UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica

Rodrigo Sychocki da Silva

Porto Alegre, fevereiro de 2012.

O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica

Rodrigo Sychocki da Silva

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Porto Alegre, fevereiro de 2012.

O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica

Rodrigo Sychocki da Silva

Dissertação aprovada em 27 de fevereiro de 2012.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana (PPGEMAT/IM/UFRGS)

Prof.ª Dr.ª Maria Paula Gonçalves Fachin (PPGEMAT/IM/UFRGS)

Prof. Dr. Crediné Silva de Menezes (FACED/UFRGS)

Porto Alegre, fevereiro de 2012.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino envolvendo funções, funções exponenciais e funções logarítmicas na escola básica. Através da verificação do processo de aprendizagem de funções pelos alunos, buscamos na teoria dos campos conceituais de Vergnaud e na teoria das representações semióticas de Duval os subsídios necessários para compreender as dificuldades dos alunos e com isso propor uma sequência didática para ser utilizada em sala de aula. A proposta parte da hipótese que a investigação de problemas cotidianos envolvendo o estudo das funções proporciona aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos e definições matemáticas envolvidos. Os alunos são confrontados com problemas que permitem o reconhecimento do conceito de função através da relação entre grandezas, da noção de variável dependente e variável independente e a visualização gráfica com a possibilidade da identificação das propriedades de crescimento e decrescimento. As funções exponenciais e logarítmicas são tratadas via problemas em que a aplicação dessas funções é necessária, tais como: crescimento populacional, rendimento de um imóvel, medições das escalas de terremotos, cálculo do pH de soluções químicas, entre outros. A apresentação dos gráficos dessas funções se faz no laboratório de informática, onde os alunos utilizam a tecnologia como recurso para visualizar as características de cada função. Portanto, buscamos com essa sequência didática propor uma alternativa para a abordagem dos conceitos de matemática e através da investigação em grupo possibilitar a aprendizagem de matemática.

Palavras-chave: Campos Conceituais, Exponencial, Funções, Logaritmos, Representações Semióticas, Sequência Didática.

Abstract

This paper presents a teaching proposal involving functions, exponential and logarithmic functions at elementary school. Through the verification of the process of learning tasks by the students, we seek in Vergnaud's conceptual fields theory and in Duval's semiotic representations theory subsidies needed to understand students' difficulties and thus propose a didactic sequence for use in classroom. The proposal starts on the assumption that the research of everyday problems involving the study of functions gives students a better understanding of mathematical concepts and definitions involved. Students are faced with problems that allow the recognition of the function concept through the relation among the quantities, the notion of dependent and independent variable and the graphical display with the possibility of identifying the properties of increase and decrease. The exponential and logarithmic functions are handled through problems where the application of these functions is required, such as population growth, income of a property, measurements of the scales of earthquakes, calculation of the pH of chemical solutions, among others. The presentation of the graphs of these functions is done in the computer lab where students use technology as a resource to display the characteristics of each function. Therefore, we seek with this didactic sequence to propose an alternative to approach math concepts and to enable math learning through this group research.

Keywords: Conceptual Fields, Exponential, Functions, Logarithms, Semiotic Representations, Didactic Sequence.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1. Introdução

Ao iniciar a caminhada no mestrado, inicialmente foi proposto como um requisito para a inscrição no programa de pós-graduação que cada professor construísse um memorial descritivo, refletindo sobre a sua prática docente e a elaboração de uma justificativa pela busca do mestrado em educação matemática.

Na ocasião, salientei que durante a minha vida profissional me deparo com indagações e proposições elaboradas pelos alunos, que me conduzem a pensar sobre a importância de aprender matemática. A construção rigorosa dos conceitos matemáticos é importante para o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos, mas ao mesmo tempo considero que em alguns momentos a matemática presente em alguns problemas mostra-se flexível e de simples compreensão para os alunos.

O professor durante o momento da aula dispõe de inúmeras maneiras para criar e desenvolver situações práticas que envolva o raciocínio dos alunos, sendo isso um dos fatores que possibilita a verdadeira aprendizagem dos alunos mediante o conteúdo desenvolvido.

Em uma das minhas aulas na disciplina de Cálculo[1], ao apresentar o problema de obter a função polinomial que representa o volume de uma caixa reta, como mostra a Figura 1 abaixo, feita com um pedaço de papel plano, onde são cortados quatro cantos quadrados de lado x, um dos questionamentos que surgiram durante a aula foi:

" É possível obter x, que torna máximo o volume da caixa? "

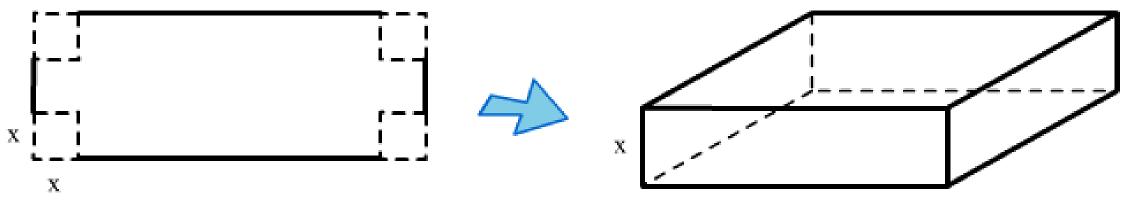


Figura 1: Caixa obtida pelo recorte de quatro cantos.

Na maneira clássica utilizada na disciplina de cálculo, o problema acima é resolvido utilizando os seguintes teoremas:

Teorema 1: Funções polinomiais são contínuas em toda a reta real.

---

[1] Disciplina oferecida pelo Departamento de Matemática da UFRGS, disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/

Teorema 2: Funções contínuas em um intervalo numérico possuem ponto de máximo e/ou mínimo dentro desse intervalo.

Teorema 3: Teste da derivada 1º e 2º para obter máximo e/ou mínimo de uma função de uma variável.

Contudo, a seguinte justificativa foi dada por uma aluna:

> *"Sim, é possível obter esse x, pois sempre posso imaginar uma quantidade máxima (no sentido volumétrico) de presente a ser embalada, dispondo de uma única folha de papel colorido de tamanho determinado e evitando desperdícios."*

Considero que ao ser professor de matemática é preciso saber estabelecer uma comunicação adequada com os alunos, compreender como eles pensam e compreendem os conceitos abordados durante a aula. As experiências produzidas durante as minhas aulas me conduziram à hipótese de que o aprendizado estabelecido na universidade está em conflito com a realidade escolar, no sentido que na escola básica o professor de matemática nem sempre proporciona aos alunos a visão da matemática como ciência importante na resolução de problemas práticos aplicados, ela é tratada apenas como uma disciplina de difícil compreensão, com inúmeros e exaustivos cálculos numéricos e algébricos que não fazem sentido para o aluno.

Muitos professores consideram que em uma aula, devem apenas demonstrar teoremas, estabelecer relações matemáticas importantes, e acabam deixando de lado a possibilidade de propor ao aluno situações que geram um momento de reflexão sobre o real significado do que está sendo abordado, ou ainda, eles deixam de apresentar situações que possibilitam os alunos compreender o verdadeiro sentido em aprender o que está sendo proposto.

Nesse âmbito, esse trabalho consiste no desenvolvimento de uma pesquisa com a elaboração de material didático, acompanhado de experimentação, no nível básico de ensino, com alunos do 1º ano do ensino médio do IFRS - Campus Caxias do Sul. Inspirado na teoria dos campos conceituais de Vergnaud e na teoria das representações semióticas de Duval, propõe-se uma análise sobre o desenvolvimento e utilização do conceito de função na matemática, e mais geralmente no contexto da ciência, buscando apresentar uma proposta de ensino na forma de sequência didática[2], que aborde as

---

[2] É uma sequência de atividades elaboradas para a sala de aula, que sejam sequenciais ou que estejam interligadas entre si.

funções exponenciais e logarítmicas juntamente com as suas diversas aplicações no cotidiano dos alunos.

Com a proposta, procuramos apresentar aos demais professores uma alternativa de encaminhamento para a abordagem do assunto, baseado nas dificuldades apresentadas pelos dos alunos na aprendizagem do tema *funções* no ensino médio. Pela análise dos documentos oficiais, percebe-se a considerável manifestação em propor aos docentes que encarem as sequências encontradas nos livros didáticos não como a única forma de trabalhar o assunto com os alunos, e sim como uma ideia que pode ser completada com outras vindas pela parte do professor, uma vez que a aplicação das funções em diversos contextos é fundamental.

> "Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (PCN+, 2002, p.44)

Com essa pesquisa, procuramos mostrar aos professores que dispondo apenas da sequência apresentada no livro didático, ensinar funções e, em especial, exponenciais e logarítmicas é um processo que nem sempre pode produzir resultados qualitativos. Logo estamos apresentando uma alternativa para o trabalho envolvendo este assunto no ensino médio, que está fora das propostas encontradas nos livros. Acreditamos ser necessário que o professor busque alternativas metodológicas para obter melhor resultados dos alunos. Ao trazer para a sala de aula problemas que motivam e despertam a curiosidade do aluno, através de situações previamente modeladas matematicamente, que estão presentes no seu cotidiano, o professor torna a matemática uma ciência aplicada em situações modelo, favorecendo a aprendizagem.

Ao propor o uso de softwares para a construção de gráficos, estamos utilizando ferramentas que facilitam a concepção do problema proposto e análise dos resultados obtidos. O uso da tecnologia digital facilita para o aluno obter resultados rápidos em suas construções, respondendo às suas hipóteses iniciais elaboradas, podendo mudar de estratégia para a resolução de uma situação problema. Nesta pesquisa nota-se a importância dos softwares que esboçam gráficos devido a sua utilização para a compreensão dos problemas envolvidos nas aplicações. Com isso, mostramos que é possível o aluno manipular softwares específicos de matemática com o objetivo de responder questões que envolvem modelagem matemática utilizando funções exponenciais e logarítmicas.

No capítulo 3 será feita uma análise a respeito da forma como esses assuntos são apresentados em livros didáticos utilizados nas escolas atualmente, com o objetivo de justificar as possíveis dificuldades encontradas pelos professores em abordar esse assunto em sala de aula. Ainda no capítulo 3, um olhar sobre a literatura será feito com o objetivo de mostrar algumas possibilidades já pensadas e desenvolvidas para a abordagem desse assunto na escola e que são diferentes dessa proposta no seu discurso metodológico e também nas atividades propostas.

Enfatizamos que as fundamentações teóricas necessárias para o desenvolvimento do trabalho foram: a teoria dos campos conceituais, proposta por Vergnaud, e a teoria das representações semióticas proposta por Duval. Em ambas as teorias, encontramos a condição necessária e suficiente para justificar a falha na aprendizagem do conceito de função e em especial das funções exponenciais e funções logarítmicas pelos alunos no ensino médio. Neste texto, além de apresentar as principais características de cada teoria, destacamos a sua importância no desenvolvimento dessa pesquisa.

A organização do texto possui a seguinte ordem. No capítulo 2 há um resumo sobre a proposta do trabalho acompanhado de algumas questões, destacando-se a questão norteadora e as questões adicionais que surgiram ao longo da pesquisa. No capítulo 3 há a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento da proposta central do trabalho. A fundamentação teórica abrange a análise dos parâmetros curriculares nacionais, a apresentação da teoria dos campos conceituais de Vergnaud, a teoria das representações semióticas de Duval, os conceitos de matemática que apareceram no decorrer da pesquisa e uma análise da literatura já produzida sobre o ensino e aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio.

No capítulo 4 apresentamos a metodologia presente nesta pesquisa, destacando os aspectos mais importantes sobre a metodologia de pesquisa qualitativa que foi utilizada na aplicação das atividades. Ainda no capítulo 4, apresentamos o perfil dos sujeitos analisados, como foi a coleta, escolha e análise dos dados. No capítulo 5 apresentamos o método de elaboração e aplicação das atividades propostas. No capítulo 6 destacamos os resultados e uma análise posterior realizada no grupo de alunos e individualmente. Apresentamos algumas certezas e incertezas referente a proposta elaborada e aplicada, destacando os aspectos positivos e aspectos negativos observados durante a realização das atividades. No capítulo 7, que são as considerações finais, a proposta é apresentar algumas possibilidades de continuidade dessa pesquisa, aos docentes interessados e que encaram o trabalho com funções como uma forma de promover a aprendizagem dos alunos através de modelagem com problemas.

A estrutura desta pesquisa pode ser visualizada no esquema apresentado na figura 2, em que apresentamos a organização do processo envolvido na elaboração desse projeto de pesquisa. Entende-se que esse esquema presente na introdução do texto, possibilita ao leitor perceber a configuração global dessa pesquisa, apresentando nele a motivação, a fundamentação teórica escolhida, elaboração das atividades, análise dos dados obtidos e quais as perspectivas futuras para tal pesquisa.

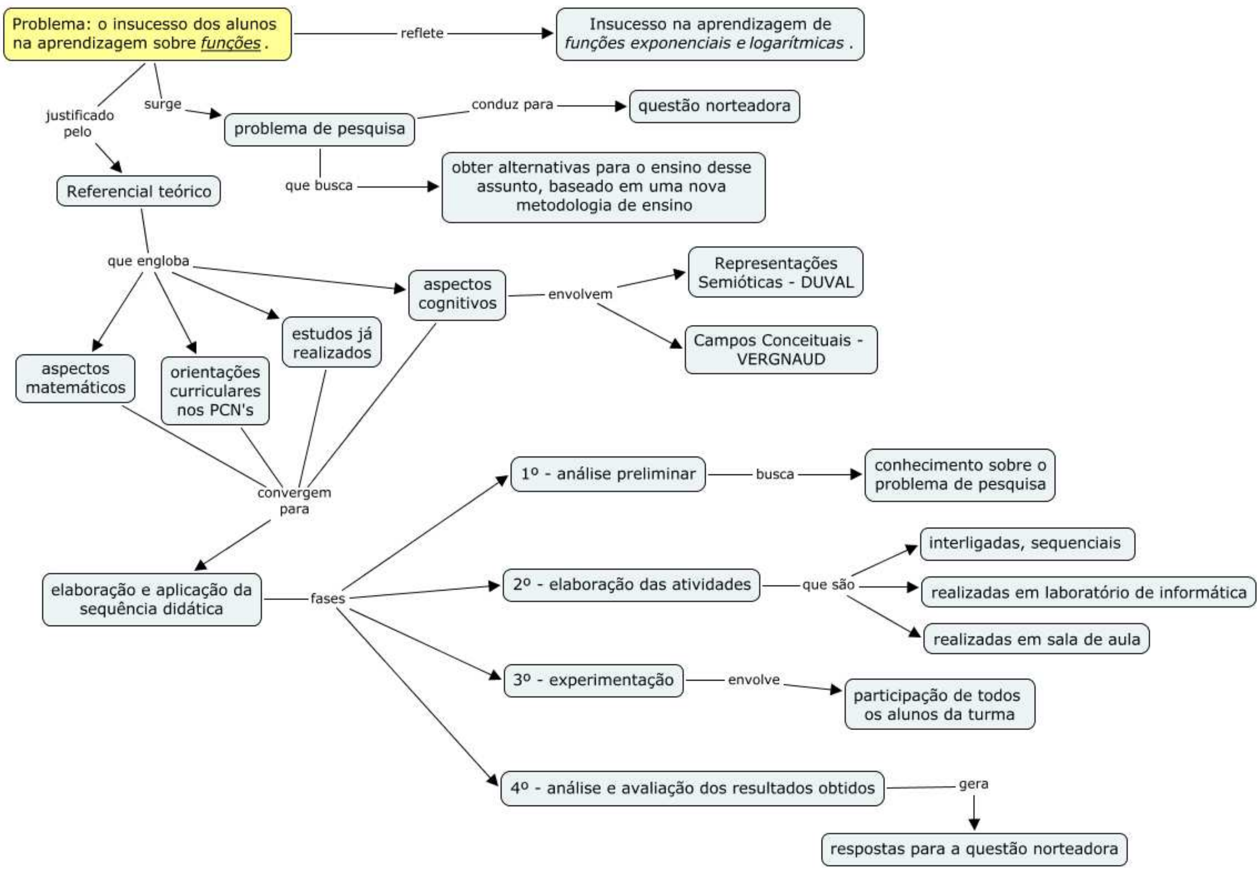


Figura 2: Esquema apresentando a visão global da pesquisa.

2. Questão norteadora e objetivos

2.1 Questão norteadora

Para a pesquisa apresentada no curso de mestrado, durante a elaboração do projeto de pesquisa, surgiu o seguinte questionamento: "*Apresentar o conceito de função, a partir da análise de fenômenos e tabelas, envolvendo relações entre grandezas, contribui na compreensão e aprendizagem de funções logarítmicas e exponenciais?*"

A questão proposta anteriormente é pertinente nesta pesquisa, uma vez que a preocupação neste texto é propor uma alternativa de trabalho envolvendo o assunto funções, em especial as funções exponenciais e logarítmicas.

2.2 Questões adicionais

Em vista da questão norteadora, durante a elaboração do problema de pesquisa, surgem outras questões adicionais, nas quais destacamos essas:

- Como modificar atual o ensino desses conceitos para torná-lo mais satisfatório?
- Quais as dificuldades apresentadas pelos alunos no entendimento do conceito de função?
- Propor atividades com recursos tecnológicos tais como planilhas eletrônicas e softwares que esboçam gráficos, ajuda na construção dos conceitos na sequência didática proposta?
- Ao final da sequência didática, como realizar a avaliação da aprendizagem dos alunos?
- É possível criar alguma sequência didática que envolva os alunos no conceito de função?
- Quais são os tipos de problemas que podemos trabalhar na escola básica e que envolvem as aplicações das funções exponenciais e logarítmicas?

2.3 Objetivos

2.3.1 Geral

A investigação consiste em analisar as diretrizes nacionais e a abordagem encontrada nos livros didáticos com o objetivo de criar situações possíveis para a aprendizagem do conceito de função. A elaboração de uma sequência de atividades para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas é a proposta central da pesquisa, uma vez que estes assuntos são abordados de maneira superficial na escola, tendo como conseqüência a não compreensão pelos alunos.

2.3.2 Específicos

Os objetivos específicos dessa pesquisa são:

1. Analisar o ensino do conceito de função no ensino médio.
2. Verificar as orientações dos parâmetros nacionais referente a esse tema.
3. Analisar a apresentação do tema proposto nessa pesquisa nos livros didáticos utilizados na escola básica, a fim de verificar o método utilizado pelos autores para a abordagem do assunto.
4. Elaborar um plano de ação que integre o conceito de função às aplicações específicas para os alunos do curso técnico em plástico.
5. Planejar, justificar, implementar e validar uma seqüência de atividades na forma de um material didático envolvendo funções exponenciais e logarítmicas.
6. Utilizar com os alunos recursos tecnológicos digitais, com o objetivo de potencializar a sua aprendizagem e tornar a interpretação dos problemas propostos na sequência didática melhor compreendidos.

3. Fundamentação teórica

3.1 Escritos sobre funções exponenciais e logarítmicas

3.1.1 As diretrizes e orientações nos documentos oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) deixam explícito o caráter de importância que a matemática deve possuir para os alunos no ensino médio. A proposta do documento é apresentar aos professores quais são as competências e habilidades que os alunos devem possuir ao cursar o ensino médio, tornando a matemática uma disciplina de caráter formativo na qualificação e preparação do aluno para a vida adulta em sociedade.

Em PCN (1999, p. 40) encontra-se a importância do professor considerar a matemática como uma ciência aplicada ao cotidiano dos alunos, conforme mostra a passagem a seguir:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.
>
> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

A passagem anterior destaca a importância da matemática como uma ciência que resolve problemas práticos. O professor deve em seu plano pedagógico durante a sua aula despertar a motivação nos alunos, a curiosidade e vontade em aprender os conteúdos de matemática propostos. Para isso, o professor deve buscar problemas de modelagens e propostas didáticas que vão além das sugeridas pelo livro didático.

As atividades realizadas em sala de aula devem, portanto possuir caráter investigativo, capaz de proporcionar aos alunos a aprendizagem qualitativa e com isso evitar a memorização de técnicas e algoritmos. Com o objetivo de evitar as memorizações desnecessárias durante a trajetória escolar, o estudo da matemática deve possuir finalidades específicas no ensino médio. As diretrizes deixam explícito que o professor deve proporcionar a interdisciplinaridade em suas aulas, fazendo o aluno reconhecer a importância da aplicação de conceitos matemáticos em outras áreas do conhecimento. Em PCN (1999, p.42) há uma lista de finalidades sugeridas para o professor contemplar o ensino da matemática:

- *compreender os conceitos*, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas*, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes*, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas*, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas* para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas* e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo*;
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito*, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas*, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Os termos que estão destacados em itálico na lista acima refletem a proposta desse trabalho de pesquisa. Essa pesquisa buscou contemplar a proposta de apresentar aos alunos uma finalidade para aprender funções, funções exponenciais e funções logarítmicas evitando a memorização de técnicas e algoritmos, valorizando as formas de raciocínio e expressão dos alunos.

O ensino de funções no ensino médio é uma questão polêmica, pois se considera que esse é um dos conteúdos mais importantes que o aluno deve conhecer e se apropriar dos conceitos matemáticos envolvidos. Em PCN (1999, p.43), há o destaque que esse conteúdo deve possuir no decorrer do planejamento pedagógico do professor:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Isso sugere que o professor seja capaz de elaborar atividades que propõe aos alunos visualizar o conceito de função em diversas áreas de conhecimento. A importância em aprender esse conceito consiste na capacidade do aluno ser capaz de investigar, modelar e interpretar problemas que surgem na sua vida cotidiana ou profissional.

Em PCN+ (2002, p.121), verifica-se a proposta para o estudo das funções deve permitir ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Sugere-se ainda no documento que uma proposta de ensino desse conteúdo pode ser iniciada diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, permitindo o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas graficamente ou algebricamente.

Por sua vez, nota-se a importância dos problemas de aplicação não serem deixados de lado no início do estudo, eles devem ser capazes de motivar e apresentar diversos contextos para o aluno aprender funções. A enumerável quantidade de situações envolvendo funções permite que ao ensino desse conteúdo seja incorporado com exemplos do cotidiano e representações gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

Partindo da hipótese de usar problemas de modelagem que sirvam de motivação para a aprendizagem dos alunos, em PCN+ (2002, p.121), há uma passagem no texto que valoriza a característica interdisciplinar que possuem as funções exponenciais e funções logarítmicas, deixando um pouco de lado as propriedades e técnicas operatórias e que se detém no fato do professor explorar com mais profundidade os problemas abordados:

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas.

Nota-se na passagem anterior que é desnecessário o professor dar ênfase para todas as propriedades e características referentes ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, uma vez que ao dar-se preferência na exploração de um determinado assunto, o professor pode explorar de maneira satisfatória todas as possibilidades de conteúdos com os alunos, evitando-se nomenclaturas e detalhamento excessivo.

Um aspecto considerado interessante é o questionamento que o professor pode fazer a si próprio quando vai propor o início de um assunto na aula. Será que isso é realmente necessário? Qual a utilidade desse assunto para a vida dos meus alunos? Como posso saber se meus alunos realmente aprenderam esse conteúdo?

Os questionamentos propostos no parágrafo anterior são pertinentes ao se investigar novas possibilidades metodológicas em educação matemática, uma vez que leva o professor a “enxugar” um pouco os conteúdos para serem abordados em sala de aula. Trata-se que uma possível diminuição da carga de conteúdos para trabalhar e qualitativamente melhorar a abordagem de tópicos centrais na matemática do ensino médio. Segundo PCN+ (2002, p.120) esse questionamento feito pelo professor é válido e pode justificar o sucesso ou insucesso de seus alunos na aprendizagem de determinado conteúdo.

> Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologaritmos, característica e mantissa.

Um aspecto interessante observado nas diretrizes é que todo o aprendizado envolvido, no entanto, perde contexto se não se explicitasse aos alunos a importância dos logaritmos, em questões tecnológicas e em outras ciências, para expressar grandezas cujo intervalo de variação é exponencial. Isso tudo vem para reforçar a proposta de trabalho desenvolvida e aplicada nesta pesquisa, que prioriza destacar a importância do estudo das funções, funções exponenciais e funções logarítmicas do ponto de vista aplicado em problemas do cotidiano e da ciência.

3.1.2 O que há nos livros didáticos

Fundamentando-se nas sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de funções, funções exponenciais e funções logarítmicas, analisamos quatro livros didáticos que são usualmente usados por alunos no ensino médio:

- Matemática, Volume 1, Manoel Paiva, 2009;
- Matemática Completa, 1º série do ensino médio, Giovanni e Bonjorno, 2005;
- Matemática, 1º série, Dante, 2006;
- Matemática, 2º série, Dante, 2006.

Observamos que todos os livros citados acima foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e fazem parte das diretrizes propostas pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação[3] (FNDE). Mais adiante no presente texto apresentamos a justificativa da escolha desses quatro livros didáticos para análise nessa pesquisa, ressaltando a importância que essas bibliografias possuem para o professor-pesquisador envolvido com a pesquisa.

A obra de Paiva (2009) é a única das obras analisadas que expõe o assunto funções do ponto de vista proposto neste trabalho, ou seja, através da relação existente entre grandezas ser chamada de função. A apresentação da noção de relação entre grandezas é feita de maneira intuitiva, possibilitando ao aluno interpretar adequadamente o assunto. Comparando com a proposta apresentada por Giovanni e Bonjorno (2005), verificamos que a apresentação de Paiva (2009) é devidamente contextualizada, possibilitando ao aluno ter menos dúvidas em relação à definição de função na matemática, vista como relação entre grandezas.

[3] Maiores detalhes podem ser obtidos diretamente pelo link http://www.fnde.gov.br/ . Acesso em 20/01/2011.

> Muitas vezes nos deparamos com situações que envolvem uma relação entre grandezas. Assim, o valor a ser pago na conta de luz de sua casa depende do consumo medido no período; o tempo de uma viagem de automóvel entre duas cidades depende da velocidade média desenvolvida no trajeto.
>
> Quando uma indústria lança um produto no mercado, para fixar o preço desse produto ela tem que levar em conta os custos para a sua produção e distribuição, que dependem de diversos fatores, entre eles as despesas com energia, aluguel de prédio, custos das matérias-primas e salários. Como esses custos podem variar, a indústria tem que estar "equacionando" essas variáveis para compor o preço do seu produto.
>
> Podemos utilizar a linguagem matemática para representar essas situações de dependência entre duas ou mais grandezas. Faremos isso nessa unidade, estudando Funções. (Giovanni e Bonjorno, 2005, p.104)

> Usamos as medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc.
>
> Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.
>
> São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão.
>
> A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto dependente da variação das medidas de outras grandezas, por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo, a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura, a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas dependências, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas. (Paiva, 2009, p.83)

É evidente a diferença que existe nas duas passagens apresentadas acima. Nota-se que em Giovanni e Bonjorno (2005), a noção de dependência entre grandezas é apresentada de modo confuso e não aborda com o aluno o que vem a ser uma grandeza ou exemplos dela. Os autores ficam somente no nível da relação que possivelmente exista entre grandezas e não apresentam o seu conceito para os alunos. A introdução do assunto proposta por Paiva (2009) mostra-se mais confiante, pois apresenta uma abordagem seqüencial para a ideia, mostrando que o estudo da variação das grandezas e suas dependências caracterizam o estudo das funções na matemática.

Em Dante (2006), versão para a 1º série de ensino médio, a introdução ao assunto funções é muito confusa com respeito à noção de grandezas e suas relações. O autor começa o capítulo de funções afirmando que: "O conceito de função é um dos mais importantes na matemática. Ele está presente sempre que relacionamos duas grandezas variáveis. Vejamos alguns exemplos:" (Dante, 2006, p.44). Em seguida ele apresenta os exemplos, seguidos da resolução analítica para cada uma das situações e ao final há uma lista de exercícios propostos com a finalidade de descobrir padrões, regularidades algébricas em tabelas de números. Essa forma de apresentação inicial do assunto é considerada não eficaz em sala de aula, pois como será possível que os alunos entendam a construção de regras algébricas sem a apresentação do conceito de grandeza adequadamente?

No que se refere à apresentação das funções exponenciais e funções logarítmicas, os livros afastam-se das sugestões propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). A abordagem encontrada nas obras analisadas mistura uma série de assuntos ao tratar esses tipos de funções. Os capítulos destinados para esses assuntos constituem uma mistura mal elaborada de equações, inequações, problemas e gráficos. Não se observa em nenhuma obra a necessária fundamentação que se deve dar à importância dos assuntos e seu real motivo para serem estudados na escola.

A entrada do capítulo destinado à função exponencial nas obras analisadas segue o padrão de apresentar um problema envolvendo crescimento populacional de uma colônia de bactérias, conforme mostra a figura 3. A proposta é interessante, porém se verifica que a apresentação é superficial, pois todas as obras analisadas se concentram no mesmo tipo de problema introdutório e não apresentam exemplos de possibilidades da abordagem alternativa para o assunto, como por exemplo: o comportamento de um medicamento no corpo de uma pessoa, rendimentos da poupança, etc. Neste livro, o autor pelo menos cita essas outras possíveis aplicações da função exponencial.

O diagrama utilizado em Paiva (2009) para mostrar o início do crescimento populacional é um diferencial em relação às outras obras, pois possibilita aos alunos estruturar o raciocínio em etapas e visualizar a matemática envolvida no problema. O apelo para a visualização do problema em matemática é um recurso interessante que o professor pode utilizar durante as aulas para potencializar a aprendizagem dos alunos, aumentando as possibilidades de representações para o assunto abordado.

