Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ITERAÇÃO DE CONTRAÇÕES E PRODUTOS DE MATRIZES

por

EDUARDO FISCHER

Porto Alegre, abril de 2012

Dissertação submetida por EDUARDO FISCHER* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca Examinadora:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Artur Oscar Lopes (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Jairo da Silva Bochi (PUC-RJ)

Data da Defesa: 13 de abril de 2012.

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Resumo

Composições infinitas de um número finito de funções de um espaço métrico compacto nele mesmo podem ser vistas como representantes de elementos de um espaço de seqüências. Através dessa análise, demonstra-se que o conjunto dos pontos de acumulação dos iterados dessas funções é igual à interseção infinita dos conjuntos imagem das iterações. Como aplicação, prova-se que o conjunto limite das direções dos vetores após iterações infinitas de duas transformações lineares com autovetores expansivos suficientemente próximos é um conjunto tipo Cantor.

Abstract

Infinite compositions of a finite number of functions from a compact metric space to itself can be seen as representatives of elements in a sequence space. Through this analysis, one can prove that the set of accumulation points of the iteration of those functions is equal to the infinite intersection of the image of the compositions. As an application, the limit set of the vectors directions after infinite iterations of two linear transformations whose expansive eigenvectors are sufficiently close is a Cantor-like set.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Produtos infinitos de matrizes aparecem naturalmente em questões recorrentes em Sistemas Dinâmicos, como no cálculo de expoentes de Lyapunov e no estudo de cociclos lineares. Normalmente o maior interesse é na taxa de expansão média dos produtos à medida que o número de matrizes a ser multiplicado cresce. Na presente dissertação, o foco é em estudar o conjunto limite das direções. Veremos que mesmo num caso aparentemente simples, com somente duas matrizes envolvidas, o conjunto limite emergente pode ser tão rico quanto um conjunto tipo Cantor.

1.2 Planejamento

O Capítulo 2 percorre as preliminares de dinâmica simbólica. No Capítulo 3 há o desenvolvimento do problema da iteração de duas contrações no intervalo. Nosso resultado principal é que o conjunto limite das iterações é igual à interseção infinita das suas imagens (indexada pelo número de composições executadas). São fornecidos exemplos em que o conjunto é um intervalo da reta, ou um conjunto tipo Cantor. Ainda no mesmo capítulo, generalizamos o resultado para um número finito de contrações em espaços métricos compactos. No Capítulo 4 determinamos o conjunto limite das direções no plano após a ação de produtos infinitos de certas matrizes, mostrando, com o auxílio do Capítulo 3, que ele é um conjunto tipo Cantor.

Capítulo 2

Espaço de seqüências

2.1 Definições

Como preparação para o Capítulo 3, vamos estudar um pouco de dinâmica simbólica. Aqui trabalharemos com um conjunto finito C de m elementos, embora, à revelia da Seção 3.4, precisemos tratar essencialmente do caso $m = 2$.

Definição. *Seja C um conjunto finito, $\#C = m \geq 2$. C será chamado de* alfabeto*, e seus elementos serão chamados* símbolos*. Definimos o* espaço de seqüências de C *como $S = C^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, x_3 \ldots), x_n \in C\}$. Para $x \in S$, denotaremos x_n a imagem de x pela n-ésima projeção de S em C.*

Definição. *Uma* palavra *é um elemento x^n de um (único) C^n, para algum $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $W = \bigcup C^n$. Informalmente, uma palavra é uma seqüência finita de elementos de C. O índice superior direito denota seu* comprimento*, e nunca é omitido. Para denotar uma seqüência de elementos de S ou W, usaremos índices inferiores esquerdos.*

Alguns autores definem uma palavra de comprimento zero, chamada palavra vazia. No presente trabalho desconsideraremos a palavra vazia; todas as palavras têm como comprimento um número inteiro e positivo.

Deve ser destacado que $W \cap S = \emptyset$.

Mas cada $x \in S$ define de maneira natural várias palavras, uma para cada $n \in \mathbb{N}$, simplesmente desconsiderando os termos da seqüência depois do n-ésimo. Explicitamente, partindo de $x = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$, obtemos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Denotaremos tal palavra por $\hat{x}^n$.

Uma maneira alternativa pela qual uma seqüência pode definir uma palavra é aquela que de $x = (x_1, x_2, x_3 \dots)$ forma $(x_n, x_{n-1}, \dots x_1)$. Denotaremos esta palavra por $\breve{x}^n$.

Definição. *Dadas k palavras ${}_ix^{n_i}$, $1 \leq i \leq k$, definimos sua* justaposição *como sendo a palavra $z^{\Sigma n_i}$ com $z_j^{\Sigma n_i} = {}_lx^{n_l}_{j-\Sigma_{i=1}^l n_i}$ para $\Sigma_{i=1}^l n_i \leq j \leq \Sigma_{i=1}^{l+1} n_i$. Também podemos fazer a justaposição de enumeráveis palavras ${}_ix^{n_i}$, $i \in \mathbb{N}$, para formar uma seqüência $z \in S$, $z_j = {}_lx^{n_l}_{j-\Sigma_{i=1}^l n_i}$ para $\Sigma_{i=1}^l n_i \leq j \leq \Sigma_{i=1}^{l+1} n_i$.*

Uma maneira alternativa de denotar a justaposição é escrevendo $z = ({}_1x_1^{n_1}, \dots, {}_1x_{n_1}^{n_1}; {}_2x_1^{n_2}, \dots, {}_2x_{n_2}^{n_2}; \dots)$, ou simplesmente $z = ({}_1x^{n_1}, {}_2x^{n_2}, \dots)$. Os pontos-e-vírgulas substituem algumas vírgulas para facilitar o entendimento.

