Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ANÉIS DE FATORAÇÃO ÚNICA

Marlon Soares

Orientador: Miguel Angel Alberto Ferrero

Porto Alegre, julho de 2003

A minha esposa Inali

e aos meus pais

Domingos e Leonor.

Agradecimentos

Especial ao meu orientador professor Miguel Ferrero, excelente profissional ao qual muito admiro e pretendo me espelhar, pela oportunidade, por sua valorosa orientação e constante preocupação com minha formação.

Aos professores Cydara Ripoll, Elizabeth Ferreira da Costa, Ivan Pan, Luis Gustavo Doninelli e Paulo Zingano do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, pelo incentivo e formação.

Aos colegas da Pós-Graduação. Em especial aos amigos Cleber, Leonardo, Magali, Virgínia e Wagner pelo companheirismo.

À Rosane e Valéria, secretárias do Programa, pela atenção com a qual sempre me atenderam.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar condições necessárias e suficientes sobre um determinado anel R, não necessariamente comutativo, para que suas extensões polinomiais apresentem fatoração única. O estudo de tal propriedade é feito para anéis primos Noetherianos e para anéis primos não necessariamente Noetherianos.

Abstract

The objective of work is to study necessary and sufficient conditions over a ring R, not necessarily commutative, to obtain polynomial extensions having unique factorisation. Such property is studied for prime Noetherian rings and prime rings not necessarily Noetherian.

Sumário

Introdução

Em 1° de março de 1847, o matemático francês Gabriel Lamé anunciou, numa reunião da Academia Francesa de Ciências, que estava muito perto de demonstrar o Último Teorema de Fermat. Ele, que já havia provado o caso particular em que $n = 7$, delineou o método e previu que dentro das próximas semanas publicaria a demonstração completa no jornal da Academia. A expectativa aumentou em abril, quando Lamé publicou detalhes vagos mas fascinantes de sua demonstração no referido jornal.

Então, no dia 24 de maio, Joseph Liouville dirigiu-se à Academia para ler o conteúdo de uma carta do matemático alemão Ernest Kummer. Após ter lido os anais e analisado os detalhes que Lamé revelara, Kummer, um dos melhores teóricos dos números do mundo, notou que a demonstração que Lamé pretendia apresentar considerava um subanel dos números complexos como sendo de fatoração única, o que ele provou não ser verdadeiro. Este fato, nos dá uma noção da necessidade de saber se uma determinada estrutura apresenta tal propriedade.

Na álgebra comutativa um domínio de integridade R é um domínio de fatoração única se todo elemento não-nulo e não-invertível de R se fatora como produto de um número finito de elementos irredutíveis de R. Além disso, tal fatoração é única a menos da ordem dos fatores e de elementos associados.

Esta noção pode ser estendida para um determinado anel R, não necessariamente comutativo, sendo o objetivo principal deste trabalho estudar condições necessárias e suficientes para que as extensões polinomiais de R sejam anéis de fatoração única.

O primeiro capítulo destina-se a apresentar as noções básicas indispensáveis ao desenvolvimento dos resultados que serão apresentados.

No segundo capítulo, com base no trabalho de A. W. Chatters e D. A. Jordan [2], será mostrado, na Seção 1, que a classe dos anéis de fatoração única Noetherianos é fechada sob extensões polinomiais: se R é um anel de fatoração única Noetheriano então o anel $R[x]$, onde a indeterminada x comuta com os elementos de R, é um anel de fatoração única Noetheriano. Na segunda seção, veremos o caso correspondente para "skew" anéis de polinômios tipo automorfismo e, na Seção 3, concluímos o capítulo analisando o caso para "skew" anéis de polinômios tipo derivação.

O terceiro capítulo, com base no trabalho de A. W. Chatters, M. P. Gilchrist e D. Wilson [3], tem por objetivo estabelecer algumas propriedades dos anéis de fatoração única não necessariamente Noetherianos. Em particular mostraremos que, se R é um anel de fatoração única, então o anel de polinômios usual $R[x]$ é um anel de fatoração única.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Ao desenvolvermos este trabalho consideramos conhecidas as noções básicas da Teoria de Anéis. Este capítulo tem por finalidade apresentar algumas definições e resultados que serão utilizados posteriormente, sendo as demonstrações limitadas àquelas não encontradas na literatura disponível.

Consideraremos um anel R sempre associativo com unidade, mas não necessariamente comutativo. Quando um ideal I de R for bilateral, diremos simplesmente que I é um ideal de R e denotaremos isto por $I \lhd R$. Além disso, quando escrevemos $\subset$ ou $\supset$ estamos considerando inclusão estrita.

Um anel R é dito *simples* quando seus únicos ideais bilaterais são os triviais, ou seja, 0 e R. Um elemento $a \in R$ é dito *normalizante* se $aR = Ra$. Um elemento $a \in R$ é dito *central* se $ar = ra$, para todo $r \in R$.

Um elemento $a \in R$ é dito *regular à direita* se, dado um elemento $b \in R$ tal que $ab = 0$, temos $b = 0$. Analogamente, define-se um elemento regular à esquerda. Um *elemento regular* é um elemento regular à direita e à esquerda. Dado um ideal I de R, $\mathcal{C}_R(I)$ denota o conjunto dos elementos de R que são regulares módulo I, isto é, $\mathcal{C}_R(I) = \{r \in R; r + I \text{ é regular em } R/I\}$.

Quando não houver dúvida com relação ao anel em questão, denotaremos este conjunto por $\mathcal{C}(I)$. Naturalmente, $\mathcal{C}(0)$ denota o conjunto dos elementos regulares de R.

Um anel R é dito *Noetheriano à direita* se satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre ideais à direita, isto é, se dada uma cadeia qualquer de ideais à direita $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ existe um inteiro positivo k tal que $I_k = I_{k+1} = \cdots$. Analogamente, define-se um anel Noetheriano à esquerda. Quando R for Noetheriano à direita e à esquerda, diremos simplesmente que R é Noetheriano.

Definição 1.1. *Um anel R é dito um* anel primo *se, para quaisquer ideais I e J de R, temos que $IJ = 0$ implica $I = 0$ ou $J = 0$. Um ideal P de um anel R é dito* primo *se R/P é um anel primo. Um elemento não-nulo p de R é dito um* elemento primo *se p é normalizante e pR é um ideal primo de R.*

A proposição abaixo caracteriza os ideais primos. Nela, (a) denota o ideal de R gerado pelo elemento $a \in R$. Para anéis com unidade, que é o nosso caso, este ideal é igual a RaR.

Proposição 1.2. *Seja P um ideal do anel R. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *P é um ideal primo.*

ii) *Se $a, b \in R$ com $(a)(b) \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.*

iii) *Se $a, b \in R$ com $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.*

iv) *Se I e J são ideais à esquerda (direita) de R, então $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.*

v) *Dados ideais I e J de R tais que $I \supseteq P$ e $J \supseteq P$ se $IJ \subseteq P$, então $I = P$ ou $J = P$.*

Definição 1.3. *Sejam R um anel e P um ideal primo de R. A* altura *de P, que denotaremos por $alt(P)$, é o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos contida em P. Um ideal primo P de R é dito um* ideal primo minimal de R *se P não contém propriamente qualquer outro ideal primo.*

O próximo teorema é conhecido como Teorema do Ideal Principal.

Teorema 1.4. ([9], Teorema 4.1.11) *Sejam R um anel Noetheriano à direita, $a \in R$ um elemento normalizante não-invertível e P um ideal primo de R minimal sobre aR. Então P tem altura no máximo 1.*

Teorema 1.5. ([5], Teorema 2.4) *Se R é um anel Noetheriano à direita, então existe somente um número finito de ideais primos minimais em R.*

Definição 1.6. *Seja $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo formado por elementos regulares em um anel R. Um anel $R_{\mathcal{S}}$ é chamado um* anel de quocientes à direita de R *se satisfaz as seguintes condições:*

i) *$R \subseteq R_{\mathcal{S}}$;*

ii) *todo elemento de $\mathcal{S}$ é invertível em $R_{\mathcal{S}}$;*

iii) *todo elemento $q \in R_{\mathcal{S}}$ é da forma rs^{-1} para alguns $r \in R$, $s \in \mathcal{S}$.*

Definição 1.7. *Um sistema multiplicativo $\mathcal{S}$ de um anel R satisfaz a* condição de Ore à direita *se, para todo $r \in R$ e todo $s \in \mathcal{S}$, existem $r' \in R$ e $s' \in \mathcal{S}$ tais que $rs' = sr'$.*

O teorema a seguir é bem conhecido e daremos apenas um esboço da sua prova. Os detalhes podem ser encontrados em ([7], Teorema 1.3).

Teorema 1.8. *Seja $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo de elementos regulares em um anel R. O anel de quocientes à direita $R_{\mathcal{S}}$ com relação a $\mathcal{S}$ existe se, e somente se, $\mathcal{S}$ satisfaz a condição de Ore à direita.*

Demonstração. Suponhamos que $R_{\mathcal{S}}$ existe. Dados $a, s \in R$, com $s \in \mathcal{S}$, temos que $s^{-1}a \in R_{\mathcal{S}}$, então $s^{-1}a = bt^{-1}$, para alguns $b \in R$ e $t \in \mathcal{S}$. Portanto $\mathcal{S}$ satisfaz a condição de Ore à direita. Reciprocamente, definimos em $R \times \mathcal{S}$ uma relação de equivalência, $(a, s) \sim (b, t)$ se existem $c, d \in R$ tais que $ac = bd$ e $sc = td \in \mathcal{S}$. Podemos, então denotar a classe de (a, s) por a/s e $R_{\mathcal{S}}$ denotará o conjunto de todas essas classes. Dados a/s e b/t em $R_{\mathcal{S}}$, definimos a adição por $(a/s) + (b/t) = (ac + bd)/u$, onde $u = sc = td \in \mathcal{S}$ e a multiplicação por $(a/s) \cdot (b/t) = ac/tu$, onde $sc = bu$ e $u \in \mathcal{S}$. É fácil ver que $R_{\mathcal{S}}$ é um anel com unidade $1 = c/c$, onde $c \in \mathcal{S}$. A aplicação $a \mapsto ac/c$, onde $c \in \mathcal{S}$, permite considerar $R \subseteq R_{\mathcal{S}}$ e verifica-se que $R_{\mathcal{S}}$ é um anel de quocientes à direita para R. □

Proposição 1.9. ([9], Proposição 1.16) *Sejam R um anel e $R_{\mathcal{S}}$ o anel de quocientes à direita de R com respeito a $\mathcal{S}$. Se R é Noetheriano, então existe uma correspondência biunívoca entre $\{P \in SpecR; P \cap \mathcal{S} = \emptyset\}$ e $\{P' \in SpecR_{\mathcal{S}}\}$ via $P \mapsto PR_{\mathcal{S}}$ e $P' \mapsto P' \cap R$.*

Extensões polinomiais

Veremos agora alguns resultados para extensões polinomiais de um anel R. Note que, considerando o automorfismo identidade ou a derivação nula, estes resultados são válidos para o anel de polinômios usual $R[x]$, onde a indeterminada x comuta com os elementos de R.