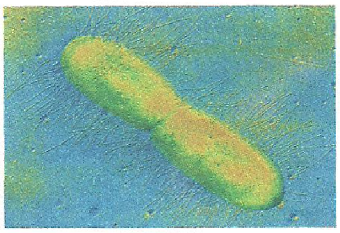
No capítulo destinado à função exponencial, Paiva (2009) faz uma revisão sobre regras de potências vistas no ensino fundamental, com o objetivo de minimizar as dificuldades futuras ao trabalhar com o assunto. São apresentadas as regras operatórias sem justificativas, apenas com exemplos utilizando as regras. Isso acaba sendo o pré-requisito para iniciar o estudo da função exponencial e justificar o uso das equações exponenciais na matemática: resolver problemas aplicados à ciência e que envolvem as funções exponenciais.

1 Introdução

Várias situações do nosso cotidiano ou do universo científico, tais como juro em aplicações financeiras ou empréstimos, crescimento populacional, depreciação de um bem, decaimento radioativo etc., podem ser estudadas com o auxílio das **funções exponenciais**.

Para apresentar a função exponencial, vamos partir da situação a seguir, mostrando a relação entre essa função e uma forma de crescimento de grandezas.

A maioria das bactérias reproduz-se por bipartição, isto é, cada uma delas se divide em duas ao atingir determinado tamanho.

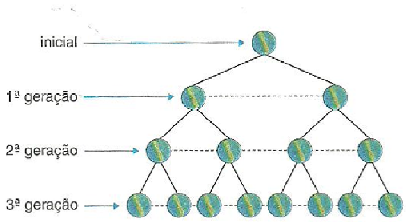


CNRI/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

Bactéria *E. coli* em processo de bipartição, colorizada artificialmente, aumentada 23.100 vezes.

Em uma cultura laboratorial, vamos considerar determinada bactéria, que se dividirá em duas, dando origem à primeira geração; cada bactéria da primeira geração sofrerá bipartição, dando origem à segunda geração, e assim por diante. A tabela abaixo mostra o crescimento do número de bactérias, a partir de uma bactéria, admitindo-se que todas sobrevivam a cada geração.

	Número de bactérias
Inicial	1 (2^0)
1ª geração	2 (2^1)
2ª geração	4 (2^2)
3ª geração	8 (2^3)
4ª geração	16 (2^4)
⋮	⋮



FAUSTINO

Note que a coluna onde se registra o número de bactérias apresenta as potências 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ... Assim, o número y de indivíduos gerados por uma bactéria será, na geração x, expresso pela função:

$$y = 2^x$$

Admitindo que essas bactérias se bipartissem a cada 20 minutos, após uma hora teríamos três gerações e, em apenas um dia, haveria 72 gerações. Admitindo, ainda, que todas sobrevivessem, observe o número de bactérias apenas na 72ª geração:

$$2^{72} = 4.722.366.482.869.645.213.696$$

Ao final do dia, o número de bactérias seria: $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{72}$

Essa soma, que aprenderemos a calcular no estudo de progressões geométricas, é igual ao número "descomunal":

$$9.444.732.965.739.290.427.391$$

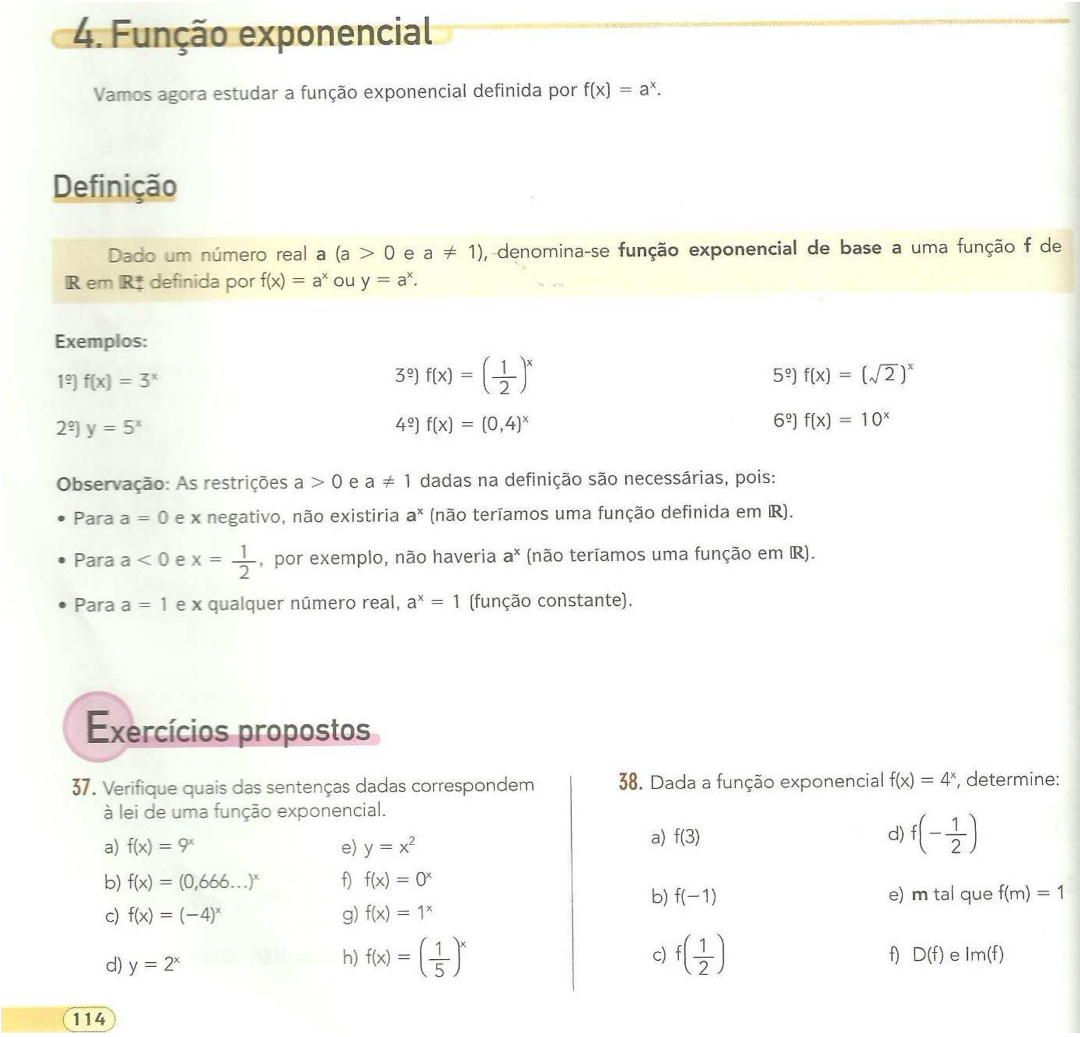
Essa situação mostra o crescimento assustador da função $f(x) = 2^x$. Igualmente espantoso é o decrescimento de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Funções como essas, chamadas de funções exponenciais, serão estudadas neste capítulo. Os pré-requisitos para esse estudo são os conceitos e as propriedades envolvidas na potenciação e na radiciação no conjunto dos reais, que revisaremos a seguir.

Função exponencial Capítulo 9 169

Figura 3: Introdução do capítulo de Funções Exponenciais em Paiva (2009).

Dante (2006) propõe inicialmente em seu capítulo destinado às funções exponenciais uma revisão envolvendo as regras operatórias de potência. Como Paiva (2009), o objetivo é minimizar as dificuldades que possam ocorrer possivelmente na execução do trabalho com funções. Sem fazer apresentação de problemas ou modelagens possíveis sobre o assunto ele apresenta um resumo sobre a função exponencial, conforme mostra a figura 4.



4. Função exponencial

Vamos agora estudar a função exponencial definida por $f(x) = a^x$.

Definição

Dado um número real **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se **função exponencial de base a** uma função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Exemplos:

1º) $f(x) = 3^x$

2º) $y = 5^x$

3º) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4º) $f(x) = (0,4)^x$

5º) $f(x) = (\sqrt{2})^x$

6º) $f(x) = 10^x$

Observação: As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e **x** negativo, não existiria $\mathbf{a^x}$ (não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$).
- Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria $\mathbf{a^x}$ (não teríamos uma função em $\mathbb{R}$).
- Para $a = 1$ e **x** qualquer número real, $a^x = 1$ (função constante).

Exercícios propostos

37. Verifique quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial.

a) $f(x) = 9^x$
b) $f(x) = (0,666...)^x$
c) $f(x) = (-4)^x$
d) $y = 2^x$
e) $y = x^2$
f) $f(x) = 0^x$
g) $f(x) = 1^x$
h) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

38. Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:

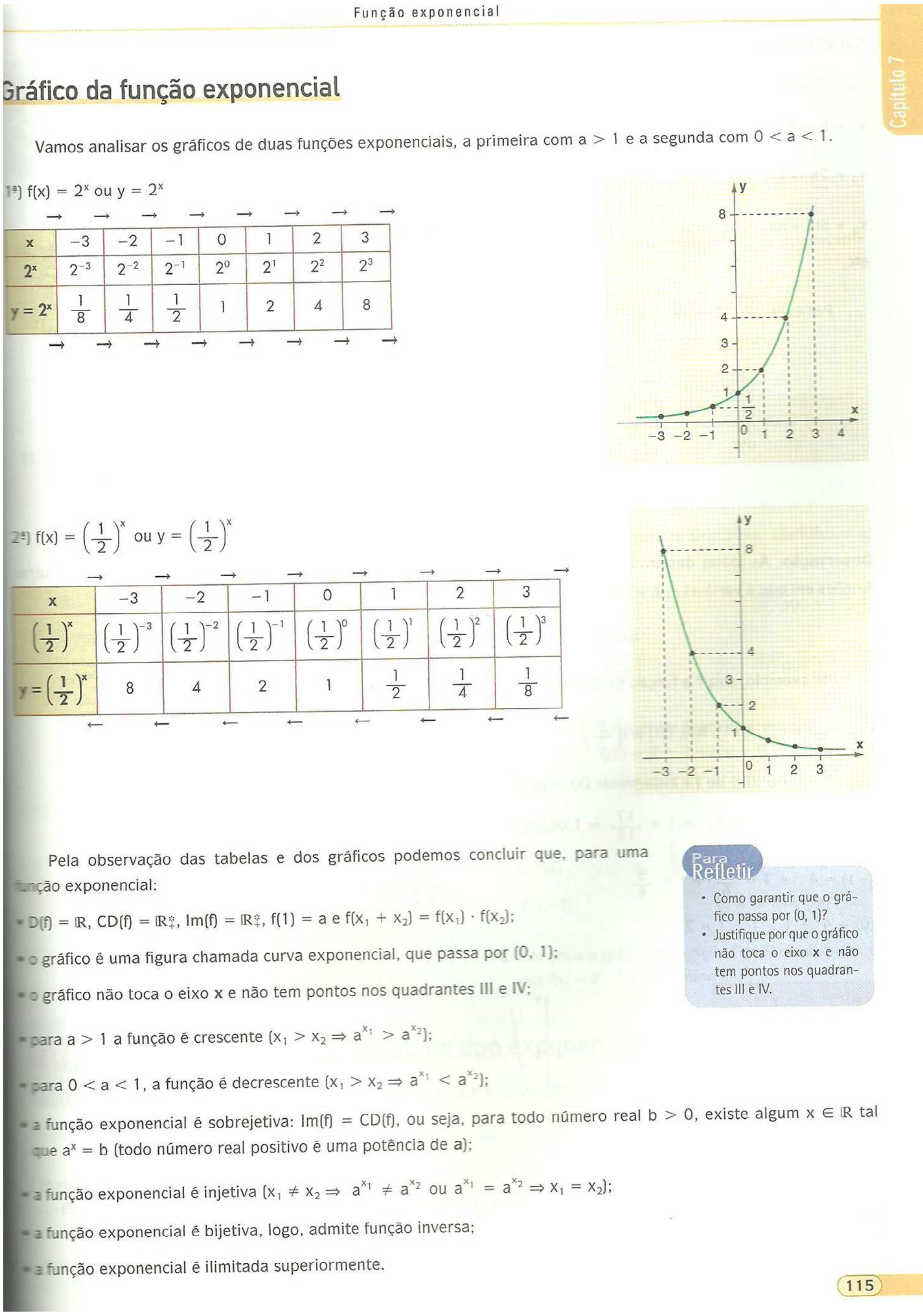
a) $f(3)$
b) $f(-1)$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
d) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
e) **m** tal que $f(m) = 1$
f) $D(f)$ e $Im(f)$

114

Figura 4: Funções Exponenciais em Dante (2006).

Os exercícios propostos, conforme mostra a figura acima, não priorizam o raciocínio interpretativo dos alunos. Trata-se de uma simples repetição de técnicas e não demonstram utilidade do assunto para os alunos. Ao tratar esse tipo de exercício em sala de aula, o professor torna a sua aula desinteressante e desnecessária, pois os alunos não percebem o sentido em aprender as funções exponenciais quando proposto dessa maneira.

Em seguida, Dante (2006) analisa duas situações para elaborar o esboço dos gráficos: uma função exponencial crescente e outra decrescente. Através de uma tabela de valores, ele apresenta a construção dos gráficos, em seguida um resumo sobre as principais características desses tipos de funções. Nota-se que no resumo há representações genéricas que podem ser incompreendidas pelos alunos, uma vez que o professor deve ter habilidade em abordar a representação genérica de elementos da matemática. Para o aluno, somente fica a associação entre as regras e o formato da curva obtida. Em nenhuma passagem do texto, Dante (2006) expõe as possibilidades dos professores utilizarem o laboratório de informática ao abordar os gráficos desse tipo de função. Na escola, dificilmente durante o momento das aulas, o professor está consciente do abismo que existe separando os entes matemáticos e suas representações na concepção dos alunos.



Função exponencial

Capítulo 7

Gráfico da função exponencial

Vamos analisar os gráficos de duas funções exponenciais, a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$.

1ª) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

2ª) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Pela observação das tabelas e dos gráficos podemos concluir que, para uma função exponencial:

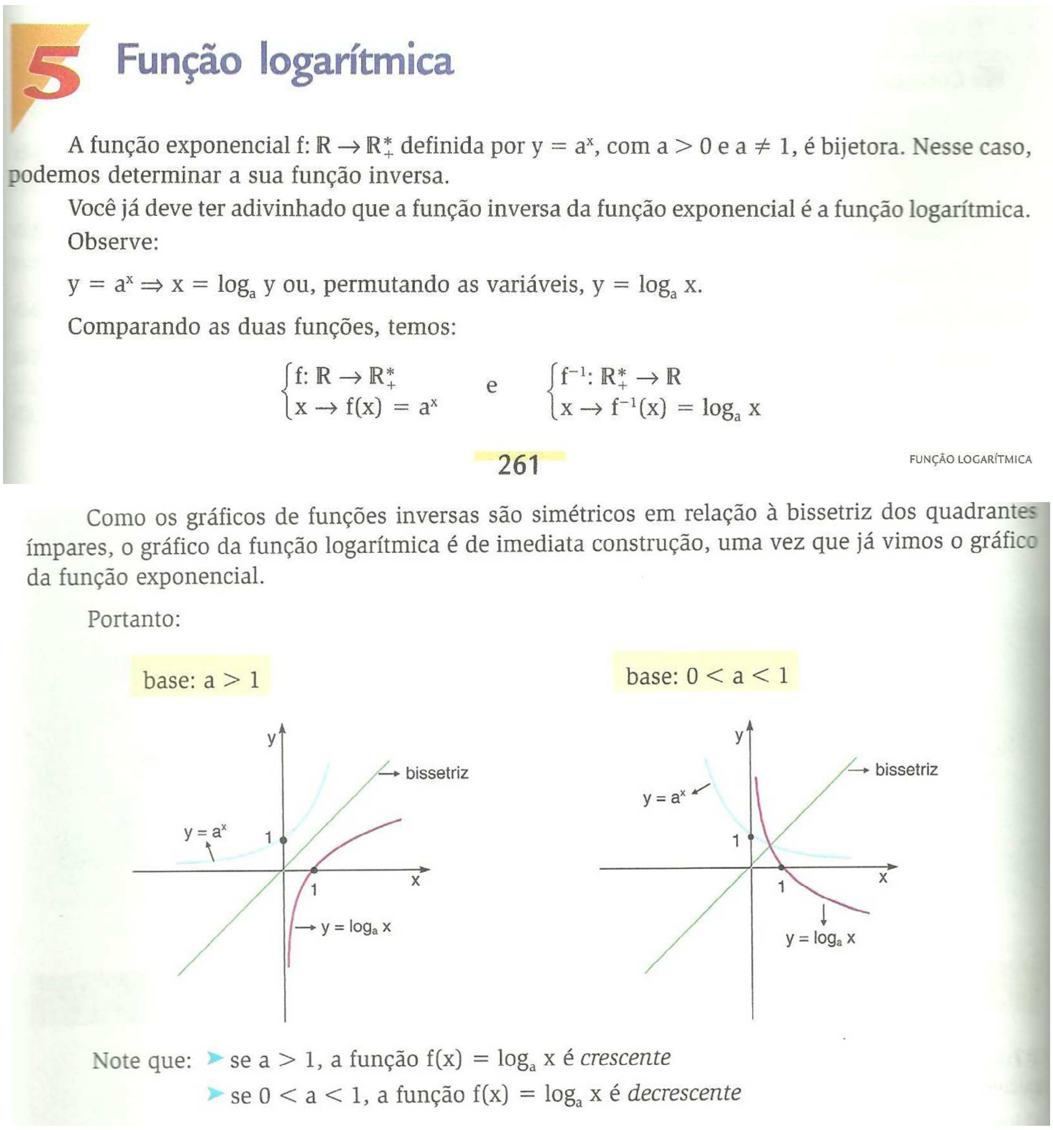
- $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}^*_+$, $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$, $f(1) = a$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$;
- o gráfico é uma figura chamada curva exponencial, que passa por (0, 1);
- o gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV;
- para $a > 1$ a função é crescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$);
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$);
- a função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a);
- a função exponencial é injetiva ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$);
- a função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa;
- a função exponencial é ilimitada superiormente.

Para Refletir
- Como garantir que o gráfico passa por (0, 1)?
- Justifique por que o gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV.

115

Figura 5: Gráficos de Funções Exponenciais em Dante (2006).

O estudo da função logarítmica, em Giovanni e Bonjorno (2005) surge após o estudo da definição, propriedades e equações logarítmicas. A abordagem do assunto é feita do modo que os problemas de aplicação e modelagem com o assunto surgem apenas no final do capítulo e não possuem o devido destaque. A apresentação do assunto segue o modelo tradicional de ensino e sua estrutura é como a de um resumo, onde não é possível realizar questionamentos ou intervenções na metodologia proposta pelos autores, conforme mostra a figura 6.



5 Função logarítmica

A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é bijetora. Nesse caso, podemos determinar a sua função inversa.

Você já deve ter adivinhado que a função inversa da função exponencial é a função logarítmica. Observe:

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$ ou, permutando as variáveis, $y = \log_a x$.

Comparando as duas funções, temos:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \to f(x) = a^x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \to f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases}$$

261 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Como os gráficos de funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, o gráfico da função logarítmica é de imediata construção, uma vez que já vimos o gráfico da função exponencial.

Portanto:

Note que: ➤ se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é *crescente*

➤ se $0 < a < 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é *decrescente*

Figura 6: Função Logarítmica em Giovanni e Bonjorno (2005).

Quando a proposta do assunto é demasiadamente técnica, a matemática é percebida pelos alunos como uma disciplina difícil e sem utilidade prática, pois a única atividade feitas por eles são cálculos, que às vezes não tem o mínimo sentido. Apresentar aos alunos a matemática do ponto de vista como ciência importante e necessária para a vida das pessoas, torna o estudo da disciplina mais proveitoso e a aprendizagem dos alunos melhor qualitativamente.

Em Paiva (2009), além do problema envolvendo modelagem apresentado no início do capítulo envolvendo função logarítmica, o autor apresenta outro exemplo envolvendo o raciocínio de logaritmos. Para o autor, a apresentação desses problemas é a motivação que os alunos têm para iniciar o estudo das equações logarítmicas e consequentemente das funções logarítmicas, conforme mostra a figura 7.

3 Função logarítmica

Vimos, neste capítulo e no anterior, que vários problemas do cotidiano ou do universo científico relacionam grandezas que crescem ou decrescem através do produto por taxas constantes: juros em aplicações financeiras, crescimento populacional, decaimento radioativo, depreciação de um bem etc. O estudo desses problemas exige o conhecimento das funções exponencial e logarítmica, com as quais economistas fazem projeções, geógrafos estudam populações, biólogos avaliam crescimento de culturas bacteriológicas ou químicos estimam o tempo de duração de substâncias radioativas.

RAYMOND FORBES/MASTERFILE/OTHER IMAGES

Espectrômetro de massa, aparelho que mede a massa atômica dos elementos químicos presentes em uma amostra.

Para exemplificar, vamos considerar uma amostra de 1 kg de plutônio, elemento químico que perde 0,4% de sua massa a cada século.

Aplicando a fórmula do montante, com taxa negativa, obtemos a função que descreve o tempo t, em século, em função da massa remanescente M dessa amostra, em quilograma:

$$M = 1(1 - 0{,}004)^t \Rightarrow M = (0{,}996)^t$$

$$\therefore\ t = \log_{0{,}996} M$$

Neste capítulo estudaremos funções desse tipo, chamadas de **funções logarítmicas**.

Chama-se **função logarítmica** toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, em que b é um número real, positivo e diferente de 1.

Figura 7: Função Logarítmica em Paiva (2009).

Notamos que a possibilidade de envolver os alunos em discussões sobre a aplicação das teorias matemáticas constitui um momento importante em sala de aula, pois assim os alunos manifestam suas opiniões, relatam experiências e se envolvem com o assunto, pois percebem que há utilidade em aprendê-lo.

No início dessa seção foi dito que a escolha dos livros didáticos analisados aqui foi feita de acordo com a trajetória profissional do professor-pesquisador envolvido nesta pesquisa. Os livros de Dante (2006) faziam parte da bibliografia proposta na escola na qual realizei o meu estágio docente em 2007, onde o uso dos livros desse autor se fez presente até o ano de 2011.

O livro de Paiva (2009) faz parte de uma coleção que eu comecei a adotar para preparar candidatos rumo ao ingresso na carreira militar: exército, marinha e aeronáutica. Em todos os editais de seleção para concursos militares de nível médio, a bibliografia sugere que o candidato estude pelo livro de matemática de Paiva. Os alunos conseguiram ser aprovados em diversos tipos de concurso na área militar desenvolvendo os tópicos de matemática que estão presentes nos livros desse autor. Considero que essa bibliografia foi essencial para os alunos conseguir o sucesso em sua aprovação.

O livro de Giovanni e Bonjorno (2005) foi a bibliografia utilizada pelo Insituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul com os alunos do ensino médio integrado no ano de 2011. Em todas as turmas, foi repassada ao grupo dos professores a utilização do livro que analisamos aqui. Além disso, essa obra constitui um título comum presente em demais escolas de ensino básico pelo país.

Finalmente, ressaltamos que os apontamentos registrados nessa seção não constituem uma crítica à proposta metodológica dos autores, e sim uma possibilidade de leitura que os professores podem fazer antes de utilizar a matemática proposta no livro didático com os alunos. Consideramos que o posicionamento que o professor assume diante da bibliografia *sugerida* pela escola é decisivo na qualidade de aprendizagem dos alunos.

3.1.3 Uma breve revisão de literatura

Em busca de trabalhos já realizados neste campo investigativo, nesta seção apresentaremos algumas pesquisas já realizadas em nível de pós-graduação e que estão disponibilizadas em bibliotecas on-line tais como: UFRGS[4], PUC-SP[5] e UFF[6]. Também mostraremos as pesquisas em forma de trabalhos apresentados em eventos que envolvem educação matemática, tais como CIAEM[7] e ENEM[8]. A exposição que aqui

[4] UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
[5] PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
[6] UFF – Universidade Federal Fluminense.
[7] CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática.
[8] ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática.

está apresentada possui relação com a abordagem de funções, funções exponenciais e funções logarítmicas no ensino médio.

Silva Júnior e Gazire (2011) propõem que matemática dentro do contexto científico é uma disciplina de caráter centralizador. Quando os fundamentos matemáticos foram revisados na segunda metade do século XIX, a matemática ganhou a notação de ciência precisa e neutra diante dos fenômenos que descreve sendo, portanto considerada uma disciplina de grande importância. Podemos usar a matemática como um elemento reducionista, onde através dela pode-se expressar as leis da natureza, levando em consideração que o conhecimento científico moderno procura determinar regras fixas para o funcionamento dos fenômenos observáveis. Logo os estudos sobre funções, funções exponenciais e funções logarítmicas são de grande relevância para o aluno perceber a importância da matemática na modelagem de situações problema.

Ardenghi (2008) em seu trabalho de pesquisa no mestrado investigou a quantidade de estudos realizados em nível de pós-graduação, sendo de mestrado ou doutorado que abordavam o assunto funções entre o período de 1970 e 2005 no Brasil. Para Ardenghi (2008, p.14) o conceito de função "é nuclear para a construção do conhecimento matemático. É um conceito abordado em todos os níveis de ensino quer seja implícita ou explicitamente, e se faz presente na busca de entendimento dos mais variados fenômenos.". Logo, o estudo desse assunto deve ser tratado como aspecto principal no planejamento metodológico do professor.

Com relação ao conceito de função Rêgo (2000, p.20) citada em Ardenghi (2008, p.14), afirma que o conceito de função:

> Constitui-se, além disso, de um dos principais pré-requisitos para grande parte dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Superior, uma vez inúmeros problemas das Ciências Exatas, da Tecnologia, da Saúde e Ciências Sociais Aplicadas podem ser modelados e estudados utilizando-se funções de uma ou mais variáveis.

Com a verificação que o assunto é de grande importância no ensino de matemática, Ardenghi (2008) realizou um mapeamento da distribuição das pesquisas envolvendo o assunto funções. A quantidade de pesquisas está demonstrada na tabela 1 abaixo:

Tabela 1: Distribuição das pesquisas segundo Ardenghi (2008, p.22)

	TIPO		
	MESTRADO	**DOUTORADO**	
ANO			**TOTAL**
1972	-	01	01
1989	01	-	01
1994	01	-	01
1995	03	-	03
1996	01	-	01
1997	03	-	03
1998	04	-	04
1999	02	01	03
2000	01	01	02
2001	03	-	03
2002	06	-	06
2003	06	-	06
2004	04	-	04
2005	08	-	08
TOTAL	**43**	**03**	**46**

Nota-se na tabela 1 o aumento no número de pesquisas que envolvem o assunto funções, verificando-se que atualmente esse assunto é de relevante importância para a vida dos alunos. O autor sugere que o professor tome conhecimento da evolução histórica do conceito de função, para assim poder identificar as dificuldades de seus alunos e com isso elaborar seqüências didáticas mais eficientes para a aprendizagem do conceito de função.

Ainda segundo Ardenghi (2008, p.65), a sugestão é que o professor deve:

> Apresentar o conceito de função abordando a passagem da linguagem natural para tabelas e vive-versa; propondo gráficos e tabelas que representem funções, propor atividades nos quadros algébrico e geométrico com as respectivas mudanças; leve em conta as concepções prévias dos alunos sobre o conceito de função, quando de sua apresentação e que fiquem atentos com as imagens que são formadas pelos alunos sobre esse conceito; que os professores realizem um trabalho especial de acompanhamento com alunos que apresentavam pouco domínio dos conteúdos anteriores ao ensino de funções; que possibilite a troca de informações entre os alunos; que o professor utilize linguagens menos formais que possam ser acessíveis aos alunos no inicio da apresentação do conceito de função, que o professor fique atento às diversas representações

> existentes do conceito de função, oferecendo atividades de tratamento e conversão das mesmas.

Na passagem anterior, há menção implícita dos campos conceituais de Vergnaud e das representações semióticas de Duval, mostrando que o autor sugere ao professor que em suas aula há a fundamentação teórica necessária para a aprendizagem do conceito de função pelos alunos. Mais adiante serão apresentadas as principais características dessas duas teorias, fundamentais para a futura análise dos dados.

Togni (2007) em seus estudos de doutorado analisou o desenvolvimento de atividades que envolviam o conceito de função através do uso de objetos de aprendizagem virtuais em uma turma de ensino médio noturno no município de Lajeado, no estado do Rio Grande do Sul. Sua proposta era verificar como ocorria a aprendizagem e compreensão do conceito de função através de uma metodologia baseada em resolução de problemas, juntamente com o uso de objetos virtuais de aprendizagem. A autora investigou quais os aspectos lógicos empregados pelos alunos para resolver os problemas propostos com o uso de objetos de aprendizagem.

No que se refere ao uso de tecnologia para potencializar a aprendizagem em sala de aula Togni (2007, p.79) afirma que:

> A utilização de tecnologias, mais produtivamente e com mais significado, não acontecerá se estas forem utilizadas apenas como meio de distribuição de lições instrucionais. A tecnologia não pode ensinar os alunos; ao contrário, ela deve ser utilizada como parceira para que eles possam construir seu conhecimento ao se envolverem com ela no sentido de: construção de conhecimento e não reprodução, conversação e não recepção, articulação e não repetição, colaboração e não competição, reflexão e não prescrição. É nesta perspectiva que os alunos poderão se tornar autônomos, independentes e consequentemente pessoas com capacidade de discernir e tomar decisões.

