Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

O MÉTODO DE PERRON: APLICAÇÕES E EXTENSÕES

por

Edson Sidney Figueiredo

Porto Alegre (RS), Dezembro de 2000

Dissertação submetida por EDSON SIDNEY FIGUEIREDO como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:
Prof^{a}. Dra Eleni Bisogni
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

Data de Defesa: 19 de Dezembro de 2000.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar pela força de vontade para concluir este trabalho.

Sou grato às professoras Eleni Bisognin, Vanilde Bisognin, Cydara Cavedon Ripoll e ao professor Luiz Fernando C. da Rocha, pelo incentivo constante e valiosa participação na minha formação matemática.

Agradeço a todos os colegas da pós-graduação pela amizade e pelo apoio nunca negado.

Também agradeço aos meus colegas Jorge e Oswaldo pela humorada companhia durante todo este tempo.

Quero agradecer a João Roberto Lazzarin pela paciência dispensada e ao incentivo a trilhar este caminho.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

Finalmente agradeço ao meu orientador Jaime Ripoll, pelo enorme e essencial apoio a mim dispensado e, principalmente pelo seu exemplo de professor, pesquisador e grande amigo.

À Lían Víctor, por seu nacimento, e Gilmara João,
que tem sido mais que uma esposa, uma amiga.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos e desenvolvemos o Método de Perron, fazendo uma aplicação ao ploblema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Apresentamos também uma extensão deste método dentro de EDP's e, por fim, obtemos uma extensão geométrica que se aplica a superfícies ao invés de gráficos. Comentamos a aplicação deste método geométrico à existência de superfícies mínimas tendo como bordo duas curvas convexas em planos paralelos do $\mathbb{R}^3$.

Abstract

In this work we explain Perron's method and obtain an application of it to the Dirichlet Problem for the constant mean curvature surface equation in $\mathbb{R}^3$. We also obtain an extension of this method within the P.D.E theory and, finally, we obtain a geometric extension which applies to surfaces instead of graphs. This geometric extension can be used to prove the existence of a minimal compact surface having as boundary two convex curves in palallel plane of $\mathbb{R}^3$. We discuss this result at the final part of the work.

Sumário

Notação

Inicialmente, vamos fixar as notações que iremos utilizar nos próximos capítulos, notações estas usualmente utilizadas em estudos de equações diferenciais parciais.

Ω: um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, não necessariamente limitado; Ω é um domínio se ele também é conexo.

∂S: pontos da fronteira do conjunto S;

Dado $S' \subset S$, escrevemos $S' \subset\subset S$ se $\text{dist}(S', \partial S) > 0$; S' está estritamente contido em S.

$D_i u = \partial u/\partial x_i, D_{ij} u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$,etc..., $Du = (Du_1, Du_2, .., Du_n)$ = gradiente de u.

$D^2 u = [D_{ij} u]$ = matriz das derivadas segundas $D_{ij} u$.

$C^0(\Omega)$: espaço das funções contínuas em Ω.

$C^k(\Omega)$: espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω.

$C^k(\overline{\Omega})$: espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω que se estendem continuamente, bem como todas as suas derivadas até ordem k, a $\overline{\Omega}$.

$C_0^k\left(\overline{\Omega}\right) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Lembramos que $u \in C^0(\Omega)$ é dita Hölder contínua com expoente $\alpha \in [0, 1)$ em Ω se

$$[u]_\alpha := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$:=$\{u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid$ as derivadas de ordem k de u são Hölder contínuas em Ω com expoente α em $\Omega\}$. Notemos que $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ é um espaço de Banach com a norma

$$|u|_{k,\alpha;\Omega} := \sup_{\overline{\Omega}} |u| + \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u| + ... + \sup_{\overline{\Omega}} \left|D^k u\right| + \left[D^k u\right]_\alpha.$$

$C_0^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) := \{u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Introdução

O problema de Dirichlet para um operador Q qualquer, consiste em encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, tal que

$$\begin{cases} Q(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio do $\mathbb{R}^2$, e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é dada a priori. Se o operador Q satisfizer certas condições, então pode-se resolver o problema de existência de soluções de (2.1), utilizando-se uma técnica útil da teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP), conhecida como Método de Perron.

Nesta dissertação apresentamos e desenvolvemos o Método de Perron, fazendo uma aplicação deste ao problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$.

Apresentamos também uma extensão deste método dentro de EDP's e, por fim, obtemos uma extensão geométrica que se aplica a superfícies ao invés de gráficos.

Comentamos uma aplicação deste método geométrico à existência de superfícies mínimas tendo como bordo duas curvas convexas em planos paralelos do $\mathbb{R}^3$.

O trabalho está dividido em 4 capítulos. No terceiro, preliminares, apresentamos alguns resultados bem conhecidos sobre EDP's, a maioria sem demonstração, necessários aos capítulos subseqüentes. Em alguns dos poucos resultados que demonstramos (que são também bem conhecidos mas cujas provas não são facilmente encontrados na literatura (Lema 3.4 e Teorema 3.6)), usamos livremente teoremas clássicos da teoria dos operadores lineares elípticos (Teoria de Schauder e estimativas de Hölder para gradiente), bem como as respectivas notações que envolvem estes teoremas. A referência básica para estas demonstrações é [GT]. Em alguns outros resultados enunciados neste capítulo decidimos por apresentar também a demonstração, visto estas serem simples e autosuficientes (Teoremas 3.2 e 3.3).

No quarto capítulo apresentamos o Método de Perron, enunciamos e demonstramos o resultado fundamental deste método (Teorema 4.7). A seguir aplicamos este método ao problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante (*cmc*) $H \geq 0$, a saber

$$\begin{cases} Q_H(u) = div\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

onde $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, Ω é um domínio do $\mathbb{R}^2$ (aberto e conexo) e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é dada a priori.

Aplicamos então o Método de Perron para mostrar a existência de solução $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ de $Q_H = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = 0$, onde $H > 0$ e Ω é um domínio convexo de classe $C^{2,\alpha}$ do plano contido em uma faixa de comprimento $1/H$.

No quinto capítulo, fizemos uma extensão do Método de Perron para um operador Q qualquer não satisfazendo necessariamente as condições usuais requeridas ao método. Da forma que foi feita esta extensão (Teorema 5.5), esta admite também uma extensão a superfícies em $\mathbb{R}^3$ (Capítulo 6), a qual pode ser utilizada para provar a existência de superfícies mínimas compacta, cuja fronteira consiste de duas curvas convexas em planos paralelos de $\mathbb{R}^3$ (Seção 6.3).

Capítulo 3

Preliminares

3.1 Fatos gerais

Faremos uso dos seguintes resultados de Análise no decorrer desta dissertação:

Teorema 3.1 (Teorema das Funções Implícitas) *Sejam E, F e G espaços de Banach e sejam $U \subset E$, $V \subset F$ abertos. Seja $f : U \times V \to G$ de classe $C^{k,\alpha}$. Seja $(a, b) \in U \times V$ tal que*

$$D_2 f\,(a, b) : F \to G$$

é um homeomorfismo linear. Se $f\,(a, b) = 0$, então existem abertos $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ tal que para todo $x \in U_0$, existe um único $y\,(x) \in V_0$ tal que

$$f\,(x, y\,(x)) = 0.$$

A função

$$\begin{aligned} y : U_0 &\to V_0 \\ x &\mapsto y\,(x) \end{aligned}$$

é de classe $C^{k,\alpha}$.

Teorema 3.2 *Sejam $(E, \|.\|)$ e $(F, \|.\|)$ espaços de Banach e $L : E \to F$ linear. Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *L é contínua;*

2. *L é contínua em $0 \in E$;*

3. $\|L(h)\| \leq C\|h\|$, *para todo $h \in E$.*

Prova: 1) $\Rightarrow$ 2) Como L é contínua em todo ponto de E então, em particular, é contínua em $0 \in E$.

2) $\Rightarrow$ 3) Como L é linear então $L(0) = 0$. Da continuidade de L em 0_E temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\|h\| < \delta \Rightarrow \|L(h)\| < \varepsilon$. Tomando $c > 0$ tal que $0 < 1/c < \delta$ tem-se que: Se $\|h\| = 0$ então $\|L(h)\| = \|0\| \leq c\|h\| = 0$. Se $\|h\| \neq 0$, então

$$\left\|\frac{h}{c\|h\|}\right\| = \frac{1}{c} < \delta,$$

portanto

$$\left\|L\left(\frac{h}{c\|h\|}\right)\right\| < 1.$$

Como L é linear segue que

$$\|L(h)\| \leq c\|h\|.$$

3) $\Rightarrow$ 1) Segue imediato, pois

$$\|L(h) - L(h_0)\| = \|L(h - h_0)\| \leq c\|h - h_0\|$$

■

Teorema 3.3 (LINDELÖF) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. Então toda cobertura aberta $X \subset \bigcup A_\lambda$ admite uma subcobertura enumerável $X \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_i} \cup ...$*

Prova: Seja $E = \{x_1, ..., x_i, ...\} \subset X$ um subconjunto enumerável, denso em X. Consideremos o conjunto $\mathfrak{B}$ de todas as bola abertas $B(x; r)$, com centro num ponto de E, raio racional e tais que cada uma delas está contida em algum A_λ. $\mathfrak{B}$ é um conjunto enumerável de bolas. Afirmamos que as bolas $B \in \mathfrak{B}$ cobrem X. Com efeito, dado $x \in X$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $r > 0$ racional tal que $B(x; 2r) \subset A_\lambda$. Sendo E denso em X, podemos encontrar $x_i \in E$ com $|x - x_i| < r$. Então $x \in B(x_i; r)$. Para mostrar que $B(x_i; r) \in \mathfrak{B}$, resta ver que esta bola está contida em A_λ. Ora, $y \in B(x_i; r) \Rightarrow |y - x_i| < r \Rightarrow |y - x| \leq |y - x_i| + |x_i - x| < 2r \Rightarrow y \in B(x; 2r) \subset A_\lambda$. Isto conclui a verificação de que todas as bola $B \in \mathfrak{B}$ cobrem X. Tomando uma enumeração $B_1, ..., B_i, ...$ para essas bolas e escolhendo, para cada $i \in \mathbb{N}$, um índice $\lambda_i \in L$ tal que $B_i \subset A_{\lambda_i}$, concluimos que $X \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_i} \cup ...$ ■

3.2 O operador Q_H

Dado $H \in \mathbb{R}$, $H \geq 0$ o operador

$$Q_H : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

definido por

$$u \longmapsto Q_H(u) := \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + 2H$$

ou, equivalentemente em coordenadas $u = u(x, y)$

$$Q_H(u) = \frac{(1 + u_y^2)}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^3}} u_{xx} - \frac{2u_x u_y}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^3}} u_{xy} + \frac{(1 + u_x^2)}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^3}} u_{yy} + 2H$$

é chamado operador curvatura média constante (*cmc*). O problema de Dirichlet associado a Q_H, consiste em encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{cases} Q_H(u) = div \left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \\ \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio do $\mathbb{R}^2$ (aberto e conexo), e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é dada a priori.