Sejam R um anel e α um automorfismo de R. O *"skew" anel de polinômios tipo automorfismo* $R[x;\alpha]$ é definido como o anel cujos elementos são os polinômios $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, onde $a_i \in R$. A adição é definida da forma usual e a multiplicação pela propriedade $xa = \alpha(a)x$, para todo $a \in R$, estendida por distributividade. Assim, a multiplicação é dada por:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^i\right) = \sum_{i,j=0}^{n,m} a_i \alpha^i(b_j) x^{i+j}.$$

Um ideal I de R é dito um *α-ideal* se $\alpha(I) \subseteq I$. Se $\alpha(I) = I$, então I é dito um *ideal α-invariante*. Um anel R é dito *α-simples* quando seus únicos α-ideais são os triviais, ou seja, 0 e R.

Note que, num anel Noetheriano, todo α-ideal é um ideal α-invariante. Pois, sendo α um automorfismo e I um α-ideal de R, temos $I \subseteq \alpha^{-1}(I) \subseteq \alpha^{-2}(I) \subseteq \cdots$ e cada potência positiva α^n induz um isomorfismo aditivo de $\alpha^{-n}(I)/\alpha^{1-n}(I)$ sobre $I/\alpha(I)$. Como R tem a condição de cadeia ascendente, segue que $\alpha(I) = I$.

Definição 1.10. *Um α-ideal P de R é dito um* ideal α-primo *se para quaisquer α-ideais I e J de R temos que $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Um anel R é dito um* anel α-primo *se o ideal 0 é um ideal α-primo de R.*

Um anel R é dito *semiprimo* se para qualquer ideal I de R temos que $I^n = 0$, para $n \geqslant 1$, implica $I = 0$.

Lema 1.11. ([9], Lema 10.6.5) *Se R é Noetheriano à direita e α-primo, então R semiprimo.*

O automorfismo α de R pode ser estendido a $R[x;\alpha]$ se consideramos

$\alpha(x) = x$. Assim, dado $f = a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \in R[x;\alpha]$ temos $\alpha(f) = \alpha(a_n)x^n + ... + \alpha(a_1)x + \alpha(a_0)$.

Seja I é um α-ideal de R; como $\alpha(I) \subseteq I$, temos que $I[x;\alpha]$ é um ideal de $R[x;\alpha]$. Sejam I e J α-ideais de R; como $\alpha(J) \subseteq J$, temos que $(IJ)[x;\alpha] = I[x;\alpha]J[x;\alpha]$. Além disso, dado um ideal K de $R[x;\alpha]$ é fácil ver que o subconjunto de R formado pelos coeficientes líderes dos elementos de K, que denotaremos por $\tau(K)$, é um α-ideal de R.

Lema 1.12. *Se P é um ideal α-primo de R, então $P[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$.*

Demonstração. Sejam I e J ideais de $R[x;\alpha]$ tais que $IJ \subseteq P[x;\alpha]$, $P[x;\alpha] \subseteq I$ e $P[x;\alpha] \subseteq J$. Então, $\tau(I)\tau(J) \subseteq \tau(IJ) \subseteq P$. Como P é α-primo e $\tau(I)$, $\tau(J)$ são α-ideais de R temos que $\tau(I) \subseteq P$ ou $\tau(J) \subseteq P$. Suponhamos que $\tau(I) \subseteq P$ e seja $f = a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \in I$. Então, $a_n \in \tau(I) \subseteq P$ e $a_nx^n \in P[x;\alpha] \subseteq I$. Como $f \in I$ temos que $f - a_nx^n = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \in I$. Daí, $a_{n-1} \in \tau(I) \subseteq P$. Repetindo o processo obtemos $a_i \in P$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Assim, $I \subseteq P[x;\alpha]$ e portanto, $P[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. $\square$

Lema 1.13. *Seja P um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Então, ou*

i) *$x \in P$, e neste caso $P = (P \cap R) + R[x;\alpha]x$, ou*

ii) *$x \notin P$, e neste caso $x \in \mathcal{C}(P)$ e $\alpha(P) \subseteq P$.*

Demonstração.

i) Seja $f = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ um elemento de P. Como $x \in P$ temos que $(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1})x \in P$ e daí, $a_0 \in P$. Assim, $f = a_0 + (a_1 + \cdots + a_nx^{n-1})x \in$

$(P \cap R) + R[x;\alpha]x$ e daí, $P \subseteq (P \cap R) + R[x;\alpha]x$. Considere agora um elemento $g \in (P \cap R) + R[x;\alpha]x$, então $g = b_0 + hx$, onde $b_0 \in (P \cap R)$ e $h \in R[x;\alpha]$. Como $x \in P$ temos que $hx \in P$, logo $g \in P$ e daí, $(P \cap R) + R[x;\alpha]x \subseteq P$.

ii) É claro que se $x \notin P$, então $x \in \mathcal{C}(P)$. Além disso, temos que $xP = \alpha(P)x \in P$, logo $\alpha(P)R[x;\alpha]x = \alpha(P)xR[x;\alpha] \subseteq P$. Como P é um ideal primo de $R[x;\alpha]$ e $x \notin P$, segue que $\alpha(P) \subseteq P$. $\square$

Lema 1.14. *Seja P um ideal primo de $R[x;\alpha]$ tal que $\alpha(P) \subseteq P$. Então $P \cap R$ é um ideal α-primo de R.*

Demonstração. É claro que $P \cap R$ é um ideal de R e sendo $\alpha(P) \subseteq P$ temos que $\alpha(P \cap R) \subseteq P \cap R$. Além disso, se I e J são α-ideais de R tais que $IJ \subseteq (P \cap R)$, temos $IJ \subseteq P$ e daí, $IR[x;\alpha]JR[x;\alpha] = (IJ)R[x;\alpha] \subseteq P$. Como P é primo segue que $I \subseteq I[x;\alpha] \subseteq P$ ou $J \subseteq J[x;\alpha] \subseteq P$ e assim, $I \subseteq (P \cap R)$ ou $J \subseteq (P \cap R)$. Portanto, $P \cap R$ é um ideal α-primo de R. $\square$

Note que se P é um ideal primo de $R[x]$ então, considerando o automorfismo identidade no lema acima, temos que $P \cap R$ é um ideal primo de R.

Corolário 1.15. *Se $R[x;\alpha]$ é um anel primo, então R é um anel α-primo.*

Demonstração. Se $R[x;\alpha]$ é primo, então 0 é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Por (1.14), 0 é um ideal α-primo de R e portanto, R é um anel α-primo. $\square$

Sejam R um anel e $\delta : R \to R$ uma derivação, isto é, uma aplicação aditiva que satisfaz a regra $\delta(rs) = r\delta(s) + \delta(r)s$, para todo $r, s \in R$. O *"skew" anel de polinômios tipo derivação* $R[x;\delta]$ é definido como o anel cujos elementos são os polinômios $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, onde $a_i \in R$. A adição é definida da forma usual e a multiplicação pela propriedade $xa = ax + \delta(a)$, para todo $a \in R$.

Um ideal I de R é dito um δ-*ideal* se $\delta(I) \subseteq I$. Um anel R é dito δ-*simples* quando seus únicos δ-*ideais* são os triviais, ou seja, 0 e R.

Definição 1.16. *Sejam R um anel e δ uma derivação de R. Um δ-ideal P de R é dito um* ideal δ-primo *se para quaisquer* δ-ideais *I e J de R temos que $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Um anel R é dito um* anel δ-primo *se o ideal 0 é um ideal δ-primo de R.*

A derivação δ de R pode ser estendida a $R[x;\delta]$ se consideramos $\delta(x) = 0$. Assim, dado $f = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in R[x;\delta]$ temos $\delta(f) = \delta(a_n)x^n + ... + \delta(a_1)x + \delta(a_0)$.

Se I é um δ-ideal de R, é claro que $I[x;\delta]$ é um ideal de $R[x;\alpha]$. Além disso, é fácil ver que dado um ideal K de $R[x;\delta]$ o subconjunto de R formado pelos coeficientes líderes dos elementos de K, que denotaremos por $\tau(K)$, é um δ-ideal de R.

Lema 1.17. *Sejam R um anel e δ uma derivação de R.*

i) *Se P é um ideal primo de $R[x;\delta]$, então $P \cap R$ é um ideal δ-primo de R.*

ii) *Se Q é um ideal δ-primo de R, então $Q[x;\delta]$ é um ideal primo de $R[x;\delta]$.*

Demonstração.

i) É fácil ver que $(P \cap R)$ é um δ-ideal de R. Além disso, se I, J são δ-ideais de R tais que $IJ \subseteq P \cap R$, temos que $IJ \subseteq P$ e daí, $I[x;\delta]J[x;\delta] =$

$(IJ)[x;\delta] \subseteq P$. Como P é um ideal primo segue que $I \subseteq I[x;\delta] \subseteq P$ ou $J \subseteq J[x;\delta] \subseteq P$. Portanto, $P \cap R$ é um ideal δ-primo de R.

ii) Sejam I e J ideais de $R[x;\delta]$ tais que $IJ \subseteq Q[x;\delta]$, $Q[x;\delta] \subseteq I$ e $Q[x;\delta] \subseteq J$. Então, $\tau(I)\tau(J) \subseteq \tau(IJ) \subseteq Q$. Como Q é δ-primo e $\tau(I)$, $\tau(J)$ são δ-ideais de R temos que $\tau(I) \subseteq Q$ ou $\tau(J) \subseteq Q$. Suponhamos que $\tau(I) \subseteq Q$ e seja $f = a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \in I$. Então, $a_n \in \tau(I) \subseteq Q$ e $a_nx^n \in Q[x;\alpha] \subseteq I$. Como $f \in I$ temos que $f - a_nx^n = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \in I$. Daí, $a_{n-1} \in \tau(I) \subseteq Q$. Repetindo o processo obtemos $a_i \in Q$, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Assim, $I \subseteq Q[x;\delta]$ e portanto, $Q[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\delta]$. □

Proposição 1.18. ([5], Teorema 2.20) *Seja R um anel, δ uma derivação de R e P um ideal primo minimal de R tal que R/P tem característica zero. Então P é um δ-ideal.*

Se I é um ideal de R, então $r(I) = \{a \in R;\ Ia = 0\}$ é um ideal à direita de R chamado *anulador à direita de I*. Analogamente, define-se o anulador à esquerda de I que denotamos por $l(I)$. Um ideal I de R é *nilpotente* se existe $n \geqslant 1$ tal que $I^n = 0$. Um ideal I de R é dito um *nil ideal* se todo elemento de I é nilpotente.

Se R é um anel Noetheriano, então R possui um ideal nilpotente máximo chamado o *radical nilpotente* de R.

Lema 1.19. *Sejam R um anel Noetheriano à direita e δ uma derivação de R. Se R é um anel δ-primo, então o radical nilpotente N de R é um ideal primo e $\bigcap\limits_{i=0}^{k} \delta^{-i}(N) = 0$, para algum inteiro k.*

Demonstração. Se R é um anel primo nada temos a provar. Então suponhamos que R não é um anel primo. Tome um ideal P de R maximal em relação a propriedade que $r(P) \neq 0$. É fácil ver que P é um ideal primo de R. Mostraremos que P é nilpotente e portanto, sendo P primo, temos que $P = N$.