Salientamos que a proposta do uso de objetos virtuais pode ser uma ferramenta para o professor ensinar conceitos de matemática em sala de aula, desde que o uso seja adequado à proposta metodológica no desenvolvimento das atividades. Isso evita que as aulas de matemática se tornem um dos motivos de evasão e dificuldades dos alunos, pois se os assuntos são abordados fragmentados e sem contexto, acabam tornando a matemática uma disciplina de difícil compreensão.

Sobre os aspectos metodológicos envolvidos nas aulas de matemática, Santos (2010, p.54) afirma que:

> Observa-se que, geralmente, o ensino de Matemática se restringe ao uso do quadro, giz e livro didático. As aulas são meramente expositivas, sendo o assunto desenvolvido na seguinte sequência: definição, exemplos e exercícios, repetições dos exemplos. Acredita-se que este procedimento reduz a aprendizagem de Matemática à memorização de conceitos e algoritmos. O aluno é levado a conceber a matemática como uma disciplina cujo único objetivo é aplicar regras logicamente organizadas e sem nenhuma utilidade prática. Também, no ensino de funções não é diferente. Há uma excessiva valorização da manipulação algébrica das leis e do uso de tabelas para a construção dos gráficos; o vínculo, entre o conceito fundamental de função e as diferentes leis é negligenciado. Desse modo, conduz ao ensino compartimentado do assunto.

A dificuldade em aprender matemática está presente em todos os níveis de ensino, e a tentativa de justificar esse insucesso, está na barreira cognitiva do aluno em coordenar as representações sobre determinado assunto. Andrade e Kaiber (2011, p.10) dissertam sobre esse aspecto:

> Pode-se conjecturar que grande parte das dificuldades dos estudantes em Matemática, ao longo da Escola Básica e no Ensino Superior, se assenta sobre o fato de que os mesmos não conseguem coordenar sobre um determinado conhecimento matemático os diversos registros de representação. Eles possuem o domínio isolado de determinada representação e o tratamento específico que a mesma requer, mas tornam-se incapazes de articular estas representações para estabelecer uma apreensão do objeto matemático.

Para contornar as dificuldades apresentadas na passagem anterior, Togni (2007) defende que uma metodologia de trabalho baseada na resolução de problemas, aliado com o uso de objetos de aprendizagem, possibilita por parte dos alunos a conquista de uma aprendizagem significativa, uma vez que há possibilidade dos alunos realizar simulações, experimentos e experimentar formas diversificadas de resolver problemas, observando a relação que a escola possui com o seu cotidiano. Com base nessa metodologia, Togni (2007, p.152) conclui que assim “se propiciará a eles o que eles mais desejam: um futuro melhor, e principalmente, conhecimentos que lhes permitem oportunidades profissionais e melhores condições de vida”.

Santos (2010) propõe em seu trabalho uma investigação sobre o uso do laboratório de informática nas escolas do município de Alvorada, estado do Rio Grande do Sul. A autora tenta conciliar o insucesso na aprendizagem dos alunos com a falta de preparo e motivação dos professores em propor uma prática metodológica alternativa, tornando as aulas espaços de discussão e participação dos alunos. Em sua pesquisa, Santos (2010, p.132) evidencia que:

> Cerca de 90% das escolas participantes da entrevista possui laboratório de informática e que 48,8% dos professores não o utilizam. No entanto, ao serem consideradas apenas as escolas em que o laboratório está disponível para a execução e preparação das aulas (65,9%), constata-se que o percentual dos professores que o utilizam aumenta para 63%, e, preponderantemente, na criação de textos e planilhas de notas. Dentre os pesquisados 78% considera importante o uso de recursos computacionais, entretanto, destes apenas 53,3% os implementaram. Segundo os últimos, nas atividades ministradas, o número de computadores é quase sempre inferior ao número de alunos, vindo em detrimento ao processo de aprendizagem.

As propostas dos estudos apresentados até o momento envolvem uma reflexão que deve ser feita por parte dos docentes quanto à concepção do assunto a ser tratado em sala de aula e também no que se refere à elaboração do planejamento metodológico das aulas. Visto que o assunto é de grande debate na comunidade de educação matemática, as pesquisas já feitas conduzem para o aperfeiçoamento da prática docente.

O ensino das funções exponenciais e funções logarítmicas também fazem parte de inúmeras pesquisas no campo da educação matemática. Encontra-se em diversos trabalhos propostas de sequências didáticas elaboradas essencialmente para o ensino específico dessas funções.

Frederico (2008) em sua pesquisa no curso de especialização propõe uma análise crítica na forma como é abordado o conceito de logaritmo na escola básica. Ele salienta a importância de possibilitar aos alunos o desenvolvimento de uma mente crítica, onde eles devem ser capazes de raciocinar sobre questões que ainda não tiveram contato, apenas no momento em que os problemas lhe são apresentados. Em forma de crítica, Frederico (2008, p.52) aponta que uma “aprendizagem mecanizada, fundamentada somente em técnicas operatórias, gera mentes domesticadas, e desta forma, alunos que são treinados para só fazerem o que aprendem, sendo que jamais serão cidadãos plenos”. Souza (2010) em seu trabalho de pesquisa no mestrado analisou se as atividades apresentadas no Caderno do Professor[9] no estado de São Paulo contribuem

[9] A obra referida é: São Paulo. Secretaria da Educação. **Caderno do professor: matemática, ensino médio – 1º série, 3º bimestre**. Coordenação geral, Maria Inês Fini – São Paulo: SEE, 2008.

ou não para a compreensão do conceito de função exponencial. O Caderno do Professor constitui um conjunto de conteúdos divididos em bimestres e que de maneira geral, procuram apresentar um material que se aproxime do que é usualmente mostrado nos livros didáticos e tratado pelo professor em sala de aula.

O diferencial deste caderno consiste em trazer uma nova abordagem para o assunto funções exponenciais, destacando-se a contextualização dos conteúdos e as competências individuais dos alunos perante a leitura e escrita matemática. Com a aplicação das atividades utilizando uma metodologia qualitativa de pesquisa, Souza (2010) obteve resultados positivos em seu estudo, destacando a importância do professor em desenvolver sequências de atividades que privilegiem ao aluno visualizar a importância dos conteúdos abordados na aula. Quanto à ordem dos problemas utilizados, Araujo, Bonatto e Milani (2010, p.8) afirmam que:

> A pretensão não é sugerir nem seguir uma sequência linear de situações para ensinar funções exponenciais, mas sim apresentar e discutir contextos diversos que exploram diferentes aspectos do estudo dessas funções. Cabe ao professor julgar o momento mais adequado em suas ações docentes para trabalhar com uma ou outra atividade. Os cenários para o estabelecimento de articulações entre os conceitos são diversos, sejam eles matemáticos ou não, e novas situações podem ser criadas.

Retomando ao uso da tecnologia para o ensino de conteúdos de matemática, aliado com a possibilidade de abordar problemas em sala de aula, Castro Santos (2009) desenvolveu em sua pesquisa de mestrado uma sequência de atividades para o ensino de função logarítmica, utilizando o software GeoGebra[10]. A autora conclui que ao usar a calculadora científica para testar hipóteses e realizar a construção de gráficos identificando as suas propriedades, facilitou a compreensão dos conceitos envolvidos. A autora ressalta que:

> O uso do software GeoGebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem destes alunos. Todos os alunos envolvidos no processo destacaram a importância da visualização do gráfico na função utilizando o software, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido. (Castro Santos, 2010, p.190)

[10] Software livre que possibilita aprender conteúdos de geometria e álgebra, daí o nome GeoGebra. Disponível para download em http://www.geogebra.org/cms/ ou também em versão de uso on-line: http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html . Acesso em 26/01/2012.

Os estudos apresentados nessa seção nos conduzem para uma reflexão em torno da prática docente envolvida no ensino das funções, funções exponenciais e funções logarítmicas. As pesquisas desenvolvidas e mostradas anteriormente, apontam a devida atenção que o professor deve ter ao propor atividades envolvendo esses assuntos, em relação aos aspectos cognitivos e metodológicos presentes em sua proposta. Defendemos a ideia de que o estudo fundamentado teoricamente, acompanhado de uma análise prévia dos alunos feita pelo professor, possibilita que ele elabore, crie e aplique sequências de atividades capazes de conseguir a aprendizagem eficaz dos conceitos de matemática pelos alunos.

3.2 Campos conceituais de Vergnaud

3.2.1 O que são campos conceituais

A necessidade de conceber a escola como um espaço de produção do conhecimento matemático, capaz de tornar cada aluno, um sujeito que possui esquemas de pensamentos e significações, permite a possibilidade do professor diversificar o trabalho em torno do desenvolvimento dos conceitos e procedimentos matemáticos. Isso possibilita aos professores que possuem uma visão engessada para o ensino de matemática, considerar a importância de repensar a sua metodologia. Nesta perspectiva, pode-se dizer que na maioria das escolas não há uma transposição didática da matemática, que ocorre quando o professor leva o conhecimento científico para a sala de aula, sem adaptar os interesses, necessidades e possibilidades de ensino aos alunos.

A partir da tomada de consciência do professor de que a escola não deveria ser apenas consumidora de conhecimentos acadêmicos, e sim um produtor de saberes matemáticos, gera a possibilidade de conceber o aluno como um ser matemático que possui esquemas próprios que são a base essencial para a realização de suas atividades matemáticas. Um olhar sobre a teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud pode proporcionar ao professor um método conceitual importante para compreender a aprendizagem de matemática pelos alunos, em especial analisando as noções de esquema e invariantes operatórios propostos por essa teoria.

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud é uma teoria que afirma que a aquisição do conhecimento é moldada por situações-problema e as ações do sujeito nessas situações. Através de situações-problema que precisam ser resolvidos é que o aluno percebe o sentido do conceito. O campo conceitual é colocado como uma unidade de estudo com a finalidade de dar sentido às dificuldades durante o processo de conceitualização do real. Dessa forma, o professor desenvolve o trabalho baseado nas dificuldades dos alunos.

Vergnaud (1982) propõe que o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio ocorre ao longo de um período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. O campo conceitual é um conjunto de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, interligados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de apropriação das ideias matemáticas.

O campo conceitual é definido também como sendo o conjunto de situações cuja sua apropriação requer, por sua vez, o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas distintas. Resumidamente, os conceitos são definidos por três conjuntos: o primeiro é um conjunto de situações que constituem o *referente* do conceito, o segundo é um conjunto de invariantes operatórios que produzem o *significado* do conceito, e o terceiro é um conjunto de representações simbólicas que constituem o seu *significante*.

A linguagem e os símbolos são ferramentas importantes durante o processo de acomodação e o professor faz vasto uso deles em sua função de mediador; mas deve-se considerar que a atitude principal do professor é promover situações produtivas aos alunos.

Para Vergnaud, as situações não precisam ser necessariamente de caráter didático; elas podem ser um conjunto de objetos, propriedades e relações determinados, envolvendo o sujeito em suas ações. As situações geram sentido aos conceitos, ou seja, um conceito torna-se significativo por meio de uma variedade de situações e diferentes aspectos de um mesmo conceito estão envolvidos em diferentes situações.

Diante de cada situação problema, ocorre por parte do professor a busca de ferramentas capazes de interpretar e analisar a produção dos alunos. Neste caso, a teoria dos campos conceituais possibilita um olhar profundo para o fenômeno da produção matemática escolar.

Durante a resolução de um problema matemático, Vergnaud propõe duas fases que constituem o processo. A primeira fase é onde ocorre a seleção de informações e determinações das operações a serem realizadas. A segunda fase diz respeito aos processos de resolução propriamente ditos. Em cada uma das fases há objetivos, regras, representações e inferências. Assim, é importante para a compreensão do pensamento que ocorre durante a resolução de um problema, que o professor saiba interpretar os objetivos, regras, representações e inferências presentes em cada situação.

O conceito central na teoria dos campos conceituais é o de esquema, que aparece proposto em duas definições encontradas em Vergnaud (1996):

Definição 1: O esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dadas.

Definição 2: O esquema é formado por quatro componentes:

1. Um objetivo, sub-objetivos e antecipações;
2. Regras de ação, tomada de informações e controle;
3. Invariantes operacionais;
4. Possibilidade de inferências em situações.

As definições apresentadas anteriormente possuem características importantes. A primeira apresenta que um esquema pode ser concebido como uma classe de situações e não a partir de uma produção isolada. Neste caso o esquema é tratado como universal e traz consequências importantes na avaliação da produção matemática dos alunos. Os esquemas podem mudar de acordo com a mudança da situação. O que se altera em uma situação não são as condutas observáveis e sim a sua organização. Logo a função do esquema é organizar as atividades de pensamentos envolvidas nos problemas.

Na segunda definição encontramos uma descrição onde é possível organizar a compreensão dos elementos envolvidos no pensamento e com isso possibilitar ao pesquisador organizar categorias durante a sua análise. O papel do objetivo e suas divisões em subcategorias desempenham um papel importante nesta definição, pois são eles que permitem diferenciar as condutas durante a busca de uma solução para um problema. As regras de ação e tomada de informações são responsáveis pela geração do esquema, pois a conduta não é constituída apenas de ações e sim da coleta e seleção de informações, assim como os controles que permitem o sujeito estar seguro do que está fazendo.

Os conceitos em ato são as atitudes que permitem ao sujeito selecionar as informações relevantes para a produção de uma solução de acordo com os seus objetivos. Os conceitos também permitem que o sujeito determine as propriedades e relações que o ajudarão na resolução de um problema, ou seja, o conceito em ato ainda pode ser considerado uma ação pertinente no contexto de um problema. A passagem a seguir explicita bem as noções envolvidas na segunda definição:

> Numa situação dada, o sujeito dispõe de muitos tipos de conhecimento para identificar os objetos e suas relações e a partir daí estabelecer objetivos e regras de conduta pertinentes. Os conhecimentos são conhecimentos em ato, designados aqui por "invariantes operatórios" para indicar que estes conhecimentos não são necessariamente explícitos, nem mesmo conscientes para certos entre eles. O conceito de invariante operatório permite falar nos mesmos termos às vezes da percepção, quer dizer da identificação dos objetos materiais e suas relações, da interpretação das informações perceptivas nas situações onde há espaço para a incerteza, e os pensamentos que portam os objetos altamente elaborados da cultura. (Vergnaud, 1998, p.10)

O importante é que o professor-pesquisador envolvido com atividades em sala de aula deve estar atento no que diz respeito aos procedimentos, algoritmos e esquemas produzidos pelos alunos nas situações em que eles estão inseridos. Os registros produzidos nesses processos são imagens parciais de processos mais amplos e abstratos. Esses registros geralmente não traduzem as atividades em sua totalidade, apenas em parte. O processo de identificar, descrever e analisar as atividades constitui uma etapa difícil de ser realizada e exige do professor-pesquisador esforço para realmente compreender o que e como os alunos estão elaborando os seus registros.

Então podemos dizer que o processo de revelação dos esquemas subjacentes à atividade matemática ocorre em diversos momentos em uma aula, entre os quais destacamos:

- Interpretação inicial que os alunos fazem das situações. Neste momento eles organizam esquemas prévios para aplicar neste novo contexto proposto;
- As decisões dos alunos durante a execução da solução, ou seja, quais os procedimentos para produzir uma solução do problema;
- O momento que os alunos registram as informações durante a execução dos procedimentos na busca pela solução. Ao expressar os seus procedimentos em uma folha de papel, os alunos devem se posicionar em relação ao conhecimento e suas possíveis representações, resultando assim a solução;
- A validação de uma resposta obtida pelo aluno não encerra quando ele expõe todos os seus cálculos e procedimentos, e sim quando ele é capaz de verificar se a sua solução está coerente de acordo com o problema;

- Quando os alunos confrontam a sua solução perante a solução de outros colegas, há a possibilidade de existir diversidade na possibilidade de resolução.

Na teoria dos campos conceituais de Vergnaud a noção de esquema desempenha papel importante no processo de apropriação dos conceitos matemáticos pelos alunos, pois permite que eles reflitam e tomem consciência dos caminhos que percorreram durante a execução do problema. Neste contexto, a escola passa a ser considerada um local de produção do conhecimento matemático e não somente de reprodução. Identificar os esquemas, fundamentando-se nos campos conceituais pode revelar os movidos das dificuldades na aprendizagem de matemática e também revelar alunos que possuem grande potencial matemático.

A teoria proposta por Vergnaud valoriza a produção feita pelos alunos, que diferem da formação e concepções sobre o conhecimento matemático que está presente na formação de professores. Ao reconhecer as produções dos alunos, ocorre uma desestabilização do professor, que descobre a cada aluno uma nova forma de pensar em situações que envolvem matemática, onde os alunos ao produzir o método de resolução, são capazes de registrar e argumentar logicamente sobre determinadas situações.

Ao conceber essa proposta como uma alternativa para o ensino, percebe-se a necessidade de alterar as concepções pedagógicas propostas na escola, conforme mostra Resende (2006):

- Devem-se usar situações-problema que produzem significados para os alunos;
- Os alunos devem ter a liberdade cognitiva de agir sobre o problema, ou seja, ter a capacidade de validar as suas opções escolhidas durante a resolução, com a mínima intervenção do professor;
- Inserir os alunos em situações a-didáticas, no sentido proposto por Brosseau (1998), onde eles são os agentes da aprendizagem sem interferência direta do professor;
- Deve-se valorizar os registros durante os procedimentos como apoio ao desenvolvimento do pensamento;
- Deve-se proporcionar aos alunos um ambiente de troca e confronto de validação dos diferentes métodos utilizados na resolução do problema;

- Valorizar a argumentação entre os alunos, na forma de discurso oral, possibilitando a interação entre eles na discussão dos métodos e procedimentos utilizados na resolução da situação;
- O professor deve ser capaz de identificar os esquemas subjacentes dos alunos para compreender os procedimentos adotados pelos alunos, com a finalidade de planejar a intervenção e desempenhar o seu papel de mediador.

Portanto ao identificar e compreender os esquemas produzidos pelos alunos é uma oportunidade de aumentar a interação do aluno com o professor em sala de aula, possibilitando a construção de um diálogo eficiente nas aulas de matemática. Esse diálogo é capaz de produzir nos alunos um significante eficiente na aprendizagem dos conteúdos de matemática.

3.2.2 Sua importância nessa pesquisa

Os campos conceituais de Vergnaud foram essenciais nessa pesquisa por que possibilitaram desenvolver atividades que envolvessem os alunos na criação de esquemas que facilitassem a sua aprendizagem. Através de uma sequência de atividades desenvolvidas ao longo de cinco dias, foi possível possibilitar o contato dos alunos com situações, problemas e contextos que envolvem a aplicação do conceito de funções, funções exponenciais e funções logarítmicas em aplicações do cotidiano.

Através de uma organização disposta em grupos, os alunos produziram coletivamente os seus registros e impressões sobre os procedimentos na resolução dos problemas, caracterizando a elaboração dos conceitos e teoremas em ação propostos por Vergnaud. Nas atividades propostas ocorreu a possibilidade dos alunos discutirem e elaborar a estratégia cognitiva que melhor se adaptasse a cada problema proposto, sendo que nesse momento ocorre a possibilidade de socializar e compartilhar as ideias matemáticas presentes.

As inferências produzidas pelos alunos são importantes informações que serão utilizadas mais adiante na apresentação dos resultados dessa pesquisa, mas por enquanto é suficiente observar que o método proposto por Vergnaud através de seus campos conceituais possibilitou nessa pesquisa desenvolver as competências e habilidades em grande parte dos alunos, e também reconhecer as dificuldades de aprendizagem encontradas em alguns deles durante o desenvolvimento das atividades.

Os campos conceituais serviram para posicionar o professor-pesquisador adequadamente no contexto da presente pesquisa, ou seja, proporcionou a ocorrência de uma readequação na postura algumas vezes adotada em sala de aula, na qual prontamente o professor se dispõe a ajudar os alunos perante uma dificuldade. A valorização na interpretação e análise dos esquemas desenvolvidos pelos alunos, a partir de seus próprios registros possibilita o professor descobrir alunos com alto potencial matemático e que conseguem descrever corretamente os procedimentos e tomadas de decisões durante a resolução de um problema. Isso possibilitou também descobrir falhas na aprendizagem de alguns alunos da turma, que não conseguiam organizar os seus esquemas, executar os conceitos e teoremas em ação, possibilitando a inferência sobre determinado conteúdo matemático.

3.3 Representações semióticas de Duval

3.3.1 O que são representações semióticas

Antes de escrever sobre a teoria proposta por Duval e suas implicações na aprendizagem de conceitos da matemática, vamos apresentar algumas definições para o termo semiótica, que caracteriza a teoria proposta por Duval. As definições apresentadas abaixo estão presentes em obras relacionadas com estudos na área de psicologia cognitiva.

Em Santaella (1983, p.7) temos que "O nome semiótica vem da raiz grega *semeion*, que quer dizer *signo*. Semiótica, portanto, é a ciência dos signos, é a ciência de toda e qualquer linguagem.". Ainda em Santaella (1983, p.13), "A Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido.".

Liszka (1996, p.2) apresenta que "Semiótica ou lógica é a ciência das leis necessárias gerais dos signos e está especificamente preocupada com a relação dos fenômenos para com a verdade.". Em Nöth (1995, p.17) encontramos que "Semiótica é a ciência dos signos e dos processos significativos (semiose) na natureza e na cultura. A Semiótica, como teoria geral dos signos, tem a sua etimologia do grego ‘semeîon’, que significa ‘signo’, e ‘sêma’, que pode ser traduzido por ‘sinal’ ou também ‘signo’.".

As passagens acima demonstram que o estudo da semiótica é relevante quando queremos compreender os processos envolvidos no ensino e na aprendizagem de determinado conteúdo. Durante uma aula de matemática, o professor apresenta diferentes signos referentes a um determinado conteúdo, e isso faz com que os alunos produzam representações desses signos. As formas de representação envolvidas durante a aprendizagem dos conteúdos são importantes para o professor qualificar a aprendizagem dos seus alunos.

Encontramos em Duval (1996) a afirmação de que o processo de aprendizagem na disciplina de matemática não pode ser considerado pelo professor como o mesmo disponível em outras disciplinas. A matemática é uma ciência que pressupõe como pré-requisito uma atividade cognitiva diferente de outras áreas de conhecimento. O autor apresenta a importância e a diferenciação das representações semióticas utilizadas na matemática, uma vez que as representações exercem diferentes funções, tais como comunicação, desenvolvimento das representações e produção de conhecimento.

A ideia de representação é uma das noções centrais ao se estudar os fenômenos relativos à aquisição do conhecimento pelos alunos. A forma como um aluno aprende está intimamente ligada às formas de representação que ele faz sobre determinado conteúdo. Tudo depende de como estão organizados os registros e impressões internas sobre determinado assunto e também da codificação utilizada pela pessoa para transformar as informações em registros confiáveis.

Na teoria piagetiana, nota-se que o desenvolvimento da inteligência possui articulação com as ações realizadas pelo indivíduo e as representações formadas pelas ações, conforme apresenta a passagem abaixo:

> É preciso tempo para interiorizar as ações em pensamento porque é bem mais difícil se representar o desenrolar de uma ação e dos seus resultados em termos de pensamento do que se limitar à sua execução material...
>
> A interiorização das ações supõe também sua reconstrução em um novo plano e essa reconstrução pode passar pelas mesmas fases, porém com uma maior diferença que a reconstrução anterior da própria ação. (Piaget, 1969, p.52)

A interiorização das ações e a noção de representação tornam-se essenciais quando estamos estudando quais as formas possíveis de descrever e tratar uma informação em um dado sistema de tratamento. A especificidade das representações consideradas semióticas na matemática consiste no fato delas pertencerem a um sistema particular de signos, linguagem, escritura algébrica ou cartesiana, onde elas podem ser convertidas em representações consideradas "equivalentes" em um outro sistema semiótico, mas podendo atribuir significações diferentes pelo sujeito que as utiliza.

A noção de representação semiótica considera a hipótese de existir sistemas semióticos distintos e operações que permitam converter a informação de um sistema para outro. Essas operações podem ser descritas como uma mudança de forma. Um exemplo dessa mudança de forma é o tratamento dado pelos alunos ao esboçar o gráfico de uma função conhecendo a sua forma de representação na matemática, comparado com o problema de interpretação dado em linguagem literal onde há a necessidade de transformar em linguagem algébrica e com isso produzir o gráfico. Com isso ocorre uma mudança pela qual o conhecimento é representado.

Ao fazer uma análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais do raciocínio, compreensão dos textos, aquisição dos tratamentos lógicos e matemáticos há o confronto de três fatos que estão interligados.

O primeiro fato é que há uma diversidade nos registros de representação semiótica, onde a oposição entre linguagem e imagem é uma possível diversificação. A língua natural e as línguas simbólicas não podem ser consideradas como formadoras de um mesmo registro. Notamos que as imagens, esquemas, figuras geométricas, gráficos cartesianos e tabelas são sistemas de representação muito distintos entre si e apresentam questões de aprendizagem específicas.

O segundo fato é que existe uma diferenciação entre os representantes e os representados, ou seja, entre forma e conteúdo em uma representação semiótica. Essa diferenciação é associada à compreensão do que uma representação significa juntamente com a possibilidade de associá-la em outras representações para integrá-la em um sistema de tratamento. Nota-se que essas representações não são adquiridas prontamente independentes de qual for o registro de representação adotado e o estágio de desenvolvimento dos estudantes.

O terceiro fato é que deve existir uma coordenação entre os diferentes registros nas representações semióticas. Conhecer as regras de correspondência entre dois sistemas semióticos distintos não é suficiente para que eles possam ser mobilizados e utilizados juntos. Isso significa que pode não ocorrer uma apropriação do conceito abordado que foi produzido em dois sistemas de representação semióticos distintos.

Esses três fatos apresentados acima fazem parte do estudo relativo à semiósis, ou seja, na capacidade intelectual dos sujeitos em estabelecer relações de representação. A disciplina de matemática possui influência direta do confronto apresentado anteriormente, devido ao percebido insucesso da maioria dos alunos em relação aos aspectos cognitivos envolvendo a aprendizagem dessa disciplina.

Duval (2009) salienta que não devemos confundir um objeto e sua representação, uma vez que realizando operações em mais de um sistema de representação, é implícito o entendimento de que nenhuma das representações consideradas é propriamente o objeto matemático, mas apenas estamos diante de um representante, um ente que está "no lugar dele" com a finalidade de permitir o acesso aos objetos matemáticos.

Uma situação que serve de exemplo é o desenho de uma reta, a palavra reta, a equação de uma reta, são todas as representações diferentes que se referem ao mesmo objeto "reta", mas nenhuma das representações é de fato uma reta, apenas estão representando. Tratando-se em aprendizagem de matemática são considerados relevantes os registros que permitem o acesso ao objeto e ao tratamento do objeto matemático.

Até o presente momento, com os argumentos apresentados pode-se afirmar que ao representar, tratar e converter em representações semióticas, é necessário a mobilização de sistemas cognitivos específicos para cada uma das atividades propostas aos alunos. Com isso, somente pode-se aprender efetivamente as ideias matemática através das representações semióticas dos objetos matemáticos. Durante o processo de aprendizagem é importante que o aluno saiba manipular as representações semióticas, com a finalidade de transformá-las em outras, se necessário.

Ainda em Duval (2003) nota-se que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação". Logo, as atividades cognitivas envolvidas no ensino e na aprendizagem da matemática requerem regras de codificação próprias. Cada um dos registros desenvolvidos possui limitações representativas específicas, surgindo, portanto a necessidade da utilização de outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem usual e de imagens, como ferramenta para a verdadeira compreensão do conceito matemático.

Considerando a possibilidade de representar os objetos conceituais matemáticos, Duval propõe que a noção de tratamento e de conversão são operações cognitivas diretamente envolvidas durante processo de compreensão do conhecimento matemático, isto é, na construção dos conceitos. Para a aprendizagem de matemática, é importante destacar que a movimentação nos registros é o principal aspecto para a solução dos problemas cognitivos encontrados pelo professor durante a sua aula.

Ao escolher o registro semiótico mais adequado para aplicar os tratamentos isso implica primeiramente no desenvolvimento do raciocínio, consequentemente, leva a resolução correta dos problemas matemáticos, e finalmente conduz à aprendizagem. A necessidade da diferenciação entre o objeto matemático e sua representação constitui-se em um aspecto de relevância para Duval, pois, a compreensão de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de pelo menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Ao dispor de vários registros é possível estabelecer a distinção essencial do objeto matemático em relação ao registro na representação semiótica, ou seja, estabelecer a distinção correta entre o representante e o representado.

Podemos dizer que ocorre o processo de apropriação do conceito quando o aluno é capaz de identificar um registro de representação semiótica do objeto matemático estudado, escolhido em um conjunto onde há vários registros apresentados, de maneira a favorecer a resolução de um dado problema. Para compreender a proposta de Duval, inicialmente deve-se perceber o quanto a matemática é dependente das representações que são utilizadas para ter acesso a ela, e em segundo lugar, o professor deve saber proporcionar estratégias específicas para o trabalho pedagógico com essa disciplina.