Usando coordenadas a equação (3.1) é equivalente a

$$\left(1 + u_x^2\right) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(1 + u_y^2\right) u_{xx} + 2H \left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

3.3 Fatos conhecidos sobre Q_H

Enumeramos a seguir os principais fatos conhecidos sobre o operador Q_H.

i) Princípio do Máximo para diferença de duas soluções

Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ são tais que $Q_H(u) = Q_H(v) = 0$, então devemos ter

$$\sup_{\Omega} |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v|.$$

ii) Estimativa da altura

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é tal que $Q_H(u) = 0$, então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \begin{cases} \sup\limits_{\partial\Omega} |u| & \text{se } H = 0 \\ \sup\limits_{\partial\Omega} |u| + \dfrac{1}{H} & \text{se } H > 0. \end{cases}$$

iii) Princípio do Máximo para a norma do gradiente

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é tal que $Q_H(u) = 0$, então

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

iv) Compacidade

Dados H, $H_n \geq 0$, $H_n \to H$, e uma família $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, de soluções de $Q_{H_n} = 0$ em Ω uniformemente limitada (isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\sup |u_n| \leq M$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$), existe uma subseqüência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ que converge uniformemente em compactos de Ω a uma solução $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ de $Q_H = 0$, ou seja, dado um compacto $K \subset \Omega$, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{n_k} - u|_{k,\alpha;K} \leq \varepsilon,$$

para todo $k \geq k_0$.

v) Teorema de James Serrin

Se Ω é de classe C^2, limitado e $k_{\partial\Omega} \geq 2H$, então para cada $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $Q_H(u) = 0$ e $u|_{\partial\varphi} = \varphi$, onde $k_{\partial\Omega}$ é a curvatura de $\partial\Omega$.

Este resultado é ótimo no seguinte sentido: Se a condição $k_{\partial\Omega} \geq 2H$ não for satisfeita, isto é, $k_{\partial\Omega} < 2H$ em algum ponto de $\partial\Omega$, então existe $\varphi_0 \in C^0(\partial\Omega)$ para o qual não existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_H = 0$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi_0$.

Lema 3.4 *O operador*

$$L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$$

definido por

$$h \longmapsto L(h) := \frac{(1+u_y^2)}{\sqrt{(1+|\nabla u|^2)^3}} h_{xx} - \frac{2u_x u_y}{\sqrt{(1+|\nabla u|^2)^3}} h_{xy} + \frac{(1+u_x^2)}{\sqrt{(1+|\nabla u|^2)^3}} h_{yy}$$

é estritamente elíptico, ou seja, os autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2$ da matriz $[a_{ij}]$ dos coeficientes de L satisfazem $0 < \delta_1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$.

Prova: Calculemos então os autovalores da matriz $[a_{ij}]$, isto é, calculemos as raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det(a_{ij} - \lambda I) = \begin{vmatrix} \dfrac{1+u_y^2}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \lambda & \dfrac{-u_x u_y}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{-u_x u_y}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{1+u_x^2}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Efetuando os cálculos, temos

$$\lambda_1 = \frac{1}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Considerando $C = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$ obtemos $C \geq |\nabla u|$ de modo que $C^2 \geq |\nabla u|^2$. Segue então que $1+C^2 \geq 1+|\nabla u|^2$, implicando que $(1+C^2)^{3/2} \geq \left(1+|\nabla u|^2\right)^{3/2}$. Portanto temos

$$\frac{1}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tomando $\delta_1 = (1+C^2)^{-3/2}$ obtemos

$$0 < \delta_1 \leq \frac{1}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1.$$

Logo $L(h)$ é um operador estritamente elíptico. ■

Analogamente, se prova que o operador

$$L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$$

definido por

$$h \longmapsto L(h) := (1+u_y^2)h_{xx} - 2u_x u_y h_{xy} + (1+u_x^2)h_{yy}$$

também é estritamente elíptico, com autovalores

$$\lambda_1 = 1 + |\nabla u|^2 \text{ e } \lambda_2 = 1.$$

Lema 3.5 *Seja Ω um domínio de classe $C^{2,\alpha}$, $\alpha > 0$. Dados $C > 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $Q_H = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, se $|\nabla u| \leq C$ em Ω então $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Prova: Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo as hipóteses do lema. Então

$$Q_H(u) = 0 \text{ se e somente se } L(u) = f$$

onde L é o operador linear estritamente elíptico

$$L(v) = \left(1+u_y^2\right)v_{xx} - 2u_x u_y v_{xy} + \left(1+u_x^2\right)v_{yy}$$

e

$$f = -2H\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Como f e os coeficientes de L pertencem a $C^2(\Omega)$ e $1 \leq \lambda_1/\lambda_2 < 1 + C^2$, segue então por ([GT], final da seção 11.2 Hölder Gradient Estimates for Linear Equations, página 249) a existência de $\beta = \beta(C, \Omega)$ tal que $u \in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Se $\beta > \alpha$, então $u \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e então segue do Teorema 6.19 de [GT] que $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, provando o lema neste caso. Se $\beta \leq \alpha$, então, novamente, pelo Teorema 6.19 de [GT], $u \in C^{2,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Segue-se que f e os coeficientes de L pertencem em particular a $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ de modo que, novamente pelo Teorema 6.19 de [GT], $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, provando assim o lema.
■

Teorema 3.6 (Aplicação do Teorema das Funções Implícitas) *Seja Ω de classe $C^{2,\alpha}$ limitado. Sejam $H \geq 0$ e $u_0 \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_H = 0$ em Ω com $u_0|_{\partial\Omega} = 0$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $h \in (H - \varepsilon, H + \varepsilon)$, existe $u_h \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_h = 0$ em Ω tal que $u_h|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso a aplicação*

$$\begin{aligned} (H - \varepsilon, H + \varepsilon) &\to C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \\ h &\mapsto u_h \end{aligned}$$

é $C^{k,\alpha}$.

Prova: Para aplicarmos o teorema das funções implícitas, consideramos os espaços de Banach $E = \mathbb{R}$, $F = C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $G = C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, o primeiro com a norma do valor absoluto usual de um número real e os dois últimos com as normas $\|.\|_{2,\alpha;\Omega}$ e $\|.\|_{\alpha;\Omega}$, respectivamente. Além disso, consideremos o operador

$$T : \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$$

definido por

$$(h, u) \mapsto Q_h(u) := div \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + 2h.$$

Temos $T(H, u_0) = 0$, pois u_0 é solução de $Q_H = 0$. Pondo

$$L := D_2 T(H, u_o) : C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$w \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{T(H, u_0 + tw) - T(H, u_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{T(H, u_0 + tw)}{t},$$

obtém-se

$$L(w)=\frac{(1+u_{0y}^2)}{(1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}}w_{xx}-\frac{2u_{0x}u_{0y}}{(1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}}w_{xy}+\frac{(1+u_{0x}^2)}{(1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}}w_{yy}+b_1w_x+b_2w_y,$$

onde

$$b_1=\frac{\left(-2u_{0y}u_{0yx}+2u_{0x}u_{0yx}+6Hu_{0x}\left(1+|\nabla u_0|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+|\nabla u_0|^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$b_2=\frac{\left(2u_{0y}u_{0xx}-2u_{0x}u_{0yx}+6Hu_{0y}\left(1+|\nabla u_0|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+|\nabla u_0|^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Devemos mostrar que L é um homeomorfismo linear. L é linear, pois w_{xx}, w_{yx}, w_{yy}, w_x e w_y são lineares e os coeficientes de L não dependem de w. Além disso L é contínua pois usando a desigualdade triangular tem-se que

$$|L(w)|_{\alpha;\overline{\Omega}}\leq|A_{11}w_{xx}|_{\alpha;\overline{\Omega}}+|A_{21}w_{xy}|_{\alpha;\overline{\Omega}}+|A_{22}w_{yy}|_{\alpha;\overline{\Omega}}+|b_1w_x|_{\alpha;\overline{\Omega}}+|b_2w_y|_{\alpha;\overline{\Omega}},$$

onde

$$A_{11}=\frac{(1+u_{0y}^2)}{(1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}},\ A_{21}=\frac{2u_{0x}u_{0y}}{(1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}}\text{ e }A_{22}=\frac{(1+u_{0x}^2)}{(1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Considerando então

$$\begin{aligned}&C_1=\sup_{\overline{\Omega}}|A_{11}|_{\alpha;\overline{\Omega}},\ C_2=\sup_{\overline{\Omega}}|A_{21}|_{\alpha;\overline{\Omega}},\ C_3=\sup_{\overline{\Omega}}|A_{22}|_{\alpha;\overline{\Omega}},\\&C_4=\sup_{\overline{\Omega}}|b_1|_{\alpha;\overline{\Omega}}\text{ e }C_5=\sup_{\overline{\Omega}}|b_2|_{\alpha;\overline{\Omega}},\end{aligned}$$

tem-se

$$|L(w)|_{\alpha;\overline{\Omega}}\leq C_1|w_{xx}|_{\alpha;\overline{\Omega}}+C_2|w_{yx}|_{\alpha;\overline{\Omega}}+C_3|w_{yy}|_{\alpha;\overline{\Omega}}+C_4|w_x|_{\alpha;\overline{\Omega}}+C_5|w_y|_{\alpha;\overline{\Omega}}.$$