Seja $P_n = \bigcap_{i=0}^{n} \delta^{-i}(P)$, para $n \geqslant 0$ e considere a seguinte cadeia de ideais: $0 \neq r(P_0) \subseteq r(P_1) \subseteq \cdots$. Como R é Noetheriano existe um inteiro positivo k tal que $r(P_k) = r(P_{k+1})$. Mostraremos que $r(P_k)$ é um δ-ideal. Seja $r \in r(P_k)$ e $p \in P_{k+1}$. Então temos $0 = \delta(pr) = \delta(p)r + p\delta(r)$. Mas, $\delta(p) \in P_k$ daí, $\delta(p)r = 0$. Conseqüentemente, $p\delta(r) = 0$ e então, $\delta(r) \in r(P_k)$. Portanto, $r(P_k)$ é um δ-ideal. É fácil ver que $l(r(P_k))$ é também um δ-ideal e daí, como R é δ-primo, segue que $P_k = 0$ ou $r(P_k) = 0$. Mas, $0 \neq r(P_0) \subseteq r(P_k)$ e assim, $P_k = 0$. Como $P^{k+1} \subseteq P_k$ segue que P é nilpotente. Além disso, $\bigcap_{i=0}^{k} \delta^{-i}(N) = P_k = 0$. □

No teorema abaixo considere $f = \alpha$ no caso da derivação nula, $f = \delta$ no caso do automorfismo identidade e $R[x; f] = R[x]$ no caso em que temos ambos, derivação nula e automorfismo identidade.

Teorema 1.20. ([9], Teorema 1.2.9) *Se R é um anel Noetheriano à direita (esquerda), então $R[x; f]$ é um anel Noetheriano à direita (esquerda).*

Capítulo 2

Anéis de fatoração única Noetherianos

Neste capítulo vamos estabelecer, segundo o trabalho de A. W. Chatters e D. A. Jordan [2], condições necessárias e suficientes para que as extensões polinomiais de um anel R sejam anéis de fatoração única Noetherianos.

Definição 2.1. *Um anel R é chamado um* anel de fatoração única Noetheriano *se R é um anel primo Noetheriano à esquerda e à direita tal que todo ideal primo não-nulo de R contém um ideal primo principal não-nulo.*

Em ([8], Teorema 5), encontramos a seguinte equivalência para um domínio de fatoração única no contexto comutativo: "Um domínio de integridade R é um domínio de fatoração única se, e somente se, todo ideal primo não-nulo em R contém um ideal primo principal não-nulo". Conseqüentemente, um domínio de integridade Noetheriano é um anel de fatoração única Noetheriano, e somente se, é um domínio de fatoração única no sentido clássico.

Existem vários significados para o ideal *principal* quando ele é aplicado a um ideal I em anéis não-comutativos. O que usaremos durante este trabalho é que I é principal se $I = aR = Ra$, para algum $a \in R$. Outra interpretação é que I é principal se $I = aR = Rb$, para alguns $a, b \in R$. Quando usarmos o termo ideal principal neste trabalho o seguinte argumento é aplicado para mostrar que os dois significados são equivalentes em anéis Noetherianos. Seja R um anel no qual elementos regulares à esquerda são regulares. Sejam $a, b \in R$ tais que $aR = Rb$ e b é regular. Existem $s, t, q \in R$ tais que $b = at$, $a = sb$ e $bt = qb$. Então $b = sbt = sqb$ e como b é regular temos $sq = 1$, isto é, s é invertível à direita, daí s é regular à esquerda e portanto regular. Da regularidade de s, obtemos que s é invertível. Conseqüentemente, $aR = Rb = Rs^{-1}sb = Ra$.

Usamos acima, como hipótese, que R é um anel no qual elementos regulares à esquerda são regulares. A prova de que isto vale para um anel Noetheriano segue do Teorema 2.3 em [4].

Proposição 2.2. *Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e P um ideal primo não-nulo de R. Então P tem altura 1 se, e somente se, P é principal.*

Demonstração. Suponhamos que P é principal, como R é primo Noetheriano segue, por (1.4), que $alt(P) = 1$. Reciprocamente, suponhamos que existe um ideal primo Q de altura 1 em R que não é principal. Como R é um anel de fatoração única Noetheriano, Q contém um ideal primo principal P não-nulo e portanto, de altura 1. Assim, temos $0 \subset P \subset Q$, onde Q e P tem altura 1, absurdo. □

Proposição 2.3. *Seja R um anel primo Noetheriano satisfazendo a condição de cadeia descendente sobre ideais primos. Se todo primo de altura 1 de R é* *principal então, R é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Considere uma cadeia de ideais primos $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \cdots$ em R, que seja maximal, isto é, uma cadeia na qual não existe ideal primo P de R tal que $P_i \supset P \supset P_{i+1}$, para todo inteiro positivo i. Note que uma tal cadeia existe pois R é Noetheriano. Por hipótese, R satisfaz a condição de cadeia descendente sobre ideais primos, logo existe um inteiro positivo n tal que $P_{n-1} \supset P_n = P_{n+1} = \cdots$. Como R é um anel primo temos $P_n = 0$, assim $altP_{n-1} = 1$ e então, por hipótese, P_{n-1} é um ideal principal. Portanto, todo ideal primo não-nulo contém um ideal primo principal não-nulo. Como R é um anel primo Noetheriano segue que R é um anel de fatoração única Noetheriano. □

Lema 2.4. *Seja $E = \{0 \neq e \in R;\ eR = Re\}$ o conjunto dos elementos normalizantes não-nulos de um anel de fatoração única Noetheriano R. Então o anel de quocientes com respeito a E existe.*

Demonstração. Sejam $e \in E$ e $a \in R$ tais que $ea = 0$. Então $0 = Rea = eRa$ e como R é um anel primo temos que $e = 0$ ou $a = 0$. Mas, $0 \notin E$ logo, $a = 0$ e assim, e é regular à direita. Analogamente, obtemos que e é regular à esquerda e portanto, e é um elemento regular de R. Além disso, é claro que E satisfaz a condição de Ore à direita e à esquerda. Então, por (1.8), o anel de quocientes com respeito a E existe. □

Lema 2.5. *Todo ideal não-nulo de um anel de fatoração única Noetheriano R contém um produto de elementos primos.*

Demonstração. Considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{A} = \{0 \neq H \lhd R;\ H \text{ não contém um produto de elementos primos}\}.$$

Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, como R é Noetheriano, existe um ideal M de R maximal em $\mathcal{A}$. É claro que, sendo R um anel de fatoração única Noetheriano, M não é um ideal primo. Assim, existem $I, J \lhd R$ tais que $IJ \subseteq M$, com $M \subset I$ e $M \subset J$. Pela maximalidade de M, temos que I e J contém um produto de elementos primos. Mas, $IJ \subseteq M$ logo, M também contém um tal produto, o que é uma contradição. Portanto, todo ideal não-nulo de R contém um produto de elementos primos. □

Lema 2.6. *Seja u um elemento normalizante de um anel de fatoração única Noetheriano R. Se não existe um ideal primo pR tal $u \in pR$, então u é invertível em R.*

Demonstração. Pelo lema anterior existem elementos primos $p_1, \ldots, p_n \in R$ tais que $p_1 p_2 \cdots p_n \in uR$ e assim, $p_1 p_2 \cdots p_n = ur$, para algum $r \in R$. Então $ur \in p_n R = Rp_n$ mas, $u \notin p_n R$. Logo, $r \in Rp_n$ e assim, $r = sp_n$, para algum $s \in R$. Então $p_1 \cdots p_n = ur = usp_n$ e, pela regularidade de p_n, temos $p_1 \cdots p_{n-1} = us$. Repetindo este processo obtemos que $1 = ut$, para algum $t \in R$. □

O lema a seguir será provado para um caso mais geral em (3.4).

Lema 2.7. *Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e p um elemento primo de R. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R = 0$.*

Proposição 2.8. *Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e E o conjunto dos elementos normalizantes não-nulos de R. Então todo elemento de E tem a forma $p_1 p_2 \cdots p_n u$, onde u é um elemento invertível de R e, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_i R = Rp_i$ é um ideal primo de R.*

Demonstração. Seja e um elemento qualquer de E. Por hipótese, R é Noetheriano, logo existe somente um número finito de ideais primos minimais sobre eR, digamos $P_1, \ldots, P_k$. Por (1.4), temos $alt(P_i) = 1$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, e como R é um anel de fatoração única Noetheriano cada P_i é um ideal primo principal, que denotaremos por $P_i = p_i R = Rp_i$.

Pelo lema anterior, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe um inteiro positivo não-nulo l_i tal que $e \in p_i^{l_i} R$ mas, $e \notin p_i^{l_i+1} R$. Assim, temos $e = p_1^{l_1} r_1$, para algum $r_1 \in R$. Como $p_1^{l_1} \notin p_2 R$, segue que $r_1 \in p_2 R$ e daí, $e = p_1^{l_1} r_1 = p_1^{l_1} p_2^{l_2} r_2$. Repetindo este argumento obtemos que $e = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k} u$, onde u é um elemento de R com a propriedade que $u \notin p_i R$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Note que não existe nenhum outro elemento primo $p' \in R$ tal que $u \in p'R$ pois, caso contrário teríamos $e \in p'R$, o que não é possível. Como e e os p_i's são elementos normalizantes, u também é um elemento normalizante. Então, por (2.6), u é invertível em R e isto completa a demonstração. □

Seja S o anel de quocientes de R com respeito a E. Como vimos acima, todo elemento de E tem a forma $p_1 p_2 \cdots p_n u$, onde u é um elemento invertível e, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_i R = Rp_i$ é um ideal primo de R. Assim, S coincide com o anel de quocientes de R com respeito ao sistema multiplicativo gerado pelos elementos primos de R.

Lema 2.9. *Se R é um anel de fatoração única Noetheriano, então o anel de quocientes S com respeito a E é simples.*

Demonstração. Seja M um ideal maximal de S. Então, por (1.9), o ideal $M \cap R$ é um ideal primo de R. Como R é um anel de fatoração única Noetheriano, existe um ideal primo principal pR tal que $pR \subseteq (M \cap R)$ e daí, $p \in M$. Mas, $p \in E$ e os elementos de E são invertíveis em S. Conseqüentemente, $M = S$ e portanto, S é um anel simples. □

2.1 Polinômios sobre um anel de fatoração única Noetheriano

Nesta seção, mostraremos que a classe dos anéis de fatoração única Noetherianos é fechada sob extensões polinomiais, isto é, se R é um anel de fatoração única Noetheriano, então o anel $R[x]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. Continuaremos a denotar $E = \{0 \neq e \in R;\ eR = Re\}$.