2.2 Topologia

Sabe-se (ver [Lp68], página 87) que para uma coleção $\Im$ de subconjuntos de um espaço X ser uma base de uma topologia, é necessário e suficiente que $\bigcup_{O \in \Im} = X$ e que $\forall O_1, O_2 \in \Im, x \in O_1 \cap O_2 \, \exists \, O_3 \in \Im$ com $x \in O_3$.

Definição. *Para cada palavra ${}_0x^n$ definimos o* cilindro $[{}_0x^n] = \{x \in S \,\big|\, {}_0x_i = x_i \, \forall i \leq n\}$. *Também S será considerado um cilindro.*

Proposição 2.2.1. *Os cilindros são base de uma topologia $\mathcal{T}$ em S.*

Prova. A união de todos os cilindros possíveis é S. A interseção de dois cilindros é sempre ou vazia ou outro cilindro. □

Para todo n, há m^n cilindros de comprimento n; suas interseções são vazias duas a duas e sua união é S. Assim, um cilindro, além de ser aberto, também é fechado, por ser o complementar de uma união de $m^n - 1$ abertos.

Também podemos estruturar S como um espaço métrico, definindo nele uma métrica ou distância.

Definição. *Dados ${}_1x, {}_2x \in S$, defina a distância entre eles como $d({}_1x, {}_2x) = 2^{-k}$, com $k = max\{n \in \mathbb{N} \big| {}_1x_i = {}_2x_i \forall i < n\}$ se ${}_1x \neq {}_2x$ e $d({}_1x, {}_2x) = 0$ caso contrário. Informalmente, k é a primeira posição em que ${}_1x$ e ${}_2x$ apresentam um símbolo diferente. Dados ${}_0x \in S$ e $r > 0$, definimos a* bola *de centro ${}_0x$ e raio r como o conjunto $B({}_0x, r) = \{x \in S \big| d({}_0x, x) < r\}$.*

Assim como em todo espaço métrico, podemos definir uma topologia que tenha como base as bolas de S. Chamaremos de $\mathcal{T}'$ tal topologia.

Proposição 2.2.2. $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Prova. Basta ver que as bases de $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}$ são conjuntos iguais. Um cilindro $[x^n]$ pode ser visto como uma bola $B(x,r)$, com x qualquer elemento de S cujas n primeiras projeções são x^n e $r = 2^{-n}$. Uma bola $B(x,r)$ pode ser vista como o cilindro $[x^n]$, com o n tal que $2^{-(n+1)} < r \leq 2^{-n}$ se $r \leq \frac{1}{2}$, e S inteiro caso contrário. $\square$

A topologia produto $\mathcal{T}''$ é um terceiro jeito de definir abertos em S.

Definição. *A topologia produto em $S = C^{\mathbb{N}}$ é a que tem como base os conjuntos da forma $\prod_n O_n \subseteq S$, com O_n um aberto de C_n para todo n, sendo $O_n = C_n$ para todos exceto finitos n.*

Pode-se demonstrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}' = \mathcal{T}''$ (ver [KH96], página 47), e é com tal topologia que equipamos, em definitivo, o espaço S.

2.3 O shift

Definição. *O* shift *é a transformação $s : S \to S$ definida por $s(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Compactamente, $s(x)_n = x_{n+1}$.*

O shift é uma função sobrejetiva mas não injetiva. Se $\#C = m$, cada seqüência é imagem de exatamente m seqüências de S. Isso também vale para os cilindros; cada cilindro de comprimento n é imagem de exatamente m cilindros de comprimento $n+1$.

Proposição 2.3.1. *O shift s é uma transformação contínua em S.*

Prova. Basta mostrar que a pré-imagem de um aberto básico da topologia (um cilindro ou bola) é um conjunto aberto. Ora, a pré-imagem de um cilindro é a união de m cilindros, que são abertos, e portanto um conjunto aberto. $\square$

Usando o shift, podemos dar uma definição alternativa (e equivalente) de justaposição de palavras. Dadas enumeráveis palavras ${}_ix^{n_i}$, podemos dizer que a justaposição delas é a seqüência $z \in S$ com $[(s^{\sum_{l=1}^{j-1} n_l}(z))^{n_j}] = [{}_ix^{n_i}]$.

Capítulo 3

Dinâmica no intervalo

3.1 Conjuntos de acumulação

Nosso objetivo aqui é estudar iterados de certas funções $a, b : [0,1] \to [0,1]$. Queremos descobrir os pontos de acumulação das composições $c_n \dots c_2 c_1(p)$, para $(c_n)_n$ família enumerável de funções, $c_n \in \{a, b\}$ e $n \to \infty$. O limite será tomado de uma forma heterodoxa; como exatamente deverá ficar claro até o fim desta seção.

Vamos ser mais específicos ao delinear as condições satisfeitas por a e b. Devemos ter $a, b : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^1, funções monótonas crescentes com derivadas limitadas superiormente por uma constante $L < 1$. Também exigiremos $a(0) = 0$ e $b(1) = 1$.