Além disso,

$$|w|_{2,\alpha;\overline{\Omega}}=\sup_{\overline{\Omega}}|w|+\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla w|+\sup_{\overline{\Omega}}\left|D^2w\right|+\left[D^2w\right]_\alpha$$

onde

$$\left[D^2 w\right]_\alpha := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|D^2 w\,(x) - D^2 w\,(y)\right|}{|x-y|^\alpha}.$$

Então tem-se o seguinte

$$|w_{xx}|_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} |w_{xx}| \leq \sup_{\overline{\Omega}} \left|D^2 w\right| \leq |w|_{2,\alpha;\overline{\Omega}}$$

$$|w_{yx}|_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} |w_{yx}| \leq \sup_{\overline{\Omega}} \left|D^2 w\right| \leq |w|_{2,\alpha;\overline{\Omega}}$$

$$|w_{x}|_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} |w_{x}| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla w| \leq |w|_{2,\alpha;\overline{\Omega}}$$

$$|w_{y}|_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} |w_{y}| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla w| \leq |w|_{2,\alpha;\overline{\Omega}}.$$

Donde se conclui que

$$|L\,(w)|_{\alpha;\overline{\Omega}} \leq C\,|w|_{2,\alpha;\overline{\Omega}},$$

onde $C = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5)$ de modo que L é contínuo pelo Teorema 3.2. Como L é um operador elíptico em Ω da forma

$$Lu = a^{ij}\,(x)\,D_{ij}u + b^i\,(x)\,D_i u,\;\; a^{ij} = a^{ji},$$

dados $w_1, w_2 \in C_0^2\,(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $L\,(w_1) = L\,(w_2)$ conclui-se pelo Teorema 3.3 de [GT] que $w_1 = w_2$, sendo L portanto um operador injetor. L é também um operador sobrejetor pois, como L é um operador estritamente elíptico, pelo Lema 3.4 e, além disso, como os coeficientes de L pertencem a $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, segue do Teorema 6.14 de [GT] que dada $g \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, existe uma única $w \in C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $L\,(w) = g$. Concluimos então que L é um operador linear bijetor contínuo, faltando-nos ainda mostrar que L^{-1} é contínuo. Para tal, provemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f|_{0,\alpha;\overline{\Omega}} < \delta$ implica que $\left|L^{-1}\,(f)\right|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} < \varepsilon$. Seja então $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $w \in C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $L\,(w) = f$. Como L é elíptico segue pelo Teorema 3.7 de [GT] que $|w|_{0;\overline{\Omega}} \leq C\,|f|_{0;\overline{\Omega}}$ onde $C = C\left(\Omega, |u_0|_{1,\alpha;\Omega}\right)$. Pelo Teorema 6.2 de [GT] segue que

$$|w|_{2,\alpha;\Omega} \leq C'\left(|w|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}\right) \leq C''\,|f|_{\alpha;\Omega}$$

onde $C'' = C''(\Omega, |u_0|_{1,\alpha;\Omega})$, o que prova que L^{-1} é contínua; portanto, L é um homeomorfismo linear. Como $T\left(H, u_0\right) = 0$ existe, pelo Teorema 3.1, $\varepsilon > 0$ tal que para todo $h \in (H - \varepsilon, H + \varepsilon)$ existe uma única $u_h \in C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $T\left(h, u_h\right) = 0$, ou seja, que $Q_h\left(u_h\right) = 0$. Então para $h \in (H - \varepsilon, H + \varepsilon)$ existe uma única $u_h \in C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_h = 0$ em Ω e

$$F : (H - \varepsilon, H + \varepsilon) \to C_0^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$$

definida por

$$h \mapsto u_h$$

é de classe $C^{2,\alpha}$. ■

Capítulo 4

O Método de Perron

O método de Perron é uma técnica muito útil da teoria de equações diferenciais parciais (EDP), usado para obtenção de soluções para determinados tipos de EDP, satisfazendo certas condições.

No que segue damos uma descrição deste método, enunciando seus resultados fundamentais. Não há necessidade de que nos restrinjamos, nesta descrição, ao operador Q_H dado por (3.1) no capítulo anterior. Trabalharemos com um opera dor diferencial Q, satisfazendo certas propriedades, e que tem como Q_H um caso particular.

Dado um domínio Ω e um operador Q em Ω estamos interessados em resolver o problema de Dirichlet associado ao operador Q a saber

$$\begin{cases} Q(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \\ u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $f \in C^0(\partial\Omega)$ é uma função dada.

4.1 Condições suficientes de Aplicabilidade do Método de Perron

Para que possamos aplicar o Método de Perron, é suficiente requerer que o operador Q satisfaça as seguintes condições:

i) Princípio do Máximo para diferença de duas soluções:

Se $u_{1,}\ u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ são tais que $Q(u_1) = Q(u_2) = 0$, então devemos ter

$$\sup_{\Omega} |u_1 - u_2| = \sup_{\partial\Omega} |u_1 - u_2| .$$

Note que decorre imediatamente de (i) a unicidade de solução de (4.1).

ii) Existência de Soluções em Domínios Pequenos:

Para cada $x \in \Omega$, existe um aberto $D_x \subset\subset \Omega$ tal que, qualquer que seja $\zeta \in C^0(\partial D_x)$, existe $u \in C^2(D_x) \cap C^0(\overline{D}_x)$ satisfazendo

$$\begin{cases} Q(u) = 0 \\ u|_{\partial D_x} = \zeta. \end{cases} \tag{4.2}$$

iii) Compacidade:

Dada uma família $\{u_n\}$ de soluções de $Q = 0$ em Ω uniformemente limitada (isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\sup |u_n| \leq M$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$), existe uma subseqüência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ que converge uniformemente em compactos de Ω a uma solução $u \in C^2(\Omega)$ de $Q = 0$.

Lembramos que convergência uniforme em compactos significa que dado $K \subset \Omega$ compacto, e dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{K} |u_{n_k} - u| \leq \varepsilon$$

para todo $k \geq k_0$.

4.2 Subsolução, Supersolução e Q – levantamento

Ingredientes básicos para o método de Perron são as noções de subsolução, supersolução e de Q-levantamento, que a seguir definimos.

Definição 4.1 Uma função $s \in C^0(\Omega)$ é uma subsolução (supersolução) de Q se, dado qualquer subdomínio $D \subset\subset \Omega$, se $v \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ satisfaz $Q(v) = 0$ em D e $v|_{\partial D} \geq s|_{\partial D}$ $(v|_{\partial D} \leq s|_{\partial D})$, então $v \geq s|_D$ $(v \leq s|_D)$.

Vamos denotar por $s(\Omega)$ e por $S(\Omega)$ o conjunto das subsoluções e das supersoluções, respectivamente, em Ω.

Definição 4.2 Sejam $s \in s(\Omega)$, $y \in \Omega$ e $D_y \subset\subset \Omega$ uma vizinhança que contenha y como em ii). Então existe uma solução $u_{y,s} \in C^2(D_y) \cap C^0(\overline{D}_y)$ de $Q = 0$ em D_y, satisfazendo $u_{y,s} = s$ em ∂D_y. Definimos a operação $\sqcup$ de $Q-$ *levantamento* de s (em D_y) por

$$s \sqcup u_{y,s}(x) = \begin{cases} u_{y,s}(x) \text{ se } x \in D_y \\ s(x) \text{ se } x \in \Omega \backslash D_y \end{cases}$$

Note que $s \sqcup u_{y,s} \in C^0(\overline{\Omega})$ e que $s \leq s \sqcup u_{y,s}$. Esta notação de $Q-$levantamento difere da usual; no entanto é bastante conveniente pois torna explícita a dependência do $Q-$levantamento da subsolução e da solução.

O lema que demonstraremos a seguir afirma que o $Q-$levantamento define uma nova subsolução.

Lema 4.3 *Sejam* $s \in s(\Omega)$ *e* $y \in \Omega$ *e* $D_y \subset\subset \Omega$. *Então* $s \sqcup u_{y,s} \in s(\Omega)$.

Prova: Considere um domínio $V \subset\subset \Omega$ e seja h uma solução de $Q = 0$ em V satisfazendo $s \sqcup u_{y,s} \leq h$ em ∂V. Como $s = s \sqcup u_{y,s}$ em $V \backslash D_y$ tem-se que $s \sqcup u_{y,s} \leq h$ em $V \backslash D_y$.

Mas $s \sqcup u_{y,s}$ é também solução de $Q = 0$ em D_y. Então, pelo príncipio do máximo, $s \sqcup u_{y,s} \leq h$ em $V \cap D_y$. Conseqüentemente $s \sqcup u_{y,s} \leq h$ em V. Como V é arbitrário, segue que $s \sqcup u_{y,s}$ é subsolução em Ω. ■

Definição 4.4 Dado $f \in C^0(\partial\Omega)$, defina o conjunto das subsoluções relativas a f e o conjunto das supersoluções relativas a f como sendo

$$s_f(\overline{\Omega}) = \{s \mid s \in s(\Omega),\ s \leq f \text{ em } \partial\Omega\}$$

e

$$S_f(\overline{\Omega}) = \{S \mid S \in S(\Omega),\ S \geq f \text{ em } \partial\Omega\},$$

respectivamente. E dado $x \in \overline{\Omega}$, ponha

$$u_f(x) := \sup_{s \in s_f(\overline{\Omega})} s(x). \tag{4.3}$$

Lema 4.5 *Sejam* $s_1, s_2, ..., s_n \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$. *Se* $s = \max\{s_1, ..., s_n\}$, *então* $s \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$.

