hat{e})} \left. \right]^2 - \left[ t(\hat{e}) - g(\hat{e}) - \frac{9}{2} \frac{w(\hat{e})}{u(\hat{e})} g_w(\hat{e}) - 9 \frac{w^2(\hat{e})}{u^2(\hat{e})} g'_u(\hat{e}) - \right. \\
& \left. - \frac{3}{10} \frac{t(\hat{e})}{u(\hat{e})} g_u(\hat{e}) - \frac{9}{2} \frac{w^2(\hat{e})}{u^2(\hat{e})} \right]^2 \left. \right\} + e^{-d\hat{e}} F[M(\hat{e})] - F[M]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{k_4}{d} \int_0^l e^{-d\hat{e}} \left[ 2t^2(\hat{e}) - 9 \frac{w^2(\hat{e})}{u(\hat{e})} t(\hat{e}) \right] d\hat{e} + e^{-d\hat{e}} F[M(\hat{e})] - F[M]$$

$$\begin{aligned}
I = & - \frac{K_4}{4d} t(\ell) \left[ t(\ell) - \frac{q}{2} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \right] e^{-d\ell} + F[M(\ell)] + \\
& + \frac{K_4}{4d} t \left[ t - \frac{q}{2} \frac{w^2}{u} \right] - F[M]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde usamos as definições (3.279) e (3.280), substituímos o comportamento com  $\ell$  dos parâmetros pelas expressões de (3.198) a (3.208) e integramos. A expressão

$$F[M(\ell)] = - h(\ell) M(\ell) + \frac{1}{2} t_1(\ell) M^2(\ell) + w_1(\ell) M^3(\ell) + u_1(\ell) M^4(\ell) \tag{4.11}$$

nada mais é que a energia livre de Landau para o modelo de Potts de três estados escrita em função dos novos parâmetros renormalizados. Substituindo-se (4.10) em (4.6), obtemos que a parte de energia livre independente dos campos será dada por:

$$F_0[\ell] = \tilde{r}_0(\ell)$$

$$\begin{aligned}
F_0[\ell] e^{-d\ell} = & - \frac{K_4}{2d} \left\{ 1 - \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + \tilde{r}_1^2 \ln(1 + \tilde{r}_1) + \tilde{r}_2^2 \ln(1 + \tilde{r}_2) - \right. \\
& - \ln(1 + \tilde{r}_1) - \ln(1 + \tilde{r}_2) - e^{-d\ell} \left[ 1 - \tilde{r}_1(\ell) - \tilde{r}_2(\ell) + \tilde{r}_1^2(\ell) \ln(1 + \tilde{r}_1(\ell)) \right. \\
& \left. \left. + \tilde{r}_2^2(\ell) \ln(1 + \tilde{r}_2(\ell)) - \ln(1 + \tilde{r}_1(\ell)) - \ln(1 + \tilde{r}_2(\ell)) \right] + 2 \int_0^\ell e^{-d\hat{\ell}} \left[ t_1^2(\hat{\ell}) + t_2^2(\hat{\ell}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde tomamos  $r_1 = t_1 + O(\epsilon)$  e  $h = h_1 + O(\epsilon)$ ,

A parte dependente dos campos na Eq. (4.2) sairá do logaritmo da parte dependente dos campos da função de partição (3.19), ou seja, de

$$\begin{aligned}
 F_1 [\mathcal{H}(\ell)] = - \ell n \int d\phi d\psi \exp - \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_1(\ell) \phi^2 + (\nabla\phi)^2 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \tilde{r}_2(\ell) \psi^2 + (\nabla\psi)^2 \right] + \tilde{w}_1(\ell) \phi^3 - 3 \tilde{w}_2(\ell) \phi \psi^2 + \right. \\
 \left. + u_1(\ell) \phi^4 + 2 u_2(\ell) \phi^2 \psi^2 + u_3(\ell) \psi^4 - \tilde{h}(\ell) \phi \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Expandimos os termos não quadráticos nos campos da exponencial e obtemos:

$$F_1 [\mathcal{H}(\ell)] = - \ell n \int d\phi d\psi \left\{ 1 - A + \frac{A^2}{2!} \dots \right\} e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)}$$

$$\begin{aligned}
 A \equiv \int d^d x \left\{ \tilde{w}_1(\ell) \phi^3 - 3 \tilde{w}_2(\ell) \phi \psi^2 + u_1(\ell) \phi^4 + \right. \\
 \left. + 2 u_2(\ell) \phi^2 \psi^2 + u_3(\ell) \psi^4 - \tilde{h}(\ell) \phi \right\}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\ell) \equiv \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \left[ \tilde{r}_1 \phi^2 + \tilde{r}_2 \psi^2 + (\nabla\phi)^2 + (\nabla\psi)^2 \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
F_1[\mathcal{H}(\ell)] &= \frac{1}{2} \int \ln[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)] d^d q + \frac{1}{2} \int \ln[q^2 + \tilde{r}_2(\ell)] \\
&\quad - \ln \left\{ 1 - \tilde{w}_1(\ell) \frac{\int \phi^3 e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)} d\phi}{\int e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)} d\phi} + \right. \\
&\quad + 3 \tilde{w}_2(\ell) \frac{\int \phi \psi^2 e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)} d\phi d\psi}{\int e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)} d\phi d\psi} + \\
&\quad \left. + u_1(\ell) \frac{\int \phi^4 e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)} d\phi}{\int e^{-\hat{\mathcal{H}}(\ell)} d\phi d\psi} + \dots \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1[\mathcal{H}(\ell)] &= \frac{1}{2} \int \ln[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)] d^d q + \frac{1}{2} \int \ln[q^2 + \tilde{r}_2(\ell)] d^d q + \\
&\quad + 3 u_1(\ell) \left[ \int \frac{d^d q}{q^2 + \tilde{r}_1(\ell)} \right]^2 + \dots
\end{aligned}$$

(4.14)

Estamos interessados em obter o comportamento de funções termodinâmicas na região crítica. Nesta região, conforme vimos nas seções 3.3 e 3.4, a componente  $\tilde{\psi}$  é não crítica, logo  $\tilde{r}_2(\ell) \sim 0(1)$ . Já a componente  $\tilde{\phi}$  ordena-se e  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$ . A energia livre não deve ser singular nesta região, mas derivadas dela o serão. Neste sentido, separaremos a energia livre em dois

termos: um regular ao  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$ , ou seja, um termo cuja derivada de segunda ordem com relação a  $\tilde{r}_1(\ell)$  não seja divergente, e um termo singular, ou seja, um termo cuja derivada de segunda ordem com relação a  $\tilde{r}_1(\ell)$  seja divergente ao  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$ .

Neste sentido, reescrevemos (4.14), à ordem de um loop, como:

$$F_1(\ell) = F_{1r}(\ell) + F_{1s}(\ell) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} F_{1r}(\ell) = & \frac{K_4}{8} \left\{ -1 + \ln [1 + \tilde{r}_1(\ell)] + \tilde{r}_1(\ell) - \tilde{r}_1^2(\ell) \ln [1 + \tilde{r}_1(\ell)] + \right. \\ & + \tilde{r}_2(\ell) + \ln [1 + \tilde{r}_2(\ell)] - \tilde{r}_2^2(\ell) \ln [1 + \tilde{r}_2(\ell)] + \\ & \left. + \tilde{r}_2^2(\ell) \ln \tilde{r}_2(\ell) \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$F_{1s}(\ell) = \frac{K_4}{8} \tilde{r}_1^2(\ell) \ln \tilde{r}_1(\ell) \quad (4.17)$$

Podemos observar que derivadas de  $F_{1r}$  dado por (4.16) com relação a  $\tilde{r}_1(\ell)$  são regulares em  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$ , enquanto que já a derivada segunda com relação a  $\tilde{r}_1(\ell)$  de  $F_{1s}$  dado por (4.17) diverge logaritmicamente ao  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$ . Termos de ordem superior (dois loops, três loops, etc ...) que são função de  $\tilde{r}_1(\ell)$  podem apresentar igualmente derivadas segundas em  $\tilde{r}_1(\ell)$  divergências. Por este motivo, faz-se necessário ressomarem-se estes termos divergentes em  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$  a toda ordem no número de loops.

Para separarmos estes termos, olharemos os termos divergentes da derivada segunda de  $F_1(\ell)$  em relação a  $\tilde{r}_1(\ell)$ , ou seja, derivamos (4.14) da forma:

$$\frac{d^2 F_1(\ell)}{d\tilde{r}_1(\ell)^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)]^2} + 6 u_1(\ell) \left[ \int \frac{d^d q}{[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)]^2} \right]^2 + \dots$$

(4.18)

Tomamos  $d = 4 - \epsilon$  dimensões e reescrevemos a integral acima como:

$$k_4 \int_0^1 \frac{q^{3-\epsilon} dq}{[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)]^2} = \frac{k_4}{2} \int_{\tilde{r}_1(\ell)}^{1+\tilde{r}_1(\ell)} \frac{[y - \tilde{r}_1(\ell)]^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{y^2} dy$$

$$y \equiv q^2 + \tilde{r}_1(\ell)$$

(4.19)

No limite de  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$ , a expressão

$$\int \frac{dq}{[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)]^2} \stackrel{112}{=} \frac{k_4}{2} \int_{\tilde{r}_1(\ell)}^{1+\tilde{r}_1(\ell)} y^{-1+\frac{\epsilon}{2}} dy - \tilde{r}_1(\ell) \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_{\tilde{r}_1(\ell)}^{1+\tilde{r}_1(\ell)} y^{-2+\frac{\epsilon}{2}} dy$$

$$= \frac{k_4}{\epsilon} \left[ \tilde{r}_1(\ell)^{-\frac{\epsilon}{2}} - [1 + \tilde{r}_1(\ell)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + \frac{k_4}{2} \frac{1}{1 + \tilde{r}_1(\ell)} \tag{4.20}$$

terá um termo regular e um singular. Como queremos calcular somente a parte singular de (4.18), desprezaremos os termos regulares de (4.20). Substituindo-se a parte singular de (4.20) em (4.18), obtemos

$$\left[ \frac{d^2 F_1(\ell)}{d \tilde{r}_1(\ell)} \right]_S = - \frac{k_4}{2\epsilon} \tilde{r}_1(\ell)^{-\epsilon/2} + 6 u_1(\ell) \frac{k_4^2}{\epsilon} \tilde{r}_1(\ell)^{-\epsilon} + \dots \tag{4.21}$$

Somando-se e subtraindo-se à (4.21) um termo conveniente, obtemos um polinômio dado por:

$$\left[ \frac{d^2 F_1(\ell)}{d \tilde{r}_1(\ell)} \right]_S = \frac{-1}{24 u_1(\ell)} \left\{ \left[ 1 + \frac{36 u_1(\ell) k_4}{\epsilon} \left( \tilde{r}_1(\ell)^{-\epsilon/2} - 1 \right) \right]^{1/3} - 1 \right\} \tag{4.22}$$

Assim sendo, à ordem mais baixa em  $\epsilon$ :



$$\hat{F}_{s_3}(\ell) \approx - \frac{\tilde{\gamma}_1^2(\ell)}{48 \hat{u}_1(\ell)} \left\{ \left[ 1 + \frac{36 u_1(\ell) K_4}{\epsilon} \left( \tilde{\gamma}_1(\ell)^{-\frac{\epsilon}{2}} - 1 \right) \right]^{\frac{4}{3}} - 1 \right\} \quad (4.23)$$

Juntando-se (4.23) e (4.16) à (4.12), reescrevemos a energia livre (4.2) da forma:

$$F \equiv f_r + f_s \quad (4.24)$$

$$f_s = e^{-d\ell} \left\{ - \frac{t(\ell)}{16 u_1(\ell)} \left[ t(\ell) - \frac{q}{2} \frac{w^2(\ell)}{u_1(\ell)} \right] + \frac{1}{2} t_1(\ell) M^2(\ell) + w_1(\ell) M^3(\ell) + u_1(\ell) M^4(\ell) - R(\ell) M(\ell) - \frac{\tilde{\gamma}_1^2(\ell)}{48 u_1(\ell)} \left[ 1 + \frac{36 u_1(\ell) K_4}{\epsilon} \left( \tilde{\gamma}_1(\ell)^{-\frac{\epsilon}{2}} - 1 \right) \right]^{\frac{4}{3}} + \frac{\tilde{\gamma}_1^2(\ell)}{48 u_1(\ell)} + \frac{K_4}{2} T_2^2(\ell) \ln T_2(\ell) \right\} \quad (4.25)$$

onde  $f_s$  contém a singularidade associada à energia livre e onde

$$f_r = \frac{k_4}{8} \left\{ -1 + \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 + \ln [1 + \tilde{r}_1] + \ln [1 + \tilde{r}_2] - \tilde{r}_1^2 \ln [1 + \tilde{r}_1] - \right. \\ \left. - \tilde{r}_2^2 \ln [1 + \tilde{r}_2] + \frac{t}{2u} \left[ t - \frac{q}{2} \frac{w^2}{u} \right] \right\} \quad (4.26)$$

e onde  $u_I \equiv \frac{\epsilon}{36 K_4}$ . Como veremos mais tarde,  $\ell$  contém as singularidades relacionadas ao modelo XY. Neste sentido,  $f_r$  é regular já que independe de  $\ell$ , enquanto que  $f_s$  é a parte da energia livre geradora de singularidades. Como vemos, há duas singularidades: uma relacionada ao ponto crítico de Potts que ocorre ao  $\tilde{r}_1(\ell) \rightarrow 0$  e que está em  $F_1$ ; outra, relacionada ao comportamento crítico XY que ocorre ao  $t \rightarrow 0$  (dado  $w \rightarrow 0$ ).

Por conveniência, reescreveremos a magnetização como:

$$M(\ell) = - \frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} + m(\ell) \quad (4.27)$$

onde  $M(\ell) = -w_1(\ell)/4u_1(\ell)$  é a magnetização crítica (ver (3.226)). Substituindo-se (4.27) em (4.25), obteremos que:

$$f_s = e^{-d\ell} \left\{ - \frac{t(\ell)}{16u(\ell)} \left[ t(\ell) - \frac{q}{2} \frac{w^2(\ell)}{u(\ell)} \right] + \frac{h(\ell) w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} + \frac{t_1(\ell) w_1^2(\ell)}{32u_1(\ell)} - \right. \\ \left. - \frac{T_1^2(\ell)}{48u_1(\ell)} \left\{ \left[ 1 + \frac{u_1(\ell)}{u_1} \left( T_1(\ell)^{-\epsilon/2} - 1 \right) \right]^{4/3} - 1 \right\} + \frac{1}{2} t_{eff} m^2(\ell) + \right.$$

$$+ u_1(\ell) m^4(\ell) - h_{\text{eff}} m(\ell) \left. \vphantom{+ u_1(\ell) m^4(\ell) - h_{\text{eff}} m(\ell)} \right\} \quad (4.28)$$

onde

$$t_{\text{eff}} = t_1(\ell) - \frac{3}{4} \frac{w_1^3(\ell)}{u_1(\ell)}$$

$$h_{\text{eff}} = R(\ell) + \frac{t_1(\ell) w_1(\ell)}{4 u_1(\ell)} - \frac{w_1^3(\ell)}{8 u_1^2(\ell)}$$

$$T_1(\ell) = t_{\text{eff}} + 4 u_1(\ell) m^2(\ell) \quad (4.29)$$

Cabe notar que o último termo de (4.28) é a energia livre de Landau para um sistema Ising de temperatura reduzida  $t_{\text{eff}}$ , campo externo  $h_{\text{eff}}$  e magnetização  $m(\ell)$ <sup>10</sup>.  $t_{\text{eff}}$  fornece, como vimos em (3.224), a diferença entre a temperatura reduzida XY  $t(\ell)$  e o seu valor no ponto crítico de Potts.

De (3.242), sabemos que:

$$R(\ell) = t_1(\ell) M(\ell) + 3 w_1(\ell) M^2(\ell) + 4 u_1(\ell) M^3(\ell) + \\ + \frac{3}{2} K_4 \tilde{w}_1(\ell) T_1(\ell) \ln T_1(\ell) - \frac{3}{2} K_4 \tilde{w}_2(\ell) T_2(\ell) \ln T_2(\ell) \quad (4.30)$$

Substituindo-se (4.27) na expressão acima, teremos que:

$$h_{\text{eff}} = t_{\text{eff}} m(\ell) + 4 u_1(\ell) m^3(\ell) + 6 K_4 u_1(\ell) m(\ell) T_1(\ell) + \dots + T_n(\ell) \quad (4.31)$$

onde usamos a condição de estar fora da região crítica de  $\psi$ , ou seja, usamos que  $T_2(\ell) = 1$ . Esta expressão é, na verdade, o mínimo da energia livre  $F$  com relação a variações de  $m(\ell)$  e é a expressão para a equação de estado de um sistema Ising<sup>10</sup>.