Consideraremos essas funções fixadas por toda a seção.

Definição. $c : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *é chamada* contração *se existe* $\tilde{L} < 1$ *com* $|c(p_1) - c(p_2)| \leq \tilde{L}|p_1 - p_2|, \forall p_1, p_2 \in A$. *Toda contração é, em especial, contínua.*

Lema. *Nas hipóteses acima, a e b são contrações.*

Prova. Tome $\tilde{L} = L$, e $c \in \{a, b\}$. Pelo Teorema do Valor Médio, $\forall p_1, p_2 \exists p_3$ com $|c(p_1) - c(p_2)| = c'(p_3)|p_1 - p_2| \leq L|p_1 - p_2|$. $\square$

O fato de a e b serem contrações é muito forte. Pelo Teorema do Ponto Fixo das Contrações, cada uma tem um e somente um ponto fixo. Por estarmos interessados na dinâmica da região entre esses pontos fixos, pedimos que eles sejam distintos e, por conveniência já os fixamos em 0 (para a) e 1 (para b).

Definimos, para cada $p \in [0,1]$, o conjunto

$$Q_p = \left\{ \begin{array}{c} q \in [0,1] \big| \, \exists \, c_1, c_2, \dots c_n \dots, \exists \, t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \text{ tais que} \\ \left(c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), c_{t_2} \cdots c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), c_{t_3} \cdots c_{t_2} \cdots c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), \dots\right) \\ \text{converge a } q \text{ na métrica usual de } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

As seqüências $\big(c_n \dots c_2 c_1(x)\big)_n$ em geral não convergem, mas como assumem valores no intervalo $[0,1]$ elas possuem subseqüências convergentes (a cada um dos seus pontos de acumulação, pela definição de ponto de acumulação). Para cada $q \in Q_p$, q é ponto de acumulação de $\big(c_n \dots c_2 c_1(x)\big)_n$, para alguma escolha da seqüência $(c_n)_n$. Os números t_n, chamados *pontos de parada*, são os índices da subseqüência convergente a q em questão.

Proposição 3.1.1. *Se $p_1, p_2 \in [0,1]$ então $Q_{p_1} = Q_{p_2} = Q$.*

Prova. Seja $q \in Q_{p_1}$; queremos mostrar que $q \in Q_{p_2}$. Há seqüência de funções $(c_n)_n$ e pontos de parada $t_1, t_2, \dots$ tais que $\lim_{n\to\infty} c_{t_n} \cdots c_2 c_1(p_1) = q$. Utilizaremos a mesma seqüência e os mesmos pontos de parada para p_2 e mostraremos que há convergência. É dado $\varepsilon > 0$. Há N_1 com $|c_{t_n} \cdots c_2 c_1(p_1) - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > N_1$.

Escolha N_2 com $L^{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Então para $n > N_2$ temos

$$\begin{array}{rcl} |c_{t_n} \cdots c_1(p_1) - c_{t_n} \cdots c_1(p_2)| & \leq & |c_{t_N} \cdots c_1(p_1) - c_{t_n} \cdots c_1(p_2)| \\ & \leq & |c_n \cdots c_1(p_1) - c_n \cdots c_1(p_2)| \\ & \leq & L^{N_2} |p_1 - p_2| \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

Via desigualdade triangular, temos que para $n > N = \max(N_1, N_2)$ vale $|c_{t_n} \cdots c_2 c_1(p_2) - q| < \varepsilon$. ou seja, $q \in Q_{p_2}$. Vale a pena notar que a convergência é uniforme em p: o mesmo N serve para todos. $\square$

Agora vamos estudar os conjuntos imagem sucessivos das seqüências. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $R_n = \bigcup_{c_i \in \{a,b\}} \operatorname{Im} c_1 \cdots c_n$ e $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$.

Proposição 3.1.2. $Q \subseteq R$

Prova. Basta mostrar que se $p \in Q$ então $p \in R_n$ para todo n. Primeiro note que R_n é uma união (não necessariamente disjunta) de 2^n conjuntos compactos (imagem de compactos por funções contínuas) e portanto é fechado. R, interseção de fechados, é fechado. Como $c_{t_i} \cdots c_1(x) \in R_n$ para i suficientemente grande (por exemplo, para $i \geq i_n \geq n$) e p é um limite destes números, segue que $p \in R_n$. $\square$

Agora vamos precisar entender melhor a estrutura subjacente aos elementos de R.

Proposição 3.1.3. *Existe uma função contínua sobrejetiva $f : S \to R$, com $S = \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ espaço de seqüências.*

Prova. Antes de tudo, identificaremos palavras com funções. Dada uma palavra x^n em $S = \{a, b\}^{\mathbb{N}}$, faz sentido falar na função composta $x_1^n \circ x_2^n \circ \cdots \circ x_n^n : [0, 1] \to [0, 1]$. Usaremos o mesmo símbolo da palavra, x^n, para denotar tal composta.

Para cada $x \in S$ e $n \in \mathbb{N}$, considere a função $\hat{x}^n = x_1 \circ \ldots \circ x_n : [0, 1] \to [0, 1]$. Denotaremos $R(x, n) \subseteq R_n$ a imagem de $\hat{x}^n$. Pela ordem em que compusemos as funções, obtemos $\operatorname{Im} \hat{x}^{n+1} \subseteq \operatorname{Im} \hat{x}^n$, ou seja, $R(x, n + 1) \subseteq R(x, n)$. Como a e b são contrações o diâmetro das imagens diminui geometricamente a cada nova aplicação, e portanto temos diam $R(x, n) \to 0$ se $n \to \infty$.