Prova: Seja $D \subset\subset \Omega$ uma vizinhança qualquer. Seja $v \in C^2(D) \cap C^0\left(\overline{D}\right)$ uma solução de $Q = 0$ em D satisfazendo $s \leq v$ em ∂D.

Dado $i \in \{1, ..., n\}$, como $s \leq v$ em ∂D, tem-se que $s_i \leq v$ em ∂D. Como cada $s_i \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$ para $i \in \{1, ..., n\}$, segue que $s_i \leq v$ em $\overline{D}$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Portanto $s \leq v$ em $\overline{D}$. ■

Lema 4.6 *Sejam* $S_1, S_2 \in S(\Omega)$ *e sejam* Ω_+ *e* Ω_- *definidos por*

$$\Omega_+ = \Omega \cap \{(x, y)\,|x \geq 0\}$$

e

$$\Omega_- = \Omega \cap \{(x, y)\,|x \leq 0\}.$$

Suponhamos que $S_1 = S_2$ *em* $\Omega \cap \{(x, y)\,|x = 0\}$. *Se* $S_1 \geq S_2$ *em* Ω, *então a função*

$$S : \Omega \to \mathbb{R}$$

dada por

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & se\ x \in \Omega_+ \\ S_2(x) & se\ x \in \Omega_- \end{cases},$$

é uma supersolução.

Prova: Seja $D \subset\subset \Omega$ e seja $v \in C^2(D) \cap C^0\left(\overline{D}\right)$ satisfazendo $Q(v) = 0$ em D e $v|_{\partial D} \leq S|_{\partial D}$. Se $D \subset\subset \Omega_+$ nada a fazer. Analogamente se $D \subset\subset \Omega_-$. Seja $D \subset \Omega$ tal que

$$\partial D \cap \Omega_+ \cap \Omega_- \neq \emptyset.$$

Como $v|_{\partial D} \leq S|_{\partial D}$, segue pelo príncipio do máximo que $v|_D \leq S|_D$, pois $S_1 = S_2$ em $\{(x, y)\ |\ x = 0\}$. ■

4.3 O Resultado Fundamental do Método de Perron.

Teorema 4.7 *Seja Q um operador satisfazendo i), ii) e iii). Se existem $s_0 \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$ e $S_0 \in S_f\left(\overline{\Omega}\right)$, então u_f dado por* (4.3) *está bem definido, é de classe C^2 e satisfaz $Q(u_f) = 0$ em Ω.*

Prova: Primeiro notemos que u_f está bem definido pois existe $s_0 \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$ e, além disso, $S_0(x)$ é uma cota superior de (4.3).

Seja agora $y \in \Omega$ um ponto fixo. Por definição de u_f, existe uma seqüência $\{s_n\} \subset s_f\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(y) = u_f(y). \tag{4.4}$$

Dado n, como $s_n \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$, temos $s_n \leq S_0$. Por outro lado, substituindo s_n por $\max\{s_n,\ s_0\}$ se necessário, podemos supor que $s_n \geq s_0$. Assim teremos

$$s_0 \leq s_n \leq S_0$$

para todo n. Em particular, $\{s_n\}$ é uniformemente limitada.

Seja agora uma vizinhança $D_y \subset\subset \Omega$ tal como em ii) e defina a seqüência $s_n \sqcup u_{y,s_n}$ pelo $Q-$*levantamento* de s_n em D_y de acordo com a Definição 4.2. Pelo Lema 4.3 tem-se que $s_n \sqcup u_{y,s_n} \in s_f\left(\overline{D}_y\right)$ e $s_n \sqcup u_{y,s_n}$ é solução de $Q = 0$ em D_y. Além disso, por iii), $\{s_n \sqcup u_{y,s_n}\}$ contém uma subseqüência $\left\{s_{n_k} \sqcup u_{y,s_{n_k}}\right\}$ convergindo uniformemente em compactos de D_y a uma solução $U \in C^2(D_y)$ de $Q = 0$.

Claramente, tem-se que $U \leq u_f$ em D_y e $U(y) = u_f(y)$. O que queremos de fato é mostrar que $U = u_f$ em D_y. Por absurdo suponha que $U(z) < u_f(z)$ para algum $z \in D_y$. Então existe uma função $\overline{u} \in s_f\left(\overline{D}_y\right)$ tal que $U(z) < \overline{u}(z)$.

Definindo $v_k = \max\{\overline{u}, s_{n_k}\}$ e também a seqüência de $Q-$levantamento $v_k \sqcup u_{y,v_k}$, nós obtemos como antes uma subseqüência da seqüência $\{v_k \sqcup u_{y,v_k}\}$ convergindo a uma solução $V \in C^2(D_y)$ de $Q = 0$ satisfazendo $U \leq V \leq u_f$ em D_y e $U(y) = V(y) = u_f(y)$.

Mas pelo princípio do Máximo, nós devemos ter $U = V$ em D_y. Isto contradiz a definição de $\overline{u}$, e portanto $u_f = U$ em D_y de modo que u_f satisfaz $Q = 0$ em D_y. Como D_y é uma vizinhança arbitrária, segue que u_f satisfaz $Q = 0$ em todo Ω. ■

O teorema anterior exibe uma função de classe C^2 solução de $Q = 0$ em Ω, (chamada solução de Perron) do problema (4.1) de Dirichlet. No entanto, da maneira em que u_f é definida, não temos informação da função u_f no bordo, ou seja, não podemos concluir que u_f é contínua em $\overline{\Omega}$ e $u_f|_{\partial\Omega} = f$. Mas observamos, entretanto, que se $v \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ é uma solução com $v|_{\partial\Omega} = f$, então $u_f = v$.

No que segue, apresentaremos condições que nos garantem que $u_{f|\partial\Omega} = f$. Estas condições serão dadas em termos de *barreiras*, apresentada na proposição seguinte.

Proposição 4.8 *Suponhamos que para todo $p \in \partial\Omega$, existam $v_p \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$ e $w_p \in S_f\left(\overline{\Omega}\right)$ de Q em Ω, tais que,*

$$w_p(p) = v_p(p) = f(p).$$

Então a função u_f dada pelo método de Perron é contínua em $\overline{\Omega}$ e $u_f|_{\partial\Omega} = f$, ou seja, u_f é solução de (4.1).

Prova: Dado $p \in \partial\Omega$, seja $\{x_n\}$ uma seqüência convergindo a p. Como $v_p \in s_f\left(\overline{\Omega}\right)$ e $w_p \in S_f\left(\overline{\Omega}\right)$, temos que

$$v_p \leq u_f \leq w_p.$$

Restringindo-se estas desigualdades à seqüência x_n vem que

$$v_p(x_n) \leq u_f(x_n) \leq w_p(x_n).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} v_p(x_n) = \lim_{n\to\infty} w_p(x_n) = f(p)$$

segue que existe o limite de $u_f(x_n)$ quando $n \to \infty$ e, além disso,

$$\lim_{n\to\infty} u_f(x_n) = f(p).$$

Portanto podemos definir $u_f(p)$ de forma contínua em $\overline{\Omega}$ e $u_f = f$ em $\partial\Omega$, terminando a prova da proposição. ■

As funções v_p e w_p acima são denominadas de *barreiras* para Q em Ω relativas a f.

4.4 Aplicação do Método de Perron a Q_H

Observamos que decorre das condições (i), (ii), (iii) e (iv) na seção 3.3, que o operador Q_H definido em (3.1) satisfaz as condições i), ii) e iii) do Método de Perron; além disso, não é dificíl provar usando (i) da seção 3.3 que se $s \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ e $Q_H(s) \geq 0$, então s é subsolução e se $s \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ e $Q_H(s) \leq 0$, então s é supersolução. Conseqüentemente tem-se o seguinte:

Corolário 4.9 *Sejam $H \geq 0$, Ω limitado e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ tal que para todo $p \in \partial\Omega$, existam supersoluções e subsoluções s_p, $S_p \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ de Q_H em Ω respectivamente, satisfazendo*

$$\begin{cases} s_p(p) = \varphi(p) = S_p(p) \\ s_p|_{\partial\Omega} \leq \varphi \leq S_p|_{\partial\Omega}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Então existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_H = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Prova: Basta aplicar o Teorema 4.7 juntamente com a Proposição 4.8, fazendo $s_0 = s_p$ e $S_0 = S_p$. ■

Quando uma dada função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ satisfaz (4.5), dizemos que ela é regular.

O lema e o teorema que se seguem são resultados de existência de soluções $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ para (3.1) em certos domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a seguir descritos, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$, isto é, soluções que se anulam no bordo.

Lema 4.10 *Seja $H > 0$, $l > 0$ e $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ onde*

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \ \mid \ -l \leq x \leq l, \ |y| \leq \frac{1}{2H}\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{(x,y) \ \mid \ (x+l)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4H^2}, \ x \leq -l\right\},$$
$$\Omega_3 = \left\{(x,y) \ \mid \ (x-l)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4H^2}, \ x \geq l\right\}.$$

Então existe $w \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_H = 0$ em Ω_0 com $w_{|\partial\Omega_0} = 0$.