Lema 2.10. *Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e S o anel de quocientes de R com respeito a E. Então todo ideal primo não-nulo P de $S[x]$ é principal e gerado por um elemento central de $S[x]$.*

Demonstração. Sejam P um ideal primo não-nulo de $S[x]$ e f um elemento não-nulo de P de grau mínimo, digamos $\partial(f) = n$. É claro que o subconjunto τ_0 de S formado pelo 0 e pelos coeficientes líderes dos elementos de P de grau n é um ideal não-nulo de S. Como, por (2.9), S é um anel simples, temos que $\tau_0 = S$. Assim, podemos supor que f é mônico e usando o algoritmo da divisão temos que, para todo $g \in P$, existem $q, r \in S[x]$ tais que $g = fq + r$, onde $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$. Logo $r \in P$ e então, da minimalidade de n, segue que $r = 0$. Daí, para todo $g \in P$, temos $g = fq$ com $q \in S[x]$. Portanto, $P = fS[x]$. Além disso, $xf = fx$ e, para todo $s \in S$, $sf - fs \in P$ e tem grau menor que n, ou seja, $sf = fs$. Donde segue que f é um elemento central em $S[x]$. □

No próximo teorema, um elemento p de R será chamado '*normalizante primo*' se $pR = Rp$ é um ideal primo de altura 1 em R. Além disso, $S[x]$ é o anel de quocientes de $R[x]$ com respeito ao sistema multiplicativo $\mathcal{D}$ gerado pelos elementos normalizantes primos de R.

Teorema 2.11. *Se R é um anel de fatoração única Noetheriano, então $R[x]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Por hipótese, R é um anel primo Noetheriano; então, por (1.20) e (1.12), temos que $R[x]$ é um anel primo Noetheriano. Assim, falta mostrar que todo ideal primo não-nulo de $R[x]$ contém um ideal primo principal não-nulo.

Seja Q um ideal primo não-nulo de $R[x]$. Vamos considerar dois casos. Primeiro, suponhamos $Q \cap R \neq 0$. Por (1.14), $Q \cap R$ é um ideal primo não-nulo de R. Logo, contém um ideal primo principal não-nulo, digamos $pR = Rp$. Por (2.2), pR tem altura 1, então $Q \cap R$ contém o elemento normalizante primo p. Portanto, Q contém o ideal primo principal não-nulo $pR[x] = R[x]p$ de $R[x]$.

Agora, suponhamos $Q \cap R = 0$ e vamos denotar por Q^* a extensão de Q em $S[x]$. Temos $Q^* \neq S[x]$ e, por (1.9), Q^* é um ideal primo não-nulo de $S[x]$. Assim, por (2.10), $Q^* = fS[x]$, para algum elemento central $f \in S[x]$. Além disso, $f = gd^{-1}$, para algum $g \in Q$ e $d \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ é gerado por elementos normalizantes primos, d é normalizante em R, logo $Rg = Rfd = fRd = fdR = gR$. Também temos que $gx = xg$ e portanto, $R[x]g = gR[x]$ e $Q^* = fS[x] = gd^{-1}S[x] = gS[x]$. Podemos também supor que $gR[x]$ é maximal para elementos normalizantes g de Q tais que $gS[x] = Q^*$.

Suponhamos $gR[x] \neq Q$ e seja $h \in Q \backslash gR[x]$. Como $h \in Q^*$ temos $h = gd'^{-1}$, para algum $d' \in \mathcal{D}$, logo $hd' \in gR[x]$. Como d' é um produto de elementos normalizantes primos de R, não existe perda de generalidade em supor que $hp \in gR[x]$, para algum elemento normalizante primo $p \in R$. Assim, $hp = gb$, para algum $b \in R[x]$. Temos $gR[x]b = R[x]gb = R[x]hp \subseteq R[x]p$, onde $R[x]p$ é um ideal primo de $R[x]$. Como $hp = gb$ e $h \notin gR[x]$, segue que $b \notin R[x]p$. Logo, $g \in R[x]p$ e então $g = g'p$, para algum $g' \in R[x]$. Mas,

$g'R[x]p = g'pR[x] = gR[x] \subseteq Q$ e sendo $Q \cap R = 0$ temos que $p \notin Q$, portanto $g' \in Q$. Além disso, $g'R[x]p = g'pR[x] = gR[x] = R[x]g = R[x]g'p$ e então, do fato que todo elemento normalizante é regular, temos $g'R[x] = R[x]g'$. Como p é invertível em $S[x]$, $Q^* = gS[x] = g'pS[x] = g'S[x]$. Pela maximalidade de $gR[x]$, temos que $g'R[x] = gR[x]$, o que é impossível pois, p não é invertível em $R[x]$. Logo, $Q = gR[x]$.

Assim, em ambos os casos, Q contém um ideal primo principal não-nulo e portanto, $R[x]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. $\square$

2.2 "Skew" anéis de polinômios tipo automorfismo

Quando tratamos de "skew" anéis de polinômios tipo automorfismo, o fato que R é um anel de fatoração única Noetheriano não é condição suficiente para que o mesmo aconteça com $R[x;\alpha]$.

Um exemplo de um anel de fatoração única Noetheriano R tal que $R[x;\alpha]$ não é um anel de fatoração única Noetheriano pode ser encontrado em [10], onde se mostra que se R é o anel $\mathbb{C}[t,y]$ dos polinômios em duas indeterminadas que comutam com o corpo dos números complexos e α é um automorfismo tal que $\alpha(y) = t + y^2$ e $\alpha(t) = y$, então $R[x;\alpha]$ não é um anel de fatoração única Noetheriano.

Nesta seção, veremos algumas condições adicionais para que $R[x;\alpha]$ seja um anel de fatoração única Noetheriano. Em toda esta seção chamaremos um elemento $b \in R$ de '*normalizante α-primo*' se bR é um ideal α-primo principal não-nulo de R.

É claro que o sistema multiplicativo $\mathcal{D}$ gerado pelos elementos normalizantes α-primos de R satisfaz a condição de Ore. Além disso, sendo R um anel primo, os elementos de $\mathcal{D}$ são regulares. Então, por (1.8), existe um anel de quocientes S de R formado pela inversão dos elementos normalizantes α-primos e podemos estender α para um automorfismo de S que também chamaremos de α. Note que $S[x;\alpha]$ é o anel de quocientes de $R[x;\alpha]$, com respeito a $\mathcal{D}$.

Lema 2.12. *Sejam R um anel α-primo Noetheriano e P um ideal primo minimal de R. Então $P \cap \alpha(P) \cap \cdots \cap \alpha^n(P) = 0$, para algum inteiro positivo n.*

Demonstração. Por (1.5), existe um número finito de ideais primos minimais de R. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ os ideais primos minimais distintos de R. Suponhamos que existe um ideal primo minimal, que sem perda de generalidade vamos supor P_1, tal que $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \alpha^i(P_1) \neq 0$, para todo inteiro positivo n. Daí, é fácil ver que $\bigcap\limits_{i\geqslant 0} \alpha^i(P_1)$ também é não-nulo. Sendo R Noetheriano e α-primo temos, por (1.11), que R é semi-primo, daí $\bigcap\limits_{j=1}^{k} P_j = 0$. Como $\bigcap\limits_{i\geqslant 0} \alpha^i(P_1) \subseteq P_1$ temos,

$$\Big(\bigcap_{i\geqslant 0} \alpha^i(P_1)\Big) P_2 \cdots P_k \subseteq P_1 P_2 \cdots P_k \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} P_j = 0.$$

Mas, $\bigcap\limits_{i\geqslant 0} \alpha^i(P_1)$ é um α-ideal que estamos supondo não-nulo e R é α-primo, então temos que $P_2 \cdots P_k = 0$. Logo, $P_2 \cdots P_k \subseteq P_1$ e assim $P_1 = P_t$, para algum $t \in \{2, \ldots, k\}$, o que contradiz o fato que os P_i's são todos distintos. Portanto, segue a tese. □

Lema 2.13. *Se $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano, então R é um anel primo Noetheriano.*

Demonstração. Tomando a aplicação $\phi : R[x;\alpha] \to R$, definida por $\phi(h) = c_0$, onde $h = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, temos que R é uma imagem homomórfica de $R[x;\alpha]$, logo R é um anel Noetheriano. Além disso, por (1.15), R é um anel α-primo. Portanto, dado um ideal primo minimal P de R temos, por (2.12), que $\bigcap_{i=0}^{n} \alpha^i(P) = 0$, para algum inteiro positivo n.

Considere o ideal $xR[x;\alpha] + P$ de $R[x;\alpha]$. Como $R[x;\alpha]/(xR[x;\alpha] + P) \simeq R/P$, temos que $xR[x;\alpha] + P$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Seja Q um ideal primo de $R[x;\alpha]$ tal que $xR[x;\alpha] \subseteq Q \subseteq xR[x;\alpha] + P$. Mostraremos que $Q = xR[x;\alpha]$ ou $Q = xR[x;\alpha] + P$. Temos que $x \in Q$; então, por (1.13), $Q = Q \cap R + xR[x;\alpha]$. Segue que $R[x;\alpha]/Q \simeq R/(Q \cap R)$ e daí, $Q \cap R$ é um ideal primo de R, contido em P. Como P é um primo minimal segue que $Q \cap R = 0$ ou $Q \cap R = P$. Portanto, $Q = xR[x;\alpha]$ ou $Q = xR[x;\alpha] + P$.

Se $Q = xR[x;\alpha]$, então $xR[x;\alpha]$ é um ideal primo e como $R[x;\alpha]/xR[x;\alpha] \simeq R$ temos que R é um anel primo. Suponhamos então que $Q = xR[x;\alpha] + P$. Daí, o ideal $xR[x;\alpha] + P$ é minimal sobre $xR[x;\alpha]$ e, por (1.4) e (2.2), deve ser da forma $fR[x;\alpha] = R[x;\alpha]f$, para algum $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ em $R[x;\alpha]$. Como $x \in xR[x;\alpha] \subseteq xR[x;\alpha] + P = fR[x;\alpha]$ temos que $x = fg$, para algum $g = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ em $R[x;\alpha]$. Note que, sendo $xR[x;\alpha] + P = fR[x;\alpha] = R[x;\alpha]f$ e $xR[x;\alpha] \cap R = 0$, temos $P = a_0R = Ra_0$ e daí, $\alpha^i(P) = \alpha^i(a_0)R = R\alpha^i(a_0)$, para todo inteiro positivo i. Além disso, de $x = fg$, temos que $a_0b_0 = 0$ donde, $\alpha(a_0)R\alpha(b_0) = 0$. Novamente de $x = fg$, temos que $a_1\alpha(b_0) + a_0b_1 = 1$. Multiplicando esta última equação por $\alpha(a_0)$ e considerando que $\alpha(a_0)R\alpha(b_0) = 0$, obtemos $\alpha(a_0)a_0b_1 = \alpha(a_0)$. Multiplicando esta equação por $\alpha^n(a_0)\cdots\alpha^2(a_0)$ e considerando o fato que $\alpha^n(a_0)\cdots\alpha(a_0)a_0 \in P \cap \alpha(P) \cap \cdots \cap \alpha^n(P) = 0$, obtemos que $\alpha(\alpha^{n-1}(a_0)\cdots a_0) = 0$. Da injetividade de α temos $\alpha^{n-1}(a_0)\cdots\alpha(a_0)a_0 = 0$. Repetindo este processo obtemos $a_0 = 0$. Assim, $P = 0$ e portanto, R é um anel primo. $\square$