Pela propriedade dos intervalos encaixantes na reta, cada x inicial determina um único elemento em $\bigcap_n R(x, n) \subseteq \bigcap_n R_n = R$. Ele elemento será nosso $f(x)$.

Vamos passar à sobrejetividade. Se $r \in R$, $r \in R_n$ para todo n. Com isso podemos escolher, para cada n, uma palavra ${}_n x^n = ({}_n x_1^n, \ldots, {}_n x_n^n)$ satisfazendo $r \in \operatorname{Im} {}_n x^n$. Temos uma palavra para cada n (índice inferior esquerdo), e esta palavra tem comprimento exatamente n (índice superior direito).

Vamos construir y com $f(y) = r$.

Cada primeiro termo ${}_n x_1^n$ é a ou b, de maneira que ao menos um dos símbolos aparecerá infinitas vezes. Definimos $y_1 \in \{a, b\}$ de maneira que y_1 apareça infinitas vezes nos ${}_n x_1^n$.

Dentre os infinitos n com ${}_n x_1^n = y_1$, há infinitos n com ${}_n x_2^n = a$ ou infinitos com ${}_n x_2^n = b$. y_2 será um dentre a ou b de modo que esteja presente em infinitas seqüências nessa posição.

Dentre os infinitos n com ${}_n x_1^n = y_1$ e ${}_n x_2^n = y_2$, podemos escolher y_3 de maneira que também haja infinitos n com ${}_n x_3^n = y_3$. E assim por diante, definimos $y \in S$.

É importante frisar que a escolha de y pode não ser única. Veremos exemplos com f injetiva e com f não injetiva na Seção 3.2.

Vamos mostrar que $r \in R(y,n)$. Ora, existe $i \in \mathbb{N}$ (infinitos, inclusive) com $R(y,n) = R({}_ix,n) = Im_i x^n \supseteq Im_i x^i \ni r$. Logo $r \in R(y,n)$, e por conseguinte $f(y) = r$.

Falta mostrar que f, uma função entre espaços métricos, é contínua. Considere $x \in S$. É dado $\varepsilon > 0$. Escolha n de forma que diam $R(x,n) < \varepsilon$. Seja $\delta = 2^{n+1}$. Então, para todo $y \in B(x,\delta) = [x^n]$ teremos $f(x) \in R(x,n) = R(y,n)$, uma vez que $x^n = y^n$. $\square$

A forma como definimos a composição foi decisiva. Caso tivesse sido executada na ordem inversa, não teríamos o essencial, que é a interseção unitária dos $R(x,n)$.

Proposição 3.1.4. $R \subseteq Q$

Prova. Seja $r \in R$. Como $f : S \to R$ é sobrejetiva, há $y \in S$ com $f(y) = r$.

Considere então a seqüência $c = (y_1; y_2, y_1; y_3, y_2, y_1; \ldots; y_n, \ldots, y_2, y_1; \ldots)$, justaposição das palavras $\check{y}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Essa será a seqüência de composições. Os pontos de parada serão os números triangulares $t_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Teremos $\operatorname{Im} c_{t_n} \ldots c_2 c_1 = \operatorname{Im} \check{c}^{t_n} \subseteq \operatorname{Im} \hat{y}^n = R(y,n)$. Logo para $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$, $\check{c}^{t_n}(p) \in R(y,n)$. Como diam $R(y_n) \to 0$ segue $\lim c^{t_n} = r$ portanto $r \in Q$. $\square$

Poderíamos formar uma outra seqüência com o mesmo efeito.

Defina $w = (a; b; a, a; a, b; b, a; b, b; a, a, a; \ldots)$ a justaposição de todas as palavras possíveis numa ordem ditada pelo seu comprimento. Usando os pontos de parada adequados para destacar as palavras $(y_n \ldots, y_2, y_1)$ quando aparecerem, teremos, da mesma forma que antes, $q \in Q$. Esta seqüência w independe de q e y. Isso significa que para todo $p \in [0,1]$ a seqüência $(\check{w}^1(p), \check{w}^2(p), \check{w}^3(p), \ldots)$ se acumula em todos os pontos de Q.

Teorema 3.1.1. $Q = R$

Prova. Segue trivialmente das Proposições 3.1.2 e 3.1.4. $\square$

3.2 Exemplos

Há três exemplos importantes, mutuamente exclusivos e complementares, conforme $b(0)$ for menor, igual ou maior que $a(1)$. Queremos calcular os pontos de acumulação (no sentido da definição de Q) em cada um dos casos. Para tanto, basta estudar as imagens sucessivas das composições (no sentido da definição de R). Também queremos conhecer a estrutura da função $f : S \to R$ (definida na Proposição 3.1.3) em cada caso.

