

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

EFEITOS DE DISTORÇÃO EM ESPALHAMENTO
QUASE - LIVRE

Claudio Schneider

0510403

PORTO ALEGRE

— 1971 —

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

EFECTOS DE DISTORÇÃO EM ESPALHAMENTO

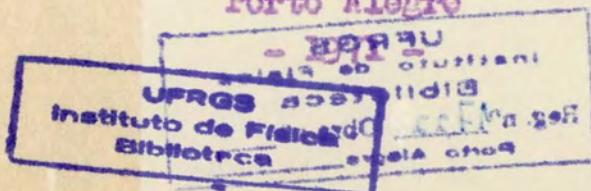
QUASE-LIVRE²

Claudio Schneider

Dissertação realizada sob a orientação da Dra. Victoria E. Herscovitz e do Dr. Gerhard Jacob, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS para obtenção do título de Mestre em Ciências.

²Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes Instituições: Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico, Conselho Nacional de Pesquisas, Conselho de Pesquisas da UFRGS, United States Army Research Office e Organização dos Estados Americanos.

Porto Alegre



AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado sob a orientação dos Professores Victoria E. Herscovitz e Gerhard Jacob, a quem desejo agradecer pela orientação, apóio e dedicação recebidos durante a execução do mesmo.

Ao Prof. Theodor A.J. Maris que, juntamente com o Prof. Gerhard Jacob, sugeriu o problema tratado nesta Dissertação e com quem muito aprendi.

A Ruth de Souza Schneider, pelo auxílio na fase inicial dos cálculos, estímulo e valiosas discussões.

Ao Prof. John D. Rogers, Paulo H.P. Domingues e Bertilo Becker, com quem mantive proveitosas discussões sobre programação e tratamento numérico dos cálculos.

Ao Pedro Nunes, Nelson Issa e Arneyc M. Vieira, pelo modo atencioso com que sempre executaram os programas de computador e atenderam aos inúmeros pedidos de horas de processamento.

A tôdas as pessoas, professores, colegas (especialmente os da minha sala de trabalho) e alunos que, sob uma forma ou outra, me estimularam e colaboraram para que este trabalho pudesse ser realizado.

A Luisa Zafaneli, Maria Elizabeth Fiori e Clelia M.N. da Silva, pelo cuidadoso trabalho de datilografia nas diversas fases desta Dissertação.

Porto Alegre, dezembro de 1971

Claudio Schneider

SINOPSE

Distribuições de momentum distorcidas de reações $(p,2p)$ em O^{16} são calculadas com um potencial de distorção complexo "consistente" com a distribuição de densidade dos nucleons no núcleo. São utilizados dois conjuntos de funções de onda nucleônicas; funções de onda de poço quadrado e de oscilador harmônico. Comparações com cálculos convencionais em que se utilizam potenciais óticos equivalentes mas "não consistentes", mostram diferenças apreciáveis. Os resultados indicam que a descrição teórica da distorção das ondas que representam as partículas incidente e emergentes deve ser melhorada antes de ser possível chegar a conclusões sobre detalhes de modelos nucleares através de experiências de espalhamento quase-livre. Acreditamos que o emprego de um potencial ótico "consistente" é um passo importante neste sentido.

ABSTRACT

Distorted momentum distributions of $(p,2p)$ reactions in O^{16} are calculated with a complex distorting potential "consistent" with the nucleon density distribution in the nucleus. Two different sets of nucleon-wave functions are used; square well and harmonic oscillator wave functions. A comparison with conventional calculations using equivalent but "non-consistent" optical potentials shows considerable differences. Results indicate that the theoretical description of distortion of waves which represent the incoming and outgoing particles has to be improved before reliable conclusions on details of nuclear models can be drawn from quasi-free scattering experiments. We believe that use of "consistent" optical potentials is an important step in this direction.

I N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
II - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	7
II-1 Introdução (<i>Cinemática</i>)	7
II-2 Secção de Choque	10
II-3 Potencial Ótico	13
II-4 Forma do Potencial Ótico	16
III - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	22
II-1 Introdução	22
II-2 Potencial Gerador das Funções de Onda do Tipo Poço Quadrado	24
II-3 Potencial Gerador das Funções de Onda do Tipo Oscilador Harmônico	30
IV - DISCUSSÃO E COMENTÁRIOS	35
II-1 Aspectos Gerais	35
II-2 Aspectos Particulares	37
APÊNDICE	41
A-1 Integral Principal	42
A-2 Integrais de Linha	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

I - INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata do efeito de distorção em reações quase-livres (p,2p). Inicialmente, em uma breve introdução, são apresentados alguns aspectos e conceitos relativos a estas reações e é situado rapidamente o problema desenvolvido neste trabalho.

Com o estudo de reações nucleares visa-se, quase sempre, obter informações sobre a estrutura dos núcleos e sobre os mecanismos de reação. Estas informações, quando não são de natureza fenomenológica, estão frequentemente condicionadas a modelos, tanto para os mecanismos de reações como para a estrutura nuclear.

Entre os modelos nucleares¹⁾, ocupa papel de destaque e tem demonstrado grande sucesso na explicação de inúmeras propriedades dos núcleos o modelo de camadas²⁾. Usando a terminologia deste modelo podemos dizer que quanto mais ligada é uma camada nuclear, mais interna ela é, uma vez que as funções de onda dos nucleons que a constituem dependem exponencialmente da energia de separação das partículas e que o potencial do modelo decresce com inclinação significativa do centro para a superfície do núcleo. Apesar de o modelo supor a existência de camadas mais internas, fortemente ligadas, quase todas as experiências realizadas até certo tempo atrás se restringem à investigação das propriedades da estrutura externa, ou seja, das camadas superiores. Nestas circunstâncias não era estudada em detalhes a região interna dos núcleos, a qual se comportava então como um carôço ou partícula elementar que revelava somente propriedades globais. Entretanto, foram desenvolvidas

técnicas adequadas para o estudo desta região do núcleo^{3),4)} e, já faz algum tempo, este trabalho vem sendo executado com bastante sucesso.

Para investigar as predições do modelo de camadas em relação às camadas mais internas é usual impor as seguintes condições^{5),6)}:

I) Energia de incidência alta, de tal modo que o núcleo seja razoavelmente transparente, tanto à partícula incidente como para as emergentes. Esta condição equivale a exigir um livre caminho médio das partículas, grande, dentro do núcleo.

II) Comprimento de onda de De Broglie, associado à transferência de momentum, pequeno, quando comparado com a distância média entre os nucleons (cêrca de 2 fm). Nestas circunstâncias as interações resultam localizadas e as colisões envolvem essencialmente apenas duas partículas, a incidente e um dos nucleons.

III) Tempo de interação pequeno comparado com tempos tipicamente nucleares (intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas de um nucleon dentro do núcleo).

Experiências particularmente favoráveis para o estudo das camadas internas e que satisfazem as condições acima são as de espalhamento quase-livre^{6),7)}.

Por este nome entende-se um tipo de reação direta, na qual uma partícula com alta energia arranca um nucleon de uma camada nuclear, sem que haja nenhuma interação violenta adicional entre o núcleo e as partículas incidente e emergente, nem destas últimas entre si. Este processo difere do espalhamento livre porque o nucleon alvo (o que é arrancado) está ligado ao potencial nuclear (não está em repouso mas apresenta uma dis-

tribuição de momentum).

Reações deste gênero, que têm sido amplamente utilizadas e que se constituem praticamente na única fonte de informações sobre os detalhes da estrutura mais interna dos núcleos, são as reações $(p, 2p)^{3),4)}$ e $(e, e'p)^{8),9)}$.

No que segue vamos nos referir em especial às reações $(p, 2p)$. Estas são processos em que as partículas envolvidas (além dos núcleos alvo e residual) são um próton incidente (com energia no intervalo de 100-1000 MeV) e dois prótons emergentes, sendo os dois últimos detectados em sistema de coincidência e sendo analisadas suas energias. Dos espectros experimentais de energia (que apresentam picos correspondentes a diferentes energias de separação) e de correlação angular dos prótons emergentes (que dão a distribuição de momentum do núcleo residual) se obtêm então informações a respeito das energias de ligação e da distribuição de momentum dos estados-furo em diversas camadas do núcleo residual.

Entretanto não se pode esperar que as reações $(p, 2p)$ sejam constituídas unicamente de processos quase-livres. Há outras possibilidades que apresentam o mesmo resultado, qual seja, o de um próton incidente e um par de prótons emergentes. Por exemplo, as reações nas quais os prótons incidente e emergentes sofrem colisões múltiplas, antes e após a interação quase livre (interação que arranca o próton ligado). Estes eventos podem ser, em princípio, bastante frequentes, a ponto de comprometer as informações que se deseja obter sobre detalhes da estrutura nuclear. No entanto, em virtude do grande número de graus de liberdade nos estados finais decorrentes destes processos, espera-se que as colisões múltiplas devam se refletir

na secção de choque como contagem de fundo ("background") mais ou menos uniforme, sem afetar grandemente a estrutura do espectro de energia correspondente a processos quase-livres.

Resultados experimentais revelam que as interações iniciais e finais dos prótons incidente e emergentes são bastante importantes, alargando e diminuindo as alturas dos picos e distorcendo as distribuições de correlação angular correspondentes aos processos quase-livres^{3), 10)}. Mesmo assim, ainda é válido tratar teoricamente as reações (p,2p) como eventos quase-livres, introduzindo paralelamente as correções necessárias para levar em conta os efeitos das interações adicionais dos prótons.

O tratamento teórico-quantitativo é baseado em geral no que se denomina aproximação de impulso⁵⁾ (cujas condições de validade são basicamente equivalentes às exigidas para que se tenha espalhamento quase-livre (apresentados anteriormente)) com ondas distorcidas^{3), 10)} (D.W.I.A.). A correlação angular, por exemplo, é então dada essencialmente pela distribuição de momentum da integral de superposição dos estados do núcleo inicial e final, distorcida pelas interações dos prótons incidente e emergente.

As interações iniciais e finais dos prótons são tratadas de modo fenomenológico, mediante a introdução de um potencial ótico que traduz a ação dos demais constituintes do núcleo sobre os prótons. A parte real deste potencial ocasiona um deslocamento de fase das ondas que descrevem os prótons. A parte imaginária acarreta uma atenuação das amplitudes de onda, ou em outros termos, dá conta de todos aqueles processos que afastam (absorvem) o próton incidente do canal de entrada (com

exceção, é claro, da interação forte que arranca o próton ligado) e os prótons emergentes dos canais de saída em que estariam se os espalhamentos fossem quase-livres. Este tratamento é análogo na ótica à situação em que se estudam a refração e a absorção de raios luminosos em um meio semitransparente com o emprego de um índice de refração complexo.

O primeiro cálculo mais elaborado com ondas distorcidas foi efetuado por Maris¹⁰⁾ para o Li^7 em 1958. Numerosos cálculos subsequentes têm seguido a mesma linha. Na maioria dos casos (veja Tabela II da referência (11)) é usada a aproximação semi-clássica^{12), 13)} (W.K.B.) na obtenção das ondas distorcidas dos prótons.

Na interpretação detalhada das experiências (p,2p) é essencial que as interações adicionais dos prótons incidentes e emergentes sejam levadas em consideração da melhor forma possível. Em relação a este detalhe, é importante assinalar que nos cálculos apresentados até o presente na literatura não se tem dado atenção à "consistência" ("matching") entre o potencial ótico e as funções de onda nucleares, ou seja, a distribuição de densidade nuclear, à qual o potencial ótico é proporcional, não tem sido calculada com as funções de onda nucleares, como deveria ser feito. As densidades empregadas são em geral tomadas de forma arbitrária^{10), 14)-17)}, embora satisfazendo propriedades gerais, quanto à forma e parâmetros, determinados experimentalmente. Julgamos que esta "consistência" seja especialmente importante na região da superfície do núcleo¹⁸⁾, pois é desta parte do núcleo que vem a maior contribuição de eventos quase-livres à seção de choque.

O objetivo deste trabalho é investigar os efeitos de dis

torção causados por potenciais óticos "consistentes" com as funções de onda nucleares e compará-los com cálculos realizados utilizando potenciais óticos arbitrários (alguns deles usados na literatura).

O Capítulo II do trabalho contém a formulação quantitativa das reações (p,2p) estritamente necessária para o propósito a que se destinam estes cálculos. Detalhes sobre o potencial ótico proposto ("consistente") e sobre o problema aqui desenvolvido são fornecidos nas seções 3 e 4 do Capítulo.

No Capítulo III são apresentados funções de onda, potenciais óticos e resultados obtidos nos diversos cálculos efetuados. A reação escolhida para os cálculos numéricos necessários foi a reação $O^{16}(p,2p)N^{15}$ a 170 MeV.

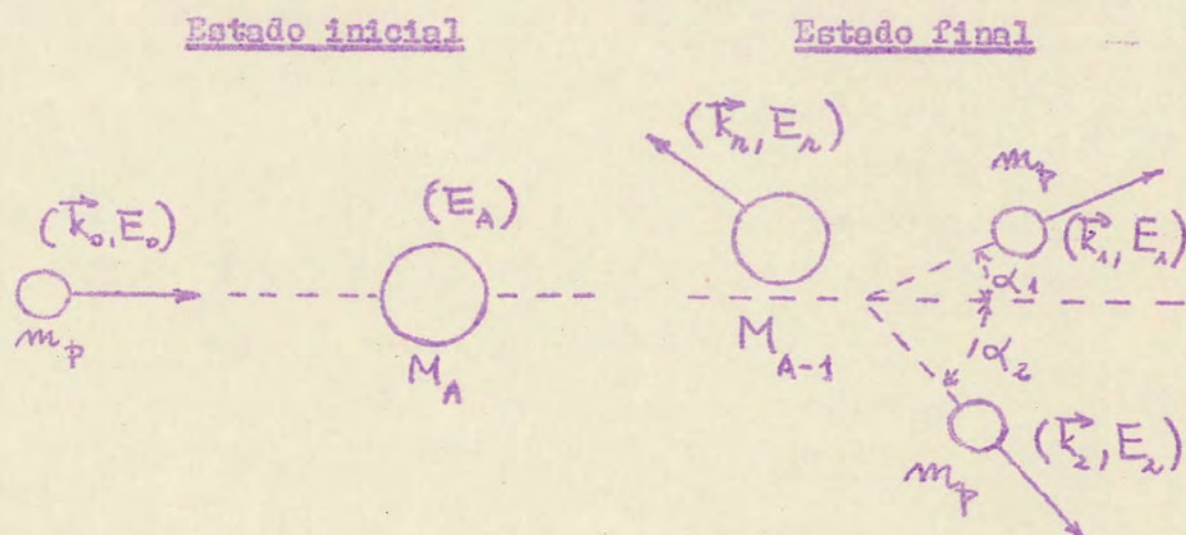
Discussão e comentários são feitos no Capítulo IV. Os resultados obtidos indicam que as distribuições de momentum são bastante sensíveis a variações na forma do potencial ótico na região da superfície do núcleo, sendo portanto necessárias e justificadas determinações cuidadosas do potencial nesta região¹⁸⁾.

No Apêndice são fornecidos detalhes sobre o tratamento teórico-numérico dispensado aos cálculos. Estes foram programados em linguagem Fortran para computador eletrônico IBM-1130 e executados no Centro de Processamento de Dados da UFRGS.

II - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

1. Cinemática

A figura abaixo dá uma visão esquemática do processo de espalhamento quase-livre (p,2p) no sistema laboratório.