Lema 2.14. *Seja R um anel primo Noetheriano tal que todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo principal não-nulo. Então o anel de quocientes S de R, formado pela inversão dos elementos normalizantes α-primos de R, é um anel α-simples.*

Demonstração. Observe inicialmente que de maneira análoga àquela em (2.5) obtemos que todo α-ideal não-nulo de R contém um produto de elementos normalizantes α-primos. Seja I um α-ideal não-nulo de S. Então $I \cap R$ é um α-ideal não-nulo de R, e pelo que vimos acima, contém um produto de elementos normalizantes α-primos de R. Assim, I também contém tal produto e como tal produto é invertível em S, temos $I = S$. Portanto, S é α-simples. $\square$

Lema 2.15. *Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e S o anel de quocientes de R com respeito ao sistema multiplicativo gerado pelos elementos normalizantes α-primos de R. Então todo ideal primo não-nulo P de $S[x;\alpha]$ tal que $x \notin P$ é principal e gerado por um elemento normalizante de $S[x;\alpha]$.*

Demonstração. Sejam P um ideal primo não-nulo de $S[x;\alpha]$ tal que $x \notin P$ e f um elemento não-nulo de P de grau mínimo, digamos $\partial(f) = n$. É claro que o subconjunto τ_0 de S, formado pelo 0 e pelos coeficientes líderes dos elementos de P de grau n, é um ideal não-nulo de S. Considere um elemento $c_n \in \tau_0$, então existe $h \in P$ tal que $\partial(h) = n$ e seu coeficiente líder é c_n. Temos $xh = \alpha(h)x \in P$, então $\alpha(h)S[x;\alpha]x = \alpha(h)xS[x;\alpha] \subseteq P$. Como $x \notin P$, segue que $\alpha(h) \in P$. Além disso, temos $\partial(\alpha(h)) = n$ e assim, $\alpha(c_n) \in \tau_0$. Portanto, τ_0 é um α-ideal não-nulo de S e como, por (2.14), S é um anel α-simples temos que $\tau_0 = S$.

Assim, podemos supor que f é mônico e usando o algoritmo da divisão temos que, para todo $g \in P$, existem $q, r \in S[x;\alpha]$ tais que $g = fq + r$, onde $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$. Logo $r \in P$ e então, da minimalidade de n, segue que $r = 0$. Daí, para todo $g \in P$, temos $g = fq$ com $q \in S[x;\alpha]$. Portanto, $P = fS[x;\alpha]$. Além disso, dado $s \in S$ temos $\alpha^n(s)f - fs \in P$ e como $x \in \mathcal{C}(P)$, $xf - fx = hx$, para algum $h \in P$. Observe que os elementos $\alpha^n(s)f - fs$ e h têm grau menor que n e portanto são nulos. Logo, $fS = Sf$ e $fx = xf$. Donde segue que $P = fS[x;\alpha] = S[x;\alpha]f$. □

Teorema 2.16. *Seja R um anel com um automorfismo α. Então $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano se, e somente se, R é um anel primo Noetheriano e todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo não-nulo que é principal.*

Demonstração. Suponhamos que $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano; então, por (2.13), temos que R é um anel primo Noetheriano. Assim, falta mostrar que todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo principal não-nulo. Seja P um ideal α-primo não-nulo de R. Por (1.12), $P[x;\alpha]$ é um ideal primo não-nulo de $R[x;\alpha]$. Como $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano, existe um elemento não-nulo $f \in P[x;\alpha]$ tal que $fR[x;\alpha] = R[x;\alpha]f$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Suponhamos $f = r_nx^n + \cdots + r_1x + r_0$, $r_i \in R$; afirmamos que $r_0 \neq 0$. De fato, se $r_0 = 0$, então $f \in xR[x;\alpha]$. Note que $x \notin fR[x;\alpha]$, pois caso contrário teríamos $x = r_1xb_0 = r_1\alpha(b_0)x$, onde b_0 é o termo constante de algum $g \in R[x;\alpha]$ tal que $x = fg$. Então $1 = r_1\alpha(b_0)$ e daí, $P = R$. Além disso, x é normalizante em $R[x;\alpha]$. Assim, teríamos

$$fR[x;\alpha] = (r_nx^{n-1} + \cdots + r_1)xR[x;\alpha] = (r_nx^{n-1} + \cdots + r_1)R[x;\alpha]x.$$

Como $fR[x;\alpha]$ é um ideal primo e $x \notin fR[x;\alpha]$, segue que $r_nx^{n-1} + \cdots + r_1 \in fR[x;\alpha] \subseteq xR[x;\alpha]$ e daí, $r_1 = 0$. Repetindo este argumento obtemos que $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$, o que contradiz o fato que f é não-nulo. Portanto, $r_0 \neq 0$.

Note que, como R é primo e f é normalizante, r_0 é regular. Além disso, $xf = \alpha(f)x \in R[x;\alpha]f = fR[x;\alpha]$, logo $\alpha(f)R[x;\alpha]x = \alpha(f)xR[x;\alpha] \subseteq fR[x;\alpha]$. Como $fR[x;\alpha]$ é primo e $x \notin fR[x;\alpha]$, temos $\alpha(f) \in fR[x;\alpha]$, ou seja, $\alpha(f) = fg$, onde $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$. Assim, $\alpha(r_0) = r_0 b_0 \in r_0 R$ e daí, $\alpha(r_0)R = \alpha(r_0 R) \subseteq r_0 R$ e portanto, $r_0 R$ é um α-ideal de R. Além disso, é claro que $r_0 R[x;\alpha] = R[x;\alpha]r_0$ e $r_0 \in P[x;\alpha]$. Então, por (1.4), existe um ideal primo de altura 1 em $R[x;\alpha]$ que, por (2.2), é da forma $gR[x;\alpha] = R[x;\alpha]g$, tal que $r_0 \in gR[x;\alpha] \subseteq P[x;\alpha]$. Seja $s \in P$ o termo constante de g. Assim como r_0, s é um elemento normalizante para ambos R e $R[x;\alpha]$. Observe que, $xg = \alpha(g)x \in R[x;\alpha]g = gR[x;\alpha]$ logo, $\alpha(g)R[x;\alpha]x = \alpha(g)xR[x;\alpha] \subseteq gR[x;\alpha]$. Como $gR[x;\alpha]$ é primo e $x \notin gR[x;\alpha]$, temos $\alpha(g) \in gR[x;\alpha]$ e daí, $\alpha(g)R[x;\alpha] = \alpha(gR[x;\alpha]) \subseteq gR[x;\alpha]$. Então, por (1.14), $gR[x;\alpha] \cap R$ é um ideal α-primo de R e daí, por (1.12), $(gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Como $gR[x;\alpha]$ tem altura 1 e $(gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha]$ possui um elemento não-nulo r_0, segue que $(gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha] = gR[x;\alpha]$. É claro que $(gR[x;\alpha] \cap R) \subseteq sR$. Reciprocamente, se $r \in R$ então sr é o termo constante de $gr \in (gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha]$. Donde $sR \subseteq (gR[x;\alpha] \cap R)$. Assim, $sR[x;\alpha]$ é primo em $R[x;\alpha]$ e, por (1.14), $sR = sR[x;\alpha] \cap R$ é um ideal α-primo principal não-nulo de R, contido em P.

Reciprocamente, suponhamos que R é um anel primo Noetheriano e que todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo principal não-nulo. Por (1.14) e (1.20), temos que $R[x;\alpha]$ é um anel primo Noetheriano. Assim, falta mostrar que todo ideal primo não-nulo de $R[x;\alpha]$ contém um ideal primo principal não-nulo. Seja S o anel de quocientes de R formado pela inversão dos elementos normalizantes α-primos de R. Como R é primo, 0 é um ideal primo de R então, por (1.9), o ideal 0 é primo em S e daí, S é um anel primo. Além disso, como $S \simeq S[x;\alpha]/xS[x;\alpha]$ temos que $xS[x;\alpha]$ é um ideal primo de $S[x;\alpha]$.

Seja Q um ideal primo não-nulo de $R[x;\alpha]$. Se $x \in Q$, então $xR[x;\alpha] \subseteq Q$ Como $R \simeq R[x;\alpha]/xR[x;\alpha]$ temos que $xR[x;\alpha]$ é um ideal primo principal não-nulo, contido em Q. Suponhamos agora que $x \notin Q$. Vamos considerar dois casos. Se $Q \cap R \neq 0$ então, por (1.14), $Q \cap R$ é um ideal α-primo não-nulo de R e, por hipótese, contém um ideal α-primo principal não-nulo. Assim, contém um elemento normalizante primo que gera um ideal primo principal não-nulo de $R[x;\alpha]$, contido em Q. Finalmente vamos considerar o caso em que $Q \cap R = 0$, com $x \notin Q$. Denotemos por Q^* a extensão de Q em $S[x;\alpha]$. Como $Q \cap R = 0$, segue que $Q^* \neq S[x;\alpha]$. Por (1.9), temos que Q^* é um ideal primo de $S[x;\alpha]$. Note que, como os elementos normalizantes α-primos de R são regulares módulo Q, $x \notin Q^*$. Então, por (2.15), $Q^* = fS[x;\alpha] = S[x;\alpha]f$, para algum $f \in S[x;\alpha]$ tal que $xf = fx$ e $Rf = fR$. Escrevamos $f = gd^{-1}$, para algum $g \in Q$ e d um produto de elementos normalizantes α-primos de R. Como dR é um α-ideal de R, $\alpha(d) = du$, para algum elemento invertível $u \in R$. Então $Rg = Rfd = fRd = fdR = gR$ e $xg = xfd = fxd = fdu^{-1}x = gu^{-1}x$, assim $R[x;\alpha]g = gR[x;\alpha]$ e $Q^* = fS[x;\alpha] = gd^{-1}S[x;\alpha] = gS[x;\alpha]$. Podemos também supor que $gR[x;\alpha]$ é maximal para elementos normalizantes g de Q tais que $gS[x;\alpha] = Q^*$.