A susceptibilidade longitudinal é dada pela função de correlação dos campos  $\langle \tilde{\phi} \tilde{\phi} \rangle$  a momento nulo, ou seja, para o hamiltoniano não renormalizado é dada por:

$$\chi(\mathcal{H}) = \langle \tilde{\phi} \tilde{\phi} \rangle \quad (4.32)$$

Como vimos na seção 3.1, para evitarmos divergências infravermelhas ao  $r \rightarrow 0$ , aplicamos ao problema as transformações do grupo de renormalização.

Ao aplicarmos as transformações do grupo de renormalização, redefinimos os campos da forma  $\tilde{\phi}(\ell) = e^{-\ell} \tilde{\phi}$ . Tendo isto em mente, podemos associar a susceptibilidade renormalizada  $\chi(\mathcal{H}(\ell))$  à susceptibilidade física  $\chi$  (não renormalizada) dada por (4.32) via<sup>10</sup>:

$$\chi(\mathcal{H}) = e^{2\ell} \chi(\mathcal{H}(\ell)) \quad (4.33)$$

ou seja, usando o hamiltoniano (3.20), calculamos  $\chi(\mathcal{K}(\ell))$  e obtemos

$$\begin{aligned} \chi^{-1} = e^{-2\ell} & \left\{ \tilde{r}_1(\ell) + 12 K_4 u_1(\ell) \int_0^1 \frac{q^3 dq}{[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)]} - \right. \\ & - 4 K_4 u_2(\ell) \int_0^1 \frac{q^3 dq}{[q^2 + \tilde{r}_2(\ell)]} - 18 K_4 \tilde{w}_1^2(\ell) \int_0^1 \frac{q^3 dq}{[q^2 + \tilde{r}_1(\ell)]^2} - \\ & \left. - 18 K_4 \tilde{w}_2^2(\ell) \int_0^1 \frac{q^3 dq}{[q^2 + \tilde{r}_2(\ell)]} \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Substituindo-se (3.35) e (3.162) bem como resolvendo-se as integrais, obtemos que em  $T_2(\ell) = 1$ , a expressão anterior assume a forma:

$$\begin{aligned} \chi^{-1} = e^{-2\ell} & \left\{ \bar{T}_1(\ell) + 6 K_4 u_1(\ell) T_1(\ell) \ln \bar{T}_1(\ell) + \right. \\ & \left. + 9 K_4 \tilde{w}_1^2(\ell) [1 + \ln \bar{T}_1(\ell)] \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Obtivemos até agora expressões para a energia livre, para a equação de estado e para a susceptibilidade como função de  $\ell$ . A equação  $T_2(\ell) = 1$  dada por (3.227) tem como solução a expressão:

$$e^l = w^{-4/\phi_w} K \left[ \frac{ut}{w/\phi_w}, \frac{ug}{w\phi/\phi_w}, \frac{g_w}{w\phi_w'/\phi_w}, \frac{g_u}{w\phi_u/\phi_w}, \frac{g_u'}{uw\phi_u'/\phi_w} \right] \quad (4.36)$$

K é obtido substituindo-se (4.36) na dependência em  $l$  de (3.227). Esta dependência é dada pelas expressões de (3.198) até (3.208). Desta forma, K será dado por:

$$K [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \sqrt{u} \left\{ x_1 \left[ 1 - \frac{3}{10} x_4 \right] + \frac{11}{8} x_4 - \frac{43}{12} x_5 - \left( \frac{11}{4} + x_5 \right) \right\}^{-1/2} \quad (4.37)$$

onde definimos

$$x_1 = \frac{ut}{w/\phi_w}$$

$$x_2 = \frac{ug}{w\phi/\phi_w}$$

$$x_3 = \frac{g_w}{w\phi_w'/\phi_w}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_4 &= \frac{g_u}{u w \phi_u/\phi_w} = \frac{G_u}{w \phi_u/\phi_w} \\
 \chi_5 &= \frac{g'_u}{u w \phi'_u/\phi_w} = \frac{G'_u}{w \phi'_u/\phi_w}
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

e obtemos

$$\nu = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon}{5} \right)
 \tag{4.39}$$

onde este é o valor do expoente do comprimento de correlação para o modelo XY<sup>10</sup>. Desta forma, podemos ver diretamente de (4.36) que ao  $w^{1/\phi_w} \rightarrow 0$ ,  $\epsilon^\ell$  comporta-se como o comprimento de correlação do modelo XY. Além disso, obtemos:

$$\phi = 1 + \frac{\epsilon}{10}
 \tag{4.40}$$

$$\phi_w = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon}{10} \right)
 \tag{4.41}$$

que são os expoentes associados à quebra de simetria quadrática e ao termo trilinear obtidos por Blankschtein et al.<sup>14</sup> e que fornecem o crossover do comportamento XY simétrico ao XY com quebra de simetria e do XY ao Potts, respectivamente. Igualmente, obtemos:

$$\phi_w' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{5} \epsilon \right) \quad (4.42)$$

$$\phi_u = -\frac{2}{5} \epsilon \quad (4.43)$$

$$\phi_u' = -\frac{\epsilon}{10} \quad (4.44)$$

que são os expoentes associados à quebra de simetria trilinear e quártica. Estes expoentes nunca foram antes obtidos<sup>18</sup>.

De (4.29) sabemos que:

$$t_{\text{eff}} = t_1(\ell) - \frac{3}{4} \frac{w_1^2(\ell)}{u_1(\rho)} \quad (4.45)$$

esta expressão pode ser reescrita como (3.228). Cada parâmetro de (3.228) apresenta uma dependência em  $e^\ell$  dada pelas expressões de (3.198) até (3.208). Substituindo-se em (4.45) este comportamento em  $e^\ell$  por (4.36), obtemos que:

$$t_{\text{eff}} = B K^2 [\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5] [X - x_c] [1 + A\epsilon] \quad (4.46)$$

$$\beta \equiv u_{xy}^{-1} \left[ 1 + \frac{3}{10} \chi_4 - \frac{2}{5} \epsilon \left( 1 + \frac{3}{10} \chi_4 \right) \ln k \right] \quad (4.47)$$



$$A \equiv -\frac{1}{5} \left[ \ln \hat{k} + \frac{x_c - \frac{21}{5}x_4 + \frac{17}{4}x_5}{\hat{k}} \right] \quad (4.48)$$

$$x_c \equiv \left[ -x_2 + \frac{21}{4} + \frac{21}{20}x_4 - \frac{17}{4}x_5 \right] u_{xy}^{-1} \quad (4.49)$$

$$X \equiv x_1 \left[ 1 - \frac{\epsilon}{5} \ln \hat{k} \right] u_{xy}^{-1} \quad (4.50)$$

$$\hat{K} \equiv K [x_1 = x_c]$$

$$= \left[ -2x_2 + \frac{5}{2} + \frac{17}{20}x_4 - \frac{47}{6}x_5 \right] \left[ 1 + \frac{3}{10}x_4 \right] u_{xy}^{-1} \quad (4.51)$$

A condição de se estar no ponto crítico é satisfeita por  $t_{\text{eff}} = 0$ , ou seja, por  $X = x_c$ .

Sob a condição  $T_2(\ell) = 1$  e tomando  $h_{\text{eff}} = 0$ , a expressão (4.28), mínimo da energia livre, tem como solução:

$$m(\ell) = 0 \quad (4.52)$$

$$m(\ell) = \left\{ -\frac{t_{\text{eff}}}{4u_1(\ell)} \left[ 1 - 12K_4 u_1(\ell) \ln (-2t_{\text{eff}}) \right] \right\}^{1/2} \quad (4.53)$$

$$m(\ell) = \left\{ -\frac{t_{\text{eff}}}{4u_1(\ell)} \left[ 1 - 12K_4 u_1(\ell) \ln (-2t_{\text{eff}}) \right] \right\}^{1/2} \quad (4.54)$$

onde estas soluções foram obtidas por iteração no número de loops.

A primeira solução é o mínimo da energia livre (4.28) para  $t_{\text{eff}} > 0$  e  $h_{\text{eff}} = 0$ , ou seja, para região acima do ponto crítico na continuação analítica da curva de coexistência entre as fases I e II. A segunda e a terceira solução, são mínimos da energia livre (4.28) para  $t_{\text{eff}} > 0$  e  $h_{\text{eff}} = 0$ , ou seja, para a região da curva de coexistência entre as fases I  $\left(M(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} + m(\ell)\right)$  e a fase II  $\left(M(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} - m(\ell)\right)$ . Assim,  $2m(\ell) \neq 0$  é o salto de magnetização entre as fases I e II (Fig. 4.1).

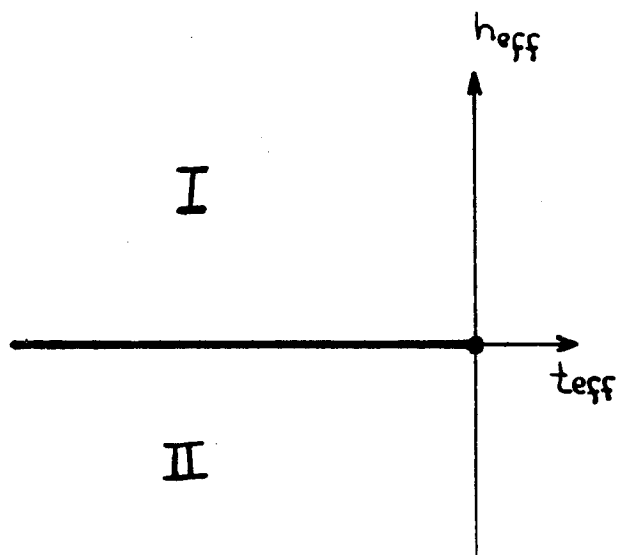


Figura 4.1 - Diagrama  $h_{\text{eff}} - t_{\text{eff}}$ : A fase I apresenta magnetização  $M_I(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} + m(\ell)$  e a fase II  $M_{II}(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} - m(\ell)$ . Estas duas fases estão separadas por uma linha de primeira ordem  $h_{\text{eff}} = 0$  que em  $t_{\text{eff}} = 0$  acaba em um ponto crítico. Para  $t_{\text{eff}} > 0$  o sistema apresenta magnetização  $M(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)}$ .

De (3.201) sabemos que  $m(\ell) = m e^{(1-\epsilon/2)\ell}$  de sorte que tanto (4.53) como (4.54) são reescritos como:

$$m = \pm e^{(-1 + \frac{\epsilon}{2})\ell} \frac{|t_{\text{eff}}|^{1 - \frac{\epsilon}{6}} R^{1/3}}{2\sqrt{u_1}} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{u_1 R} \ln 2 \right\} \quad (4.55)$$

onde

$$R = \left\{ \frac{u_1}{u_I} + t_{\text{eff}}^{-\epsilon/2} \left( \frac{u_1}{u_I} - 1 \right) \right\} \\ = R_x \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{u_1}{u_I} - 1 \right) \frac{\ln \hat{k}^2 B}{R_x} \right\} \quad (4.56)$$

$$R_x \equiv \frac{u_1}{u_I} + (X - x_c)^{-\epsilon/2} \left( \frac{u_1}{u_I} - 1 \right) \quad (4.57)$$

onde substituímos  $t_{\text{eff}}$  por (4.46) em R e onde  $u_1 = \epsilon/36 K_4$ .

Substituindo-se  $t_{\text{eff}}$  por (4.46) com R dado por (4.56) e  $e^\ell$  por (4.36) obtemos:

$$m = \pm \left[ w^{1/\phi_w} \right]^{\beta_y} \frac{[X - x_c]^{\beta_I}}{2\sqrt{u_1}} R_x^{1/3} B^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{2} A + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \ln \hat{k} - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{u_1 R_x} \ln (2 \hat{k}^2 B) \right\} \quad (4.58)$$

onde

$$\beta_{XY} = \frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{20} \quad (4.59)$$

$$\beta_I = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6} \quad (4.60)$$

Observemos, cuidadosamente, esta expressão. Lembremos que  $w$  é o parâmetro de "crossover" entre o modelo XY e o modelo de Potts. Para  $w \rightarrow 0$ , a temperatura reduzida  $t = w^{1/\phi_w}$  anula-se e  $m$  irá a zero com expoente  $\beta = \beta_{XY}$ , ou seja, com expoente do modelo XY. Na ausência de quebra de simetria, a forma de escala  $m/w^{\beta_{XY}/\phi_w}$  recai na do modelo XY simétrico<sup>10</sup>. Na presença de quebra de simetria quadrática, esta forma recai na da linha crítica do modelo XY com quebra de simetria<sup>12</sup>. Neste caso, temos a transição de segunda ordem deste modelo<sup>10</sup>. Tomando  $w \neq 0$ , o sistema ordena-se segundo Potts, ou seja, há uma transição de primeira ordem com salto na magnetização proporcional a  $w^{\beta_{XY}/\phi_w}$  não nulo. No ponto crítico, ou seja, ao  $X - x_c \rightarrow 0$ , este salto desaparece com expoente  $\beta = \beta_I$ , do modelo de Ising. Isto ocorre, pois neste ponto, o modelo de Potts ordenado segundo uma de suas componentes (aquela que coincide com um estado) com um valor de magnetização  $M(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)}$ , adquire dois possíveis valores de magnetização  $M(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} + m(\ell)$  (fase I) e  $M(\ell) = -\frac{w_1(\ell)}{4u_1(\ell)} - m(\ell)$  (fase II) de igual energia. Ora, temos aí claramente um ordenamento Ising (Figura 4.1).

Olhemos, agora, a susceptibilidade. Acima do ponto crí-

tico, ou seja, para  $m(\ell) = 0$ , (4.35) pode ser reescrita como:

$$\chi_+ = e^{2\ell} [t_{\text{eff}}]^{-1-\frac{\epsilon}{6}} R^{1/3} [1 + O(w^2)] \quad (4.61)$$

onde usamos (4.29). Substituindo-se  $t_{\text{eff}}$  por sua expressão (4.46) e  $e^\ell$  por (4.36) obtemos:

$$\chi_+ \approx \left[ w^{1/\phi_w} \right]^{-\gamma_{xy}} [X - X_c]^{-\gamma_I} R_x^{-1/3} B \left\{ 1 - A\epsilon - \frac{\epsilon}{6} \frac{\gamma_I}{\gamma_I} \frac{\ln \hat{k}^2 B}{R_x} \right\} \quad (4.62)$$

$$\gamma_{xy} = 1 + \frac{\epsilon}{5} \quad (4.63)$$

$$\gamma_I = 1 + \frac{\epsilon}{6} \quad (4.64)$$

Abaixo do ponto crítico, ou seja, para  $m(\ell) \neq 0$ , (4.35) pode ser reescrita como:

$$\chi_- = \frac{1}{2} \left[ w^{1/\phi_w} \right]^{-\gamma_{xy}} \left[ X - x_c \right]^{-1 - \frac{\epsilon}{6}} B^{-1} \left\{ 1 - 18 K_4 u_1 - \right. \\ \left. - 2 K_4 \frac{u_2^2}{u_1} - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{4 R_x} \ln(2 \hat{K} B) - \epsilon A \right\} R_x^{1/3} \quad (4.65)$$

onde usamos (4.29) e (4.53) e substituímos  $t_{\text{eff}}$  por sua expressão em (4.46) e  $e^{\lambda}$  por (4.36). Reescrevendo  $u_1(\ell) = u(\ell) + g_u(\ell) - \frac{1}{3} g'_u(\ell)$  e  $u_2(\ell) = u(\ell) + g'_u(\ell)$ , obtemos

$$\chi_- = \frac{1}{2} \left[ w^{1/\phi_w} \right]^{-\gamma_{xy}} \left[ X - x_c \right]^{-\gamma_I} R_x^{1/3} B^{-1} \left\{ 1 - \epsilon A \right. \\ \left. - \frac{9}{20} \frac{u}{u_{xy}} \left( 1 + x_4 - \frac{x_5}{3} \right) - \frac{\epsilon}{20} \frac{u}{u_{xy}} \left( 1 - x_4 + \frac{7}{3} x_5 \right) - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{4 R_x} \ln(2 \hat{K}^2 B) \right\} \quad (4.66)$$

onde  $\gamma_{XY}$  e  $\gamma_I$  são os expoentes definidos em (4.63) e (4.64) e onde

$$u_{xy} \equiv \frac{\epsilon}{40 K_4} \quad (4.67)$$

$$u_I \equiv \frac{\epsilon}{36 K_4} \quad (4.68)$$

são respectivamente os pontos fixos do XY e Ising.

