

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Iuri Carraro Foletto**

**DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMA  
COMPUTACIONAL PARA O PROJETO DE LAJES  
MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO**

Porto Alegre  
dezembro 2011

**IURI CARRARO FOLETTTO**

**DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMA  
COMPUTACIONAL PARA O PROJETO DE LAJES  
MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

**Orientador: Américo Campos Filho**

Porto Alegre  
dezembro 2011

**IURI CARRARO FOLETTO**

**DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMA  
COMPUTACIONAL PARA O PROJETO DE LAJES  
MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 16 de dezembro de 2011

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da USP  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila (UFRGS)**  
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho aos meus pais, Geraldo e Sônia,  
e à minha irmã, Kelly, pelo constante apoio,  
incentivo e compreensão.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, ao Prof. Américo Campos Filho, orientador deste trabalho, pelo incentivo, disponibilidade e comprometimento em transmitir seu conhecimento.

À Prof. Carin Maria Schmitt, por sua dedicação e pelo recorrente aperfeiçoamento deste trabalho através de suas valiosas críticas e sugestões.

Aos demais professores da Escola de Engenharia por sua competência e empenho, e à UFRGS, por nos possibilitar um ensino de excelência.

Aos meus pais, Geraldo e Sônia, e à minha irmã Kelly, pelo carinho, compreensão e incentivo ao longo de toda minha vida.

Aos meus colegas e amigos, pelo auxílio prestado durante a realização deste trabalho e por todos os momentos alegres compartilhados dentro e fora da faculdade.

Ao grupo *CTE*, pelos ensinamentos da prática profissional e oportunidades de aprendizado.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma ou outra, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Não há nada como o sonho para criar o futuro.  
Utopia hoje, carne e osso amanhã.

*Victor Hugo*

## RESUMO

Este trabalho tem como finalidade a sistematização e automatização do projeto de lajes maciças em concreto armado através de uma rotina computacional. A utilização da linguagem de programação *Visual Basic* permite a utilização do *software* em ambiente *Windows* por meio de uma interface gráfica bastante prática e amigável. A partir dos dados de entrada fornecidos pelo usuário, o programa faz o dimensionamento e o detalhamento de lajes usuais em edifícios de concreto armado, tendo como base as recomendações da NBR 6118:2007 – Projeto de Estruturas de Concreto: procedimento. A determinação dos momentos fletores depende da relação entre os vãos da laje retangular em estudo. Para as lajes armadas em uma direção, o dimensionamento é realizado por analogia a uma viga, considerando uma faixa de largura unitária na direção do menor vão. O cálculo para as lajes armadas em duas direções, por considerar a flexão biaxial das mesmas, é mais complexo e exige o emprego do método elástico ou plástico. Sabe-se que o método plástico é mais adequado para o estado limite último (ELU) e o método elástico para o estado limite de serviço (ELS). Para efeitos de comparação, além do método plástico através teoria das charneiras plásticas, o dimensionamento em ELU também é efetuado pelo método elástico através do método de Marcus. Os fundamentos e formulários de ambas as teorias foram demonstrados neste trabalho. Também foi apresentado um procedimento para a verificação do estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF), através da verificação das flechas nas lajes. Ao automatizar e validar o processo de cálculo, admite-se que o *software* atenda sua proposta e seja viável no ambiente acadêmico e profissional.

Palavras-chave: Lajes Maciças de Concreto Armado. Análise Elástica. Análise Plástica. Teoria das Charneiras Plásticas. Método de Marcus.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas de pesquisa.....	20
Figura 2 – Dimensões e plano médio de uma laje de concreto.....	22
Figura 3 – Laje armada em cruz.....	23
Figura 4 – Laje armada em uma direção.....	23
Figura 5 – Plano médio deformado conforme teoria de Kirchhoff.....	26
Figura 6 – Esforços em um elemento de placa.....	26
Figura 7 – Placa com várias condições de contorno.....	29
Figura 8 – Laje simplesmente apoiada nos quatro cantos.....	31
Figura 9 – Condições de contorno das lajes retangulares.....	33
Figura 10 – Comportamento rígido-plástico da laje.....	35
Figura 11 – Domínios 2 e 3 de deformações nas seções da laje.....	36
Figura 12 – Fases de comportamento das lajes subarmadas.....	36
Figura 13 – Exemplificação das charneiras plásticas.....	37
Figura 14 – Materiais elasto-plásticos e rígido-plásticos.....	38
Figura 15 – Exemplos de configurações possíveis.....	39
Figura 16 – Configurações de ruína de lajes com contorno poligonal e curvilíneo.....	40
Figura 17 – Momentos de engastamento.....	43
Figura 18 – Laje com armadura ortótropa.....	46
Figura 19 – Tipos de vinculação entre lajes adjacentes.....	48
Figura 20 – Vão efetivo.....	49
Figura 21 – Momentos fletores nas lajes armadas em uma direção.....	51
Figura 22 – Seção transversal para o cálculo das armaduras das lajes.....	53
Figura 23 – Janela de abertura do <i>software</i> LajeCalc.....	63
Figura 24 – Aba do <i>software</i> LajeCalc: <b>Dados da Laje</b> .....	64
Figura 25 – Janela do <i>software</i> LajeCalc: <b>Escolha da Vinculação</b> para lajes armadas em uma direção.....	66
Figura 26 – Janela do <i>software</i> LajeCalc: <b>Escolha da Vinculação</b> para lajes armadas em duas direções.....	66
Figura 27 – Janela do <i>software</i> LajeCalc: <b>Carregamento</b> .....	67
Figura 28 – Janela do <i>software</i> LajeCalc: <b>Verificação de Dados</b> .....	68
Figura 29 – Aba do <i>software</i> LajeCalc: <b>Esforços</b> .....	69
Figura 30 – Aba do <i>software</i> LajeCalc: <b>Armadura Positiva</b> .....	70
Figura 31 – Aba do <i>software</i> LajeCalc: <b>Armadura Negativa</b> .....	71



Figura 32 – Aba do <i>software</i> LajeCalc: <b>Detalhamento</b> .....	72
Figura 33 – Aba do <i>software</i> LajeCalc: <b>Relatório</b> .....	73
Figura 34 – Exemplo 1: laje armada em uma direção.....	74
Figura 35 – Exemplo 1: detalhamento.....	75
Figura 36 – Exemplo 1: memória de cálculo.....	75
Figura 37 – Exemplo 2: laje armada em duas direções.....	76
Figura 38 – Exemplo 2: detalhamento.....	76
Figura 39 – Exemplo 2: memória de cálculo.....	77
Figura 40 – Exemplo 3: detalhamento.....	78
Figura 41 – Exemplo 3: memória de cálculo.....	78

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Coeficientes para o cálculo dos momentos fletores pelo método de Marcus.....	34
Quadro 2 – Classes de agressividade ambiental.....	54
Quadro 3 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal.....	54
Quadro 4 – Valores mínimos para amaduras passivas aderentes.....	55
Quadro 5 – Taxas mínimas de armadura de flexão.....	56
Quadro 6 – Valores do coeficiente $\Psi_2$ .....	57
Quadro 7 – Valores de $\kappa$ para lajes armadas em uma direção.....	58
Quadro 8 – Valores de $\kappa$ para lajes armadas em duas direções.....	59
Quadro 9 – Valores do coeficiente $\zeta$ em função do tempo.....	60
Quadro 10 – Limites para deslocamentos.....	61
Quadro 11 – Reações de apoio em lajes armadas em duas direções.....	62

## LISTA DE SÍMBOLOS

$h$  – espessura total da laje

$l_x$  – maior dimensão da laje

$l_y$  – menor dimensão da laje

$w$  – deslocamento vertical (flecha)

$m_x$  – momento fletor na direção  $x$  (em torno do eixo  $y$ )

$m_y$  – momento fletor na direção  $y$  (em torno do eixo  $x$ )

$m_{xy}$  – momento torsor

$v_x$  – esforço cortante na direção  $x$

$v_y$  – esforço cortante na direção  $y$

$D$  – rigidez à flexão da placa

$E$  – módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$\nu$  – coeficiente de Poisson do concreto (normalmente,  $\nu \approx 1/6$ )

$p$  – carga uniforme total na laje

$I$  – momento de inércia da faixa de largura unitária

$\lambda$  – relação entre o menor e o maior vão

$k$  – coeficiente que depende da relação entre o menor e o maior vão

$M_x$  – momento fletor máximo na direção  $x$  (em torno do eixo  $y$ )

$M_y$  – momento fletor máximo na direção  $y$  (em torno do eixo  $x$ )

$M_{x0}$  – momento fletor corrigido na direção  $x$  (em torno do eixo  $y$ )

$M_{y0}$  – momento fletor corrigido na direção  $y$  (em torno do eixo  $x$ )

$C$  – coeficiente que depende das condições de contorno e relação entre os vãos da laje

$\alpha$  – coeficiente que depende das condições de apoio nas duas direções

$x$  – altura da linha neutra

$d$  – altura útil da laje

$T_e$  – trabalho das forças externas

$T_i$  – trabalho das forças internas

$m_i$  – momento de plastificação positivo por unidade de comprimento

$l_i$  – comprimento das charneiras positivas

$\theta_i$  – ângulo de rotação das charneiras positivas

$m_i'$  – momento de plastificação negativo por unidade de comprimento

$l_i'$  – comprimento das charneiras negativas

$\theta_i'$  – ângulo de rotação das charneiras negativas

$P_j$  – cargas concentradas

$f_j$  – deslocamento das cargas concentradas

$f$  – deslocamento das cargas distribuídas

$dA$  – elemento de área da laje

$m'$  – momento fletor negativo nos engastes

$i$  – grau de engastamento

$m$  – momento fletor no vão

$H$  – força concentrada no canto

$l_{xr}$  – maior dimensão reduzida da laje

$l_{yr}$  – menor dimensão reduzida da laje

$\mu$  – coeficiente de ortotropia

$l_{yr}^*$  – menor dimensão reduzida, corrigida para lajes ortótropas

$l_{ef}$  – vão efetivo

$l_0$  – vão livre (distância entre as faces internas dos apoios)

$a_1$  – menor valor entre  $t_1/2$  e  $0,3h$

$a_2$  – menor valor entre  $t_2/2$  e  $0,3h$

$t_1$  – largura do primeiro apoio

$t_2$  – largura do segundo apoio

$q$  – parcela das cargas acidentais atuantes na laje

$g$  – parcela das cargas permanentes atuantes na laje

$b$  – largura da seção retangular

$\phi$  – diâmetro das barras

$c$  – cobrimento nominal das armaduras

$A_s$  – área da seção transversal da armadura longitudinal de tração

$f_{cd}$  – resistência de cálculo à compressão do concreto

$f_{yd}$  – resistência de cálculo ao escoamento do aço da armadura passiva

$M_d$  – momento fletor de cálculo

$\rho_s$  – taxa de armadura de flexão

$\rho_{min}$  – taxa mínima de armadura de flexão

$F_{d,ser}$  – valor de cálculo das ações para combinações de serviço

$F_{gi,k}$  – valor característico das ações permanentes

$\Psi_2$  – fator de redução de combinação quase permanente para ELS

$F_{qj,k}$  – valor característico das ações variáveis

$w_{t=0}$  – flecha imediata

$\kappa$  – coeficiente que depende da vinculação e da relação entre os vãos da laje

$E_{cs}$  – módulo de elasticidade secante do concreto

$I_{eq}$  – momento de inércia da seção equivalente

$w_{t=\infty}$  – flecha de longa duração

$\alpha_f$  – parâmetro para considerar as deformações por fluência do concreto

$\xi$  – coeficiente em função do tempo

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>2 DIRETRIZES DA PESQUISA</b> .....	18
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA.....	18
2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO.....	18
<b>2.2.1 Objetivo principal</b> .....	18
<b>2.2.2 Objetivos secundários</b> .....	18
2.3 PRESSUPOSTO.....	19
2.4 DELIMITAÇÕES.....	19
2.5 LIMITAÇÕES.....	19
2.6 DELINEAMENTO.....	19
<b>3 LAJES</b> .....	22
3.1 TEORIA DE FLEXÃO DAS PLACAS.....	25
3.2 MÉTODO DE MARCUS.....	30
3.3 TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS.....	34
<b>3.3.1 Fases de comportamento</b> .....	36
<b>3.3.2 Hipóteses de cálculo</b> .....	37
<b>3.3.3 Configurações das charneiras</b> .....	38
<b>3.3.4 Processos de cálculo</b> .....	40
3.3.4.1 Processo do equilíbrio.....	40
3.3.4.2 Processo da energia.....	41
<b>3.3.5 Fórmulas para o cálculo de lajes retangulares</b> .....	42
3.3.5.1 Lajes isótropas.....	43
3.3.5.2 Lajes ortótropas.....	45
<b>4 DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO DE LAJES</b> .....	48
4.1 CÁLCULO DAS LAJES ARMADAS EM UMA DIREÇÃO.....	51
4.2 CÁLCULO DAS LAJES ARMADAS EM DUAS DIREÇÕES.....	52
4.3 DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS.....	53
4.4 VERIFICAÇÃO DA FLECHA.....	57
4.5 REAÇÕES DE APOIO.....	61
<b>5 PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O PROJETO DE LAJES MACIÇAS EM CONCRETO ARMADO</b> .....	63
5.1 ENTRADA DE DADOS.....	64
5.2 CÁLCULO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES.....	68

5.3 DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS.....	70
5.4 DETALHAMENTO.....	72
5.5 RELATÓRIO.....	73
5.6 ALGUNS EXEMPLOS.....	74
<b>5.6.1 Exemplo 1: laje armada em uma direção.....</b>	<b>74</b>
<b>5.6.2 Exemplo 2: laje armada em duas direções (método plástico).....</b>	<b>76</b>
<b>5.6.3 Exemplo 3: laje armada em duas direções (método elástico).....</b>	<b>77</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>79</b>
REFERÊNCIAS.....	81





## 1 INTRODUÇÃO

O projeto estrutural consiste no dimensionamento de estruturas de forma econômica e segura, visando garantir a segurança contra a ruptura, além de evitar que deformações excessivas ou fissurações venham a comprometer sua utilização. Assim, o projeto busca conferir às estruturas não só uma capacidade resistente suficiente para resistir às ações que será submetida, mas também uma rigidez adequada para desempenhar suas funções.

Para atingir estes objetivos, os procedimentos de projeto devem adotar modelos que reproduzam de forma mais realista possível o comportamento da estrutura. Especificamente no caso de lajes, existem dois grandes grupos de métodos de cálculo para a determinação das solicitações: o clássico e o da ruptura. O método clássico, também conhecido como método elástico, é baseado na teoria da elasticidade e admite que o material seja homogêneo, isótropo e se comporte linearmente. Já o método da ruptura, ou método plástico, é baseado na teoria da plasticidade e admite que o material se comporte como um corpo rígido-plástico perfeito (MONTROYA et al., 2000, p. 539-540).

Cada método de cálculo tem sua aplicabilidade e deve-se escolher o mais apropriado dependendo da finalidade desejada. O cálculo em regime elástico é adequado para a análise da estrutura em serviço, porém o mesmo não fornece indicação precisa de segurança, já que na ocasião da ruína o material apresenta um comportamento plástico, contrariando as hipóteses da teoria da elasticidade. Logo, para o dimensionamento de lajes no estado limite último, recomenda-se utilizar o cálculo em regime plástico através da teoria das charneiras plásticas.

Segundo Pinheiro (1988, p. 5), os métodos de cálculo baseados na teoria da plasticidade já haviam sido apresentados por Bach, Mörsch e Suenson, quando, em 1921, o dinamarquês Ingerslev propôs a teoria das charneiras plásticas. Esta foi bastante desenvolvida e generalizada pelo, também dinamarquês, Johansen e, por isso, a ele é atribuída. A teoria das charneiras plásticas veio a ter grande impulso no Brasil somente depois de 1960, com a tradução dos trabalhos de Johansen e os expressivos trabalhos de Langendonck.

Considerando esses elementos, o presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um programa computacional para a automatização do cálculo e detalhamento de lajes retangulares

maciças em concreto armado, submetidas a cargas uniformemente distribuídas. Para tanto, propõe-se a utilização do método plástico, através da teoria das charneiras plásticas, para o dimensionamento da estrutura e, do método elástico, para a verificação da flecha, de forma a garantir as condições de utilização da mesma.

Pretende-se, ainda, disponibilizar esta ferramenta simples, porém funcional, para projetistas estruturais e alunos de graduação em Engenharia Civil, tendo em vista a complexidade dos programas existentes nos escritórios de projetos, geralmente voltados para o cálculo do edifício em sua totalidade. Por se tratar de um programa de cunho também acadêmico, será incluído o cálculo elástico das solicitações pelo método de Marcus para que se possa obter uma comparação entre os resultados e verificar os benefícios econômicos, através do consumo de aço, da análise plástica.

O presente trabalho se divide em seis capítulos, sendo este, referente à introdução o primeiro deles. No capítulo 2, são apresentadas as diretrizes da pesquisa, incluindo a questão, os objetivos, o pressuposto, as delimitações, as limitações e o delineamento das etapas que envolvem a realização do estudo. O capítulo 3 se destina à descrição dos diferentes métodos de cálculo dos esforços solicitantes nas lajes, especialmente pela teoria de flexão de placas, pelo método de Marcus e pela teoria das charneiras plásticas. No capítulo 4 são abordados os tópicos pertinentes ao dimensionamento e ao detalhamento das lajes segundo a normalização vigente, tais como os tipos de vinculação e de carregamento, o cálculo das armaduras em uma e duas direções, a verificação da flecha e as reações de apoio. O quinto capítulo objetiva apresentar o programa desenvolvido, desde a etapa da entrada de dados da laje até o detalhamento da mesma. É feita também uma análise geral do programa e uma comparação do consumo de aço entre os métodos de cálculo. Por fim, o sexto e último capítulo serve para o fechamento do trabalho de conclusão, apresentando as considerações finais.

## 2 DIRETRIZES DA PESQUISA

Para a elaboração deste trabalho foram adotadas as seguintes diretrizes.

### 2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa deste trabalho é: como automatizar o projeto de lajes maciças em concreto armado através de uma rotina computacional?

### 2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Os objetivos do trabalho estão classificados em principal e secundários e são apresentados nos próximos itens.

#### 2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal deste trabalho é a elaboração de um *software* que, por meio dos parâmetros definidos pelo engenheiro, faça o projeto de lajes maciças em concreto armado através do método plástico para o ELU e, do método elástico, para o ELS, utilizando o *Visual Basic* como linguagem de programação.

#### 2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários deste trabalho são:

- a) descrição do cálculo plástico pelo método das charneiras plásticas;
- b) descrição do cálculo elástico pelo método de Marcus;
- c) comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos de cálculo: plástico e elástico.

## 2.3 PRESSUPOSTO

Como pressuposto básico da pesquisa, as recomendações da NBR 6118:2007 – Projeto de Estruturas de Concreto: procedimento –, relativas ao dimensionamento e detalhamento de lajes maciças em concreto armado, são consideradas válidas. Também são admitidas como válidas as considerações da NBR 6120:1980 – Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

A pesquisa está delimitada ao estudo e desenvolvimento de uma ferramenta computacional que faça o dimensionamento e detalhamento de lajes em edifícios de concreto armado.

## 2.5 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho:

- a) consideração apenas de lajes maciças com geometria retangular;
- b) carregamento composto exclusivamente por cargas uniformemente distribuídas;
- c) uso de uma única linguagem de programação, o *Visual Basic*.