Exemplo 1. $b(0) < a(1)$

Vamos mostrar por indução que $R_n = [0, 1]$ *para todo* n. *Primeiramente,* $R_1 = Im\, a \cup Im\, b = [0, 1]$. *Supondo verdadeiro até* n*,*

$$R_{n+1} = \bigcup_{x^{n+1} \in C^{n+1}} Im\, x^{n+1} = \bigcup_{x^n \in C^n} \Big(Im\, x^n \circ a \cup Im\, x^n \circ b \Big) = \bigcup_{x^n \in C^n} Im\, x^n = R_n$$

que pela hipótese de indução é $[0, 1]$. *Logo* $Q = R = \bigcap R_n = [0, 1]$. *Isso significa que todos os pontos do intervalo são pontos de acumulação.*

$f : S \to R$ *não é injetiva. Se há* p, ${}_1x^n$ *e* ${}_2x^n$ *com* $p \in Im\, {}_1x^n \cap Im\, {}_2x^n$, *existem (pelos mesmos argumentos da Proposição 3.1.3)* ${}_1y$, ${}_2y \in S$ *com* ${}_i\hat{y}^n =_i x^n$ *e* $f({}_1y) = f({}_2y) = p$. *Pode-se sempre escolher* ${}_1x^1 = (a)$ *e* ${}_2x^1 = (b)$.

Exemplo 2. $b(0) = a(1)$

Também neste caso temos $R_n = Im\, a \cup Im\, b = [0, 1]$ *para todo* n*, e portanto* $Q = R = [0, 1]$*, e* f *não é injetiva. As demonstrações são as mesmas do exemplo anterior.*

Um caso particular é aquele com $a(p) = \frac{p}{2}$ *e* $b(p) = \frac{1}{2} + \frac{p}{2}$. *Nesse caso* f *é a representação de* $[0, 1]$ *na base binária, com* $a \leftrightarrow 0$ *e* $b \leftrightarrow 1$.

Antes do próximo exemplo, uma definição (seguindo [PW96], página 105).

Definição. *Seja* X *um espaço métrico e* $m \in \mathbb{N}$. *Considere conjuntos* $\Delta_{i_1,\ldots,i_n} \subseteq X$, $1 \leq i_k \leq m$, *todos fechados e limitados, dois a dois disjuntos para* n *fixo, satisfazendo* $\Delta_{i_1,\ldots,i_n,j} \subseteq \Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ *para qualquer* $1 \leq j \leq m$. *Suponha que* diam $\Delta_{i_1,\ldots,i_n} \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Conjuntos* $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ *com essas propriedades são chamado* conjuntos básicos. *Um conjunto da forma* $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)} \Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ *é chamado* conjunto tipo Cantor.

Exemplo 3. $b(0) > a(1)$

Como a e b são monótonas crescentes, verifica-se que R_n é a união de 2^n intervalos disjuntos. $Q = R = \cap R_n$ é um conjunto tipo Cantor; com $m = 2$; seus abertos básicos são $\Delta_{i_1,\ldots,i_n} = Im\, a_{i_1} \circ \cdots \circ a_{i_n}$, com $a_1 = a$ e $a_2 = b$.

f é injetiva. Com efeito, suponha $f(x) = f(y) = r$. Então, para todo n, $R(x,n) = R(y,n)$ (eles são disjuntos ou coincidem, e como contêm r não podem ser disjuntos). Segue $Im\, x^n = Im\, y^n$ para todo n, e por conseguinte $x = y$.

O conjunto de Cantor tradicional da Análise é um caso particular deste exemplo. Ele é obtido quando as funções iteradas são $a(p) = \frac{p}{3}$ e $b(p) = \frac{2}{3} + \frac{p}{3}$.

3.3 Generalização para espaços métricos compactos

Vamos mostrar que os resultados da Seção 3.1 não valem somente para $[0,1]$. Na verdade, eles se estendem para espaços métricos compactos, sem perda de informação. Não obstante, são ancorados nas mesmas demonstrações.

Sejam agora X um espaço métrico compacto e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ a sua métrica. Sejam $a, b : X \to X$ duas contrações. Sempre que mencionarmos, $c_i \in \{a, b\}$. Estas serão nossas únicas hipóteses para a e b nesta seção.

Um olhar atento nota que esta foi a única propriedade de a e b usada nas provas da Seção 3.1. Omitiremos as provas desta seção; para reconstruí-las basta trocar $[0,1]$ por X e $|*-*|$ por $d(*,*)$.

Defina, para cada $p \in X$

$$Q_p = \left\{ \begin{array}{c} q \in X \big| \, \exists\, c_1, c_2, \ldots c_n \ldots, \exists\, t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \text{ tais que} \\ \left(c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), c_{t_2} \cdots c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), c_{t_3} \cdots c_{t_2} \cdots c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), \ldots\right) \\ \text{converge a } q \text{ na métrica de } X \end{array} \right\}$$

Proposição 3.3.1. *Se $p_1, p_2 \in X$ então $Q_{p_1} = Q_{p_2} = Q$.*

Novamente vamos estudar os conjuntos imagem sucessivos das seqüências. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $R_n = \bigcup_{c_i \in \{a,b\}} \text{Im } c_1 \cdots c_n$ e $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$.

Note que como X é compacto e a, b são contínuas, R_n e R são conjuntos fechados (na topologia de X induzida pela métrica d).

Proposição 3.3.2. $Q \subseteq R$

Onde requisitamos a propriedade dos intervalos encaixantes na reta, podemos usar a seguinte generalização para espaços métricos completos (em especial, para espaços métricos compactos). (Uma demonstração pode ser encontrada em [Li09], página 189.)