O estado inicial é constituído de um próton incidente (índice 0) com massa m_p , quadrivetor energia-momento $(\hbar \vec{k}_0, E_0/c)$ e de um núcleo em repouso (contendo A partículas) com massa M_A e energia $E_A = M_A c^2$. O estado final é formado por um par de prótons (índices 1 e 2), detectados em sistema de coincidência, com quadrivetores energia-momento $(\hbar \vec{k}_1, E_1/c)$ e $(\hbar \vec{k}_2, E_2/c)$ respectivamente, e pelo núcleo residual (contendo $A-1$ partículas) com massa M_{A-1} e quadrivetor energia-momento $(\hbar \vec{k}_n, E_n/c)$.

As leis de conservação de energia e momentum dão para este processo as seguintes relações:

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_n \quad (\text{II-1})$$

$$E_0 + E_A = E_1 + E_2 + E_n + E_{exc} \quad (\text{II-2})$$

sendo E_{exc} a energia de excitação do núcleo residual.

Da última relação obtém-se

$$T_0 - S = T_1 + T_2 + T_n \quad (\text{II-3})$$

onde T_0 , T_1 , T_2 e T_n representam energias cinéticas e S caracteriza a energia de separação de um próton nuclear, isto é,

$$S = (m_p + M_{A-1} - M_A) c^2 + E_{exc} \quad (\text{II-4})$$

A relação entre energia cinética e momentum para os prótons é

$$T_i + m_p c^2 = \left(\hbar^2 c^2 |\vec{k}_i|^2 + m_p^2 c^4 \right)^{1/2} \quad (\text{II-5})$$

enquanto para o núcleo residual pode-se adotar a aproximação não relativística

$$T_n = \frac{\hbar^2 c^2}{2 M c^2} |\vec{k}_n|^2 \quad (\text{II-6})$$

Com o auxílio da relação (II-1) determina-se o momentum do núcleo residual $\hbar \vec{k}_n$ quando se conhece \vec{k}_0 e se medem \vec{k}_1 e \vec{k}_2 . Conseqüentemente T_0 , T_1 , T_2 , e T_n são também conhecidos e da relação (II-3) obtém-se a energia de separação S .

Na expressão (II-1), fixado \vec{k}_0 , há cinco parâmetros que podem variar independentemente ($|\vec{k}_1|$, $|\vec{k}_2|$, o ângulo que \vec{k}_0 forma com sua projeção sobre o plano (\vec{k}_1, \vec{k}_2) e os ân-

gulos que esta projeção forma com \vec{k}_1 e \vec{k}_2). Isto conduz a uma série de possibilidades experimentais. A situação experimental de espalhamento coplanar simétrico, amplamente usada em laboratório (veja Tabela I da referência (11)), é a que torna o tratamento teórico do problema o mais simples. Vamos nos restringir apenas a esta no que segue. Neste caso, as direções dos momenta das diversas partículas em jôgo estão em um mesmo plano e os prótons emergentes são detectados com energias iguais $T_1 = T_2 = T$, em ângulos iguais $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ($|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$). As relações (II-1) e (II-3) resultam em

$$k_0 = 2k \cos \alpha + k_n \quad (\text{II-7})$$

$$T_0 - S = 2T + T_n \quad (\text{II-8})$$

A geometria das experiências coplanares simétricas, embora bastante simples, permite que se obtenha uma grande gama de informações sobre a estrutura nuclear a partir dos espectros de energia e das correlações angulares dos prótons emergentes detectados em coincidência.

O espectro de energia corresponde ao número de contagens versus energia de detecção T dos prótons emergentes, supondo-se conhecida a energia cinética da partícula incidente. Para certos valores de T o gráfico mostra picos, interpretados como correspondentes às energias de separação dos prótons das diversas camadas do núcleo.

Quando se traça o gráfico da área sob os picos de energia em função do ângulo α , mantendo T constante, obtém-se a correlação angular dos prótons emergentes. Como \vec{k}_n está

relacionado de maneira unívoca com α (relação (II-7)), a cor-
relação angular nos dá informações sobre a distribuição de mo-
mentum do núcleo residual.

2. Secção de choque

A secção de choque de reações (p,2p) coplanares simé-
tricas é dada em aproximação de impulso com ondas distorci-
das^{3),10),16)} (D.W.I.A.) por

$$\frac{d\sigma}{dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2} = \frac{4 k^2 (\hbar c)^2 k^2 \sin^2 \alpha + m_p^2 c^4}{(\hbar c)^2 k_0 [(\hbar c)^2 (2k \cos \alpha - k_0)^2 + m_p^2 c^4]}^{1/2} \times \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \times \quad (II-7)$$

$$\times \frac{1}{2J_A + 1} \sum_{\mu_{A-1}, \mu_A} \sum_n \left| g_{\mu_{A-1}, \mu_A}^{(n)}(-\vec{k}_n) \right|^2 \delta(2E + E_{A-1} - E_\lambda - E_0)$$

Os detalhes de obtenção desta expressão podem ser verifi-
cados na bibliografia especializada sobre o assunto, como por
exemplo o artigo de revisão¹¹⁾ de Jacob e Maris.

Se analisarmos a secção de choque vemos que é constitui-
da basicamente de três fatores. O primeiro, o fator cinemáti-
co, envolve grandezas já definidas anteriormente (k_0, k, α, m_p)

O segundo é a secção de choque próton-próton livre expe-
rimental $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$ no sistema centro de massa, para prótons não
polarizados. Na região de energia de 150 MeV a 400 MeV (siste-
ma laboratório) esta secção de choque é praticamente isotrópi-
ca e varia lentamente com a energia¹⁹⁾.

O terceiro fator é o que nos interessa mais de perto nes-
te trabalho:

$$P(-\vec{k}_n) = \frac{1}{2J_A + 1} \sum_{\mu_{A-1}, \mu_A} \sum_n \left| g_{\mu_{A-1}, \mu_A}^{(n)}(-\vec{k}_n) \right|^2 \quad (II-10)$$

Esta grandeza é chamada distribuição de momentum distorcida. A forma da distribuição de correlação angular é essencialmente dependente desta grandeza, já que os demais elementos que integram a secção de choque, o fator cinemática e a secção de choque próton-próton livre, são funções que variam lentamente com \vec{k}_n . Além disso, é o elemento da secção de choque que fornece informações sobre a estrutura nuclear, pois $g_{\mu_A, \mu_A}^{l(\vec{k}_n)}$ é a transformada de Fourier, distorcida pelas interações dos prótons incidente e emergentes, da integral de superposição

$$\int \varphi_{\mu_{A-1}}^*(\vec{r}_i) \varphi_{\mu_A}(\vec{r}_i, \vec{r}) \prod_{i=2}^A d^3r_i \quad (II-11)$$

das funções de onda internas $\varphi_{\mu_A}(\vec{r}_i, \vec{r})$ e $\varphi_{\mu_{A-1}}(\vec{r}_i)$ que descrevem os estados relevantes dos núcleos alvo e residual respectivamente. A determinação desta integral depende do modelo usado para especificar as funções de onda dos núcleos.

Numa descrição estacionária da reação (p,2p), adotando o modelo de furo único (neste caso o modelo de furo único ~~coincide~~ ^{equivale} ao modelo extremo de partícula única), a integral (II-11) é a função de onda do estado-furo²⁰⁾⁻²²⁾ produzido pela reação no núcleo residual (ou a função de onda do próton no núcleo alvo, antes de ser arrancado). A distribuição $P(-\vec{k}_n)$, sem levar em conta o desdobramento spin-órbita, se torna então igual a

$$P_l(\vec{q}) = \frac{N_l}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |g_l^m(\vec{q})|^2 \quad (II-12)$$

onde

$$g_{\ell}^{lm}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \psi_{\ell}^m(\vec{r}) D_0(\vec{r}) D_1(\vec{r}) D_2(\vec{r}) d^3r \quad (\text{II-13})$$

O momentum \vec{q} , de acôrdo com a lei de conservação de momentum, é igual ao momentum do estado-furo no núcleo residual (do próton no núcleo inicial). $\psi_{\ell}^m(\vec{r})$ é a função de onda do próton e ℓ e m , o momentum angular orbital e o número quântico magnético respectivamente. N_{ℓ} denota o número de prótons na camada ℓ .

As funções $D_j(\vec{r})$ ($j=0,1,2$) são os fatores de distorção que afetam a fase e a amplitude das ondas que representam os prótons incidente e emergente. Estes fatores são dados, de acordo com a aproximação semi-clássica, pelas expressões^{10),11)}

$$D_0(\vec{r}) = \exp\left[-i \frac{E_0}{\hbar^2 c^2 k_0} \int_{-\infty}^{\vec{r}} V_0(r') ds_0\right]; (j=0) \quad (\text{II-14})$$

$$D_j(\vec{r}) = \exp\left[-i \frac{E_j}{\hbar^2 c^2 k_j} \int_{\vec{r}}^{+\infty} V_j(r') ds_j\right]; (j=1,2)$$

onde as integrações são efetuadas ao longo das trajetórias clássicas dos prótons dentro do núcleo até ($j=0$) ou desde ($j=1,2$) o ponto \vec{r} em que se dá a colisão quase-livre. Os integrandos $V_j(r')$ ($j=0,1,2$) que aparecem nestas integrais de linha são os potenciais óticos que atuam sobre as partículas incidente ($j=0$) e emergentes ($j=1,2$).

Se não ocorressem colisões múltiplas $D_j(\vec{r}) = 1$ e $g_{\ell}^{lm}(\vec{q})$ seria simplesmente a função de onda do estado-furo (do próton arrancado), no espaço dos momenta, e $P_{\ell}(\vec{q})$ a distribuição de momentum correspondente.

3. Potencial ótico

O potencial ótico é uma grandeza introduzida fenomenologicamente para levar em consideração as interações dos prótons incidente e emergentes com os componentes do núcleo antes e depois da interação forte responsável pelo arrancamento de um dos prótons emergentes.

A parte real do potencial ótico (o qual representa o efeito dos demais nucleons do núcleo sobre as partículas incidentes e emergentes sob forma de um potencial médio de partícula única) é proporcional à densidade nuclear e causa um deslocamento de fase das ondas que representam os prótons. A parte imaginária, por sua vez, dá conta dos processos que causam a absorção dos prótons e provoca, em outras palavras, a atenuação das amplitudes de onda.

Considerando que pequenas transferências de momentum são pouco prováveis de ocorrer dentro do núcleo, já que implicariam na maioria das vezes no povoamento de estados nucleônicos já preenchidos, e portanto proibidos pelo princípio de exclusão de Pauli, as interações inelásticas dos prótons incidente e emergentes, ou seja, os processos que resultam em absorção dos mesmos são constituídos principalmente de seqüências de colisões próton-nucleon independentes. Estas colisões podem causar a emissão de partículas adicionais ou provocar excitações do núcleo além das produzidas pelo arrancamento do próton ligado.

A probabilidade de que um próton incidente ou emergente sofra colisão inelástica com uma partícula, além de depender da sua energia e da trajetória percorrida no núcleo, é função no caso de altas energias¹⁾ (acima de 50 MeV), da probabilidade

de encontrar uma partícula no núcleo, o que equivale a dizer que é função da distribuição de densidade nuclear. Neste caso diz-se que a absorção é volumétrica. Para baixas energias (abaixo de 50 MeV) há evidências experimentais indicando que a absorção se dá predominantemente na região da superfície do núcleo²³⁾.

Em vista do exposto acima, é válido, pois, considerar na presente situação que tanto a parte imaginária do potencial ótico como a parte real sejam proporcionais à densidade nuclear, embora com coeficientes de proporcionalidade distintos, uma vez que a atuação das mesmas sobre as funções de onda dos prótons incidente e emergentes são diferentes, não só qualitativa mas também quantitativamente. Para energias altas (cêrca de 300 MeV, por exemplo) os efeitos de atenuação das amplitudes de onda são bastante mais importantes do que os de deslocamento das fases²⁴⁾.

No estudo teórico das experiências (p,2p) os eventos qu se-livres são tratados como processos elementares, ao passo que as demais interações que os acompanham (as colisões múltiplas, por exemplo) e que se constituem também de processos elementares não são tratados especificamente como tais, mas sim, fenomenologicamente, através de um potencial ótico.

O potencial ótico utilizado neste trabalho não é puramente fenomenológico, com parâmetros ajustados para que os cálculos concordem com resultados experimentais²⁵⁾ de reações (p,2p), nem é tampouco deduzido com o auxílio de uma teoria microscópica (de muitos corpos) a partir de processos elementares que provocam a absorção e deflexão dos prótons. Pode-se dizer que é um potencial semi-fenomenológico, cujos parâmetros

estão relacionados através de uma teoria formal de espalhamento elástico de alta energia nucleon-núcleo^{26),24)} com as amplitudes de espalhamento nucleon-nucleon a zero graus ("forward scattering amplitude").

Consideramos somente a parte central do potencial ótico, a qual, corrigida relativisticamente, é dada pela expressão :

$$V_j(r) = -4\pi \frac{\hbar^2 c^2}{E_j} (A-1) \bar{A}_j(0) \rho(r); (j=0,1,2) \quad (\text{II-15})$$

onde A é o número de partículas no núcleo e E_j são as energias totais das partículas incidente e emergente. Os coeficientes

$$\bar{A}_j(0) = \bar{A}_j^R(0) + i \bar{A}_j^I(0); (j=0,1,2) \quad (\text{II-16})$$

são as amplitudes médias (sobre spin e isospin) de espalhamento nucleon-nucleon a zero graus e dependem das energias cinéticas das partículas. $\rho(r)$ representa a densidade nuclear e satisfaz a condição de normalização

$$\int \rho(r) d^3r = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (\text{II-17})$$

Desprezamos por simplicidade a parte dependente de spin do potencial ótico, que é proporcional a $\frac{1}{r} \frac{d\rho(r)}{dr}$, embora esta possa dar contribuição significativa em alguns casos. Na presente situação a contribuição desta parte do potencial ótico não ultrapassa 25% da contribuição da parte real²⁴⁾.

Para fins de cálculo definimos a seguinte função:

$$f(r) = 4\pi(A-1) \rho(r) \quad (\text{II-18})$$

Usando a expressão anterior, os fatores de distorção (II-14) podem ser escritos como

$$D_0(\vec{\kappa}) = \exp \left[\left(-\bar{A}_0^I + i \bar{A}_0^R \right) \frac{1}{k_0} \int_{-\infty}^{\vec{\kappa}} f(\kappa') dS_0 \right]; (j=0)$$

$$D_j(\vec{\kappa}) = \exp \left[\left(-\bar{A}_j^I + i \bar{A}_j^R \right) \frac{1}{k_j} \int_{\vec{\kappa}}^{+\infty} f(\kappa') dS_j \right]; (j=1,2) \quad (\text{II-19})$$

A expressão (II-15) foi obtida utilizando a aproximação de impulso e desprezando os estados intermediários excitados do núcleo. Determinações numéricas do potencial ótico com estas aproximações revelam boa concordância com resultados experimentais de espalhamento elástico a alta energia²⁴⁾. Sua aplicação no tratamento das interações dos prótons incidente e emergentes nas reações (p,2p) constitui-se em boa aproximação em confronto com as demais aproximações efetuadas no tratamento teórico destas reações^{16),27)}.

4. Forma do potencial ótico

Numa análise detalhada das reações (p,2p) é necessário que as interações adicionais dos prótons incidentes e emergentes com o núcleo, antes e após a interação quase-livre, sejam consideradas da melhor forma possível, pois resultados experimentais revelam que seus efeitos de distorção na distribuição de momentum $P_\ell(\vec{q})$ são bastante acentuados. O problema focado neste trabalho refere-se sobretudo à escolha mais adequada da forma do potencial ótico para levar em conta estes efeitos.