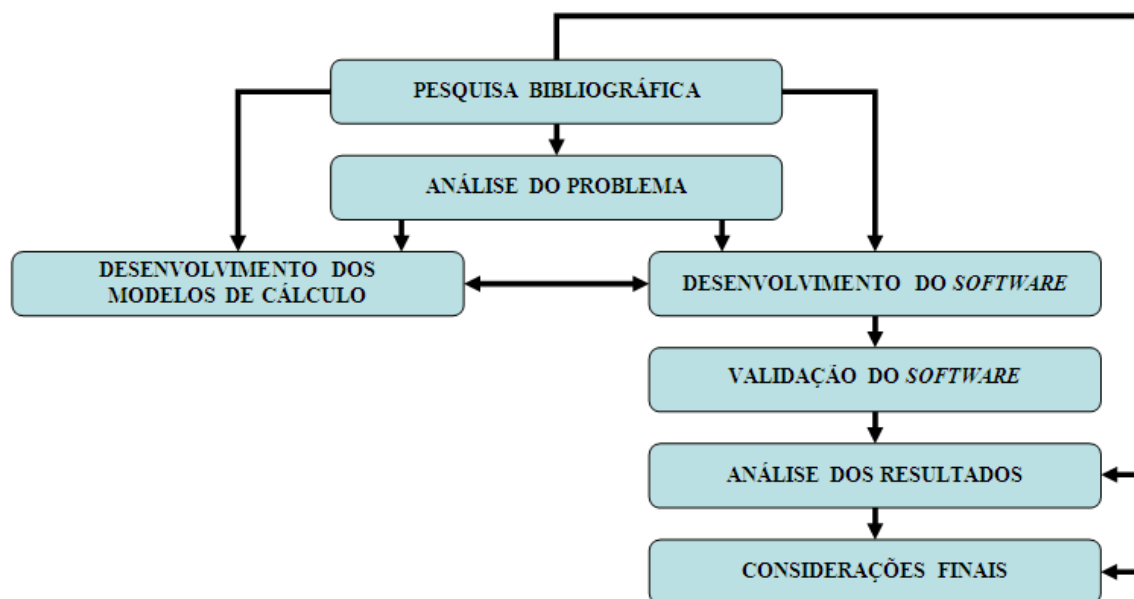
## 2.6 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) análise do problema;
- c) desenvolvimento dos modelos de cálculo;
- d) desenvolvimento do software;
- e) validação do software;
- f) análise dos resultados;
- g) considerações finais.

A sequência das etapas pode ser visualizada pelo diagrama esquematizado na figura 1.

Figura 1 – Etapas de pesquisa



(fonte: elaborado pelo autor)

A **pesquisa bibliográfica** teve por objetivo desenvolver um embasamento teórico através de uma coleta de dados relativos ao problema em questão. Para tanto, foi feito o uso de normas e bibliografia técnica, tais como livros, artigos científicos, trabalhos de conclusão, teses e dissertações. Esta etapa desenvolveu-se ao longo de todo o trabalho, porém de forma mais intensa nos meses iniciais. Através da pesquisa bibliográfica, foi possível obter os dados necessários para o desenvolvimento do método de cálculo e a garantia da validade das considerações finais.

A etapa seguinte foi a **análise do problema** e consistiu na sua compreensão e posterior identificação dos fatores envolvidos na resolução do mesmo. Nesta etapa, definiram-se quais eram as variáveis necessárias para a execução do *software* e quais deveriam ser fornecidas pelo usuário na entrada de dados.

Posteriormente, foi realizado o **desenvolvimento dos modelos de cálculo**, que teve por finalidade a elaboração dos fluxogramas que descrevem o dimensionamento e o detalhamento de lajes maciças em concreto armado. Para tanto, as informações colhidas nas etapas anteriores foram organizadas de forma a otimizar e facilitar a elaboração do *software*.

De forma paralela ao desenvolvimento do modelo de cálculo, realizou-se o **desenvolvimento do software** propriamente dito. Basicamente, esta etapa consistiu na tradução do algoritmo

obtido anteriormente para a linguagem de programação adotada, o *Visual Basic*. Além disso, foi criada a interface gráfica do programa, abrangendo desde a entrada de dados até a apresentação dos resultados.

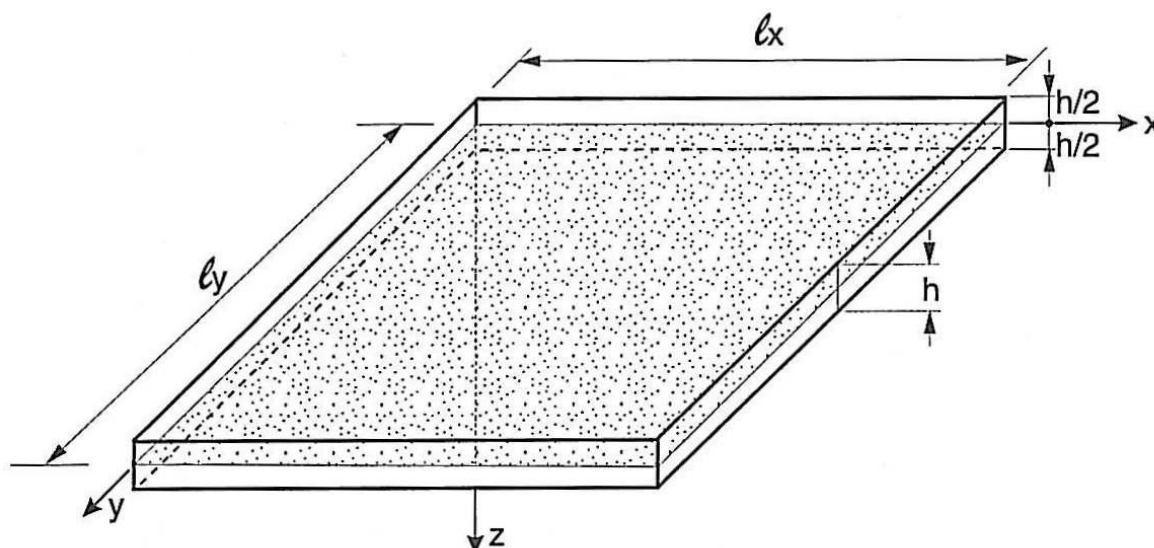
A **validação do software** serviu para comprovar a eficiência dos resultados apresentados pelo mesmo. Para isso, tais resultados foram comparados com aqueles fornecidos pelo cálculo manual. Também foi feita uma revisão de todo o algoritmo, objetivando reduzir ao máximo a possibilidade de erros que possam ocorrer durante a utilização do *software*.

A etapa posterior foi a **análise dos resultados**, que consistiu numa avaliação geral do *software* desenvolvido. Por fim, foram feitas as **considerações finais** para o fechamento deste trabalho de diplomação.

### 3 LAJES

A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 75) define placas como “Elementos de superfície plana sujeitos principalmente a ações normais a seu plano.”. Em outras palavras, placas são estruturas limitadas por dois planos paralelos, cuja espessura de separação  $h$  é bastante inferior às suas outras dimensões ( $l_x$  e  $l_y$ ), ou seja,  $h/l_x$  e  $h/l_y \ll 1$  (figura 2). Pressupõe-se que as cargas atuantes sobre o plano médio da placa sejam normais ao mesmo. Nas estruturas em concreto, as placas são comumente chamadas de lajes.

Figura 2 – Dimensões e plano médio de uma laje de concreto



(fonte: FUSCO, 1995, p. 237)

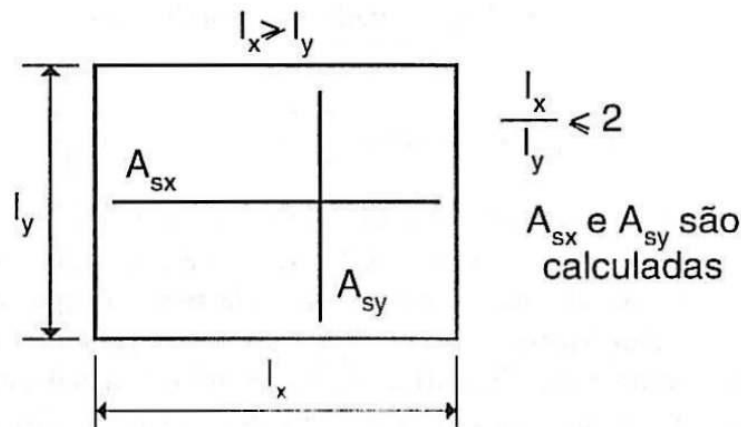
As lajes representam os pisos nas estruturas correntes e têm como função básica a transmissão das cargas das edificações às vigas. Outra utilização das lajes é na distribuição das cargas horizontais entre os elementos estruturais de contraventamento, além de funcionarem como mesas de compressão das vigas T (ARAÚJO, 2003, p. 1).

Pode-se classificar as lajes segundo sua geometria (retangular, circular, etc.), segundo a vinculação das bordas (apoiada, engastada ou livre), segundo os tipos de apoio (pontual ou linear) e segundo o carregamento (cargas pontuais, uniformes, triangulares, etc.). Para o caso específico de lajes retangulares, Araújo (2003, p. 7) as classifica em armadas em cruz e em



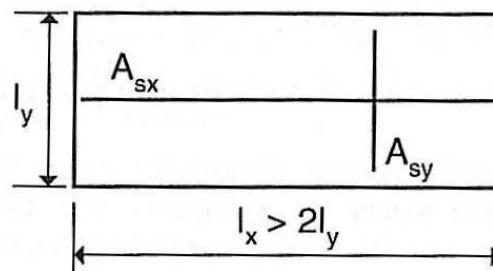
uma direção, de acordo com a relação entre os seus vãos. As lajes armadas em cruz, ou em duas direções (figura 3), são aquelas cuja relação entre o maior e o menor vão é inferior a 2 e, portanto, os momentos fletores em ambas as direções são importantes e devem ser calculados. Caso contrário, as lajes serão armadas em uma direção (figura 4) e assim o momento fletor na direção do vão maior não precisará ser calculado.

Figura 3 – Laje armada em cruz



(fonte: ARAÚJO, 2003, p. 7)

Figura 4 – Laje armada em uma direção



$A_{sy}$  : calculada

$A_{sx}$  : armadura de distribuição

(fonte: ARAÚJO, 2003, p. 8)

Chaves (1997, p. 20) indica uma classificação que depende da relação  $(h/l_y)$  entre a espessura  $(h)$  e o menor vão  $(l_y)$  das placas:

- a) muito delgada:  $h/l_y < 1/80$ ;
- b) delgada:  $1/80 < h/l_y < 1/5$ ;
- c) espessa:  $h/l_y > 1/5$ .

Nas placas delgadas os esforços de flexão são preponderantes. Caso a relação  $h/l_y$  seja maior que  $1/5$ , aparecerá um estado triaxial de tensões bastante complexo e, portanto, estas placas deverão ser estudadas como placas espessas. Além disto, as flechas  $w$  deverão ser limitadas a  $w/h < 1/5$ , pois, caso contrário, aparecerão importantes tensões de membrana que se sobreporão às flexões.

Os elementos de placa devem ser analisados admitindo-se que sejam válidas as duas hipóteses a seguir (DUARTE, 1998, p. 17):

- a) as seções permanecem planas após as deformações;
- b) os elementos podem ser representados segundo seu plano médio.

A análise estrutural de tais elementos deverá ser efetuada segundo o método elástico ou plástico. Segundo Montoya et al. (2000, p. 540), com o método elástico é possível obter, com uma boa aproximação, os esforços na situação de serviço, enquanto que o método plástico é mais indicado para uma obtenção mais racional da carga última na situação de ruína da placa. Deve-se assim, eleger o método mais adequado dependendo do tipo de análise desejável.

Dentre os diversos métodos elásticos, podem-se citar os seguintes:

- a) **teoria de flexão das placas:** apresenta uma solução exata de acordo com os princípios da teoria da elasticidade. A solução do problema é obtida resolvendo-se uma solução diferencial de quarta ordem (teoria de Kirchhoff), juntamente com as condições de contorno;
- b) **método das diferenças finitas:** por fazer uso de equações diferenciais mediante séries, é um método de difícil generalização das condições de contorno e carregamento e, por isso, caiu em desuso;
- c) **método da analogia da grelha equivalente:** a laje é associada à uma grelha equivalente, que é analisada com um programa baseado no método da rigidez. Por apresentar a possibilidade de utilização em lajes mais complicadas, com furos, zonas de diferentes espessuras e condições de apoio variadas, este método é bastante empregado em *softwares* comerciais;
- d) **método dos elementos finitos:** substitui a laje por uma série de elementos de forma quadrangular ou triangular. É um método muito utilizado atualmente e apresenta a vantagem da consideração das não-linearidades físicas e geométricas e das distintas condições de apoio e carregamento;
- e) **métodos simplificados:** são métodos que foram bastante úteis para o projeto de lajes antes da utilização dos computadores. Dentre eles destaca-se o **método de Marcus**, derivado da teoria das grelhas.

Em relação aos métodos plásticos, a NBR 6118 permite a utilização da **teoria das charneiras plásticas** para a consideração do estado limite último. O cálculo é efetuado na ruptura, permitindo, portanto, a obtenção da carga última, situação em que o material se comporta plasticamente (PINHEIRO, 1988, p. 3). Além de ser um método mais coerente com o comportamento da estrutura na ruína, Rios (1991, p. 1) ressalta que a teoria das charneiras plásticas apresenta um tratamento matemático relativamente simples. Neste caso, desprezam-se as deformações elásticas e garante-se o equilíbrio pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

Em seguida, serão apresentados os fundamentos do cálculo elástico através da **teoria de flexão das placas** e do **método de Marcus** e do cálculo plástico através da **teoria das charneiras plásticas**.

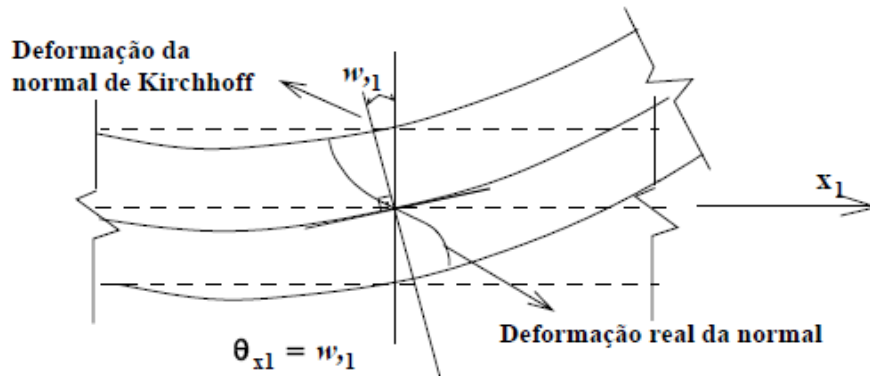
### 3.1 TEORIA DE FLEXÃO DAS PLACAS

Existem várias formulações para a teoria de flexão das placas, como a teoria Reissner-Mindlin e a de Kirchhoff. Segundo Duarte (1998, p. 18), a teoria de Kirchhoff interpreta satisfatoriamente bem o comportamento para placas com relação entre a espessura e o menor vão de 1/10 até 1/100. Como as lajes usuais de edifícios possuem tal relação entre 1/40 e 1/60, a teoria para placas delgadas proposta por Kirchhoff é suficiente para o problema proposto.

Araújo (2003, p. 37) descreve as hipóteses que são admitidas na teoria de Kirchhoff:

- a) o material da placa é elástico linear, homogêneo e isotrópico;
- b) a espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões;
- c) as deflexões são pequenas em relação à espessura da placa;
- d) as rotações do plano médio deformado são pequenas em relação à unidade;
- e) linhas retas, inicialmente normais ao plano médio, permanecem retas e normais ao plano médio após as deformações (figura 5);
- f) as deflexões da placa são normais ao plano indeformado inicial;
- g) as tensões normais ao plano médio são desprezáveis ( $\sigma_z \approx 0$ ).

Figura 5 - Plano médio deformado conforme teoria de Kirchhoff

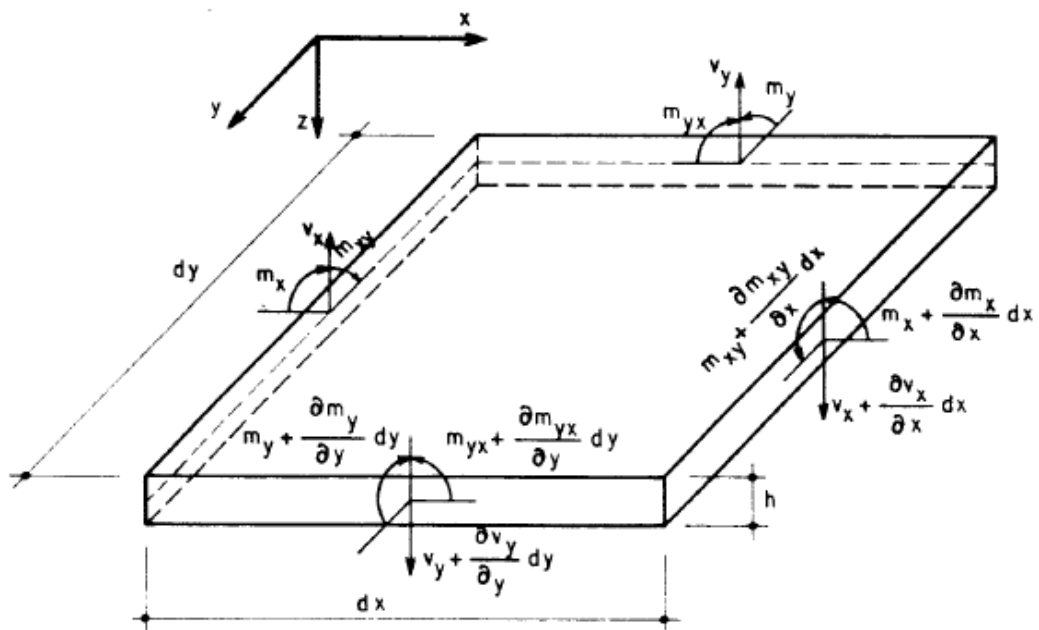


(fonte: CHAVES, 1997, p. 22)

A deformada de uma placa, submetida a cargas normais ao seu plano, é definida pela função  $w(x, y)$ , que determina os deslocamentos verticais dos pontos  $(x, y)$  a partir plano médio da mesma. Dessa forma, supõe-se que os pontos no plano médio só sofrem deslocamentos verticais e que as retas normais ao plano médio permanecem normais ao plano médio deformado, conforme figura 5 (MONTROYA et al., 2000, p. 540).

Os esforços que aparecem na placa em função dos deslocamentos  $w$  estão representados na figura 6 e valem:

Figura 6 – Esforços em um elemento de placa



(fonte: RIOS, 1991, p. 18)

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{equação 1})$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{equação 2})$$

$$m_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{equação 3})$$

$$v_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{equação 4})$$

$$v_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{equação 5})$$

Onde:

$m_x$  = momento fletor na direção  $x$  (em torno do eixo  $y$ );

$m_y$  = momento fletor na direção  $y$  (em torno do eixo  $x$ );

$m_{xy}$  = momento torsor;

$v_x$  = esforço cortante na direção  $x$ ;

$v_y$  = esforço cortante na direção  $y$ ;

$\nu$  = coeficiente de Poisson do concreto (normalmente,  $\nu \approx 1/6$ );

$D$  = rigidez à flexão da placa, dado pela equação 6:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (\text{equação 6})$$

Onde:

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal do concreto;

$h$  = espessura total da placa.