A susceptibilidade calculada acima ou abaixo do ponto crítico, ao tomarmos  $w \xrightarrow{1/\phi} 0$ , diverge com  $\gamma = \gamma_{XY}$ , ou seja, com expoente do modelo XY. Na ausência de quebra de simetria, a forma de escala  $\chi/w \xrightarrow{\beta/\phi} w$ , ao  $w \rightarrow 0$  recai do modelo XY simétrico<sup>10</sup>. Na presença só da quebra de simetria quadrática, esta forma de escala recai na da linha crítica do modelo XY assimétrico<sup>12</sup>. Para  $w \neq 0$ , mas na região crítica, ela diverge, ao  $X - x_c \rightarrow 0$ , com  $\gamma = \gamma_I$ , ou seja, com o expoente do modelo de Ising. Tal comportamento está de acordo com o comportamento da magnetização anterior.

A razão de susceptibilidades calculadas acima e abaixo do ponto crítico é dada por:

$$\frac{\chi_+}{\chi_-} = 2 \left\{ 1 + \frac{9}{20} \epsilon \left[ 1 + x_4 - \frac{x_5}{3} \right] + \frac{\epsilon}{20} \left[ 1 + \frac{7}{3} x_5 - x_4 \right] + \frac{\epsilon}{6} \ln 2 \right\}$$

(4.69)

que nada mais é que a razão entre (4.62) e (4.66) tomadas em  $u_1(\lambda) = u_I$  e  $u = u_{XY}$ . Observemos que tal razão é universal, mesmo com quebras de simetria trilinear e quártica. Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, ou seja, para  $x_4 = x_5 = 0$ , é idêntica à razão de susceptibilidades calculadas acima e abaixo da temperatura crítica para o modelo de Ising<sup>10</sup>.

Normalmente razões universais de quantidades termodinâmicas calculadas acima e abaixo da temperatura crítica são esperadas.

das, quando um único parâmetro, a temperatura, tira o sistema da região crítica<sup>10</sup>. No nosso caso, no entanto, temos uma série de parâmetros, a temperatura, o acoplamento trilinear e as quebras de simetria que tiram o sistema da região crítica. Esta razão permanece universal, pois tais parâmetros combinam-se de modo a formar uma quantidade  $[X - x_c]$  que tira o sistema do ponto crítico.

Voltemos à expressão  $f_s$  em (4.28). Sob a linha de coexistência, reescreveremos  $f_s$  como:

$$f_s \equiv f_{s_1} + f_{s_2} \quad (4.70)$$

onde

$$f_{s_1} = - \frac{T_1^2(\ell) e^{-d\ell}}{48 u_1(\ell)} \left\{ 1 + \frac{u_1(\ell)}{u_1} \left[ T_1(\ell)^{-\epsilon/2} - 1 \right] \right\}^{4/3} + \frac{T_1^2(\ell) e^{-d\ell}}{48 u_1(\ell)} + e^{-d\ell} \left\{ t_{\text{eff}} m^2(\ell) + 4 u_1 m^4(\ell) \right\} \quad (4.71)$$

é a parte singular da energia livre ao  $T_1(\ell) \rightarrow 0$  e onde  $f_{s_2}$  conterá todos os demais termos. Separamos, desta forma, pois, em (4.71), o comportamento singular associado ao ponto crítico.

Substituindo-se  $m(\ell) = 0$ , bem como usando as definições (4.29), obtemos que  $f_{s_1}^+$ , para  $t_{\text{eff}} > 0$ , será dado por

$$f_{s_1}^+ = - e^{-d\ell} \frac{[t_{\text{eff}}]^{2-\frac{\epsilon}{6}}}{48 u_1} R^{4/3} \quad (4.72)$$



Substituindo-se  $e^{\ell}$  por (4.36) e  $t_{\text{eff}}$  por (4.46) obtemos

$$f_{S_1}^+ = - \frac{\left[ w^{1/2} \phi_w \right]^{2-\alpha_{xy}}}{48 u_1} [X-x_c]^{2-\alpha_I} R_x^{1/3} B^2 \left\{ 1 + 2EA - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{u_I} \frac{p_n k^2 B}{R_x} \right\} \quad (4.73)$$

$$\alpha_{xy} = \frac{\epsilon}{10} \quad (4.74)$$

$$\alpha_I = \frac{\epsilon}{6} \quad (4.75)$$

Substituindo-se  $m(\ell)$  dado por (4.53) em (4.71), obtemos

$$f_{S_1}^- = - \frac{e^{-d\ell} |t_{\text{eff}}|^{2-\frac{\epsilon}{6}}}{12 u_1} R^{1/3} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{u_I} \frac{\ln 2}{R} \right\} \quad (4.76)$$

Substituindo-se  $e^{\ell}$  por (4.36) e  $t_{\text{eff}}$  por (4.46), obtemos

$$f_{S_1}^- = - \frac{\left[ w^{1/2} \phi_w \right]^{2-\alpha_{xy}}}{12 u_1} [X-x_c]^{2-\alpha_I} R_x^{1/3} B^2 \left\{ 1 + 2EA - \frac{\epsilon}{6} \frac{u_1}{u_I} \frac{\ln 2 k^2 B}{R_x} \right\} \quad (4.77)$$

Calculamos aqui somente as partes da energia livre que relacionam-se às divergências em funções termodinâmicas na região crítica. Ao tomarmos  $w \rightarrow 0$ ,  $f_{s_1}$  anula-se com o expoente  $2 - \alpha_{XY}$  onde  $\alpha_{XY}$  é o expoente que fornece a singularidade do calor específico do modelo XY. Na ausência de quebra de simetria, a forma de escala  $f_{s_1}/w^{2-\alpha_{XY}/\phi}$  ao  $w \rightarrow 0$  recai na do modelo XY simétrico<sup>10</sup>. Na presença só de quebra de simetria quadrática, recai na da linha crítica do modelo XY assimétrico<sup>12</sup>. Para  $w \neq 0$ , mas  $(X - x_c) \rightarrow 0$ ,  $f_{s_1}$  anula-se com expoente  $2 - \alpha_I$  onde  $\alpha_I$  é o expoente que fornece o comportamento singular do calor específico do modelo de Ising.

Nesta seção, obtivemos expressões explícitas para o salto da magnetização na curva de coexistência entre as fases I e II, para susceptibilidade calculada acima e abaixo do ponto crítico e uma parte da energia livre, parte esta responsável pelas singularidades na região crítica, calculada acima e abaixo do ponto crítico.

De posse de tais funções, observamos um "crossover" do comportamento XY a Potts - crítico (Ising). Verificamos igualmente a universalidade de razão de susceptibilidades calculadas acima e abaixo do ponto crítico.

#### 4.3 Curva de Coexistência entre as Fases I e II e Equação de Estado do SrTiO<sub>3</sub>

##### 4.3.1 Curva de coexistência entre as fases I e II

Como vimos na seção anterior,  $h_{eff} = 0$  define a região

de coexistência entre as fases I e II.

Substituindo-se de (3.179) a (3.187) na expressão de  $h_{\text{eff}}$  dada por (4.29) e o comportamento com  $\epsilon^{\ell}$  de cada parâmetro dados por (3.198) a (3.208) por (4.36), obtemos que:

$$\hat{h} = \frac{w}{u} \left\{ -g - \frac{t}{4} + \frac{5}{4} \frac{w^2}{u} - \frac{\epsilon}{10} \left( \frac{5}{4} - g \right) \ln \left( t - g - \frac{11}{4} \frac{w^2}{u} \right) \right\} \quad (4.79)$$

onde, por simplicidade, desprezamos a quebra de simetria trilinear e quártica.

À ordem de zero loops (4.79) recai, tomando-se  $t \equiv r + \frac{9}{2} \frac{w^2}{u}$  (3.210) e  $\hat{h} \equiv h_1 - \frac{3}{4} \frac{wg}{u}$  (3.211), no resultado de campo médio (2.34). A esta ordem, o gráfico  $H - T$  é uma reta. Além disso, a esta ordem, pode-se construir uma relação dada por

$$\hat{H} = -\frac{4G}{3} - \frac{T}{3} + \frac{20}{27} \quad (4.80)$$

função de parâmetros adimensionais dadas por<sup>14</sup>:

$$\hat{H} \equiv \frac{16u^2 \hat{h}}{27w^3}$$

$$G \equiv \frac{4ug}{9w^2}$$

$$T \equiv \frac{4ut}{9w^2} \quad (4.81)$$

À ordem de um loop, o gráfico  $H - T$  deixa de ser uma re-  
ta. Além disso, se substituirmos (4.81) em (4.79), obtemos uma re-  
lação

$$\hat{H} = -\frac{4}{3}G - \frac{T}{3} + \frac{20}{27} - \frac{\epsilon}{10} \left[ \frac{20}{27} - \frac{4G}{3} \right] \left[ \ln \frac{w^2}{u} + \right. \\ \left. + \ln \left( \frac{9}{4}T - \frac{9}{4}G - \frac{11}{21} \right) \right] \quad (4.82)$$

função de parâmetros adimensionais (4.81), mas função também de  
parâmetros dimensionais  $\frac{w^2}{u}$ .

Para um valor específico de  $\frac{w^2}{u}$  e para um valor de  $\epsilon$   
podemos representar graficamente (4.82) (Figura 4.2).

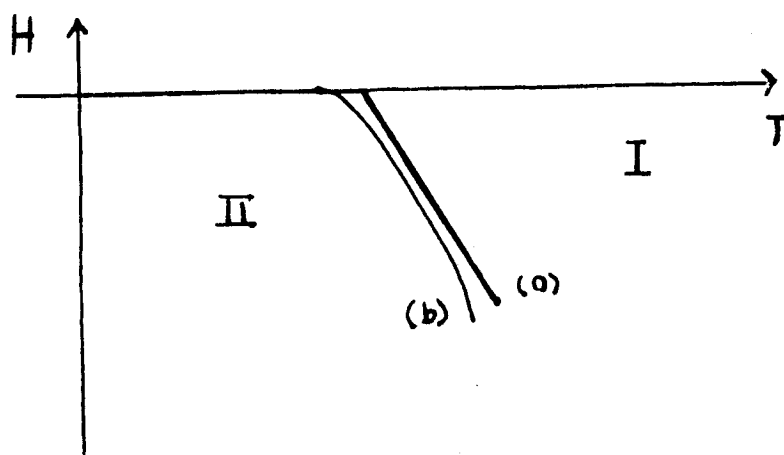


Figura 4.2 - Diagrama  $\hat{H} - T$  para o modelo de Potts com inclusão de flutuações

Para  $G = -0.0298$ ;  $G_u = G'_u = G_w = 0$ ;  $\epsilon = 0.1$  e  $\frac{w^2}{u} = 1$  (valor escolhido por simplicidade) traçamos  $H - T$ : (a) à ordem de zero loops; (b) à ordem de um loop.

4.3.2 Equação de estado para o  $\text{SrTiO}_3$  sob a ação de uma pressão  $p$  segundo uma direção  $[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$

De acordo com o que foi visto na seção 2.3, o  $\text{SrTiO}_3$  sob a ação de uma pressão  $p/[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  é uma realização física do modelo de Potts de três estados sob a ação de um campo externo  $h_1 \sim 0(\delta)$  e com quebra de simetria quadrática  $g \sim 0(\delta)$ , trilinear  $g_w \sim 0(\delta)$  e quártica  $g_u \sim 0(\delta)$ .

Na ausência de quebra de simetria trilinear e quártica, os parâmetros do  $\text{SrTiO}_3$  relacionam-se aos do modelo de Potts via (2.72) e (2.79), ou seja, os parâmetros de temperatura  $r$ , de acoplamentos trilinear  $w$ , quártico  $u$ , quebra de simetria quadrática  $g$  e campo externo  $h_1$  do modelo de Potts relacionam-se aos do  $\text{SrTiO}_3$  via

$$r = -\frac{2}{3} \frac{v_0 k'}{(u_0' + \frac{v_0'}{3})} - \frac{(u_0' + \frac{7}{9} v_0')}{(u_0' + \frac{v_0'}{3})} b_t' p$$

$$h_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} (12b_e' + b_t') \left[ -\frac{k' + \frac{2}{3} b_t' p}{4(u_0' + \frac{v_0'}{3})} \right]^{1/2} p \delta$$

$$w = -\frac{2\sqrt{2}}{3} v_0' \left[ -\frac{k' + \frac{2}{3} b_t' p}{4(u_0' + \frac{v_0'}{3})} \right]^{1/2}$$

$$u = - \frac{v_0'}{6} \frac{7u_0' + 5v_0'}{u_0' + \frac{v_0'}{3}}$$

$$g = - \frac{2}{3} (6b_e' - b_t') \rho \delta \quad (4.83)$$

onde  $b_e'$ ,  $b_t'$ ,  $u_0'$  e  $v_0'$  dados por (2.69) dependem fracamente da temperatura de sorte que somente  $K$  será a variável dependente de temperatura. De (2.72) e (2.69), tomamos que:

$$b_e' = 1.22 \cdot 10^{-13}$$

$$b_t' = -3.3 \cdot 10^{-13}$$

$$u_0' = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$v_0' = -0.5 \cdot 10^{-4} \quad (4.84)$$

onde  $b_e'$ ,  $b_t'$  e  $u_0'/v_0'$  independem de temperatura e onde  $K' = 0.16 \text{ K } 10^{-27}$ .

Substituindo-se (3.209) e (3.210) em (4.79), obtemos:

$$h_1 = \frac{w}{u} \left\{ \frac{w^2}{8u} - \frac{g}{4} - \frac{r}{4} - \frac{\epsilon}{10} \left( \frac{5}{4} \frac{w^2}{u} - g \right) \ln \left( r - g + \frac{7}{4} \frac{w^2}{u} \right) \right\}$$

$$H_1 = \frac{2}{27} - \frac{G}{3} - \frac{R}{3} - \frac{\epsilon}{10} \left[ \frac{20}{27} - \frac{4}{3} G \right] \left[ \ln \left( \frac{9}{4} R - \frac{9}{4} G + \frac{7}{4} \right) + \ln \frac{w^2}{u} \right]$$

(4.85)

onde

$$H_1 \equiv \frac{16}{27} \frac{u^2 h_1}{w^3}$$

$$R \equiv \frac{4}{9} \frac{ur}{w^2}$$

$$G = \frac{4}{9} \frac{ug}{w^2} \quad (4.86)$$

Substituindo-se (4.83) e (4.84) em (4.85) e (4.86), obtemos explicitamente a equação de estado do  $\text{SrTiO}_3$  sob pressão não diagonal

$$H_p \delta = B K' + C p - \frac{\epsilon}{10} \left[ \frac{20}{27} K' + \frac{40}{81} b_t' p + D p \delta \right] \ln (E K' + F p + I p \delta)$$

(4.87)

onde

$$A \equiv -\frac{1}{27} \frac{(7u_0' + 5v_0')^2}{v_0' \left(u_0' + \frac{v_0'}{3}\right)} (12b_e' + b_t') - \frac{2}{27} \frac{7u_0' + 5v_0'}{v_0'} (6b_e' - b_t')$$

$$\approx 1.339 \cdot 10^{-11}$$

$$B \equiv \frac{2}{27} \left[ 1 + \frac{7u_0' + 5v_0'}{u_0' + \frac{v_0'}{3}} \right]$$

$$\approx 0.558$$

$$C \equiv \frac{4}{81} + \frac{1}{27} \frac{\left(3u_0' + \frac{7}{3}v_0'\right) (7u_0' + 5v_0')}{\left(u_0' + \frac{v_0'}{3}\right) v_0'} b_t'$$

$$\approx 1.26 \cdot 10^{-12}$$

$$D \equiv \frac{8}{27} \frac{7u_0' + 5v_0'}{v_0'} (6b_e' - b_t')$$

$$\approx -11.91 \cdot 10^{-12}$$



$$E \equiv - \frac{V_0'}{3} \left\{ \frac{2}{\left(u_0' + \frac{V_0'}{3}\right)} - \frac{7}{7u_0' + 5V_0'} \right\}$$

$$\approx 0.0536$$

$$F \equiv \left\{ \frac{14}{9} \frac{V_0'}{7u_0' + 5V_0'} - \frac{u_0' + \frac{7}{9}V_0'}{\left(u_0' + \frac{V_0'}{3}\right)} \right\} b_t'$$

$$\approx 3,18 \cdot 10^{-13}$$

$$I \equiv \frac{2}{3} (6b_e' - b_t')$$

$$\approx 7,093 \cdot 10^{-13}$$

(4.88)

Voltemos à expressão (4.87). À ordem de zero loops ( $\epsilon = 0$ )

$$\delta = m \frac{k'}{p} + n \quad (4.89)$$

onde

$$m = \frac{B}{A} \approx 0.417 \cdot 10^{11}$$

$$n = \frac{C}{A} \approx 9.41$$

(4.90)

e onde se  $p$  escalar linearmente com a temperatura  $K'$ , da forma  $p = x K'$  (Fig. 4.3), teremos que  $\delta$  independe da temperatura explicitamente (Fig. 4.4).