3.3.2 Sua importância nessa pesquisa

As representações semióticas foram importantes nessa pesquisa, pois possibilitaram desenvolver atividades sobre funções, funções exponenciais e funções logarítmicas que permitiu que os alunos criassem vários registros de representação semiótica das situações. Os problemas propostos tinham como objetivo propiciar aos alunos a elaboração de registros baseados em linguagem natural, algébrica e cartesiana, sendo possível que eles transitassem entre os registros criados e convertessem adequadamente as informações.

Esperou-se possibilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos através da apresentação de problemas que usualmente não são abordados nas aulas de matemática e que promovessem a interdisciplinaridade. As representações semióticas surgiram em vários momentos durante a sequência de atividades. Destaca-se que inicialmente os alunos deveriam manipular funções através de gráficos e tabelas, produzindo assim inúmeras representações das situações apresentadas. A apresentação da função exponencial e da função logarítmica através de problemas de modelagem possibilitou que os alunos desenvolvessem estratégias e métodos para compreender a matemática envolvida em cada um dos problemas. Essas estratégias e métodos constituem a semiósis da situação e ao realizar a conversão e fazer o tratamento das informações ocorre o processo de noésis na apropriação dos conceitos matemáticos.

Logo, a teoria das representações de Duval contribuiu nessa pesquisa para produzir a apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos, através dos registros que os alunos fazem ao se deparar com cada uma das situações propostas. Ao realizar as atividades em grupos, ocorreu a possibilidade dos alunos desenvolverem os seus próprios registros de representação para a matemática envolvida de forma coletiva, possibilitando que a escolha do registro mais satisfatório para a aprendizagem ocorresse através da discussão realizada com o grupo de trabalho.

Após termos apresentado a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e a teoria das representações semióticas de Duval, o mapa conceitual apresentado na figura 8 abaixo apresenta as principais características dessas duas teorias com as relações existentes nesta pesquisa.

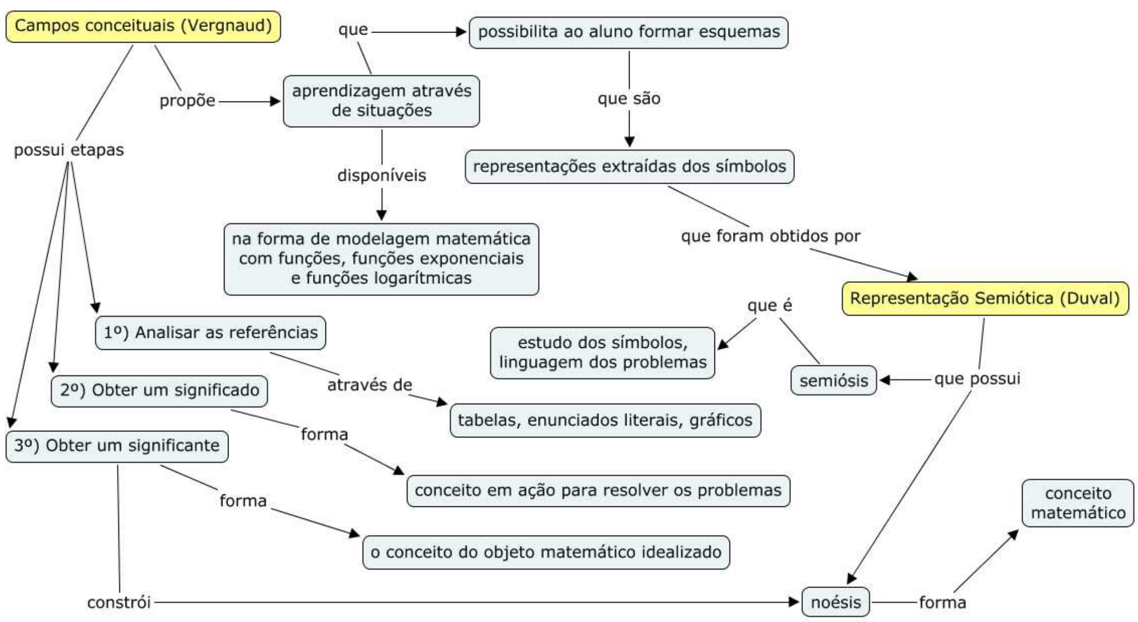


Figura 8: Mapa conceitual com os aspectos teóricos da pesquisa.

A teoria dos campos conceituais e a teoria das representações semióticas possuem relação intrínseca nessa pesquisa, pois através das representações que os alunos fazem das situações para a apropriação do conceito envolvido, eles estão utilizando as representações semióticas para formar os esquemas, onde em seguida serão mobilizadas estruturas cognitivas para criar os conceitos em ação e também os teoremas em ação. Isso possibilita que os alunos naveguem entre as suas representações semióticas produzidas, utilizando os conceitos em ação para formar um significante para o conceito, ou seja, possibilitar a formação de uma noésis para o conceito matemático envolvido na proposta do ensino de funções, funções exponenciais e funções logarítmicas.

3.4 Exponenciais e Logaritmos

Para a parte de funções, utilizamos as referências de Ávila (2005), Anton (2007), Goldstein e Lay (2007), Jakubovic,Trotta & Imenes (1979). As três primeiras obras são usualmente adotadas na disciplina de análise e cálculo em cursos de graduação de ciências exatas. A quarta obra apresenta diversas situações onde está presente o conceito de função como relação entre grandezas. Destacamos que o objetivo no uso dessas referências foi proporcionar aos alunos exemplos de modelagens matemáticas apresentando os conceitos de função, gráfico, variável independente, variável dependente, crescimento e decrescimento.

A fundamentação matemática para a parte das funções exponenciais e funções logarítmicas e consequentemente a elaboração das atividades para esses assuntos foi extraída da obra de Lima e Carvalho (2000) intitulada “A matemática do ensino médio, volume 1”. Esses autores além de apresentar as ideias matemáticas centrais no estudo das funções exponenciais e logarítmicas, apresentam a importância no uso de problemas em aula com os alunos com a finalidade de proporcionar a investigação na importância de se estudar esses conteúdos na escola.

3.4.1 Exponenciais e logaritmos

Nesta seção apresentamos as principais definições e propriedades referentes às exponenciais e logaritmos, com o objetivo de tornar possível o estudo das funções exponenciais e logarítmicas mais adiante. O nosso referencial teórico para essa parte é a obra de Lima e Carvalho (2000) que propõe a construção das potências dos números de forma muito natural, iniciando pelos números naturais. Ainda observamos que nesta seção a representação dos conjuntos numéricos será a seguinte: números naturais (N), números inteiros (Z), números racionais (Q) e números reais (R).

Consideremos um número real positivo a. Para todo $n \in N$, a potência a^n de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. No caso de $n = 1$ como não há produto de um só fator, se convenciona que $a^1 = a$ por definição.

Indutivamente podemos pensar na definição de a^n. Assumindo que $a^1 = a$ devemos ter $a^{n+1} = a.a^n$. É evidente que para quaisquer valores $m, n \in N$ é válido que $a^n.a^m = a^{n+m}$, uma vez que em cada lado da igualdade temos o produto de $n + m$ fatores iguais a a. Generalizando, segue que para quaisquer m_1, m_2, ... , $m_k \in N$ vale:

$$a^{m_1}.a^{m_2}.\cdots.a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_k}$$

Em particular se $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = m$ temos válida a propriedade $(a^m)^k = a^{mk}$.

Quando o expoente se torna um número inteiro $n \in Z$, ele pode assumir valores negativos ou zero. A potência a^n deve ser definida de modo que seja preservada a propriedade fundamental $a^n.a^m = a^{n+m}$. Observamos que a definição de $a^0 = 1$ ocorre neste momento, pois deve ser verdadeira a igualdade: $a^0.a^1 = a^{0+1}$. Como $a^1 = a$ segue-se que a única definição possível é que $a^0 = 1$.

Em seguida notamos que, dado qualquer $n \in N$ devemos ter $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, o que implica $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Logo para estender o conceito de potência do número real $a > 0$, para admitirmos expoentes inteiros quaisquer e preservar a propriedade $a^n.a^m = a^{n+m}$ devemos definir: $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Observamos que ainda continua válida a propriedade $(a^m)^k = a^{mk}$ para quaisquer $m, k \in Z$.

Na continuação da construção, vamos dar um sentido para a potência a^r quando o expoente é um número racional da forma $r = \dfrac{m}{n}$ com $m \in Z$ e $n \in N$, de modo que continue válida a propriedade $a^r.a^s = a^{r+s}$. Dessa última igualdade resulta que devemos ter para $r = \dfrac{m}{n}$:

$$\left(a^r\right)^n = a^r.a^r.\cdots a^r = a^{r+r+\ldots+r} = a^{r.n} = a^m$$

Na igualdade acima nota-se que a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Desse modo, a única maneira de definir a potência a^r, onde $r=\frac{m}{n}$ e $m\in Z$ e $n\in N$ é pondo $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$.

Verificamos agora a validade da propriedade $a^r.a^s=a^{r+s}$ com $r=\frac{m}{n}$ e $s=\frac{p}{q}$ assumindo sem perda de generalidade $n,q>0$. Sabemos que $\left(a^r\right)^n=a^m$ e $\left(a^s\right)^q=a^p$. Logo:

$$\left(a^r.a^s\right)^{q.n} = \left(a^r\right)^{qn}.\left(a^s\right)^{qn} = a^{rqn}.a^{sqn} = a^{mq}.a^{pn} = a^{mq+pn}$$

Vemos que $a^r.a^s$ é o número cuja $qn-ésima$ potência vale a^{mq+pn}. Isso quer dizer que $a^r.a^s=a^{(mq+pn)/qn}$. Como $\frac{mq+pn}{qn}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=r+s$ segue que $a^r.a^s=a^{r+s}$.

Verificada essa propriedade precisamos a garantia de poder calcular o valor de a^r e encontrar o seu valor em algum ponto de $\Re^+$. Isso é garantido pelo teorema a seguir.

Teorema 1: Fixado um número real $a\neq 1$, em todo intervalo de $\Re^+$, existe alguma potência a^r, com $r=\frac{m}{n}\in Q$.

Demonstração: Dados $0<\alpha<\beta$, devemos encontrar $r\in Q$ tal que $\alpha\leq a^r\leq\beta$. Sem perda de generalidade, consideramos $a,\alpha>1$, sendo que as demais situações são tratadas de modo análogo. Como as potências de expoente natural crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos encontrar números naturais M e n tais que:

$$\alpha<\beta<a^M \qquad \text{e} \qquad 1<a<\left(1+\frac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n$$

Da última relação decorrem sucessivamente que $1<a^{1/n}<1+\frac{\beta-\alpha}{a^M}$ ou seja, $0<a^M\left(a^{1/n}-1\right)<\beta-\alpha$.

Logo temos que $\frac{m}{n}\leq M \Rightarrow 0<a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)<\beta-\alpha \Leftrightarrow 0<a^{\frac{m+1}{n}}-a^{\frac{m}{n}}<\beta-\alpha$.

Portanto as potências $a^0=1$, $a^{1/n}$, $a^{2/n}$, ... , a^M são extremos de intervalos consecutivos e justapostos, todos de comprimento menor do que $\beta-\alpha$. Isso garante que pelo menos um desses extremos está entre α e β, como queríamos demonstrar.

Pelo teorema anterior podemos estender a ideia da potência para os números irracionais. Consideremos um número real $a>1$. Basta observar que dado um número irracional x, existem números racionais r e s com $r<s$ tais que $r<x<s$, logo teremos $a^r<a^x<a^s$.

Para obter o valor de a^x construímos uma sequência números racionais (r_n) que se aproximam do número irracional x por falta. Ou seja, consideramos a sequência crescente de números racionais $r_1<r_2<...<r_n<...<x$. Como $a>1$, temos que $a^{r_1}<a^{r_2}<...<a^{r_n}<...<a^x$. Agora construímos uma sequência de números racionais (s_n) que se aproximam do número irracional x por excesso. Ou seja, consideramos a sequência decrescente de números racionais $x<...<s_n<...<s_2<s_1$. Como $a>1$, temos que $a^x<...<a^{s_n}<...<a^{s_2}<a^{s_1}$.

Observamos que as desigualdades abaixo indicam a construção de uma sequência de intervalos encaixantes que convergem para um único ponto da reta real, que é o valor da potência a^x que ocorre quando $n\rightarrow+\infty$.

$$a^{r_1}<a^{r_2}<...<a^{r_n}<...<a^x<...<a^{s_n}<...<a^{s_2}<a^{s_1}$$

Com o raciocínio desenvolvido até o presente momento, realizamos a construção da potência a^r com expoente $r\in\Re$. Passemos agora para a teoria dos logaritmos, iniciando com a sua definição.

<u>*Definição:*</u> *Dado um número real* $a>0$*, o logaritmo de um número* $x>0$ *na base* a *é o expoente* y *a que se deve elevar* a *de tal modo que* $a^y=x$*. Escreve-se* $\log_a x=y$ *e lê-se* y *é o logaritmo de* x *na base* a.

Lima (1991) salienta que a investigação sobre o logaritmo surgiu antes do desenvolvimento das ideias sobre funções na história da matemática. A utilidade original dos logaritmos consiste no fato que devido as suas propriedades é possível realizar cálculos aritméticos longos através de procedimentos mais simples.

Portanto, os matemáticos do fim do século XVI trabalharam no desenvolvimento das chamadas tábuas de logaritmos, que consistiam em reunir em uma única tabela o valor dos logaritmos de vários números. Assim, toda vez que fosse efetuado um cálculo aritmético extenso poderia ser analisada a relação entre os logaritmos das grandezas envolvidas. Vamos apresentar as propriedades dos logaritmos através do próximo teorema.

Teorema 2: O logaritmo possui as seguintes propriedades:

i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ *para quaisquer* $x, y > 0$ e $b > 0, b \neq 1$.

ii) $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ *para quaisquer* $x, y > 0$ *e* $b > 0, b \neq 1$.

iii) $\log_b(x)^r = r.\log_b x$ *para quaisquer* $x > 0$, $b > 0, b \neq 1$ *e* $r \in Q$.

iv) $\log_b x = \dfrac{\log_k x}{\log_k b}$ *para quaisquer* $x > 0$, $b > 0, b \neq 1$ *e* $k > 0, k \neq 1$. *(mudança de base nos logaritmos)*

<u>Demonstração:</u>

i) Considerando $x, y > 0$, $b > 0, b \neq 1$ e impondo $\log_b(xy) = m$, $\log_b x = n$ e $\log_b y = s$ pela definição de logaritmo tem-se que:

$$\log_b(xy) = m \Leftrightarrow b^m = xy$$

$$\log_b x = n \Leftrightarrow b^n = x$$

$$\log_b y = s \Leftrightarrow b^s = y$$

Daí $b^m = xy = b^n.b^s = b^{n+s}$, onde concluímos que $m = n + s$ ou seja, $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$, como queríamos demonstrar.

ii) Considerando $x, y > 0$, $b > 0, b \neq 1$ e impondo $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = m$, $\log_b x = n$ e $\log_b y = s$ pela definição de logaritmo tem-se que:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = m \Leftrightarrow b^m = \frac{x}{y}$$

$$\log_b x = n \Leftrightarrow b^n = x$$

$$\log_b y = s \Leftrightarrow b^s = y$$

Daí $b^m = \dfrac{x}{y} = \dfrac{b^n}{b^s} = b^{n-s}$, onde concluímos que $m = n - s$ ou seja, $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$.

iii) A demonstração dessa propriedade ocorre em etapas. Inicialmente, vamos mostrar que a propriedade $\log_b (x)^n = n.\log_b x$ vale quando $n \in N$.

Estendendo a propriedade demonstrada em (i) temos que para $n \in N$ vale:

$$\log_b x^n = \log_b (x.x.\cdots.x) = \log_b x + \log_b x + ... + \log_b x = n.\log_b x$$

Portanto, $\log_b x^n = n.\log_b x$ para qualquer número natural n.

Observando que o logaritmo de um é zero, verificamos que a propriedade vale quando $r = 0$ pois, $\log_b x^0 = \log_b 1 = 0 = 0.\log_b x$.

Consideramos agora o caso em que o expoente é um número inteiro negativo. Note que para $x > 0$ temos $x^n.x^{-n} = 1$. Logo, $\log_b\left(x^n\right) + \log_b(x^{-n}) = \log(1) = 0$, de onde concluímos que $\log_b\left(x^{-n}\right) = -\log_b(x^n)$ ou como $n \in N$, segue-se que $\log_b\left(x^{-n}\right) = -n\log_b(x)$.

Finalmente, vamos para o caso do expoente ser um número racional. Considerando $n = \dfrac{p}{q}$ com $p \in Z$ e $q \in N$, já verificamos que para qualquer número real $x > 0$ temos: $\left(x^n\right)^q = \left(x^{p/q}\right)^q = x^p$.

Portanto, pelo que já demonstramos $q.\log_b x^n = \log_b\left(x^n\right)^q = \log_b x^p = p\log_b x$ o que nos dá a igualdade $q.\log_b x^n = p\log_b x$ ou ainda $\log_b x^n = \dfrac{p}{q}\log_b x$, como queríamos demonstrar.

Isso encerra a verificação da propriedade, porém ainda vale destacar que a propriedade vista aqui ocorre também para o caso mais geral onde o expoente é um número real. A demonstração segue um argumento semelhante com o apresentado no teorema 1 dessa seção e será omitida aqui.

iv) Considerando $x, y > 0$, $b > 0, b \neq 1$ e um número real $k > 0, k \neq 1$, impondo $\log_b x = m$, $\log_k x = n$ e $\log_k b = s$ pela definição de logaritmo tem-se que:

$$\log_b x = m \Leftrightarrow b^m = x$$

$$\log_k x = n \Leftrightarrow k^n = x$$

$$\log_k b = s \Leftrightarrow k^s = b$$

Daí segue que $b^m = x = k^n \Rightarrow b^m = k^n$. Substituindo o valor de b temos $\left(k^s\right)^m = k^n$ o que implica $s.m = n$. Portanto $m = \frac{n}{s}$ ou seja, $\log_b x = \frac{\log_k x}{\log_k b}$ como queríamos demonstrar.

As propriedades verificadas no teorema 2 dessa seção serão úteis quando desenvolvermos a teoria das funções logarítmicas na seção 3.4.4.

3.4.2 Funções

Antes de desenvolver as ideias formais e apresentar os conceitos e definições, que envolvem o assunto funções, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979) apresentam ao leitor uma lista de sete problemas envolvendo a interpretação de situações práticas utilizando gráficos e tabelas de valores. Essa proposta, além de mostrar o assunto de uma outra forma para os alunos, os autores proporcionam o desenvolvimento do método de investigação sobre problemas que o professor pode adotar em sala de aula.

Os enunciados apresentados por Jakubovic,Trotta & Imenes (1979) estão a seguir.

Problema 1: O espaço de frenagem de um veículo é a distância necessária para que ele pare definitivamente, depois de acionado o freio. O espaço de frenagem depende, entre outros fatores, da velocidade em que ele se encontra quando o freio é acionado. Abaixo você encontra o gráfico do espaço de frenagem na dependência da velocidade de certo automóvel[11]. Analisando o gráfico abaixo, responda às seguintes questões: (...)

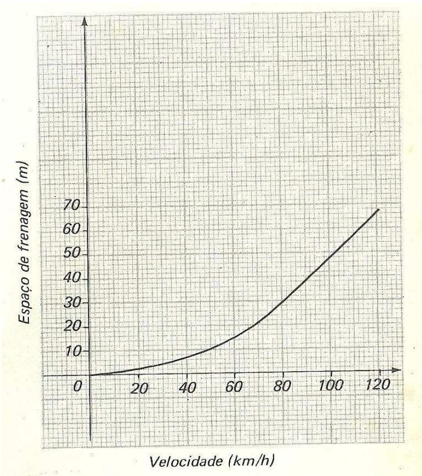


Figura 9: Gráfico do problema 1, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.41).

[11] Os autores citam que o automóvel em questão é o Dodge Dart 76 e os gráficos foram elaborados com dados publicados na revista Quatro Rodas.

Problema 2: O consumo de combustível de um automóvel é fornecido, geralmente, pelo número de quilômetros que ele percorre gastando um litro de gasolina. O consumo de combustível depende, entre outros fatores, da velocidade que ele anda. Abaixo você encontra o gráfico do consumo na dependência da velocidade de certo automóvel[12]. Analisando o gráfico abaixo, responda às seguintes questões: (...)

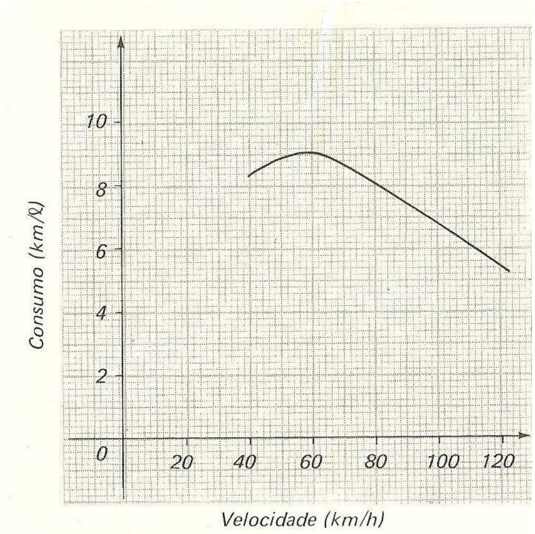


Figura 10: Gráfico do problema 2, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.42).

Problema 3: No dia 17/01/78, um jornal publicou, entre notícias e fotos referentes a inundações, o gráfico abaixo. Segundo o próprio jornal, o gráfico mostra a evolução do nível das águas no Rio Paraná, em janeiro de 1978 (bem como o relativo ao mesmo período em 1977), em comparação com os índices de fevereiro de 1977, quando foi atingido o ponto culminante da cheia. Relativamente à primeira quinzena de janeiro de 1978, pergunta-se: (...)

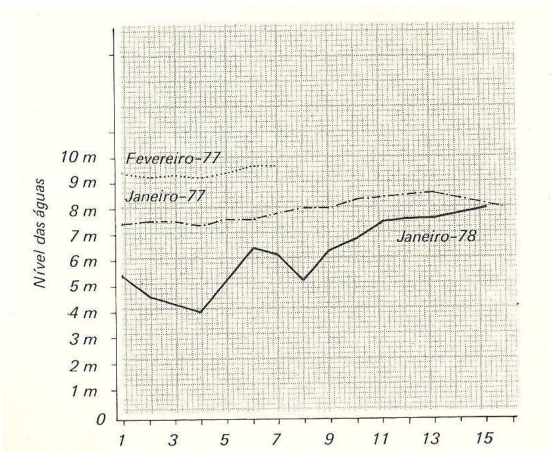


Figura 11: Gráfico do problema 3, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.42).

[12] O mesmo do problema anterior.

Problema 4: Numa publicação do Cesgranrio, entidade responsável pelos vestibulares unificados no Rio de Janeiro, há uma tabela que apresenta diversas faixas de renda familiar e as correspondentes porcentagens de aprovação. Assim, por exemplo, considerando apenas os alunos cujas famílias têm uma renda de Cr$[13]5200,00 a Cr$7800,00, verificou-se que cerca de 22% deles foram aprovados. Com base na tabela mencionada, relativa ao vestibular de 1977, elaboramos o gráfico abaixo. Pergunta-se: (...)

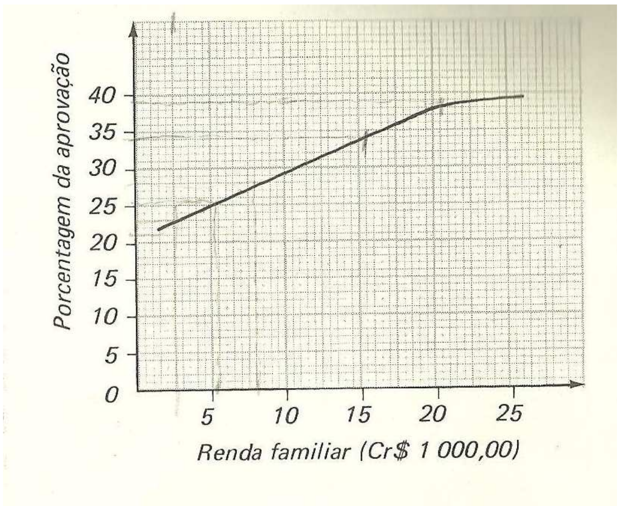


Figura 12: Gráfico do problema 4, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.43).

Problema 5: No gráfico abaixo tem-se a evolução da população brasileira neste século. Pergunta-se: (...)

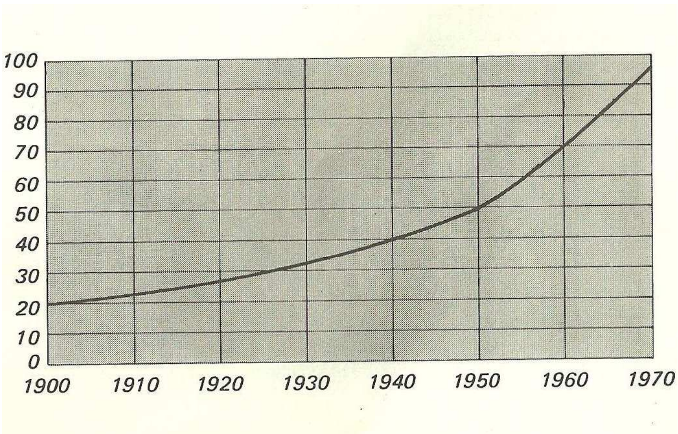


Figura 13: Gráfico do problema 5, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.43).

---

[13] O Cruzeiro (Cr$) foi a moeda do Brasil de 1942 à 1967, de 1970 à 1986 e de 1990 à 1993. Sua adoção se deu pela primeira vez em 1942, durante o Estado Novo, na primeira mudança de padrão monetário no país, com o propósito de uniformizar o dinheiro em circulação. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Cruzeiro_(moeda). Acesso: 01/02/2012.

Problema 6: Os gráficos seguintes apresentam a evolução da temperatura e da umidade relativa referentes a uma semana (os dados foram colhidos na cidade de São Paulo). Pergunta-se: (...)

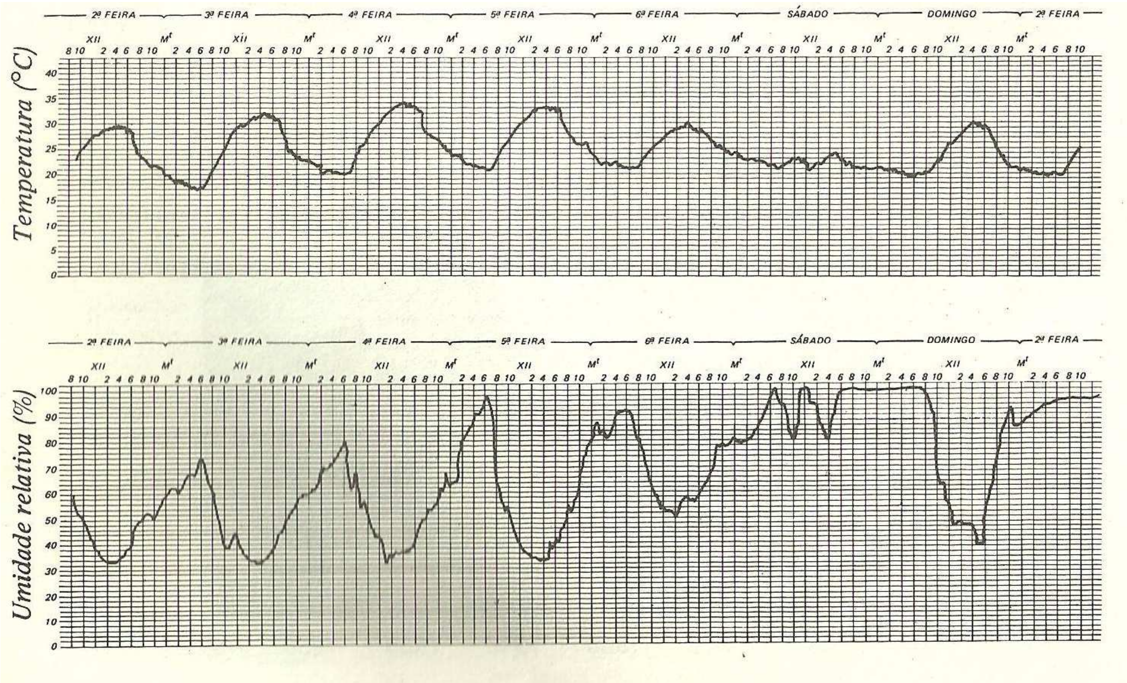


Figura 14: Gráfico do problema 6, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.44).

Problema 7: O gráfico seguinte foi publicado em um jornal. Ele nos oferece um visão da migração para o estado de São Paulo, apresentando o número total de migrantes, procedentes de outros estados, que para ali se dirigiram em cada um dos anos do período 1935-1977. Sobre esse período, pergunta-se: (...)