O equilíbrio de forças verticais de um elemento de placa submetido aos esforços cortantes  $v_x$ ,  $v_y$  e a carga  $p(x, y)$  é dado pela seguinte equação:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p(x, y) = 0 \quad (\text{equação 7})$$

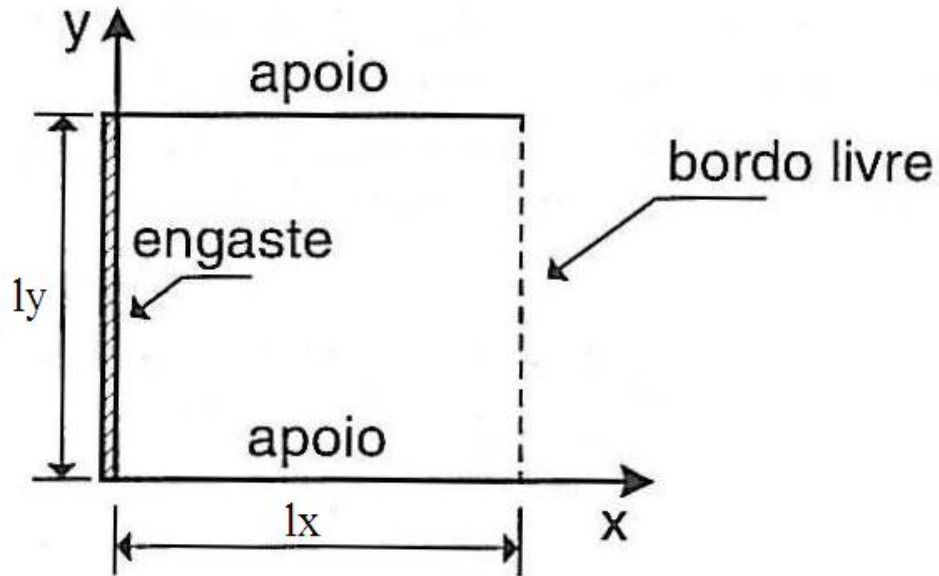
Fazendo o equilíbrio de momentos em torno dos eixos  $x$  e  $y$  e utilizando as equações 1, 2, 3 e 7, obtém-se a conhecida equação de Lagrange ou equação das placas:

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (\text{equação 8})$$

A equação de Lagrange é uma equação diferencial parcial de quarta ordem, não homogênea e com coeficientes constantes. É também uma equação linear, tendo em vista que as derivadas de  $w$  não possuem expoente superior a 1 (ARAÚJO, 2003, p. 45).

Por se tratar de uma equação de quarta ordem, são necessárias duas condições de contorno para cada lado da placa. Essas condições podem ser geométricas, mecânicas ou mistas e dependem dos tipos de apoio presentes na placa. Considerando a placa da figura 7, são descritas a seguir as condições de contorno.

Figura 7 – Placa com várias condições de contorno



(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003, p. 46)

No bordo engastado ( $x = 0$ ) o deslocamento e a rotação são nulos:

$$w = 0 \quad \text{(equação 9)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{(equação 10)}$$

Nos bordos simplesmente apoiados ( $y = 0$  e  $y = b$ ) o deslocamento e o momento  $m_y$  são nulos:

$$w = 0 \quad \text{(equação 11)}$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{(equação 12)}$$

No bordo livre ( $x = a$ ) o momento  $m_x$  e a reação na borda são nulos:

$$m_x = 0 \quad (\text{equação 13})$$

$$v_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{equação 14})$$

Obtida a função  $w$ , os esforços podem ser calculados pelas equações 1 a 5. Entretanto, não é fácil obter analiticamente uma função que satisfaça a equação 8 e as condições de contorno. Araújo (2003, p. 49) afirma que a solução exata da equação diferencial só pode ser obtida para alguns poucos casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, podem-se adotar expansões em série de Fourier para encontrar soluções aproximadas. Para uma placa retangular apoiada nos quatro bordos e com uma carga uniforme  $p$ , a função  $w$  é obtida pela seguinte série dupla de Fourier (MONTROYA et al., 2000, p. 541):

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (\text{equação 15})$$

### 3.2 MÉTODO DE MARCUS

O método de Marcus é um processo simplificado aplicável às lajes retangulares com carga uniforme e bordas apoiadas ou engastadas (PINHEIRO, 1988, p. 21). Sobre a aplicabilidade do Método, Araújo (2003, p. 72) afirma:

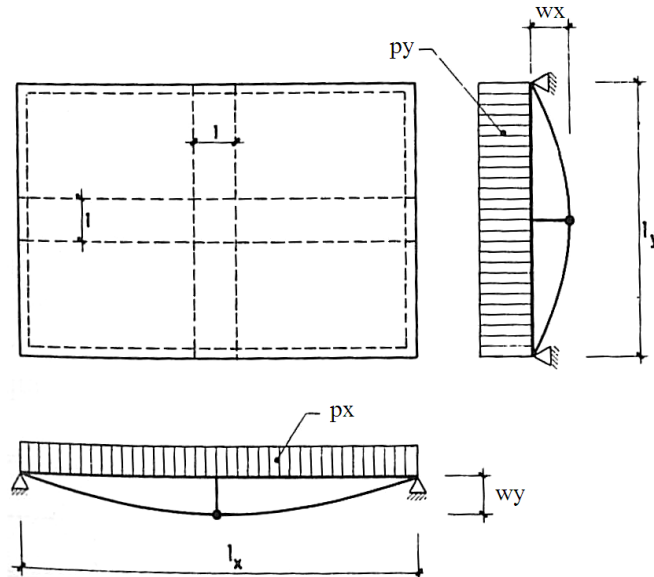
Deve ser salientado que o método de Marcus, apesar de constituir um avanço em relação à teoria das grelhas, é um método aproximado. Entretanto, os resultados obtidos são satisfatórios para o projeto de lajes de concreto armado.

O método de Marcus é bastante atrativo devido à sua simplicidade e, principalmente, pela disponibilidade de soluções analíticas, o que facilita a implementação computacional.



Considerando que a laje da figura 8 trabalha nas duas direções, o método consiste em considerar duas faixas de largura unitária, uma em cada direção, as quais se cruzam no centro da laje.

Figura 8 – Laje simplesmente apoiada nos quatro cantos



(fonte: adaptado de MONTOYA et al., 2000, p. 545)

A carga  $p$  que atua sobre a laje deve ser dividida em  $p_x$  e  $p_y$  de tal forma que as flechas  $w_x$  e  $w_y$  no centro de cada faixa em um mesmo ponto sejam iguais (MONTOYA et al., 2000, p. 545):

$$p = p_x + p_y \quad (\text{equação 16})$$

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{p_x \cdot l_x^4}{E \cdot I} \quad (\text{equação 17})$$

$$w_y = \frac{5}{384} \frac{p_y \cdot l_y^4}{E \cdot I} \quad (\text{equação 18})$$

$$w_x = w_y \quad (\text{equação 19})$$

Onde:

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$I$  = momento de inércia da faixa de largura unitária.

Substituindo as equações 17 e 18 na equação 19, utilizando a equação 16 e definido a relação entre vãos como  $\lambda = l_y / l_x$ , pode-se escrever:

$$q_x = k_x q; \quad q_y = k_y q \quad (\text{equação 20})$$

$$k_x = \frac{\lambda^4}{1+\lambda^4}; \quad k_y = 1 - k_x \quad (\text{equação 21})$$

Utilizando a equação 20, é possível definir os momentos máximos nas direções  $x$  e  $y$  da seguinte forma:

$$M_x = m_x q l_x^2; \quad m_x = \frac{k_x}{8} \quad (\text{equação 22})$$

$$M_y = m_y q l_x^2; \quad m_y = \frac{k_y \lambda^2}{8} \quad (\text{equação 23})$$

Segundo Araújo (2003, p. 70), a formulação obtida anteriormente, usualmente denominada teoria de grelhas, é uma simplificação grosseira do comportamento das lajes, uma vez que a rigidez à torção é desprezada. Este efeito foi introduzido de forma aproximada no método de Marcus através do coeficiente  $C$ .

Dessa forma, os momentos fletores positivos corrigidos,  $M_{xo}$  e  $M_{yo}$ , são dados por:

$$M_{xo} = C_x M_x; M_{yo} = C_y M_y \quad (\text{equação 24})$$

Os coeficientes  $C_x$  e  $C_y$  são inferiores à unidade, já que a rigidez à torção tende a reduzir os momentos fletores e dependem das condições de contorno e da relação entre os vãos da laje:

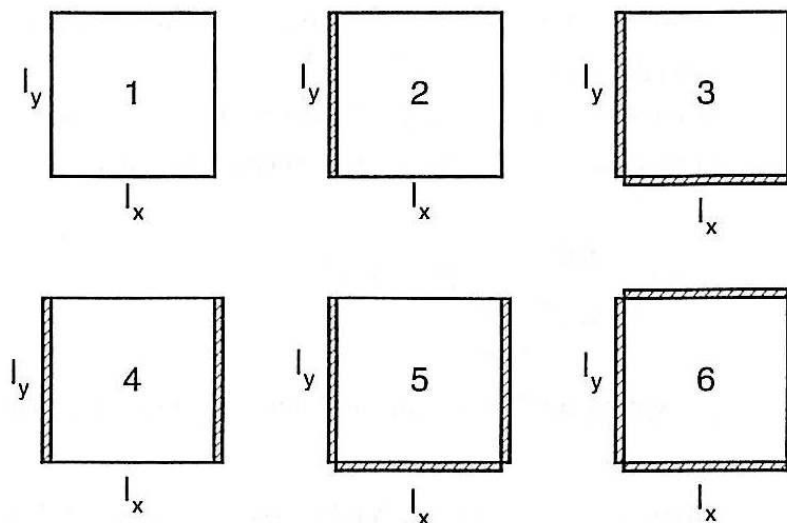
$$C_x = 1 - \frac{20k_x}{3\alpha_x\lambda^2}; C_y = 1 - \frac{20k_y\lambda^2}{3\alpha_y\lambda^2} \quad (\text{equação 25})$$

Os coeficientes  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  dependem das condições de apoio nas duas direções e valem:

- a)  $\alpha = 8$  para faixa biapoiada;
- b)  $\alpha = 14,22$  para faixa engastada e apoiada;
- c)  $\alpha = 24$  para faixa biengastada.

A formulação obtida para a laje simplesmente apoiada nos quatro lados pode ser expandida para outros casos de condições de contorno. Os casos possíveis são indicados na figura 9 e a formulação respectiva pode ser encontrada no quadro 1.

Figura 9 – Condições de contorno das lajes retangulares



(fonte: ARAÚJO, 2003, p. 72)

Quadro 1 – Coeficientes para o cálculo dos momentos fletores pelo método de Marcus

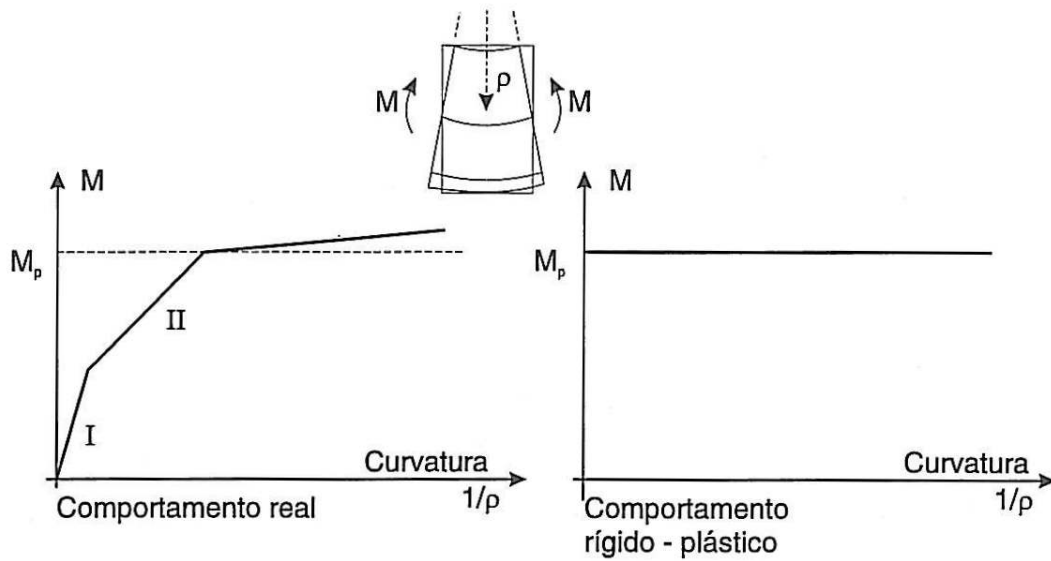
Caso	Coeficientes : ( $k_y = 1 - k_x$ em todos os casos)
1	$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}; m_x = \frac{k_x}{8}; m_y = \frac{k_y \lambda^2}{8}; \alpha_x = \alpha_y = 8$
2	$k_x = \frac{5\lambda^4}{2 + 5\lambda^4}; m_x = \frac{k_x}{14,22}; m_y = \frac{k_y \lambda^2}{8};$ $\alpha_x = 14,22; \alpha_y = 8; m_{xe} = -k_x/8$
3	$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}; m_x = \frac{k_x}{14,22}; m_y = \frac{k_y \lambda^2}{14,22};$ $\alpha_x = \alpha_y = 14,22; m_{xe} = -k_x/8; m_{ye} = -k_y \lambda^2 / 8$
4	$k_x = \frac{5\lambda^4}{1 + 5\lambda^4}; m_x = \frac{k_x}{24}; m_y = \frac{k_y \lambda^2}{8};$ $\alpha_x = 24; \alpha_y = 8; m_{xe} = -k_x/12$
5	$k_x = \frac{2\lambda^4}{1 + 2\lambda^4}; m_x = \frac{k_x}{24}; m_y = \frac{k_y \lambda^2}{14,22}; \alpha_x = 24;$ $\alpha_y = 14,22; m_{xe} = -k_x/12; m_{ye} = -k_y \lambda^2 / 8$
6	$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}; m_x = \frac{k_x}{24}; m_y = \frac{k_y \lambda^2}{24}; \alpha_x = \alpha_y = 24;$ $m_{xe} = -k_x/12; m_{ye} = -k_y \lambda^2 / 12$

(fonte: ARAÚJO, 2003, p. 73)

### 3.3 TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

Duarte (1998, p. 23) afirma que, na análise plástica, admite-se um comportamento rígido-plástico perfeito (figura 10) para o concreto armado, permitindo uma determinação adequada do valor da carga máxima (carga de ruína ou carga última) a qual ele pode ser submetido numa solicitação. Entretanto, para o caso de lajes, o cálculo exato pela teoria da plasticidade não é possível, uma vez que o grau de indeterminação estática das mesmas é infinito. Logo, ao invés de se obter o valor exato da carga última, determinam-se um limite superior pelo teorema cinemático e um limite inferior pelo teorema estático.

Figura 10 – Comportamento rígido-plástico da laje



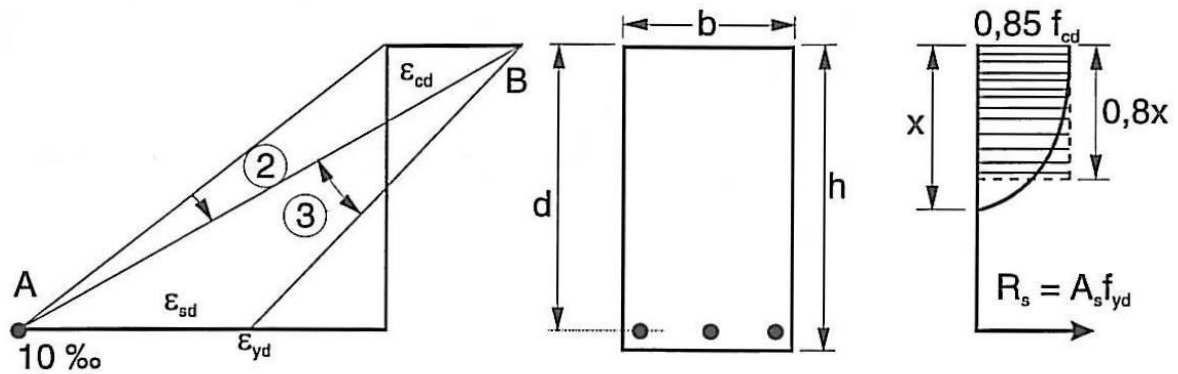
(fonte: FUSCO, 1995, p. 246)

O teorema estático estabelece que todo carregamento para o qual houver a possibilidade de se encontrar uma distribuição de esforços estaticamente possível e segura, é menor ou igual ao que provoca a ruína. Já o teorema cinemático estabelece que todo carregamento que corresponde a um mecanismo é igual ou superior ao que provoca a ruína (RIOS, 1991, p. 68).

A **teoria das charneiras plásticas**, também conhecida como teoria das linhas de ruptura ou método de Johansen, é uma aplicação do teorema cinemático, fornecendo, portanto, um valor de carga igual ou superior à carga de ruína. Pinheiro (1988, p. 4) afirma que, apesar da teoria das charneiras plásticas resultar num valor contra a segurança, os resultados experimentais demonstram que a carga de ruína é em geral superior à obtida pela teoria das charneiras plásticas, devido, principalmente, aos efeitos de arqueamento e de membrana.

Segundo Araújo (2003, p. 74), a NBR 6118 permite o uso da teoria das charneiras plásticas quando as deformações das lajes estiverem nos domínios 2 ou 3, o que corresponde a peças subarmadas ou normalmente armadas (figura 11). Para garantir as condições adequadas de ductilidade, deve-se ter para os momentos fletores negativos  $x/d < 0,30$ , sendo  $x$  a profundidade da linha neutra e  $d$  a altura útil das seções da laje.

Figura 11 – Domínios 2 e 3 de deformações nas seções da laje

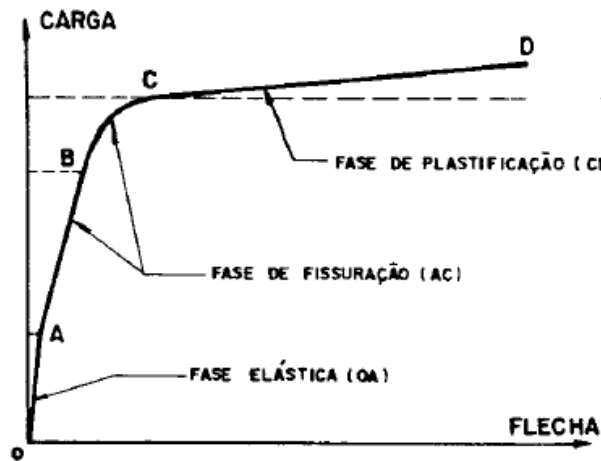


(fonte: FUSCO, 1995, p. 246)

### 3.3.1 Fases de comportamento

Considerando uma laje de concreto armado submetida a um carregamento proporcional, pode-se distinguir as fases do comportamento como mostra a figura 12.

Figura 12 – Fases de comportamento das lajes subarmadas



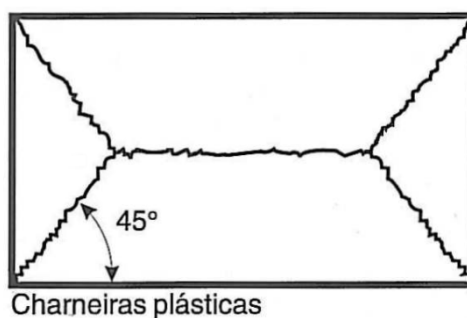
(fonte: PINHEIRO, 1988, p. 58)

Para pequenas forças, tem-se a **fase elástica**, na qual o concreto resiste à tração e a laje comporta-se de acordo com a teoria das placas em regime elástico. Com o aumento da carga, a resistência do concreto à tração é ultrapassada, iniciando-se assim a **fase de fissuração**. A formação das fissuras faz com que haja um crescimento mais rápido dos momentos fletores nas seções não fissuradas, provocando novas fissuras. Quando as armaduras ultrapassam o regime elástico linear, o crescimento dos deslocamentos se acentua ainda mais. Em seguida,

as armaduras entram em escoamento, dando início a **fase de plastificação**. Nesta fase, caracterizada por grandes deformações, há uma considerável redistribuição de esforços. As seções plastificadas definem as linhas de plastificação, nas quais os momentos fletores permanecem praticamente constantes, crescendo nas seções vizinhas até que estas se plastifiquem e assim sucessivamente (PINHEIRO, 1988, p. 58-59).

Após o desenvolvimento de todas as linhas de plastificação, as seções mais solicitadas rompem por compressão, impossibilitando a continuidade do carregamento. Pode-se dizer que a laje atingiu a ruína, sendo a máxima carga atuante denominada **carga de ruína**. As linhas ao longo das quais se alcança a plastificação são denominadas **charneiras plásticas** (figura 13) e se caracterizam porque nelas o momento fletor é constante. A configuração com que as charneiras se apresentam é chamada de **configuração de ruína**.