Tomemos a mesma expressão (4.87), sô que à ordem de um loop. Multiplicamos (4.87) por  $1 + \frac{2\varepsilon}{27B} \ln K'$ , substituímos  $\varepsilon\delta = \frac{\varepsilon}{A} \left[ B \frac{K'}{p} + C \right]$  (valor à ordem de zero loops), obtemos:

$$\begin{aligned} \pi p \delta \left[ 1 + \varepsilon \hat{\Delta} \ln K' \right] &= B K' + C p \left[ 1 + \varepsilon \Delta \ln K' \right] - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{10} (a K' + b p) \ln \left( c + \frac{d p}{K'} \right) \end{aligned} \quad (4.91)$$

onde

$$\Delta \equiv - \frac{4}{8i} \frac{b_t}{C} + \frac{2}{27B}$$

$$\approx 0.1457$$

$$\hat{\Delta} \equiv \frac{2}{27B} + \frac{D}{10A}$$

$$\approx 0.043$$

$$a \equiv \frac{20}{27} + \frac{DB}{A}$$

$$b \equiv \frac{40}{81} b'_t + \frac{DC}{A}$$

$$c \equiv E + \frac{IB}{A}$$

$$d = F + \frac{IC}{A} \quad (4.92)$$

Da expressão (4.90) tiramos que se a pressão  $p$  escalar com a temperatura  $K'$  da forma (Fig. 4.3):

$$p \cong x K'^{1-\epsilon\Delta} \quad (4.93)$$

$$\Delta = 0.14 \quad (4.94)$$

escalará como (Fig. 4.4)

$$\frac{\delta}{K'(\Delta - \hat{\Delta})G} = f(x) \quad (4.95)$$

$$f(x) = \frac{B}{x} + C - \frac{\epsilon}{10} \left( \frac{a}{x} + b \right) \ln(c + dx) \quad (4.96)$$

$$\Delta - \hat{\Delta} = 0.1 \quad (4.97)$$

De (4.95) observamos que flutuações fazem  $\delta$  depender explicitamente da temperatura  $K'$ .

Uma maneira de verificarmos esta última expressão seria fazendo-se medidas de  $\delta$  para diferentes temperaturas. Pela predição de campo médio,  $\delta$  seria constante, enquanto que, ao incluirmos flutuações, obtivemos  $\delta$  dependente de  $K'$ :

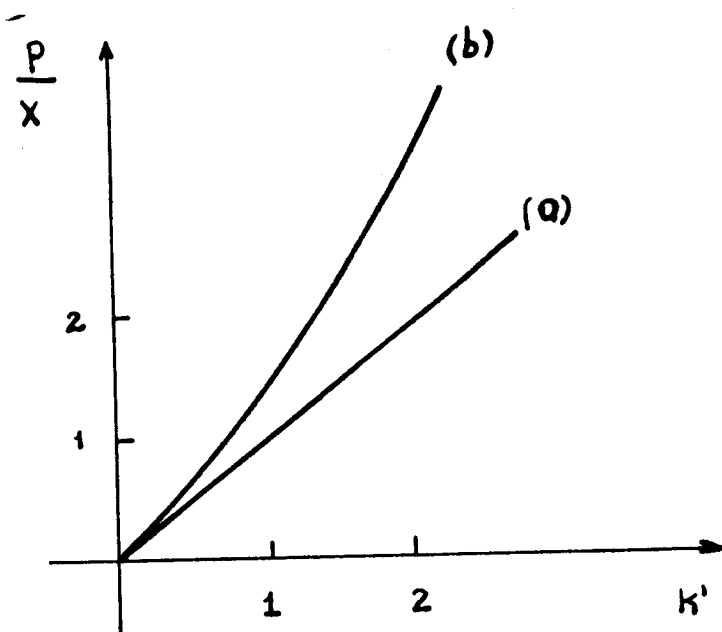


Figura 4.3 - Gráfico  $\frac{p}{x} - K'$  - Traçamos a dependência de  $p$  com  $K'$  para  $\epsilon = 1$  para dois casos: (a) à ordem de zero loops onde  $p$  escala linearmente com  $K'$ ; (b) à ordem de um loop onde  $p$  escala como  $K'^{0.86}$ .

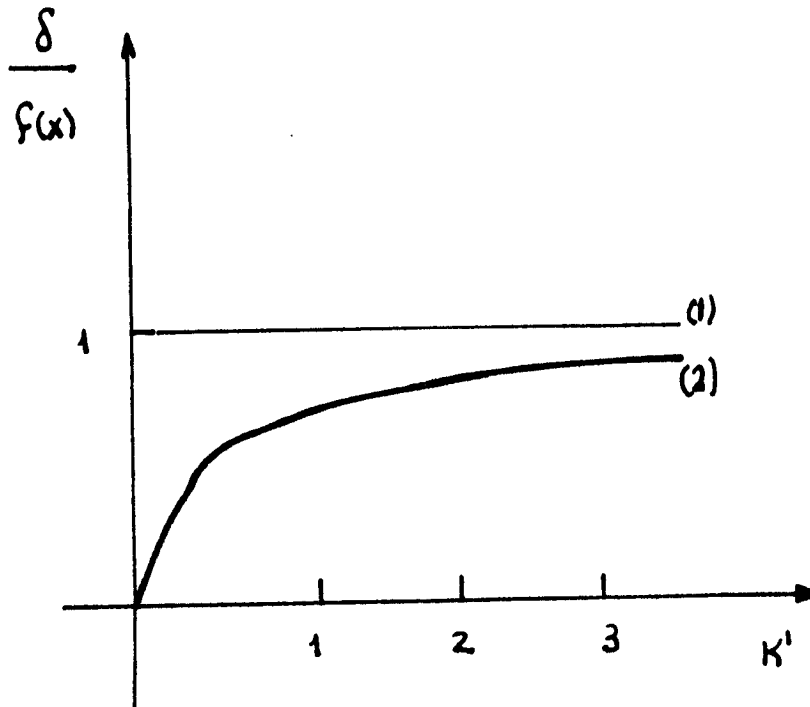


Figura 4.4 - Gráfico  $\frac{\delta}{f(x)} - K'$  - Traçamos a dependência de  $\delta$  com  $K'$  para dois casos: (a) à ordem de zero loops (sem flutuações) quando  $\delta$  é constante (1); (b) à ordem de um loop (com flutuações) onde  $\delta$  depende de  $K'$  (2).

Nesta seção, obtivemos a influência de flutuações sobre a forma da curva de coexistência entre as fases I e II. Mostramos que a inclusão de flutuações modifica a forma da curva e a torna não universal. Aplicamos este resultado ao  $\text{SrTiO}_3$  sob tensão não diagonal  $\vec{p} \equiv p[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  e obtivemos formas de escala de  $p$  e  $\delta$  como função de  $K'$  como temperatura. Mostramos que flutuações modificam substancialmente tais formas de escala.

## 5. RESUMO E CONCLUSÕES

Esta tese teve por objetivo o estudo do modelo de Potts de três estados com quebra de simetria, e na presença de campo externo e de realizações físicas a ele relacionadas.

Tendo isto em mente, partimos da formulação discreta para o modelo de Potts de três estados em sua versão "standard"<sup>15,16</sup>, onde, cada um dos três possíveis estados, apontam para os vértices de um triângulo equilátero, representamos tais estados em um sistema de duas componentes e, através da transformação de Hubbard-Stratonowich<sup>21,22</sup>, obtivemos a formulação contínua em termos de campos  $\phi$  e  $\psi$ , onde cada um destes campos está associado a uma das componentes dos vetores de Potts.

Introduzimos uma quebra de simetria entre as componentes dos vetores de Potts no hamiltoniano discreto e mostramos que esta quebra de simetria dá origem, no hamiltoniano contínuo, à quebra de simetria nos termos quadráticos  $r_1\phi^2$  e  $r_2\psi^2$ , trilineares  $w_1\phi^3$  e  $w_2\phi\psi^2$  e quárticos  $u_1\phi^4$ ,  $u_2\phi^2\psi^2$  e  $u_3\psi^4$ . A presença de um campo externo paralelo a uma das componentes de Potts, gera, no hamiltoniano contínuo, um termo linear  $h_1\phi$ .

Demonstramos, portanto, que uma quebra de simetria entre as componentes dos estados de Potts, gera quebra de simetria quadrática, trilinear e quártica no hamiltoniano contínuo de campos.

Ao modelo de Potts de três estados simétrico, estão relacionadas algumas realizações físicas, entre elas: (a) sistemas magnéticos com anisotropia cúbica sob a ação de campo externo dia

gonal  $\vec{h} // [111]$ <sup>13</sup>; (b)  $\text{SrTiO}_3$  sob a ação de pressão externa p segundo uma direção diagonal  $\vec{\alpha} // [111]$ <sup>19</sup>.

Buscamos realizações físicas para o modelo de Potts de três estados na presença de campo externo e com quebra de simetria. Encontramos na literatura<sup>32</sup> que o  $\text{SrTiO}_3$  sob a ação de uma tensão p não diagonal segundo uma direção  $\vec{\alpha} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  corresponde a uma realização física para Potts assimétrico e com campo.

Demonstramos, então, que sistemas cúbicos magnéticos com a ação de um campo não diagonal  $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  correspondem a uma realização física para o modelo de Potts de três estados com quebra de simetria e campo externo, onde a quebra de simetria e o campo externo de Potts  $h_1$  são proporcionais a  $\delta$ .<sup>33</sup>

De posse do hamiltoniano contínuo, utilizando a teoria de campo médio de Landau, reproduzimos o diagrama de fases de variação de temperatura  $R \equiv \frac{4}{9} \frac{ur}{w^2}$  como função campo externo  $H_1 \equiv \frac{16}{27} \frac{h_1 u^2}{w^3}$ . Este diagrama mostra três fases: I.  $\langle \phi \rangle \neq 0$  só se  $h_1 \neq 0$ ; II.  $\langle \phi \rangle \neq 0$  mesmo se  $h_1 = 0$ ; III.  $\langle \phi \rangle \neq 0$   $\langle \psi \rangle \neq 0$ . As fases encontram-se separadas por transições de fase de primeira ordem. A linha de primeira ordem entre I e II acaba em um ponto crítico, a entre I e III transforma-se em de segunda ordem em um ponto tricrítico. Em tais pontos, conhecem-se os valores da temperatura  $r$ , da magnetização  $M = \langle \phi \rangle$  e do campo externo  $h_1$ . Razões entre as temperaturas  $\frac{r_t}{r_c}$ , magnetização  $\frac{M_t}{M_c}$  e campos externos  $\frac{h_{1t}}{h_{1c}}$  tricríticos e críticos são trivialmente adimensionais e universais. Tal universalidade vem do fato que a aproximação de campo médio apaga a influência dos detalhes do sistema sobre resultados

físicos, se estes forem adimensionais. Tal influência, quando existe, só pode ser resgatada com a inclusão de flutuações.

Com a finalidade de obter a influência de flutuações, aplicamos as transformações do grupo de renormalização com expansão em  $\varepsilon = d_c - d$  ( $d_c$  é a dimensionalidade crítica superior da teoria) no hamiltoniano contínuo de Potts, gerando relações de recorrência para os parâmetros renormalizados.

Solucionamos, então, estas relações para dois casos:

- (a) Em  $\varepsilon = 6 - d$ , já que teorias com termos trilineares são renormalizáveis em  $6 - \varepsilon$  dimensões. Muito embora o termo trilinear seja o que defina a dimensão de renormalização, mantivemos o termo quártico, que sendo aparentemente uma variável irrelevante do ponto de vista do GR, é imprescindível para ter uma energia livre estável. Além disso, sem este termo, não há transição de primeira ordem e, conseqüentemente, ponto crítico e tricrítico. Da solução das relações de recorrência, obtivemos os parâmetros de temperatura reduzida  $t$ , magnetização  $M = \langle \phi \rangle$  e campo magnético  $h_1$  nos pontos crítico e tricrítico. Obtivemos, então, as razões de temperaturas  $\frac{t}{t_c}$  tricrítica e crítica, magnetizações  $\frac{M_t}{M_c}$  tricrítica e crítica e campos magnéticos  $\frac{h_{1t}}{h_{1c}}$  tricrítico e crítico. Tais razões, à ordem de um loop, ou seja, sob a influência de flutuações são não universais, como demonstramos no capítulo 3. Cabe notar que mesmo na ausência de quebra de simetria, esta razão é não universal<sup>39</sup>.



(b) Em  $\epsilon = 4 - d$ . Neste caso, consideramos o acoplamento trilinear como uma perturbação e usamos o fato de que teorias com termos quárticos são renormalizáveis em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões. Assim, ao invés de Potts, temos um modelo XY com perturbação trilinear. Lembramos que o modelo XY apresenta em  $t = 0$  uma transição de fase de segunda ordem. Da solução das relações de recorrência, obtivemos a temperatura reduzida  $t/t_c$ , a magnetização  $M = \langle \phi \rangle$  e o campo magnético  $h$  nos pontos crítico e tricrítico de forma perturbativa em  $w$  e nos termos de quebra de simetria. Obtivemos razões não universais de temperaturas reduzidas  $\frac{t}{t_c}$ , magnetização  $\frac{m}{m_c}$  e campos magnéticos  $\frac{h}{h_c}$  tricríticos e críticos. Levando em conta só parcialmente os efeitos de quebra de simetria, ou seja, na presença só de quebra de simetria quadrática, tais razões, mesmo na presença de flutuações, são universais. Este fato fez outros autores<sup>14</sup> acreditarem na universalidade da teoria. A introdução, no entanto, de quebra de simetria trilinear e quártica, na presença de flutuações, modifica este quadro. Obtivemos, então, que o efeito conjunto de flutuações e quebra de simetria trilinear e quártica, gera razões não universais  $\frac{t}{t_c}$ ,  $\frac{m}{m_c}$  e  $\frac{h}{h_c}$ <sup>18</sup>.

Blankschtein e Aharony<sup>32</sup> aplicaram resultados de campo médio obtidos para o modelo de Potts de três estados com quebra de simetria só no termo quadrático ao  $\text{SrTiO}_3$  sob tensão, segundo uma direção  $\alpha // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  e obtiveram  $\frac{\delta}{\delta_c} = -5.18$ . Incluíram posteriormente flutuações (ainda só considerando quebra de simetria

quadrática) e obtiveram à ordem de um loop  $\frac{\delta t}{\delta c} = -4.994$  que corrige em cerca de 0.12% o resultado de zero loops  $\frac{\delta t}{\delta c} \cong -5$  (semelhante à campo médio).

Posteriormente, acreditando na importância das quebras de simetria trilinear e quártica, Fontanari e Theumann<sup>20</sup> obtiveram, em campo médio,  $\frac{\delta t}{\delta c} \cong -4.901$  com inclusão de quebra de simetria trilinear e quártica corrigindo em cerca de 6% campo médio sem quebra de simetria trilinear e quártica. Cabe notar que resultados com inclusão de flutuações, até então calculadas<sup>32</sup>, foram menos relevantes que os obtidos com quebra de simetria trilinear e quártica.

Aplicando os nossos resultados, obtidos para o modelo de Potts de três estados com quebra de simetria quadrática, trilinear e quártica, ao  $\text{SrTiO}_3$  com tensão não diagonal na direção  $\alpha//[1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$ , obtivemos que:

- (i)  $\frac{\delta t}{\delta c}$  é uma razão não universal. Tal não universalidade é devida ao efeito conjunto de flutuações e quebra de simetria trilinear e quártica.
- (ii)  $\frac{\delta t}{\delta c}$  na região bicrítica, ou seja, a não universalidade corrige em 1% resultados anteriores. Cabe ressaltar que o efeito conjunto de flutuações e quebra de simetria trilinear e quártica é mais importante que flutuações (sem quebra de simetria).

O comportamento na região crítica é de interesse já que,

nesta região, espera-se que quantidades termodinâmicas, tais como a susceptibilidade, o calor específico, etc, apresentem divergências. Tendo isto em mente, obtivemos expressões para a parte singular da energia livre, para o salto na magnetização  $m = \langle \phi \rangle - M_c$  e para as susceptibilidades calculadas acima e abaixo da região crítica. Tais expressões foram obtidas na curva de coexistência entre as fases I e II.