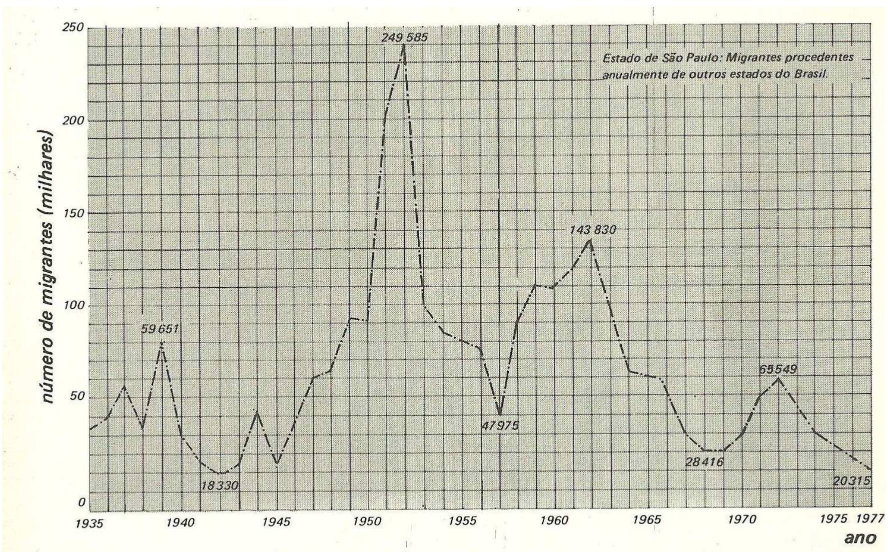


Figura 15: Gráfico do problema 7, Jakubovic,Trotta & Imenes (1979, p.45).

Os problemas apresentados anteriormente mostram um relacionamento entre duas grandezas variáveis. Dizemos que toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de grandeza. Anton (2007) argumenta que muitas leis científicas e muitos princípios de engenharia, física, química, matemática, entre outras áreas, são descritos por regras que descrevem uma relação de dependência entre duas quantidades.

Em 1673 a palavra "função" foi introduzida por Leibniz[14], em uma tentativa de designar a relação entre quantidades variáveis associadas por uma dada curva. Na metade do século XVIII, Euler[15] iniciou a representação das funções através das letras do alfabeto, tornando possível trabalhar com funções como sabemos até os dias de hoje.

Lima (2004) apresenta que uma noção de função $f: A \to B$ consta de três partes: um conjunto A chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B chamado o contradomínio da função (ou o conjunto onde a função toma valores) e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x.

Logo, temos a seguinte definição:

<u>Definição:</u> Uma função é uma regra bem determinada que associe uma única saída a uma única entrada. Se a entrada for denotada por x, então a saída é denotada por $f(x)$.

Assim, a "regra bem determinada" mencionada na definição anterior pode ser representada no plano cartesiano[16]. Essa representação chama-se gráfico de uma função.

<u>Definição:</u> O gráfico de uma função $f: A \to B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$ onde $x \in A$ é arbitrário.

---

[14] Eves (2004) apresenta que Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) foi filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão.

[15] Eves (2004) apresenta que Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha.

[16] Chamamos de s**istema de coordenadas no plano cartesiano** ou simplesmente **plano cartesiano** o lugar geométrico dos pontos marcados através de suas coordenadas. Usamos dois eixos perpendiculares entre si para representar a reta numérica real. O ponto na interseção dessas retas chama-se origem e possui ambas as coordenadas nulas.

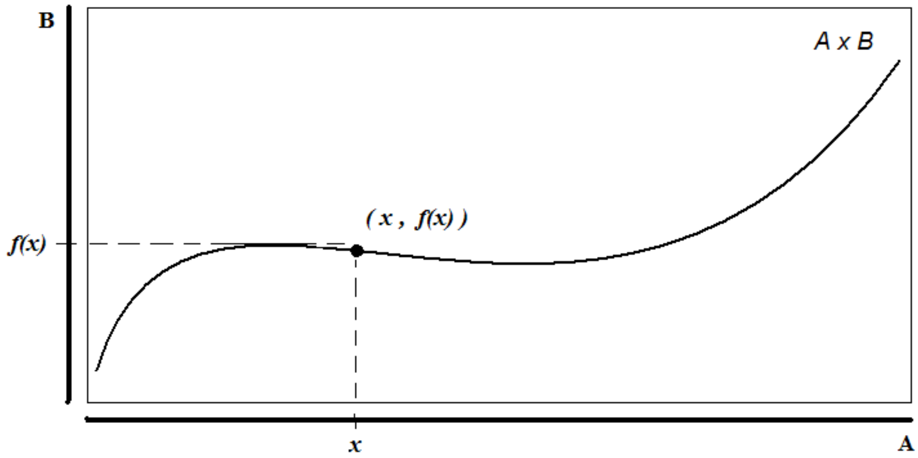


Figura 16: Gráfico de função, conforme Lima (2004, p.15).

Neste caso, com base na definição anterior, dizemos que a quantidade $x \in A$ chama-se variável independente e a quantidade $f(x) \in B$ é chamada de variável dependente. Usualmente, considera-se a notação $y = f(x)$.

Dizemos que uma função $f : A \to B$ chama-se *injetiva* quando dados quaisquer $x, y \in A$, a igualdade $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Ou seja, se considerarmos $x \neq y$ em A teremos necessariamente $f(x) \neq f(y)$ em B. Uma função $f : A \to B$ chama-se *sobrejetiva* quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Antes de definir função inversa, precisamos saber o que vem a ser a composição de funções.

<u>Definição:</u> Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o domínio da g é igual ao contradomínio da f. A função composta $g \circ f : A \to C$ consiste em primeiro aplicar f e depois g. Mais precisamente:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para qualquer } x \in A.$$

Para finalizar, vamos tratar da definição de função inversa, que é a ideia fundamental para compreender a existência da função logarítmica a partir da função exponencial. Em Lima e Carvalho (2000, p.186) encontramos a seguinte definição para função inversa:

<u>Definição:</u> Diz-se que a função $g : B \to A$ é a inversa da função $f : A \to B$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$.

Com base na definição acima, é verifica-se facilmente que se a função g é a inversa para f tem-se que f é uma inversa para a g. Se $g(f(x)) = x$ para qualquer $x \in A$ então a função f é injetiva, pois:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Já a igualdade $f(g(y)) = y$ válida para qualquer $y \in B$, implica que a função f é sobrejetora, pois dado qualquer $y \in B$, consideramos $x = g(y) \in A$ e teremos $f(x) = y$.

Portanto, se a função $f : A \to B$ possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre A e B. Reciprocamente, se há uma correspondência biunívoca entre A e B então f possui uma inversa $g : B \to A$. Para definir corretamente a função g, observamos que o fato de f ser sobrejetiva permite dizer que para qualquer $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Definindo $x = g(y)$, tem-se que a função $g : B \to A$ associa a cada $y \in B$ um único valor de $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

3.4.3 Funções exponenciais

Observamos inicialmente que nesta seção a representação dos conjuntos numéricos será a seguinte: números naturais (N), números racionais (Q) e números reais (R).

Lima e Carvalho (2000) iniciam o tema funções exponenciais fixando um número real positivo a, que nesta seção sempre será diferente da unidade. Logo a função exponencial de base a, $f : \Re \to \Re^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a possuir as propriedades fundamentais a seguir:

i) $a^x . a^y = a^{x+y}$;

ii) $a^1 = a$;

iii) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

A consequência das propriedades fundamentais apresentadas acima, é a ocorrência de três teoremas que iniciam a caracterização das funções exponenciais.

Teorema 1: A função $f : \Re \to \Re^+$ *definida por* $f(x) = a^x$ *é ilimitada superiormente.*

Demonstração: Basta observar que todo intervalo numérico em $\Re^{+}$ contém valores de $f(r) = a^{r}$ onde r é um número racional.

Teorema 2: A função exponencial definida por $f:\Re \to \Re^{+}$ com a lei $f(x) = a^{x}$ é contínua em $\Re$.

Demonstração: Para verificar a validade desse teorema é necessário conhecer um pouco da teoria sobre limites estudada na análise matemática. Com o objetivo de verificar a continuidade da função exponencial, verificamos que dado $x_0 \in \Re$ é possível tornar o valor de $\left|a^{x} - a^{x_0}\right|$ tão pequeno quanto se deseje, basta que x seja um valor considerado muito próximo de x_0. Na linguagem da análise matemática, escrevemos que $\lim\limits_{x_0 \to x} a^{x_0} = a^{x}$. Para verificar a ocorrência de $\lim\limits_{x_0 \to x} a^{x_0} = a^{x}$ basta observarmos que $x = x_0 + h$ com $h > 0$, ou seja $x - x_0 = h$. Então $\left|a^{x} - a^{x_0}\right| = a^{x_0}\left|a^{h} - 1\right|$. Quando $h \to 0$ é imediato notar que a^{h} torna-se um valor muito próximo de 1. Como a^{x_0} é um valor constante, então o produto $a^{x_0}\left|a^{h} - 1\right|$ pode ser o quanto menor desejamos, logo $\lim\limits_{x_0 \to x}\left|a^{x} - a^{x_0}\right| = 0$ ou seja, $\lim\limits_{x_0 \to x} a^{x_0} = a^{x}$.

Teorema 3: A função exponencial definida por $f:\Re \to \Re^{+}$ com a lei $f(x) = a^{x}$ é sobrejetiva.

Demonstração: Esse teorema significa que para qualquer valor real $b > 0$ existe um valor real x tal que $a^{x} = b$. Observando que todo intervalo numérico em $\Re^{+}$ contém valores de a^{r} onde r é um número racional, escolhemos para cada $n \in N$ uma potência a^{r_n} com $r_n \in Q$ que está no intervalo numérico $\left(b - \dfrac{1}{n}; b + \dfrac{1}{n}\right)$ de modo que $\left|b - a^{r_n}\right| < \dfrac{1}{n}$ portanto $\lim\limits_{x \to r_n} a^{x} = b$.

Sem perda de generalidade, consideremos $a > 1$. Escolhemos as potências de a^{r_n} sucessivamente tais que $a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_n} < \ldots < b$. Certamente podemos fixar um $s \in Q$ tal que $b < a^{s}$. Então temos que $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots < s$, pela propriedade (iii) já apresentada. Assim a sequência (r_n) é monótona e limitada superiormente por s. Pelo fato do conjunto dos números reais ser completo, temos que os valores de r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. Como pelo teorema 2 a função exponencial é contínua, segue que $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^x$, verificando assim a sobrejetividade da função exponencial $f(x) = a^x$ como queríamos demonstrar.

Observa-se que a propriedade da injetividade na função exponencial segue imediatamente da propriedade (iii) apresentada no início dessa seção, pois se $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ e $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $a > 1$, é imediato notar que $x \neq y$.

Com isso, temos condições de apresentar um esboço para o gráfico da função exponencial $f : \Re \to \Re^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, conforme as figuras abaixo:

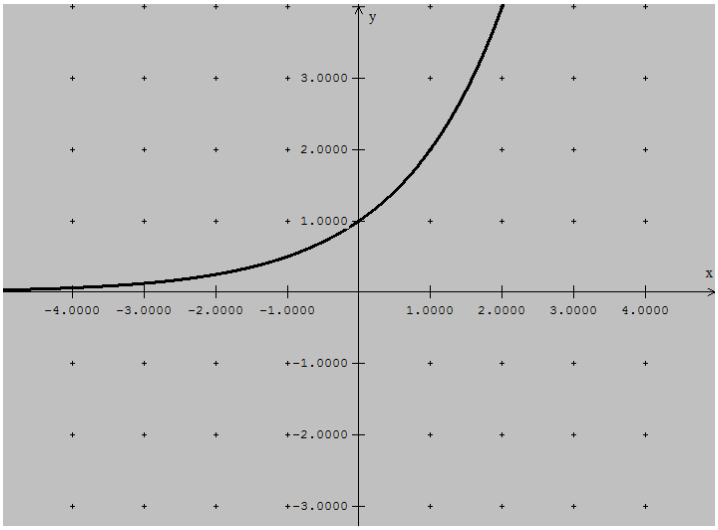


Figura 17: Esboço de $f(x) = a^x$ para $a > 1$. Gráfico gerado no *Winplot*[17].

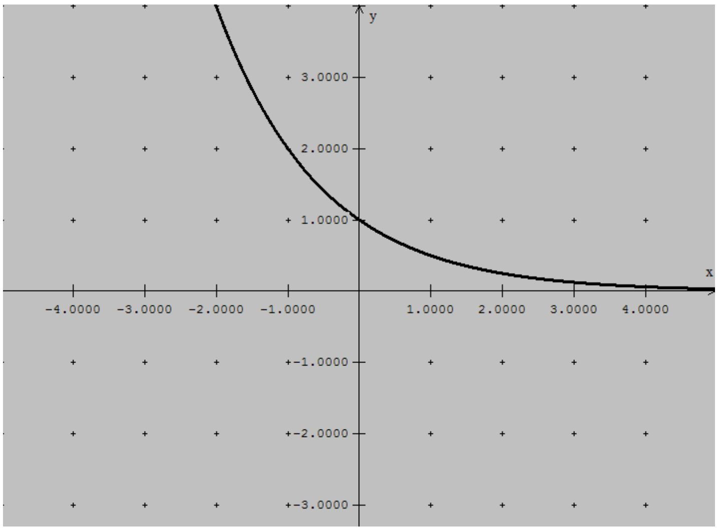


Figura 18: Esboço de $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$. Gráfico gerado no *Winplot*.

[17] Software livre, disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Lima e Carvalho (2000) ainda propõem um último teorema com a finalidade de permitir ao leitor conhecer as relações de equivalência que existem entre as afirmações que caracterizam matematicamente uma função exponencial.

Teorema 4: (caracterização da função exponencial) Seja $f:\Re \to \Re^{+}$ *uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente) As afirmações abaixo são equivalentes:*

i) $f(nx) = [f(x)]^{n}$ *para todo* $n \in Z$ *e todo* $x \in \Re$ *;*

ii) $f(x) = a^{x}$ *para todo* $x \in \Re$ *, onde* $f(1) = a$ *;*

iii) $f(x+y) = f(x).f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \Re$.

Demonstração: Para mostrar que as afirmações são equivalentes precisamos verificar a sequência de implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. Para mostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$ observamos que a hipótese em (i) implica que podemos ter $f(rx) = [f(x)]^{r}$ onde r é um número racional da forma $r = \dfrac{m}{n}$. Como $nr = m$ podemos escrever $[f(rx)]^{n} = f(nrx) = f(mx) = [f(x)]^{m}$, logo $f(rx) = [f(x)]^{m/n} = [f(x)]^{r}$. Se assumirmos $f(1) = a$ teremos $f(r) = f(r.1) = [f(1)]^{r} = a^{r}$ com $r \in Q$.

Para completar a demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$, suponhamos sem perda de generalidade que $f(x)$ seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Consideremos por absurdo que exista um $x \in \Re$ tal que $f(x) \neq a^{x}$. Poderemos ter ou $f(x) > a^{x}$ ou $f(x) < a^{x}$. Digamos que seja $f(x) < a^{x}$. Sabemos da análise que é possível obter um número racional j tal que $f(x) < a^{j} < a^{x}$, ou seja, $f(x) < f(j) < a^{x}$. Como $f(x)$ é crescente tendo $f(x) < f(j)$ teríamos $x < j$. Por outro lado também que $a^{j} < a^{x}$ onde tem-se que $j < x$. Essa contradição completa a demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$.

A implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$ é trivial, pois pela hipótese em (ii) segue-se que $f(x+y) = a^{x+y} = a^{x}.a^{y} = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \Re$. E finalmente para a implicação $(iii) \Rightarrow (i)$ temos que se $f(x+y) = f(x).f(y)$ vale para quaisquer $x, y \in \Re$, vale em particular quando $x = y$, portanto $f(2x) = [f(x)]^{2}$. Se escrevermos $y = (n-1)x$ com $n \in Z$, segue-se que $f(nx) = [f(x)]^{n}$ como queríamos demonstrar.

Uma pequena observação merece ser dita: o teorema de caracterização da função exponencial apresentado anteriormente, pode ser enunciado também se trocarmos a hipótese da monotonicidade pela hipótese da continuidade da função exponencial. A demonstração se altera apenas no passo $(i) \Rightarrow (ii)$, ao considerar x um número irracional. Então se temos $x = \lim_{n \to +\infty} r_n$ com $r_n \in Q$, logo pela continuidade da função $f(x)$ segue que $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n} = a^x$.

3.4.4 Funções logarítmicas

Observamos inicialmente que nesta seção a representação dos conjuntos numéricos será a seguinte: números naturais (N), números racionais (Q) e números reais (R).

Partindo da ideia de função inversa (seção 3.4.2), nota-se que a função exponencial $f : \Re \to \Re^+$, indicada por $f(x) = a^x$ e apresentada na seção anterior possui uma correspondência biunívoca entre $\Re$ e $\Re^+$. Sendo $f(x) = a^x$ crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, afirmamos que essa função possui inversa. De fato, como $f(x)$ é injetora e sobrejetora, existe uma função $g : \Re^+ \to \Re$ tal que vale a igualdade $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, para qualquer $x \in \Re^+$.

A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a : \Re^+ \to \Re$ que associa cada número real positivo x o valor de $\log_a x$ chamado de logaritmo de x na base a. Logo, a função $g : \Re^+ \to \Re$, indicada pela notação $g(x) = \log_a x$, chamada de função logarítmica, deve ser definida de modo a possuir as propriedades fundamentais a seguir:

i) $g(xy) = g(x) + g(y)$;

ii) $x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow \log_a y < \log_a x$ quando $0 < a < 1$.

Destacamos que a partir das propriedades apresentadas acima, é possível verificar os próximos teoremas, onde cada resultado caracteriza uma propriedade que envolve a função logarítmica. Salientamos que o resultado do primeiro teorema possibilita demonstrar os demais resultados considerando como hipótese a função $g(x) = \log x$ em vez de $g(x) = \log_a x$ com uma base arbitrária a.

Teorema 1: Dadas duas funções logarítmicas $L, M : \Re^+ \to \Re$ existe uma constante real $c > 0$ tal que $M(x) = c.L(x)$ para qualquer $x \in \Re^+$.

<u>Demonstração:</u> Suponhamos inicialmente que exista um número real $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Mostraremos que neste caso, temos $L(x) = M(x)$ para qualquer $x > 0$. Nota-se que se $L(a) = M(a)$ concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$ para qualquer $r \in Q$, pois $L(a^r) = rL(a) = rM(a) = M(a^r)$. Suponhamos por absurdo que existe algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Sem perda de generalidade, consideramos $L(b) < M(b)$. Então escolhemos um número natural n que seja suficientemente grande tal que $n.[M(b) - L(b)] > L(a)$.

Então $M(b) - L(b) > \dfrac{L(a)}{n} = L(a^{1/n})$. Chamamos $c = L(a^{1/n})$. Os múltiplos c, $2c$, $3c$, ... dividem a reta real em intervalos justapostos de comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, então pelos menos um dos números c, $2c$, $3c$, ... pertence ao intervalo de extremos $L(b)$ e $M(b)$.

Daí tem-se que:

$$mc = mL(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n})$$

Então $L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b)$. Como $L(x)$ é crescente, segue das desigualdades anteriores que $b < a^{m/n}$ e $b > a^{m/n}$. Isso é uma contradição, logo devemos ter $L(x) = M(x)$ para qualquer $x > 0$.

Dadas $L(x)$ e $M(x)$ duas funções logarítmicas arbitrárias, consideremos os números $L(x_0) > 0$ e $M(x_0) > 0$ para algum $x_0 > 1$. Seja $c = \dfrac{M(x_0)}{L(x_0)} > 0$. Consideremos outra função logarítmica $N : \Re^+ \to R$ definida por $N(x) = c.L(x)$. Como $N(x_0) = c.L(x_0) = \left[\dfrac{M(x_0)}{L(x_0)}\right].L(x_0) = M(x_0)$, segue-se do que se provou anteriormente que $N(x) = M(x)$ para qualquer $x > 0$ ou seja, que $M(x) = c.L(x)$ para qualquer $x \in \Re^+$.

O teorema acima é a verificação que a propriedade de mudança de base dos logaritmos vale também para as funções logarítmicas. Isso será útil, pois em todos os resultados a seguir usaremos nas demonstrações a função $g(x) = \log x$ em vez de $g(x) = \log_a x$ com uma base arbitrária a. Notemos que pelo teorema acima temos

$$g(x) = \log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{\log a}.\log x = c.\log x = c.f(x) \text{ onde } f(x) = \log x \text{ e } c > 0.$$

No caso em que $\log a < 0$ escrevemos:

$$g(x) = \log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{\log a}.\log x = c.(-\log x) = c.f(x) \text{ com } f(x) = -\log x \text{ e } c > 0.$$

Teorema 2: Uma função logarítmica $g : \Re^+ \to \Re$, *indicada pela notação* $g(x) = \log x$, *é sempre injetiva.*

<u>Demonstração:</u> De fato, pois se $x, y \in \Re^+$ são diferentes então $x < y$ ou $y > x$. No primeiro caso, resulta de (ii) que $\log x < \log y$ e no segundo caso resulta $\log y > \log x$ ambos quando $a > 1$. Nas duas situações quando $\log x \neq \log y$. A demonstração quando $0 < a < 1$ é idêntica.

Teorema 3: Uma função logarítmica $g : \Re^+ \to \Re$, *indicada pela notação* $g(x) = \log x$, *é ilimitada superior e inferiormente.*

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que dado um número real β deseje-se encontrar $x \in \Re^+$ tal que $\log x > \beta$. Para encontrar tal número procedemos do seguinte modo: tomamos um número natural n suficientemente grande tal que $n > \frac{\beta}{\log 2}$. Como $\log 2 > 0$ temos $n \log 2 > \beta$ e sabendo que $n \log 2 = \log 2^n$, segue que $\log 2^n > \beta$. Considerando $x = 2^n$, temos $\log x > \beta$, mostrando que a função é ilimitada superiormente.

Para verificar que a função é ilimitada inferiormente, observamos que pelo fato de $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$, dado qualquer número real α pode-se obter $x \in \Re^+$ tal que $\log x > -\alpha$. Pondo $y = \frac{1}{x}$ tem-se $\log y = -\log x < \alpha$, como queríamos demonstrar.

Finalmente apresentamos um último teorema que permite caracterizar a função logarítmica.

Teorema 4: Uma função logarítmica $g : \Re^+ \to \Re$, *indicada pela notação* $g(x) = \log x$, *é sempre sobrejetiva.*

Para verificar a validade do teorema acima necessitamos conhecer o lema a seguir, pois ele será utilizado na demonstração do teorema 4.

Lema: Seja uma função logarítmica $g:\Re^+ \to \Re$, *indicada pela notação* $g(x)=\log x$. *Dados dois números reais quaisquer* u,v *com* $u<v$, *existe* $x\in\Re^+$ *tal que* $u<\log x<v$.

<u>Demonstração do lema:</u> Inicialmente fixamos um número natural n maior do que $\frac{\log 2}{v-u}$. Logo, é válido que $n>\frac{\log 2}{v-u}\Rightarrow\frac{\log 2}{n}<v-u$. Considerando $c=\frac{\log 2}{n}$, temos que os múltiplos inteiros $mc=m\frac{\log 2}{n}=\frac{m}{n}\log 2=\log 2^{m/n}$ decompõem a reta real em intervalos justapostos cujo comprimento $c=\frac{\log 2}{n}$ é menor que o comprimento $v-u$. Portanto, pelo menos um dos múltiplos inteiros cai no interior do intervalo de extremos u e v. Denotando $x=2^{m/n}$ tem-se $u<\log x<v$, como queríamos demonstrar.

Agora estamos prontos para apresentar a demonstração do último teorema 4, onde faremos uso do lema anterior.

<u>Demonstração do teorema 4:</u> Para mostrar que a função logarítmica é sobrejetiva, precisamos mostrar que dado qualquer $b\in\Re$ é possível encontrar $\alpha\in\Re^+$ tal que $\log\alpha=b$. Vamos obter α determinando cada um dos seus algarismos que compõe a sua representação decimal[18]. Vamos determinar $\alpha=a_0,a_1a_2...a_n...$ e em seguida, verificamos que $\log\alpha=b$.

Para determinar a parte inteira a_0, lembramos que a função logarítmica $g(x)$ é crescente e ilimitada, logo devem existir números inteiros k tais que $g(k)>b$. Seja a_0+1 o menor inteiro tal que $g(a_0+1)>b$. Então temos $g(a_0)\le b<g(a_0+1)$. Considere a sequência de números a_0, $a_0+\frac{1}{10}$, $a_0+\frac{2}{10}$, ... , $a_0+\frac{9}{10}$, a_0+1. Como $g(a_0)\le b<g(a_0+1)$, devem existir nesta sequência dois elementos consecutivos α_1 e $\alpha_1+\frac{1}{10}$ tais que $g(\alpha_1)\le b<g\left(\alpha_1+\frac{1}{10}\right)$, isto é deve existir um número inteiro a_1, $0\le a_1\le 9$ tal que pondo $\alpha_1=a_0,a_1=a_0+\frac{a_1}{10}$ teremos $g(\alpha_1)\le b<g\left(\alpha_1+\frac{1}{10}\right)$.

---

[18] Todo número real α admite uma representação decimal da forma $\alpha=a_0,a_1a_2...a_n...=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+...+\frac{a_n}{10^n}+...$ onde a parte inteira a_0 é um número inteiro qualquer e os algarismos $a_n, n\ge 1$ podem assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Utilizando essa mesma ideia, vamos descobrir o algarismo a_2.

Considerando a sequência de números α_1, $\alpha_1 + \frac{1}{10^2}$, $\alpha_1 + \frac{2}{10^2}$, ... , $\alpha_1 + \frac{9}{10^2}$, $\alpha_1 + \frac{1}{10}$ observamos que existe um número inteiro a_2, $0 \le a_2 \le 9$, tal que pondo $\alpha_1 = a_0, a_1 a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$ tem-se $g(\alpha_2) \le b < g\left(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right)$.

Prosseguindo dessa forma encontramos a representação decimal do número $\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ tal que, pondo $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 ... a_n$ teremos:

$$g(\alpha_n) \le b < g\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \text{ para } n \ge 0 .$$

Agora vamos verificar que $\log \alpha = b$. Se fosse verdade $\log \alpha < b$, pelo resultado do lema, é possível obter $x > 0$ tal que $\log \alpha < \log x < b$. Como a função é crescente, teríamos $\alpha < x$. Para um valor de n suficientemente grande tal que $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$ tem-se que $\alpha + \frac{1}{10^n} < x$, logo $\alpha_n + \frac{1}{10^n} \le \alpha + \frac{1}{10^n} < x$.

Como a função é crescente então $\alpha_n + \frac{1}{10^n} < x$ o que implica $b < \log\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) < \log x$. Um absurdo, pois estamos considerando $\log x < b$. Do mesmo modo não podemos ter $\log \alpha > b$. Novamente pelo lema, é possível obter $x > 0$ tal que $b < \log x < \log \alpha$, que implica $x < \alpha$ pois a função é crescente. Entretanto, esse fato acarreta que $x < \alpha_n$ para algum n. Segue que $\log x < \log \alpha_n \le b$ contrariando o fato de que $b < \log x$, como queríamos demonstrar.

Com os teoremas demonstrados anteriormente, temos condições de apresentar um esboço para o gráfico da função logarítmica $g : \Re^+ \to \Re$, indicada pela notação $g(x) = \log_a x$, conforme as figuras abaixo:

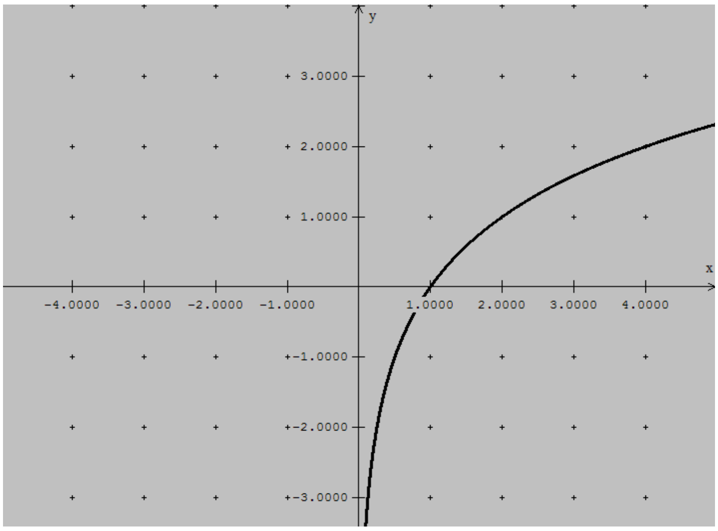


Figura 19: Esboço de $g(x) = \log_a x$ para $a > 1$. Gráfico gerado no *Winplot*.

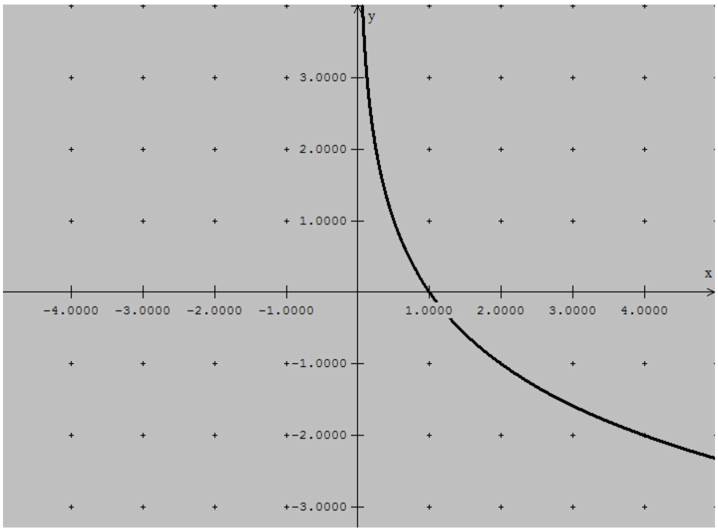


Figura 20: Esboço de $g(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$. Gráfico gerado no *Winplot*.