Figura 13 – Exemplificação das charneiras plásticas



(fonte: FUSCO, 1995, p. 245)

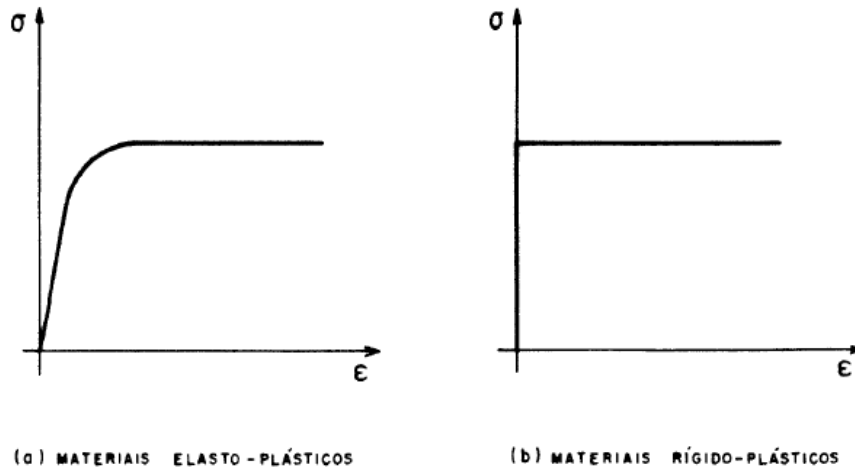
### 3.3.2 Hipóteses de cálculo

As hipóteses básicas para a aplicação da teoria das charneiras plásticas são enunciadas por Rios (1991, p. 69-71) a seguir:

- a) as partes da laje, que são as partes limitadas pelas linhas de plastificação e bordas das lajes, são consideradas planas. Isto equivale a admitir que a laje é constituída por um material rígido-plástico (figura [...] [14]), ou seja, as deformações elásticas são desprezadas em presença de deformações plásticas nas charneiras. Desta forma, a superfície média da laje plastificada é poliédrica e as partes entre as linhas de plastificação permanecem planas;
- b) as linhas de plastificação são consideradas retas. As únicas deformações consideradas são as rotações ao longo das charneiras, decorrentes das rotações das partes em torno dos eixos de rotação, definidos pela forma da laje e por suas condições de apoio;

- c) ao longo e nas vizinhanças de cada charneira, o momento fletor, por unidade de comprimento, é constante e igual ao momento máximo que a laje pode resistir. A laje deve ser subarmada, de modo que, no estado de ruína, a armadura atinja seu limite de escoamento na linha de plastificação. O fenômeno de redistribuição dos momentos começa então a ocorrer. Quando a parte mais solicitada da laje alcança o estado de plastificação, essa região deixa de absorver tensões adicionais, porém continua a deformar-se. Nesse ponto, foi atingido o momento fletor máximo que a laje pode resistir. Continuando a crescer a solicitação, as regiões vizinhas passam a receber os acréscimos de tensão até entrarem, por sua vez, em estado plástico. Os acréscimos, agora, são recebidos pelas regiões adjacentes, repetindo-se o fenômeno, isto é, provocando-se uma propagação de estado plástico de região para região. Ora, em cada ponto da charneira em que é atingido o estado plástico, foi desenvolvido o momento fletor máximo, cujo valor não é mais ultrapassado, permanecendo portanto, aproximadamente constante em toda extensão dessa linha. Esse fenômeno também ocorre, dentro de certos limites, de seção para seção, de modo que, nas proximidades da linha de plastificação, o momento máximo também é desenvolvido;
- d) supõe-se que não haverá ruína prematura por cisalhamento ou por punção. A ruína da estrutura ocorrerá quando, pelo efeito da plastificação, ela se tornar hipostática, ou seja, quando se formar um mecanismo livremente deformável;
- e) a influência do efeito de membrana, proveniente das restrições para os deslocamentos no plano da laje (decorrentes da rigidez lateral das vigas de borda ou da continuidade com as lajes vizinhas) é desprezada.

Figura 14 – Materiais elasto-plásticos e rígido-plásticos



(fonte: RIOS, 1991, p. 70)

### 3.3.3 Configurações das charneiras

Segundo Duarte (1998, p. 55), as configurações das charneiras são influenciadas pelas condições de apoio, pela natureza e disposição das cargas e pela disposição das armaduras.

Para a determinação da configuração de ruptura de uma determinada placa, deve-se, primeiramente, analisar todas as configurações possíveis, compatíveis com a forma, condições

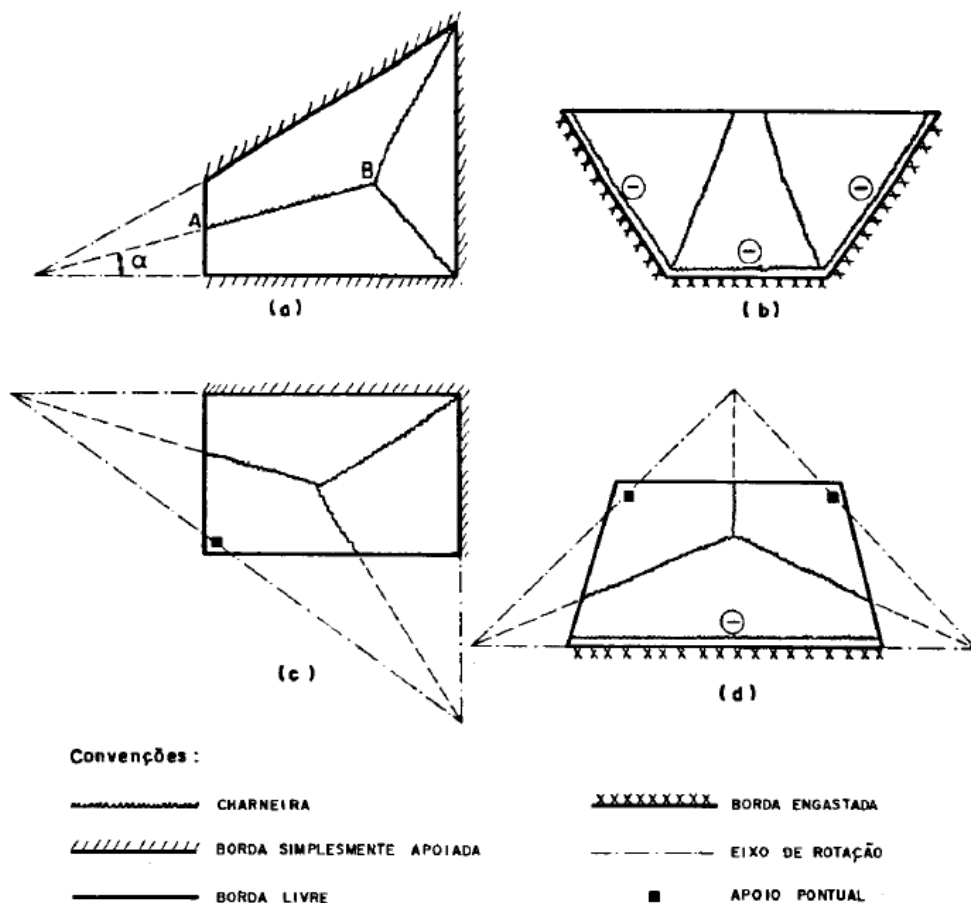


de apoio e cargas da placa. A configuração verdadeira é aquela que corresponde a menor carga de ruptura, ou ainda ao maior momento de plastificação (MONTROYA et al., 2000, p. 560). A laje será dimensionada com base no momento de plastificação máximo.

Pinheiro (1988, p. 66-67) define algumas regras básicas que determinam as configurações possíveis das charneiras:

- cargas distribuídas geralmente dão origem a charneiras retilíneas, embora nem sempre a configuração definida por elas seja a mais desfavorável;
- ao longo dos contornos engastados, formam-se charneiras superiores, também chamadas de charneiras negativas, pois são correspondentes aos momentos considerados negativos (figuras [...] [15b] e [...] [15d]);
- cada charneira passa pelo ponto de interseção dos eixos de rotação das regiões delimitadas por essas charneiras negativas;
- os eixos de rotação das diversas regiões coincidem com lados simplesmente apoiados (figuras [...] [15a] e [...] [15c]), com lados engastados (figuras [...] [15b] e [...] [15d]) ou passam pelos pontos de apoio isolados (figuras [...] [15c] e [...] [15d]).

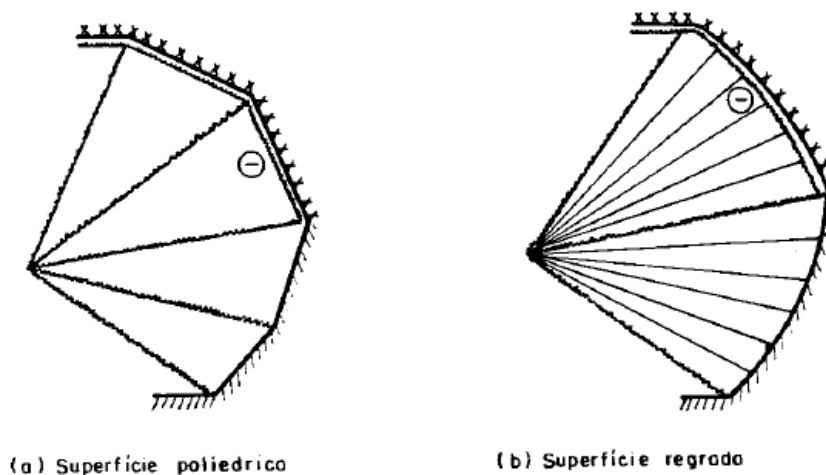
Figura 15 – Exemplos de configurações possíveis



(fonte: PINHEIRO, 1988, p. 67)

Caso haja contorno curvilíneo, pode-se considerar o mesmo como limite para um contorno interno poligonal, com as dimensões dos lados tendendo a zero (figura 16). Desta forma, as charneiras ficarão encostadas umas às outras formando uma superfície regradada, mas não plana, que se admite ser possível (PINHEIRO, 1988, p. 68).

Figura 16 – Configurações de ruína de lajes com contorno poligonal e curvilíneo



(a) Superfície poliedrica

(b) Superfície regradada

(fonte: PINHEIRO, 1988, p. 68)

### 3.3.4 Processos de cálculo

Existem dois processos de cálculo na teoria das charneiras plásticas: o do equilíbrio ou das forças nodais, que vem sendo utilizado desde o trabalho original de Johansen, e outro mais recente conhecido como da energia ou dos trabalhos virtuais. Esses processos são apresentados a seguir.

#### 3.3.4.1 Processo do equilíbrio

O processo do equilíbrio consiste em estabelecer as equações de equilíbrio para cada parte da laje delimitada pelas linhas de plastificação. No total, haverá uma equação de equilíbrio de forças verticais e duas de equilíbrio de momentos em torno dos eixos, totalizando três equações de equilíbrio estático (MONTROYA et al., 2000, p. 560). Logo, se a laje tiver  $n$  regiões, existirão  $3n$  equações e  $3n$  incógnitas. Rios (1991, p. 93) define estas incógnitas como:

- a) o momento de plastificação, para o caso onde a carga é dada; ou a carga de ruína, se o momento de plastificação é conhecido;

- b)  $n-1$  relações entre os ângulos de rotação;
- c)  $2n$  incógnitas provenientes dos eixos de rotação e reações de apoio.

Desta forma, as incógnitas carga de ruína (1), giros ( $n-1$ ) e eixos de rotação e reações de apoio ( $2n$ ), sempre resultarão em  $3n$  incógnitas, estando de acordo com o número de equações disponíveis e viabilizando a resolução do problema. Segundo Pinheiro (1981, p. 2/10-2/11), as equações de equilíbrio são suficientes para que se possa determinar qualquer variável desconhecida que defina a configuração de ruína, ou então para que se possa determinar a carga de ruína ou o momento de plastificação de uma certa configuração. Uma vantagem deste processo é que, na maior parte dos casos, ele requer menos cálculos que o processo da energia.

#### 3.3.4.2 Processo da energia

Duarte (1998, p. 58) define o processo da energia como sendo uma aplicação dos trabalhos virtuais à teoria das charneiras. Para isso, assume-se que não haja perda de energia na laje enquanto ela se deslocada devido a um certo carregamento. O processo da energia permite que as equações de equilíbrio sejam escritas de forma sucinta, resultando num cálculo rápido e prático.

Conhecida a configuração de ruína, é possível girar as partes da laje em torno dos seus eixos de rotação. A equação de trabalho é obtida igualando-se o trabalho das forças externas ( $T_e$ ) ao trabalho das forças internas ( $T_i$ ). Dessa forma, a energia utilizada pelas forças externas durante a deformação virtual da laje será igual àquela consumida pelas charneiras nessa mesma deformação (RIOS, 1991, p. 103). Conforme Pinheiro (1981, p. 2-12-2-13), a energia absorvida pelas charneiras ( $T_i$ ) e a energia desenvolvida pelas cargas ( $T_e$ ) são fornecidos pelas equações 26 e 27:

$$T_i = \sum m_i l_i \theta_i + \sum m'_i l'_i \theta'_i \quad (\text{equação 26})$$

Onde:

$m_i$  = momento de plastificação positivo por unidade de comprimento;

$l_i$  = comprimento das charneiras positivas;

$\theta_i$  = ângulo de rotação das charneiras positivas;

$m_i'$  = momento de plastificação negativo por unidade de comprimento;

$l_i'$  = comprimento das charneiras negativas;

$\theta_i'$  = ângulo de rotação das charneiras negativas.

$$T_e = \sum P_j f_j + \int_A p f dA \quad (\text{equação 27})$$

Onde:

$P_j$  = cargas concentradas;

$f_j$  = deslocamento das cargas concentradas;

$p$  = cargas distribuídas;

$f$  = deslocamento das cargas distribuídas

$dA$  = elemento de área da laje.

### 3.3.5 Fórmulas para o cálculo de lajes retangulares

Segundo Campos Filho (2011, p. 25), para uma laje retangular engastada nas quatro bordas (figura 17), o momento fletor negativo nos engastes  $m'$  será:

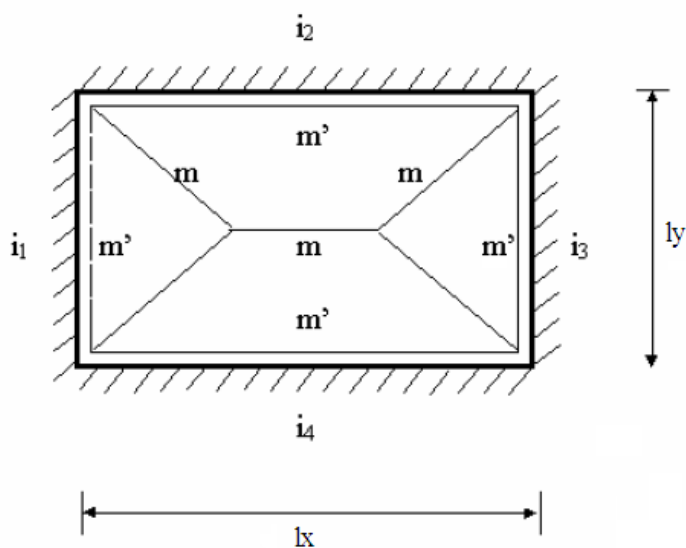
$$m' = -i.m \quad (\text{equação 28})$$

Onde:

$i$  = grau de engastamento;

$m$  = momento fletor no vão.

Figura 17 – Momentos de engastamento



(fonte: adaptado de CAMPOS FILHO, 2011, p. 25)

Sobre o grau de engastamento  $i$ , a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 85) recomenda: “Na falta de melhores dados experimentais, deve ser adotada, para lajes retangulares, razão mínima de 1,5:1 entre os momentos de borda (com continuidade e apoio indeslocável) e momentos no vão.”. Assim, adota-se que  $i$  vale 0 quando as bordas forem apoiadas e 1,5 quando engastadas. A formulação necessária para o cálculo das lajes isótropas e ortótropas é apresentada a seguir.

### 3.3.5.1 Lajes isótropas

Pinheiro (1988, p. 94) define laje isótropa como aquela cujos momentos de plastificação e consequentemente armaduras são iguais nas duas direções. Para tanto, a relação entre o lado menor  $l_y$  e o maior  $l_x$  deve ser  $0,8 \leq l_y/l_x \leq 1$ .

Assim, numa laje isótropa simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída, as vigas paralelas ao vão  $l_x$  têm momentos de ruptura  $M_{l_x}$ , e as vigas paralelas ao lado  $l_y$  têm momento de ruptura  $M_{l_y}$ . Para uma seção média através da laje e das vigas, chega-se às seguintes equações (JOHANSEN, 1962, p. 191):

$$2M_{l_x} + ml_y = \frac{1}{8}pl_x^2l_y \quad (\text{equação 29})$$

$$2M_{l_y} + ml_x = \frac{1}{8}pl_xl_y^2 \quad (\text{equação 30})$$

Como as reações da laje sobre as vigas são uniformemente distribuídas, pode-se escrever:

$$M_{l_x} = \frac{1}{8}\bar{p}_{l_x}l_x^2; M_{l_y} = \frac{1}{8}\bar{p}_{l_y}l_y^2 \quad (\text{equação 31})$$

Onde:

$$\bar{p}_{l_x} = \frac{1}{2}pl_y - 4m\frac{l_y}{l_x^2}; \bar{p}_{l_y} = \frac{1}{2}pl_x - 4m\frac{l_x}{l_y^2} \quad (\text{equação 32})$$

As forças concentradas nos cantos são iguais e têm valor igual a  $2.m$  quando  $\alpha = 45^\circ$ :

$$H = m(\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha) \gtrsim 2m \quad (\text{equação 33})$$

Por fim, a equação de equilíbrio à translação para a laje é:

$$4H + pl_xl_y = 2l_x\bar{p}_{l_x} + 2l_y\bar{p}_{l_y} = 2pl_xl_y - 8m\left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_y}{l_x}\right) \quad (\text{equação 34})$$

Expressando-se  $H$  em função de  $m$ , tem-se:

$$m \leq \frac{pl_x l_y}{8 \left( 1 + \frac{l_y}{l_x} + \frac{l_x}{l_y} \right)} \quad (\text{equação 35})$$

Segundo Johansen (1962, p. 192), a equação 35 fica aproximadamente 2% a favor da segurança quando o sinal da igualdade é adotado. Pode-se utilizar esta equação também para lajes engastadas, substituindo os vãos reais  $l_x$  e  $l_y$  pelos vãos reduzidos  $l_{xr}$  e  $l_{yr}$ . Dessa forma, o momento no vão será calculado por:

$$m = \frac{pl_{xr} l_{yr}}{8 \left( 1 + \frac{l_{xr}}{l_{yr}} + \frac{l_{yr}}{l_{xr}} \right)} \quad (\text{equação 36})$$

Onde:

$$l_{xr} = \frac{2l_x}{\sqrt{1+i_1} + \sqrt{1+i_3}} \quad (\text{equação 37})$$

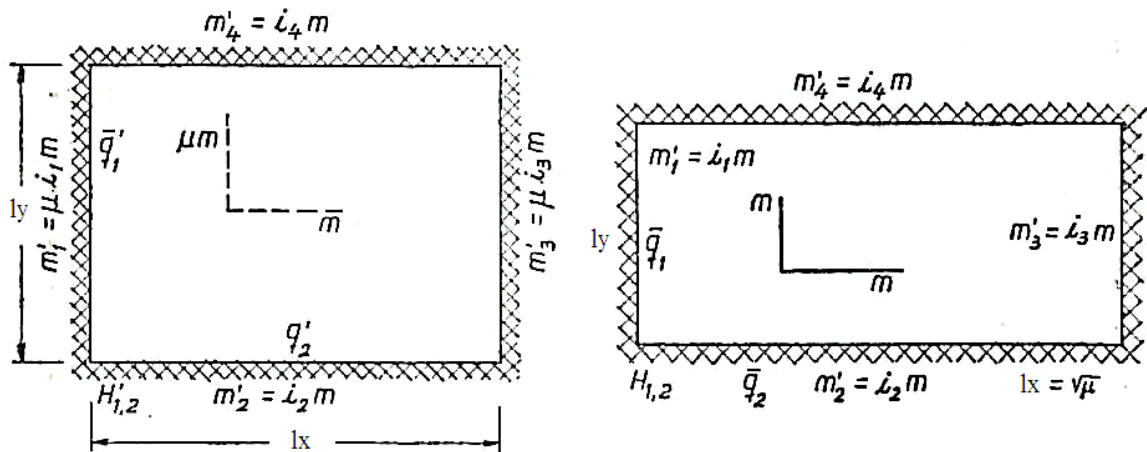
$$l_{yr} = \frac{2l_y}{\sqrt{1+i_2} + \sqrt{1+i_4}} \quad (\text{equação 38})$$

### 3.3.5.2 Lajes ortótropas

Pinheiro (1988, p. 95) define laje ortótropa como aquela cujos momentos de plastificação e, conseqüentemente, armaduras não são iguais, porém existe uma relação idêntica entre os momentos de plastificação positivos e negativos. Para tanto, a relação entre o lado menor  $l_y$  e o maior  $l_x$  deve ser  $0,5 \leq l_y/l_x < 0,8$ .