Verificamos que, ao tomarmos  $w \rightarrow 0$ , tais quantidades termodinâmicas apresentam comportamento crítico do modelo XY, ou seja, a magnetização  $m$  se anula com  $t \sim [w^{1/\phi} w]$  elevado a um expoente  $\beta = \beta_{xy} = \frac{1}{2} - \frac{3}{20} \epsilon$ , ou seja, com o expoente do modelo XY, e a susceptibilidade  $\chi$  diverge com  $t \sim w^{1/\phi} w$  elevado a um expoente  $\gamma = \gamma_{xy} = 1 + \frac{\epsilon}{5}$ , ou seja, com o expoente do modelo xy. Fazendo  $w \neq 0$ , passamos a observar que, a magnetização  $m$  se anula ao  $(t - t_c) \rightarrow 0$ , ou seja, no ponto crítico, com expoente  $\beta = \beta_I = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6}$ , ou seja, com o expoente do modelo de Ising e a susceptibilidade irá divergir, ao  $(t - t_c) \rightarrow 0$ , com expoente  $\gamma = \gamma_I = 1 + \frac{\epsilon}{6}$ , ou seja, com expoente do modelo de Ising.

Como  $w = 0$  corresponde ao modelo XY, nada mais natural que, ao tomarmos  $w^{1/\phi} w \rightarrow 0$ , obtenhamos o comportamento crítico do modelo XY, que se caracteriza por apresentar uma transição de fase de segunda ordem ao  $t \rightarrow 0$ . Ao tomarmos  $w \neq 0$ , cruzamos para a região Potts (crossover). O modelo de Potts apresenta transição de primeira ordem e, a rigor, nenhuma divergência na susceptibilidade seria observada. No entanto, tal transição encerra um ponto crítico. Neste ponto, a susceptibilidade diverge. Aí o sistema passa de um ordenamento  $\langle \phi \rangle = M_c$  para dois possíveis ordenamentos  $\langle \phi \rangle = m + M_c$  e  $\langle \phi \rangle = -m + M_c$  relativos respectivamente às fases I e II

de Potts. Esta situação caracteriza nitidamente um comportamento Ising. Por este motivo, obtivemos a susceptibilidade divergindo com  $\gamma = \gamma_I$ .

Como foi discutido na introdução, razões de funções termodinâmicas calculadas acima e abaixo da temperatura crítica são, em geral, quantidades universais. Tal universalidade provém do fato de que nestes sistemas, uma única perturbação, a temperatura leva para fora da região crítica tanto para temperaturas superiores como inferiores<sup>10</sup>.

No nosso problema, temos inúmeras perturbações, tais como o acoplamento trilinear  $w$ , a quebra de simetria e a temperatura. Não é, portanto, óbvio que a razão de uma destas funções deva ser universal. Fizemos o cálculo em  $d = 4 - \epsilon$  dimensões para a razão de susceptibilidades calculadas acima e abaixo da temperatura crítica (sobre a curva de coexistência entre as fases I e II) e obtivemos que é universal.

Muito embora tenhamos muitas perturbações, elas são tais que combinam-se para formar  $T_1 = (t - t_c)$  que é a perturbação responsável por levar o sistema para fora da região crítica, para regiões acima como abaixo do ponto crítico. Obtivemos, por este motivo, a razão universal de susceptibilidades.

Em campo médio, Blankschtein e Aharony<sup>14</sup> obtiveram um diagrama de fases de temperatura adimensional  $R = \frac{1}{9} \frac{ur}{w^2}$  por campo externo adimensional  $H_1 = \frac{16}{27} \frac{h_1 u^2}{w^3}$ . Neste diagrama, as fases I e II são separadas por uma reta de coexistência (transição de primeira ordem) entre as fases I e II que acaba em um ponto crítico. Esta reta  $H_1 \equiv H_1(R, G)$  depende só de parâmetros adimensionais, sendo pois, universal.

Incluindo o efeito de flutuações, obtivemos uma curva de coexistência entre as fases I e II dada por uma função  $H_1 = H_1(R, G, \frac{w^2}{u}, \epsilon)$  dependente de parâmetros adimensionais  $H_1$ ,  $R$ ,  $G$  e dimensionais  $\frac{w^2}{u}$ . Além disso, a inclusão de flutuações transforma a reta, obtida em campo médio, em uma curva.

De posse da equação de estado de  $H_1 = H_1(R, G, \epsilon, \frac{w^2}{u})$ , aplicando ao  $\text{SrTiO}_3$ , obtemos uma equação  $\delta = \delta(p, K')$  onde  $p$  é a pressão e  $K'$  a variável função de temperatura. Desta expressão, supondo que em campo médio  $K'/p \sim x$ , obtivemos que  $\delta$ , em campo médio, não depende explicitamente de temperatura, sendo neste sentido, universal.

Ainda de  $\delta = \delta(p, K')$ , à ordem de um loop, ou seja, com a inclusão de flutuações, supondo que  $K'^{1-0.14\epsilon}/p \sim x$ , obtivemos que  $\delta \sim K'^{0.1\epsilon}$ , ou seja,  $\delta$  depende explicitamente da temperatura<sup>40</sup>.

Muito embora tenhamos aplicado os resultados obtidos somente ao  $\text{SrTiO}_3$ , cabe lembrar que demonstramos que sistemas magnéticos com anisotropia cúbica sob a ação de um campo externo  $\vec{h} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  é uma realização física do modelo de Potts. A aplicação dos resultados do modelo de Potts a estes sistemas será deixado para trabalho posterior<sup>38</sup>.

## ABSTRACT

The renormalization and the critical and tricritical behavior of the three-state Potts model with broken symmetry between the state vectors and with an external field is studied in a field theory. As an extension of Landau phase-transition theory, renormalization group transformations, to first order in  $\epsilon = d_c - d$ , are applied, generating recursion relations. These differential equations are solved in two cases: (a)  $d_c = 6$  the  $\phi^3$ -field critical dimension; (b)  $d_c = 4$  the  $\phi^4$ -field (XY model) critical dimension. In both cases, non-universal ratios of temperatures  $\frac{t}{t_c}$ , magnetizations  $\frac{m}{m_c}$  and external fields  $\frac{h}{h_c}$  tricritical and critical are obtained. Such results are applied to the structural phase transition of  $\text{SrTiO}_3$  stressed along  $\vec{p} // [1+\delta, 1+\delta, 1-2\delta]$  yielding a non-universal ratio  $\frac{\delta}{\delta_c}$ . Finally, the susceptibility, the magnetization and the singular part of the free energy are calculated in  $d = 4 - \epsilon$  dimension at the critical region, showing the crossover from XY model to Potts model behavior. Universal ratio of susceptibilities calculated above and below the critical point is obtained too.

## APÊNDICE A

### CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE $a_1(k)$ , $a_2(k)$ , $b_1(k_1, k_2)$ , $b_2(k_1, k_2)$ , $c_1(k_1, k_2, k_3)$ , $c_2(k_1, k_2, k_3)$ , $c_3(k_1, k_2, k_3)$ e $d$

As expressões para  $a_1(k), \dots$ , provenientes da expansão da exponencial em (3.8) e conseqüente integração dos campos  $\phi_q, \psi_q$ , são compostas por coeficientes numéricos e somas. Neste apêndice iremos mostrar sistematicamente como obter diagramaticamente os coeficientes numéricos e a forma explícita das somas.

#### A.1 Cálculo dos Coeficientes de $a_1(k)$

Escrevemos  $a_1(k)$  como

$$a_1(k) = a_{11} I_1 u_1 + a_{12} I_2 u_2 + a_{13} J_1(k) \tilde{w}_1^2 + a_{14} J_2(k) \tilde{w}_2^2 \quad (\text{A.1})$$

onde  $a_{11}$  provém da integração em (3.8) de

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa} \frac{1}{2} a_{11} I_1 u_1 \phi_{\kappa} \phi_{-\kappa} &= \frac{\int \prod_q d\phi_q \, 6 u_1 \sum \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \phi_{-q_1 - q_2 - q_3} e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}}{\int \prod_q d\phi_q \, e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}} \\ &= \sum_{\kappa} 6 u_1 \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1)^{-1} \phi_{\kappa} \phi_{-\kappa} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde identificamos

$$\bar{I}_1 = \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1)^{-1} \quad (\text{A.3})$$

e, conseqüentemente,

$$a_{11} = 12 \quad (\text{A.4})$$

Se representarmos os coeficientes da forma:

$$u_1 \Rightarrow \circ$$

$$u_2 \Rightarrow \emptyset$$

$$u_3 \Rightarrow \bullet$$

$$\tilde{w}_1 \Rightarrow \Delta$$

$$\tilde{w}_2 \Rightarrow \blacktriangle$$

$$\tilde{h} \Rightarrow \times$$

e as somas da forma

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} \Rightarrow \text{diagrama: círculo tracejado com o número } q \text{ no topo}$$

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_2]^{-1} \Rightarrow \text{diagrama: círculo sólido com o número } q \text{ no topo}$$

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} \Rightarrow \text{diagrama: ovalo tracejado com o número } q \text{ no topo e } k-q \text{ na base}$$



$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k-q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} \Rightarrow \text{Diagram: a circle with two external lines labeled } k \text{ and } k-q$$

$$\frac{1}{2} \sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k-q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} + 1 \text{ permutação } \tilde{r}_1 \leftrightarrow \tilde{r}_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{Diagram: circle with } q \text{ and } k-q \text{ external lines, top arc dashed} + \frac{1}{2} \text{Diagram: circle with } q \text{ and } k-q \text{ external lines, bottom arc dashed} \equiv \text{Diagram: circle with } q \text{ and } k-q \text{ external lines, both arcs dashed}$$

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1+k_2-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Diagram: triangle with } k_1+k_2-q \text{ on the left side, } k_1-q \text{ on the right side, and } q \text{ on the bottom side, all sides dashed}$$

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_1+k_2-q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_1-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Diagram: triangle with } k_1+k_2-q \text{ on the left side, } k_1-q \text{ on the right side, and } q \text{ on the bottom side, all sides solid}$$

$$\frac{1}{3} \sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1+k_2-q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_1-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} + 2 \text{ permutações}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \text{Diagram: triangle with } k_1+k_2-q \text{ on the left side, } k_1-q \text{ on the right side, and } q \text{ on the bottom side, left and right sides solid, bottom side dashed} + \frac{1}{3} \text{Diagram: triangle with } k_1+k_2-q \text{ on the left side, } k_1-q \text{ on the right side, and } q \text{ on the bottom side, left and right sides dashed, bottom side solid} + \frac{1}{3} \text{Diagram: triangle with } k_1+k_2-q \text{ on the left side, } k_1-q \text{ on the right side, and } q \text{ on the bottom side, all sides dashed} \equiv \text{Diagram: triangle with } k_1+k_2-q \text{ on the left side, } k_1-q \text{ on the right side, and } q \text{ on the bottom side, all sides dashed}$$

$$\frac{1}{3} \sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1 + k_2 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} + 2 \text{ permutações}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \begin{array}{c} k_2 + k_1 - q \\ \diagup \quad \diagdown \\ q \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} k_1 + k_2 - q \\ \diagup \quad \text{---} \quad \diagdown \\ q \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} k_1 + k_2 - q \\ \text{---} \quad \diagup \quad \diagdown \\ q \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \quad \diagup \quad \diagdown \\ q \end{array}$$

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_2 + k_3 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_2 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} k_2 - q \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ k_1 - q \quad \text{---} \quad k_2 + k_3 - q \\ q \end{array}$$

$$\sum_q [q^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_2 + k_3 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_2 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} k_2 - q \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ k_1 - q \quad \text{---} \quad k_2 + k_3 - q \\ q \end{array}$$

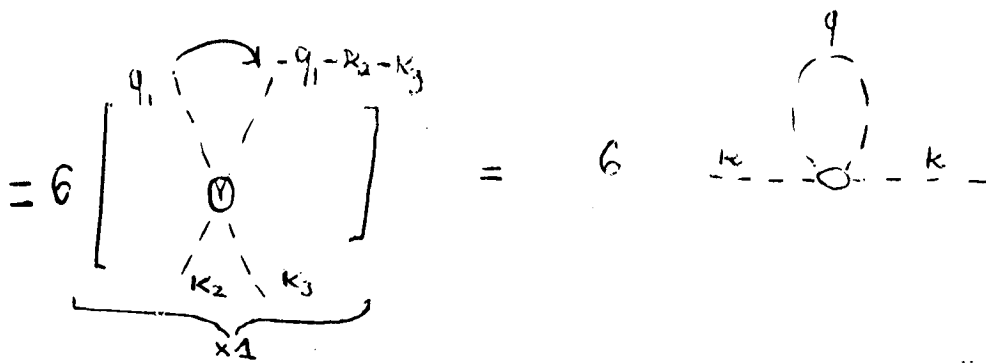
$$\frac{1}{3} \sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_2 + k_3 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_2 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} +$$

+ 5 permutações

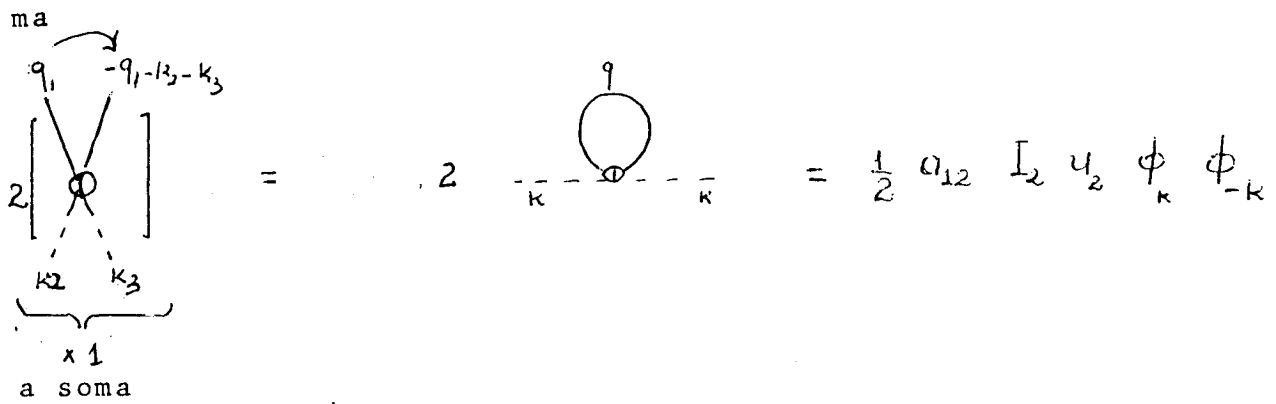


e os campos  $\phi_k$  e  $\psi_k$  como  $\underline{k}$  e  $\overline{k}$ , reescrevemos (A.2), como:

$$\frac{\int \prod_q d\phi_q \ 6u_1 \sum_{q_1, k_2, k_3} \phi_{q_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \phi_{-q_1-k_2-k_3} e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}}{\int \prod_q d\phi_q \ e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}} =$$



onde a integração em  $d\phi_q$  é representada por uma contração sob forma de flexa. Diagramaticamente, o fator 6 provém do fato de haver diagramas equivalentes a este. Da mesma forma, obtemos do diagrama



$$I_2 = \sum_q (q^2 + \tilde{r}_2)^{-1} \tag{A.6}$$

e o coeficiente

$$a_{12} = 4 \tag{A.7}$$

onde  $\Phi$  representa o acoplamento  $u_2$ .  $a_{13}$  provém, por sua vez, da

integração em (3.8), de

$$\sum_k \frac{1}{2} a_{13} J_1(k) \tilde{w}_1^2 \phi_k \phi_{-k} =$$

$$= \frac{\int \prod_q d\phi_q \left(-\frac{q}{2}\right) \tilde{w}_1^2 \sum_{q_1, k_2, -q_1-k_2} \phi_{q_1} \phi_{k_2} \phi_{-q_1-k_2} \phi_{\hat{q}_1} \phi_{\hat{k}_2} \phi_{-\hat{q}_1-\hat{k}_2} e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}}{\int \prod_q d\phi_q e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}}$$

$$= \sum_k (-q) \tilde{w}_1^2 \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1)^{-1} [(k-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} \phi_k \phi_{-k} \quad (A.8)$$