4. Metodologia de pesquisa

Na tentativa de responder a questão norteadora dessa pesquisa, buscamos desenvolver o método mais adequado e que fosse suficientemente necessário para permitir o entendimento do problema de pesquisa envolvido nesse estudo. Para isso, recorremos à pesquisa qualitativa, proposto por Flick (2006) que aborda a questão de como trabalhar um problema de investigação na forma de pesquisa qualitativa.

Denzin e Lincoln (2005, p.3), citado por Flick (2006, p.16), apresentam uma definição inicial sobre o que é pesquisa qualitativa:

> A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve a postura interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem.

Entende-se que ao aplicar a definição acima nesse trabalho, propõe-se a adoção de uma postura adequada do professor-pesquisador diante dos alunos na sala de aula. Na busca pela compreensão do insucesso dos alunos na aprendizagem do assunto funções, em especial as funções exponencial e logarítmica, as observações feitas sobre como os alunos reagem diante das situações propostas e os métodos pedagógicos utilizados em aula pelo professor-pesquisador constituem importantes recursos durante o momento da aplicação das atividades propostas e futura análise dos dados coletados.

Com isso surge a importância de analisar o elemento desenho de pesquisa envolvido nesse trabalho. O desenho elaborado adequadamente na pesquisa é o principal instrumento para planejar o estudo e garantir a qualidade dos seus resultados. Ragin (1994, p. 191), define a expressão “desenho de pesquisa” da seguinte forma:

> O desenho de pesquisa é um plano para coletar e analisar as evidências que possibilitarão ao investigador responder a quaisquer perguntas que tenha feito. O desenho de uma investigação toca em quase todos os aspectos de uma pesquisa, desde os detalhes minuciosos da coleta de dados até a seleção de técnicas de análise de dados.

Neste trabalho, concebe-se que o desenho da pesquisa deve ser reflexivo e ocorrer durante todas as etapas no projeto de investigação. Em todas as etapas, deve-se considerar a presença de vários componentes que estão envolvidos e possuem relações mútuas entre eles e que ocorrem durante o trabalho, onde cada um desempenha um papel importante e único durante a execução do projeto.

Maxwell (2005, p.5) resume através de um esquema, conforme mostra a figura 21, os componentes envolvidos na execução de um projeto e além disso, propõe que o conceito de desenho da pesquisa utilizado pelo pesquisador leve em consideração diferentes abordagens, evitando-se a rigidez no entendimento do que vem a ser uma pesquisa qualitativa durante as etapas envolvidas.

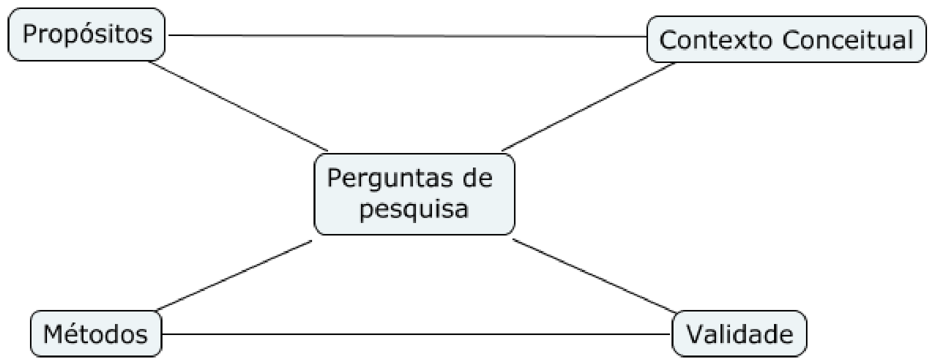


Figura 21: Modelo interativo de desenho da pesquisa proposto por Maxwell (2005).

No presente trabalho, nota-se a importância do esquema mostrado anteriormente no que diz respeito à construção e elaboração das atividades para ser utilizadas com os alunos. A interatividade proposta por Maxwell (2005) sugere que o professor-pesquisador em suas atividades na sala de aula deve estar constantemente desenvolvendo métodos para validar os seus questionamentos criados durante o momento de aprendizagem dos seus alunos.

Através de contextos conceituais foi possível elaborar nessa pesquisa uma sequência de atividades envolvendo funções, funções exponenciais e funções logarítmicas que permitiu validar os questionamentos criados inicialmente e através do método pedagógico proposto, promover a aprendizagem dos alunos.

Quanto à metodologia de trabalho adotada na realização das atividades em sala de aula, utilizamos a engenharia didática proposta por Artigue (1996). Nesse tipo de proposta, o ambiente de investigação será a sala de aula. A teoria da engenharia didática será o nosso referencial para a produção de conhecimento, envolvendo a execução da pesquisa e o ensino. Consideramos que o professor e a sua sala de aula constituem peças importantes para o desenvolvimento da pesquisa, sendo aqui reafirmado o papel do professor em ser professor-pesquisador durante o processo.

Artigue (1996) apresenta as fases da engenharia didática. São elas:

1º) análise prévia da situação;

2º) construção das situações didáticas da engenharia;

3º) experimentação;

4º) análise e avaliação dos resultados obtidos na fase anterior.

A análise prévia da situação possui um caráter importante dentro da pesquisa qualitativa, pois é a partir dela que o professor-pesquisador identifica as características que tornam o ensino de determinado assunto insatisfatório no que diz respeito à aprendizagem dos alunos. Nessa etapa, além da percepção epistemológica que envolve o conteúdo, o professor percebe o confronto entre as formas de ensino geralmente utilizadas e as concepções, dificuldades e obstáculos na trajetória de aprendizagem dos alunos. Dessa forma, Almouloud e Coutinho (2008) destacam aspectos importantes que devem ser observados pelo professor-pesquisador ao elaborar as situações didáticas:

- Analisar a importância das situações para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomada de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Após a construção das atividades, pode-se caracterizar a fase da experimentação como o momento de se colocar em prática toda a sequência de atividades elaborada, tendo em vista a reformulação quando as análises locais durante a aplicação identificam essa necessidade, o que provoca voltar à análise prévia, realizando as devidas complementações.

A análise posterior fundamenta-se no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação que podem ser observações realizadas durante a aula ou as produções dos alunos durante as atividades. Essas informações podem ser completadas por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas, vídeos, fotografias, portfólios, entre outros. O conjunto de resultados que serão obtidos na análise posterior contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos sobre as condições na transmissão do saber.

Assim, as análises e avaliações posteriores dependem das ferramentas técnicas e teóricas utilizadas com as quais a coleta dos dados permitirá a construção dos resultados da pesquisa. Os resultados serão avaliados pelo professor-pesquisador e as informações resultantes serão confrontadas com a análise prévia realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos previamente e concluir se houve a aprendizagem dos alunos referente ao assunto abordado na sequência didática.

Nota-se que nesse tipo de metodologia utilizada, a validação dos resultados obtidos ocorre apenas com o confronto de hipóteses envolvidas na investigação e os resultados da experimentação. Não é realizada uma comparação com grupos de alunos externos ou com experiências didáticas realizadas em outra ocasião. A análise e a validação ocorrem entre os elementos envolvidos na sequência de atividades proposta.

Portanto, partindo-se do princípio de ser uma pesquisa qualitativa, organizada através de um desenho de pesquisa e elaborada através da engenharia didática, através de um mapa conceitual, conforme mostra a figura 22, pode-se organizar a metodologia de pesquisa utilizada nesse trabalho, a fim de proporcionar ao leitor uma visão global da justificativa dessa escolha metodológica na proposta de ensino elaborada.

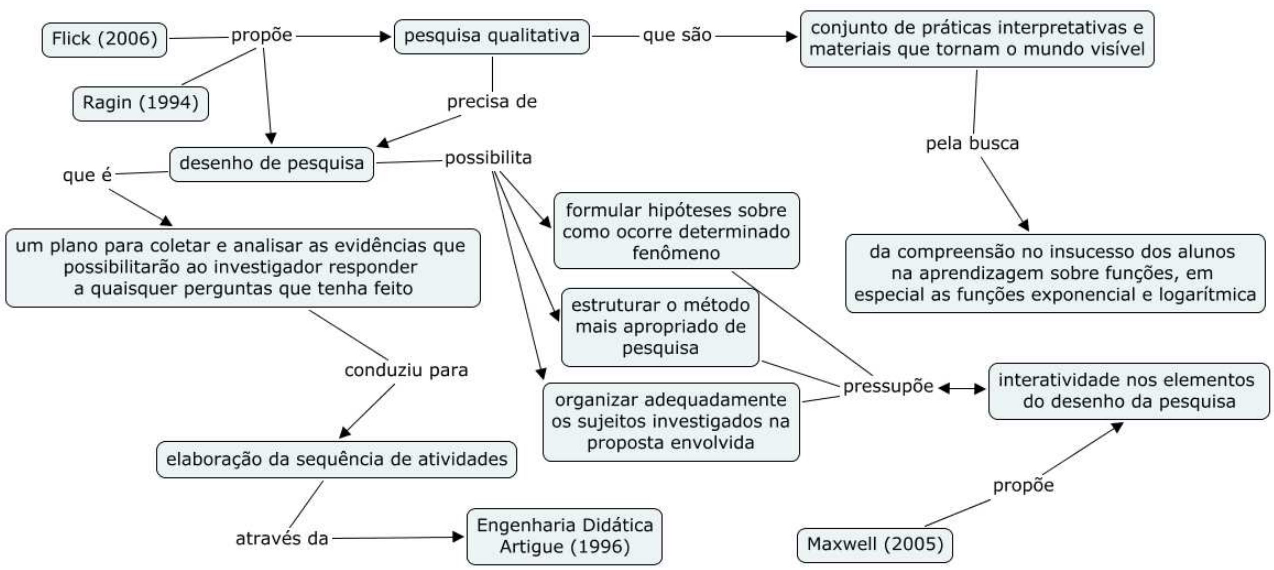


Figura 22: Mapa conceitual sobre a metodologia de pesquisa envolvida nesse trabalho.

4.1 Perfil dos sujeitos

O conjunto de atividades elaborado foi aplicado em uma turma de alunos da 1º série do ensino médio integrado em plásticos[19] do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul. Consiste em uma turma de alunos heterogênea no que se refere à formação, pois ingressaram como alunos na escola após cursar o ensino fundamental em diversas escolas da região de Caxias do Sul.

Alguns alunos apresentavam dificuldades operatórias com os números representados na forma decimal e fracionária, sendo que estes desconheciam a relação que existe entre números decimais e sua representação na forma fracionária. Perante as dificuldades encontradas por eles no ensino proposto pelo Instituto Federal, o índice de evasão da turma utilizada nessa pesquisa pode ser considerado alto, pois no início do ano de 2011 a turma era constituída de 35 alunos, mas ao longo dos bimestres, esse número foi diminuindo, totalizando agora 26 alunos, o que representa uma diminuição de aproximadamente 26% no número de alunos da turma. A distribuição entre meninos e meninas durante a execução das atividades era de 50% meninos e 50% meninas.

Antes do desenvolvimento desta sequência de atividades, verificou-se que grande parte da turma apresentava muitas dificuldades em conteúdos de matemática básica, o que comprometia a aprendizagem de novos conceitos presentes no ensino médio. Com o objetivo de evitar futuras dificuldades, alguns conteúdos foram retomados com o objetivo de evitar falha no processo de aprendizagem futuro.

4.2 Coleta dos dados

Inicialmente foram organizados os grupos de alunos que iriam realizar todas as atividades durante todos os dias. A turma ficou dividida em sete grupos com um número médio de quatro alunos por grupo. A distribuição não seguiu nenhum critério dado pelo professor, os alunos juntaram-se por afinidade e familiaridade em executar trabalho com os demais colegas.

As atividades de todas as aulas foram entregues impressas para cada grupo, inclusive a atividade do quarto dia que seria realizada no laboratório de informática da

[19] Modalidade de ensino na qual o aluno cursa o ensino médio tradicional, juntamente com o curso técnico. Disponível em: http://www.caxias.ifrs.edu.br/site/conteudo.php?cat=11&sub=101. Acesso em 04/11/2011.

escola. O material manuscrito produzido nas cinco aulas foi guardado em pastas, formando uma espécie de portfólio[20] para cada grupo. No quinto dia, quando a aula ocorreu no laboratório de informática, as construções elaboradas pelos alunos utilizando o software *Winplot* foram enviadas para o e-mail do professor.

Ressalta-se que apesar da internet estar liberada durante a aula para o uso nos computadores, os grupos empenharam-se na execução das tarefas propostas nesse dia e não acessaram a internet durante as atividades. Isso demonstra que as atividades desenvolvidas ao longo da sequência proposta despertaram o interesse, a curiosidade e a vontade de aprender o conteúdo proposto aos alunos.

Durante os encontros foram produzidos vídeos com áudio, com a finalidade de serem utilizados na análise das atividades aplicadas. Os vídeos formam um material potencialmente importante para o professor analisar a aplicação de suas atividades em sala de aula, uma vez que ele pode verificar a sua postura e posicionamento em relação aos questionamentos dos alunos. Considera-se que a fala dos alunos durante o momento da realização da sequência didática é muito importante e merece atenção do professor-pesquisador, pois é a maneira encontrada pelos alunos em manifestar suas considerações, opinião e hipótese sobre o assunto que está sendo abordado.

Ao longo do bimestre, os alunos produziram individualmente o portfólio da disciplina de matemática, registrando as suas impressões e destacando os aspectos considerados importantes que ocorreram durante as aulas do bimestre. O porfólio foi produzido pelos alunos em forma de manuscrito, uma vez o tempo foi demasiado curto para introduzir a concepção de portfólio criado na modalidade de ambiente virtual e publicado na internet, conforme proposto na pesquisa de De Bona (2010). O portfólio produzido pelos alunos também foi utilizado para a análise dos resultados da sequência didática aplicada, com o objetivo de verificar se houve a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos.

4.3 Escolha e análise dos dados

Devido ao grande volume de material produzido pelos alunos ao longo da aplicação da sequência de atividades, nos restringimos a alguns recortes das atividades realizadas pelos grupos. O nosso objetivo é estabelecer possíveis relações das produções

[20] Organização de um material que relata cada aula, com contribuições na aprendizagem matemática desenvolvida durante as aulas.

dos alunos com a fundamentação teórica escolhida para o trabalho, que são os campos conceituais de Vergnaud e as representações semióticas de Duval.

O que desejamos mostrar é que durante toda a aplicação das atividades ocorreu a apropriação de conceitos de matemática, desde o primeiro dia até o último da sequência de atividades. Os vídeos produzidos durante as aulas são importantes neste momento de análise, pois permite ao professor-pesquisador visualizar detalhes que no dia da realização não foram observados, ou não foram compreendidos com a necessária clareza.

Ressalto que pelo fato de ingressar na função de professor da turma no final do mês de agosto de 2011, no início das minhas atividades como docente não havia falado com a turma sobre a possibilidade da realização de um possível trabalho de pesquisa utilizando a turma de ensino médio como meu campo empírico.

Porém, em conversa com o professor que já ministrava aulas na turma pesquisada anterior a mim, ele ressaltou que embora já tivesse trabalhado a noção do conceito de função, o trabalho desenvolvido por ele sobre funções de 1º e 2º grau não atingiu todos os objetivos esperados. Questionei sobre a possibilidade de levar aos alunos o conceito de função através de problemas do cotidiano, possibilitando a abordagem do conceito das variáveis envolvidas, a noção de gráfico mostrando a relação entre grandezas, abordar aspectos identificados em gráfico tais como crescimento e decrescimento, a abordagem de uma possível relação entre grandezas através de tabelas numéricas, enfim comentei algumas possibilidades de um trabalho que envolvesse as noções iniciais sobre funções.

A abordagem feita pelo professor anterior da turma, consistiu basicamente na sequência de atividades proposta pelo livro didático adotado pela instituição, em que os alunos foram conduzidos rapidamente para a noção de função como relação entre dois conjuntos, tradicionalmente abordada na matemática.

Com essa conversa me questionei quanto a abordagem dada para as funções exponenciais e funções logarítmicas, conforme previa a súmula da disciplina na instituição, apresentado diretamente a linguagem $f(x) = ...$ e também sobre os aspectos relativos à aprendizagem dos alunos. Assim, percebi a necessidade de mostrar aos alunos uma nova abordagem para o assunto de funções exponenciais e funções logarítmicas, que se fundamentasse em abordar o assunto do ponto de vista aplicável e não somente na abordagem tradicional de ensino.

Logo, com a proposta de atividades em forma de problemas, buscamos nos afastar das seqüências de atividades prontas e que estão disponíveis nos livros didáticos, e atendendo aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) desejamos proporcionar aos alunos uma visão global sobre o assunto.

Reafirmamos que para a análise dos dados, optamos por inicialmente apresentar a produção feita pelos alunos na forma de portfólio coletivo, pois ao longo dos dias de atividades, cada grupo foi desenvolvendo o trabalho nas folhas impressas e armazenando em pastas.

Os registros que serão apresentados refletem a análise feita pelo grupo de alunos e orientada pelo professor, sobre os problemas que são apresentados, e as respostas dadas por eles são frutos das análises, discussão, construção de esquemas, manipulação dos esquemas utilizando conceitos em ação, conversão dos esquemas em conceitos que são apropriados para a aprendizagem.

Ao longo do 4º bimestre do ano de 2011 cada aluno da turma envolvida nessa pesquisa desenvolveu o seu portfólio individual, na tentativa de elaborar uma espécie de diário de bordo durante a realização das aulas. A ideia de portfólio apresentada para a turma foi prontamente aceita, pois eles consideraram a proposta um diferencial nas aulas de matemática.

Como a turma não conhecia a ferramenta portfólio, necessitamos fazer uma discussão em aula sobre o que era o portfólio e quais as suas principais características. Ressaltamos que os portfólios apresentados pelos alunos, nessa proposta inicial consistiam em descrições básicas sobre a aula do dia em questão. Mesmo sendo descrições básicas, alguns portfólios individuais serão apresentados durante a análise dos dados individuais, pois demonstram possuir importantes relações com a fundamentação teórica escolhida para essa pesquisa.

5. Elaboração e aplicação das atividades

Nesta sequência de atividades é proposta a abordagem da noção de função como relação entre grandezas através de ocasiões práticas, em situações problemas que envolvem a análise de tabelas numéricas e interpretação de gráficos cartesianos. Procura-se não propor aos alunos o estudo de fórmulas prontas e que não possuem sentido na sua aprendizagem.

Em seguida, tem-se o estudo da função exponencial e da função logarítmica, ambas do ponto de vista em aplicações na ciência. O objetivo é que os alunos percebam através dos problemas que esses conteúdos matemáticos são de grande importância para a modelagem de situações. Neste momento ainda não é realizada a construção dos gráficos desses dois tipos de funções, somente são trabalhadas as aplicações sem a necessidade do gráfico.

A construção da representação gráfica foi realizada em um conjunto de atividades propostas com o uso do software *Winplot*[21], no laboratório de informática da escola. Os alunos foram conduzidos através da proposta para a compreensão do conceito de domínio, imagem, crescimento e decrescimento das funções exponenciais e logarítmicas. Já é sabido que a maioria do grupo de alunos em análise, não tiveram contato com informática no ensino fundamental para aprender algum conteúdo de matemática. Isso foi uma novidade para a maioria e esperava-se que os resultados dessa proposta resultassem qualitativamente em sua aprendizagem.

Para a realização das atividades, os alunos foram organizados em pequenos grupos com uma média de quatro participantes. Esse pequeno grupo deveria realizar todas as atividades propostas juntos, a fim de proporcionar a interatividade entre os alunos da turma. Cada atividade foi então disponibilizada através de folhas impressas e na atividade realizada no laboratório as construções realizadas pelos grupos foram armazenadas para a análise posterior da produção.

Durante as atividades, os alunos foram acompanhados pelo professor-pesquisador, que diante das perguntas feitas pelos alunos, conduziu com respostas e outras perguntas que se apresentaram necessárias para uma melhor aprendizagem dos conceitos propostos, fundamentando-se na teoria de Piaget na aplicação do método clínico

[21] Software livre, disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

aplicado a uma situação de sala de aula. Esse é um método de investigação válido neste caso, pois visa orientar os alunos durante a realização das tarefas propostas.

Ao mesmo tempo em que este roteiro de atividades é aplicado, cada um dos alunos desenvolveu o seu Portfólio, que segundo De Bona (2010, p.23) “é um instrumento de avaliação reflexiva para o estudante e professor, sob o aspecto de estratégia de aprendizado”. Esse Portfólio será considerado uma parte importante do trabalho de pesquisa realizado, pois será capaz de demonstrar a capacidade de expressão individual de cada aluno no seu aprendizado de matemática.

A organização das atividades seguiu as seguintes etapas:

- ***Dia 1 – Conceitos iniciais sobre funções através de problemas***

No primeiro dia de atividades os alunos foram organizados em grupos de 3 ou 4 alunos, de acordo com a afinidade que há entre eles. Acredita-se que a afinidade é característica essencial para a colaboração e interação na execução das atividades propostas. Todas as atividades da sequência foram disponibilizadas impressas em folhas guardadas dentro de uma pasta, que é a pasta de atividades do grupo. Essa pasta serviria para armazenar os dados coletados da turma, uma vez que todos os alunos estão envolvidos com as atividades.

As primeiras atividades deste dia são constituídas por problemas envolvendo a relação entre grandezas, através de tabelas numéricas e representações gráficas. São ao todo sete problemas, dos quais os quatro primeiros são funções dadas através de tabelas numéricas e os demais são atividades de interpretação sobre gráficos extraídos de páginas da internet. Os gráficos mostram situações atuais e encontradas no cotidiano dos alunos, demonstrando para eles a importância do estudo desse assunto.

A resolução dos problemas foi feita em grupo, oportunizando a troca de ideias entre os alunos. Cada aluno pode compartilhar a sua opinião de modo a colaborar com o grupo na execução das atividades. O papel do professor ao longo das atividades foi o de orientar os grupos na execução dos problemas, e quando solicitado na dúvida do grupo, ele deveria saber direcionar os alunos ao raciocínio dedutivo, evitando fornecer as respostas dos problemas.

Através de problemas práticos, foi mostrado aos alunos que a relação que existe entre grandezas é chamada de função. Usam-se tabelas e representações gráficas para se apresentar os problemas. A noção de variável dependente e independente é utilizada na resolução dos problemas iniciais.

Com os problemas propostos, esperava-se que os alunos percebessem que a noção de função está presente em situações do cotidiano e que o estudo desse assunto na disciplina de matemática é fundamental para compreender os fenômenos que os cercam no cotidiano. Durante a resolução dos problemas, esperava-se dos alunos a diferenciação do conceito de variável independente e dependente. Em alguns problemas foi solicitado que eles explicitassem essa diferença.

Nos problemas de interpretação gráfica, era esperada a leitura das informações no gráfico, com a identificação do crescimento e decrescimento das quantidades. Intuitivamente, esperava-se que os alunos obtenham informações sobre crescimento e decrescimento dos fenômenos.

- ***Dia 2 – Função exponencial ; Dia 3 – Função logarítmica***

Após a realização das atividades do primeiro dia, os alunos neste segundo e terceiro dia foram colocados diante de situações-problema que envolve o uso da função exponencial e função logarítmica. Foram organizados nos grupos de trabalho definidos na primeira aula, com o objetivo de compartilhar as suas ideias.

O material foi entregue impresso, e na resolução dos cálculos foi permitido o uso da calculadora. Essa ferramenta surge como um modo de catalisar os cálculos para obter a resposta dos problemas propostos. Os problemas apresentados possuem um nível intermediário de análise e interpretação, solicitando dos alunos o esforço necessário para a construção das funções solicitadas.

Destaca-se para os alunos que a função exponencial é utilizada na modelagem de algumas formas de crescimento ou decrescimento presentes em alguns fenômenos da natureza, como também no funcionamento dos juros compostos, importantes na matemática financeira. E também destacado que a função logarítmica é utilizada para modelar inúmeros fenômenos da natureza, tais como: calcular a intensidade de terremotos, a altura de determinadas plantas, o pH de soluções químicas, entre outras.

A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problema, os alunos foram conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema, com o objetivo de obter uma resposta satisfatória em cada situação. A modelagem envolvendo função exponencial e logarítmica foi apresentada através de tabelas numéricas, nas quais os alunos deveriam interpretar os fenômenos e deduzir a lei de formação de cada problema, com a orientação do professor se necessário.

- ***Dia 4 – Atividades no laboratório de informática***

O contato com a tecnologia é essencial para aprender determinados conteúdos na escola. Nos três primeiros dias de atividades, os alunos não haviam feito ainda a construção dos gráficos das funções exponenciais e logarítmicas. Nesse dia, através do software *Winplot*, eles foram conduzidos para atividades que envolvem a construção e interpretação dos gráficos dessas funções. Os grupos fizeram a construção dos gráficos e com isso foi realizada a análise das propriedades dessas funções, tais como: domínio, imagem, crescimento/decrescimento e concavidade.

- ***Dia 5 – Atividade avaliativa***

Neste último dia de atividades, os alunos fizeram uma avaliação que consiste em resumir os conteúdos trabalhados na sequência didática proposta. A atividade avaliativa foi realizada em grupo, nos mesmos que foram organizados no início. Os questionamentos são feitos de modo a verificar se os alunos conseguem interpretar as situações-problema utilizando as funções exponenciais e logarítmicas.

A atividade foi disponibilizada impressa em folhas e pode ser feito o uso da calculadora para realizar os cálculos. Ao final do quinto dia, foi realizada a análise de todo material produzido nessa sequência de atividades e armazenado no portfólio produzido pelos grupos, com o objetivo de verificar se ocorreu a aprendizagem dos conceitos desenvolvidos relacionando com os aspectos teóricos envolvidos.

É importante salientar que estas atividades constituem uma parte do conteúdo que está sendo desenvolvido durante o ano letivo, portanto são de caráter obrigatório nesta etapa de permanência dos alunos na escola. Entretanto, o objetivo principal desta sequência didática é proporcionar aos docentes uma alternativa para o ensino de funções, em especial as funções exponenciais e logarítmicas através de situações-problema.

6. Resultados e análises posteriores

6.1 Análise dos resultados do grupo

Antes de realizar uma análise sobre a produção dos alunos estabelecendo conexões com os aspectos teóricos apresentados no capítulo 3, faremos uma exposição das observações realizadas durante as aulas, através da análise dos vídeos produzidos e das observações feitas pelo professor no momento da aplicação das atividades. Em seguida, faremos uma discussão sobre a produção dos alunos com base na teoria dos campos conceituais e nas representações semióticas.

A aula inaugural foi onde ocorreu a apresentação dos problemas sobre funções misturando situações com tabelas e gráficos, utilizando situações cotidianas. Baseado nas observações nota-se que os alunos alcançaram as expectativas para essa aula. A elaboração dos problemas que envolvessem situações cotidianas foi decisiva para manter o interesse do grupo na execução da atividade.

Notamos que os problemas abordados nesta aula podem ser propostos novamente com outros alunos, sendo que o professor pode propor em uma de suas aulas uma apresentação de problemas que envolvem apenas raciocínio com tabelas, valorizando assim o processo dedutivo dos alunos. Em outro momento, o professor pode elaborar problemas que envolvem somente interpretação com gráficos, valorizando assim a análise das grandezas envolvidas, tal como o crescimento e decrescimento no gráfico. Neste primeiro dia, durante a execução das tarefas pelos alunos, observou-se que:

- Os grupos desenvolveram a leitura inicial de todos os problemas da atividade proposta, como um modo do grupo inteiro conhecer os problemas propostos;
- A estratégia para resolver as situações, devido ao tempo da aula, foi dividir os problemas entre os integrantes do grupo. Quando surgia a dificuldade, eles faziam discussão entre os integrantes e somente após algumas conclusões chamavam pela orientação do professor;
- Os grupos procuraram demonstrar clareza na escrita matemática para descrever a resolução dos problemas, uma vez que isso demonstra capacidade de argumentação;
- Nos problemas dispostos em tabelas numéricas, a maioria dos grupos conseguiu elaborar a lei matemática que modelava cada situação;

- Na análise gráfica, conseguiram identificar as variáveis do problema e identificar a noção de crescimento e decrescimento das grandezas;
- O tempo de dois períodos foi essencial para a leitura, identificação e resolução de todos os problemas propostos, não havendo, portanto falta de tempo para a execução das atividades.

No segundo dia, ao desenvolver o trabalho com as funções exponenciais percebeu-se a falta de conhecimento por parte dos alunos referentes a alguns conteúdos desenvolvidos no ensino fundamental, tais como porcentagem e regras de potência. Antes do trabalho na modelagem de situações utilizando a função exponencial foi feito uma revisão sobre as regras de potências vistas no ensino fundamental, com o objetivo de diminuir a dificuldade na execução. Isso facilitou a compreensão e formulação das expressões utilizando a função exponencial.