O cálculo para as lajes ortótropas pode ser reconduzido ao de uma laje isótropa através das relações de afinidade (JOHANSEN, 1962, p. 214). A figura 18 representa as relações entre as variáveis das lajes ortótropas e isótropas neste processo.

Figura 18 – Laje com armadura ortótropa



(fonte: adaptado de JOHANSEN, 1962, p. 214)

Campos Filho (2011, p. 28) define o coeficiente de ortotropia  $\mu$  presente na figura 18 pela equação 39, que pode ser calculado pela equação 40:

$$\mu = \frac{m_{l_x}}{m_{l_y}} \quad (\text{equação 39})$$

$$\mu = \frac{12 - i_2 - i_4}{12 - i_1 - i_3} \cdot \left(\frac{l_y}{l_x}\right)^{1,7} \quad (\text{equação 40})$$

Sendo  $m_{l_y} = m$  e  $m_{l_x} = \mu m$ , o momento de plastificação  $m$  será calculado da mesma forma que numa laje isotrópica, considerando-se que o lado maior  $l_x$  tem um comprimento  $l_x/\sqrt{\mu}$ :

$$m = \frac{p l_{x_r}^* l_{y_r}}{8 \left(1 + \frac{l_{x_r}^*}{l_{y_r}} + \frac{l_{y_r}}{l_{x_r}^*}\right)} \quad (\text{equação 41})$$



Onde:

$$l_{x_r}^* = \frac{l_{x_r}}{\sqrt{\mu}} \quad (\text{equação 42})$$

$$l_{x_r} = \frac{2l_x}{\sqrt{1+i_1} + \sqrt{1+i_3}} \quad (\text{equação 43})$$

$$l_{y_r} = \frac{2l_y}{\sqrt{1+i_2} + \sqrt{1+i_4}} \quad (\text{equação 44})$$

## 4 DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO DE LAJES

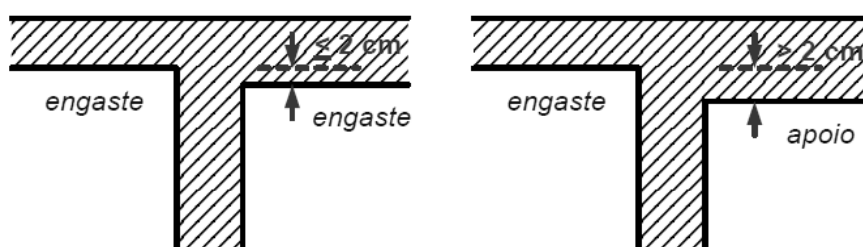
Antes de realizar o dimensionamento das lajes, é preciso definir suas condições de apoio. Campos Filho (2011, p. 2) apresenta os tipos de vinculação possíveis nas bordas de uma laje:

- a) apoiada: quando a borda da laje é continuamente suportada por vigas, paredes de alvenaria de tijolos cerâmicos, de bloco de concreto ou de pedras;
- b) livre: quando a borda da laje não tiver nenhuma vinculação ao longo daquele lado;
- c) engastada: quando a borda da laje tem continuidade além do apoio daquele lado (lado adjacente).

Quando a laje estiver apoiada sobre vigas, o apoio deveria ser considerado elástico, uma vez que as vigas também se deformam devido à ação do carregamento externo. Porém, por questões de simplificação, geralmente se desconsidera os deslocamentos verticais presentes nesses apoios (ARAÚJO, 2003, p. 8).

As lajes rebaixadas, usadas em áreas abertas, para que o desnível impeça o escoamento da água para as demais peças, e em banheiros, para permitir a colocação de canalizações das instalações sanitárias, deverão ser consideradas apoiadas. Além disso, uma laje não será considerada engastada em outra que tiver uma diferença de espessura de mais de 2 cm no parte inferior (figura 19).

Figura 19 – Tipos de vinculação entre lajes adjacentes



(fonte: CAMPOS FILHO, 2011, p. 3)

Nas situações em que, tanto a situação de apoio quanto a de engaste estiverem presentes, Campos Filho (2011, p. 3) recomenda, a favor da segurança, considerar todo lado como sendo

apoiado. Entretanto, se o engaste for superior a 85% do lado, pode-se considerar o lado como sendo engastado.

O vão efetivo  $l_{ef}$ , também conhecido como vão de cálculo, é usualmente tomado pela distância entre os centros do apoio. Porém a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 75) permite uma redução dependendo da espessura da laje. Quando os apoios puderem ser considerados suficientemente rígidos quanto à translação vertical, o vão efetivo será calculado pela equação 45:

$$l_{ef} = l_0 + a_1 + a_2 \quad (\text{equação 45})$$

Onde:

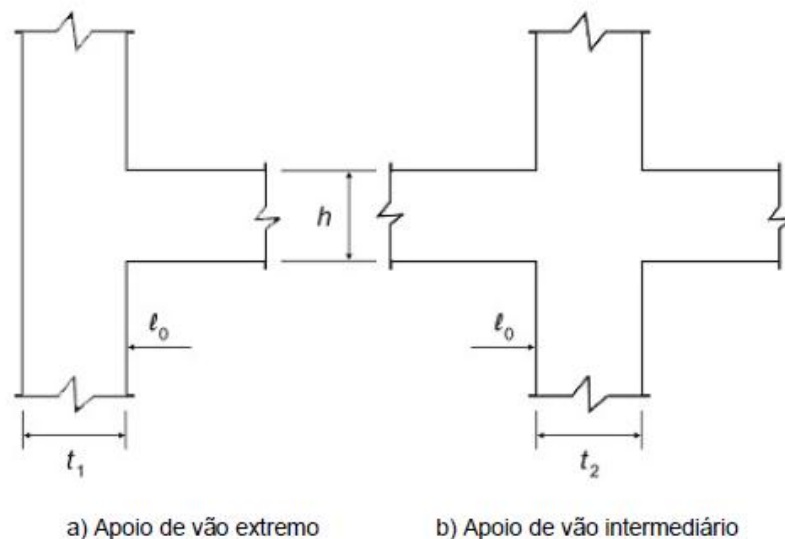
$l_0$  = vão livre (distância entre as faces internas dos apoios);

$a_1$  = menor valor entre  $t_1/2$  e  $0,3h$ ;

$a_2$  = menor valor entre  $t_2/2$  e  $0,3h$ .

Os valores apropriados de  $a_1$  ou  $a_2$  podem ser determinados a partir da figura 20.

Figura 20 – Vão efetivo



(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 80)

O carregamento  $p$  atuante nas lajes das edificações é geralmente considerado como uniformemente distribuído e pode ser dividido em cargas permanentes e acidentais:

$$p = q + g \quad (\text{equação 46})$$

Onde:

$q$  = parcela das cargas acidentais atuantes na laje;

$g$  = parcela das cargas permanentes atuantes na laje.

De acordo com a NBR 6120 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1980, p. 1), as cargas permanentes são constituídas pelo peso próprio da estrutura e de todos os elementos construtivos fixos e instalações presentes, enquanto que as cargas acidentais ou variáveis são aquelas que atuam na edificação em função do seu uso, incluindo, por exemplo, pessoas, móveis, materiais diversos e veículos. Tanto as cargas permanentes quanto as cargas acidentais têm seus valores característicos fornecidos por esta mesma Norma.

Alguns valores usuais de cargas para edifícios comerciais (CAMPOS FILHO, 2011, p. 6):

- a) peso específico do concreto armado = 25 kN/m<sup>3</sup>;
- b) peso específico do concreto simples = 24 kN/m<sup>3</sup>;
- c) enchimento de lajes rebaixadas = 14 kN/m<sup>3</sup>;
- d) reboco de 1 cm = 0,2 kN/m<sup>2</sup>;
- e) revestimento de tacos ou tabuões de madeira = 0,7 kN/m<sup>2</sup>;
- f) revestimento de material cerâmico = 0,85 kN/m<sup>2</sup>;
- g) forro falso = 0,5 kN/m<sup>2</sup>;
- h) carga variável em salas, dormitórios, cozinhas e banheiros = 1,5 kN/m<sup>2</sup>;
- i) carga variável em despensa, lavanderia e área de serviço = 2,0 kN/m<sup>2</sup>;
- j) carga variável em corredores com acesso ao público = 3,0 kN/m<sup>2</sup>;
- k) carga variável em corredores sem acesso ao público = 2,5 kN/m<sup>2</sup>.

Visando limitar as deformações e evitar as vibrações que possam causar desconforto aos usuários das edificações, a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 18) estabelece alguns limites mínimos para as espessuras das lajes:

- a) 5 cm para lajes de cobertura não em balanço;

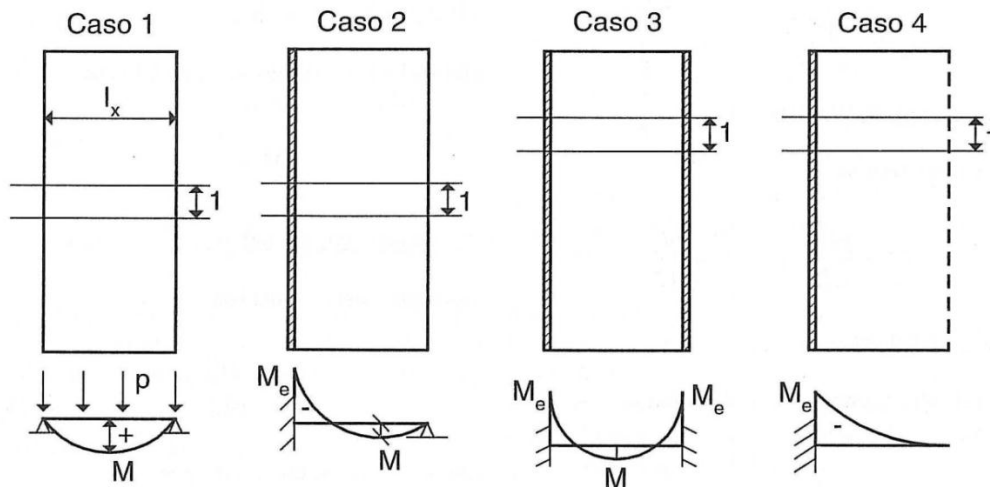
- b) 7 cm para lajes de piso ou de cobertura em balanço;
- c) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- d) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN.

#### 4.1 CÁLCULO DAS LAJES ARMADAS EM UMA DIREÇÃO

Como visto anteriormente, somente o momento fletor na direção do menor vão precisa ser calculado nas lajes armadas em uma só direção. O dimensionamento será feito como se as lajes fossem vigas, considerando uma faixa de largura unitária na direção do menor vão. Na direção do maior vão, será utilizada uma armadura de distribuição.

Admitindo-se que as lajes estejam submetidas a uma carga uniformemente distribuída  $p$  e sendo  $l_x$  o vão de cálculo, poderá ocorrer, dependendo das condições de apoio, um dos quatro esquemas estruturais representados na figura 21.

Figura 21 – Momentos fletores nas lajes armadas em uma direção



(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003, p. 11)

O momento positivo máximo numa laje apoiada nos dois lados (caso 1) vale:

$$M = \frac{pl_x^2}{8} \quad (\text{equação 47})$$

Para uma laje apoiada em um lado e engastada no outro (caso 2), o momento positivo máximo e o momento negativo no engaste valerão, respectivamente:

$$M = \frac{pl_x^2}{14,22} \quad (\text{equação 48})$$

$$M_e = -\frac{pl_x^2}{8} \quad (\text{equação 49})$$

Já para uma laje engastada nos dois lados (caso 3), o momento positivo máximo e os momentos negativos nos engastes serão:

$$M = \frac{pl_x^2}{24} \quad (\text{equação 50})$$

$$M_e = -\frac{pl_x^2}{12} \quad (\text{equação 51})$$

Por fim, para uma laje em balanço (caso 4), o momento de engastamento será:

$$M_e = -\frac{pl_x^2}{2} \quad (\text{equação 52})$$

## 4.2 CÁLCULO DAS LAJES ARMADAS EM DUAS DIREÇÕES

O cálculo dos esforços nas lajes armadas em duas direções deve ser feito levando em conta sua flexão biaxial, o que aumenta consideravelmente a complexidade do problema (ARAÚJO, 2003, p. 31). Existem diversos métodos disponíveis na bibliografia, porém este trabalho se

restringirá ao método plástico através da teoria das charneiras plásticas e ao método elástico através do Método de Marcus. A formulação necessária para a determinação dos momentos nos vãos e nos engastes foi demonstrada no capítulo 3.

### 4.3 DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS

O dimensionamento das armaduras é feito para uma seção retangular de largura  $b = 100$  cm e altura útil  $d$ . Segundo Araújo (2003, p. 130), como a armadura é disposta na forma de malha, a altura útil poderá variar dependendo da direção analisada.

Considerando a seção de dimensionamento da figura 22, a altura útil média é dada por:

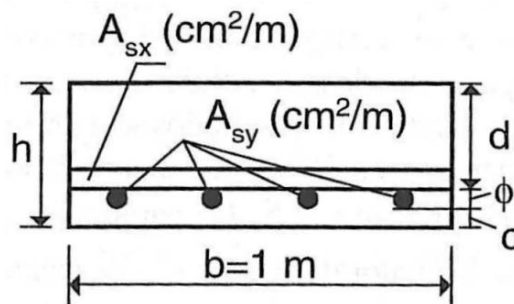
$$d = h - \phi - c \quad (\text{equação 53})$$

Onde:

$\phi$  = diâmetro das barras;

$c$  = cobrimento nominal das armaduras.

Figura 22 – Seção transversal para o cálculo das armaduras das lajes



(fonte: ARAÚJO, 2003, p. 130)

Segundo a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 17), a espessura e a qualidade do concreto do cobrimento influenciam diretamente na durabilidade das estruturas. O cobrimento nominal depende da classe de agressividade ambiental ao qual a laje é exposta. Classifica-se a classe de agressividade ambiental de acordo com o quadro 2 e faz-se sua correspondência com o cobrimento nominal por meio do quadro 3.

Quadro 2 – Classes de agressividade ambiental

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana <sup>1), 2)</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>1)</sup>	Grande
		Industrial <sup>1), 2)</sup>	
IV	Muito forte	Industrial <sup>1), 3)</sup>	Elevado
		Respingos de maré	

<sup>1)</sup> Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

<sup>2)</sup> Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) em: obras em regiões de clima seco, com umidade relativa do ar menor ou igual a 65%, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos, ou regiões onde chove raramente.

<sup>3)</sup> Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 16)

Quadro 3 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobertura nominal

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (tabela 6.1)			
		I	II	III	IV <sup>3)</sup>
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje <sup>2)</sup>	20	25	35	45
	Viga/Pilar	25	30	40	50
Concreto protendido <sup>1)</sup>	Todos	30	35	45	55

<sup>1)</sup> Cobrimento nominal da armadura passiva que envolve a bainha ou os fios, cabos e cordoalhas, sempre superior ao especificado para o elemento de concreto armado, devido aos riscos de corrosão fragilizante sob tensão.

<sup>2)</sup> Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento tais como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros tantos, as exigências desta tabela podem ser substituídas por 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15$  mm.

<sup>3)</sup> Nas faces inferiores de lajes e vigas de reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45$  mm.

(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 18)

O dimensionamento das armaduras deve ser feito segundo as equações 54 e 55 (CAMPOS FILHO, 2011, p. 12):

$$x = 1,25d \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425f_{cb}bd^2}} \right) \quad (\text{equação 54})$$



Onde:

$x$  = altura da linha neutra;

$d$  = altura útil;

$M_d$  = momento fletor de cálculo;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto;

$b$  = largura da seção retangular.

$$A_s = \frac{0,68f_{cd}bx}{f_{yd}} \quad (\text{equação 55})$$

Onde:

$A_s$  = área da seção transversal da armadura longitudinal de tração;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto;

$b$  = largura da seção retangular;

$x$  = altura da linha neutra;

$f_{yd}$  = resistência de cálculo ao escoamento do aço da armadura passiva.

A NBR 6118 define, no quadro 4, os valores mínimos de armadura passiva, visando melhorar o desempenho e a ductilidade à flexão, além de controlar a fissuração (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 142).

Quadro 4 – Valores mínimos para amaduras passivas aderentes

Armadura	Elementos estruturais sem amaduras ativas
Armaduras negativas	$\rho_s \geq \rho_{\min}$
Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções	$\rho_s \geq 0,67\rho_{\min}$
Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção	$\rho_s \geq \rho_{\min}$
Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20\%$ da armadura principal $A_s/s \geq 0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\rho_s \geq 0,5 \rho_{\min}$
Onde: $\rho_s = A_s/b_w h$ e $\rho_p = A_p/b_w h$ .	

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 143)

Os valores de  $\rho_{min}$  constam no quadro 5.

Quadro 5 - Taxas mínimas de armadura de flexão

Forma da seção	Valores de $\rho_{min}^{1)}$ ( $A_{s,min}/A_c$ )							
	$f_{ck}$	%						
	$\omega_{min}$	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288

<sup>1)</sup> Os valores de  $\rho_{min}$  estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{min}$  deve ser recalculado com base no valor de  $\omega_{min}$  dado.

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 117)

A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 153) ainda estabelece algumas prescrições gerais relativas ao detalhamento das armaduras das lajes:

As armaduras devem ser dispostas de forma que se possa garantir o seu posicionamento durante a concretagem.

Qualquer barra da armadura de flexão deve ter diâmetro no máximo igual a  $h/8$ .

As barras da armadura principal de flexão devem apresentar espaçamento no máximo igual a  $2h$  ou 20 cm, prevalecendo o menor desses dois valores na região dos maiores momentos fletores.

A armadura secundária de flexão deve ser igual ou superior a 20% da armadura principal, mantendo-se, ainda, um espaçamento entre barras de, no máximo, 33 cm. A emenda dessas barras deve respeitar os mesmos critérios de emenda das barras da armadura principal.

Quando houver predominância de cargas permanentes, a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 86) permite que as lajes adjacentes sejam consideradas isoladas, realizando-se a compatibilização dos momentos de forma aproximada e iterativa ou então adotando o maior dos momentos negativos. Assim sendo, a armadura de continuidade ao longo da borda será calculada para o maior dos momentos de engastamento e a menor das alturas úteis. Segundo Campos Filho (2011, p. 30), essas armaduras devem se estender para cada lado do eixo do apoio um comprimento igual a  $1/4$  do maior dos vãos menores de ambas as lajes. Para a armadura de borda, deve ser colocada uma armadura de contorno igual a  $1/4$  da armadura máxima no vão, não menor que barras de 5 mm a cada 20 cm e com uma extensão igual a  $1/5$  do menor vão da laje.

#### 4.4 VERIFICAÇÃO DA FLECHA

A NBR 6118 estabelece alguns limites para os deslocamentos dos elementos estruturais, de modo a evitar sensações desagradáveis aos usuários e permitir a utilização daquela estrutura. Para edifícios comerciais e residências, basta limitar a flecha provocada pela totalidade das cargas. Isso é possível uma vez que a carga acidental é pequena em comparação com a carga permanente (ARAÚJO, 2003, p. 126).