Lema. *Em um espaço métrico completo X toda seqüência decrescente $F_1 \supsetneq F_2 \supsetneq \dots$ de subconjuntos fechados não fazios de M, com $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$, tem como interseção um conjunto unitário.*

Proposição 3.3.3. *Existe uma função contínua sobrejetiva $f : S \to R$, com $S = \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ espaço de seqüências.*

Proposição 3.3.4. $R \subseteq Q$

Teorema 3.3.1. $Q = R$

3.4 Generalização para número finito de funções

Assim como a exigência do espaço métrico compacto X ser o intervalo $[0, 1]$, a exigência de termos somente duas funções disponíveis para iteração pode ser eliminada. Podemos considerar que temos *finitas* funções $a_1, \dots, a_m : X \to X$, todas elas contrações, e estudar produtos $c_n c_{n-1} \cdots c_1 : X \to X$, com $c_i \in \{a_1, \dots, a_m\}$. E valerão todos os resultados das seções 3.1 e 3.3. As provas são praticamente idênticas.

Atenção para o fato de serem finitas as possíveis funções a serem iteradas. Se fossem infinitas, várias etapas das demonstrações seriam invalidadas. Para ficar só em um exemplo específico, R_n seria uma união infinita de fechados, e portanto não necessariamente fechado.

Defina, para cada $p \in X$

$$Q_p = \left\{ \begin{array}{c} q \in X \big| \, \exists\, c_1, c_2, \dots c_n \dots, \exists\, t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \text{ tais que} \\ \big(c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), c_{t_2} \cdots c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), c_{t_3} \cdots c_{t_2} \cdots c_{t_1} \cdots c_2 c_1(p), \dots\big) \\ \text{converge a } q \text{ na métrica de } X \end{array} \right\}$$

Proposição 3.4.1. *Se $p_1, p_2 \in X$ então $Q_{p_1} = Q_{p_2} = Q$.*

Pela terceira vez vamos definir e estudar os conjuntos imagem sucessivos das seqüências. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $R_n = \bigcup_{c_i \in \{a_1,\ldots,a_m\}} \operatorname{Im} c_1 \cdots c_n$ e $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. Desta vez, R_n é uma união não necessariamente disjunta de m^n compactos.

Proposição 3.4.2. $Q \subseteq R$

Proposição 3.4.3. *Existe uma função contínua sobrejetiva* $f : S \to R$*, com* $S = \{a_1, \ldots, a_m\}^{\mathbb{N}}$ *espaço de seqüências.*

Proposição 3.4.4. $R \subseteq Q$

Teorema 3.4.1. $Q = R$

Como exemplo desse contexto mais geral, considere que X é um triângulo com borda e interior, com a métrica herdada do plano. Se pensarmos que a_1, a_2, a_3 são homotetias de razão $\frac{1}{2}$ com centro em cada vértice, temos $a_1, a_2, a_3 : X \to X$ contrações. Quando iteramos tais contrações na ordem que desejarmos, o conjunto limite é $Q = R$ o conhecido *triãngulo de Sierpinski.*

Seria possível ir além, generalizando ainda mais a questão, embora sem garantia de resultados análogos. Uma abordagem mais geral pode ser encontrada em [MU03], página 1.

Capítulo 4

Matrizes

4.1 Preliminares

Consideraremos conhecidos os conceitos de espaço vetorial, transformação linear, matriz, determinante, traço, autovalor e autovetor, todos em dimensão finita. Fixaremos a notação: $gl = gl(2,\mathbb{R}) = \{M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | M \text{ linear}\}$, $GL = GL(2,\mathbb{R}) = \{M \in gl | M \text{ invertível}\}$ e $SL = SL(2,\mathbb{R}) = \{M \in GL | \det M = 1\}$.

Definição. *Defina o espaço $\mathbb{RP}^1$ pelo quociente $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} / \simeq$, com $\simeq$ a relação de equivalência definida por $(x_1, x_2) \simeq (y_1, y_2)$ se e somente se há $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ com $k(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. $\mathbb{RP}^1$ é o conjunto das direções do plano, também podendo ser identificado com o conjunto das retas passando pela origem.*

Definição. *Defina $S^1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} / \cong$, $(x_1, x_2) \cong (y_1, y_2)$ se e somente se há $k \in \mathbb{R}, k > 0$ com $k(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. S^1 pode ser pensado como o conjunto dos vetores de norma 1 em $\mathbb{R}^2$ ou como o conjunto de semi-retas partindo da origem.*

Nosso interesse é estudar as direções dos vetores após sucessivas transformações lineares. Para tanto ficaremos satisfeitos em estudar somente SL. Há duas formas de abordar o problema: em $\mathbb{RP}^1$ ou em S^1. Escolhemos S^1 pela facilidade de visualização. Isso exigirá a hipótese de autovalores positivos, mas não nos importaremos em sacrificar um pouco da generalidade se obtivermos um ganho em clareza.

Uma transformação linear $M \in SL$ é comumente descrita como uma matriz real 2×2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $ad - bc = 1$, agindo linearmente em pontos (x, y) do $\mathbb{R}^2$.

Também é possível escrever M de um ponto de vista radial em vez de linear. Cada ponto de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ pode ser escrito de forma única como um par $(\theta, r) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$, seu ângulo e seu comprimento.