Suponhamos que $gR[x;\alpha] \neq Q$ e seja $h \in Q \backslash gR[x;\alpha]$. Como $h \in Q^*$ temos $h = gd'^{-1}$, para algum $d' \in \mathcal{D}$, logo $hd' \in gR[x;\alpha]$. Como d' é um produto de elementos normalizantes α-primos de R, não existe perda de generalidade em supor que $hb \in gR[x;\alpha]$, para algum elemento normalizante primo b de R. Assim, $hb = gc$, para algum $c \in R[x;\alpha]$. Temos que $gR[x;\alpha]c = R[x;\alpha]gc = R[x;\alpha]hb \subseteq R[x;\alpha]b$, onde $R[x;\alpha]b$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Como $hb = gc$ e $h \notin gR[x;\alpha]$, temos que $c \notin R[x;\alpha]b$. Logo, $g \in R[x;\alpha]b$ e então $g = g'b$, para algum $g' \in R[x;\alpha]$. Mas, $g'R[x;\alpha]b = g'bR[x;\alpha] = gR[x;\alpha] \subseteq Q$ e sendo $Q \cap R = 0$ temos que $b \notin Q$, portanto $g' \in Q$. Além disso,

$$g'R[x;\alpha]b = g'bR[x;\alpha] = gR[x;\alpha] = R[x;\alpha]g = R[x;\alpha]g'b$$

e então, do fato que todo elemento normalizante é regular, temos $g'R[x;\alpha] = R[x;\alpha]g'$. Como b é invertível em $S[x;\alpha]$, $Q^* = gS[x;\alpha] = g'bS[x;\alpha] = g'S[x;\alpha]$. Pela maximalidade de $gR[x;\alpha]$, temos que $g'R[x;\alpha] = gR[x;\alpha]$, o que é impossível pois, b não é invertível em $R[x;\alpha]$. Daí, $Q = gR[x;\alpha]$.

Assim, em ambos os casos, Q contém um ideal primo principal não-nulo e portanto, $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. □

Vamos agora, estabelecer algumas condições suficientes para que o "skew" anel de polinômios $R[x;\alpha]$, de um anel de fatoração única Noetheriano R, seja um anel de fatoração única Noetheriano.

O lema a seguir será provado para um caso mais geral em (3.2).

Lema 2.17. *Se p_i e p_j são elementos primos de R tais que $p_iR \neq p_jR$, então $p_ip_jR = p_iR \cap p_jR$.*

Teorema 2.18. *Seja R um anel de fatoração única Noetheriano com um automorfismo α tal que todo ideal α-primo não-nulo contém um α-ideal principal não-nulo. Então $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Seja Q um ideal α-primo não-nulo de R. Por hipótese, Q contém um α-ideal principal não-nulo, digamos aR. Seja I um ideal α-primo minimal tal que $aR \subseteq I$. Como I é α-primo, existe um ideal primo P de R minimal sobre I tal que $\bigcap_{i \geqslant 0} \alpha^i(P) = I$. Afirmamos que P é minimal sobre aR. De fato, suponhamos $aR \subseteq L \subseteq P$ com L um ideal primo de R. Então $aR \subseteq \bigcap_{i\geqslant 0} \alpha^i(L) \subseteq \bigcap_{i\geqslant 0} \alpha^i(P) = I$. É fácil ver que $\bigcap_{i\geqslant 0} \alpha^i(L)$ é α-primo e assim, $\bigcap_{i\geqslant 0} \alpha^i(L) = I$. Daí, $L \supseteq I$ e portanto, $L = P$. Logo, P tem altura 1 sendo da forma $P = pR$. Pelo lema anterior temos $I = \bigcap_{i=0}^{n} \alpha^i(P) = \bigcap_{i=0}^{n} \alpha^i(p)R =$

$\prod_{i=0}^{n} \alpha^i(p)R$, ou seja, I é principal. Portanto, todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo não-nulo que é principal. Pelo teorema anterior, segue que $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. □

Corolário 2.19. *Seja R um anel de fatoração única Noetheriano com um automorfismo α de ordem finita. Então $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Como α é de ordem finita, existe um inteiro positivo n tal que $\alpha^n = id$. Vamos mostrar que todo ideal α-primo não-nulo contém um α-ideal principal não-nulo e então, pelo teorema anterior, $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. Seja P um ideal α-primo não-nulo de R. Existem elementos primos $p_1, \ldots, p_s \in R$ tais que $p_1 \cdots p_s \in P$ e assim, $p_1 R \cdots p_s R \in P$. Logo, $\bigcap_{i=1}^{n-1} \alpha^i(p_1)R \cdots \bigcap_{i=1}^{n-1} \alpha^i(p_s)R \subseteq P$. Como P é α-primo segue que $\bigcap_{i=1}^{n-1} \alpha^i(p_j)R \subseteq P$, para algum $j \in \{1, \ldots, s\}$. Pelo lema anterior temos que $\prod_{i=1}^{n-1} \alpha^i(p_j)R = \bigcap_{i=1}^{n-1} \alpha^i(p_j)R \subseteq P$. Portanto segue a tese. □

2.3 "Skew" anéis de polinômios tipo derivação

Nesta seção apresentaremos algumas condições suficientes, sobre o anel R e uma derivação δ de R, para que o "skew" anel de polinômios $R[x;\delta]$, seja um anel de fatoração única Noetheriano. Em toda esta seção chamaremos um elemento $b \in R$ de '*normalizante δ-primo*' se bR é um ideal δ-primo principal não-nulo de R.

É claro que o sistema multiplicativo $\mathcal{D}$ gerado pelos elementos normalizantes δ-primos de R satisfaz a condição de Ore. Além disso, sendo R um anel primo, os elementos de $\mathcal{D}$ são regulares. Então, por (1.8), existe um anel de quocientes S de R formado pela inversão dos elementos normalizantes δ-primos e podemos estender δ para um automorfismo de S que também chamaremos de δ. Note que $S[x;\delta]$ é o anel de quocientes de $R[x;\delta]$, com respeito a $\mathcal{D}$.

Lema 2.20. *Seja R um anel primo Noetheriano tal que todo ideal δ-primo não-nulo de R contém um ideal δ-primo principal não-nulo. Então o anel de quocientes S de R, formado pela inversão dos elementos normalizantes δ-primos de R, é um anel δ-simples.*

Demonstração. Observe inicialmente que de maneira análoga àquela em (2.5) obtemos que todo δ-ideal não-nulo de R contém um produto de elementos normalizantes δ-primos. Seja I um δ-ideal não-nulo de S. Então $I \cap R$ é um δ-ideal não-nulo de R, e pelo que vimos acima, contém um produto de elementos normalizantes δ-primos de R. Assim, I também contém tal produto e como este produto é invertível em S, temos $I = S$. Portanto, S é δ-simples. $\square$

Lema 2.21. *Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e S o anel de quocientes de R com respeito ao sistema multiplicativo gerado pelos elementos normalizantes δ-primos de R. Então todo ideal primo não-nulo P de $S[x;\delta]$ é principal e gerado por um elemento central de $S[x;\delta]$.*

Demonstração. Sejam P um ideal primo não-nulo de $S[x;\delta]$ e f um elemento não-nulo de P de grau mínimo, digamos $\partial(f) = n$. É claro que o subconjunto τ_0 de S, formado pelo 0 e pelos coeficientes líderes dos elementos de P de grau n formam um ideal não-nulo de S. Considere um elemento $c_n \in \tau_0$, então existe $h \in P$ tal que $\partial(h) = n$ e seu coeficiente líder é c_n. Note que $xh - hx \in P$ e que $xh - hx = \delta(c_n)x^n +$ [termos de grau menor que n]. Pelo caráter minimal de n, temos $xh - hx = 0$ ou $xh - hx$ tem grau n. De qualquer modo, $\delta(c_n) \in \tau_0$. Portanto, τ_0 é um δ-ideal não-nulo de S e como , por (2.20), S é um anel δ-simples temos que $\tau_0 = S$.

Assim, podemos supor que f é mônico e usando o algoritmo da divisão temos que, para todo $g \in P$, existem $q, r \in S[x;\delta]$ tais que $g = fq + r$, onde $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$. Logo $r \in P$ e então, da minimalidade de n, segue que $r = 0$. Daí, para todo $g \in P$, temos $g = fq$ com $q \in S[x;\delta]$. Portanto, $P = fS[x;\delta]$. Além disso, temos que $\delta(f) = xf - fx$ e $sf - fs \in P$, para todo $s \in S$. Mas $\partial(sf - fs) < n$ e, como f é mônico, $\partial(\delta(f)) < n$. Portanto, $sf = fs$ e $xf = fx$. Donde segue que f é central em $S[x;\delta]$. $\square$

Teorema 2.22. *Seja R um anel δ-primo Noetheriano, onde δ é uma derivação de R. Se todo ideal δ-primo não-nulo de R contém um ideal δ-primo principal não-nulo, então $R[x;\delta]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Por hipótese, R é um anel δ-primo Noetheriano então, por (1.17)(i) e (1.20), temos que $R[x;\delta]$ é um anel primo Noetheriano. Assim, falta mostrar que todo ideal primo não-nulo de $R[x;\delta]$ contém um ideal primo principal não-nulo.

Seja Q um ideal primo não-nulo de $R[x;\delta]$. Vamos considerar dois casos. Primeiro, suponhamos $Q \cap R \neq 0$. Por (1.17)(ii), $Q \cap R$ é um ideal δ-primo não-nulo de R e então, contém um ideal δ-primo principal não-nulo, digamos $bR = Rb$. Logo, $Q \cap R$ contém o elemento normalizante δ-primo b e portanto, Q contém o ideal primo principal não-nulo $bR[x;\delta] = R[x;\delta]b$ de $R[x;\delta]$.

Agora suponhamos $Q \cap R = 0$. Denotemos por Q^* a extensão do ideal Q em $S[x;\delta]$. Temos $Q^* \neq S[x;\delta]$ e, por (1.9), Q^* é um ideal primo não-nulo de $S[x;\delta]$. Assim, por (2.21), $Q^* = fS[x;\delta] = S[x;\delta]f$, para algum elemento central f de $S[x;\delta]$. Além disso, $f = gd^{-1}$ para algum $g \in Q$ e $d \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ é gerado por elementos normalizantes δ-primos, d é normalizante em R, logo $Rg = Rfd = fRd = fdR = gR$. Também temos que $xg = xfd = fxd = fdx + f\delta(d) = gx + fdr = gx + gr = g(x + r)$, para algum $r \in R$. De forma similar obtemos que $gx = (x + r')g$, para algum $r' \in R$. Daí, $R[x;\delta]g = gR[x;\delta]$ e $Q^* = fS[x;\delta] = gd^{-1}S[x;\delta] = gS[x;\delta]$. Podemos também supor que $gR[x;\delta]$ é maximal para elementos normalizantes g de Q tais que $gS[x;\delta] = Q^*$.