As flechas devem ser calculadas para a combinação quase permanente de carregamento. Segundo a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 62), nas combinações quase permanentes de serviço, todas as ações variáveis devem ser consideradas com seus valores quase permanentes  $\psi_2 F_{qk}$ . O cálculo das solicitações é realizado segundo a equação 56:

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \quad (\text{equação 56})$$

Onde:

$F_{d,ser}$  = valor de cálculo das ações para combinações de serviço;

$F_{gi,k}$  = valor característico das ações permanentes;

$\psi_2$  = fator de redução de combinação quase permanente para ELS (quadro 6);

$F_{qj,k}$  = valor característico das ações variáveis.

Quadro 6 – Valores do coeficiente  $\psi_2$

Ações		$\psi_2$
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>2)</sup>	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>3)</sup>	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,6
<sup>2)</sup> Edifícios residenciais.		
<sup>3)</sup> Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.		

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 59)

Segundo Campos Filho (2011, p. 8), a flecha imediata  $w_{t=0}$  pode ser calculada por:

$$w_{t=0} = \kappa \frac{F_{d,ser} l_y^4}{E_{cs} I_{eq}} \quad (\text{equação 57})$$

Onde:

$\kappa$  = coeficiente que depende da vinculação e da relação entre os vãos da laje;

$F_{d,ser}$  = valor de cálculo das ações para combinações de serviço;

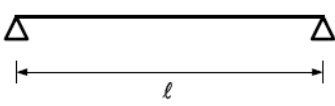
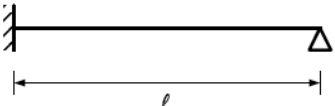
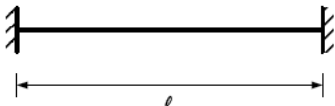
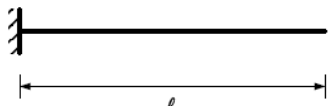
$l_y$  = menor vão da laje;

$E_{cs}$  = módulo de elasticidade secante do concreto;

$I_{eq}$  = momento de inércia da seção equivalente.

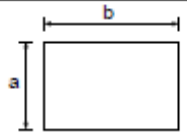
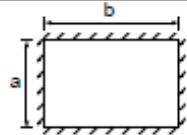
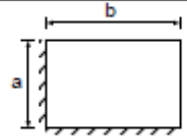
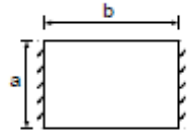
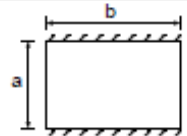
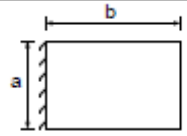
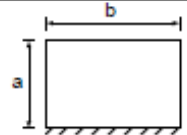
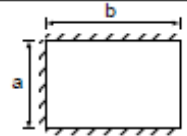
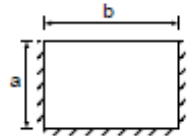
Os valores do coeficiente  $\kappa$  são extraídos dos quadros 7 e 8.

Quadro 7 – Valores de  $\kappa$  para lajes armadas em uma direção

	1,30
	0,53
	0,26
	12,5

(fonte: CAMPOS FILHO, 2011, p. 8)

Quadro 8 – Valores de  $\kappa$  para lajes armadas em duas direções

a/b	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	0,99	0,85	0,71	0,59	0,48	0,40
	0,25	0,23	0,21	0,18	0,15	0,13
	0,46	0,41	0,36	0,30	0,25	0,21
	0,83	0,63	0,48	0,35	0,26	0,19
	0,25	0,25	0,24	0,23	0,21	0,19
	0,91	0,73	0,58	0,46	0,35	0,28
	0,48	0,44	0,41	0,36	0,31	0,28
	0,24	0,24	0,23	0,20	0,18	0,16
	0,44	0,38	0,32	0,25	0,20	0,16

(fonte: CAMPOS FILHO, 2011, p. 9)

O módulo de elasticidade secante do concreto  $E_{cs}$  deve ser calculado pela equação 58 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 23):

$$E_{cs} = 0,85.5600f_{ck}^{1/2} \quad (\text{equação 58})$$

Onde:

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto.

A flecha de longa duração  $w_{t=\infty}$  inclui as deformações por fluência do concreto e pode ser obtida através da seguinte relação (CAMPOS FILHO, 2011, p. 10):

$$w_{t=\infty} = (1 + \alpha_f)w_{t=0} \quad (\text{equação 59})$$

Onde:

$\alpha_f$  = parâmetro para considerar as deformações por fluência do concreto;

$w_{t=0}$  = flecha imediata.

De acordo com Campos Filho (2011, p. 10), considerando-se que as lajes não tem armadura de compressão e, a favor da segurança, tomando-se  $t = \infty$  e  $t_0 = 1$  mês, tem-se:

$$\alpha_f = \Delta\xi = \xi(t = \infty) - \xi(t_0 = 1\text{mês}) \quad (\text{equação 60})$$

Onde:

$\xi$  = coeficiente em função do tempo.

O coeficiente  $\xi$  pode ser obtido diretamente do quadro 9 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 113).

Quadro 9 – Valores do coeficiente  $\xi$  em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	$\geq 70$
Coeficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 113)

O valor da flecha de longa duração calculado pela equação 55 deve ser comparado com o valor da flecha admissível fornecido pelo quadro 10. Caso a flecha de longa duração seja superior à flecha admissível, deve-se aumentar a espessura da laje até satisfazer esta condição.

Quadro 10 – Limites para deslocamentos

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	ℓ /250
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	ℓ /350

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 70)

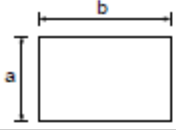
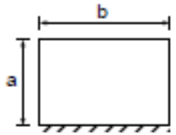
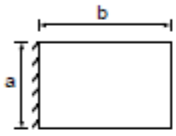
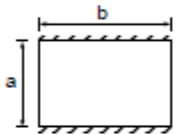
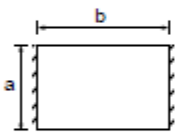
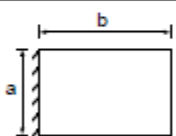
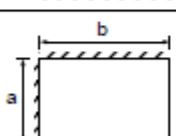
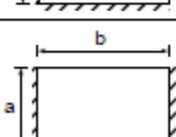
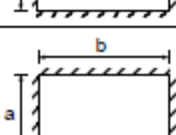
## 4.5 REAÇÕES DE APOIO

Podem ser feitas as seguintes aproximações para o cálculo das reações de apoio nas lajes maciças retangulares com carga uniforme (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 85-86):

- a) as reações em cada apoio são as correspondentes às cargas atuantes nos triângulos ou trapézios determinados através das charneiras plásticas [...], sendo que essas reações podem ser, de maneira aproximada, consideradas uniformemente distribuídas sobre os elementos estruturais que lhes servem de apoio;
- b) quando a análise plástica não for efetuada, as charneiras podem ser aproximadas por retas inclinadas, a partir dos vértices com os seguintes ângulos:
  - 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
  - 60° a partir do apoio considerado engastado, se o outro for considerado simplesmente apoiado;
  - 90° a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.

Utilizando os critérios estabelecidos no item (b), é possível obter os valores das reações de apoio com o auxílio do quadro 11.

Quadro 11 – Reações de apoio em lajes armadas em duas direções

b/a		1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,80	2,00
	$v_x$	250	238	227	217	208	200	192	185	179	173	167	161	156	139	125
	$v_b$	250	262	273	283	292	300	308	315	321	327	333	339	344	361	375
	$v_x$	183	175	167	160	153	147	141	136	131	126	22	118	115	102	092
	$v_{bs}$	402	412	422	431	440	447	455	461	468	474	479	484	488	504	517
	$v_{br}$	232	238	244	249	254	259	263	267	270	274	277	280	282	292	299
	$v_{as}$	402	388	378	366	355	342	331	320	310	300	289	280	272	241	217
	$v_{ar}$	232	226	218	212	205	198	191	184	179	173	167	161	156	139	125
	$v_b$	183	193	202	211	220	230	239	248	256	264	272	280	286	310	329
	$v_x$	144	137	131	125	120	115	111	107	103	099	096	093	090	080	072
	$v_b$	356	363	369	375	380	385	389	393	397	401	404	407	410	420	428
	$v_x$	356	349	341	334	327	320	312	304	297	290	283	275	267	241	217
	$v_b$	144	151	159	166	173	180	188	196	203	210	217	225	233	259	283
	$v_{as}$	317	312	288	276	264	254	244	235	227	219	211	204	198	176	159
	$v_{ar}$	183	175	167	160	153	147	141	136	131	126	122	118	115	102	091
	$v_{bs}$	317	332	347	359	371	381	391	400	408	416	424	431	437	459	476
	$v_{br}$	183	191	198	205	212	218	224	229	234	239	243	247	250	263	274
	$v_{as}$	250	237	227	217	208	200	192	185	179	173	166	161	156	138	125
	$v_{ar}$	144	137	131	125	120	114	110	107	103	099	096	093	090	080	071
	$v_b$	303	313	321	329	336	343	349	354	359	364	369	373	377	391	402
	$v_x$	304	294	284	274	264	254	244	235	227	219	211	204	198	176	159
	$v_{bs}$	250	263	275	288	301	314	327	339	350	360	370	378	387	416	437
	$v_{br}$	142	149	157	164	171	178	185	191	196	202	208	214	217	232	245
	$v_x$	250	238	227	217	208	200	192	185	179	173	167	161	156	139	125
	$v_b$	250	262	273	283	292	300	308	315	321	327	333	339	344	361	375

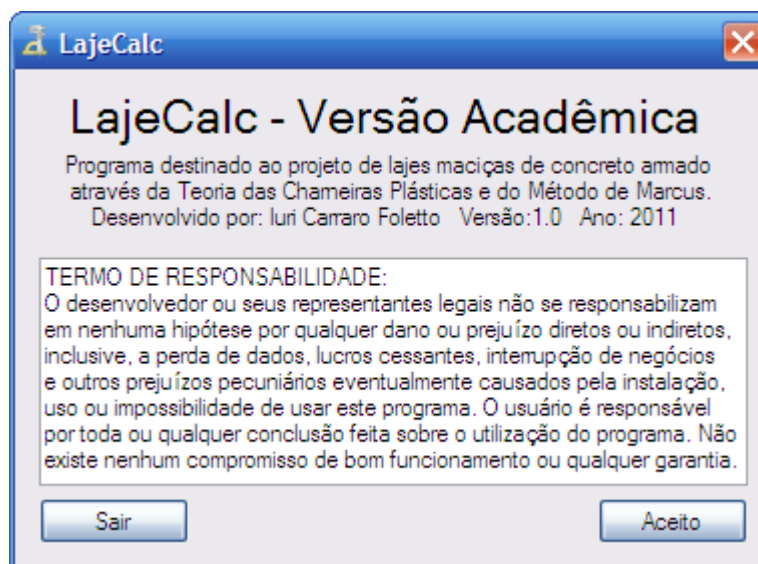
(fonte: CAMPOS FILHO, 2011, p. 32)



## 5 PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O PROJETO DE LAJES MACIÇAS EM CONCRETO ARMADO

O objetivo deste capítulo é apresentar o programa computacional desenvolvido para o projeto de lajes maciças em concreto armado, demonstrando suas principais funções e características. O *software*, denominado **LajeCalc** (figura 23), foi inteiramente desenvolvido no *Microsoft Visual Basic 2010 Express*, visando a simplicidade na manipulação dos dados e clareza na exposição dos resultados.

Figura 23 – Janela de abertura do *software* LajeCalc



(elaborado pelo autor)

A interface geral do programa divide-se em seis abas, que constituem as etapas necessárias para o projeto de uma laje:

- a) Dados da Laje;
- b) Esforços;
- c) Armadura Positiva;
- d) Armadura Negativa;
- e) Detalhamento;
- f) Relatório.

Todas essas abas foram posicionadas numa mesma janela, possibilitando ao usuário uma visualização ampla e rápida das informações. Nela estão reunidos tanto os dados de entrada quanto os de saída da laje dimensionada e detalhada. O acesso a uma etapa seguinte só é fornecido caso a etapa atual esteja devidamente completa. Esse procedimento evita eventuais erros de execução, forçando o usuário a preencher todas as informações necessárias.

Além da janela principal, o programa conta com algumas janelas secundárias:

- a) Escolha da Vinculação;
- b) Carregamento;
- c) Verificação dos Dados.

A seguir são descritas cada uma das etapas do software.

## 5.1 ENTRADA DE DADOS

Ao se inicializar o programa, uma janela como a da figura 24 é mostrada ao usuário.

Figura 24 – Aba do *software* LajeCalc: **Dados da Laje**

A interface do software LajeCalc, aba 'Dados da Laje', apresenta os seguintes campos e opções:

- Identificação da Laje:** Nome do Projeto: Novo Projeto; Número da Laje: L01.
- Dimensões da Laje:** Lx (Maior vão efetivo): 5,8 m; Ly (Menor vão efetivo): 4,6 m.
- Tipo de Concreto:** C30.
- Tipo de Aço:** CA-50.
- Classe de Agressividade:** CAA II.
- Espessura da Laje:** Espessura: 12 cm.
- Utilização da Laje:**  Laje de piso;  Laje de cobertura;  Passagem de veículos.
- Método de Cálculo:**  Plástico (Chameiras Plásticas);  Elástico (Método de Marcus).
- Botões:** Vinculação, Carregamento, >>

(elaborado pelo autor)

Nesta janela encontram-se os menus de acesso <Arquivos>, <Ferramentas> e <Ajuda>, sete grupos de informações (Identificação da Laje, Dimensões da Laje, Tipo de Concreto, Tipo de Aço, Classe de Agressividade, Espessura da Laje, Utilização da Laje e Método de Cálculo), e os botões <Vinculação> e <Carregamento>. A aba selecionada, denominada **Dados da Laje**, corresponde à primeira etapa do projeto de lajes, e deve ser totalmente preenchida para dar continuidade às próximas etapas do programa.

O primeiro grupo de informações, denominado **Identificação da Laje**, visa facilitar a organização da saída de dados, especialmente nos escritórios de cálculo que trabalham com diferentes obras simultaneamente.

No segundo grupo, devem-se fornecer as **Dimensões da Laje**, tanto do lado maior quanto do lado menor. Essa dimensão corresponde ao vão efetivo, que é usualmente adotado como a distância entre os centros de apoio. Dependendo da relação entre tais vãos, as lajes serão classificadas em armadas em 1 ou 2 direções.

Em seguida, são definidas as propriedades dos materiais e o tipo de ambiente. Em **Tipo de Concreto**, estão disponíveis sete classes usuais de resistência, variando do C20 até o C50. Em **Tipo de Aço**, o usuário poderá escolher entre as categorias CA-25, CA-50 ou CA-60. Já em **Classe de Agressividade**, deve-se escolher aquela que mais se adéqua ao ambiente em que a laje está exposta. Ao inicializar o programa, estes três parâmetros já estão preenchidos (C30, CA-50 e CA-II), de forma a diminuir o tempo gasto na entrada de dados. Caso a classe de resistência do concreto seja inferior ao limite recomendado pela NBR 6118 para cada classe de agressividade, uma mensagem de erro será acionada.

O sexto e sétimo grupos de informações se destinam, respectivamente, ao preenchimento da **Espessura da Laje** e da **Utilização da Laje** (laje de piso, cobertura ou passagem de veículos). Se a espessura da laje for inferior ao limite mínimo recomendado pela NBR 6118, o programa automaticamente aumenta a espessura dependendo da utilização da mesma.

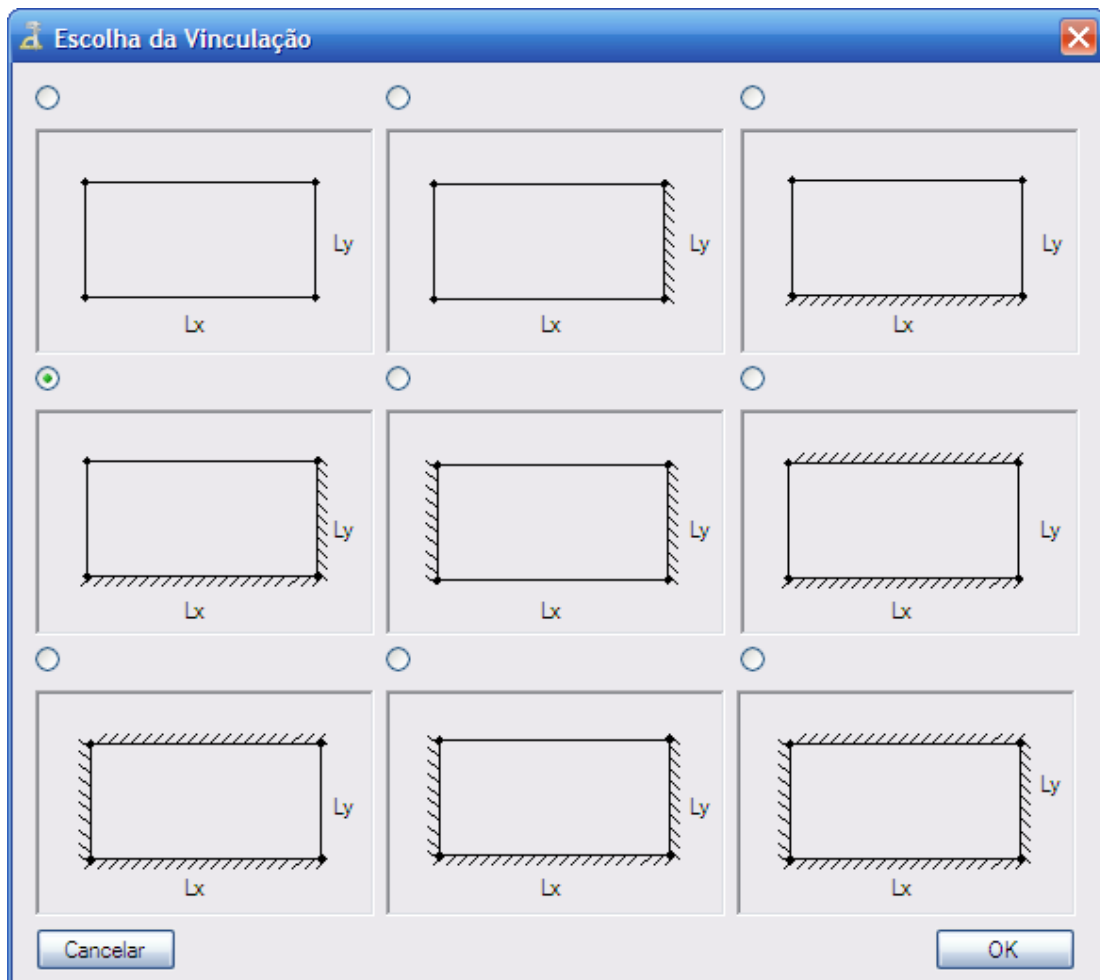
A próxima etapa é a definição da vinculação das lajes. Ao clicar no botão <Vinculação>, uma janela chamada **Escolha da Vinculação** surge. Dependendo da relação entre os vãos, essa janela poderá ser como a da figura 25 (lajes armadas em uma direção) ou 26 (lajes armadas em duas direções).

Figura 25 – Janela do *software* LajeCalc: **Escolha da Vinculação** para lajes armadas em uma direção



(elaborado pelo autor)

Figura 26 – Janela do *software* LajeCalc: **Escolha da Vinculação** para lajes armadas em duas direções



(elaborado pelo autor)

Em seguida, deve-se definir o carregamento atuante na laje. Ao clicar no botão <Carregamento>, a janela da figura 27 é apresentada.

Figura 27 – Janela do *software* LajeCalc: **Carregamento**

(elaborado pelo autor)

Essa janela funciona como uma calculadora de cargas, e se divide em três grupos de informações. O primeiro, intitulado **Tipo de Ambiente**, define a parcela das cargas acidentais de acordo com a NBR 6120. A parte de **Revestimento**, juntamente com o peso próprio da laje, define a parcela das cargas permanentes. Há ainda um terceiro grupo chamado **Outros Carregamentos**, que serve para eventuais carregamentos não listados anteriormente, tais como enchimentos de lajes rebaixadas.