A forma do potencial ótico (que é função da densidade nuclear) é dada qualitativamente por um gráfico do tipo apre-

sentado na Figura (II-1a). Os intervalos A (onde o potencial decresce rapidamente) e B (no qual é relativamente profundo) correspondem respectivamente às regiões A e B da Figura (II-1b), que nos dá uma visão esquemática da secção transversal do núcleo, sobre a qual incidem perpendicularmente (na direção do eixo Z , não representado na figura) os prótons que iniciam a reação.

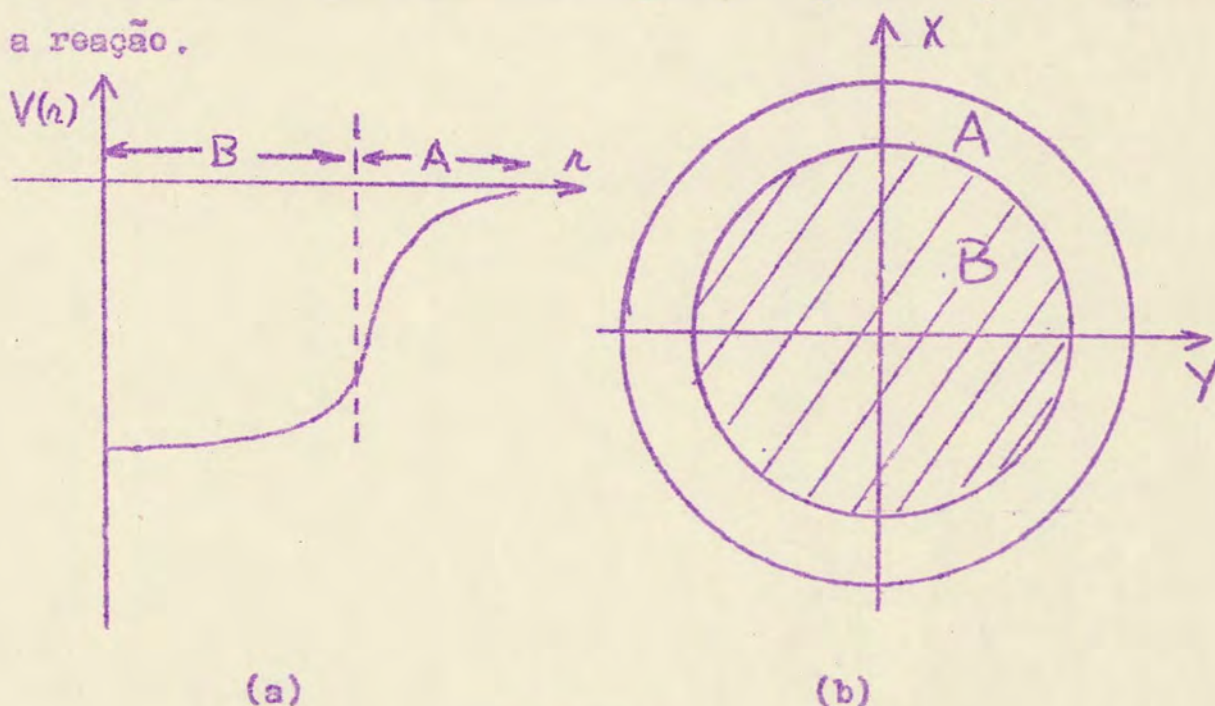


Fig. (II-1)

No caso de potenciais óticos fortemente absorventes as interações dos prótons na superfície do núcleo (região A) são de grande importância para a secção de choque, pois é nesta região que são então produzidos em sua maior parte os processos quase-livres³⁾. A região mais interna do núcleo (região B) não contribui muito com eventos quase-livres, pois a absorção dos prótons que aí incidem ou emergem é bastante grande, como se pode perceber em parte através da Figura (II-2). Esta mostra as trajetórias clássicas dos prótons para dois processos particulares no núcleo, um ocorrendo em A e outro

em B (o plano de espalhamento é o plano XZ), e serve de referência para o tipo de argumentação em favor da afirmação anterior e das que seguem adiante no tocante à região de menor absorção dos prótons.

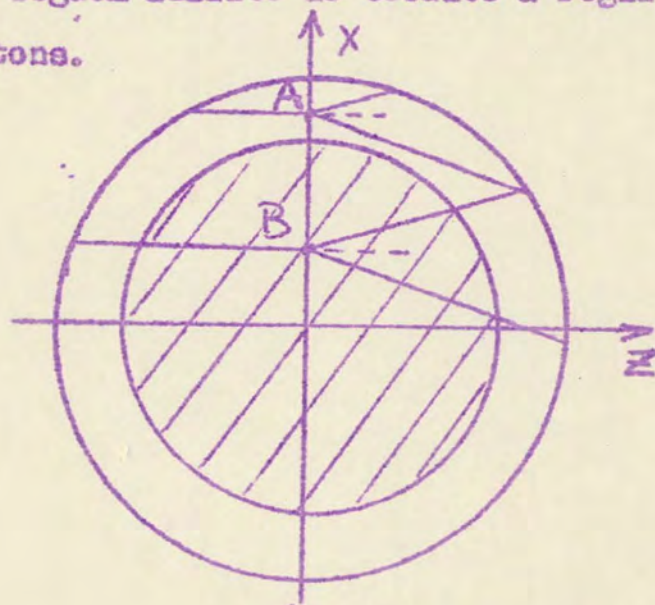


Fig. (II-2)

No processo em B os prótons têm maior probabilidade de sofrer colisões com os demais constituintes do núcleo do que em A, pois as trajetórias que percorrem, além de serem maiores, estão situadas em grande parte na região onde a densidade de nucleons é grande. A absorção dos prótons emergentes é mais importante do que a dos prótons incidentes, uma vez que possuem menor energia cinética (menos do que a metade da energia cinética do próton incidente) e sofrem, conseqüentemente, a ação de um potencial ótico (relação II-15) mais forte.

Considerando diversas possibilidades de processos (com ângulos de espalhamento α distintos) em vários pontos do núcleo, é possível afirmar, após uma análise mais detalhada, que em média aqueles que se dão nos pontos mais distantes do eixo Z (região A da Figura (II-1)^b), especialmente os que ocorrem o mais longe possível do plano XZ (nas proximidades do eixo Y,

região A da Figura (II-1^b) são os que resultam em menor absorção total dos prótons¹⁰⁾. Portanto, no caso de potenciais óticos fortemente absorventes, as porções das funções de onda na região em que o potencial cai é que dão a principal contribuição à secção de choque de processos quase-livres. Pode-se dizer ainda que a distribuição de momentum e, conseqüentemente, a secção de choque, são mais sensíveis a pequenas variações na forma do potencial ótico na região da superfície, o que nos leva a procurar conhecer bem a forma de $\rho(r)$ nesta região.

Em vista das observações acima, espera-se então que a "consistência" ("matching") do potencial ótico com as funções de onda nucleares, especialmente na região de caimento das mesmas, possa ocasionar efeitos qualitativos e quantitativos relevantes na distribuição de momentum em comparação com casos em que esta "consistência" não é levada em conta.

Como situação de prova foi considerada a reação $O^{16}(p,2p)N^{15}$ coplanar simétrica a 170 MeV. O núcleo alvo desta reação, O^{16} , é um núcleo esféricamente simétrico, com spin zero e camadas $1s$ e $1p$ totalmente preenchidas.

De acordo com o que foi mencionado, $\rho(r)$ é uma função que deve representar razoavelmente a densidade nuclear. O ponto fundamental do problema abordado neste trabalho é a escolha ("consistente") de $\rho(r)$ calculada com as funções de onda $\psi_l^m(\vec{r})$ dos nucleons¹⁸⁾, de cujas transformadas ~~de~~ ^{das} de Fourier "distorcidas" se obtém a distribuição de momentum.

A transformada de Fourier para pequenos valores de momentum $\hbar \vec{q}$, que compõem justamente o intervalo de observação experimental, depende fortemente dos detalhes e do caimento da cauda da função de onda no espaço de configuração. Isto

complementa a argumentação anterior de que a escolha "consistente" da densidade do potencial ótico, principalmente nesta região, possa apresentar efeitos significativos na distribuição de momentum.

Sabendo que a parte radial de $\psi_l^m(\vec{r})$ é normalizada de acordo com $\int_0^\infty R_l^2(r) r^2 dr = 1$ e levando em conta a relação (II-17), adotamos para $\rho(r)$ a expressão

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} R_0^2(r) + \frac{3}{4} R_1^2(r) \right] \quad (\text{II-20})$$

onde a média ponderada leva em conta a existência de quatro núcleons na camada $1S$ ($l=0$) e doze núcleons na camada $1P$ ($l=1$), perfazendo o total de $A = 16$ núcleons.

A função $f(r)$, definida em (II-18), é diferente para os núcleos alvo e residual. No entanto a diferença não é muito grande neste caso (O^{16} e N^{15}), de modo que resulta ser uma boa aproximação tomar a mesma expressão para ambas.

Este aspecto de "consistência" da $\rho(r)$ com as funções de onda $\psi_l^m(\vec{r})$ não havia sido considerado até agora. Por exemplo, na referência (10), as funções de onda são do tipo oscilador harmônico, ao passo que a densidade $\rho(r)$ é do tipo poço quadrado. Análogamente, na referência (16), as funções de onda são exponenciais e de oscilador harmônico, enquanto as densidades no potencial ótico são de forma gaussiana.

Nas referências (15) e (16) ressalta-se a grande sensibilidade da distribuição de momentum à forma das funções de onda na região da cauda (grandes distâncias) e a pequena influência de grandes variações (arbitrárias e não físicas) nos parâmetros do potencial ótico sobre os cálculos de distribui-

ção de momentum.

O objetivo do presente trabalho é verificar se as distribuições de momentum são sensíveis à "consistência" do potencial ótico com as funções de onda nucleares. Para isso foram realizados vários cálculos com potenciais óticos "consistentes" e arbitrários (alguns de forma convencional usados na literatura) cujos resultados são apresentados no capítulo seguinte.

III - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

1. Introdução

Os cálculos apresentados neste trabalho se referem, como já foi mencionado anteriormente, à reação $O^{16}(p,2p)N^{15}$ a 170 MeV.

O modelo nuclear adotado para obter a integral de superposição (II-11) foi o de furo único (desprezando o acoplamento spin-órbita), que é equivalente, na presente situação, ao modelo extremo de partícula única.

Foram efetuados ao todo nove cálculos de distribuição de momentum, abrangendo diversas situações, que classificaremos em dois grupos.

No primeiro grupo, as funções de onda que descrevem os estados-furo no núcleo residual, ou os prótons nas camadas nucleares do núcleo alvo, foram tomadas como sendo as geradas por um potencial do tipo poço quadrado; no segundo, por um potencial do tipo oscilador harmônico. Em cada um dos grupos os potenciais óticos foram considerados com formas diferentes para que se pudesse investigar os efeitos de distorção sobre a distribuição de momentum.

O raio associado ao potencial ótico é aproximadamente 1 fm maior do que o raio da distribuição de carga determinado com espalhamento de elétrons. Esta diferença tem sido interpretada em termos do alcance finito da interação nucleon-nucleon²⁴⁾. Nos nossos cálculos não consideramos esta diferença.

No que segue adotaremos a convenção de denominar $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ ("root mean square radius") simplesmente de raio, ao invés de

raiz quadrada do raio quadrático médio.

Para o núcleo O^{16} temos:

$$A = 16$$

$$N_0 = 2$$

$$N_1 = 6$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{exp} = 2,64 \text{ fm} \quad (\text{III.1a})$$

$$S_0 = 38,0 \text{ MeV} \quad (\text{III.1b})$$

$$S_1 = 17,5 \text{ MeV} \quad (\text{III.1c})$$

$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{exp}$ é o raio experimental obtido com espalhamento de elétrons²⁸⁾ e S_0 e S_1 são as energias de separação experimentais²⁹⁾ das camadas $1s$ e $1p$ respectivamente, obtidas através de reações $(p, 2p)$. S_1 corresponde a uma média ponderada das energias de separação das camadas $1p_{1/2}$ e $1p_{3/2}$

$$(S_1 = \frac{1}{3} S_{1p_{1/2}} + \frac{2}{3} S_{1p_{3/2}}).$$

Com estes dados foram obtidos, a partir das relações (II-8) e (II-5) os seguintes valores para a energia cinética e para o momentum dos prótons incidente e emergentes:

$$T_0 = 170 \text{ MeV}$$

$$k_0 = 2,99 \text{ fm}^{-1}$$

Para o estado $1s$:

$$T = 66 \text{ MeV}$$

$$k = 1,81 \text{ fm}^{-1}$$

Para o estado $1p$:

$$T = 76,25 \text{ MeV}$$

$$k = 1,95 \text{ fm}^{-1}$$

Na determinação de T pela relação (II-8) desprezamos a energia de recuo T_n do núcleo residual, a qual é menor do que $0,8 \text{ MeV}$ ($k_n = 1 \text{ fm}^{-1}$) no presente caso.

Os ângulos α que os prótons emergentes formam com a

direção incidente foram escolhidos (18 valores ao todo) de modo a que o momentum adotasse valores diferindo um do outro de $0,1 \text{ fm}^{-1}$ aproximadamente, para o estado $1S$ e de modo a abranger a região no entorno de 40° .

Nas experiências coplanares simétricas a direção do momentum $\hbar \vec{q} = -\hbar \vec{k}_a$ é a direção do momentum $\hbar \vec{k}_0$ do próton incidente. Por isso, tomando como sentido positivo o sentido de \vec{k}_0 , os valores de \vec{q} variam de positivos para negativos à medida que o ângulo α aumenta. Por esta razão adotamos nos gráficos de $P_e(\vec{q})$ versus \vec{q} (Figuras (III-1), (III-2) e (III-3)) a orientação do eixo das abscissas contrária à convenção usual. Isto é feito também na referência (16).

As amplitudes médias (sobre spin e isospin) de espalhamento nucleon-nucleon $\bar{A}_1(0)$ usadas nos potenciais óticos foram obtidas por interpolação na Tabela III da referência (24).

$$\bar{A}_0^R(0) = 0,45 \text{ fm}$$

$$\bar{A}_0^I(0) = 0,40 \text{ fm}$$

Para 66 MeV (estado $1s$):

$$\bar{A}_{1,2}^R(0) = 0,66 \text{ fm}$$

$$\bar{A}_{1,2}^I(0) = 0,52 \text{ fm}$$

Para 76 MeV (estado $1p$):

$$\bar{A}_{1,2}^R(0) = 0,63 \text{ fm}$$

$$\bar{A}_{1,2}^I(0) = 0,50 \text{ fm}$$

2. Potencial gerador das funções de onda do tipo poço quadrado

No que segue, apresentaremos as funções e grandezas necessárias para os cálculos correspondentes ao primeiro grupo, onde o potencial adotado para gerar as funções de onda foi o de poço quadrado:

$$V(r) = \begin{cases} -V_l & ; r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \quad (\text{III-2a})$$

onde V_l é a profundidade do poço correspondente à camada l e a é a largura do poço.