Prova: Vamos no que segue construir, para cada ponto $p \in \partial\Omega_0$, subsolução e supersolução não negativas s_p e S_p de $Q_H = 0$ em Ω_0, respectivamente, tais que

$s_p(p) = 0$ e $S_p(p) = 0$. Escolhendo $s_p \equiv 0$ para todo $p \in \partial\Omega_0$, temos claramente que s_p é uma subsolução de Q_H em Ω_0, e ainda $s_p \in C^0\left(\overline{\Omega}_0\right)$. Dado $p \in \partial\Omega_0$, seja

$$S_p(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{4H^2} - y^2}, \text{ se } (x,y) \in \Omega_1 \\ \sqrt{\dfrac{1}{4H^2} - (x+l)^2 - y^2}, \text{ se } (x,y) \in \Omega_2 \\ \sqrt{\dfrac{1}{4H^2} - (x-l)^2 - y^2}, \text{ se } (x,y) \in \Omega_3. \end{cases}$$

Vemos que $S_p(p) = 0$ para $p \in \partial\Omega_0$ e $S_p|_{\partial\Omega_0} \geq 0$. Note que se $(x,y) \in \Omega_1$ então $S_p(x,y)$ é o semi-cilindro cujo raio é $1/2H$, girado em torno do eixo x, que é solução de $Q_H = 0$. Se $(x,y) \in \Omega_2$, então o gráfico da função $S_p(x,y)$ é um quarto da esfera centrada em $c = (0,0,-l)$ e raio $1/2H$, que é supersolução de $Q_H = 0$, pois $Q_H(S_p) \leq 0$. Raciocínio análogo pode ser aplicado se $(x,y) \in \Omega_3$.

Observe, que $S_p(x,y)$ é a união do gráfico de S_p restrito a Ω_1, com o gráfico de S_p restrito a Ω_2 e a união de S_p restrito a Ω_2 com o gráfico de S_p restrito a Ω_3. Pelo Lema 4.6 segue que S_p é supersolução.

Como Q_H satisfaz as condições de aplicabilidade do método de Perron, nós podemos aplicar o Teorema 4.7 para concluir que a função

$$w(x,y) = \sup\left\{u(x,y) \mid u \text{ é subsolução de } Q_H = 0 \text{ em } \Omega,\ u_{|\partial\Omega_0} = 0\right\}$$

é uma solução de $Q_H = 0$ em Ω_0. Como $s_{p|\Omega_0} = S_{p|\partial\Omega_0} = 0$, vem que $w_{|\partial\Omega_0} = 0$ e $w \in C^2(\Omega_0) \cap C^0\left(\overline{\Omega}_0\right)$. ■

O principal teorema deste capítulo que enunciaremos a seguir, determina uma classe de domínios Ω para as quais existe uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $Q_H(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = 0$. Este resultado, está demonstrado em [RI], Corolário 3. No enunciado a seguir, provamos o fato adicional de que a solução tem gradiente limitado.

Teorema 4.11 *Sejam $H > 0$ e Ω um domínio convexo, limitado, de classe $C^{2,\alpha}$, contido em uma faixa de comprimento $1/H$. Então existe $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de*

$Q_H = 0$ *com* $u|_{\partial\Omega} = 0$. *Em particular*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| < \infty.$$

Prova: Mostremos primeiro que existe $0 < a < \frac{1}{2H}$ tal que

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq a$$

para qualquer solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ com $u|_{\partial\Omega} = 0$: podemos determinar um domínio Ω_0 como no lema anterior tal que $\Omega \subset \Omega_0$ e considerar uma solução $v \in C^2(\Omega_0) \cap C^0\left(\overline{\Omega}_0\right)$ com $v|_{\partial\Omega_0} = 0$. Pondo $a := max_{\Omega_0} |v|$, como $v|_{\partial\Omega} \geq u|_{\partial\Omega}$, pelo princípio do máximo temos $sup_{\Omega} |u| \leq a = max_{\Omega_0} |v|$. Portanto, basta mostrarmos que $a < 1/2H$. Para tal seja w a função definida na faixa que tem como gráfico a metade de cilindro de *cmc* H. Considerando $w|_{\partial\overline{\Omega}}$ temos que $max_{\overline{\Omega}_0} |w| = 1/2H > max_{\overline{\Omega}_0} |v| = a$.

Seja agora o pedaço C_H de cilindro de *cmc* H, dado como o gráfico de

$$w(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4H^2} - x^2} - \left(\frac{1}{2H} - a\right)$$

definido em

$$\Lambda = \left\{ (x,y) \,| 0 \leq x \leq \sqrt{a\left(\frac{1}{H} - a\right)},\ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sejam r e s as duas retas bordos de C_H, sendo que r está no plano $z = 0$ e s no plano $z = a$.

Note que w assume seu máximo em $x = 0$ e vale a. Além disso

$$G := \sup_{\Lambda} |\nabla w| = 2\frac{\sqrt{aH(1 - aH)}}{1 - 2aH} < \infty$$

já que $a < 1/2H$. Podemos usar C_H como barreira para estimar o gradiente de qualquer $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $Q_H = 0$: De fato, dado $p \in \partial\Omega$, aplicamos uma congruência do $\mathbb{R}^3$ para colocar a reta r tangente a $\partial\Omega$ em p. Representando também por w este novo cilindro, temos que $u \leq w$ em $\partial(\Lambda \cap \Omega)$ pelo princípio do máximo segue que $u \leq w$ para qualquer $u \in C^2(\Lambda \cap \Omega) \cap C^0\left(\overline{(\Lambda \cap \Omega)}\right)$ solução de

$Q_H = 0$. Daí obtemos

$$|\nabla u(p)| \leq \sup_{\Lambda \cap \Omega} |\nabla w| \leq G.$$

Como p é qualquer, conclui-se então que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq G$$

para qualquer solução $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ de $Q_H = 0$ com $u|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso como uma solução $v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ de $Q_h = 0$ é uma subsolução de $Q_H = 0$ se $h \in [0, H]$, obtemos

$$\sup_{\Omega} |\nabla v| < G$$

para qualquer solução $v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ de $Q_h = 0$ com $v|_{\partial\Omega} = 0$.

Consideremos agora a família de problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} Q_{tH}(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \end{cases} \tag{4.6}$$

e seja

$$V = \{t \in [0,1] \mid (4.6) \text{ tenha solução}\}.$$

Então $V \neq \emptyset$, pois $0 \in V$, já que $u \equiv 0$ é solução de $Q_0 = 0$. Decorre imediatamente do Teorema 3.6 que V é aberto.

Para provar que V é fechado, tomamos $t_n \in V$, $t_n \to t \in [0,1]$ e mostraremos que $t \in V$. Seja $u_n \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ a solução correspondente com curvatura média $t_n H$. Tomando uma exaustão crescente (por inclusão) de compactos de Ω e usando o método da diagonal, obtemos um subseqüência de $\{u_n\}$ que converge uniformemente em compactos a uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ de $Q_{tH} = 0$ em Ω. Como $|\nabla u_n|$ é uniformemente limitado, segue-se que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $\sup |\nabla u| < \infty$. Podemos então aplicar o Lema 3.5 para finalmente concluir que $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, provando o teorema. ■

Capítulo 5

O Método de Perron Estendido

5.1 Definições

Neste capítulo vamos dar uma melhoria no Método de Perron. Para isso, consideremos um operador Q qualquer e não mais admitiremos as condições (i), (ii) e (iii) do capítulo 4. No entanto, ainda precisamos das noções de subsoluções e de supersoluções que possuem a mesma definição. No que se seguirá $\mathbf{T}$ denotará uma coleção arbitrária de subsoluções, isto é, $\mathbf{T} \subset s\left(\overline{\Omega}\right)$ é um subconjunto de subsoluções. A seguir, definimos o que vem a ser a operação de $Q-levantamento$ em $\mathbf{T}$, que consiste em aperfeiçoar a noção que aparece na Definição 4.2 adaptada aos nossos propósitos.

Definição 5.1 Dizemos que existe uma operação de $Q - levantamento$ $\sqcup$ definida em $\mathbf{T}$ se, dados $y \in \Omega$ e $s \in \mathbf{T}$, existir um domínio $D_y \subset \Omega$ que contenha y tal que existe uma solução $u_{y,s} \in C^2\left(D_y\right) \cap C^0\left(\overline{D}_y\right)$ de $Q = 0$ em D_y satisfazendo $u_{y,s} = s$ em ∂D_y. Além disso, definindo $s \sqcup u_{y,s} \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ por

$$s \sqcup u_{y,s}\left(x\right) = \begin{cases} u_{y,s}\left(x\right) \text{ se } x \in D_y \\ s\left(x\right) \text{ se } x \in \Omega \backslash D_y. \end{cases}$$

requeremos que $s \sqcup u_{y,s} \in \mathbf{T}$.

Para que realmente possamos aplicar a definição anterior ao problema de Dirichlet associado a Q, é necessário exigir certas condições sobre esta operação de $Q-$levantamento. Para isso considere as seguintes definições:

Definição 5.2 Dizemos que a operação de $Q - levantamento$ é não-decrescente se dados subsoluções $s_1, s_2 \in \mathbf{T}$, com $s_1 \leq s_2$, tem-se

$$s_1 \sqcup u_{y,s_1} \leq s_2 \sqcup u_{y,s_2},$$

$\forall\ y \in \Omega$.

Definição 5.3 Dizemos que $\sqcup$ é pré-compacto se, dados $y \in \Omega$ e uma seqüência $s_n \in \mathbf{T}$, existir uma subseqüência $\left\{u_{y,s_{n_k}}\right\}$ de $\{u_{y,s_n}\}$ convergindo uniformemente em compactos de D_y para uma solução $u \in C^2(D_y)$ de $Q = 0$ em D_y.

5.2 A Extensão do Método de Perron

Neste momento, iremos enunciar um resultado que introduz uma melhoria no Método de Perron, isto é, que melhora o Teorema 4.7. Este novo resultado também é importante pois pela forma que é enunciado, este admite uma extensão a superfícies, como veremos no próximo capítulo. Mas antes enunciaremos e provaremos um lema que será usado na prova do Teorema 5.5.