De volta à janela principal, há ainda um último grupo de informações chamado **Método de Cálculo**. Caso a laje seja armada em 1 direção, essa escolha não está acessível e a mesma será

então calculada por analogia à viga equivalente. Caso contrário, o usuário poderá escolher entre o método plástico através da teoria das charneiras plásticas ou elástico através do método de Marcus.

Uma vez que os todos os dados estejam devidamente preenchidos, o usuário poderá seguir para a próxima etapa. Antes disso, porém, uma janela de **Verificação de Dados** aparece na tela, conforme mostra a figura 28. Pode-se então, alterar algum valor incorreto através do botão <Cancelar> ou prosseguir clicando em <OK>.

Figura 28 – Janela do *software* LajeCalc: **Verificação de Dados**

The image shows a software dialog box titled "Verificação de Dados". It is divided into several sections:

- Dimensões da Laje:** Lx (Maior vão efetivo): 5,8 m; Ly (Menor vão efetivo): 4,6 m; Espessura: 12 cm.
- Propriedades dos Materiais:** Tipo de Concreto: C30; Tipo de Aço: CA-50; Classe de Agressividade: CAA II.
- Vinculação:** A diagram showing a rectangular slab with fixed supports on the left and right sides.
- Carregamento:** 5,4 kN/m².
- Método de Cálculo:** Chameiras Plásticas.

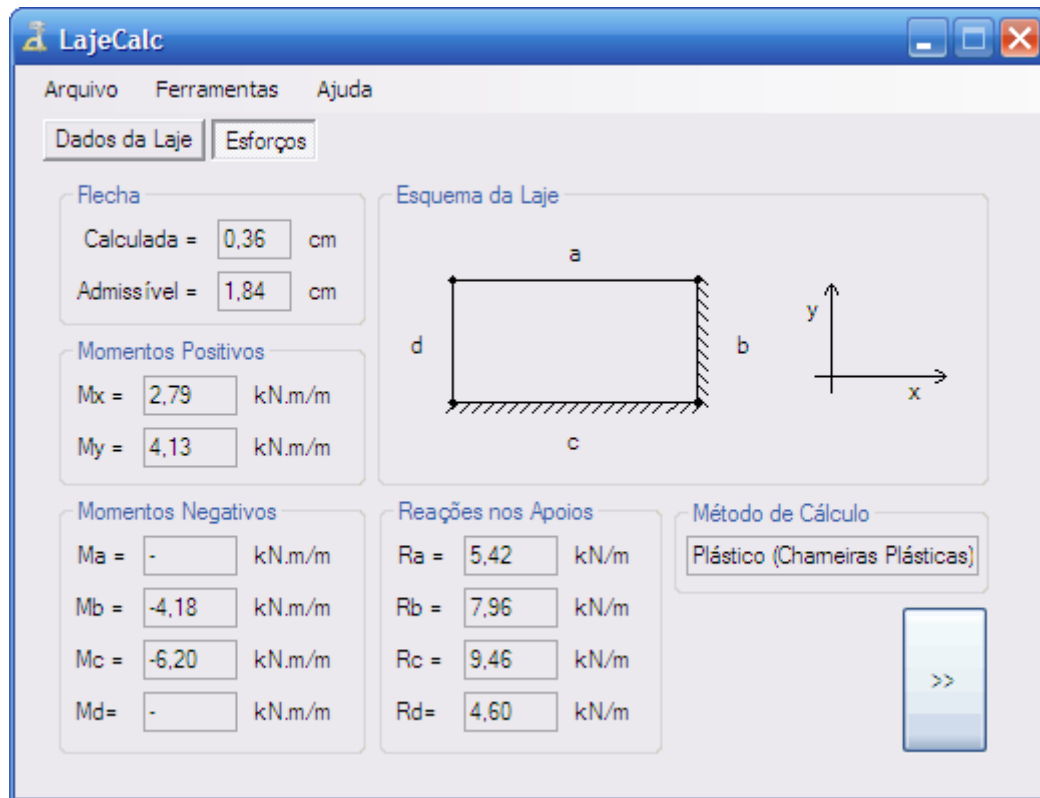
Buttons for "Cancelar" and "OK" are located at the bottom of the dialog.

(elaborado pelo autor)

## 5.2 CÁLCULO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

A segunda etapa do programa visa apresentar os resultados dos cálculos dos esforços solicitantes na laje. Tais solicitações são calculadas em função dos dados fornecidos pelo usuário na etapa anterior, e servem para o dimensionamento das armaduras nas etapas seguintes. Como mostra a figura 29, estão contidos nesta aba, denominada **Esforços**, os seguintes grupos de informações: Flecha, Momentos Positivos, Momentos Negativos, Reações nos Apoios, Esquema da Laje e Método de Cálculo.

Figura 29 – Aba do software LajeCalc: Esforços



(elaborado pelo autor)

O objetivo do grupo de informações **Flecha** é verificar o estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF), através de uma comparação entre a flecha calculada de longa duração e a flecha admissível definida pela NBR 6118. Se a flecha de longa duração for superior à flecha admissível, uma mensagem de erro informa ao usuário que a espessura da laje deve ser incrementada para que a flecha não ultrapasse o limite dado pela Norma.

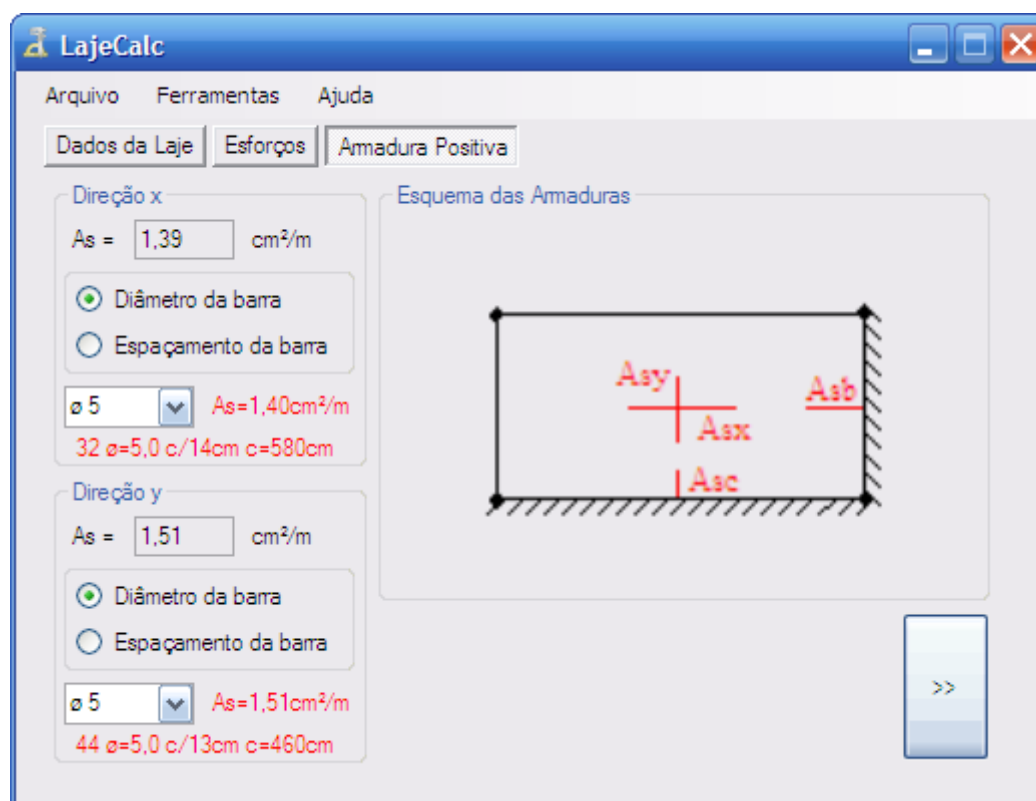
Os momentos nos vãos e nos engastes são exibidos, respectivamente, nos grupos de informações **Momentos Positivos** e **Momentos Negativos**. Seus valores dependem do **Método de Cálculo** escolhido: plástico ou elástico. Há ainda um **Esquema da Laje**, visando facilitar a localização dos esforços solicitantes através da identificação dos lados da laje e das direções dos eixos de coordenadas.

Nesta etapa, o programa também calcula as **Reações nos Apoios**. Essa informação não será usada para o dimensionamento da armadura nas lajes, mas poderá vir a ser útil num posterior cálculo das vigas adjacentes a essa mesma laje.

### 5.3 DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS

A etapa seguinte envolve o dimensionamento das armaduras. Como mostra a figura 30, na aba **Armadura Positiva** o programa exibe a área de aço necessária nos vãos (colocada junto à face inferior da laje), tanto na direção  $x$  quanto  $y$ . Para melhor entendimento da posição das armaduras, há um esquema representativo das armaduras positivas e negativas.

Figura 30 – Aba do *software* LajeCalc: **Armadura Positiva**



(elaborado pelo autor)

Para a definição da armadura em cada direção, o usuário tem a opção de escolher a bitola ou então o espaçamento das barras, sendo o outro parâmetro automaticamente calculado para que a área de aço necessária seja igualada ou superada. Além da bitola, espaçamento das barras e área de aço escolhida, o programa ainda mostra o número de barras e o comprimento das mesmas. Caso o usuário deseje alterar o diâmetro ou o espaçamento, as outras variáveis serão alteradas automaticamente. Seguindo as recomendações de Campos Filho (2011, p. 13), o espaçamento ficou limitado entre 10 a 15 cm, e o diâmetro mínimo escolhido para as barras foi de 4 mm.



As armaduras negativas são dimensionadas de forma semelhante às positivas, porém com algumas peculiaridades, como mostra a figura 31. É necessário fornecer certas informações da laje adjacente como o momento negativo, a espessura e o menor vão da mesma. Com o maior valor do momento negativo e a menor altura útil (proveniente da espessura da laje), pode-se então calcular uma armadura única de continuidade ao longo da borda em comum que foi considerada engastada. O menor vão da laje serve para calcular o comprimento dessas barras, que deve ser igual a 1/4 do maior dos vãos menores das duas lajes em questão. Caso tais informações sejam desconhecidas, pode-se ignorar estes campos, clicando em <OK>. Neste caso, a área de aço necessária e o comprimento das barras serão calculados exclusivamente em função dos dados laje principal.

Figura 31 – Aba do *software* LajeCalc: **Armadura Negativa**

Lado b		Lado c	
Momento laje adj.	4,7 kN.m/m	Momento laje adj.	7,6 kN.m/m
Altura da laje adj.	10 cm	Altura da laje adj.	14 cm
Menor vão laje adj.	3,8 m <input type="button" value="OK"/>	Menor vão laje adj.	5,2 m <input type="button" value="OK"/>
As =	2,08 cm <sup>2</sup> /m	As =	2,52 cm <sup>2</sup> /m
<input checked="" type="radio"/> Diâm. barra		<input checked="" type="radio"/> Diâm. barra	
<input type="radio"/> Esp. barra		<input type="radio"/> Esp. barra	
ø 6,3		ø 8	
As=2,08cm <sup>2</sup> /m		As=2,64cm <sup>2</sup> /m	
30 ø=6,3 c/15cm		30 ø=8,0 c/19cm	
c=244cm		c=274cm	

(elaborado pelo autor)

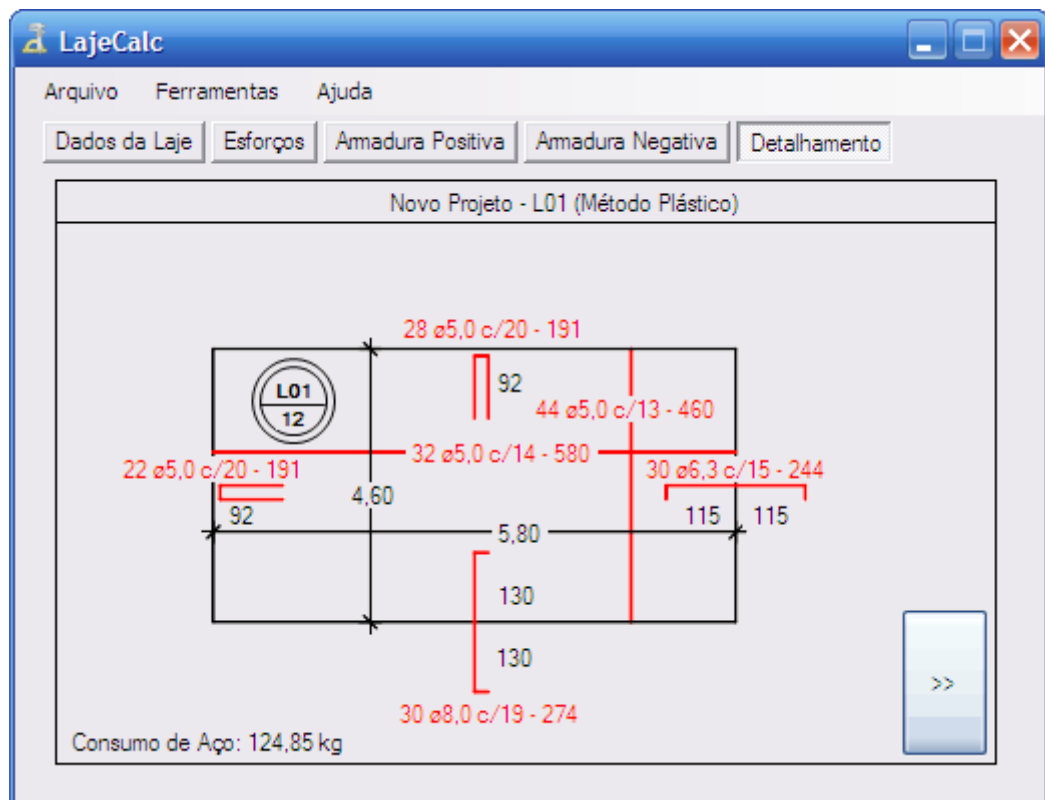
Assim como nas armaduras positivas, aqui também há a opção de escolher a bitola ou o espaçamento das barras. As outras variáveis serão calculadas automaticamente. Limitou-se entre 15 e 20 cm o espaçamento entre as barras e o diâmetro mínimo adotado para as mesmas ficou em 5 mm.

## 5.4 DETALHAMENTO

Feito a escolha da armadura negativa presente na laje, o programa parte para a etapa do dimensionamento. Como mostra a figura 32, o objetivo desta etapa é apresentar ao usuário um esquema gráfico reunindo as seguintes informações:

- nome do projeto, número da laje e método de cálculo;
- identificação da laje, sua espessura e dimensões;
- quantidade, bitola, espaçamento e comprimento total das barras;
- consumo total de aço.

Figura 32 – Aba do *software* LajeCalc: **Detalhamento**



(elaborado pelo autor)

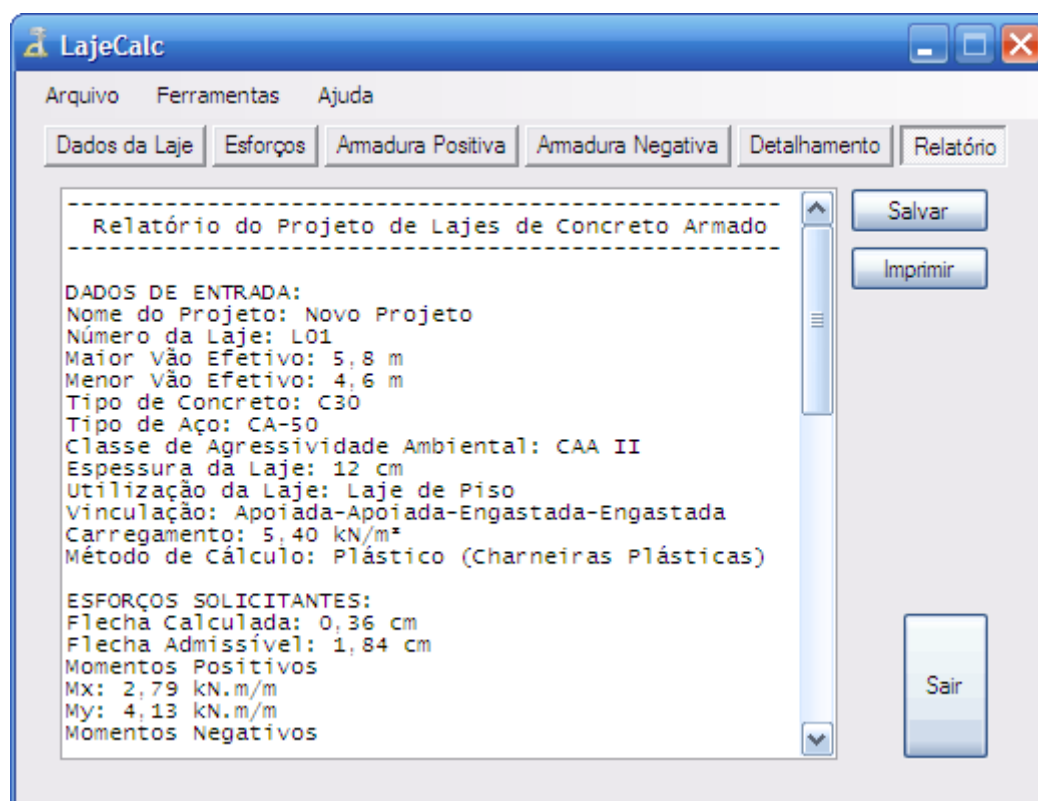
Além da armadura positiva e negativa calculada anteriormente, o programa também exibe a armadura de contorno presente nas bordas apoiadas da laje. Esta deve ser igual a 1/4 da maior armadura no vão (não menor que 1 cm<sup>2</sup>/m) e possuir um comprimento igual a 1/5 do menor vão da laje.

## 5.5 RELATÓRIO

A última etapa do programa consiste na geração de um relatório, apresentado na figura 33. Sua função é de agrupar as principais variáveis envolvidas no dimensionamento das lajes de forma a conceder ao usuário uma memória de cálculo. As informações que podem ser encontradas neste relatório são as seguintes:

- dados de entrada: nome do projeto, número da laje, vãos efetivos, tipo de concreto e aço, classe de agressividade ambiental, espessura da laje, utilização da laje, vinculação, carregamento e método de cálculo;
- esforços solicitantes: flecha calculada e admissível, momentos positivos e negativos e reações de apoio;
- armadura positiva e negativa: taxa de armadura necessária e escolhida, quantidade, bitola, espaçamento e comprimento total das barras;
- consumo total de aço.

Figura 33 – Aba do *software* LajeCalc: **Relatório**



(elaborado pelo autor)

Esse relatório pode ser salvo em um arquivo texto clicando-se em <SALVAR> ou então impresso através do botão <IMPRIMIR>.

## 5.6 ALGUNS EXEMPLOS

Tendo em vista a validação do *software* e a análise dos resultados, três exemplos de projeto de lajes foram elaborados:

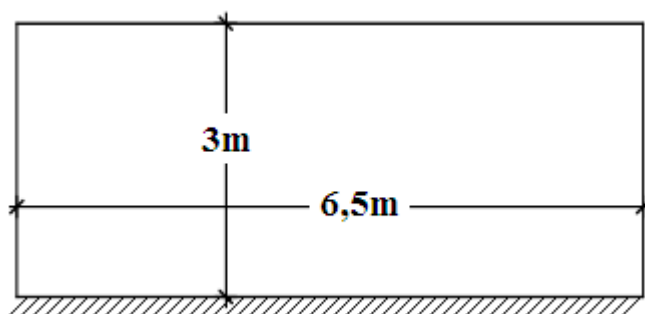
- a) laje armada em uma direção;
- b) laje armada em duas direções (método plástico);
- c) laje armada em duas direções (método elástico).

Nos três casos, os resultados do programa coincidiram com os resultados do cálculo manual, demonstrando a eficácia do *software* e permitindo assim a sua validação. Os exemplos desenvolvidos são apresentados em seguida.