As funções de onda são

$$\Psi_{l,m}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} R_{l, \text{int}}(r) \\ R_{l, \text{ext}}(r) \end{cases} Y_l^m(\theta, \phi) \quad \begin{matrix} ; r < a \\ ; r > a \end{matrix} \quad (\text{III-2b})$$

onde $R_{l, \text{int}}(r)$ e $R_{l, \text{ext}}(r)$ são as funções radiais consideradas respectivamente nas regiões interna ($r < a$) e externa ($r > a$) do potencial de poço quadrado. Para o estado $l=0$ as funções radiais são

$$R_{0, \text{int}}(r) = \left(\frac{2\beta_0}{\beta_0 a + 1} \right)^{1/2} \frac{\text{sen}(\alpha_0 r)}{r} \quad (\text{III-3a})$$

$$R_{0, \text{ext}}(r) = \left(\frac{2\beta_0 \alpha_0^2}{(\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\beta_0 a + 1)} \right)^{1/2} \frac{\beta_0 (a - r)}{r} \quad (\text{III-3b})$$

Os parâmetros α_0 e β_0 são definidos e vinculados através das relações

$$\alpha_0 = \left(\frac{2m_p (V_0 - |S_0|)}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (\text{III.4a})$$

$$\beta_0 = \left(\frac{2m_p |S_0|}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (\text{III.4b})$$

$$\alpha_0 \cotg(\alpha_0 a) = -\beta_0 \quad (\text{III.4c})$$

A relação (III.4c) é obtida igualando as derivadas logarítmicas

cas das funções radiais externa e interna no ponto $r = a$.

O raio quadrático médio correspondente ao estado $1s$ é

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{a^3 \left(\frac{\beta_0}{3} \right) + a^2 + a \left(\frac{1}{2\beta_0} + \frac{\alpha_0^2 - \beta_0^2}{2\beta_0 \alpha_0^2} \right) + \frac{\alpha_0^2 - \beta_0^2}{2\beta_0^2 \alpha_0^2}}{(\beta_0 a + 1)} \quad (\text{III-5})$$

Para o estado $1p$ as funções radiais são

$$R_{1int}(r) = \left(\frac{1}{a} \frac{2(\beta_1 a + 1)^2 \alpha_1^2 + 2\beta_1^2}{[(\beta_1 a + 1)^2 + (\beta_1 a + 1) + 1] \cdot \alpha_1^4} \right)^{1/2} \frac{\sin(\alpha_1 r) - (\alpha_1 r) \cos(\alpha_1 r)}{r^2} \quad (\text{III-6a})$$

$$R_{1ext}(r) = \left(\frac{2\alpha_1^2 a}{[(\beta_1 a + 1)^2 + (\beta_1 a + 1) + 1] (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \right)^{1/2} \frac{\beta_1 r + 1}{r^2} e^{-\beta_1 (a-r)} \quad (\text{III-6b})$$

Os parâmetros α_1 e β_1 são definidos e vinculados através das relações

$$\alpha_1 = \left(\frac{2m_p (V_1 - |S_1|)}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (\text{III-7a})$$

$$\beta_1 = \left(\frac{2m_p |S_1|}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (\text{III-7b})$$

$$\frac{\cotg(\alpha_1 a)}{\alpha_1 a} - \frac{1}{(\alpha_1 a)^2} = \frac{1}{\beta_1 a} + \frac{1}{(\beta_1 a)^2} \quad (\text{III-7c})$$

O raio quadrático médio correspondente ao estado $1p$ é

$$\langle r_1^2 \rangle = \frac{\frac{1}{\beta_1^2} [2(\beta_1 a + 1)^4 + 2(\beta_1 a + 1)^3 + 2(\beta_1 a + 1)^2 - 3(\beta_1 a + 1) - 3]}{6[(\beta_1 a + 1)^2 + (\beta_1 a + 1) + 1]} + \frac{5}{6\alpha_1^2} \quad (\text{III-8})$$

Com as expressões (III-5) e (III-8) se obtém o raio do núcleo O^{16} ,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{4} \langle r_0^2 \rangle + \frac{3}{4} \langle r_1^2 \rangle} \quad (\text{III-9})$$

Primeiramente foram obtidos β_0 e β_1 a partir de (III-4b), (III-7b) e (III-1b,c); a seguir foi gerada uma seqüência conveniente de valores de Q , com a qual se obtiveram sucessivamente os valores de α_0 e α_1 (III-4c) e (III-7c) de V_0 e V_1 (III-4a) e (III-7a) e do raio ((III-5), (III-8) e (III-9)), até que o valor deste último fôsse igual ao valor experimental dado em (III-1a), dentro de um erro pré-estabelecido (0,1%).

As profundidades de poço V_0 e V_1 se revelaram distintas uma da outra. O processo de ajustagem foi programado em linguagem Fortran para um computador IBM-1130. Os parâmetros obtidos foram

$$\begin{array}{ll} Q = 3,486 \text{ fm} & V_1 = 40,31 \text{ MeV} \\ V_0 = 49,83 \text{ MeV} & \alpha_1 = 1,049 \text{ fm}^{-1} \\ \alpha_0 = 0,755 \text{ fm}^{-1} & \beta_1 = 0,918 \text{ fm}^{-1} \\ \beta_0 = 1,353 \text{ fm}^{-1} & \end{array}$$

Com as funções geradas pelo potencial poço quadrado foram realizados ao todo cinco cálculos diferentes de distribuição de momentum (excluindo o caso sem distorção), com potenciais óticos distintos.

A - Potencial ótico "consistente"¹⁸⁾

Neste caso a forma do potencial ótico foi tomada de acordo com a expressão (II-20)

$$P(r) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} R_0^2(r) + \frac{3}{4} R_1^2(r) \right]$$

onde $R(r)$ e $R_1(r)$ são as partes radiais das funções de onda $\psi_l^*(r, \theta, \phi)$ ((III-3a,b) para $\frac{l=0}{A \ll Q}$ e (III.-6a,b) para

$l=1$
 $\lambda > a$), com os mesmos parâmetros. A função $f(r)$ definida em (II-18) é dada então por

$$f_{\text{int}}(r) = A \frac{\sin^2(\alpha_0 r)}{r^2} + B \left(\frac{\sin(\alpha_1 r) - (\alpha_1 r) \cos(\alpha_1 r)}{r^2} \right)^2; r < a \quad (\text{III-10a})$$

$$f_{\text{ext}}(r) = C \frac{e^{-2\beta_0(a-r)}}{r^2} + D \frac{(\beta_1 r + 1)^2}{r^4} e^{-2\beta_1(a-r)}; r > a \quad (\text{III-10b})$$

onde

$$A = 7,5 \frac{\beta_0}{\beta_0 a + 1}; \quad B = \frac{22,5}{a} \frac{(\beta_1 a + 1)^2 \alpha_1^2 + \beta_1^2}{[(\beta_1 a + 1)^2 + (\beta_1 a + 1) + 1] \alpha_1^4}$$

$$C = 7,5 \frac{\beta_0 \alpha_0^2}{(\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\beta_0 a + 1)}; \quad D = 22,5 \frac{\alpha_1^2 a}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)[(\beta_1 a + 1)^2 + (\beta_1 a + 1) + 1]}$$

B - Potencial ótico "não consistente"

A forma do potencial ótico foi considerada de maneira análoga ao caso anterior, mas com parâmetros ajustados de tal modo que o raio fôsse 10% menor do que o valor experimental (III-1a). As funções de onda utilizadas foram as mesmas do caso anterior (caso A). Neste caso não há "consistência" entre as funções de onda e o potencial ótico.

Os parâmetros utilizados para o potencial ótico foram

$$\begin{aligned} \alpha &= 3,050 \text{ fm} & \alpha_1 &= 1,1816 \text{ fm}^{-1} \\ \alpha_0 &= 0,847 \text{ fm}^{-1} & \beta_1 &= 0,918 \text{ fm}^{-1} \\ \beta_0 &= 1,353 \text{ fm}^{-1} & & \end{aligned}$$

C - Potencial ótico poço quadrado

Neste caso a forma do potencial ótico considerada foi a de um poço quadrado, cujos parâmetros (profundidade e largura) foram ajustados de modo a reproduzir o valor experi-

mental do raio do núcleo.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi L^3} & ; r < L \\ 0 & ; r > L \end{cases} \quad (\text{III-11a})$$

onde $L = 3,408$ fm (largura do poço) se obteve de $L^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle_{\text{exp}}$.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{45}{L^3} & ; r < L \\ 0 & ; r > L \end{cases} \quad (\text{III-11b})$$

Também neste caso não há "consistência" entre as funções de onda e o potencial ótico.

D - Potencial ótico gaussiano

A forma empregada para o potencial ótico foi a de uma distribuição gaussiana, com parâmetros ajustados para dar o raio experimental (III-1a).

$$f(r) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} e^{-r^2/b^2} \quad (\text{III-12a})$$

onde $b = 2,155$ fm foi obtido de $b^2 = \frac{3}{5} \langle r^2 \rangle_{\text{exp}}$.

$$f(r) = \frac{60}{\pi^{3/2} b^3} e^{-r^2/b^2} \quad (\text{III-12b})$$

Este é mais um exemplo de potencial ótico arbitrário, sem relação de "consistência" com as funções de onda que descrevem os nucleons.

E - Potencial ótico "consistente" com raio menor

Neste cálculo foram consideradas as funções de onda e o potencial ótico "consistentemente", como no primeiro caso (potencial ótico "consistente"), mas com parâmetros, tanto das funções de onda como do potencial ótico, ajustados para que dessem o valor do raio 10% menor do que o valor experimental (III-

la). Os parâmetros empregados foram os mesmos do potencial ótico "não consistente" (caso B).

Na Figura (III-1a) são apresentadas as funções de onda (partes radiais) e as diversas formas de potencial ótico utilizadas neste conjunto de cálculos. Os resultados obtidos para as distribuições de momentum $P_\ell(\vec{q})$ (II-12) são mostrados nas Figuras (III-1b), para o estado $1s$, e (III-1c), para o estado $1p$. As distribuições representadas com determinada cor e traçado correspondem aos cálculos efetuados com potencial ótico representado pela mesma cor e traçado na Figura (III-1a) (no caso B o potencial ótico é o mesmo do caso B). Foram incluídas também, para comparação, as distribuições de momentum sem distorção, multiplicadas por fatores de redução convenientes para a leitura (1/30 para o estado $1s$ e 1/20 para o estado $1p$).

3. Potencial gerador das funções de onda do tipo oscilador harmônico

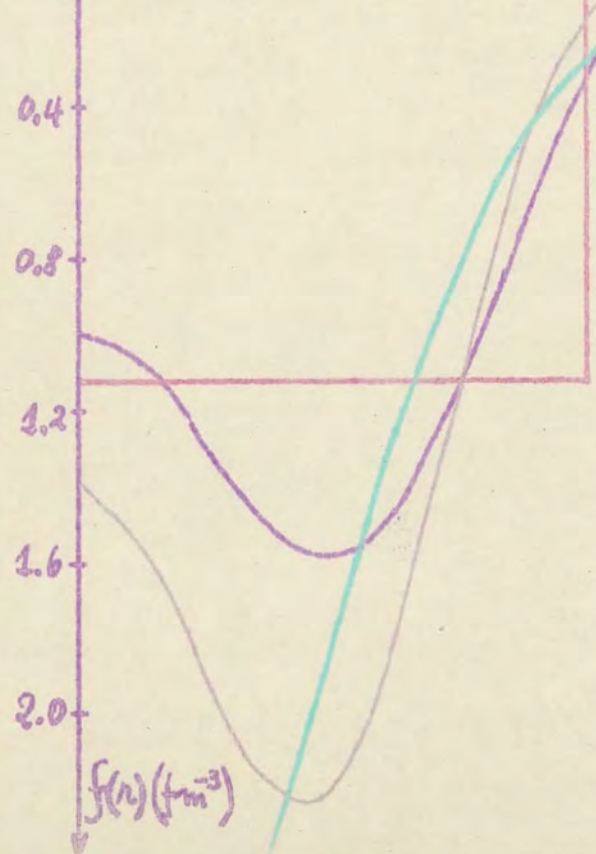
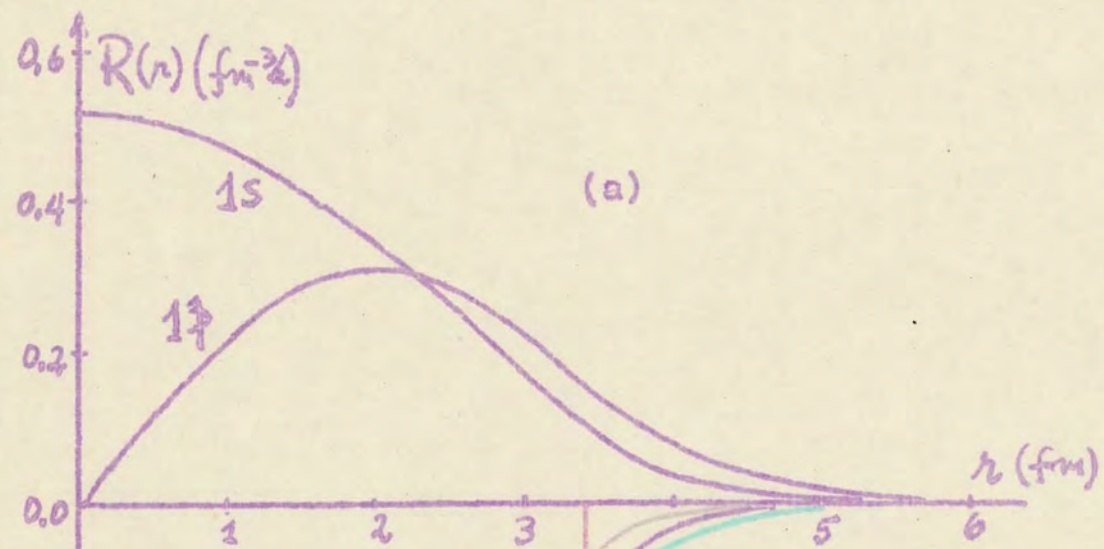
Tendo em vista uma comparação com os resultados obtidos com funções de onda de potencial poço quadrado, e para melhor conhecimento do efeito da distorção sobre as distribuições de momentum, foi realizado um segundo conjunto de cálculos com funções de onda geradas por um potencial ótico do tipo oscilador harmônico:

$$V(r) = \frac{1}{2} m_p \omega^2 r^2 - V_0 \quad (\text{III-13})$$

As funções de onda correspondentes às camadas $1s$ e $1p$ são

$$\Psi_\ell(r, \theta, \phi) = \pi^{-1/4} \beta^{3/2} \sqrt{\frac{2^{\ell+2}}{(2\ell+1)!}} (\beta r)^\ell \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta r)^2\right] Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (\text{III-14})$$

onde $\beta = \sqrt{\frac{m_p \omega}{\hbar}}$



Sem distorção

Potenciais óticos:

"Consistente" -----

"Não consistente" _____

Poço quadrado _____

Gaussiano _____

"Consistente" com raio menor - - - - -

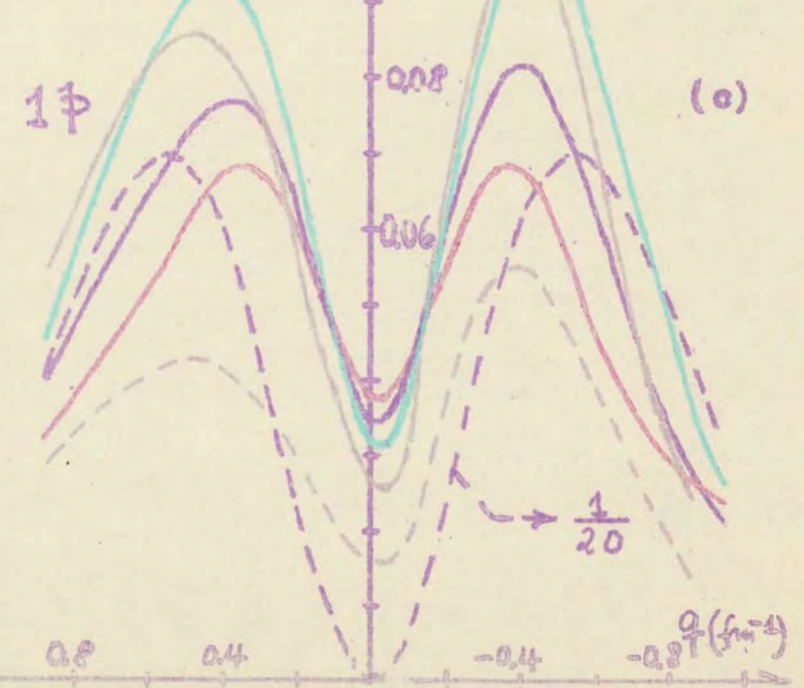
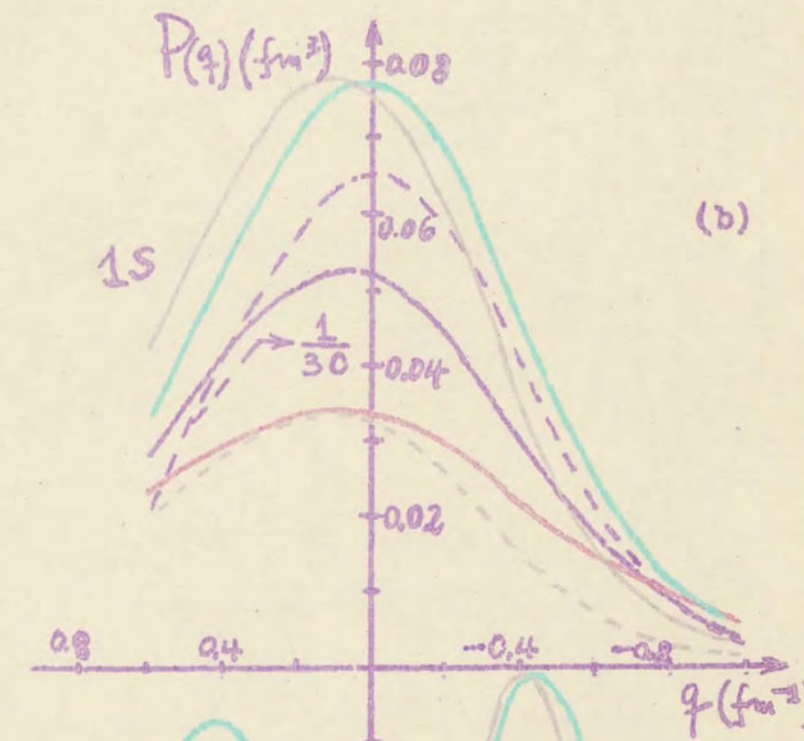


FIG. (III-1)

O parâmetro β foi ajustado de modo a que se obtivesse o raio experimental (III-1a):

$$\frac{9}{4} \frac{1}{\beta^2} = \langle r^2 \rangle_{\text{exp}} \quad (\text{III-15})$$

onde $\frac{9}{4} \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{4} \langle r_0^2 \rangle + \frac{3}{4} \langle r_1^2 \rangle$ com

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta^2} ; \langle r_1^2 \rangle = \frac{5}{2} \frac{1}{\beta^2} \quad (\text{III-16})$$

$$\beta^2 = 0.323 \text{ fm}^{-2}$$

A escolha dos potenciais óticos obedecem ao mesmo critério adotado para os cálculos do primeiro grupo. Foram estudadas, além do caso sem distorção, quatro situações diferentes. Não foi realizado (em relação ao grupo anterior) o cálculo com potencial ótico do tipo poço quadrado.

A - Potencial ótico "consistente"

A relação entre funções de onda e potencial ótico é análoga à correspondente do grupo de potencial gerador das funções de onda do tipo poço quadrado.

Neste caso

$$f(r) = \frac{15\beta^3}{\pi^2 c} (1 + 2\beta^2 r^2) e^{-\beta^2 r^2} \quad (\text{III-17})$$

B - Potencial ótico "não consistente"

A relação entre funções de onda e potencial ótico é análoga à correspondente do grupo de potencial gerador das funções de onda do tipo poço quadrado. O parâmetro para o poten -

cial ótico foi tomado igual a $\beta^2 = 0,398 \text{ fm}^{-2}$

C - Potencial ótico gaussiano

A relação entre funções de onda e potencial ótico é análogo à do caso D do grupo de potencial gerador das funções de onda do tipo poço quadrado.

D - Potencial ótico "consistente" com raio menor

A relação entre funções de onda e potencial ótico é análoga à do caso E do grupo de potencial gerador das funções de onda do tipo poço quadrado.

As funções de onda e potenciais óticos correspondentes a este grupo de cálculos são apresentadas na Figura (III-2a). As distribuições de momentum distorcidas e sem distorção são dadas nas Figuras (III-2b) e (III-2c), para os estados $1s$ e $1p$, respectivamente.

As Figuras (III-3a), (III-3b) e (III-3c) mostram, para fins de comparação, as funções de onda, potenciais óticos "consistentes" e as distribuições de momentum distorcidas e sem distorção dos dois grupos de cálculos, poço quadrado e oscilador harmônico. Para o estado $1s$ (Figura (III-3b)) as duas distribuições de momentum sem distorção são indistinguíveis dentro do intervalo de momentum considerado.

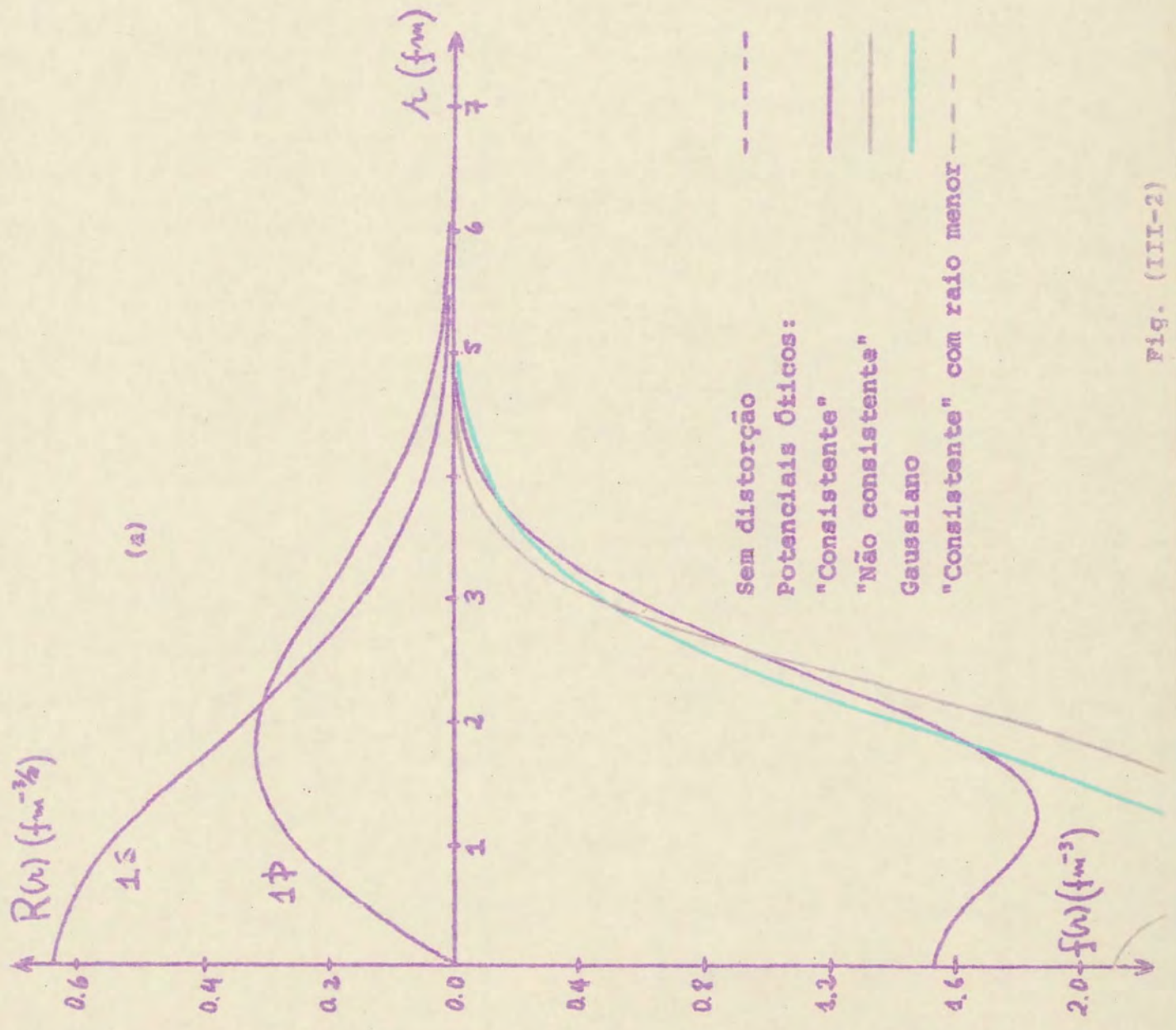
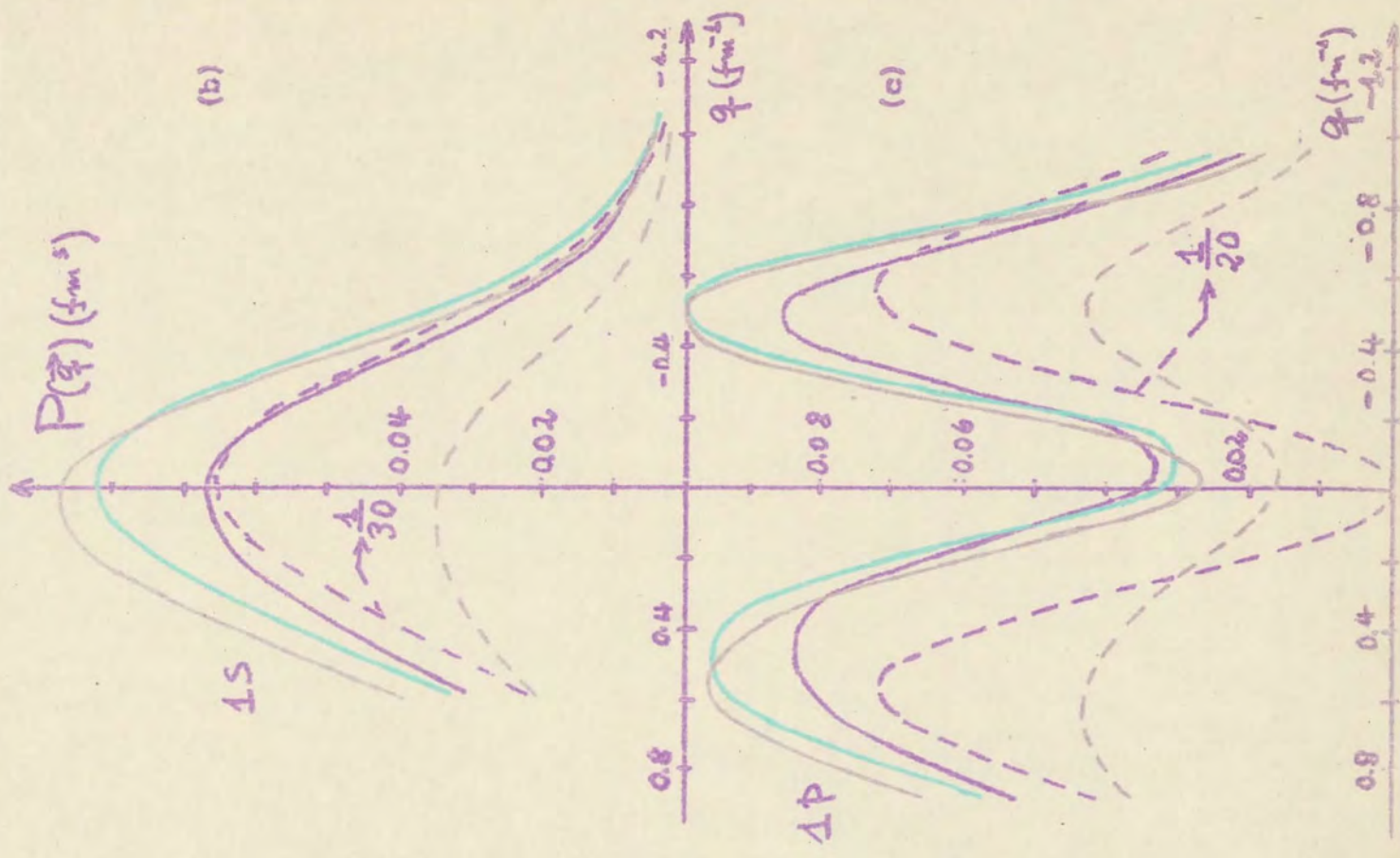


Fig. (III-2)