Lema 5.4 *Dado $s_0 \in \mathbf{T}$, seja $\mathbf{T}(s_0)$ o menor subconjunto de $\mathbf{T}$ que contém s_0 que seja invariante por $\sqcup$, ou seja, pondo*

$$F = \{S \subset \mathbf{T} \mid s_0 \in S \text{ e } S \text{ é invariante por } \sqcup\}$$

$\mathbf{T}(s_0)$ é definido por

$$\mathbf{T}(s_0) = \bigcap_{S \in F} S.$$

Então, dado $s \in \mathbf{T}$, tem-se $s \in \mathbf{T}(s_0)$, se e somente se, existem $t_1, ..., t_n \in \mathbf{T}$, $x_1, ..., x_{n-1} \in \Omega$ tais que $t_1 = s_0$, $t_n = s$ e $t_{j+1} = t_j \sqcup u_{x_j,t_j}$, $j \in \{1, ..., n-1\}$.

Prova: Primeiro, observemos que $\mathbf{T}(s_0) \neq \emptyset$, pois $s_0 \in \mathbf{T}(s_0)$. Seja agora $\mathbf{T}' = \{s \in \mathbf{T} \mid \exists\ t_1, ..., t_n \in \mathbf{T},\ \exists\ x_1, ...x_{n-1} \in \Omega$ tal que $t_1 = s_0, t_n = s$ e $t_{j+1} = t_j \sqcup x_{x_j,t_j}\}$. Precisamos mostrar que $\mathbf{T}' = \mathbf{T}(s_0)$.

Para isso considere $s \in \mathbf{T}'$. Então existem $t_1, ..., t_n \in \mathbf{T}$ e existem $x_1, ..., x_{n-1} \in \Omega$ tal que $t_1 = s_0$, $t_n = s$ e $t_{j+1} = t_j \sqcup u_{x_j,t_j}$, $j \in \{1, ..., n-1\}$. Sabemos que

$t_1 = s_0 \in S$ para todo $S \in F$, que seja invariante por $\sqcup$. Logo $t_1, ..., t_n \in S$, pois $t_{j+1} = t_j \sqcup u_{x_j,t_j} \in S$ para $j \in \{1, ..., n-1\}$. Portanto $s \in \mathbf{T}(s_0)$ e assim $\mathbf{T}' \subset \mathbf{T}(s_0)$.

Agora considere $s \in \mathbf{T}(s_0)$. Então $s \in S$, para todo $S \in F$. Em particular

$$s \in S = \left\{s_0,\ t_2 = s_0 \sqcup u_{x_1,s_0},\ t_3 = t_2 \sqcup u_{x_2,t_2},\ ...,\ t_n = t_{n-1} \sqcup u_{x_{n-1},t_{n-1}}, ...\right\}.$$

Logo existem $t_1, ..., t_n \in \mathbf{T}$, $x_1, ...x_{n-1} \in \Omega$ tal que $t_1 = s_0, t_n = s$ e $t_{j+1} = t_j \sqcup x_{x_j,t_j}$, $j \in \{1, ..., n-1\}$. Ora mas esta é a definição de $\mathbf{T}'$, logo $\mathbf{T}(s_0) \subset \mathbf{T}'$. Como $\mathbf{T}' \subset \mathbf{T}(s_0)$ e $\mathbf{T}(s_0) \subset \mathbf{T}'$ segue que $\mathbf{T}' = \mathbf{T}(s_0)$. ■

Um elemento $s \in \mathbf{T}(s_0)$ será chamado uma subsolução $s_0 -$ *admissível.* Logo $\mathbf{T}(s_0)$ constituirá o conjunto das subsoluções s_0-admissíveis de $\mathbf{T}$.

Agora iremos enunciar e provar o teorema central deste capítulo, cuja demonstração será estendida para superfícies.

Teorema 5.5 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma coleção de subsoluções de* Q *e suponha que está definida uma operação* $\sqcup$ *de* $Q-$ *levantamento em* $\mathbf{T}$ *que é não-decrescente e pré-compacta. Então, dado* $s_0 \in \mathbf{T}$, *se existir uma supersolução* $S_0 \in S\left(\overline{\Omega}\right)$ *de* Q *com* $s_0 \leq S_0$, *então existe uma seqüência* $s_n \in \mathbf{T}$ *não-decrescente tal que* $s_0 \leq s_n \leq S_0$ *e tal que, definindo em* $x \in \Omega$,

$$u_{s_0}(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x),$$

tem-se que $u_{s_0} \in C^2(\Omega)$, $Q(u_{s_0}) = 0$, *e* $s_0 \leq u_{s_0} \leq S_0$ *em* Ω. *Decorre que se* $s_0 = S_0 = \varphi$ *em* $\partial\Omega$, *então* u_{s_0} *se estende continuamente a* $\overline{\Omega}$ *e* $u_{s_0} = \varphi$ *em* $\partial\Omega$.

Prova: Seja $\mathbf{T}(s_0)$ o conjunto das subsoluções s_0-admissíveis. Provaremos que

$$s_0 \leq s \leq S_0, \tag{5.1}$$

para quaisquer $s \in \mathbf{T}(s_0)$.

Pelas definições de subsolução e da $\mathbf{T}(s_0)$, esta claro que a primeira desigualdade em (5.1) é satisfeita para toda $s \in \mathbf{T}(s_0)$.

Para provar a outra desigualdade, por absurdo, suponha o contrário: isto é, definindo o conjunto

$$B = \{s \in \mathbf{T}(s_0) \mid s \leq S_0\},$$

suponha que $\mathbf{T}(s_0) \backslash B \neq \emptyset$. Logo existe $t \in \mathbf{T}(s_0)$ e $y_0 \in \Omega$ tal que $t(y_0) > S_0(y_0)$. Como $B \neq \emptyset$, pois $s_0 \in B$, existe $s \in B$ e um $Q-$levantamento $s \sqcup u_{x,s} \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $s \sqcup u_{x,s} > S_0$ para algum $y \in \Omega$. Como $s \in B$ segue que $u_{x,s} > S_0$. Definindo o conjunto

$$U = \{z \in \Omega \mid u_{x,s}(z) > S_0(z)\}.$$

tem-se que $u_{x,s} = S_0$ em ∂U com $u_{x,s} > S_0$ em $U \backslash \partial U$. Mas como S_0 é uma supersolução, então $u_{x,s} = S_0$ em B, absurdo! Isso prova (5.1).

Agora, dados $t_1, t_2 \in \mathbf{T}(s_0)$ provaremos que existe $t \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $t \geq \max\{t_1, t_2\}$. Para isso sejam $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $a_1 = b_1 = s_0$, $a_n = t_1$, $b_m = t_2$, a_{i+1} é o $Q-$levantamento de a_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$ e b_{j+1} é o $Q-$levantamento de b_j, $j \in \{1, ..., m-1\}$. Suponha ainda que a_{i+1} é obtido de a_i pelo levantamento de a_i nos pontos x_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$, e que b_{j+1} é obtido de b_j pelo levantamento b_j nos pontos y_i, $j \in \{1, ...m-1\}$. Então, definindo

$$c_2 = a_2 \sqcup u_{y_1, a_2},$$

tem-se que por definição $c_2 \geq a_2$. Como $a_2 \geq s_0$, então pela monotocidade de $\sqcup$ segue que

$$c_2 = a_2 \sqcup u_{y_1, a_2} \geq s_0 \sqcup u_{y_1, s_0} = b_2,$$

isto é, $c_2 \geq b_2$. Portanto $c_2 \geq \max\{a_2, b_2\}$. Defina agora

$$d_3 = c_2 \sqcup u_{x_2, c_2},$$

e

$$c_3 = d_3 \sqcup u_{y_2, d_3}.$$

Como $a_3 = a_2 \sqcup u_{x_2, a_2}$, segue por definição de $Q-$levantamento que $a_3 \geq a_2$, e também $b_3 \geq b_2$, pois $b_3 = b_2 \sqcup u_{y_2, b_2}$. Usando as conclusões anteriores vem que

$$c_2 \sqcup u_{y_2, c_2} \geq b_2 \sqcup u_{y_2, b_2} = b_3$$

e

$$d_3 = c_2 \sqcup u_{x_2, c_2} \geq a_2 \sqcup u_{x_2, a_2} = a_3.$$

Além disso, pela definição de $Q-$levantamento, $d_3 \geq c_2$. Usando novamente o argumento anterior de que o $Q-$levantamento é monótono, vem que

$$c_3 = d_3 \sqcup u_{y_2,d_3} \geq a_3 \sqcup u_{y_2,a_3},$$

seguindo portanto que $c_3 \geq d_3 \geq a_3$. Falta ainda mostrar que $c_3 \geq b_3$. Mas isso é conseqüência da monotocidade do $Q-$levantamento, ou seja,

$$c_3 = d_3 \sqcup u_{y_2,d_3} \geq c_2 \sqcup u_{y_2,c_2} \geq b_3,$$

portanto $c_3 \geq \max\{a_3, b_3\}$. Assumindo que $n \leq m$, nós podemos repetir este processo n vezes para obter uma subsolução $c_n \in \mathbf{T}$ tal que $c_n \geq \max\{a_n, b_n\}$. Após isso, fazemos $m - n$ $Q-$levantamentos nos pontos y_{n+1}, ..., y_{m-n} começando com c_n para obter $t \in \mathbf{T}(s_0)$ satisfazendo $t \geq \max\{t_1, t_2\}$.

Agora, tome $m_0 = \min_{\overline{\Omega}} s_0$. Dado $s \in \mathbf{T}(s_0)$, defina o seguinte conjunto

$$U_s = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, 0) \in \Omega, m_0 - 1 < z < s(x, y, 0)\right\}.$$

Usando Lindelöf, podemos encontrar um subconjunto enumerável $\{t_n\} \subset \mathbf{T}(s_0)$ tal que

$$\bigcup_{s \in \mathbf{T}(s_0)} U_s = \bigcup_{n \geq 1} U_{t_n}.$$

Defina a seguinte seqüência $\{s_n\} \subset \mathbf{T}(s_0)$, indutivamente, definindo $s_1 = t_1$ e, supondo que s_n está bem definida, $n \geq 2$, escolhendo $s_{n+1} \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que

$$s_{n+1} \geq \max\{s_n, t_{n+1}\}.$$

Então $\{s_n\}$ é uma seqüência não-decrescente de subsoluções e, a partir de (5.1), tem-se que $s_0 \leq s_n \leq S_0$. Defina agora

$$u_{s_0}(x) := \lim_{n \to \infty} s_n(x).$$

Então, também por (5.1), u_{s_0} é uma função bem definida em Ω. Vamos mostrar agora que $u_{s_0} \in C^2(\Omega)$ e é solução de $Q = 0$ em Ω.