### 5.6.1 Exemplo 1: laje armada em uma direção

O primeiro exemplo envolve a laje da figura 34, correspondente a uma cozinha de um edifício residencial em ambiente urbano (classe de agressividade ambiental II). A laje tem espessura de 10 cm e é executada com concreto C25 e aço CA-50. O revestimento é feito de material cerâmico e reboco de 1 cm.

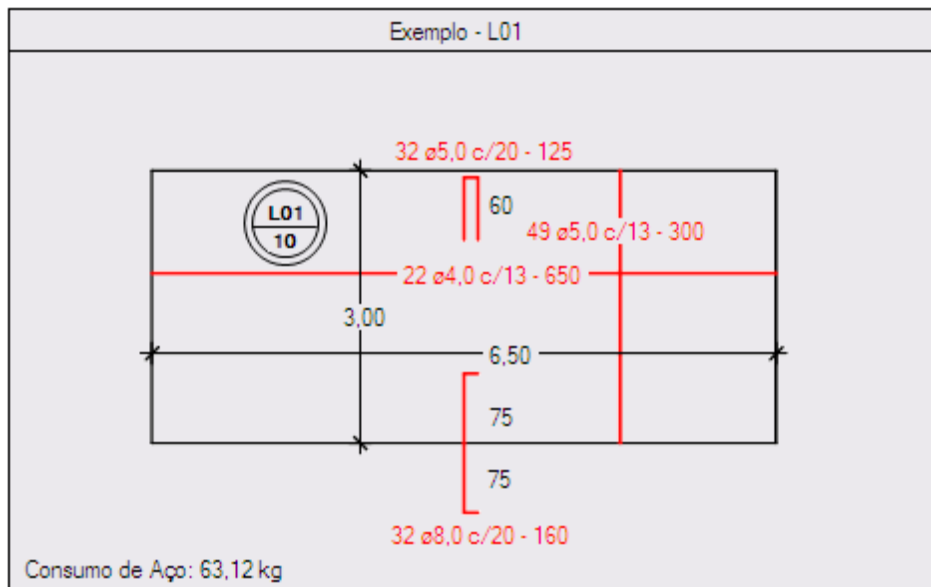
Figura 34 – Exemplo 1: laje armada em uma direção



(elaborado pelo autor)

Os resultados do detalhamento e a memória de cálculo se encontram respectivamente nas figuras 35 e 36.

Figura 35 – Exemplo 1: detalhamento



(elaborado pelo autor)

Figura 36 – Exemplo 1: memória de cálculo

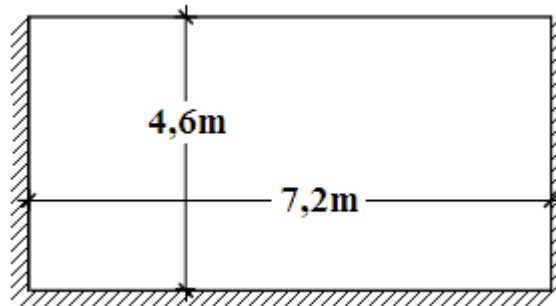
Relatório do Projeto de Lajes de Concreto Armado
<b>DADOS DE ENTRADA:</b>
Nome do Projeto: Exemplo
Número da Laje: L01
Maior Vão Efetivo: 6,5 m
Menor Vão Efetivo: 3 m
Tipo de Concreto: C25
Tipo de Aço: CA-50
Classe de Agressividade Ambiental: CAA II
Espessura da Laje: 10 cm
Utilização da Laje: Laje de Piso
Vinculação: Engastada-Apoiada
Carregamento: 5,05 kN/m <sup>2</sup>
Método de Cálculo: Analogia à viga
<b>ESFORÇOS SOLICITANTES:</b>
Flecha Calculada: 0,20 cm
Flecha Admissível: 1,20 cm
Momentos Positivos
My: 3,20 kN.m/m
Momentos Negativos
Mc: -5,68 kN.m/m
Reações nos Apoios
Ra: -9,46 kN/m
Rc: 24,62 kN/m
<b>ARMADURA POSITIVA:</b>
Direção X:
Taxa de armadura necessária: 0,90 cm <sup>2</sup> /m
Taxa de armadura escolhida: 0,97 cm <sup>2</sup> /m
Armadura escolhida: 22 $\phi$ =4,0 c/13cm c=650cm
Direção Y:
Taxa de armadura necessária: 1,52 cm <sup>2</sup> /m
Taxa de armadura escolhida: 1,51 cm <sup>2</sup> /m
Armadura escolhida: 49 $\phi$ =5,0 c/13cm c=300cm
<b>ARMADURA NEGATIVA:</b>
Lado C:
Taxa de armadura necessária: 2,39 cm <sup>2</sup> /m
Taxa de armadura escolhida: 2,51 cm <sup>2</sup> /m
Armadura escolhida: 32 $\phi$ =8,0 c/20cm c=160cm
<b>CONSUMO:</b>
Consumo Total de Aço: 63,12 kg

(elaborado pelo autor)

### 5.6.2 Exemplo 2: laje armada em duas direções (método plástico)

O segundo exemplo envolve a laje da figura 37, correspondente a uma sala de escritório em ambiente industrial (classe de agressividade ambiental III). A laje tem espessura de 12 cm e é executada com concreto C35 e aço CA-50. O revestimento é feito com tacos de madeira e reboco de 1 cm.

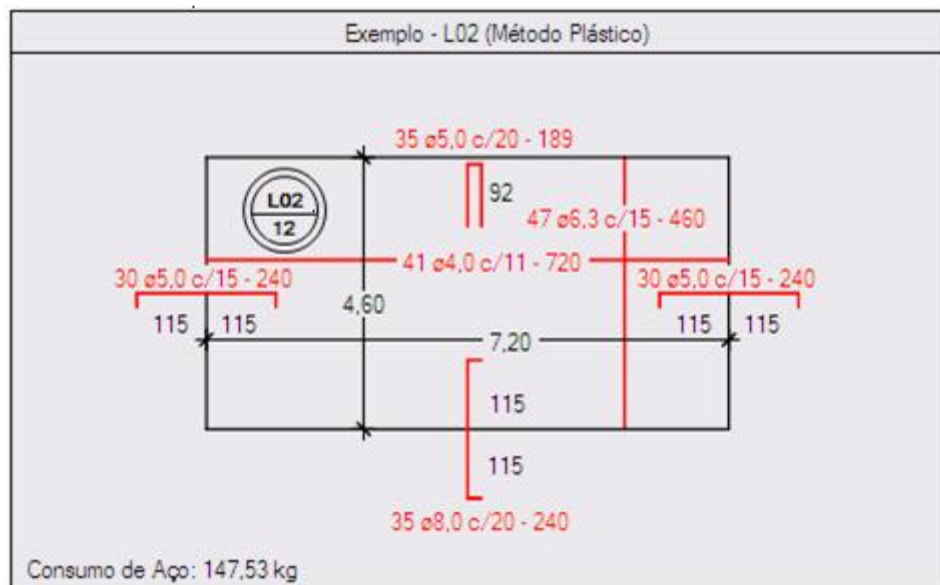
Figura 37 – Exemplo 2: laje armada em duas direções



(elaborado pelo autor)

Utilizando o método plástico, chega-se ao detalhamento e memória de cálculo representados respectivamente pelas figuras 38 e 39.

Figura 38 – Exemplo 2: detalhamento



(elaborado pelo autor)

Figura 39 – Exemplo 2: memória de cálculo

Relatório do Projeto de Lajes de Concreto Armado	
<b>DADOS DE ENTRADA:</b>	
Nome do Projeto: Exemplo	
Número da Laje: L02	
Maior Vão Efetivo: 7,2 m	
Menor Vão Efetivo: 4,6 m	
Tipo de Concreto: C35	
Tipo de Aço: CA-50	
Classe de Agressividade Ambiental: CAA III	
Espessura da Laje: 12 cm	
Utilização da Laje: Laje de Piso	
Vinculação: Apoiada-Engastada-Engastada-Engastada	
Carregamento: 5,90 kN/m <sup>2</sup>	
Método de Cálculo: Plástico (Charneiras Plásticas)	
<b>ESFORÇOS SOLICITANTES:</b>	
Flecha Calculada: 0,46 cm	
Flecha Admissível: 1,84 cm	
<b>Momentos Positivos</b>	
Mx: 2,67 kN.m/m	
My: 4,90 kN.m/m	
<b>Momentos Negativos</b>	
Mb: -4,01 kN.m/m	
Mc: -7,35 kN.m/m	
Md: -4,01 kN.m/m	
<b>Reações nos Apoios</b>	
Ra: 5,81 kN/m	
Rb: 8,67 kN/m	
Rc: 10,26 kN/m	
Rd: 8,67 kN/m	
<b>ARMADURA POSITIVA:</b>	
<b>Direção X:</b>	
Taxa de armadura necessária: 1,09 cm <sup>2</sup> /m	
Taxa de armadura escolhida: 1,14 cm <sup>2</sup> /m	
Armadura escolhida: 41 $\phi$ =4,0 c/11cm c=720cm	
<b>Direção Y:</b>	
Taxa de armadura necessária: 2,02 cm <sup>2</sup> /m	
Taxa de armadura escolhida: 2,08 cm <sup>2</sup> /m	
Armadura escolhida: 47 $\phi$ =6,3 c/15cm c=460cm	
<b>ARMADURA NEGATIVA:</b>	
<b>Lado B:</b>	
Taxa de armadura necessária: 1,31 cm <sup>2</sup> /m	
Taxa de armadura escolhida: 1,31 cm <sup>2</sup> /m	
Armadura escolhida: 30 $\phi$ =5,0 c/15cm c=240cm	
<b>Lado C:</b>	
Taxa de armadura necessária: 2,43 cm <sup>2</sup> /m	
Taxa de armadura escolhida: 2,51 cm <sup>2</sup> /m	
Armadura escolhida: 35 $\phi$ =8,0 c/20cm c=240cm	
<b>Lado D:</b>	
Taxa de armadura necessária: 1,31 cm <sup>2</sup> /m	
Taxa de armadura escolhida: 1,31 cm <sup>2</sup> /m	
Armadura escolhida: 30 $\phi$ =5,0 c/15cm c=240cm	
<b>CONSUMO:</b>	
Consumo Total de Aço: 147,53 kg	

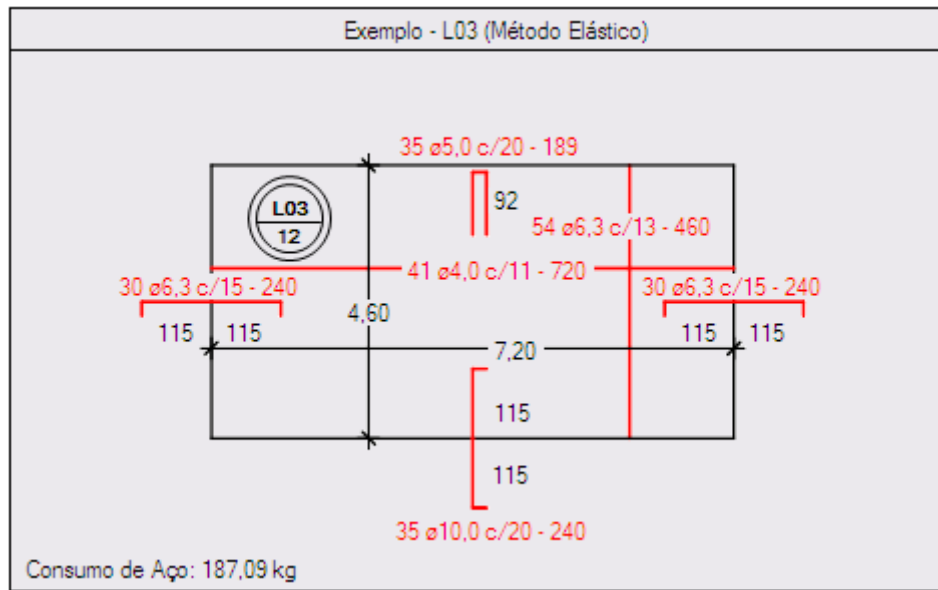
(elaborado pelo autor)

### 5.6.3 Exemplo 3: laje armada em duas direções (método elástico)

O terceiro exemplo envolve a mesma laje do exemplo 2 (figura 37). A única diferença é a utilização do método elástico ao invés do método plástico. O objetivo deste exemplo é fazer uma comparação entre os esforços, áreas de aço necessárias e consumo de aço.

Os resultados do detalhamento e a memória de cálculo se encontram respectivamente nas figuras 40 e 41.

Figura 40 – Exemplo 3: detalhamento



(elaborado pelo autor)

Figura 41 – Exemplo 3: memória de cálculo

Relatório do Projeto de Lajes de Concreto Armado	
<p><b>DADOS DE ENTRADA:</b>  Nome do Projeto: Exemplo  Número da Laje: L03  Maior Vão Efetivo: 7,2 m  Menor Vão Efetivo: 4,6 m  Tipo de Concreto: C35  Tipo de Aço: CA-50  Classe de Agressividade Ambiental: CAA III  Espessura da Laje: 12 cm  Utilização da Laje: Laje de Piso  Vinculação: Apoiada-Engastada-Engastada-Engastada  Carregamento: 5,90 kN/m<sup>2</sup>  Método de Cálculo: Elástico (Método de Marcus)</p> <p><b>ESFORÇOS SOLICITANTES:</b>  Flecha Calculada: 0,46 cm  Flecha Admissível: 1,84 cm  <b>Momentos Positivos</b>  Mx: 2,64 kN.m/m  My: 5,64 kN.m/m  <b>Momentos Negativos</b>  Mb: -6,37 kN.m/m  Mc: -11,71 kN.m/m  Md: -6,37 kN.m/m  <b>Reações nos Apoios</b>  Ra: 5,81 kN/m  Rb: 8,67 kN/m  Rc: 10,26 kN/m  Rd: 8,67 kN/m</p>	<p><b>ARMADURA POSITIVA:</b>  Direção X:  Taxa de armadura necessária: 1,08 cm<sup>2</sup>/m  Taxa de armadura escolhida: 1,14 cm<sup>2</sup>/m  Armadura escolhida: 41 <math>\varnothing</math>4,0 c/11cm c=720cm  Direção Y:  Taxa de armadura necessária: 2,34 cm<sup>2</sup>/m  Taxa de armadura escolhida: 2,40 cm<sup>2</sup>/m  Armadura escolhida: 54 <math>\varnothing</math>6,3 c/13cm c=460cm</p> <p><b>ARMADURA NEGATIVA:</b>  Lado B:  Taxa de armadura necessária: 2,10 cm<sup>2</sup>/m  Taxa de armadura escolhida: 2,08 cm<sup>2</sup>/m  Armadura escolhida: 30 <math>\varnothing</math>6,3 c/15cm c=240cm  Lado C:  Taxa de armadura necessária: 3,93 cm<sup>2</sup>/m  Taxa de armadura escolhida: 3,93 cm<sup>2</sup>/m  Armadura escolhida: 35 <math>\varnothing</math>10,0 c/20cm c=240cm  Lado D:  Taxa de armadura necessária: 2,10 cm<sup>2</sup>/m  Taxa de armadura escolhida: 2,08 cm<sup>2</sup>/m  Armadura escolhida: 30 <math>\varnothing</math>6,3 c/15cm c=240cm</p> <p><b>CONSUMO:</b>  Consumo Total de Aço: 187,09 kg</p>

(elaborado pelo autor)



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo objetiva fazer a análise final do programa para o projeto de lajes maciças em concreto armado, bem como o trabalho de diplomação em sua totalidade, levando em consideração a finalidade pelo qual o mesmo foi desenvolvido.

O objetivo principal do trabalho – a elaboração de um *software* que faça o projeto de lajes maciças em concreto armado através do método plástico para o ELU e, do método elástico, para o ELS – foi alcançado. O programa desenvolvido permite ao engenheiro definir a geometria e a vinculação da laje, escolher as características dos materiais, compor as cargas atuantes na laje, calcular os esforços através do método plástico ou elástico, fazer o dimensionamento e o detalhamento das armaduras da laje e, por fim, obter a memória de cálculo. Na elaboração do programa, tomou-se o cuidado em respeitar os critérios cabíveis estabelecidos pelas Normas NBR 6118 e 6120.

Por meio de uma interface gráfica intuitiva, o programa visa simplicidade e praticidade na sua utilização, seja em ambiente acadêmico ou em escritórios de cálculo. Para tanto, o mesmo conta com recursos de saída de dados em forma textual e gráfica, teclas de atalho, ferramentas e recursos de ajuda.

Constatou-se a eficácia do *software* nos três exemplos realizados, uma vez que os resultados coincidiram com o cálculo manual. Os exemplos 2 e 3 envolveram a mesma laje, porém com os esforços calculados, respectivamente, pelo método plástico (teoria das charneiras plásticas) e elástico (método de Marcus). Verificou-se que os momentos fletores tiveram um aumento médio de 42,67%, enquanto as taxas de armadura necessária aumentaram 41,55%. Já o consumo de aço passou de 147,53 kg para 187,09 kg, o que corresponde num aumento de 26,81%.

Dessa forma, fica evidente a economia que o cálculo plástico pode trazer, tendo em vista que na ocasião da ruína o comportamento da laje é melhor descrito por esta teoria. Apresentando resultados mais coerentes, conclui-se que o método plástico é o mais indicado dentre os métodos simplificados. Cabe salientar que o programa apresenta algumas limitações, como a abrangência exclusiva de lajes com geometria retangular. Para casos com geometrias

complexas ou irregulares, ou então para uma análise mais precisa dos esforços, recomenda-se algum outro método de análise, como o método dos elementos finitos.

De uma maneira geral, a partir dos resultados obtidos pelo programa, pode-se concluir que sua utilização em meio acadêmico e profissional é válida, uma vez que o mesmo apresenta todas as etapas necessárias para o projeto de lajes em concreto armado. Nota-se a presença de rotinas computacionais que impeçam a entrada equívoca de dados, entretanto é altamente recomendável que o usuário tenha ciência de todas as etapas do cálculo. Para isso, cabe a leitura deste trabalho e, caso necessário, das referências utilizadas.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003. v. 2.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- CAMPOS FILHO, A. **Projeto de lajes maciças de concreto armado**. Porto Alegre: UFRGS, 2011. Apostila de aula – Disciplina de Concreto Armado 2. Disponível em: <<http://chasqueweb.ufrgs.br/~americo/eng01112/lajes.pdf>>. Acesso em: 8 jun. 2011.
- CHAVES, E. W. V. **Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno**. 1997. 171 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1997ME\\_EduardoWVieiraChaves.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1997ME_EduardoWVieiraChaves.pdf)>. Acesso em: 5 jun. 2011.
- DUARTE, H. **Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado**. 1998. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1998ME\\_HeraldoDuarte.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1998ME_HeraldoDuarte.pdf)>. Acesso em: 1 jun. 2011.
- JOHANSEN, K. W. **Linhas de ruptura**: teoria e prática. 2. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1962.
- FUSCO, P. B. **Técnica de armar as estruturas de concreto**. São Paulo: Pini, 1995.
- MONTOYA, P. J.; MESEGUER, Á. G.; CABRÉ, F. M. **Hormigón armado**. 14. ed. Barcelona: Gustavo Gili, 2000.
- PINHEIRO, L. M. **Charneiras plásticas em lajes com forma de T**: estudo experimental. 1981. 184 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1981ME\\_LibanioMirandaPinheiro.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1981ME_LibanioMirandaPinheiro.pdf)>. Acesso em: 7 jun. 2011.
- \_\_\_\_\_. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios**. 1988. 303 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1988DO\\_LibanioMirandaPinheiro.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1988DO_LibanioMirandaPinheiro.pdf)>. Acesso em: 19 abr. 2011.
- RIOS, P. M. **Lajes retangulares de edifícios**: associação do cálculo elástico com a teoria das charneiras plásticas. 1991. 246 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1991ME\\_PatriciaMenezesRios.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1991ME_PatriciaMenezesRios.pdf)>. Acesso em: 1 jun. 2011.