Na perspectiva linear, as entradas a, b, c e d determinam a matriz. Na perspectiva radial, a transformação linear é caracterizada por duas funções $\Phi_M : S^1 \to S^1$ e $N_M : S^1 \to \mathbb{R}^+$ definidas através da equação

$$M \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = N_M(\theta) \begin{pmatrix} \cos\Phi_M(\theta) \\ \sin\Phi_M(\theta) \end{pmatrix}$$

Φ_M, N_M em princípio seriam funções de θ e r. Contudo, como M é linear a dependência é somente em θ. M leva $(\theta, r) \in S^1 \times R^+$ em $(\Phi_M(\theta), N_M(\theta)r) \in S^1 \times R^+$.

Podemos dar expressões analíticas para Φ_M e N_M em função de θ:

$$\Phi_M(\theta) = \arctan\left(\frac{c\cos\theta + d\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta}\right)$$

$$N_M(\theta) = \sqrt{(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (c\cos\theta + d\sin\theta)^2}$$

A função $\Phi_M : S^1 \to S^1$ desce (pela identificação dos pontos antípodas de S^1) naturalmente para $\bar{\Phi}_M : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$. Podemos então escrever

$$\tan\bar{\Phi}_M(\theta) = \left(\frac{c + d\tan\theta}{a + b\tan\theta}\right)$$

o que mostra que $\bar{\Phi}_M$ é conjugada à transformação de Möbius $T(z) = \frac{c+dz}{a+bz}$ restrita a $\mathbb{R} \cup \infty$ através da bijeção $\tan : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

S^1 tem uma estrutura de variedade diferenciável através de mapas que são restrições locais da função $\psi : \mathbb{R} \to S^1$, $\psi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. Tais mapas, além de nos permitirem falar em derivação em S^1, nos dão uma noção natural de ordem em subconjuntos de S^1 que sejam homeomorfos a intervalos da reta (a ordem é aquela que faz ψ ser crescente). Essa é a justificativa para a prática corriqueira de denominar elementos de S^1 por números reais módulo 2π para fins de cálculo e comparação.

Conduzindo alguns cálculos, pode-se verificar que as funções Φ_M e N_M são relacionadas por

$$\frac{d}{d\theta}\Phi_M(\theta) = \frac{1}{N_M(\theta)^2}$$

Definição. *$M \in SL$ é dita*

- hiperbólica *se* $|tr M| > 2$*;*
- parabólica *se* $|tr M| = 2$ *e* $M \neq \pm I$*,* I *a matriz identidade de* SL*;*
- elíptica *se* $|tr M| < 2$*.*

Tais descrições são mutuamente excludentes e, com exceção de $\pm I$*, esgotam todo* SL*.*

Se M é hiperbólica, teremos dois autovalores λ_M^+ e λ_M^- reais e distintos com $\lambda_M^+ + \lambda_M^- = \operatorname{tr} M$ e $\lambda_M^+\lambda_M^- = 1$. Por notação $|\lambda_M^-| < 1 < |\lambda_M^+|$. Também existirão dois autovetores, u_M^+ e u_M^-, os quais definem direções fixas em $\mathbb{RP}^1$. Vamos chamar de θ_M^+, θ_M^-, $-\theta_M^+$, $-\theta_M^-$ os ângulos correspondentes em S^1. Esse é mais um pequeno preço a se pagar por trabalharmos em S^1: as direções que representam os autoespaços unidimensionais em $\mathbb{RP}^1$ não têm um representante canônico em S^1.

Se os autovalores são positivos, teremos que $\Phi_M : S^1 \to S^1$ tem em θ_M^+ e θ_M^- (e em $-\theta_M^-$ e $-\theta_M^-$) pontos fixos. A partir de agora, consideraremos somente matrizes hiperbólicas com autovalores positivos. Essa não é uma exigência muito forte; se M é hiperbólica e não tem dois autovalores positivos, então $-M$ os tem.

Numa pequena vizinhança (um intervalo) de S^1 em torno de θ_M^+, $\frac{d}{d\theta}\Phi_M(\theta) = \frac{1}{N_M(\theta)^2} < 1$ e portanto Φ_M é uma contração nessa vizinhança, com θ_M^+ um ponto fixo atrator. Note também que a ordem dos ângulos é preservada. Para ver isso, considere θ_1, $\theta_2 \in S^1$ na vizinhança, com $\theta_1 < \theta_2$

$$\Phi_M(\theta_2) - \Phi_M(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d}{d\theta}\Phi_M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{N_M^2} d\theta$$

e portanto $0 \leq \Phi_M(\theta_2) - \Phi_M(\theta_1) \leq \theta_2 - \theta_1$.

4.2 Uma aplicação

Alguns resultados obtidos no Capítulo 3 têm uma aplicação muito interessante em produtos de matrizes.

Considere duas matrizes, A e B, de determinante 1, hiperbólicas e com autovalores positivos. Suponha os dois maiores autovalores λ_A^+ e λ_B^+ forem grandes, com autovetores associados próximos o suficiente a ponto de delimitarem um intervalo Ω em S^1 no qual os vetores são expandidos a uma taxa suficientemente grande tanto pela ação de A como por B; pedir $N_A, N_B \geq J > \sqrt{2}$ em Ω será suficiente. Isso garantirá que as imagens de Ω por Φ_A e Φ_B sejam conjuntos disjuntos em Ω. Quando pegarmos um vetor inicial $v = (\theta, r)$, e fizermos agir sobre ele as matrizes A e B, em qualquer ordem, veremos uma órbita em R^2. A norma estará crescendo exponencialmente a cada aplicação: é multiplicada por pelo menos. Já θ fica perambulando por um certo conjunto de Ω; sua órbita eventualmente se acumula em alguns ângulos de Ω. O conjunto dos ângulos passíveis de serem pontos de acumulação de alguma órbita é, conforme o teorema abaixo, um conjunto tipo Cantor.