Para isso considere $x \in \Omega$. Como $\sqcup$ é uma operação pré-compacta em $\mathbf{T}$, podemos encontrar uma seqüência de $Q-$levantamentos $s_{n_k} \sqcup u_{x,s_{n_k}} \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $\{u_{x,s_{n_k}}\}$ converge uniformemente para compactos de D_x a uma solução $v \in C^2(D_x)$. Afirmamos que $u_{s_0} = v$ em D_x. De fato, pois s_{n_k} é uma seqüência monótona e, além disso $s_{n_k} \leq s_{n_k} \sqcup u_{x,s_{n_k}} \leq u_{s_0}$ ■

A proposição a seguir mostra que as hipóteses (i), (ii) e (iii) do Teorema 4.7 implicam nas condições de aplicabilidade do Teorema 5.5:

Proposição 5.6 *Dado um operador Q qualquer satisfazendo as condições i), ii) e iii), se tomarmos $\mathbf{T} = \mathbf{s}_f(\mathbf{\Omega})$ (isto é, $\mathbf{T}$ é o conjunto de todas as subsoluções de Q que são menores ou iguais a f em $\partial\Omega$), então está definido em $\mathbf{T}$ uma operação $\sqcup$ de $Q-$levantamento não-decrescente e pré-compacta.*

Prova: A condição (ii) e o Lema 4.3 nos asseguram que $\sqcup$ está bem definida. Provemos que $\sqcup$ é não-decrescente. Dados $x \in \Omega$ e $s \in \mathbf{T}$, decorre de (ii) a existência de $D_x \subset \Omega$ e $u_{x,s} \in C^2(D_x) \cap C^0(\overline{D}_x)$ solução de $Q = 0$ em D_x, satisfazendo $u_{x,s} = s$ em ∂D_x. Como $s_1 \leq s_2$ em ∂D_x vem que

$$u_{x,s_1|\partial D_x} = s_{1|\partial D_x} \leq s_{2|\partial D_x} = u_{x,s_2|\partial D_x}.$$

Usando a condição i) segue que

$$u_{x,s_1} \leq u_{x,s_2}$$

em D_x, portanto

$$s_1 \sqcup u_{x,s_1} \leq s_2 \sqcup u_{x,s_2}.$$

Mostraremos agora que $\sqcup$ é pré-compacta. Para tal, dado $x \in \Omega$, considere uma vizinhança D_x como em (ii). Logo, para qualquer $s \in \mathbf{T}$, existe $u_{x,s} \in C^2(D_x) \cap C^0(\overline{D}_x)$ de $Q = 0$ em D_x, satisfazendo $u_{x,s} = s$ em ∂D_x. Portanto, como Q satisfaz (iii), dada uma família $\{s_n\}$ de subsoluções de $Q = 0$ em D_y uniformemente limitada, existe uma subseqüência $\{u_{x,s_{n_k}}\}$ de $\{u_{x,s_n}\}$ em D_x convergindo uniformemente em compactos de D_x para uma solução $u \in C^2(D_x)$ de $Q = 0$ em D_x, isto é, a operação $\sqcup$ é pré-compacta. ■

Observe que apesar de não mais estarmos admitindo explicitamente a validade do princípio do máximo para a diferença de duas soluções de Q no Teorema 5.5, é conveniente notar que este princípio se faz implicitamente presente, pelo menos localmente, na condição de não decrescimento da operação de $Q-$ levantamento. Também é conveniente notar que, novamente por não estarmos admitindo a validade do princípio global do máximo, não podemos concluir a unicidade da solução u_{s_0}, mesmo no caso que a subsolução s_0 e a supersolução S_0 satisfaçam $s_{0|\partial\Omega} = \varphi = S_{0|\partial\Omega}$. Note que na prova do teorema fica claro a dependência da solução u_{s_0} em relação a subsolução inicial s_0. Não foi profundamente analisada esta questão, mas notamos que esta dependência da subsolução inicial ocorre quando fazemos a extensão deste teorema para superfícies, que será discutida no próximo capítulo.

Capítulo 6

Uma Extensão Geométrica para o Método de Perron

6.1 Definições e Notações

Primeiro, vamos começar introduzindo algumas definições e notações que serão usadas no decorrer deste capítulo. A idéia deste capítulo é imitar as definições do capítulo anterior, com o menor número de modificações necessárias, para que possamos estender o Teorema 5.5 obtendo uma versão que possa ser aplicada a superfícies.

Definição 6.1 Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto, convexo e limitado. Por uma superfície em $\mathbb{B}$ entendemos uma superfície S topológica, compacta, mergulhada em $\mathbb{R}^3$ tal que tal que $S \backslash \partial S \subset \mathbb{B}$ e $\partial S \subset \partial \mathbb{B}$. Além disso, requeremos que ∂S tenha duas ou mais componentes conexas e, se denotarmos γ_1, γ_2, ... , γ_m as componentes conexas de ∂S, exigimos a existência, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, de uma componente conexa F_i de $\partial \mathbb{B} \backslash \gamma_i$ tal que $F_i \cap F_j = \varnothing$ se $i \neq j$.

Naturalmente, quando $m = 2$ tal componente sempre existe, sendo unicamente determinada.

Defina o seguinte conjunto

$$C(S) := S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i \right).$$

Observe que $C(S)$ é uma superfície topológica compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$ sem bordo. Vamos denotar por $E(S)$ o exterior de S, isto é, o fecho da componente conexa não limitada de $\mathbb{R}^3 \backslash C(S)$ e por $I(S)$ o interior de S, isto é, o fecho de $\mathbb{R}^3 \backslash E(S)$.

Definição 6.2 Diremos que uma superfície S em $\mathbb{B}$ é submínima (supermínima) se, dado $p \in S \backslash \partial S$, existir um domínio $D \subset S$ com $p \in D$ tal que:

(i) D é um gráfico sobre um domínio U contido em algum plano π de $\mathbb{R}^3$, isto é, existe $v \in C^0(U)$ tal que

$$D = \{x + v(x)N | x \in U\},$$

onde N é um vetor normal unitário de π;

(ii) Dado qualquer subdomínio $E \subset D$, se M é uma superfície mínima suave que seja um gráfico sobre algum domínio $V \subset U$ e $\partial M = \partial E$, então $M \subset E(S)$ ($M \subset I(S)$).

Como antes denotaremos, por $s(\mathbb{B})$ o conjunto das superfícies submínimas em $\mathbb{B}$ e por $S(\mathbb{B})$ o conjunto das superfícies supermínimas em $\mathbb{B}$. É óbvio que uma superfície mínima em $\mathbb{B}$ é simultaneamente uma superfície submínima e uma supermínima. No entanto, não é nada óbvio que a condição i) na definição acima possa ser desprezada. Para ver isso, basta considerar dois círculos na fronteira de $\mathbb{B}$ no espaço euclidiano e contidos em dois planos paralelos de $\mathbb{R}^3$. Se estes círculos forem próximos o bastante, então existem dois catenóides em $\mathbb{B}$ tendo estes círculos como fronteira. D na definição acima é chamado de domínio de subminimalidade (superminimalidade) de S.

Definição 6.3 Se D é um domínio em $s \in s(\mathbb{B})$ e M é uma superfície mínima tal que $\partial D = \partial M$ e se além disso M e D são ambos gráficos sobre um domínio planar comum, então

$$s \sqcup_D M := (s \backslash D) \cup M$$

é chamado de *levantamento mínimo* de s.

No que segue $\mathbf{T}$ denotará uma coleção de superfícies submínimas, isto é, $\mathbf{T} \subset s(\mathbb{B})$ é um subconjunto de superfícies submínimas. Vamos agora imitar a definição de operação de $Q-$levantamento dada antes para funções, com algumas mudanças necessárias.

Definição 6.4 Dizemos que existe uma operação de *levantamento mínimo* $\sqcup$ em $\mathbf{T}$ se, dados $s \in \mathbf{T}$ e $p \in s$ existir um *levantamento mínimo* $s \sqcup_E M \in \mathbf{T}$, onde E é um domínio aberto de s, com $p \in E$ e E contido em um domínio D de subminimalidade de s.

Segue da definição que $M \subset E(s)$. Além disso $s \sqcup_E M$ sempre satisfaz $I(s) \subset I(s \sqcup_E M)$. É conveniente denotar $M = M_{p,s}$ para dar ênfase à dependência de M de p e s.

Como antes iremos exigir certa condições sobre a operação de levantamento mínimo definida acima.

Definição 6.5 Dizemos que a operação de *levantamento mínimo* $\sqcup$ é não-decres cente se dados $s_1, s_2 \in \mathbf{T}$, se $I(s_1) \subset I(s_2)$ e se $t_1 \in \mathbf{T}$ é um *levantamento mínimo* de s_1, então existe um *levantamento mínimo* $t_2 \in \mathbf{T}$ de s_2 tal que $I(t_1) \subset I(t_2)$.

Definição 6.6 Dizemos que a operação $\sqcup$ de *levantamento mínimo* é pré-compac ta se dada qualquer seqüência $s_n \in \mathbf{T}$ e qualquer seqüência de pontos $p_n \in s_n \backslash \partial s_n$ com $p_n \to p \in \mathbb{B}$, existir uma subseqüência $\left\{M_{p_{n_k}, s_{n_k}}\right\}$ de $\{M_{p_n, s_n}\}$ convergindo, quando $k \to \infty$, para uma superfície mínima M com $p \in M \backslash \partial M$.