Suponhamos que $gR[x;\delta] \neq Q$ e seja $h \in Q \backslash gR[x;\delta]$. Como $h \in Q^*$ temos $h = gd'^{-1}$ para algum $d' \in \mathcal{D}$. Logo $hd' \in gR[x;\delta]$. Como d' é um produto de elementos normalizantes δ-primos de R, não existe perda de generalidade em supor que $hb \in gR[x;\delta]$, para algum elemento normalizante primo $b \in R$. Assim, $hb = gc$, para algum $c \in R[x;\delta]$. Temos que $gR[x;\delta]c = R[x;\delta]gc = R[x;\delta]hb \subseteq R[x;\delta]b$, onde $R[x;\delta]b$ é um ideal primo de $R[x;\delta]$. Note que b é normalizante em $R[x;\delta]$ pois b é normalizante em R e $xb = bx + \delta(b) \in bR[x;\delta]$. Como $hb = gc$ e $h \notin gR[x;\delta]$, segue que $c \notin R[x;\delta]b$. Logo, $g \in R[x;\delta]b$ e $g = g'b$, para algum $g' \in R[x;\delta]$. Mas, $g'R[x;\delta]b = g'bR[x;\delta] = gR[x;\delta] \subseteq Q$ e sendo $Q \cap R = 0$, temos que $b \notin Q$, portanto $g' \in Q$. Além disso, $g'R[x;\delta]b = g'bR[x;\delta] = gR[x;\delta] = R[x;\delta]g = R[x;\delta]g'b$ e então, do fato que todo elemento normalizante é regular, temos $g'R[x;\delta] = R[x;\delta]g'$. Como b é invertível em $S[x;\delta]$, $Q^* = gS[x;\delta] = g'bS[x;\delta] = g'S[x;\delta]$. Pela maximalidade de $gR[x;\delta]$, temos que $g'R[x;\delta] = gR[x;\delta]$, o que é impossível pois, b não é invertível em $R[x;\delta]$. Logo, $Q = gR[x;\delta]$.

Assim, em ambos os casos, Q contém um ideal primo principal não-nulo. Portanto, $R[x;\delta]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. $\square$

Proposição 2.23. *Seja R um anel primo Noetheriano com uma derivação δ e seja P um ideal primo de altura 1 de R, tal que P não é um δ-ideal.*

i) *Se R/P tem característica zero então, o único δ-ideal contido em P é o ideal 0.*

ii) *Se R/P tem característica p não-nula e P é principal então, o maior δ-ideal contido em P é P^p.*

Demonstração.

i) Suponhamos que existe um δ-ideal I não-nulo contido em P. Como P é primo, é claro que P/I é primo em R/I. Note que P/I é minimal em R/I pois, $alt(P) = 1$. Além disso, temos que $(R/I)/(P/I) \simeq R/P$ e assim, a característica de $(R/I)/(P/I)$ é zero. Então, por (1.18), temos que P/I é um δ-ideal em R/I. Daí, P é um δ-ideal em R, contradizendo a hipótese. Portanto, o único δ-ideal contido em P é o ideal 0.

ii) Suponhamos que R/P tem característica não-nula p e que $P = bR = Rb$. Para cada inteiro positivo n, seja

$$P_n = \{r \in P; \delta^i(r) \in P, \ \ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Note que, como $\delta(b)r = \delta(br) - b\delta(r) = \delta(r'b) - b\delta(r) = r'\delta(b) + \delta(r')b - b\delta(r)$, $(\delta(b)R + P)/P$ é um ideal não-nulo de R/P e daí, $\delta(b) \in \mathcal{C}(P)$. Além disso segue, por indução, que $\delta^n(b^n r) \equiv n!\delta(b)^n r \bmod P$, para todo inteiro positivo n e todo $r \in R$. Quando $n = p$, temos que $\delta^p(b^p R) \subseteq P$ e se $n < p$ é claro $\delta^n(b^p R) \subseteq P$ e portanto, segue que $b^p R \subseteq P_p$. Por outro lado, como $\delta(b) \in \mathcal{C}(P)$ temos, por indução, que $P_n \subseteq b^{n+1}R$, para $0 \leqslant n < p$. Em particular, para $n = p-1$, temos $P_{p-1} \subseteq b^p R$. Assim, $b^p R \subseteq P_p \subseteq P_{p-1} \subseteq b^p R$. Conseqüentemente, $P_p = P_{p-1} = b^p R = P^p$ é um δ-ideal que, pela definição de P_p, contém qualquer δ-ideal contido em P. $\square$

Veremos agora, para um anel de característica $p \neq 0$ de fatoração única Noetheriano R, condições suficientes para que o anel $R[x;\delta]$ seja um anel de fatoração única Noetheriano.

Teorema 2.24. *Seja R um anel de fatoração única Noetheriano com uma derivação δ. Se R tem característica $p \neq 0$, então $R[x;\delta]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Mostraremos que todo ideal δ-primo não-nulo de R contém um ideal δ-primo principal não-nulo. Então, por 2.22, $R[x;\delta]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. Seja Q um ideal δ-primo não-nulo de R e seja N o ideal de R tal que $Q \subseteq N$ e N/Q é o radical nilpotente de R/Q. Por (1.19), N é um ideal primo de R e

$$Q = \{r \in N; \delta^i(r) \in N, \text{ para todo inteiro positivo } i\}.$$

Como R é um anel de fatoração única Noetheriano, N contém um ideal primo principal não-nulo P de R. Por (2.23)(ii), P ou P^p é um ideal δ-primo principal não-nulo contido em N e portanto, também em Q. $\square$

Teorema 2.25. *Seja R um anel de fatoração única Noetheriano e seja δ uma derivação de R tal que todo ideal δ-primo não-nulo contém um δ-ideal principal não-nulo. Então $R[x;\delta]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.*

Demonstração. Mostraremos que todo ideal δ-primo não-nulo de R contém um ideal δ-primo principal não-nulo. Então, novamente por 2.22, $R[x;\delta]$ é um anel de fatoração única Noetheriano. Seja T um ideal δ-primo não-nulo de R. Então, por hipótese, T contém um δ-ideal principal não-nulo, digamos aR. Existe um ideal δ-primo Q de R tal que $aR \subseteq Q \subseteq T$ e Q é minimal com respeito a esta propriedade. Seja N o ideal de R tal que $Q \subseteq N$ e N/Q é o radical nilpotente de R/Q. Novamente por (1.19), N é um ideal primo de R e

$$Q = \{r \in N; \delta^i(r) \in N, \text{ para todo inteiro positivo } i\}.$$

Seja $P \subseteq N$ um ideal primo de R que é minimal sobre aR. Então, por (1.4), P tem altura 1. Assim, $P = bR = Rb$, para algum $b \in R$. Seja

$$I = \{r \in P; \delta^i(r) \in P, \text{ para todo inteiro positivo } i\}.$$

Então, $aR \subseteq I \subseteq Q$. Mas, I é δ-primo então, pela minimalidade de Q, temos $I = Q$. Se R/P tem característica não-nula p então, por (2.23)(ii), $P = I = Q$ ou $P^p = I = Q$. Se R/P tem característica zero temos, por (2.23)(i) e o fato que $0 \neq I \subseteq P$ onde I é um ideal δ-primo, que P é um δ-ideal. Daí, $P = I = Q$. Assim, Q é principal em todos os casos e portanto, segue a tese. □

Também em "skew" anéis de polinômios tipo derivação, o fato que R é um anel de fatoração única Noetheriano não é condição suficiente para que o mesmo aconteça com $R[x;\delta]$.

Um exemplo disto pode ser encontrado em [6], onde se mostra que, se R é o anel $K[t,y]$ dos polinômios em duas indeterminadas que comutam com um corpo K de característica zero e δ é a derivação $2y\partial/\partial t + (y^2+t)\partial/\partial y$, onde $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial y$ são as derivadas parciais em relação a t e y respectivamente, então R tem somente dois ideais δ-primos não-nulos, a saber $(y^2+t+1)R$ e $tR + yR$. Os únicos ideais primos de altura 1 de $R[x;\delta]$ são extensões destes dois ideais δ-primos e a extensão de $tR + yR$ não é principal. Assim, $R[x;\delta]$ não é um anel de fatoração única Noetheriano.

Capítulo 3

Anéis de fatoração única não necessariamente Noetherianos

Neste capítulo vamos estabelecer, segundo o trabalho de A. W. Chatters, M. P. Gilchrist e D. Wilson [3], algumas propriedades básicas dos anéis de fatoração única não necessariamente Noetherianos. Em particular, mostraremos que a classe dos anéis de fatoração única é fechada sob extensões polinomiais.

Dois elementos normalizantes $r, s \in R$ são ditos *associados* se $rR = sR$. Além disso, como antes, um elemento não-nulo p de R é um *elemento primo* se $pR = Rp$ é um ideal primo de R.

Definição 3.1. *Um anel primo R é chamado um* anel de fatoração única *se todo ideal primo não-nulo de R contém um elemento primo.*

Usaremos repetidamente que se c é um elemento normalizante de R e P é um ideal primo de R, então ou $c \in P$ ou $c \in \mathcal{C}(P)$. Isto se deve ao fato que $(cR + P)/P = (Rc + P)/P$ é um ideal do anel primo R/P, e um ideal de um anel primo ou é o ideal 0, ou seus anuladores à esquerda e à direita são nulos.

Lema 3.2. *Sejam p e q elementos primos de um anel primo R.*

i) *Se $qR \subseteq pR$, então $qR = pR$.*

ii) *Se $pR \neq qR$, então $pqR = pR \cap qR = qpR$.*

Demonstração.

i) Suponhamos $qR \subseteq pR$ mas, por absurdo, $qR \neq pR$. Então $pr = q \in qR$, para algum $r \in R$, com $p \in \mathcal{C}(qR)$. Daí, segue que $r \in qR = Rq$, ou seja, $r = sq$, para algum $s \in R$. Assim, $q = psq$ e então, pela regularidade de q, temos $1 = ps$. Conseqüentemente, $pR = R$ o que é uma contradição. Portanto, $qR = pR$.

ii) É claro que $pqR \subseteq pR \cap qR$. Vamos mostrar a inclusão contrária. Seja $w \in pR \cap qR$, então $w = pr = qs$, para alguns $r, s \in R$. Por hipótese, $qR \neq pR$ logo, $p \in \mathcal{C}(qR)$. Como $pr \in qR$, segue que $r \in qR$, ou seja, $r = qt$, para algum $t \in R$. Assim, $w = pqt \in pqR$ e daí, $pR \cap qR \subseteq pqR$. Portanto, $pqR = pR \cap qR$.