Ao levar para os alunos contextos atuais e que envolviam a modelagem com esse tipo de função a aceitação e receptividade foi grande por parte dos grupos. Em nenhum momento os alunos consideraram a hipótese dos problemas estarem fora de contexto e sim que as situações os faziam perceber onde a matemática estava presente na suas vidas. Nesse segundo dia, durante a execução das tarefas pelos grupos, observou-se que:

- No problema de crescimento populacional, como a informação era que a população "dobrava" a cada ano e a outra população "triplicava", a totalidade dos grupos deduziu que a lei de formação era uma função do primeiro grau da forma $y = 2x$ onde x era a quantidade de pessoas do ano anterior que se quisesse determinar;
- Após uma discussão sobre como funcionava o crescimento exponencial, através da análise de uma situação, os grupos conseguiram deduzir a lei matemática para modelar o problema do crescimento populacional;
- Na situação do decrescimento da quantidade de remédio no organismo de uma pessoa, os grupos montaram a tabela com os valores indicados e ainda seguiram com mais alguns cálculos para deduzir que a quantidade poderia ficar da forma $0{,}000000......$, mas nunca poderia ser zero, pois a potência poderia gerar um resultado muito pequeno, mas nunca ser zero absoluto.
- No problema de valorização do imóvel, alguns grupos montaram o cálculo com 10% do valor inicial, caracterizando a situação como um sistema simples de capitalização. Não foi dito para eles que isso era um exercício do sistema

composto de capitalização, apenas foi feita a dedução da valorização do imóvel utilizando a função exponencial;

- Alguns grupos apresentaram dificuldade na interpretação do cálculo com porcentagem, pois no ensino fundamental haviam trabalhado muito pouco, ou nada, esses tipos de cálculos. Outros grupos realizaram o cálculo de porcentagem utilizando a regra de três, demonstrando assim o conhecimento desse tipo de raciocínio;
- Em geral, os grupos conseguiram modelar as situações envolvendo as funções exponenciais, deduzindo a sua lei de formação e identificando as variáveis independentes e dependentes nos problemas.

A proposta do terceiro dia foi a abordagem da função logarítmica através de problemas cotidianos, procurando evitar o método tradicional de ensino do assunto. Esse método de abordagem foi importante, pois possibilitou os alunos perceberem que antes de realizar os cálculos é necessário conhecer uma utilidade para o assunto proposto. Antes de abordar os problemas foi feito o estudo do logaritmo através da definição e suas propriedades.

Esse procedimento adotado antes foi importante para facilitar a compreensão dos alunos na hora de executar o procedimento de resolução dos problemas. Os grupos diferenciaram corretamente a variável dependente e independente nos problemas e tiveram um pouco de dificuldade em executar o cálculo algébrico. Foi unânime o comportamento entre os alunos que os problemas abordados foram inéditos, os grupos não imaginavam que esse assunto possuía aplicações em diversas áreas da ciência. Nesse dia, durante a execução das tarefas pelos alunos, observou-se que:

- Os alunos comentaram que as situações envolvendo a aplicação da função logarítmica foram inéditas e que eles não imaginavam o uso dessa função em aplicações tão interessantes;
- Na substituição da variável independente pelo valor proposto, os grupos não tiveram dificuldades em compreender o que deveria ser feito. A dificuldade apresentada por alguns alunos foi no cálculo algébrico das expressões encontradas nos problemas;
- Os conceitos de variável independente e variável dependente foram bem utilizados nesses problemas, os alunos conseguiram identificar cada uma delas nas situações propostas;

- As regras de potência foram lembradas com o objetivo de auxiliar os cálculos com logaritmos, uma vez que acelerava a dedução da resposta;
- Em geral, os grupos conseguiram realizar a modelagem das situações envolvendo funções logarítmicas.

No quarto dia de atividades, os alunos trabalharam com a construção dos gráficos das funções exponenciais e logarítmicas utilizando o software Winplot. Podemos dizer que o uso da tecnologia foi um recurso importante durante a execução dessas atividades, pois possibilitou aos alunos construir gráficos, visualizar propriedades, formular hipóteses e verificar a sua validade, ou seja, aprender matemática. Nota-se que ao elaborar atividades que devem ser executadas no laboratório de informática, o professor deve ter a atenção de propor aos alunos contextos que os deixem envolvidos pela proposta, evitando que os alunos busquem a internet como espaço de evasão da atividade.

A sequência de atividades propostas no laboratório de informática alcançou os seus objetivos integralmente, pois envolveu a turma em um trabalho que ocorreu durante todos os dois períodos. Eles fizeram construções gráficas e puderam visualizar as propriedades de cada tipo de função. A aceitação no uso do software *Winplot* foi unânime pela turma, que questionou o professor se era possível aprender outros conteúdos de matemática utilizando esse tipo de recurso.

Um questionamento que surgiu por parte da turma após esse dia de atividades foi: *Quais conteúdos são possíveis de aprender na aula utilizando o Winplot?* No momento da pergunta levantada pelos grupos, a resposta dada para a turma foi que além da possível abordagem sobre funções, podem ser trabalhados conteúdos de geometria analítica e trigonometria. Em um curso superior ainda é possível abordar cálculo diferencial e integral, funções de 2 ou 3 variáveis e superfícies quádricas[22].

Esse tipo de questionamento levantado pelos alunos, conduz o professor a elaborar atividades que envolvem os mais diversos conteúdos de matemática onde a tecnologia pode servir como recurso para tornar as aulas com mais qualidade. Estas atividades podem ser propostas novamente com outros alunos, onde o professor em um dia explora somente a representação gráfica da função exponencial e no outro dia apenas a função logarítmica. As observações registradas nesse dia foram:

---

[22] Uma superfície quádrica é uma superfície representada em três dimensões que possui a equação geral $a.x^2 + b.y^2 + c.z^2 + d.xy + e.xz + f.yz + g.x + h.y + i.z + j = 0$ com $a.b, c, d, e, f, g, h, i, j$ sendo números reais exceto $a, b, c \neq 0$.

- Os alunos comentaram que ao utilizar o *Winplot* foi imediato verificar como era o formato dos gráficos propostos nas atividades;
- Os grupos não possuíram dificuldades em utilizar a lógica do software para inserir as funções no programa. Como foi informado na folha de atividades que a exponencial deveria ser digitada utilizando o ^ e o logaritmo deveria utilizar parênteses, os alunos conseguiram se expressar corretamente no software;
- Ao manipular o *Winplot*, os grupos foram descobrindo outras ferramentas do software. Por exemplo, eles descobriram como fazia para desenhar vários gráficos ao mesmo tempo na tela e também como mudar o nome das funções que eles haviam construído;
- Os alunos empenharam-se integralmente nas atividades propostas, não fizeram uso da internet para consultar métodos ou outras resoluções para os questionamentos.
- A aceitação do uso do software foi boa pela turma. Os grupos consideraram que a utilização foi válida para visualizar mais facilmente a representação gráfica das funções exponenciais e logarítmicas.

Durante a execução das atividades no último dia os grupos demonstraram familiaridade com a interpretação dos dados dispostos em tabelas e não possuíram dificuldade com o conceito de variável dependente e independente. A questão de esboçar o gráfico sem o auxílio do software usado na aula anterior foi a questão mais complicada considerada pela turma, pois eles deveriam construir o gráfico utilizando as informações registradas por eles na aula anterior.

Os objetivos propostos nesse dia foram plenamente alcançados e essa atividade foi o encerramento da sequência didática proposta, que procurou trabalhar com funções, em especial a função exponencial e a função logarítmica aplicadas na modelagem de situações-problema. Observou-se nesse dia que:

- Inicialmente os grupos realizaram a leitura dos problemas propostos na atividade, com o objetivo de todos os integrantes conhecerem a proposta desse último dia de atividades;
- Durante a resolução dos problemas os grupos consultaram o material construído nas aulas anteriores, com o objetivo de relembrar algum tópico anterior;

- Na substituição da variável independente pelo valor proposto, os grupos não tiveram dificuldades em compreender o que deveria ser feito. A dificuldade encontrada por alguns alunos foi no cálculo algébrico das expressões;
- O problema que causou mais dúvida nos alunos foi a construção dos gráficos sem o uso do software *Winplot*, pois eles deveriam lembrar as propriedades que haviam relatado na atividade anterior. Eles conseguiram diferenciar as variáveis independentes das dependentes nos problemas, identificar o domínio e imagem das funções solicitadas.

Após apresentar o relato das observações feitas durante as aulas que ocorreram as atividades da sequência didática, agora faremos a exposição dos materiais coletados das atividades realizadas pelos grupos, com a finalidade de apresentar as possíveis relações com a fundamentação teórica escolhida para esse texto, que são os campos conceituais de Vergnaud e as representações semióticas de Duval.

A discussão seguirá a sequência de atividades propostas, no sentido de apresentar as produções dos alunos na ordem em que foi desenvolvida a proposta. Apresentaremos uma comparação das atividades realizadas entre os grupos, com o objetivo de relacionar a teoria com os resultados obtidos.

No primeiro problema proposto da sequência analisamos a resolução de três grupos, na qual consideramos que as diferenças apresentadas entre as resoluções possuem relação intrínseca com a teoria desenvolvida. A tabela apresentada aos alunos no problema procura demonstrar o saldo da conta bancária de uma pessoa que investe uma quantia de dinheiro.

Na tentativa de obter uma expressão matemática que demonstrasse a relação entre as grandezas da tabela, observou-se que o grupo 1 percebeu a relação diretamente, conseguindo identificar as variáveis dependente e independente envolvidas na situação, apresentando um exemplo de que a expressão por eles formulada apresentava sentido. Isso demonstra que o grupo identificou na situação apresentada os elementos conceituais necessários para a elaboração da expressão matemática. Ao apresentar um exemplo para o leitor, os alunos consideram que isso facilita a compreensão de quem está lendo o problema pela primeira vez e também torna válido o seu argumento proposto na resolução.

Problema 1: Uma pessoa aplica hoje em fundo de investimento R$10,00 e a cada dia que passa, o seu saldo na conta bancária é modelado de acordo com a tabela:

Tempo(dias)	Saldo (R$)
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
. . .	. . .
x	$S(x) = ?$

Após x dias, qual a expressão matemática $S(x)$ que pode representar a quantidade de dinheiro que essa pessoa possui?

$S(x) = 10^x$

ex: $S(4) = 10^4$
$= 10000$

obs.: *a quantidade x é chamada de variável* independente
a quantidade $S(x)$ é chamada de variável dependente

Figura 23: Dia 1, problema 1, resolução do grupo 1.

Nota-se que todos os sete grupos apresentaram uma expressão para relacionar as grandezas apresentadas na tabela. Destaca-se que na resolução proposta pelo grupo 2 a noção de variável está associada com as palavras envolvidas no problema: saldo e tempo. Isso demonstra a dificuldade do grupo 2 em transitar entre as representações semióticas desenvolvidas e extraídas do problema para obter através das referências propostas um significado para a expressão matemática utilizando a noção de variável dependente e independente.

$(10)^{\text{tempo}} = \text{saldo}$

obs.: *a quantidade x é chamada de variável* independente
a quantidade $S(x)$ é chamada de variável dependente

Figura 24: Dia 1, problema 1, resolução do grupo 2.

A resolução do problema pelo grupo 3 foi a apresentação da expressão matemática envolvendo as grandezas. Destaca-se que esse grupo preencheu a tabela proposta, continuando a sequência numérica para o saldo. Para esse grupo os três pontos na tabela não destacam uma quantidade qualquer e finita de etapas a serem seguidas e sim a presença das três próximas etapas do cálculo que não foram apresentadas. Isso mostra que a noção de quantidade arbitrária de etapas não foi identificada pelos alunos desse grupo, logo a sua conclusão para a expressão matemática foi feita através do estudo de alguns casos particulares envolvendo a tabela apresentada.

Tempo(dias)	Saldo (R$)
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
6 7 8	1000000 10000000 100000000
x	$S(x) = ?$

Após x dias, qual a expressão matemática $S(x)$ que pode representar a quantidade de dinheiro que essa pessoa possui?

$10^x = y$

obs.: a quantidade x é chamada de variável independente

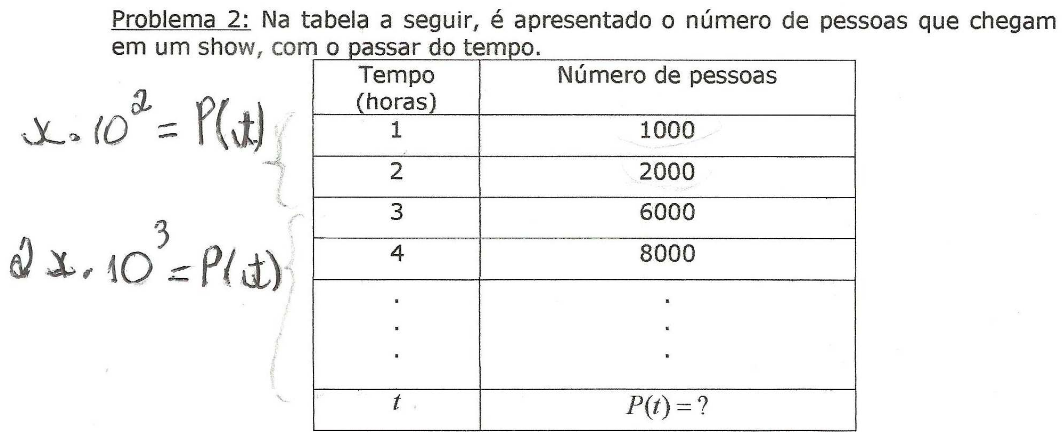
a quantidade $S(x)$ é chamada de variável dependente

Figura 25: Dia 1, problema 1, resolução do grupo 3.

Para a resolução do problema 2, a proposta era que os grupos verificassem que a relação entre as grandezas podia ser expressa por duas expressões matemáticas, caracterizando uma função estabelecida por partes. No entanto alguns grupos apresentaram dificuldades em obter tais expressões.

O grupo 2 definiu as expressões observando os dados fornecidos na tabela e marcando onde se verificava a validade da expressão deduzida por eles. Esse grupo conseguiu identificar as variáveis envolvidas e caracterizou corretamente cada uma delas como dependente ou independente. Nota-se que o grupo não possui dificuldade quanto ao aspecto da simetria na expressão matemática. Eles conseguem identificar que a expressão $P(t)=...$ ou $...=P(t)$ pode representar a mesma situação.

O que se percebe no grupo 2 é que houve neste problema uma pequena confusão quanto ao expoente dois na expressão válida para o tempo um e dois. Caracterizo isso não como erro, mas apenas uma desatenção na hora de transcrever a expressão para a folha. Conceitualmente, o grupo sabe o que a expressão obtida por eles significa e enxergou isso na tabela, ocorreu apenas um pequeno engano na hora de transcrever ao lado. Cognitivamente, o grupo possuiu a capacidade de perceber os diferentes signos presentes na tabela, e representar a relação entre as grandezas através de uma função definida por partes sem ter tido esse assunto anteriormente nas aulas de matemática.



Problema 2: Na tabela a seguir, é apresentado o número de pessoas que chegam em um show, com o passar do tempo.

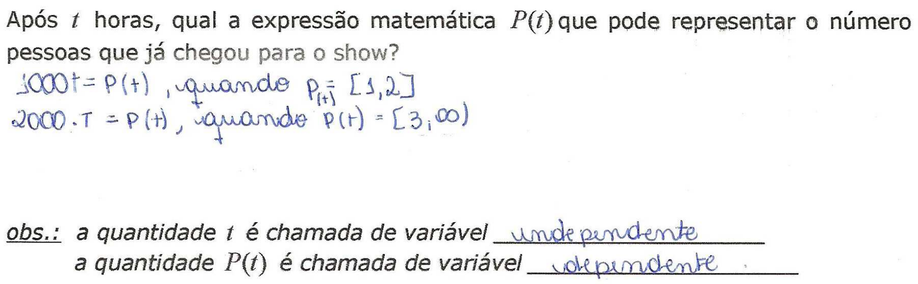
$x \cdot 10^2 = P(t)$

$2x \cdot 10^3 = P(t)$

Tempo (horas)	Número de pessoas
1	1000
2	2000
3	6000
4	8000
. . .	. . .
t	$P(t)=?$

Figura 26: Dia 1, problema 2, resolução do grupo 7.

O grupo 6 também conseguiu estabelecer as expressões matemáticas para representar a relação entre as grandezas, porém destacamos a tentativa do grupo em apresentar o domínio da função construída por eles. O grupo identificou que $P(t)$ significava a expressão matemática e também um possível "intervalo" numérico. Na verdade, a representação deveria ser $t \in ...$ caso o desejo fosse expressar o domínio da função. Pelo fato do tempo ser uma grandeza contínua, os alunos consideraram a ideia de expressar o domínio através de intervalo numérico. O grupo ainda destaca a capacidade de generalizar a proposta da tabela, colocando o símbolo de infinito (∞), demonstrando a capacidade de abstração matemática.



Após t horas, qual a expressão matemática $P(t)$ que pode representar o número pessoas que já chegou para o show?

1000t = P(t), quando $P_{(t)}$ = [1,2]

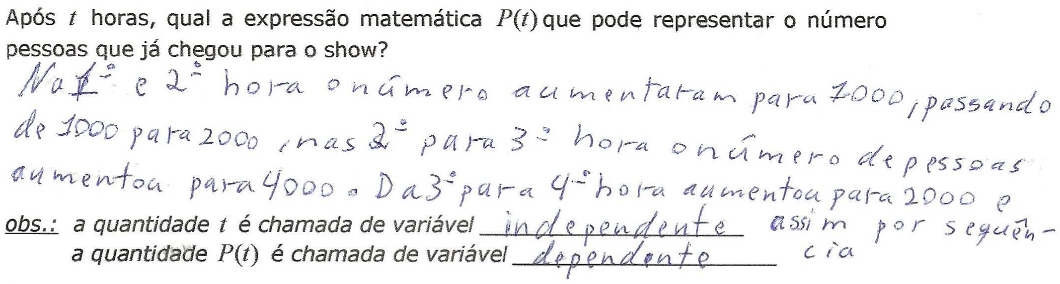
2000.T = P(t), quando P(t) = [3,∞)

obs.: a quantidade t é chamada de variável undependente

a quantidade $P(t)$ é chamada de variável dependente

Figura 27: Dia 1, problema 2, resolução do grupo 6.

A resolução proposta pelo grupo 4 para este problema demonstra a dificuldade do grupo em obter a expressão matemática que representa a função envolvida no contexto. A tentativa do grupo é expressar através de palavras o que eles estão visualizando na tabela, para no final utilizar a expressão “e assim por sequência” no desejo de generalizar a ideia. Porém isso não demonstra o domínio dos conceitos matemáticos necessários para tal formulação, nota-se que a extração dos signos e da criação de uma representação semiótica para a situação ainda é uma dificuldade para esse grupo.



Após t horas, qual a expressão matemática $P(t)$ que pode representar o número pessoas que já chegou para o show?

Na 1ª e 2ª hora o número aumentaram para 2000, passando de 1000 para 2000, nas 2ª para 3ª hora o número de pessoas aumentou para 4000. Da 3ª para 4ª hora aumentou para 2000 e assim por sequência

obs.: a quantidade t é chamada de variável independente

a quantidade $P(t)$ é chamada de variável dependente

Figura 28: Dia 1, problema 2, resolução do grupo 4.

No problema 3 a relação entre as grandezas é novamente exponencial, porém observamos que em nenhum momento foi dito aos aluno que alguns problemas caracterizavam a função exponencial, isso seria abordado mais adiante.

Observa-se que o grupo 3 se fixou na quantidade de zeros presente no número de bactérias, realizando ao lado da tabela proposta alguns cálculos para se convencer da hipótese que haviam formulado. Observa-se que a presença dos três pontinhos abaixo do seu cálculo demonstra a capacidade do grupo em generalizar o pensamento. Sem maiores dificuldades, o grupo obteve uma expressão para a relação entre as grandezas e identificou corretamente as variáveis envolvidas.

Problema 3: A tabela abaixo representa a variação do número de bactérias em uma fatia de pão deixada sobre uma mesa em um dia quente:

$100^0 = 1$
$100^1 = 1$
$100^2 = 10.000$
$100^3 = 1.000.000$
$100^4 = 100000000$

Tempo (horas)	Número de bactérias(nº de indivíduos)
0	1
1	100
2	10000
3	1000000
4	100000000
. . .	. . .
t	$N(t) = ?$

Após t horas, qual a expressão matemática $N(t)$ que pode representar o número de bactérias encontradas nessa fatia de pão?

$100^t = y$

obs.: a quantidade t é chamada de variável independente
a quantidade $N(t)$ é chamada de variável dependente

Figura 29: Dia 1, problema 3, resolução do grupo 3.

Na resolução proposta pelo grupo 1, observa-se a necessidade da explicação através de palavras acompanhar a expressão matemática formulada pelo grupo. Nota-se que a sequência de passos explicada pelo grupo está coerente com a lógica matemática para o cálculo. Isso demonstra pelo grupo o domínio da conversão entre as representações semióticas extraídas do problema. A identificação das variáveis ocorreu sem dificuldades.

Após t horas, qual a expressão matemática $N(t)$ que pode representar o número de bactérias encontradas nessa fatia de pão?

$N(t) = 10^{2t}$

A quantidade de horas multiplicadas por 2 é a quantidade de zeros no nº de bactérias.

obs.: a quantidade t é chamada de variável independente
a quantidade $N(t)$ é chamada de variável dependente

Figura 30: Dia 1, problema 3, resolução do grupo 1.

A relação entre as grandezas apresentada no problema 4 é caracterizada por ser linear, ou seja existe uma relação de proporcionalidade envolvida entre as grandezas.

Esperava-se que os alunos conseguissem expressar sem maiores dificuldades a relação, porém alguns grupos apresentaram dificuldade na hora de expressar matematicamente a relação entre as grandezas. O grupo 2 apresentou uma explicação através de uma frase e não conseguiu elaborar a expressão matemática. Percebe-se a dificuldade do grupo em extrair as representações semióticas necessárias para desenvolver a conversão dos signos em uma expressão matemática.

Problema 4: A tabela abaixo apresenta o valor pago por um empresário que utiliza o serviço de táxi para realizar visitas aos seus fornecedores de matéria prima. Ele sempre percorre uma quantidade inteira de quilômetros a cada deslocamento.

Distância (Km)	Valor Pago (R$)
1	R$15,00
2	R$30,00
3	R$45,00
4	R$60,00
⋮	⋮
d	$V(d) = ?$

A cada 1 quilômetro aumenta R$ 15,00.

Figura 31: Dia 1, problema 4, resolução do grupo 2.

A resolução proposta pelo grupo 2 demonstra a capacidade de elaboração da expressão acompanhada de uma explicação fornecida através de uma frase. Para o grupo há total clareza no que estão elaborando e transmitindo para o leitor. Acompanha ainda a correta identificação das variáveis envolvidas no problema. Isso demonstra a capacidade do grupo em converter as informações dadas na tabela em estruturas organizadas e matematicamente corretas.

Analisando a tabela acima, qual a expressão matemática $V(d)$ que pode representar o valor pago pela viagem de d quilômetros?

$V(d) = 15d$

A distância percorrida, multiplicada por 15, é igual ao valor pago.

obs.: *a quantidade d é chamada de variável* independente

a quantidade $V(d)$ é chamada de variável dependente

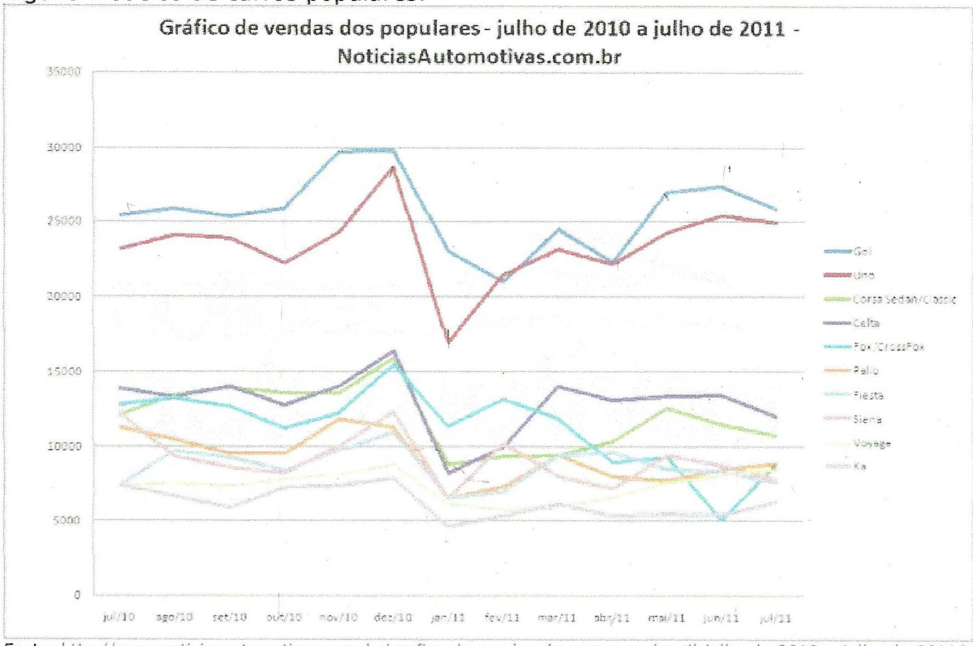
Figura 32: Dia 1, problema 4, resolução do grupo 2.

Os últimos problemas das atividades referentes ao primeiro dia são todos sobre a apresentação da noção de função através da sua representação gráfica. Procurou-se levar para os alunos problemas que estavam diretamente ligados ao cotidiano deles, na justificativa de apresentar o estudo das funções como importante e necessário para a interpretação de problemas práticos.

A análise das resoluções elaboradas pelos grupos para os problemas envolvendo gráficos demonstra a capacidade dos alunos em realizar o tratamento das informações disponibilizadas nas mais diversas formas gráficas. Os alunos realizaram a interpretação das situações identificando corretamente as propriedades de crescimento e decrescimento, também associando corretamente a presença das variáveis envolvidas.

Pela observação na resolução apresentada pelo grupo 6, percebe-se a correta identificação das propriedades de crescimento e decrescimento no gráfico. Mesmo não possuindo os eixos orientados, como usualmente é abordado junto com o gráfico de função, os alunos associaram o crescimento do eixo vertical para cima, observando as indicações numéricas e a evolução do tempo no eixo horizontal para a esquerda. O grupo 6 demonstrou a compreensão dos conceitos de variável dependente e independente envolvidos na situação. Isso demonstra a criação de esquemas e a presença dos conceitos em ação no momento de análise do gráfico, possibilitando a apropriação das ideias matemáticas envolvidas.

Problema 5: A representação gráfica a seguir apresenta o processo de venda de alguns modelos de carros populares.



Fonte: http://www.noticiasautomotivas.com.br/grafico-de-vendas-de-carros-no-brasil-julho-de-2010-a-julho-de-2011/

Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) As vendas do veículo Gol apresentaram períodos de crescimento? Em qual(is) época(s)? Justifique sua resposta. Sim, nos períodos de nov/10, dez/10, março/11, maio/11 e junho/11. Porque está representado no gráfico

ii) As vendas do veículo Uno apresentaram períodos de decrescimento? Em qual(is) época(s)? Justifique sua resposta. Sim, em out/10, em jan/11, em abril e em jul/11. Porquê está representado

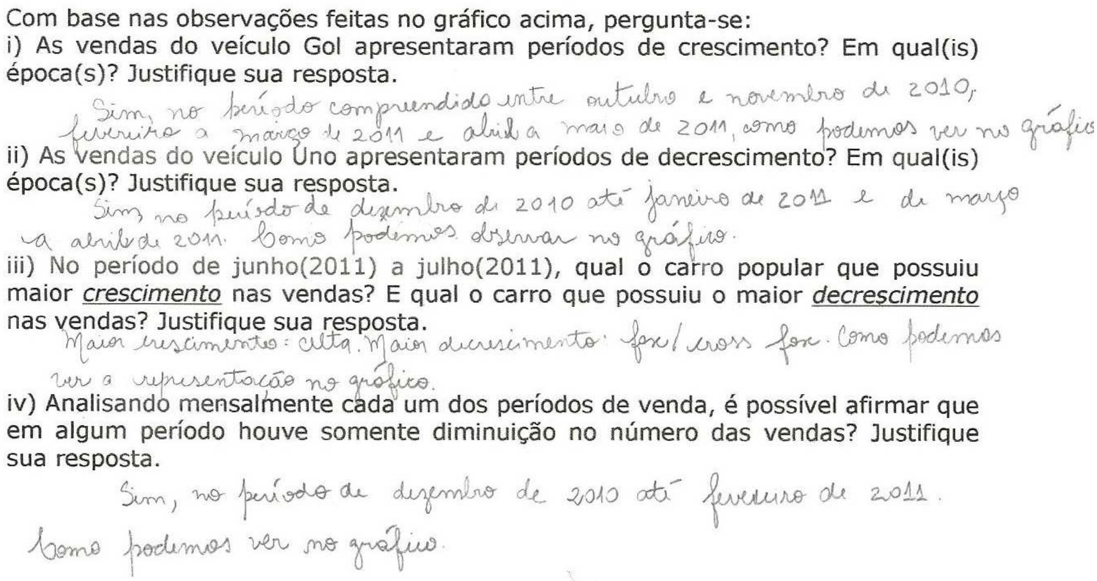
iii) No período de junho(2011) a julho(2011), qual o carro popular que possuiu maior *crescimento* nas vendas? E qual o carro que possuiu o maior *decrescimento* nas vendas? Justifique sua resposta. Fiesta maior crescimento. Gol maior decrescimento. Pelo gráfico.

iv) Analisando mensalmente cada um dos períodos de venda, é possível afirmar que em algum período houve somente diminuição no número das vendas? Justifique sua resposta. Sim, em janeiro de 2011, pela observação.