Definição 6.7 Dadas duas superfícies S_1, S_2 em $\mathbb{B}$, definimos

$$\max\{S_1, S_2\} = \partial\left(I(S_1) \cup I(S_2)\right) \cap (S_1 \cup S_2)$$

e

$$\min\{S_1, S_2\} = \partial\left(I(S_1) \cap I(S_2)\right) \cap (S_1 \cup S_2).$$

6.2 A Extensão Geométrica do Método de Perron

O próximo teorema é a extensão do Teorema 5.5, onde $\mathbf{T}$ aqui é uma coleção de superfícies submínimas.

Teorema 6.8 *Seja* $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ *um aberto limitado convexo e seja* $\mathbf{T}$ *uma coleção de superfícies submínimas em* $\mathbb{B}$. *Suponha que está definida em* $\mathbf{T}$ *uma operação* $\sqcup$ *de levantamento mínimo, pré-compacta e não-decrescente. Então, dado* $s_0 \in \mathbf{T}$, *existe uma superfície mínima* $M_{s_0} \subset \mathbb{B}$ *tal que*

$$I(s_0) \subset I(M_{s_0})$$

e

$$\partial s_0 = \partial M_{s_0}.$$

Prova: Seja $s_0 \in \mathbf{T}$. Exatamente como no Teorema 5.5, tomamos a coleção $\mathbf{T}(s_0)$ das superfícies submínimas s_0-admissíveis, isto é, o menor subconjunto de $\mathbf{T}$ que contenha s_0 e que é invariante pela operação de levantamento mínimo $\sqcup$. Considerando que $I(s) \subset I(s \sqcup_E M)$ para qualquer $s \in \mathbf{T}$ e para qualquer levantamento mínimo de s esta claro que $s_0 \subset I(s)$ para qualquer $s \in \mathbf{T}(s_0)$. Observe ainda que como $\mathbb{B}$ é convexo, então $\partial\mathbb{B}$ é uma superfície supermínima. Precisamos mostrar que

$$I(s) \subset I(\partial\mathbb{B}) = \mathbb{B}. \tag{6.1}$$

Para provar esta afirmação, por absurdo, suponha o contrário, isto é, definindo o conjunto

$$D := \{s \in \mathbf{T}(s_0) \,|I(s) \subset \mathbb{B}\},$$

assuma que $\mathbf{T}(s_0) \backslash D \neq \emptyset$, ou seja, existe $t \in T(s_0)$ tal que $I(t) \subsetneq \mathbb{B}$. Então existe $s \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $I(s_0) \subset \mathbb{B}$, mas com $I(s \sqcup_E M_{p,s}) \not\subseteq \mathbb{B}$ para algum $p \in s$. Como $s \in \mathbf{T}(s_0)$, $I(s) \subset I(\partial\mathbb{B})$ então $M_{p,s} \not\subseteq \mathbb{B}$. Defina então o seguinte conjunto

$$N := M_{p,s} \cap E(\mathbb{B}).$$

Segue que N é superfície mínima, $N \subset E(\mathbb{B})$ e além disso $\partial N \subset \partial\mathbb{B}$, absurdo! Isso prova (6.1). Considere agora $t_1, t_2 \in \mathbf{T}(s_0)$. Alegamos que existe $t \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $I(\max\{t_1, t_2\}) \subset I(t)$. Para provar isso, considere $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que $a_1 = b_1 = s_0$, $a_n = t_1, b_m = t_2$, a_{i+1} é o levantamento mínimo de a_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$ e b_{j+1} é o levantamento mínimo de b_j, $j \in \{1, ..., m-1\}$. Suponha ainda que a_{i+1} é obtido e a_i pelo levantamento mínimo de a_i nos pontos

x_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$, e que b_{j+1} é obtido de b_j nos pontos y_j, $j \in \{1, ..., m-1\}$.

Então, definindo

$$c_2 = a_2 \sqcup_E M_{y_1, a_2},$$

pela monotocidade de $\sqcup$ segue que $I(\max\{a_2, b_2\}) \subset I(c_2)$.

Defina agora

$$d_3 = c_2 \sqcup_E M_{x_2, c_2}$$

e

$$c_3 = d_3 \sqcup_E M_{y_2, d_3}.$$

Pelo mesmo argumento anterior segue que

$$I(\max\{a_3, b_3\}) \subset I(c_3).$$

Assumindo que $n \leq m$ iremos repetir o processo n vezes até chegar na subsolução $c_n \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que

$$I(\max\{a_n, b_n\}) \subset I(c_n).$$

Então fazendo $m - n$ levantamentos mínimos nos pontos $y_{n+1}, ..., y_{m-n}$ começando com c_n, obtemos $t \in \mathbf{T}(s_0)$ satisfazendo

$$I(\max\{t_1, t_2\}) \subset I(t).$$

Definindo agora o conjunto

$$H = \bigcup_{s \in \mathbf{T}(s_0)} I(s)$$

e

$$M_{s_0} = \partial H \cap \mathbb{B}$$

temos

$$I(s_0) \subset I(M_{s_0})$$

e

$$\partial M_{s_0} = \partial s_0.$$

Por Lindelöf podemos encontrar um subconjunto enumerável $\{t_n\} \subset \mathbf{T}(s_0)$ tal que

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(t_n)$$

e podemos definir a seqüência $\{s_n\}$ de superfícies submínimas definindo $s_1 = t_1$ e, assumindo que s_n esta bem definida, $n \geq 1$, fazendo $s_{n+1} \in \mathbf{T}(s_0)$ tal que

$$I(\max\{s_n, t_{n+1}\}) \subset I(s_{n+1}).$$

Com isso temos que $\{s_n\}$ é uma seqüência não decrescente em relação a inclusão de seus interiores e usando a pré-compacidade do levantamento mínimo $\sqcup$, podemos encontrar um seqüência de levantamentos mínimos $s_{n_k} \sqcup_E M_{p_n, s_{n_k}} \in T(s_0)$ tal que $\left\{M_{p_n, s_{n_k}}\right\}$ converge, quando $k \to \infty$, para uma superfície mínima regular contida em M_{s_0}. Isto prova que M_{s_0} é uma superfície mínima. Como é claro que $\partial M_{s_0} = \partial s_0$, o teorema está provado. ■

6.3 Aplicação

Superfícies mínimas compactas cuja fronteira consiste de duas curvas convexas γ_1, γ_2 em planos paralelos π_1 e π_2 distintos têm sido objeto de estudo desde muito tempo. Provavelmente um dos primeiros a se preocupar com este tipo de problema foi B. Riemann que deu uma descrição de anéis minimais que tem como bordo a união de dois círculos contidos em planos paralelos em termos de funções elípticas ([R]). Muito depois, M. Shiffman provou que a interseção de um anel minimal A tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como fronteira em qualquer plano paralelo a π_1 é uma curva convexa (ou um conjunto vazio). Em particular, quando γ_i são círculos, Shiffman provou que a interseção, se não vazia, é um círculo ([S]).

Aqui, apenas nos preocuparemos com o problema de existência de anéis mini mais dada certas condições em termos da geometria de γ_1 e γ_2, como curvatura, existência de círculos interiores ou exteriores às curvas, que geralmente são requeridas em aplicações de EDP.

Para enunciarmos o resultado, denotaremos por x_0 somente a raiz positiva da equação

$$\cosh x - x senh x = 0,$$

$x_0 \approx 1,19965$. Feito isto enunciamos o seguinte:

Teorema 6.9 *Sejam π_i, $i = 1, 2$, planos paralelos distintos, e seja $\gamma_i \subset \pi_i$ curvas suaves convexas tal que γ_2 seja a projeção ortogonal de γ_1 sobre π_2. Suponha ainda que a distância d entre os planos satisfaça*

$$d \leq \frac{1}{b}\left(\frac{2}{k_{\max}} - \frac{1}{k_{\min}}\right) \tag{6.2}$$

onde k denota a curvatura de γ_1, e $b = 2senh x_0 \approx 3,01765$. Então existe um ou no máximo dois anéis minimais A_1 e A_2 tais que $\partial A_i = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $i = 1, 2$.

Este teorema é ótimo no seguinte sentido: Dado $\varepsilon > 0$, se a condição (6.2) é substituida por

$$d \leq \frac{1}{b}\left(\frac{2}{k_{\max}} - \frac{1}{k_{\min}}\right) + \varepsilon$$

a conclusão não é mais verdadeira. Isto pode ser constatato considerando a não existência de qualquer superfície mínima tendo como bordo duas curvas γ_1 e γ_2 pertencentes a cada uma das duas componentes conexas do cone

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < z^2 senh^2 (x_0)\right\}.$$

Isto foi observado por R. Osserman (veja [O]).

Referências Bibliográficas

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *"Elliptic Partial Differential Equations of Se cond Order"*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1983.

[EFS] Espírito-Santo, N., Frensel, K. R., Ripoll, J, *"Some characterization and existence results on H-domains"*, preprint.

[O] Osserman, R., *"A survey of minimal surfaces",* Van Nostrand-Reinhold, New York, 1969.

[R] Riemann, B., *"Ouvres Mathématiques de Riemann",* Gauthiers-Villars, Paris, 1898.

[S] Shiffman, M., *"On surfaces of stationary area bounded by two circles or convex curves in parallel planes",* Annals of Math. **63**, 77-90, (1956).

[FR] Fusieger, P., Ripoll, J., *"An extension of Perron's method and an existence result for minimal annulus in $\mathbb{R}^3$ with boundary in parallel planes",* preprint

[FJ] John, F., *"Partial Differential Equations",* 3th edition, Springer-Verlag, 1980.

[RI] Ripoll, J., *"Some characterization, uniqueness and existence results for Euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary",* Pacific Journal, Vol **197**, N. 1, 191-212, (2001).