Analogamente, obtemos a outra igualdade. □

Lema 3.3. *Seja R um anel de fatoração única.*

i) *Todo ideal não-nulo de R contém um produto de elementos primos.*

ii) *Se r é um elemento não-nulo de R, então existe somente um número finito de elementos primos não-associados p de R tais que $r \in pR$.*

Demonstração.

i) Considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{A} = \{0 \neq H \lhd R;\ H \text{ não contém um produto de elementos primos}\}.$$

Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ então, pelo lema de Zorn, existe um ideal M em $\mathcal{A}$ que é maximal com respeito a esta propriedade. É claro que, sendo R um anel de fatoração única, M não é um ideal primo. Assim, existem $I, J \lhd R$ tais que $IJ \subseteq M$, com $M \subset I$ e $M \subset J$. Pela maximalidade de M, temos que I e J contém um produto de elementos primos. Mas, $IJ \subseteq M$ logo, M também contém um tal produto, o que é uma contradição. Portanto, todo ideal não-nulo de R contém um produto de elementos primos.

ii) Seja r um elemento não-nulo de R. Por i), existem elementos primos $p_1, \ldots, p_n$ em R tais que $p_1 \cdots p_n \in RrR$. Seja p um elemento primo de R tal que $r \in pR$. Temos $p_1 \cdots p_n \in pR$, onde cada p_i é um elemento normalizante de R e pR é um ideal primo. Logo, $p_i \in pR$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, $p_iR \subseteq pR$ e, por (3.2), temos que $pR = p_iR$. Portanto, existe somente um número finito de possibilidades para pR. □

Lema 3.4. *Sejam R um anel de fatoração única e p um elemento primo de R. Então,*

i) *O ideal primo pR tem altura 1.*

ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R = 0.$

iii) $\mathcal{C}(pR) \subseteq \mathcal{C}(p^nR)$, *para todo inteiro positivo n.*

iv) *Os elementos de $\mathcal{C}(pR)$ são regulares como elementos de R.*

v) *Se a é um elemento normalizante de R com $a \notin pR$, então $aR \cap p^n R = ap^n R$, para todo inteiro positivo n.*

Demonstração.

i) Seja Q um ideal primo de R tal que $0 \subset Q \subseteq pR$. Como, por hipótese, R é um anel de fatoração única, existe um ideal primo $qR \subseteq Q$, para algum elemento primo $q \in R$. Assim, $qR \subseteq pR$ e, por (3.2), temos $qR = pR$. Conseqüentemente $Q = pR$. Logo, não existe ideal primo não-nulo em R, estritamente contido em pR. Além disso, sendo R um anel primo temos que 0 é um ideal primo. Portanto, pR tem altura 1.

ii) Denotemos $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R$ e suponhamos que $I \neq 0$. É fácil ver que, sendo p um elemento regular de R, temos $I = pI$. Por (3.3), existem elementos primos $p_1, \ldots, p_k$ em R tais que $p_1 p_2 \cdots p_k \in I$. Considere k o menor inteiro positivo tal que I contém este produto. Temos $p_1 p_2 \cdots p_k \in pR$. Como pR é um ideal primo e os $p_i{}'s$ são elementos normalizantes, segue que $p_i \in pR$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$. Logo, $p_i R \subseteq pR$ e, por (3.2), temos que $pR = p_i R$. Além disso, também por (3.2), temos que $p_i p_j R = p_j p_i R$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $pR = p_1 R$. Assim, $I = pI = p_1 I$ e então $p_1 p_2 \cdots p_k \in p_1 I$. Conseqüentemente, $p_2 p_3 \cdots p_k \in I$, o que contradiz a minimalidade de k. Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R = 0$.

iii) Mostraremos, por indução, que $\mathcal{C}(pR) \subseteq \mathcal{C}(p^n R)$, para todo inteiro positivo n. Seja $c \in \mathcal{C}(pR)$ e suponhamos que $c \in \mathcal{C}(p^k R)$, para algum inteiro positivo k. Considere $r \in R$ tal que $cr \in p^{k+1} R = Rp^{k+1}$, então $cr = sp^{k+1}$, para algum $s \in R$. Como $p^{k+1} R \subseteq p^k R$ e $c \in \mathcal{C}(p^k R)$, temos que $r \in p^k R = Rp^k$, ou seja, $r = tp^k$, para algum $t \in R$. Assim, $ctp^k = sp^{k+1}$ e então, pela regularidade de p^k, temos $ct = sp$. Mas,

$c \in \mathcal{C}(pR)$, logo $t \in pR$ e conseqüentemente $r \in p^{k+1}R$. Portanto, $c \in \mathcal{C}(p^{k+1}R)$.

iv) Sejam $c \in \mathcal{C}(pR)$ e $a \in R$ tais que $ca = 0$. Então, $ca \in 0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R$. Como $\mathcal{C}(pR) \subseteq \mathcal{C}(p^n R)$, para todo n, segue que $a \in p^n R$, para todo n, isto é, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R = 0$. Logo, c é regular à direita. Analogamente, vemos que c é regular à esquerda.

v) É claro que $ap^n R \subseteq aR \cap p^n R$. Vamos mostrar a inclusão contrária. Considere $w \in aR \cap p^n R$, então $w = ar = p^n s$, para alguns $r, s \in R$. Como $a \notin pR$ e $\mathcal{C}(pR) \subseteq \mathcal{C}(p^n R)$, para todo inteiro positivo n, temos que $a \in \mathcal{C}(p^n R)$. Assim, $r \in p^n R$, ou seja, $r = p^n t$, para algum $t \in R$. Daí, $w = ar = ap^n t \in ap^n R$ e então, $aR \cap p^n R \subseteq ap^n R$. Portanto, $aR \cap p^n R = ap^n R$, para todo inteiro positivo n. □

É claro que o sistema multiplicativo $\mathcal{D}$ gerado pelos elementos primos de R satisfaz a condição de Ore. Além disso, sendo R um anel primo, os elementos de $\mathcal{D}$ são regulares. Então, por (1.8), existe um anel de quocientes S de R formado pela inversão destes elementos. Note que $S[x]$ é o anel de quocientes de $R[x]$ com respeito a $\mathcal{D}$.

Por (3.3) sabemos que todo ideal não-nulo de R contém um elemento primo; daí segue que S é um anel simples. Observe que, em (2.10), não foi necessária a condição de cadeia ascendente nem o fato que o ideal P era primo para garantir que todo ideal primo P de $S[x]$ é gerado por um elemento central. Assim, o mesmo resultado é válido aqui para um ideal qualquer de $S[x]$.

Para concluirmos este trabalho provaremos que a classe dos anéis de fatoração única é fechada sob extensões polinomiais.

Teorema 3.5. *Seja R um anel de fatoração única e x uma indeterminada que comuta com os elementos de R. Então $R[x]$ é um anel de fatoração única.*

Demonstração. Como R é um anel de fatoração única, temos que R é um anel primo. Então, por (1.17), $R[x]$ é um anel primo. Falta mostrar que todo ideal primo não-nulo de $R[x]$ contém um elemento primo. Antes disso, note que se p um elemento primo de R, então $pR[x]$ é um ideal primo de $R[x]$. Conseqüentemente, elementos primos de R são elementos primos de $R[x]$. Além disso, os elementos do conjunto $\mathcal{D}$ são elementos normalizantes de $R[x]$.

Seja P um ideal primo não-nulo de $R[x]$. Se $P \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, então P contém um produto de elementos primos de $R[x]$ e portanto, contém um elemento primo de $R[x]$.

Suponhamos agora que $P \cap \mathcal{D} = \emptyset$, então $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(P)$. Veremos neste caso que o próprio ideal P é primo principal. Primeiro vamos mostrar que, a extensão de P em $S[x]$, $PS[x]$, é um ideal bilateral de $S[x]$, isto é, que $S[x]P \subseteq PS[x]$. Isto é trivial no caso Noetheriano, mas aqui daremos uma prova direta usando características especiais da situação. Seja $d \in \mathcal{D}$ e $f \in P$. É suficiente mostrar que $d^{-1}f \in PS[x]$. Como d é um elemento normalizante de $R[x]$ temos $fd = dg$, para algum $g \in R[x]$. Assim, temos $dg \in P$ com $d \in \mathcal{C}(P)$. Logo, $g \in P$ e $d^{-1}f = gd^{-1} \in PS[x]$.

Pelo que vimos acima, sendo $PS[x]$ um ideal de $S[x]$, temos $PS[x] = hS[x]$, para algum elemento central h de $S[x]$. Além disso, $h = fd^{-1}$, para algum $f \in P$ e $d \in \mathcal{D}$. Como d é um elemento normalizante de $R[x]$ e h é um elemento central de $S[x]$, $fR[x] = hdR[x] = R[x]hd = R[x]f$. Seja r um coeficiente não-nulo de f. Por (3.4), para cada elemento primo p, existe um inteiro positivo n tal que $r \notin p^nR$. Além disso, por (3.3), existe somente um número finito de elementos primos não-associados p de R tais que $r \in pR$.

Daí, segue que existem elementos primos $p_1, \ldots, p_n$ de R, não necessariamente distintos, tais que $r = r'p_1p_2 \cdots p_n$, para algum $r' \in R$, com a propriedade que não existe elemento primo p de R tal que $r' \in pR$. Como r é um dos coeficientes de f, podemos concluir que se p é um elemento primo de R, com $f \in pR[x]$, então p é um associado de p_i, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, existem elementos primos $u_1, \ldots, u_t$ de R tais que $f = gu_1u_2 \cdots u_t$, para algum $g \in R[x]$ com a propriedade que não existe elemento primo p de R com $g \in pR[x]$. Como f e u_i são elementos normalizantes de $R[x]$, o mesmo ocorre com g. Note que, como $u_i \in \mathcal{D}$, para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$ e estamos considerando $P \cap \mathcal{D} = \emptyset$, temos $u_i \in \mathcal{C}(P)$. Então, de $gu_1u_2 \cdots u_t \in P$, segue que $g \in P$, ou seja, $gR[x] \subseteq P$.

Assim, P contém um elemento normalizante g de $R[x]$ com a propriedade que não existe elemento primo p de R tal que $g \in pR[x]$. Completaremos a prova mostrando que $P \subseteq gR[x]$. Seja $h' \in P$, temos $PS[x] = hS[x] = fd^{-1}S[x] = fS[x] = gu_1u_2 \cdots u_tS[x] = gS[x]$. Como $h' \in gS[x]$, existem elementos primos $q_1, \ldots, q_k$ de R tais que $h'q_1q_2 \cdots q_k = gg'$, para algum $g' \in R[x]$. Do fato que $g \notin q_kR[x]$, temos $g \in \mathcal{C}(q_kR[x])$. Além disso, $gg' \in q_kR[x]$. Logo $g' = f'q_k$, para algum $f' \in R[x]$. Conseqüentemente, $h'q_1q_2 \cdots q_{k-1} = gf'$. Continuando deste modo, obtemos que $h' \in gR[x]$ e daí, $P \subseteq gR[x]$. Portanto, $P = gR[x]$ e a prova está completa. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. W. Chatters, *“Non-comuttative unique factorisation domains”*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 95 (1984) 49-54.

[2] A. W. Chatters e D. A. Jordan, *“Non-comuttative unique factorisation rings”*, J. London Math. Soc. (2) 33 (1986) 22-32.

[3] A. W. Chatters, M. P. Gichrist e D. Wilson, *“Unique factorisation rings”*, Proc. Edinburgh Mat. Soc. 35 (1992) 255-269.

[4] A. W. Chatters e C. R. Hajarnavis, *“Rings with chain conditions”*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston.

[5] K. R. Goodearl e R. B. Warfield, Jr., *“An introduction to noncommutative Noetherian rings”*, Cambrigde University Press, New York, (1989).

[6] K. R. Goodearl e R. B. Warfield, Jr., *“Krull dimension of differential operator rings”*, Proc. London Math. Soc. (3) 45 (1982) 49-70.

[7] A. V. Jategaonkar, *“Left Principal Ideal Rings”*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg, (1970).

[8] I. Kaplansky, *“Commutative rings”*, Chicago Press, Chicago (1974).

[9] McConnell, J. C. e Robson, J. C. *“Non-comuttative Noetherian rings”*, Wiley-Intercience, New York, (1987).

[10] M. K. Smith, *"Eigenvectors of automorphisms of polynomial rings in two variables"*, Houston J. Math. (2) 10 (1984) pg 559.