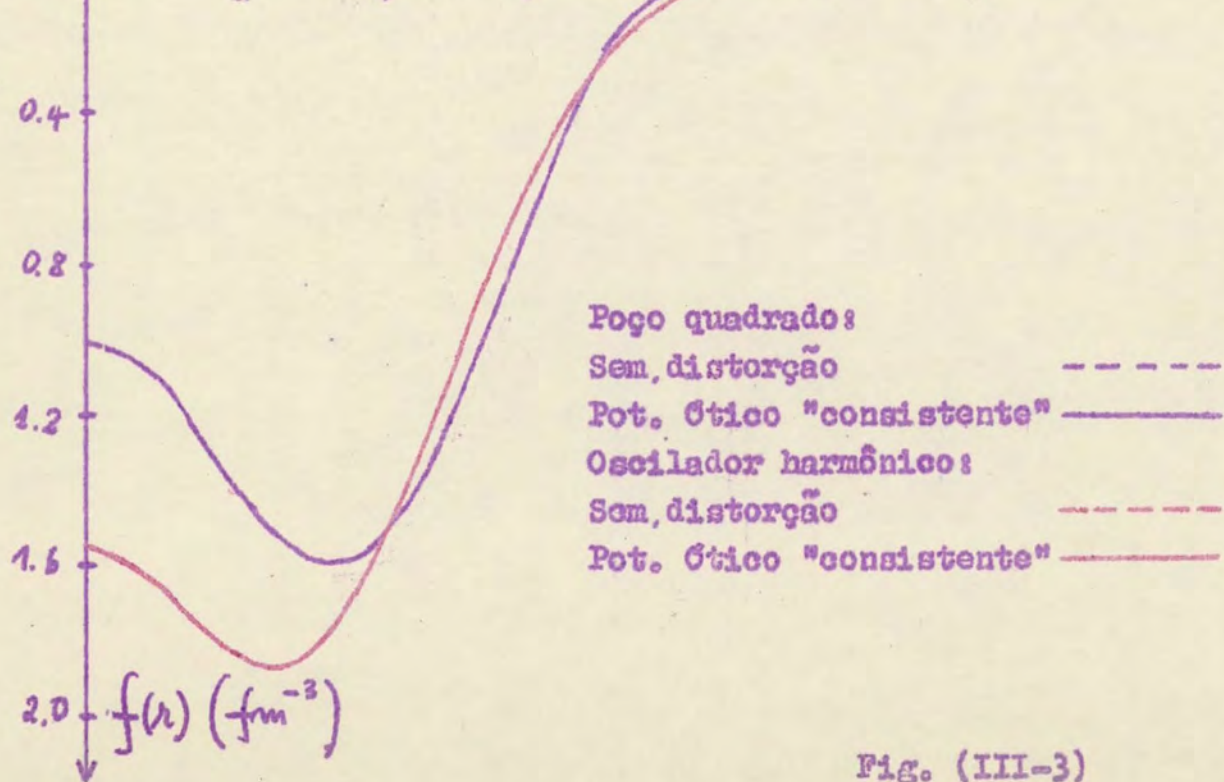
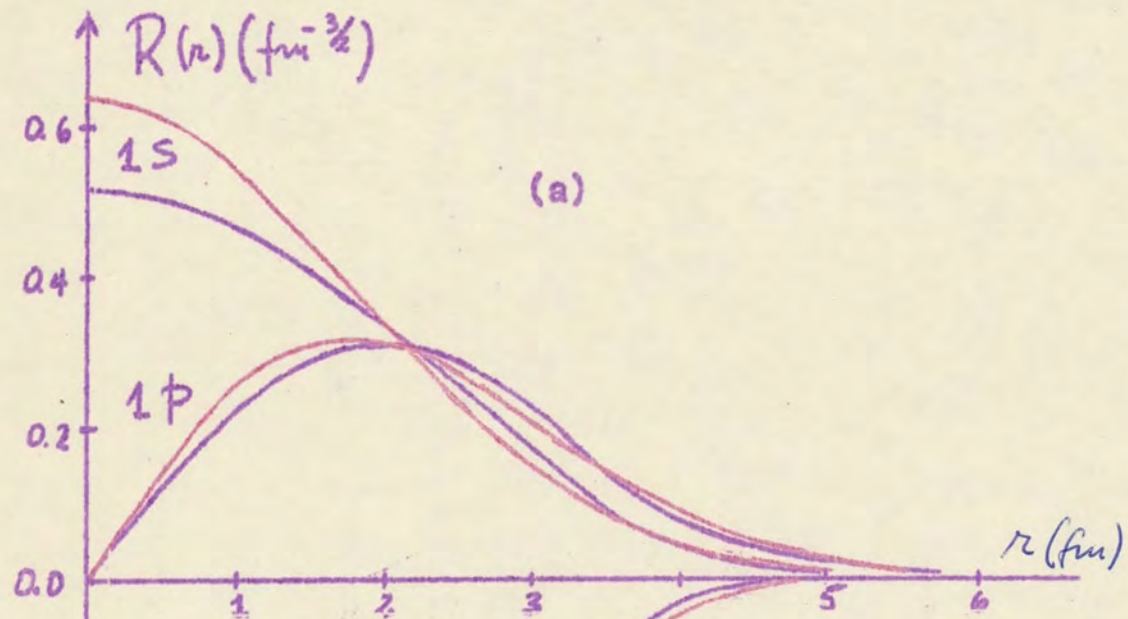
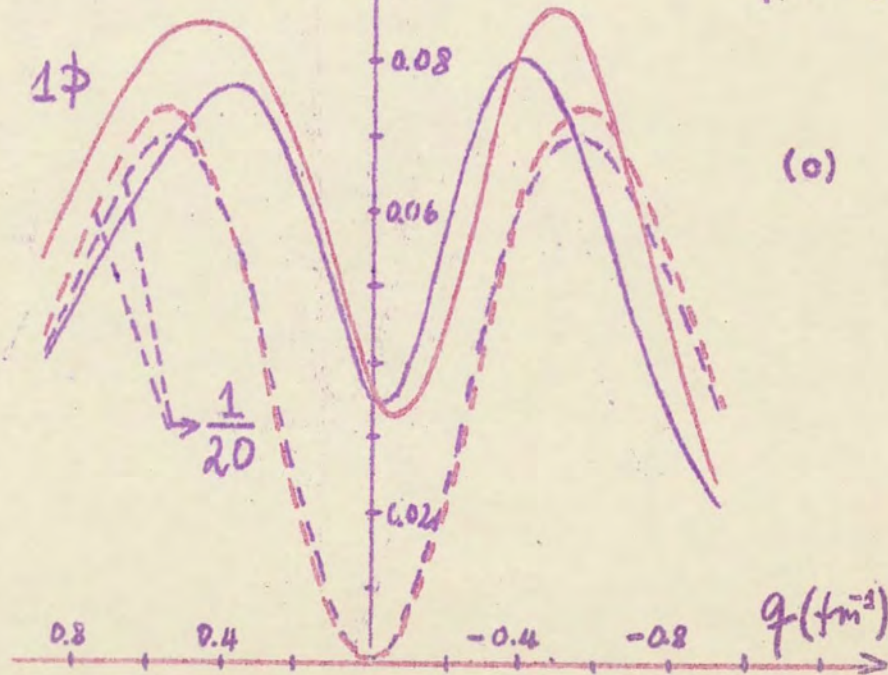
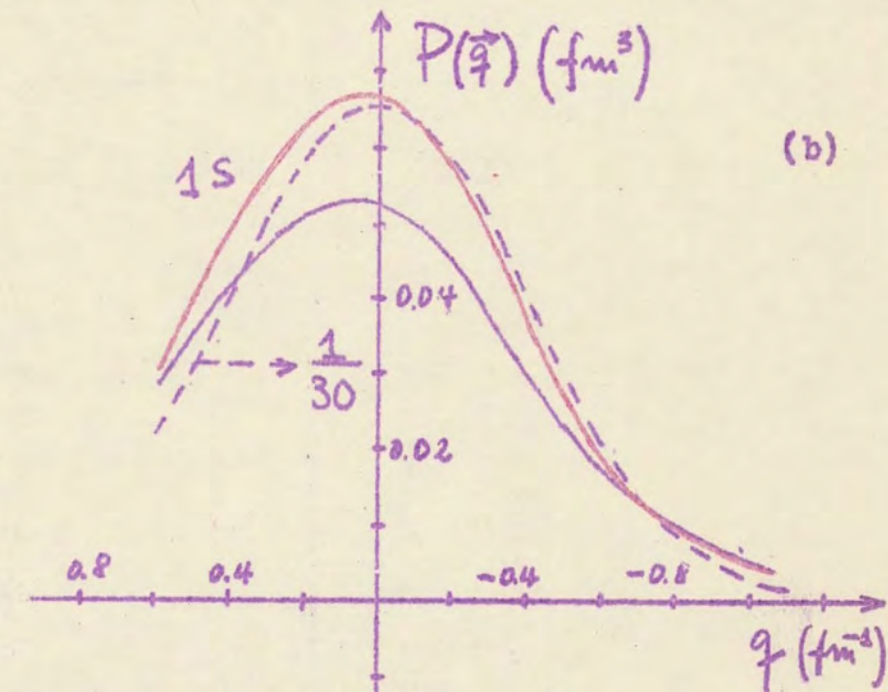


Fig. (III-3)



IV - DISCUSSÃO E COMENTÁRIOS

1. Aspectos gerais

Apresentamos a seguir alguns aspectos e características gerais que se observam nas distribuições de momentum e potenciais óticos, os quais são comuns a ambos os grupos, poço quadrado (Figura (III-1)) e oscilador harmônico (Figura (III-2)). Aspectos particulares e conclusões finais são deixados para a próxima seção.

Nos dois grupos verifica-se que a redução na intensidade das distribuições de momentum distorcidas em relação à distribuição sem distorção é maior no estado $1s$ do que no estado $1p$. Isto é evidenciado através dos fatores pelos quais estão multiplicadas as distribuições de momentum não distorcidas nas Figuras ($1/30$ para o estado $1s$ e $1/20$ para o estado $1p$). Este efeito era esperado, pois no estado $1s$, localizado na região mais interna do núcleo, os efeitos de colisões múltiplas são mais importantes do que no estado $1p^3$, localizado mais na superfície, e assim são também as conseqüências destes efeitos. É de se supor que para núcleos mais pesados estes efeitos sejam ainda mais acentuados.

No estado $1p$ observa-se que os mínimos (zero no caso sem distorção) das distribuições de momentum distorcidas são significativamente não nulos no ponto de momentum zero e que as posições dos máximos estão mais próximas uma da outra em comparação com as posições dos picos nos cálculos sem distorção. Isto acontece porque a distorção, independentemente da forma do potencial ótico, aumenta a contribuição das componentes de momentum pequeno e diminui a contribuição das componentes de

momentum grande. Verifica-se também uma assimetria dos picos situados aos lados direito e esquerdo da origem (isto é, do ponto de momentum zero).

Para o estado $1s$ tôdas as distribuições com distorção apresentam deslocamento (não muito acentuado em alguns casos) do pico central para o lado esquerdo (momentum positivo). É interessante observar, com relação a êste detalhe, que existe discordância entre nossos resultados e os apresentados à pág. 497 da referência (16). Nestes últimos os deslocamentos se dão para o lado direito (momentum negativo). Convém mencionar que re fizemos em parte os cálculos apresentados na referência (16) (com os mesmos parâmetros), a fim de testar nossos programas de computador, e chegamos praticamente aos resultados dos autores. A discordância pode, portanto, ser atribuída às formas e parâmetros das funções de onda e aos potenciais óticos utilizados.

As profundidades relativas dos potenciais óticos na região de 3 fm parece fornecer, em ambos os conjuntos de cálculos (Figuras (III-1a) e (III-2a)), um bom indicador para a previsão do andamento das alturas dos picos nos dois estados, $1s$ e $1p$. Quanto mais profundo (raso) o potencial nesta região, menor (maior) a altura dos máximos das distribuições de momentum, ou seja, maior (menor) a redução dos mesmos em comparação com os picos das distribuições sem distorção. Em realidade, as formas dos potenciais óticos só podem ser tomadas como guias de raciocínio no entendimento dos resultados. Os fatores de distorção $D_j(\lambda)$, que são as grandezas que realmente afetam as distribuições de momentum são obtidos a partir dos potenciais de maneira indireta (ver Capítulo II), não local.

De um modo geral, os resultados obtidos indicam que as distribuições de momentum, principalmente as do estado $1s$, são realmente sensíveis à forma do potencial ótico na região que corresponde à superfície do núcleo (vizinhança de 3 fm). Isto vem confirmar nossas expectativas iniciais, pois sendo na região da superfície nuclear produzidos eventos quase-livres em número significativo, os efeitos de distorção causados pelas interações dos prótons incidente e emergentes nesta região são importantes.

As diferenças acentuadas dos potenciais óticos na região mais interna do núcleo (raio menor do que 2 fm, Figuras (III-1a) e (III-2a)) não parecem acarretar efeitos suscetíveis de serem verificados facilmente sobre as distribuições de momentum no intervalo de momentum considerado; isto está de acordo com o fato de os prótons que aí incidem e emergem serem praticamente todos absorvidos, não havendo portanto grande número de eventos quase-livres a dar contribuição à distribuição de momentum.

2. Aspectos particulares

Comparando as distribuições de momentum sem distorção do oscilador harmônico (vermelho tracejado) com as do poço quadrado (roxo tracejado) (Figura (III-3b,c)) nota-se que no estado $1s$ elas são indistinguíveis, dentro do intervalo de momentum considerado, e que no estado $1p$ não diferem muito uma da outra. Deve-se isto à semelhança das funções de onda na região da cauda no espaço de configuração (Figura (III-3a)). Observa-se que as funções de onda correspondentes ao estado $1s$ para os dois potenciais diferem apreciavelmente apenas para distâncias menores do que 2 fm. Esta diferença, no entanto, se faz

sentir sobre as distribuições de momentum principalmente na região de grandes valores de $|\vec{q}|$, a qual cai fora do nosso intervalo de observação. Como decorrência da forma das funções de onda, o potencial ótico "consistente" para o poço quadrado (roxo) é mais largo (mais estendido) do que o seu correspondente no caso do oscilador harmônico (vermelho), ou seja, é mais raso na região próxima da origem e mais profundo na vizinhança de 3 fm. Este último detalhe, de acordo com o critério mencionado na seção anterior, é provavelmente o responsável pela menor intensidade (dos máximos) das distribuições de momentum distorcidas do potencial de poço quadrado, em comparação com as do oscilador harmônico.

É interessante notar que os potenciais óticos gaussiano (verde) e "não consistente" (preto) ocasionam praticamente o mesmo efeito sobre as alturas dos máximos (nos estados $1s$ e $1p$) nos dois casos, poço quadrado (Figura (III-1b,c)) e oscilador harmônico (Figura (III-2b,c)).

O potencial ótico poço quadrado (vermelho, Figura (III-1a)) é o de maior profundidade na região da superfície do núcleo (vizinhança de 3 fm) e, conseqüentemente, os efeitos de absorção são os mais notáveis (excluindo o caso "consistente" com raio 10% menor), principalmente no estado $1s$. Neste último (Figura (III-1b)), a distribuição de momentum é não apenas a que apresenta menor altura mas também a mais larga (estendida). No estado $1p$ (Figura III-1c) a assimetria não é tão acentuada como nos demais casos. Talvez se entenda isso levando em conta que após 3,4 fm o potencial ótico poço quadrado é nulo. Portanto, as funções de onda podem contribuir mais efetivamente para a forma (simetria) da distribuição de momentum.

As distribuições de momentum correspondentes aos casos em que são empregados potenciais óticos "consistentes" com raio menor (preto tracejado, Figuras (III-1b,c) e (III-2b,c)) apresentam menor intensidade do que as observadas nos casos de potenciais óticos "consistentes" (roxo). As distribuições de momentum sem distorção no caso em que o raio é menor (não apresentadas nas figuras) são mais largas do que as distribuições correspondentes na situação em que o raio é igual ao raio experimental (roxo tracejado). No estado $1s$ o fator de redução dos máximos sem distorção é cerca de $10/14$ em ambos os grupos, poço quadrado e oscilador harmônico. No entanto, nas distribuições com distorção (estado $1s$) os fatores são aproximadamente $10/15$ para o poço quadrado e $10/19$ para o oscilador harmônico. Este resultado evidencia que o potencial ótico atua com maior intensidade na situação em que o raio é menor.

Os cálculos realizados com potencial ótico "consistente" (roxo) (a principal motivação deste trabalho), mostram que as distribuições de momentum diferem significativamente das demais, obtidas com potenciais óticos de formas arbitrárias. As diferenças, apesar de não tão grandes para alterar de uma ordem de grandeza os valores, são apreciáveis e suscetíveis de serem detectadas experimentalmente. Prevê-se, outrossim, que sejam maiores para núcleos mais pesados do que o O^{16} .

Os resultados obtidos demonstram plenamente que não se deve tomar a forma do potencial ótico arbitrariamente. Justificam-se e são necessárias, pois, determinações cuidadosas do mesmo. Este trabalho tem esta finalidade, ao buscar a "consistência" entre o potencial ótico e as funções de onda nucleares. Não se pretende, é verdade, que isto seja suficiente para ob-

ter boa concordância com as curvas experimentais, mesmo com funções de onda mais realísticas, mas considera-se este um passo importante e necessário neste sentido. Neste ponto convém salientar que há outros aspectos, decorrentes de um tratamento mais adequado das reações $(p,2p)$, que afetam a integral de superposição (II-11) e, conseqüentemente, a distribuição de momentum distorcida²⁰⁾⁻²²⁾.

Sobretudo, conclue-se dos resultados aqui obtidos, que é prematuro chegar a conclusões sobre detalhes de modelos nucleares a partir de reações $(p,2p)$ antes de melhorar a descrição teórica das distorções das ondas que descrevem os prótons incidente e emergentes¹⁸⁾. Acreditamos que a "consistência" entre o potencial ótico e as funções de onda nucleares se constitui em um dos passos para efetivar esta melhoria.

APÊNDICE

O cálculo da transformada de Fourier "distorcida" $g^{lm}(\vec{q})$, a partir da qual se obtém a distribuição de momentum $P_l(\vec{q})$, envolve a resolução de uma integral tridimensional. Chamaremos a esta, no que segue, de integral principal. A obtenção dos fatores de distorção $D_f(r)$ contidos no integrando, envolve por sua vez a resolução de integrais de linha ao longo das trajetórias clássicas dos prótons incidente e emergentes. O integrando nestas últimas é uma função com simetria esférica, $f(r)$. Há, portanto, integrais de dois tipos diferentes neste problema, cada uma com características e propriedades de simetria próprias.