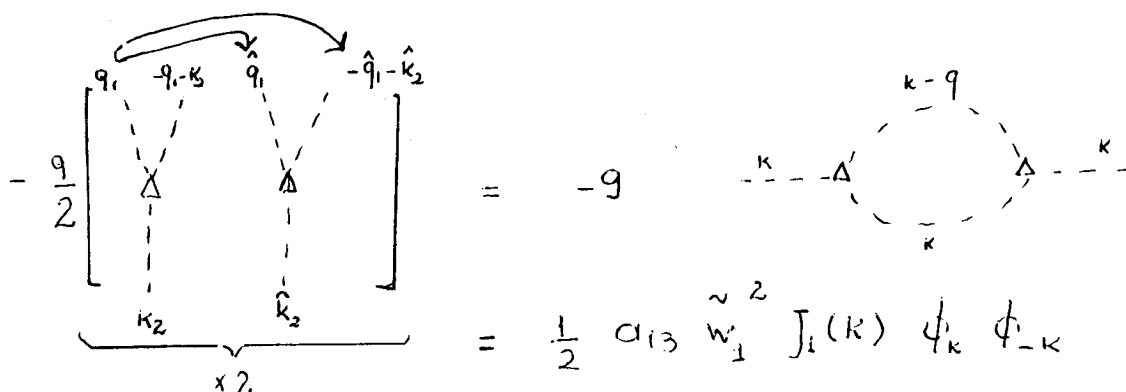
onde identificamos

$$J_1(k) = \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1)^{-1} [(k-q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} \quad (A.9)$$

e, conseqüentemente

$$a_{13} = -18 \quad (A.10)$$

Diagramaticamente teremos:



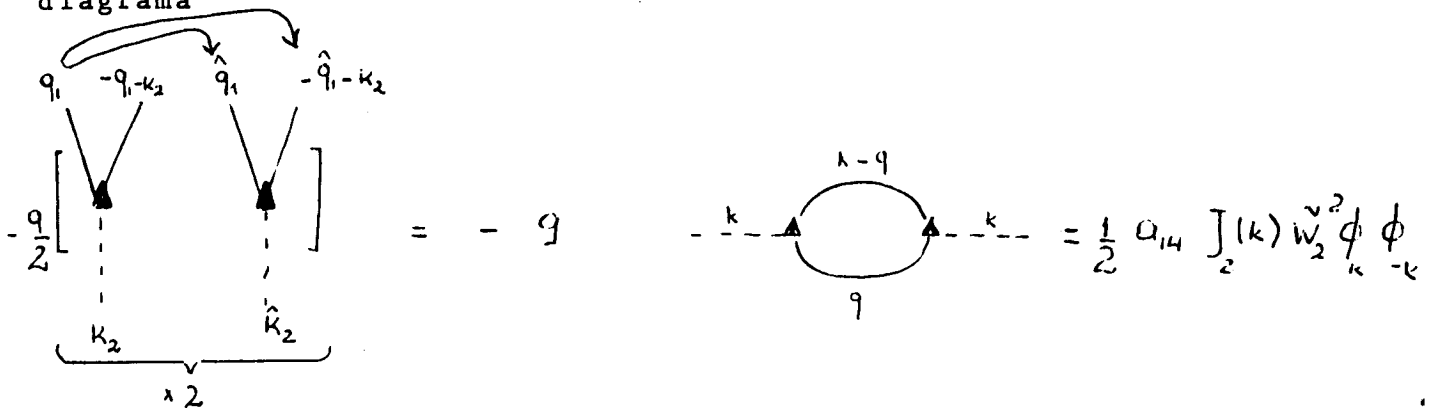
onde as flexas indicam as possíveis contrações que geram um fator de 2 e, conseqüentemente

$$O_{13} = - 18 \tag{A.11}$$

O fator 9 no diagrama à esquerda, provém do fato de haver 9 diagramas equivalentes e o fato  $-\frac{1}{2}$  é proveniente da expansão da exponencial em (3.8). Genericamente, a expansão desta exponencial gera fatores da forma:

$$\frac{(-1)^{1+n_1+n_2+\dots}}{n_1! n_2! n_3! \dots} = \text{fator relativo a expansão da exponencial}$$

onde  $n_1, \dots$ , é o número de acoplamentos do tipo 1,2 .... Como no exemplo acima há 2 acoplamentos do tipo  $\tilde{w}_1$ , o fator é  $-\frac{1}{2}$ . Como a contração pode se dar de duas formas diferentes, aparece um fator de simetria de contração igual a 2. Procedendo da mesma forma, do diagrama



obtemos a soma

$$J_2(k) = \sum_K [(k-q) + \tilde{\gamma}_2]^{-1} [q^2 + \tilde{\gamma}_2]^{-1} \tag{A.12}$$

e o coeficiente

$$a_{14} = -18 \tag{A.13}$$

A.2 Cálculo dos Coeficientes de  $a_2(k)$

Escrevemos  $a_2(k)$  como

$$a_2(k) = a_{21} I_1 u_2 + a_{22} I_2 u_3 + a_{23} J_3(k) \tilde{w}_2^2 \tag{A.14}$$

Procedendo da mesma forma que anteriormente, dos diagramas obtemos os coeficientes e as somas, ou seja,

$$2 \left[ \text{Diagram} \right] = 2 \left[ \text{Diagram} \right] = \frac{1}{2} a_{21} u_2 I_1 \psi_k \psi_{-k} \tag{A.15}$$

$a_{21} = 4$

$$6 \left[ \text{Diagram} \right] = 6 \left[ \text{Diagram} \right] = \frac{1}{2} a_{22} I_2 u_3 \psi_k \psi_{-k} \tag{A.16}$$

$a_{22} = 12$

$$-18 \left[ \begin{array}{c} \hat{q}_1, \hat{q}_1 - k_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \triangle \quad \triangle \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \hat{k}_2 \quad \hat{k}_2 \end{array} \right] = -18 \left[ \begin{array}{c} q \\ \text{loop} \\ k-q \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} q \\ \text{loop} \\ k-q \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_{23} \tilde{w}_2^2 J_3(k) \psi_k \psi_{-k}$$

x 1

$$J_3(k) = \sum_q \frac{1}{2} \left\{ \left[ (k-q)^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \left[ q^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} + \left[ (k-q)^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} \left[ q^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \right\} \quad (\text{A.17})$$

$$\alpha_{23} = -36 \quad (\text{A.18})$$

### A.3 Cálculo dos Coeficientes de $b_1(k_1, k_2)$

Escrevemos  $b_1(k)$  como:

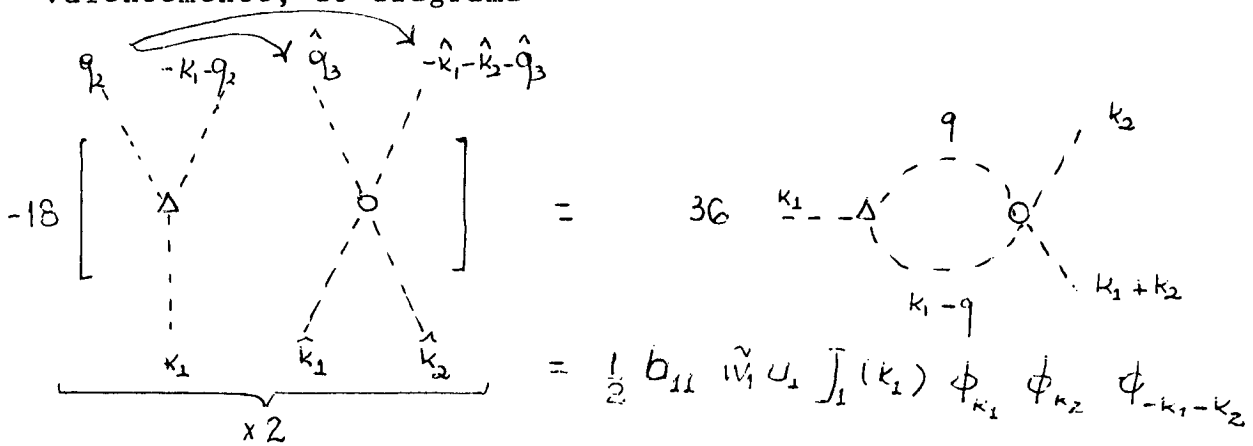
$$b_1(k_1, k_2) = b_{11} J_1(k_1) \tilde{w}_1 u_1 + b_{12} J_2(k_1) \tilde{w}_2 u_2 + b_{13} L_1(k_1, k_2) \tilde{w}_1^3 + b_{14} L_2(k_1, k_2) \tilde{w}_2^3 \quad (\text{A.19})$$

onde  $b_{11}$  resulta da integração em (3.8) de:



$$\begin{aligned}
 \sum_{k_1, k_2} b_{11} J_1(k_1) \tilde{w}_1 u_1 \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{-k_1-k_2} &= \\
 &= \frac{\int \prod d\phi_q \sum (-16) \tilde{w}_1 u_1 \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{-k_1-k_2} \phi_{\hat{k}_1} \phi_{\hat{k}_2} \phi_{\hat{q}_3} \phi_{-\hat{k}_1-\hat{k}_2-\hat{q}_3} e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}}{\int \prod d\phi_q e^{-\frac{1}{2} \sum_q (q^2 + \tilde{r}_1) \phi_q \phi_{-q}}} \\
 &= \sum_{k_1, k_2} (-36) \tilde{w}_1 u_1 \sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1 q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} \quad (A.20)
 \end{aligned}$$

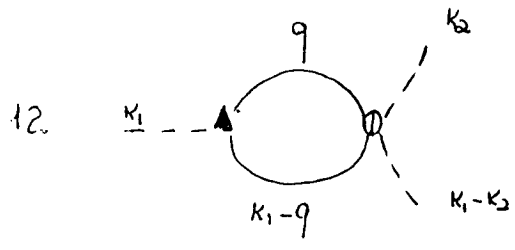
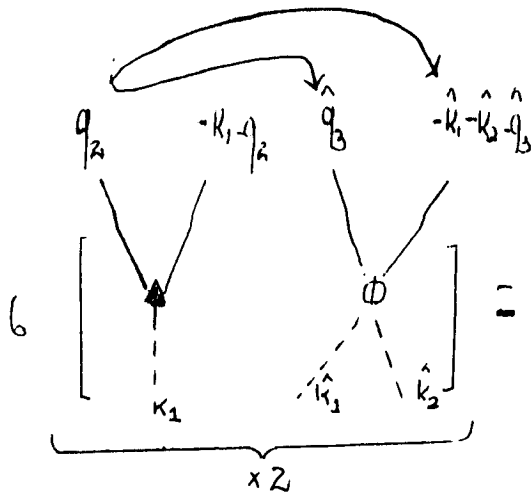
onde identificamos a soma em q com  $J_1(k_1)$  e onde  $b_{11} = -36$ . Equivalentemente, do diagrama



obtemos o coeficiente

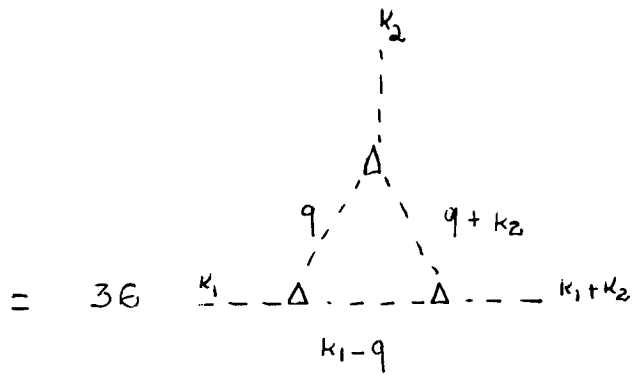
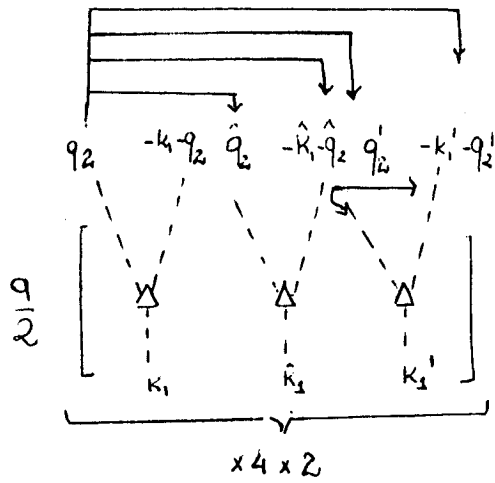
$$b_{11} = -36 \quad (A.21)$$

Da mesma forma, obtemos os demais termos de (A.19) dados por:



$b_{12} = 12$

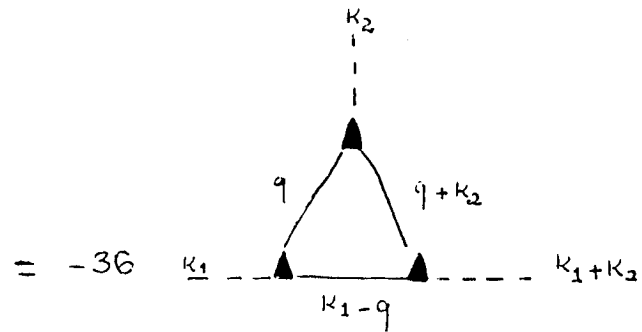
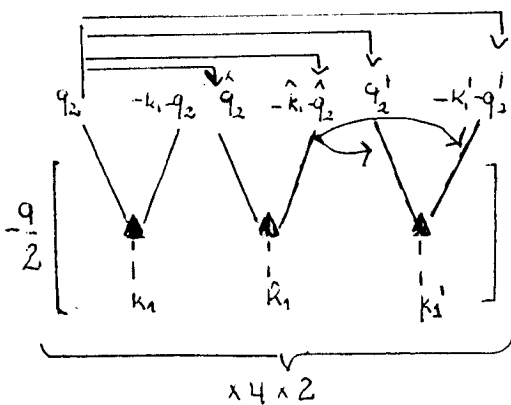
(A.22)



$b_{13} = 36$

(A.23)

$$L_1(k_1, k_2) = \sum_q [q^2 + \tilde{\gamma}_1]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{\gamma}_1]^{-1} [(k_2 + q)^2 + \tilde{\gamma}_1]^{-1}$$



$b_{14} = -36$

(A.24)

(A.25)

$$L_2(k_1, k_2) = \sum_q [q^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_2 + q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} \quad (\text{A.26})$$

onde as flexas indicam as possíveis contrações.

#### A.4 Cálculo dos Coeficientes de $b_2(k_1, k_2)$

Escrevemos  $b_2(k_1, k_2)$  como:

$$b_2(k_1, k_2) = b_{21} J_1(k_1) \tilde{w}_1 u_2 + b_{22} J_2(k_1) \tilde{w}_2 u_3 + b_{23} J_3(k_1) \tilde{w}_2^2 u_2 + b_{24} L_3(k_1, k_2) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^2 + b_{25} L_4(k_1, k_2) \tilde{w}_2^3 \quad (\text{A.27})$$

onde, procedendo da mesma forma que anteriormente, obtemos:

$$6 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \times 2 \end{array} \right] = 4 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ + 2 \rho \end{array} \right] = -3 b_{21} J_1(k_1) \tilde{w}_1 u_2 \phi_{k_2} \psi_{k_2} \psi_{-k_1 - u_2} \quad (\text{A.28})$$

$$b_{21} = -4 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \times 2 \end{array} \right] = 12 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + 2 \rho \end{array} \right]$$

(A.29)

$$b_{22} = -12$$

$$48 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] = +16 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + 2\rho \end{array} \right]$$

x 1

(A.30)

$$b_{23} = -16$$

$$54 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] = +36 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + 2\rho \end{array} \right]$$

x 2

(A.31)

$$b_{24} = -36$$

$$L_3(k_1, k_2) = \sum_q \left\{ \frac{1}{3} [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_2 + q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} + 2 \text{ permuta\u0177\u00f5es} \right\}$$

(A.32)

$$-54 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] = -36 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + 2\rho \end{array} \right]$$

x 2

$$b_{25} = 36$$

(A.33)

$$L_4(k_1, k_2) = \sum_q \left\{ \frac{1}{3} \left[ (k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} \left[ q^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \left[ (k_2 + q)^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} + 2\rho \right\} \quad (\text{A.34})$$

onde  $2\rho$  indica 2 permutações entre os momentos  $k_1, k_2, k_3$ .