Teorema 4.2.1. *Sejam $A, B \in SL$ matrizes hiberbólicas e com autovalores positivos, $J > \sqrt{2}$, Ω um intervalo em S^1 com extremo inferior em u_A^+ e superior em u_B^+ tais que $N_A(\theta), N_B(\theta) \geq J$ para todo $\theta \in \Omega$. Então o conjunto Q (conforme definição da Seção 3.3), relativo a $\Phi_A, \Phi_B : \Omega \to \Omega$ é um conjunto tipo Cantor.*

Prova. Como $N_A(\theta), N_B(\theta) \geq J$ para todo $\theta \in \Omega$, A e B expandem os vetores na região $\Omega \subseteq S^1$. Isso implica, em particular, que $\lambda_A^+ > \sqrt{2}$ e $\lambda_B^+ > \sqrt{2}$. Também significa que u_A^- e u_B^- (além de $-u_A^-$ e $-u_B^-$) não pertencem a Ω (afinal, $N_A(u_A^-) = \lambda_A^- = \frac{1}{\lambda_A^+} \leq \frac{1}{J}$ e $N_B(u_B^-) = \lambda_B^- \frac{1}{\lambda_B^+} \leq \frac{1}{J}$). Também $-u_A^+$, $-u_B^+$ não pertencem a Ω; do contrário Ω teria um comprimento de pelo menos π e conteria u_A^-, u_B^-, $-u_A^-$ ou $-u_B^-$, o que já vimos ser impossível.

Para todo $\theta \in \Omega$ temos $\Phi_A(\theta) - \Phi_A(\theta_A^+) = \int_{\theta_A^+}^{\theta} \frac{1}{N_A^2} d\bar{\theta} \leq \theta - \theta_A^+$. Logo $\Phi_A(\Omega) \subseteq \Omega$. Raciocínio semelhante resulta em $\Phi_B(\Omega) \subseteq \Omega$, garantindo $\Phi_A, \Phi_B : \Omega \to \Omega$.

Vamos então identificar Ω com o intervalo $[0, 1]$ através de uma bijeção $h : [0, 1] \to \Omega$ definida por

$$h(p) = \begin{pmatrix} \cos[p\theta_B^+ + (1-p)\theta_A^+] \\ \sin[p\theta_B^+ + (1-p)\theta_A^+] \end{pmatrix}$$

Essa é a expressão analítica de uma curva percorrendo $\Omega \subseteq S^1$ no sentido positivo e com velocidade constante $\theta_B^+ - \theta_A^+$.

Defina $a, b : [0,1] \to [0,1]$ por $a = h^{-1} \circ \Phi_A|_\Omega \circ h$ e $b = h^{-1} \circ \Phi_B|_\Omega \circ h$. Temos $a(0) = 0$ e $b(1) = 1$. Usando a preservação da orientação, a invariância da velocidade $h'(p)$ e a Regra da Cadeia, obtemos $a'(p) = \Phi'_A(h(p)) \leq \frac{1}{J^2} \in [0, \frac{1}{2}]$ e $b'(p) = \Phi'_B(h(p)) \leq \frac{1}{J^2} \in [0, \frac{1}{2}]$ para todo $p \in [0,1]$. Temos a e b satisfazendo todas as hipóteses da Seção 3.1. Definimos $\tilde{Q}$ e $\tilde{R}$ como na Seção 3.1, relativos a $a, b : [0,1] \to [0,1]$. Temos $\tilde{Q} = \tilde{R}$, segundo o Teorema 3.1.1. Pelo Teorema do Valor Médio, $a(1) < \frac{1}{2} < b(0)$, portanto a situação é a do Exemplo 3 da Seção 3.2. Assim, os iterados no mundo $a, b : [0,1]$ se acumulam num conjunto tipo Cantor $\tilde{Q} = \tilde{R}$.

A bijeção $h : [0,1] \to \Omega$ preserva as relações de pertinência dos conjuntos básicos $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$, de maneira que Q relativo a $\Phi_A, \Phi_B : \Omega \to \Omega$ é também um conjunto tipo Cantor. $\square$

Referências Bibliográficas

[KH96] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems** 1.ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1996.

[Li09] LIMA, E. L. **Espaços Métricos** 6.ed. Rio de Janeiro : Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

[Lp68] LIPSCHUTZ, S. **Schaum's Outline of General Topology** 1.ed. New York : McGraw-Hill, 1968.

[MU03] MAULDIN, R. D.; URBÁNSKI, M. **Graph directed Markov systems : Geometry and dynamics of limit sets** 1.ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2003.

[PW96] PESIN, Y.; WEISS, H. On the dimension of deterministic and random Cantor-like sets, symbolics dynamics and the Eckamnn-Ruelle Conjecture **Communications in Mathematical Physics** v. 182, n. 1 (1996), 105-153.