As integrais de linha, salvo raras exceções (potencial ótico poço quadrado, por exemplo), não são suscetíveis de integração analítica e, conseqüentemente, a integral principal também não o é. Torna-se portanto necessário resolvê-las numericamente.

Em relação ao tratamento numérico, adotamos a orientação de escolher os métodos de integração que facilitassem a utilização de propriedades de simetria e que reduzissem, o máximo possível, o tempo de processamento, sem comprometer a precisão dos cálculos. Estes foram programados em linguagem Fortran para um computador IBM-1130 e realizados no Centro de Processamento de Dados da UFRGS.

No que segue apresentaremos alguns detalhes das propriedades das integrais e do tratamento teórico-numérico dispensado a elas.

1. Integral principal

O cálculo da integral principal baseou-se em uma generalização para três dimensões do método dos paralelogramos, o qual nos pareceu adequado para o aproveitamento de certas propriedades do integrando e para a redução do tempo de processamento.

Uma integral volumétrica qualquer

$$I = \iiint F(\vec{r}) dV \quad (A-1a)$$

é dada por

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} S(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N F(\vec{r}_n) \cdot \Delta V_n \quad (A-1b)$$

onde os conjuntos $\{\Delta V_n\}$ e $\{\vec{r}_n = (r_n, \theta_n, \phi_n)\}$; $n = 1, 2, \dots, N$ formam respectivamente uma partição (conjunto de sub-intervalos) e um aumento (distribuição de pontos, um em cada sub-intervalo) quaisquer.

Para fins de cálculo pode-se tomar um número N (de pontos e de sub-intervalos) suficientemente grande de modo que a soma $S(N)$ se aproxime tanto quanto se queira do valor da integral (desde que ela exista). A convergência depende também da escolha da partição e do aumento³⁰⁾.

No método de integração adotado neste trabalho os sub-intervalos da partição foram considerados como paralelepípedos de arestas praticamente iguais e de volume

$$\Delta V = \frac{V}{N} \quad (A-2)$$

Desta forma, o valor da integral é dado aproximadamente por

$$I \cong S(N) = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N F(\vec{r}_n) \right] \cdot V \quad (A-3)$$

O aumento, por sua vez, foi considerado como formado por uma distribuição uniforme de pontos, cada um deles localizado no centro de um sub-intervalo. A figura abaixo mostra a projeção de uma particular distribuição de pontos e sub-intervalos sobre o plano (θ, ϕ) .

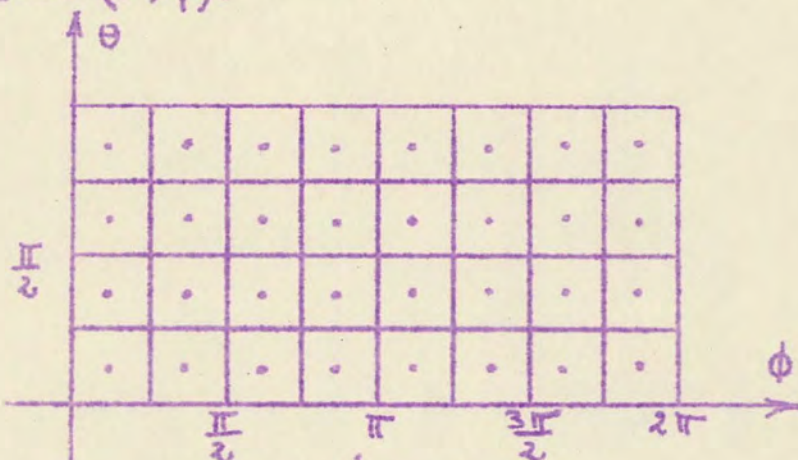


Fig. (A-1)

Realizamos a integração em coordenadas esférico-polares. r varia de zero a infinito. No entanto, em vista do rápido decaimento das funções de onda e do potencial ótico, o integrando praticamente não contribui mais para o valor da integral a partir de certo valor de r , de modo que se pode fazer um corte na integração em r . O limite superior de integração foi tomado igual a 10,5 fm.

A origem do sistema de referência foi colocada no centro de massa do núcleo e os eixos orientados de tal maneira que o plano de espalhamento, formado pelos vetores \vec{k}_0 , \vec{k}_1 e \vec{k}_2 dos prótons incidente e emergentes, fôsse paralelo ao plano XZ .

e de modo que o semi-eixo positivo de Z tivesse a mesma direção e sentido de \vec{k}_0 .

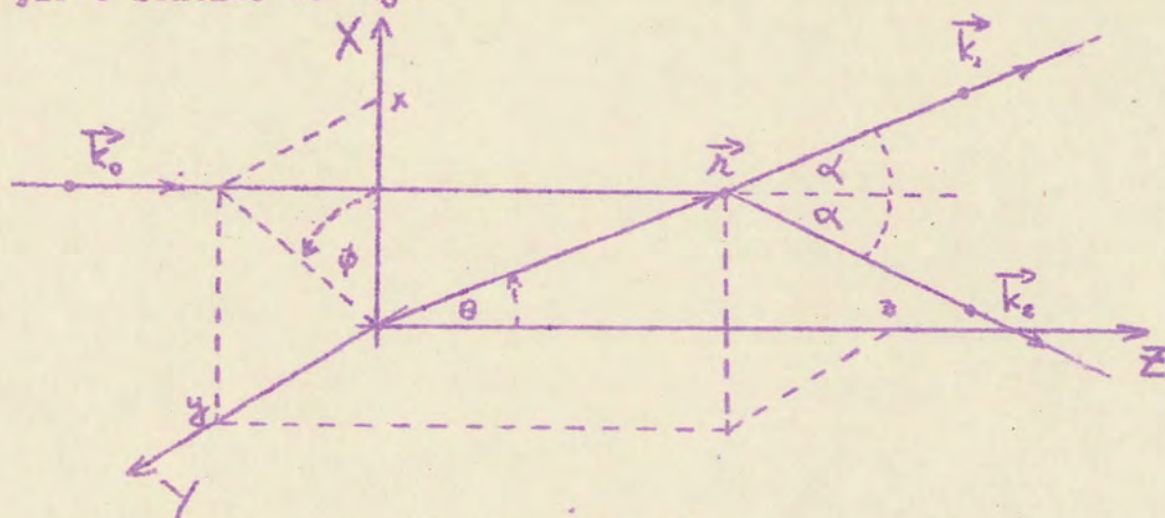


Fig. (A-2)

Como consequência das condições cinemáticas em espalhamento coplanar simétrico, a única possibilidade de orientação do vetor \vec{q} é segundo o eixo Z .

A Figura (A-2), além de mostrar a orientação dos eixos de referência, ilustra também a disposição dos caminhos de integração das integrais de linha, necessárias para obter os fatores de distorção num ponto genérico $\vec{r} = (r, \theta, \phi) = (x, y, z)$. Em vista do limite introduzido na integração em r , as integrais de linha são realizadas a partir de ($j=0$) ou até ($j=1,2$) os pontos de intersecção das retas subtendidas pelos vetores \vec{k}_0 , \vec{k}_1 e \vec{k}_2 com a esfera de raio igual ao valor de corte da coordenada r ($R = 10,5$ fm).

O produto dos fatores de distorção $D(\vec{r}) = D_0(\vec{r}) D_1(\vec{r}) D_2(\vec{r})$ possui certas propriedades importantes que devem ser consideradas no cálculo da transformada de Fourier "distorcida".

De acordo com as definições de $D_j(\vec{r})$ ($j=0,1,2$), o produto $D(\vec{r})$ é dado por:

$$D(\vec{\lambda}) = \exp \left[i \frac{\bar{A}_0^{(0)}}{k_0} \left(\int_{\vec{R}}^{\vec{\lambda}} f(\lambda') ds_0 + i \frac{\bar{A}_{1,2}^{(0)}}{k} \left(\int_{\vec{R}}^{\vec{\lambda}} f(\lambda') ds_1 + \int_{\vec{\lambda}}^{\vec{R}} f(\lambda') ds_2 \right) \right) \right] \quad (\text{A-4})$$

onde $k = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$, $\bar{A}_{1,2}^{(0)} = \bar{A}_1^{(0)} = \bar{A}_2^{(0)}$, $R = 10,5 \text{ fm}$ (valor de corte de λ).

Sejam A e B dois pontos simétricos em relação ao plano XZ .

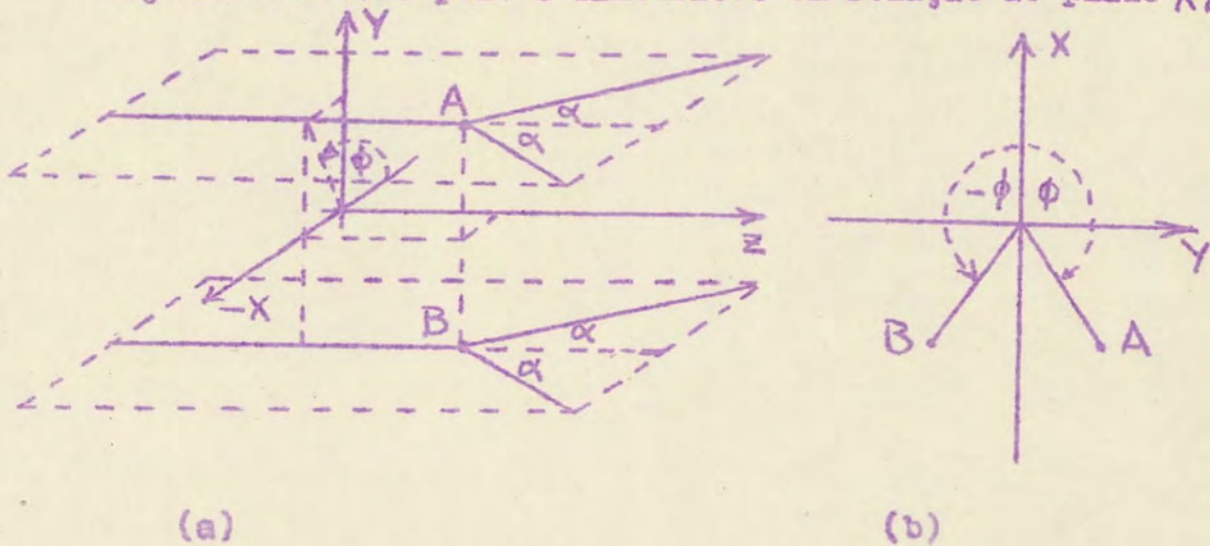


Fig. (A-3)

Pode-se constatar que $D(\vec{\lambda}_A) = D(\vec{\lambda}_B)$, mesmo para experiências coplanares não simétricas, ou seja,

$$D(\lambda, \theta, \phi) = D(\lambda, \theta, -\phi) \quad (\text{A-5})$$

Esta propriedade de simetria é das mais importantes, pois permite que se conclua que a única parcela que contribui na distribuição de momentum distorcida $P_l(\vec{q})$ (II-12) é a que possui $m = 0$. Os demais termos são todos nulos¹⁰⁾ porque $l+m$ par

$$g_l^{i,m}(\vec{q}) = 0 ; m \neq 0. \quad (\text{A-6})$$

Isto pode ser visto expandindo $D(\vec{r})$ em harmônicos esféricos

$$D(\vec{r}) = \sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda, \mu}(\lambda) \frac{Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)}{\lambda^{\mu}} = \sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda, \mu}(\lambda) \frac{Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, -\phi)}{\lambda^{\mu}} \quad (\text{A-7})$$

Logo

$$g_{\ell}^{lm}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} R_{\ell}(\lambda) \frac{Y_{\ell}^m(\theta, \phi)}{\lambda^m} \sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda, \mu}(\lambda) \frac{Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)}{\lambda^{\mu}} \lambda^2 \sin \theta d\lambda d\theta d\phi \quad (\text{A-8a})$$

ou ainda

$$g_{\ell}^{lm}(\vec{q}) = \sum_{\lambda, \mu} C_{\ell, \lambda}^{m, \mu} \int_0^{2\pi} e^{i(m+\mu)\phi} d\phi \quad (\text{A-8b})$$

Esta expressão só é diferente de zero quando $m+\mu=0$.

Por outro lado, considerando a propriedade (A-5), tem-se também

$$g_{\ell}^{lm}(\vec{q}) = \sum_{\lambda, \mu} C_{\ell, \lambda}^{m, \mu} \int_0^{2\pi} e^{i(m-\mu)\phi} d\phi \quad (\text{A-8c})$$

a qual só é diferente de zero para $m-\mu=0$.

Portanto, o único valor de m admissível para que $g_{\ell}^{lm}(\vec{q})$ não seja nula é $m=0$. $m+l$ par.

Há outra propriedade semelhante a (A-5) que é válida somente para experiências coplanares simétricas. Sejam A e B dois pontos situados no plano XZ e simétricos em relação ao eixo Z , conforme a figura abaixo.

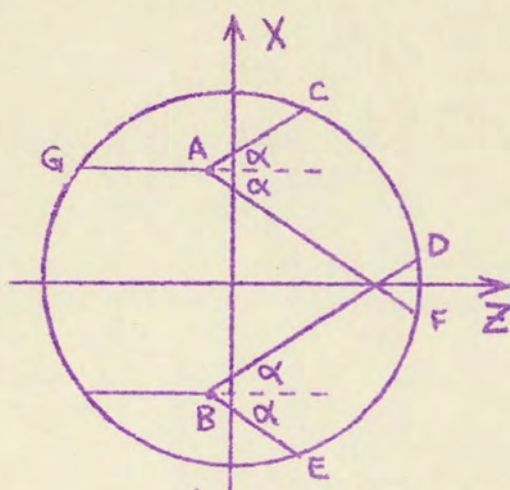


Fig. (A-4)

O raio do círculo é igual ao limite superior de integração da coordenada r ($R = 10,5 \text{ fm}$).

Obtém-se

$$\int_{\vec{r}_G}^{\vec{r}_A} f(r) ds_0 = \int_{\vec{r}_H}^{\vec{r}_B} f(r) ds_0 \quad (\text{A-9a})$$

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_C} f(r) ds_1 + \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_F} f(r) ds_2 = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_D} f(r) ds_1 + \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_E} f(r) ds_2 \quad (\text{A-9b})$$

uma vez que o integrando $f(r)$ possui simetria esférica. Colocando-se estes resultados na expressão (A-4) conclui-se que $D(\vec{r}_A) = D(\vec{r}_B)$. Esta igualdade é válida também para outros pontos simétricos em relação ao plano YZ . Assim,

$$D(r, \theta, \phi) = D(r, \theta, \pi - \phi) \quad (\text{A-10})$$

Desta propriedade pode-se concluir também que a distribuição de momentum só é diferente de zero para $M=0$. Sua grande importância (juntamente com a propriedade (A-5)) está na redução do intervalo efetivo de integração para 1/4 de seu tamanho ori-

ginal. Isto sucede porque nos integrandos das transformadas de Fourier "distorcidas" $g_{\lambda}^{i0}(\vec{r})$ a dependência em relação à variável ϕ está no fator $D(\vec{r})$, o qual é função periódica de ϕ com período igual a $\pi/2$ (de acordo com (A-5) e (A-10)). Basta, portanto, integrar em ϕ de 0 a $\pi/2$ e multiplicar o valor da integral por 4. Isto reduz o tempo de processamento.