### A.5 Cálculo dos Coeficientes de $c_1(k_1, k_2, k_3)$

Escrevemos  $c_1(k_1, k_2, k_3)$  como:

$$\begin{aligned} c_1(k_1, k_2, k_3) = & C_{11} \int_1(k_1) u_1^2 + C_{12} \int_2(k_1) u_2^2 + C_{13} L_1(k_1, k_2) \tilde{w}_1^3 \\ & + C_{14} L_2(k_1, k_2) \tilde{w}_2^3 + C_{15} T_1(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_1^4 + \\ & + C_{16} T_2(k_1, k_2, k_3) \tilde{w}_2^4 \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

onde, usando o mesmo procedimento que anteriormente, obtemos:

$$C_{11} = -36 \quad (\text{A.36})$$

$$C_{12} = -4 \tag{A.37}$$

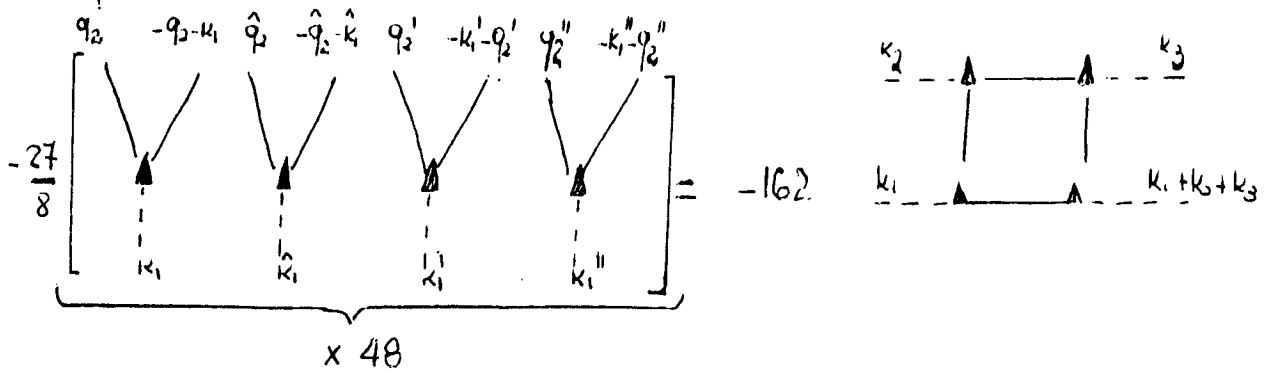
$$C_{13} = 216 \tag{A.38}$$

$$C_{14} = 72 \tag{A.39}$$

$$C_{15} = -162 \tag{A.40}$$

Por simplicidade, não indicamos explicitamente as possíveis contrações quando o seu número for elevado.

$$\bar{T}_1(k_1, k_2, k_3) = \sum_q [q^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_3 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_3 - q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} [(k_2 - k_3 + q)^2 + \tilde{r}_1]^{-1} \quad (\text{A.41})$$



$$c_{16} = -162 \quad (\text{A.42})$$

$$\bar{T}_2(k_1, k_2, k_3) = \sum_q [q^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_1 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_2 - q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} [(k_2 - k_3 + q)^2 + \tilde{r}_2]^{-1} \quad (\text{A.43})$$

A.6 Cálculo dos Coeficientes de  $c_2(k_1, k_2, k_3)$

Escrevemos  $c_2(k_1, k_2, k_3)$  como:

$$\begin{aligned}
 G_2(K_1, K_2, K_3) = & C_{21} J_1(K_1) U_1 U_2 + C_{22} J_2(K_1) U_2 U_3 + C_{23} J_3(K_1) U_1^2 + \\
 & + C_{24} L_1(K_1, K_2) \tilde{W}_1^2 U_3 + C_{25} L_2(K_1, K_2) \tilde{W}_2^2 U_3 + \\
 & + C_{26} L_3(K_1, K_2) \tilde{W}_1 \tilde{W}_2 U_2 + [C_{27}^{(a)} + C_{27}^{(b)}] L_4(K_1, K_2) \tilde{W}_2^2 U_2 + \\
 & + C_{28} L_3(K_1, K_2) \tilde{W}_2 U_1 + C_{29}^{(1)} \bar{T}_3(K_1, K_2, K_3) \tilde{W}_1 \tilde{W}_2^2 + \\
 & + C_{29}^{(2)} \bar{T}_4(K_1, K_2, K_3) \tilde{W}_1 \tilde{W}_2^3 + C_{29}^{(3)} \bar{T}_5(K_1, K_2, K_3) \tilde{W}_2^4
 \end{aligned}$$

(A.44)

onde procedendo como anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}
 -12 \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} q_3 \quad -k_1 - k_2 - q_3 \\ \hat{q}_3 \quad -\hat{k}_1 - \hat{k}_2 - \hat{q}_3 \end{array} \right]}^{\text{---}} \\ \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\times 2} \end{array} \right] = -12 \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} k_1 \quad k_3 \\ k_2 \quad k_1 + k_2 + k_3 \end{array} \right] + 1p \end{array} \right] \\
 = 2 C_{21} J_1(K_1) U_1 U_2 \phi_{k_1} \phi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1 - k_2 - k_3}
 \end{aligned}$$

$$C_{21} = -12 \tag{A.45}$$

$$\begin{aligned}
 -12 \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} q_3 \quad -k_1 - k_2 - q_3 \\ \hat{q}_3 \quad -\hat{k}_1 - \hat{q}_3 - k_3 \end{array} \right]}^{\text{---}} \\ \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\times 2} \end{array} \right] = -12 \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} k_1 \quad k_3 \\ k_2 \quad k_1 + k_2 + k_3 \end{array} \right] + 1p \end{array} \right]
 \end{aligned}$$



(A.46)

$$C_{22} = -12$$

$$-32 \left[ \begin{array}{c} \hat{q}_3 \quad -k_1 - k_2 - q_3 \\ \circ \quad \circ \\ k_1 \quad k_2 \quad \hat{k}_1 \quad \hat{k}_2 \quad \hat{q}_3 \quad -\hat{k}_1 - \hat{k}_2 - \hat{q}_3 \end{array} \right] = -16 \left[ \begin{array}{c} k_2 \quad k_3 \\ \circ \quad \circ \\ k_1 \quad k_1 + k_2 + k_3 \end{array} + 1p \right]$$

x 1

(A.47)

$$C_{23} = -16$$

$$9 \left[ \begin{array}{c} q_2 \quad -k_1 - q_2 \quad \hat{q}_2 \quad -\hat{k}_1 - \hat{q}_2 \quad q_3 \quad -k_1' - k_2' - q_3' \\ \Delta \quad \Delta \quad \circ \\ k_1 \quad \hat{k}_1 \quad k_1' \quad k_2' \end{array} \right] = 36 \left[ \begin{array}{c} k_2 \\ \Delta \\ k_1 \quad \Delta \quad \circ \\ k_1 + k_2 + k_3 \end{array} + 1p \right]$$

x 8

(A.48)

$$C_{24} = 36$$

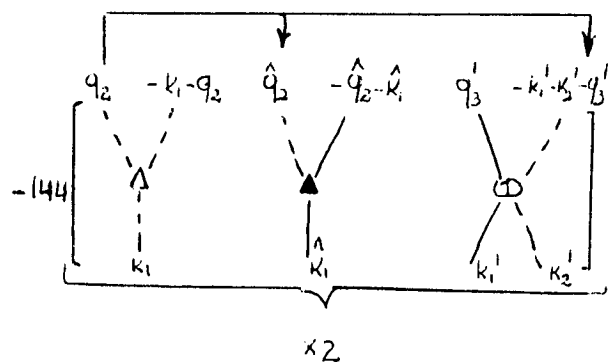
$$27 \left[ \begin{array}{c} q_2 \quad -k_1 - q_2 \quad \hat{q}_2 \quad -\hat{k}_1 - \hat{q}_2 \quad q_3 \quad -k_1' - k_2' - q_3' \\ \Delta \quad \Delta \quad \circ \\ k_1 \quad \hat{k}_1 \quad k_1' \quad k_2' \end{array} \right] = 108 \left[ \begin{array}{c} k_2 \\ \Delta \\ k_1 \quad \Delta \quad \circ \\ k_1 + k_2 + k_3 \end{array} + 1p \right]$$

x 8

(A.49)

$$C_{25} = 108$$

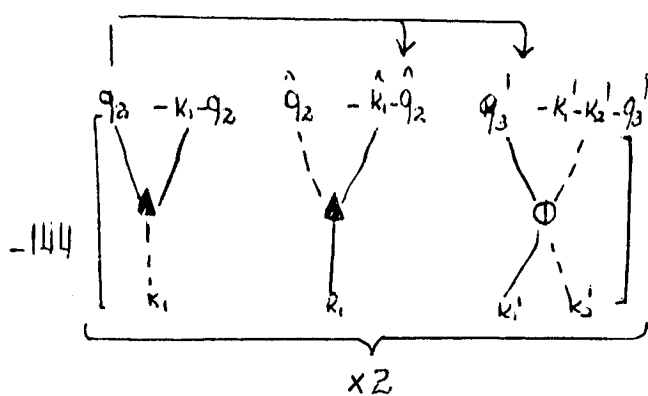
onde  $1p$  indica uma permutação  $(k_1, k_2) \leftrightarrow (k_3, k_1 + k_2 + k_3)$ .



$$= -144 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram with } k_2 \text{ external line} \\ k_1 \text{ external line} \\ k_1+k_2+k_3 + 1p \end{array} \right]$$

(A.50)

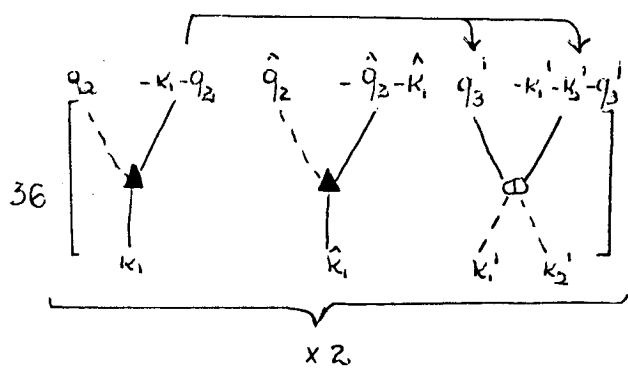
$C_{26} = -144$



$$= 144 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram with } k_2 \text{ external line} \\ k_1 \text{ external line} \\ k_1+k_2+k_3 + 1p \end{array} \right]$$

(A.51)

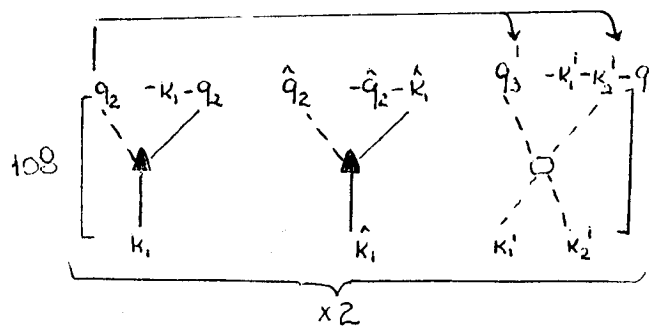
(a)  
 $C_{27} = 144$



$$= 36 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram with } k_2 \text{ external line} \\ k_1 \text{ external line} \\ k_1+k_2+k_3 + 1p \end{array} \right]$$

(A.52)

(b)  
 $C_{27} = 36$



$$= 108 \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram with } k_2 \text{ external line} \\ k_1 \text{ external line} \\ k_1+k_2+k_3 + 1p \end{array} \right]$$

$C_{28} = 108$

(A.53)

$$-81 \left[ \text{diagram} \right] \times 8 = -324 \left[ \text{diagram} \right] + 1\rho$$

ii)  $C_{29} = -324$  (A.54)

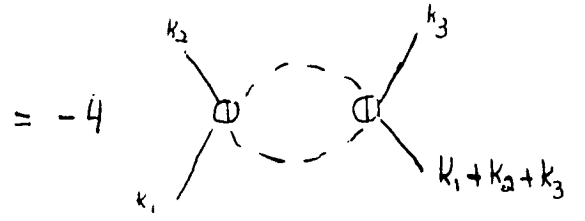
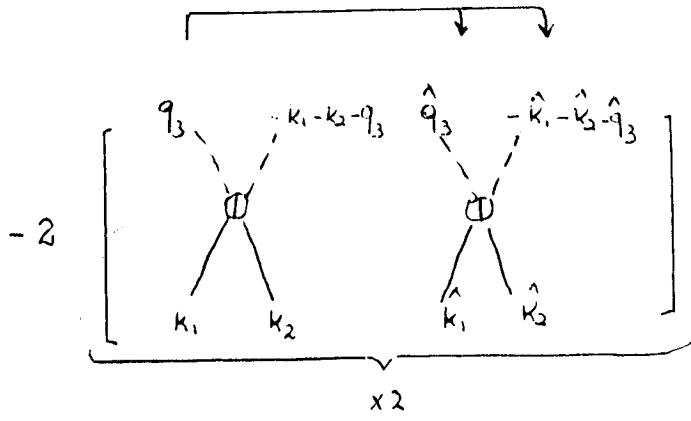
$$T_3(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{4} \sum_q \left[ q^2 + \tilde{r}_3 \right]^{-1} \left[ (k_1 - q)^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \left[ (k_2 + q)^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \left[ (k_2 - k_3 + q)^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} + 3 \text{ permutações} \quad (\text{A.55})$$

$$162 \left[ \text{diagram} \right] \times 8 = 324 \left[ \text{diagram} \right] + 1\rho$$

(2)  $C_{29} = +324$  (A.56)

$$T_4(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{6} \sum_q \left[ q^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \left[ (k_1 - q)^2 + \tilde{r}_1 \right]^{-1} \left[ (k_2 - k_3 + q)^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} \left[ (k_3 + q)^2 + \tilde{r}_2 \right]^{-1} + 5 \text{ permutações} \quad (\text{A.57})$$

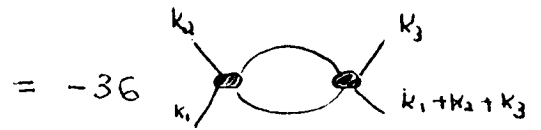
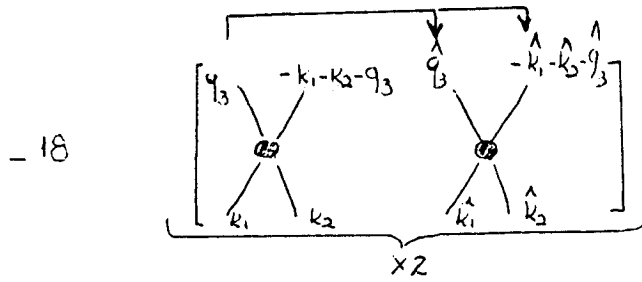




$= C_{31} \int_1 (k_1) u_2^2 \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \psi_{-k_1-k_2-k_3}$

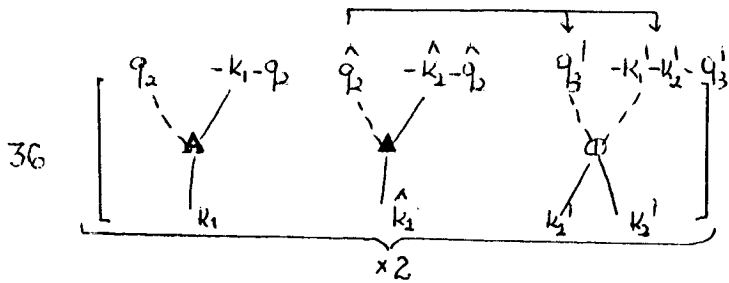
$C_{31} = -4$

(A.61)



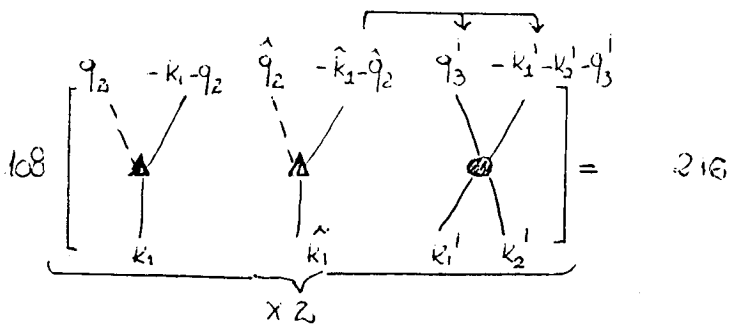
$C_{32} = -36$

(A.62)

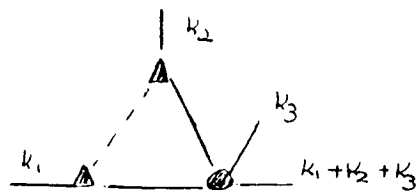


$C_{33} = 72$

(A.63)



$= 216$



$C_{34} = 216$

(A.64)

$$\begin{array}{c}
 -54 \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 q_2 & -k_1+q_2 & \hat{q}_2 & -k_1+q_2 \\
 & \hat{q}_2 & -k_1+q_2 & q_2 \\
 & & q_2 & -k_1+q_2 \\
 & & & q_2 \\
 & & & -k_1+q_2 \\
 & & & -k_1+q_2
 \end{array} \right] = \begin{array}{c}
 k_2 \quad k_3 \\
 \text{---} \Delta \text{---} \Delta \text{---} \\
 | \quad | \\
 k_1 \quad k_1+k_2+k_3 \\
 \text{---} \Delta \text{---} \Delta \text{---}
 \end{array}
 \end{array}$$

$\times 6$

$$c_{35} = -324 \tag{A.65}$$

A.8 Cálculo dos Coeficientes de d

Escrevemos  $d$  como:

$$d = d_{11} \bar{I}_1 \tilde{w}_1 + d_{12} \bar{I}_2 \tilde{w}_2 \tag{A.66}$$

onde procedendo exatamente como nos casos anteriores:

$$\begin{array}{c}
 3 \\
 \left[ \begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 q_2 \quad -k_1+q_2 \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \times \\
 k_1
 \end{array} \right] = 3 \cdot x^{-k} \Delta \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\times 1} = d_{11} \bar{I}_1 \tilde{w}_1 \tilde{h}_1 \phi_k \\
 d_{11} = 3
 \end{array}$$

(A.67)

$$\begin{array}{c}
 -3 \\
 \left[ \begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 q_2 \quad -k_1+q_2 \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \bullet \\
 k_1
 \end{array} \right] = -3 \cdot x^{-k} \bullet \left( \begin{array}{c} \circ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\times 1}
 \end{array}$$

(A.68)

## APÊNDICE B

### CÁLCULO DE $I_i$ , $J_i(k)$ , $L_i(k_1, k_2)$ e $T_i(k_1, k_2, k_3)$

No apêndice A, obtivemos expressões explícitas para os coeficientes  $a_1(k)$ ,  $a_2(k)$  ... como funções das somas  $I_i$ ,  $J_i(k)$ ,  $L_i(k_1, k_2)$  e  $T_i(k_1, k_2, k_3)$ . Fazendo a passagem ao contínuo, transformamos estas somas em integrais.

Da mesma forma como, ao gerarmos os acoplamentos trilineares e quárticos em (2.18) desprezamos termos de  $O(k^2)$  por serem não relevantes para o comportamento crítico do sistema, ao gerarmos estes acoplamentos renormalizados, desprezaremos termos desta mesma ordem. Assim, os coeficientes  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  e conseqüentemente as integrais a eles relacionados, ficam independentes de  $k$ .

Por outro lado, assim como, ao gerarmos os acoplamentos quadráticos, o fizemos separando-os em termos independentes de  $k^2$ ,  $r_1$  e  $r_2$ , e termos dependentes de  $k^2$ , que fornecem, respectivamente, as temperaturas crítica e tricrítica do sistema e a divergência da função de correlação; ao calcularmos os acoplamentos quadráticos renormalizados, também separaremos em uma contribuição independente de  $k^2$  que fornecerá a divergência da função de correlação. Assim, os coeficientes  $a_1(k)$  e  $a_2(k)$  serão reescritos como  $a_i(k) = a_i(k=0) + k^2 \hat{a}_i$  e conseqüentemente  $J_i(k) = J_i(k=0) + k^2 \hat{J}_i$ .

### B.1 Cálculo de $I_i$

No limite contínuo, as somas (A.3) e (A.6) são expressas como integrais, dadas por:

$$I_i = K_d \int_{e^{-l}}^1 \frac{q^{d-1}}{q^2 + \tilde{r}_i} dq \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.1})$$

onde

$$K_d = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{d-2} \theta \, d\theta \, d\psi \quad (\text{B.2})$$

é a área da esfera unitária em  $d$  dimensões.

Tomando-se  $l$  infinitesimal, reescrevemos (B.1) da forma:

$$\begin{aligned} I_i &= I_i(l=0) + l \left. \frac{dI_i(l)}{dl} \right|_{l=0} + O(l^2) \\ &= \frac{K_d}{1 + \tilde{r}_i} l \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

### B.2 Cálculo de $J_i(k)$

As integrais  $J_i(k)$  compõem tanto os coeficientes quadráticos  $a_i(k)$ , como os trilineares  $b_i(k)$  e quárticos  $c_i(k)$ . Nestes dois últimos, conforme ressaltamos anteriormente, desprezaremos con



tribuições de  $O(k^2)$ ; nos primeiros, no entanto, teremos de considerar tais contribuições já que estas fornecem o comportamento crítico das funções de correlação de dois campos.

### B.2.1 Cálculo de $J_1(k)$ e $J_2(k)$

Reescrevemos (A.9) e (A.12) no limite contínuo como:

$$J_i(k) = \int_{e^{-l}}^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d^d q}{[(k-q)^2 + \tilde{r}_i][q^2 + \tilde{r}_i]} \quad i=1,2 \quad (\text{B.4})$$

Expandindo-se o denominador até  $O(k^4)$ , obtemos:

$$J_i(k) = \int_{e^{-l}}^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d^d q \left\{ \frac{1}{[q^2 + \tilde{r}_i]^2} - \frac{(q^2 + \tilde{r}_i) k^2 - (2 \vec{k} \cdot \vec{q})^2}{[q^2 + \tilde{r}_i]^4} \right\} + O(k^4) \quad (\text{B.5})$$

Resolvemos as integrais em  $\theta$ ,  $\psi$  e em  $1 > q > e^{-l}$ , obtendo:

$$J_i(k) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_i]^2} l + k^2 \left\{ \frac{-k_d}{[1 + \tilde{r}_i]^3} + \frac{4}{d} \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_i]^4} \right\} l + O(l^2, k^4)$$

(B.6)

onde  $K_d$  é dado por (B.2).

### B.2.2 Cálculo de $J_3(k)$

Reescrevemos (A.17) no limite contínuo como:

$$J_3(k) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d^d q}{[q^2 + \tilde{r}_1][(k \cdot q)^2 + \tilde{r}_2]} + \frac{d^d q}{[q^2 + \tilde{r}_2][(k \cdot q)^2 + \tilde{r}_1]} \right\}$$

(B.7)

Novamente, expandimos os denominadores até  $O(k^4)$  e tomamos  $l$  infinitesimal

$$J_3(k) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1][1 + \tilde{r}_2]} l + \frac{k^2}{2} \left[ \frac{-K_d}{[1 + \tilde{r}_1]^2 [1 + \tilde{r}_2]} - \frac{K_d}{[1 + \tilde{r}_2]^2 [1 + \tilde{r}_1]} + \frac{4}{d} \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1]^3 [1 + \tilde{r}_2]} + \frac{4}{d} \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_2][1 + \tilde{r}_2]^3} \right] l \quad (B.8)$$

### B.2.3 Cálculo de $L_i(k_1, k_2)$ e $T_i(k_1, k_2, k_3)$

Como estas somas só compõem os coeficientes trilineares  $b_i$  e quárticos  $c_i$ , desprezaremos contribuições de  $O(k^2)$  de sorte que, no limite contínuo, tornam-se à esta ordem integrais indepen

dentos de  $k$ . Assim, resolveremos as integrais (A.24), (A.26), (A.32), (A.34), (A.41), (A.43), (A.55), (A.57) e (A.59), respectivamente, da forma:

$$L_1(k_1, k_2) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1]^3} \ell + O(k_i^2) \quad (\text{B.9})$$

$$L_3(k_1, k_2) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1]^2 [1 + \tilde{r}_2]} \ell + O(k_i^2) \quad (\text{B.10})$$

$$L_4(k_1, k_2) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1] [1 + \tilde{r}_2]^2} \ell + O(k_i^2) \quad (\text{B.11})$$

$$T_1(k_1, k_2, k_3) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1]^4} \ell + O(k_i^2) \quad (\text{B.12})$$

$$T_2(k_1, k_2, k_3) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_2]^4} \ell + O(k_i^2) \quad (\text{B.13})$$

$$T_3(k_1, k_2, k_3) = \frac{k_d}{[1 + \tilde{r}_1]^3 [1 + \tilde{r}_2]} \ell + O(k_i^2) \quad (\text{B.14})$$

$$T_4(k_1, k_2, k_3) = \frac{k_d}{[1+\tilde{r}_1]^2 [1+\tilde{r}_2]^2} l + O(k_i^2) \quad (\text{B.15})$$

$$T_5(k_1, k_2, k_3) = \frac{k_d}{[1+\tilde{r}_1] [1+\tilde{r}_2]^3} l + O(k_i^2) \quad (\text{B.16})$$

onde tomamos  $l$  infinitesimal.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LANDAU, L. Statistical physics. London, Pergamon Press, 1958. 484p.
2. FISHER, M.E. The theory of equilibrium critical phenomena. Rep. Prog. Phys., London, 30:615-730, Jan. 1967.  
STANLEY, H.P. Phase transitions and critical phenomena. Oxford, Clarendon, 1971.
3. SCHOFIELD, P.; LISTER, J.D.; HO, J.T. Correlation between critical coefficients and critical exponents. Phys. Rev. Lett., New York, 23(19):1098-102, Nov. 1969.  
VICENTINI-MISSONI, M.; SENGER, J.M.H. Levelt; GREEN, M.S. Thermodynamics of CO<sub>2</sub>, Xe and He<sup>4</sup> in the critical region. Phys. Rev. Lett., New York, 22(9):389-93, Mar. 1969.  
GRIFFITHS, Robert B. Dependence of critical indices on a parameter. Phys. Rev. Lett., New York, 24(26):1479-82, June 1970.
4. KADANOFF, L.P. Critical behavior. In: INTERNATIONAL SCHOOL OF PHYSICS ENRICO FERMI, 51, Varenna, July 27 - Aug. 8, 1970. Critical phenomena. New York, Academic Press, 1971. p. 100-17.
5. FISHER, M.E. The theory of critical point singularities. In: INTERNATIONAL SCHOOL OF PHYSICS ENRICO FERMI, 51, Varenna, July 27 - Aug. 8, 1970. Critical phenomena. New York, Academic Press, 1971. p. 1-99.
6. STAUFFER, D.; FERER, M.; WORTIS, Michael. Universality of second-order phase transitions. Phys. Rev. Lett., New York, 29(6):345-9, Aug. 1972.

7. HOHENBERG, P.C. et alii. Two-scale-factor universality and renormalization group. Phys. Rev. B, New York, 13(7):2986-96, Apr. 1976.
8. BERVILLIER, C. Universal relations among critical amplitudes. Calculations up to order  $\epsilon^2$  for systems with continuous symmetry. Phys. Rev. B, New York, 14(11):4964-75, Dec. 1976.
9. AHARONY, Amnon & AHLERS, Guenter. Universal ratios among correction-to-scaling amplitudes and effective critical exponents. Phys. Rev. Lett., New York, 14(12):782-5, Mar. 1980.
10. RUDNICK, Joseph & NELSON, David R. Equations of state and renormalization-group recursion relations. Phys. Rev. B, New York, 13(5):2208-21, Mar. 1976.
11. NELSON, David R. & DOMANY, Eyton. Equations of state for bicritical points. I. Calculation in the disordered phase. Phys. Rev. B, New York, 13(11):236-50, Jan. 1977.
12. DOMANY, Eyton; NELSON, David; FISHER, Michael E. Equations of state for bicritical points. II. Ising-like ordered phases. Phys. Rev. B, New York, 15(7):3483-509, Apr. 1977.
13. MUKAMEL, D.; FISHER, M.E.; DOMANY, E. Magnetization of cubic ferromagnets and the three-component Potts model. Phys. Rev. Lett., New York, 37(10):565-8, Sept. 1976.
14. BLANKSCHTEIN, Daniel & AHARONY, Amnon. Effects of symmetry-breaking perturbations on the three-state Potts model. J. Phys. C, London, 13(25):4635-48, Sept. 1980.
15. POTTS, R.B. Some generalized order-disorder transformations. Proc. Cambridge Philos. Soc., London, 48(1):106-9, 1952.
16. WU, F.Y. The Potts model. Rev. Mod. Phys., New York, 46(4):597-616, Oct. 1976.

17. ZIA, R.K.P. & WALLACE, D.J. Critical behavior of the continuous n-component Potts model. J. Phys. A, London, 8(9):1495-507, Sept. 1975.
18. BARBOSA, Marcia & THEUMANN, Walter. Non-universality of ratios of critical and tricritical parameters in the three-state Potts model with symmetry breaking perturbations. Enviado a publicar.
19. AHARONY, A.; MÜLLER, K.A.; BERLINGER, W. Trigonal-to-tetragonal transition in stressed SrTiO<sub>3</sub>: a realization of the three-state Potts model. Phys. Rev. Lett., New York, 38(1):33-40, Jan. 1977.
20. FONTANARI, J.F. & THEUMANN, W.K. Effects of trilinear symmetry breaking on the Potts model transition of uniaxially stressed SrTiO<sub>3</sub>. Phys. Rev. B, New York, 33(5):3530-3, Mar. 1986.
21. HUBBARD, J. Calculations of partition functions. Phys. Rev. Lett., New York, 3(2):77-8, July 1959.
22. STRATONOWICH, R.L. On a method of calculating quantum distribution functions. Soviet Physics Doklady, New York, 2(4):416-9, July/Aug. 1957.
23. PURWINS, H.-G. et alii. Magnetization, magnetocrystalline anisotropy the crystalline electric field in (rare earth) Al<sub>2</sub> compounds. J. Phys. C, London, 7(19):3573-82, Oct. 1974.
24. BAK, P. Magnetic properties of NdAl<sub>2</sub>. J. Phys. C, London, 7(22):4097-103, Nov. 1974.

25. BARBARA, B.; ROSSIGNOL, M.F.; BAK, Per. First-order transitions and tricritical points in  $\text{DyAl}_2$ : a realization of the three-state Potts model. J. Phys. C, London, 11(5):L183-7, Mar. 1978.
26. PYTTE, E. Renormalization-group calculation of first- and second-order phase transitions in Potts model. Phys. Rev. B, New York, 22(9):4450-61, Nov. 1980.
27. AHARONY, Amnon. Multicritical points in structural phase transitions. Ferroelectrics, London, 24(1/4):313-8, Jan. 1980.
28. SLONCZEWSKI, J.C. Analysis of stress and temperature dependence of fluorescence in  $\text{SrTiO}_3$ :  $\text{Cr}^{3+}$ . Phys. Rev. B, New York, 2(11):4646-55, Dec. 1970.
29. SLONCZEWSKI, J.C. & THOMAS, H. Interaction of elastic strain with the structural transition of strontium titanate. Phys. Rev. B, New York, 1(9):3599-608, May 1970.
30. UNOKI, Hiromi & TUNETARO, Sakudo. Electron spin resonance of  $\text{Fe}^{3+}$  in  $\text{SrTiO}_3$  with special reference to the 110K phase transition. Journal of the Phys. Soc. of Japan, Tokyo, 23(3):546-52, Sept. 1967.
31. AHARONY, Amnon & BRUCE, Alastair D. Polycritical points and floplike displacive transitions in perovskites. Phys. Rev. Lett., New York, 33(7):427-30, Aug. 1974.
32. BLANKSCHTEIN, Daniel & AHARONY, Amnon. Critical and tricritical points near the Potts model transition of uniaxially stressed  $\text{SrTiO}_3$ . J. Phys. C, London, 14(14):1919-44, May 1981.



33. MÜLLER, K.A.; BERLINGER, W.; SLONCZEWSKI, J.C. Order parameter and phase transitions of stressed  $\text{SrTiO}_3$ . Phys. Rev. Lett., New York, 25(11):734-7, Sept. 1970.
34. FISHER, Michael E. The renormalization group in the theory of critical behavior. Rev. Mod. Phys., New York, 46(4):597-614, Oct. 1974.
35. WEGNER, F.I. & HOUGHTON, A. Renormalization group equation for critical phenomena. Phys. Rev. A, New York, 8(1):401-12, July 1973.
36. BLANKSCHEIN, Daniel & AHARONY, Amnon. Effects of spatial anisotropy on the order of fluctuation-driven transitions. Phys. Rev. B, New York, 26(1):415-9, July 1982.
37. RUDNICK, Joseph.  $\epsilon$  expansion for free energy of the continuous three-state Potts model: evidence for a first-order transition. J. Phys. A, London, 8(7):1125-9, 1975.
- 
38. BARBOSA, Marcia C. & THEUMANN, W.K. Fluctuations and cubic anisotropy in the Potts-model transition of  $\text{DyAl}_2$  in an external field. Em preparação para ser submetido à publicação.
39. BARBOSA, Marcia C. & THEUMANN, W.K. Non-universality of critical-to-tricritical ratios for the three-state Potts model with symmetry-breaking perturbations in  $d = 6 - \epsilon$  dimensions. Em preparação para ser submetido à publicação.
40. BARBOSA, Marcia C. & THEUMANN, W.K. Equations of state for the three-Potts model with symmetry-breaking perturbations. Em preparação para ser submetido à publicação.