Os fatores de distorção $D_j(\vec{r})$ ($j=0,1,2$) possuem também propriedades que devem ser consideradas para fins de tratamento numérico e redução do tempo de integração. Foi devido ao aproveitamento destas propriedades que se adotou o método numérico apresentado no início deste capítulo e para o qual o tipo de distribuição de pontos indicada na Figura (A-1) é particularmente adequada.

Sejam A e B (ou 1 e 2) dois pontos situados no plano XZ e simetricamente dispostos em relação ao eixo X . As propriedades que seguem são válidas também para pontos simétricos em relação ao plano XY .

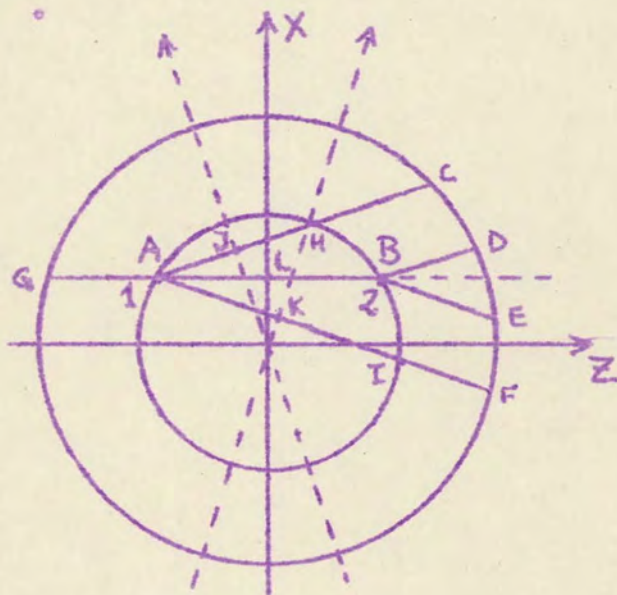


Fig. (A-5)

Os fatores de distorção $D_j(\vec{r})$ são obtidos a partir das seguintes integrais

$$\begin{aligned} DZERO(1) &= \int_{\vec{r}_G}^{\vec{r}_A} f(r') ds_0 & DZERO(2) &= \int_{\vec{r}_G}^{\vec{r}_B} f(r') ds_0 \\ DUM(1) &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_C} f(r') ds_1 & DUM(2) &= \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_D} f(r') ds_1 \quad (A-11) \\ DDIS(1) &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_F} f(r') ds_2 & DDIS(2) &= \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_E} f(r') ds_2 \end{aligned}$$

Considere-se agora as integrais abaixo:

$$\begin{aligned} I_{GA} &= \int_{\vec{r}_G}^{\vec{r}_A} f(r') ds_0 & I_{AL} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_L} f(r') ds_0 \\ I_{JH} &= \int_{\vec{r}_J}^{\vec{r}_H} f(r') ds_2 & I_{HC} &= \int_{\vec{r}_H}^{\vec{r}_C} f(r') ds_1 \quad (A-12) \\ I_{KI} &= \int_{\vec{r}_K}^{\vec{r}_I} f(r') ds_2 & I_{IF} &= \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_F} f(r') ds_2 \end{aligned}$$

Analisando a geometria associada a esta situação (Figura (A-5)) e considerando a simetria esférica da função $f(r)$, é possível concluir que

$$\begin{aligned} DZERO(1) &= I_{GA} & DZERO(2) &= DZERO(1) + 2 \cdot I_{AL} \\ DUM(1) &= 2 \cdot I_{JH} + I_{HC} & DUM(2) &= I_{IF} \quad (A-13) \\ DDIS(1) &= 2 \cdot I_{KI} + I_{IF} & DDIS(2) &= I_{HC} \end{aligned}$$

Outra propriedade importante é que $D_0(\vec{r})$ independe da coordenada ϕ .

Os valores das transformadas de Fourier "distorcidas" dos estados $1s$ ($l=0$) e $1p$ ($l=1$) foram obtidos pela seguinte expres

são:

$$g_{\ell}^{10}(\vec{q}) = V \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \exp(I(\vec{\lambda}_n)) \left\{ \cos(R(\vec{\lambda}_n) - \vec{q} \cdot \vec{\lambda}_n) + i \sin(R(\vec{\lambda}_n) - \vec{q} \cdot \vec{\lambda}_n) \right\} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_{\ell}^0(r_n, \theta_n, \phi_n) r_n^2 \sin \theta_n \right] \quad (\text{A-14})$$

onde $V = 2\pi^2 R$ (volume do intervalo de integração) e

$$I(\vec{\lambda}_n) = \sum_{j=0}^2 \bar{A}_j^I(0) \frac{1}{k_j} \int f(r_j) ds_j \\ R(\vec{\lambda}_n) = \sum_{j=0}^2 \bar{A}_j^R(0) \frac{1}{k_j} \int f(r_j) ds_j \quad (\text{A-15})$$

Os testes de convergência de todos os casos, nos dois grupos de cálculos, poço quadrado e oscilador harmônico, indicaram que as integrais convergiam para $N = 3024$ pontos, com coordenadas (r_n, θ_n, ϕ_n) distribuídas da seguinte maneira:

- 6 valores de ϕ no intervalo $0 < \phi < \pi/2$
- 12 valores de θ no intervalo $0 < \theta < \pi$
- 42 valores de r no intervalo $0 f_m < r < 10,5 f_m$

A comparação com os valores exatos, nos casos sem distorção, mostrou que a precisão das integrais calculadas desta maneira era de 1%.

2. Integrais de linha

A função $f(r)$ (II-18) é esféricamente simétrica, o que permite escrever um programa genérico de integração de linha para obter os três fatores de distorção $D_j(\vec{\lambda})$ ($j = 0, 1, 2$) em qualquer ponto da distribuição uniforme no intervalo de inte

gração.

Seja B um ponto de coordenadas $(r_0, \theta_0, 0) \equiv (x_0, 0, z_0)$ situado no plano XZ .

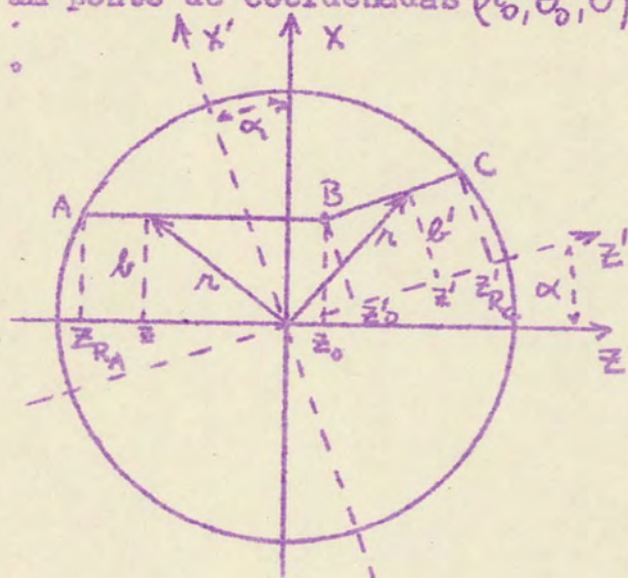


Fig. (A-6)

Na obtenção dos fatores $D_j(\vec{r}_B)$ ($j=0,1,2$) é necessário resolver uma integral do tipo:

$$\int_a^c f(\sqrt{b^2 + s_j^2}) ds_j \quad (A-16)$$

onde as constantes a , b e c são dadas em função das coordenadas do ponto B e do ângulo α .

Para $D_0(\vec{r}_B)$ ($j=0$):

$$s_0 = z ; b = \sqrt{r_0^2 - z_0^2} = x_0$$

$$a = z_{RA} = \sqrt{R^2 - x_0^2} ; c = z_0 \quad (A-17)$$

Para $D_1(\vec{r}_B)$ ($j=1$):

$$s_1 = z' ; b' = \sqrt{r_0^2 - z_0'^2} = x_0' = x_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha$$

$$a = z_0' = x_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha ; c = z_{Rc}' = \sqrt{R^2 - b'^2}$$

No caso de $D_2(\vec{r}_B)$ ($j=2$) as constantes são dadas pelas mesmas expressões correspondentes a $D_1(\vec{r}_B)$, porém, com valor de α negativo.

No caso mais geral, em que a coordenada ϕ (ou $y = R \sin \theta \cdot \sin \phi$) do ponto onde se deseja calcular os fatores de distorção é não nula, a expressão da integral de linhas estabelecida acima é igualmente válida.

Basta escrever, portanto, um programa genérico para uma integral do tipo (A-16), onde as constantes a , b e c sejam dados de entrada, para efetuar todas as integrais de linha necessárias na obtenção de $D_j(\vec{r})$ ($j=0,1,2$) em qualquer ponto do intervalo de integração.

É da maior importância que estas integrais sejam resolvidas, para uma dada precisão, o mais rapidamente possível, pois são elas que consomem a maior parte do tempo de processamento.

O método de integração numérica adotado foi o de Simpson com tabelas de Romberg associadas (uma adaptação do método de Romberg apresentado na referência (31)).

Apresentamos abaixo alguns resultados de uma das integrais de linha.

N=1							
N=1	_____	N=2					
N=2	<u>8,212010</u>	N=1	<u>8,290997</u>	N=3			
N=3	<u>7,941337</u>	N=2	<u>7,923993</u>	N=1	<u>7,917455</u>	N=4	
N=4	<u>7,936975</u>	N=3	<u>7,936685</u>	N=2	<u>7,936897</u>	N=1	<u>7,936973</u>
N=5	<u>7,936742</u>	N=4	<u>7,936727</u>	N=3	<u>7,936727</u>	N=2	<u>7,936727</u>
N=6	<u>7,936728</u>	N=5	<u>7,936727</u>	N=4	_____	N=3	_____
N=7	_____					N=2	_____

A primeira coluna ($M=1$) corresponde aos resultados das diversas iterações pelo método de Simpson. As colunas $M=2, 3, 4$ e 5 são tabelas de Romberg associadas.

Neste exemplo, com precisão de cinco casas decimais ($PREC = 0,00001$), a integração pararia em $M=3, N=3$. Com o método de Simpson puro, sem tabelas de Romberg associadas, a integração provavelmente pararia na iteração ($M=1, N=7$), com aproximadamente 4 vezes mais tempo de cálculo.

Apresentamos a seguir os resultados dos cálculos de $g_0^{\prime 0}(\vec{r})$ e $g_1^{\prime 0}(\vec{r})$ para o caso "consistente" de poço quadrado, efetuados com a distribuição uniforme de $N=64$ pontos, com ângulo de emergência $\alpha = 30^\circ$ e $R = 6$ fm.

SIMPSON

PREC	$R_2 g_0^{\prime 0}(\vec{r})$	$I_m g_0^{\prime 0}(\vec{r})$	$R_2 g_1^{\prime 0}(\vec{r})$	$I_m g_1^{\prime 0}(\vec{r})$	Tempo
0,00001	0,02985637	0,02420345	0,00046824	0,02553085	280 seg
0,0001	0,02985642	0,02420340	0,00046831	0,02553075	165 seg
0,001	0,02985648	0,02420298	0,00046828	0,02553071	90 seg
0,01	0,02987013	0,02419487	0,00047261	0,02551700	52 seg

SIMPSON COM TABELAS DE ROMBERG

PREC	$R_2 g_0^{\prime 0}(\vec{r})$	$I_m g_0^{\prime 0}(\vec{r})$	$R_2 g_1^{\prime 0}(\vec{r})$	$I_m g_1^{\prime 0}(\vec{r})$	Tempo
0,00001	0,02985638	0,02420345	0,00046826	0,02553085	89 seg
0,0001	0,02985651	0,02420345	0,00046837	0,02553069	72 seg
0,001	0,02985649	0,02420279	0,00046797	0,02553046	47 seg
0,01	0,02987013	0,02419486	0,00047261	0,02551702	43 seg

Os cálculos apresentados neste trabalho foram todos realizados com $PREC = 0,001$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. M.A.Preston, Physics of the Nucleus, Addison-Wesley (1962).
A.Bohr, B.R.Mottelson, Nuclear Structure, W.A.Benjamin Inc. (1969).
2. M.G.Mayer and J.H.O.Jensen, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, John Wiley (1955).
3. Th.A.J.Maris, P.Hillman, H.Tyrén, Nucl.Phys. 7 (1958) 1.
4. H.Tyrén, Th.A.J.Maris and P.Hillman, Nuovo Cimento 6 (1957) 1507.
H.Tyrén, P.Hillman and Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. 7 (1958) 10,
P.Hillman, H.Tyrén, Th.A.J.Maris, Phys.Rev.Lett. 5(1960)107.
5. G.F.Chew, Phys.Rev. 80 (1950) 196.
6. R.Serber, Phys.Rev. 72 (1947) 1114.
7. O.Chamberlain and E.Segrè, Phys.Rev. 87 (1952) 81.
J.B.Gladis, W.N.Hess and B.J.Mayer, Phys.Rev.87 (1952)425.
8. G.Jacob and Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. 31 (1962) 139.
9. U.Amaldi Jr., G.Campos Venuti, G.Cortellesa, C.Fronterotta,
A.Reale, P.Salvadori and P.Hillman, Phys.Rev.Lett 13 (1964) 341.
10. Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. 9 (1958/59) 577.
11. G.Jacob and Th.A.J.Maris, Rev.Mod.Phys. 38 (1966) 121.
12. G.P.McCauley and G.E.Brown, Proc.Phys.Soc. (London) 71(1958) 893.
13. L.I.Schiff, Phys.Rev. 103 (1956) 443.
14. Y.Sakanoto, Phys.Letters 1 (1962) 256.
15. A.Johansson and Y.Sakanoto, Nucl.Phys. 42 (1963) 625.
16. T.Berggren and G.Jacob, Nucl.Phys. 47 (1963) 481.
17. H.Tyrén, S.Kullander, O.Sundberg, R.Ramchandran, P.Isacsson
and T.Berggren, Nucl.Phys. 79 (1966) 321.
18. V.E.Horecovitz, G.Jacob, Th.A.J.Maris, C.Schneider, Revista
Brasileira de Física 1 (1971) 43.

19. V.S.Barashenkov and V.M.Maltsev, Fortshr.Physik 9 (1961)549.
20. V.Herscovitz, G.Jacob and Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. ~~A109~~
(1968) 478.
21. Victoria Elnecape Herscovitz, Tese para a obtenção do título de Doutor em Ciências, Faculdade de Filosofia da UFRGS (1969).
22. V.E.Herscovitz, Nucl.Phys. ~~A161~~ (1971) 321.
23. P.Hodgson, Compt.Rend.Congr.Intern. de Phys.Nucl., Paris 1
(1964) 257.
24. A.K.Kernan, H.McManus and R.M.Thaler, Ann.Phys. (N.Y.) 8
(1959) 551.
25. K.L.Lim and I.E.McCarthy, Phys.Rev.Letters 10 (1963) 529.
K.L.Lim and I.E.McCarthy, Phys.Rev. 133 (1964) B1006.
26. K.M.Watson, Phys.Rev. 89 (1953) 575.
W.B.Riesenfeld, K.M.Watson, Phys.Rev. 102 (1956) 1157.
27. Gerhard Jacob, Tese para o concurso de Cátedra de Física Teórica e Física Superior, Faculdade de Filosofia da UFRGS (1964).
28. R.Herman and R.Hofstader, High energy electron scattering tables (Stanford University Press) Stanford (1960) pg. 62.
29. B.Gottschalk and K.Strauch, Comunicação pessoal a T.Berggren¹⁶⁾ e G.Jacob²⁷⁾.
30. J.M.Hammersley, D.C.Handscomb, Monte Carlo Methods, John Wiley (1964).
31. T.R.McCalla, Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming, John Wiley (1967).