Figura 33: Dia 1, problema 5, resolução do grupo 6.

A resolução proposta pelo grupo 1 para o problema 5 mostra que o uso da palavra “até” pelo grupo demonstra o conhecimento da propriedade de continuidade da função em um determinado intervalo de tempo apresentado no gráfico, pois o esboço está sendo apresentado. Durante a análise do problema, percebe-se que a característica da continuidade da função constituiu uma característica importante para a elaboração das respostas. Todo o argumento proposto pelo grupo na resolução está fundamentado na ocorrência da palavra “até”.

A conversão dos esquemas produzidos através da análise gráfica permite afirmar que o grupo 1 alcançou a apropriação dos conceitos de matemática propostos no problema. Nota-se que a conversão das representações semióticas através da extração de informações da situação problema em informações conceituais para a aprendizagem ocorreu naturalmente pelos alunos integrantes do grupo 1.


Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) As vendas do veículo Gol apresentaram períodos de crescimento? Em qual(is) época(s)? Justifique sua resposta.

Sim, no período compreendido entre outubro e novembro de 2010, fevereiro a março de 2011 e abril a maio de 2011, como podemos ver no gráfico

ii) As vendas do veículo Uno apresentaram períodos de decrescimento? Em qual(is) época(s)? Justifique sua resposta.

Sim, no período de dezembro de 2010 até janeiro de 2011 e de março a abril de 2011. Como podemos observar no gráfico.

iii) No período de junho(2011) a julho(2011), qual o carro popular que possuiu maior *crescimento* nas vendas? E qual o carro que possuiu o maior *decrescimento* nas vendas? Justifique sua resposta.

Maior crescimento: celta. Maior decrescimento: fox/cross fox. Como podemos ver a representação no gráfico.

iv) Analisando mensalmente cada um dos períodos de venda, é possível afirmar que em algum período houve somente diminuição no número das vendas? Justifique sua resposta.

Sim, no período de dezembro de 2010 até fevereiro de 2011. Como podemos ver no gráfico.

Figura 34: Dia 1, problema 5, resolução do grupo 1.

O problema 6 proposto apresentava um contexto muito atual e relevante presente no cotidiano dos alunos. Tratava-se de um gráfico que apresentava as variações ocorridas na porcentagem de multas pagas nas faturas de energia elétrica. A novidade desse problema é que o gráfico apresentado aos alunos estava mostrando as informações através de barras verticais, caracterizando um histograma[23], usualmente utilizado na disciplina de estatística.

Pela resolução produzida pelo grupo 5, percebe-se que o conceito de variável dependente e independente foi apropriado pelo grupo de alunos, logo a mobilização dos esquemas necessários para a aquisição desse conceito não serão mais necessários. A representação feita do conceito de variável está cada vez mais nítida pela turma de um modo geral.

Todos os grupos conseguiram identificar os períodos de aumento e diminuição da porcentagem de multas apresentados no gráfico, ressaltando assim a aquisição dessa propriedade matemática. Novamente, reafirmamos que apesar de não possuir eixos orientados no gráfico, os grupos identificaram corretamente o crescimento e

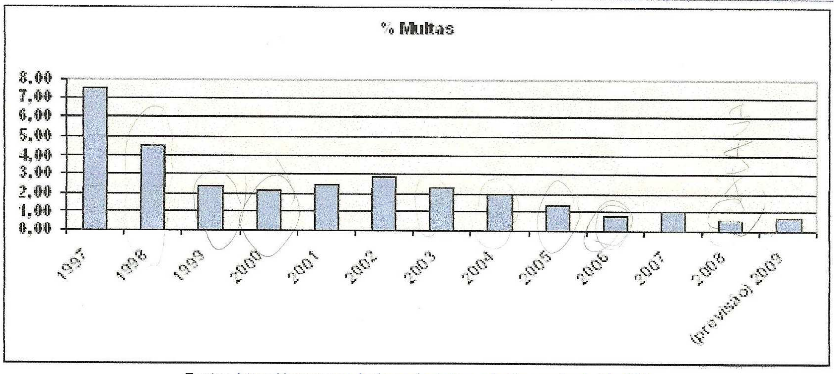
[23] Histograma é um tipo de gráfico utilizado na disciplina de estatística. Pode ser apresentado utilizando barras verticais ou horizontais para mostrar a relação entre duas grandezas.

decrescimento do eixo, através das representações feitas utilizando os símbolos disponíveis no gráfico.

A criação, organização e desenvolvimento das estruturas em forma de esquemas, e a transição entre as representações semióticas produzidas durante a análise dos gráficos propostos conduziu os alunos para a apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos. O confronto das hipóteses individuais com a dos colegas reafirma a teoria proposta por Vergnaud na aquisição dos conceitos, pois é através do confronto das ideias que é possível que o aluno organize a sua aprendizagem, revendo as possibilidades, estudando casos não pensados ainda, ou seja desenvolva a matemática escolar de acordo com a sua interatividade com os colegas, professor e problemas propostos.

Problema 6: Leia o seguinte texto: *"O projeto Multa Zero visa reduzir a valores próximos de zero a quantidade de multas (ou cobranças por excesso) pagas nas faturas de energia. Após a última atualização dos dados e correções no sistema Contaluz (banco de dados de faturas de energia elétrica da USP), verificou-se que em 1997, a porcentagem de multas era 7,5%, baixando para 2,1% em 2000. Em 2005, este índice foi para 1,4%, em 2006 para 0,8%, em 2007 para 1,1%, em 2008 para 0,6%, e em 2009 este índice deve fechar em aproximadamente 0,7%, conforme apresentado pelo gráfico abaixo."*

Extraído de: http://www.usp.br/pure/estatico.php?v_content_id=134



Fonte: http://www.usp.br/pure/estatico.php?v_content_id=134

Com base na leitura do texto e em suas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) Em qual(is) período(s) houve uma *diminuição* na porcentagem (%) de multas pagas pelos usuários dos da energia elétrica? Justifique sua resposta.

Os anos que houve diminuição são 1998, 1999, 2000, 2003, 2004, 2005, 2006 e 2008 porque foi representado assim pelo gráfico.

ii) Em qual(is) período(s) houve um *aumento* na porcentagem (%) de multas pagas pelos usuários dos da energia elétrica? Justifique sua resposta.

Houve aumento da porcentagem em 2001, 2002, 2007 e 2009 porque são os anos entre os anos de diminuição

iii) Qual a variável independente neste problema?

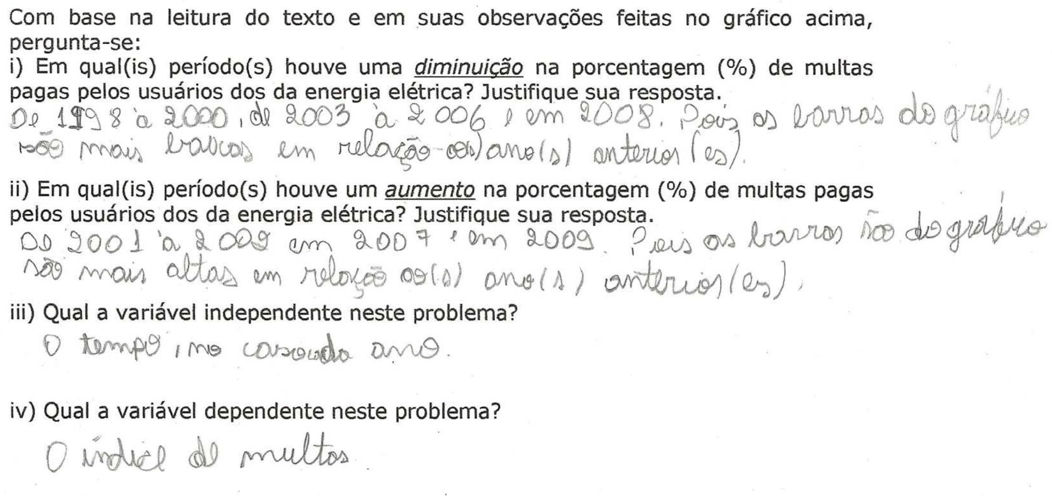
A variável independente é o ano, pois já é uma coisa fixa que passa sem precisarmos fazer nada.

iv) Qual a variável dependente neste problema?

O valor da multa é a variável dependente é o valor da multa pois depende do consumo.

Figura 35: Dia 1, problema 6, resolução do grupo 5.

A resolução proposta pelo grupo 7 reafirma a ideia anteriormente apresentada do “até”, agora com a ocorrência do termo “à”. O grupo 7 expressa em sua resolução a ideia de uma função contínua apesar das barras do gráfico estar separadas. Isso sugere a interpretação do tempo como uma grandeza contínua, atribuindo intervalos para o crescimento e decrescimento da porcentagem de multas. Logo, observa-se que as condições necessárias para a aquisição do conceito de função através de problemas, e a identificação das variáveis envolvidas estão produzindo resultados qualitativos.


Com base na leitura do texto e em suas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) Em qual(is) período(s) houve uma *diminuição* na porcentagem (%) de multas pagas pelos usuários dos da energia elétrica? Justifique sua resposta.

De 1998 à 2000, de 2003 à 2006 e em 2008. Pois as barras do gráfico são mais baixas em relação ao(s) ano(s) anterior(es).

ii) Em qual(is) período(s) houve um *aumento* na porcentagem (%) de multas pagas pelos usuários dos da energia elétrica? Justifique sua resposta.

Do 2001 à 2002 em 2007 e em 2009. Pois as barras são do gráfico são mais altas em relação ao(s) ano(s) anterior(es).

iii) Qual a variável independente neste problema?

O tempo, no caso do ano.

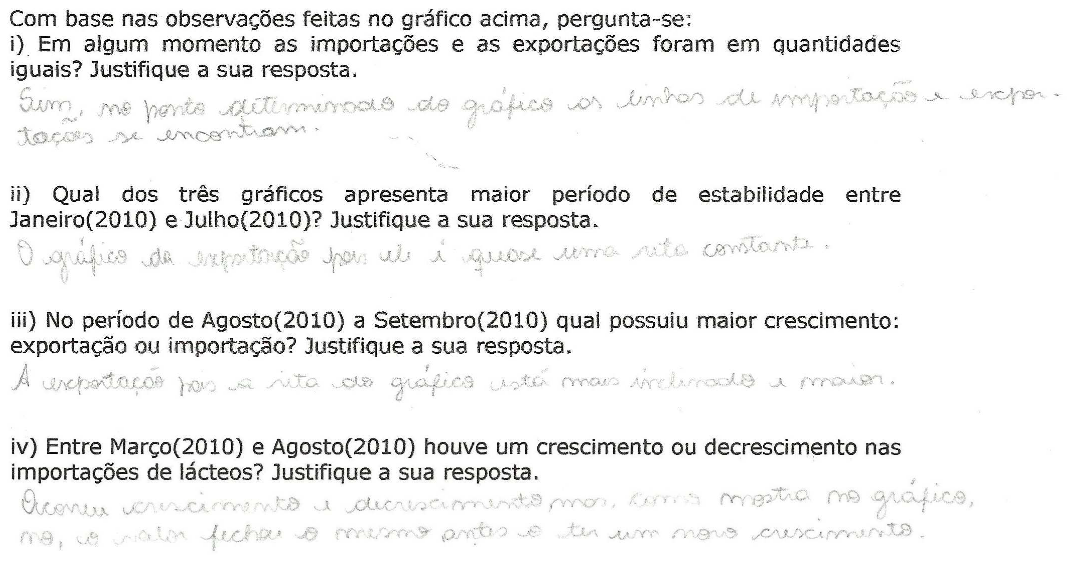
iv) Qual a variável dependente neste problema?

O índice de multas.

Figura 36: Dia 1, problema 6, resolução do grupo 7.

O último problema proposto do primeiro dia da sequência didática tratava de uma modelagem gráfica sobre o comércio de lácteos no Brasil entre o período de 2008 até setembro de 2010. A ideia era fazer o fechamento das atividades do presente dia com um problema que tivesse um questionamento sobre interseção dos gráficos de funções. Trouxemos também a noção de função constante através do termo “estabilidade” utilizado na interpretação do gráfico.

Uma análise da resolução proposta pelo grupo 5, permite concluir que as noções de interseção dos gráficos, crescimento e decrescimento, comparação e interpretação de pelo menos dois gráficos, foram os objetivos plenamente alcançados. Nota-se que o grupo 5 se apropriou dos conceitos matemáticos presentes no problema, que pela observação feita durante a aula pelo professor-pesquisador, verificou-se que durante a resolução o grupo não possuiu dificuldade.



Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:
i) Em algum momento as importações e as exportações foram em quantidades iguais? Justifique a sua resposta.
Sim, no ponto determinado do gráfico as linhas de importação e exportações se encontram.

ii) Qual dos três gráficos apresenta maior período de estabilidade entre Janeiro(2010) e Julho(2010)? Justifique a sua resposta.
O gráfico da exportação pois ele é quase uma reta constante.

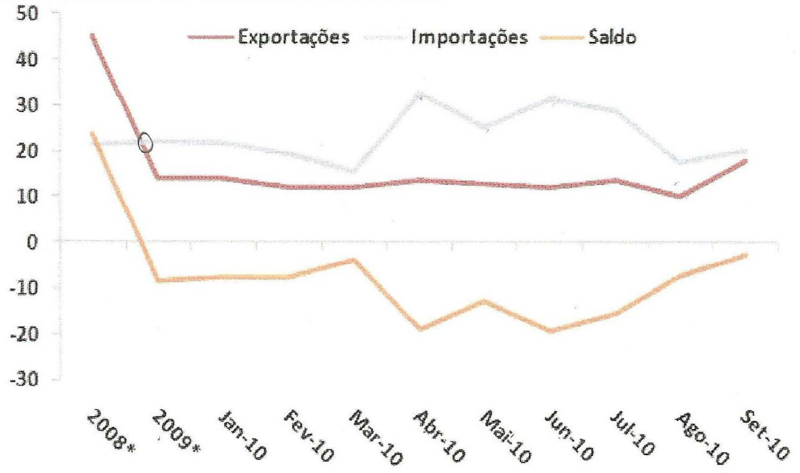
iii) No período de Agosto(2010) a Setembro(2010) qual possuiu maior crescimento: exportação ou importação? Justifique a sua resposta.
A exportação pois a reta do gráfico está mais inclinado e maior.

iv) Entre Março(2010) e Agosto(2010) houve um crescimento ou decrescimento nas importações de lácteos? Justifique a sua resposta.
Ocorreu crescimento e decrescimento mas, como mostra no gráfico, no, o valor fechou o mesmo antes de ter um novo crescimento.

Figura 37: Dia 1, problema 7, resolução do grupo 5.

Ainda em relação ao último problema apresentado no primeiro dia de aplicação das atividades, destaca-se a resolução elaborada pelo grupo 1. O grupo em questão sentiu a necessidade de apresentar um exemplo numérico extraído por observação no gráfico proposto, conforme a resposta do item (iii) na figura 38. Isso demonstra que para ocorrer a confirmação das hipóteses consideradas pelo grupo se fez necessário a utilização de uma representação expressa através de um cálculo para justificar o raciocínio. A elaboração e manipulação desse esquema não é tarefa trivial, pois deve-se extrair da representação gráfica os elementos necessários para elaborar a justificativa do argumento proposto por eles.

Problema 7: A representação gráfica a seguir apresenta a análise da balança comercial de lácteos do Brasil no ano de 2010.



*Média mensal
Fonte: Aliceweb/MDIC
Figura 1. Balança comercial de lácteos brasileira, em US$ milhões.
Fonte: http://www.cigeneticabovina.com.br/index.php?ref=04&id=1754

Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) Em algum momento as importações e as exportações foram em quantidades iguais? Justifique a sua resposta.

No período de 2009, pois as duas representações se encontram.

ii) Qual dos três gráficos apresenta maior período de estabilidade entre Janeiro(2010) e Julho(2010)? Justifique a sua resposta.

O período de exportações, pois está constante desde 2009 até julho de 2010.

iii) No período de Agosto(2010) a Setembro(2010) qual possuiu maior crescimento: exportação ou importação? Justifique a sua resposta.

Exportação teve maior crescimento, pois de 10 passou a 20, quando importação foi de 20 a 25, 5 a menos que exportação.

iv) Entre Março(2010) e Agosto(2010) houve um crescimento ou decrescimento nas importações de lácteos? Justifique a sua resposta.

Entre Março e Agosto o gráfico de importação cresce (março a abril e maio a junho) e decresce (abril a maio, junho e agosto) Como podemos observar na representação do gráfico.

Figura 38: Dia 1, problema 7, resolução do grupo 1.

O encerramento das atividades realizadas no primeiro dia nos leva a considerar a relevância que os problemas propostos possuíram para a apropriação dos conhecimentos matemáticos por parte da turma. Possibilitamos aos alunos o contato com situações-problema que serviram como referência para a construção, manipulação e desenvolvimento de esquemas, que segundo a teoria de Vergnaud são fundamentais para o sujeito apropriar-se dos conceitos matemáticos.

No momento em que os alunos elaboravam os seus esquemas, ocorreu a necessidade deles criarem representações semióticas que tornassem possível o entendimento do conceito de função como relação entre grandezas. Isso possibilitou a aprendizagem dos conceitos envolvidos pelos alunos, pois souberam manipular as representações semióticas criadas por eles. A discussão dos problemas em grupo favoreceu o confronto de hipóteses individuais com as dos demais colegas, possibilitando a reavaliação das ideias apresentadas caso fosse necessário.

No segundo dia de atividades foi abordada a função exponencial, adotando-se a investigação de problemas como o fio condutor das atividades. Os problemas propostos envolviam as situações: crescimento populacional, concentração de medicamento no sangue e valorização de um imóvel. Os problemas exigiam como pré-requisito que os alunos já tivessem se apropriado do conceito de variável abordado na primeira aula da sequência didática.

Diante dos problemas, os alunos deveriam, através da leitura e interpretação extrair as informações necessárias para a resolução das questões. A discussão em grupo também pode ser considerada um elemento importante para a aprendizagem, pois é o momento que os alunos possuem para apresentar aos colegas e seu ponto de vista e argumentar sobre as suas hipóteses levantadas individualmente.

O problema envolvendo crescimento populacional inicialmente causou algumas dúvidas, pois os alunos usaram o raciocínio da proporcionalidade para elaborar a expressão matemática. Essa conclusão foi obtida devido à representação incorreta que a turma fez dos termos “dobrar” e “triplicar”. Eles associaram imediatamente à noção de multiplicar por 2 e por 3 respectivamente, porém isso deveria estar de acordo com a tabela preenchida previamente. Os grupos deduziram, portanto que as funções eram $f(t) = 2.t$ ou como também escreveram $y = 2.x$ e $g(t) = 3.t$ ou ainda $y = 3.x$. Ao verificar esse erro conceitual, ocorreu a discussão de um exemplo, no qual detalhamos ao máximo o crescimento da população envolvida. Fez-se a construção de uma tabela expressando o número de indivíduos que estava em cada etapa. Todos os alunos participaram da construção do exemplo, percebendo que a função solicitada deveria possuir algum elemento relativo à potência de um número. Após essa discussão os grupos conseguiram obter as respectivas funções.

Destacamos aqui a resolução proposta pelo grupo 1, na qual verifica-se que após o grupo completar a tabela proposta na questão, e conseguir obter respectivamente cada uma das funções, a justificativa dada contempla o raciocínio que envolve a base que está na função exponencial. O argumento dado pelo grupo é que pelo fato de uma população "triplicar" e a outra "dobrar" tem um momento que é "natural" que uma ultrapassa a outra em quantidade de indivíduos, apesar de no início a que triplica estar em desvantagem. A noção conceitual envolvida para este tipo de argumento é muito ampla e exige que o aluno manipule esquemas com representações semióticas menos elementares, para chegar a essa conclusão.

Problema 1: Devido às doenças ocorridas em uma pequena cidade, serão utilizadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ para modelar o crescimento populacional dos ratos e das pessoas respectivamente, em um período entre 0 e 5 anos. Inicialmente, há 50000 ratos e 10000 pessoas. O pesquisador verificou que a cada ano que passa, a população de ratos *dobra* de tamanho e a as pessoas *triplica*. Vamos construir uma tabela para representar essa situação (pode deixar as potências indicadas):

Tempo(anos)	Nº de ratos		Tempo(anos)	Nº de pessoas
0	50000		0	10000
1	100.000		1	30.000
2	200.000		2	90.000
3	400.000		3	270.000
4	800.000		4	810.000
5	1600.000		5	2430.000

Vamos generalizar a ideia? Para uma quantidade de tempo qualquer, qual é a função que representa o número de ratos e qual a função que representa o número de pessoas dessa cidade? Quando o número de pessoas supera o número de ratos? Justifique a sua resposta.

$f(t) = 2^x . 50.000 =$ $\quad$ $g(t) = 3^x . 10000 =$

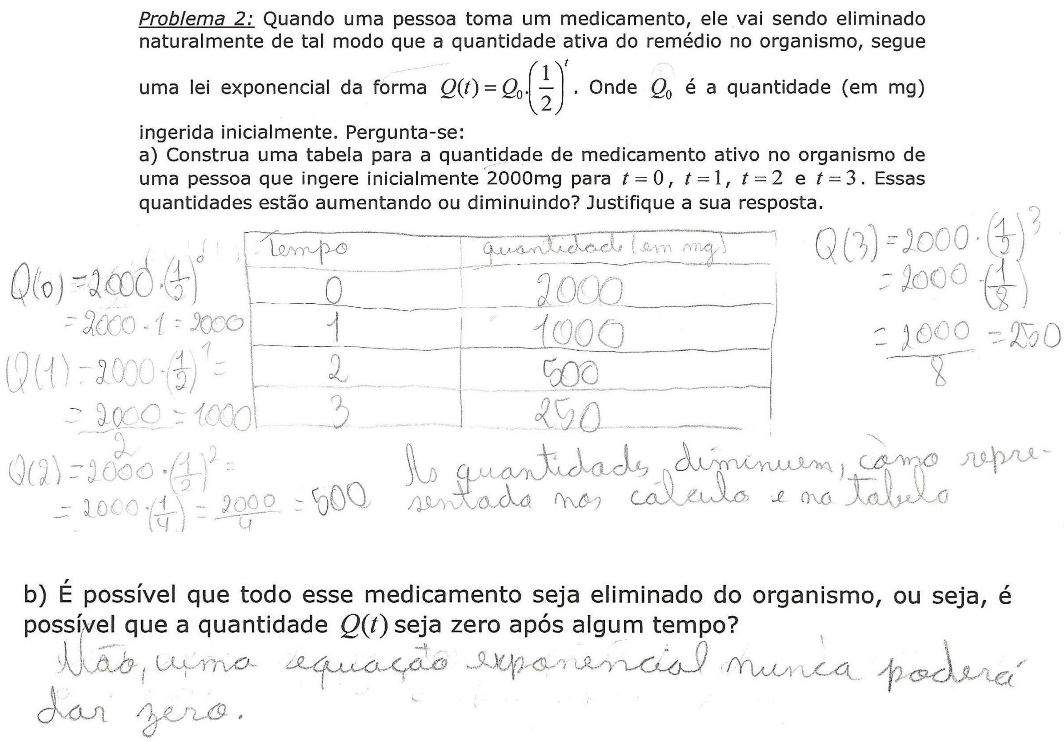
O nº de pessoas supera o nº de ratos no 4º ano, pois triplica a cada ano, enquanto o nº de ratos duplica.

Figura 39: Dia 2, problema 1, resolução do grupo 1.

O que se observa é que após a discussão realizada com o professor-pesquisador, em que se explorou com mais detalhes o problema de crescimento populacional, os alunos de todos os grupos, ou seja, a turma inteira conseguiu mobilizar as estruturas cognitivas necessárias para elaborar a solução do problema.

Na resolução do problema 2 referente à função exponencial, destacamos que os grupos conseguiram manipular a função apresentada na sua forma de representação algébrica, atribuindo valores e calculando quantidades sem precisar da intervenção do professor durante o processo. Isso mostra que a noção conceitual de variável já está assimilada pela turma, uma vez que o campo conceitual referente à variável foi amplamente desenvolvido no primeiro dia de atividades na sequência didática. A transformação que ocorre entre os esquemas cognitivos elaborados pelos alunos consiste em tornar possível a apropriação do conceito de função exponencial.

Destacamos a resolução proposta pelo grupo 1 para o problema. O grupo apresenta os cálculos e o desenvolvimento de uma tabela na qual é mostrada explicitamente a relação entre as grandezas tempo e quantidade. A organização dos valores na coluna do tempo demonstra que a ordenação da variável independente é um meio de demonstrar a organização do raciocínio. Ainda nota-se no item (b) do problema 2, que pelo fato de apenas ter abordado com a turma as funções exponenciais sem efeitos de translação vertical ou horizontal, a resposta dada pelo grupo 1 não levou em consideração efeitos de translação. Isso demonstra para o professor que ao trabalhar campos conceituais específicos, ele proporciona aos alunos evidenciar os esquemas cognitivos específicos do assunto abordado e contribui na criação das representações semióticas específicas do assunto, não ocorrendo eventualmente aos alunos descobertas matemáticas próprias durante a aula.



Problema 2: Quando uma pessoa toma um medicamento, ele vai sendo eliminado naturalmente de tal modo que a quantidade ativa do remédio no organismo, segue uma lei exponencial da forma $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Onde Q_0 é a quantidade (em mg) ingerida inicialmente. Pergunta-se:

a) Construa uma tabela para a quantidade de medicamento ativo no organismo de uma pessoa que ingere inicialmente 2000mg para $t=0$, $t=1$, $t=2$ e $t=3$. Essas quantidades estão aumentando ou diminuindo? Justifique a sua resposta.

$Q(0)=2000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2000\cdot 1 = 2000$

$Q(1)=2000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2000}{2} = 1000$

$Q(2)=2000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2000\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2000}{4} = 500$

tempo	quantidade (em mg)
0	2000
1	1000
2	500
3	250

$Q(3)=2000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2000\cdot\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2000}{8} = 250$

As quantidades diminuem, como representado nos cálculo e na tabela

b) É possível que todo esse medicamento seja eliminado do organismo, ou seja, é possível que a quantidade $Q(t)$ seja zero após algum tempo?

Não, uma equação exponencial nunca poderá dar zero.

Figura 40: Dia 2, problema 2, resolução do grupo 1.

Ainda com relação ao item (b) do problema 2, o grupo 5 destaca que não foi possível obter o tempo que tornasse zero a quantidade de remédio no organismo, pois após realizar alguns testes numéricos e considerando a possibilidade de generalização das contas efetuadas, o grupo concluiu que a quantidade sempre seria números da forma 0,000000... não podendo então chegar no “zero inteiro”.

b) É possível que todo esse medicamento seja eliminado do organismo, ou seja, é possível que a quantidade $Q(t)$ seja zero após algum tempo?

Não é possível, porque não existe um tempo onde a regra matemática não chega no zero inteiro.

Figura 41: Dia 2, problema 2, resolução do grupo 5.

A questão de valorização do imóvel foi considerada a pela turma a aplicação da função exponencial mais interessante, sendo que foi possível ainda fazer uma associação com a caderneta de poupança e os seus rendimentos. Inicialmente destacamos a resolução proposta pelo grupo 6, na qual os integrantes demonstraram o domínio do conceito de variável independente e conseguiram deduzir a expressão matemática para representar o valor do imóvel.

Problema 3: Um imóvel localizado em Caxias do Sul (RS) possui hoje uma avaliação de R$30000,00. O proprietário percebe que a cada ano que passa, o imóvel valoriza 10% do seu valor do ano anterior, devido ao aumento do bairro onde esse imóvel está localizado. Ele começa a fazer alguns cálculos matemáticos para analisar a possibilidade de vender esse imóvel daqui alguns anos e ganhar mais dinheiro com isso. Complete a tabela abaixo, que descreve a valorização desse imóvel em um período de 6 anos.

Tempo (anos)	Valor (R$)
0	R$30000,00
1	33000,00
2	36300,00
3	39930,00
4	43923,00
5	48315,30

Obtenha a expressão da função $V(t)$, que é a função que calcula o valor do imóvel em um determinado ano t. $V(t) = 30000 \cdot 1{,}1^{T}$

Pergunta-se:

a) Qual a variável independente da função $V(t)$?

A variável (t)

b) Em quanto tempo o imóvel estará valendo o dobro do que ele vale em $t = 0$?

$V_0 = 30.000$

$V_1 = V_0 + 10\% = 33000$

$V_2 = V_1 + 10\% = 36300$

$V_3 = V_2 + 10\% = 39930$

$V_4 = V_3 + 10\% = 43923$

$V_5 = V_4 + 10\% = 48315{,}3$

$V_6 = V_5 + 10\% = 53146{,}83$

$V_7 = V_6 + 10\% = 58461{,}51$

$V_8 = V_7 + 10\% = 64307{,}66$

$t = 8$

Figura 42: Dia 2, problema 3, resolução do grupo 6.

Na resolução do item (b) percebemos que o grupo 6 apresentou um esquema para explicar ao leitor a forma de obter o valor do imóvel quando a variável independente valer 8 anos. Nota-se que a lista de valores apresentados foi obtida através de uma sequência numérica iterativa, utilizando-se o valor anterior para obter o seguinte da sequência. A demonstração desse tipo de raciocínio envolve a ocorrência de inúmeros conceitos e teoremas em ação, onde a conversão e tratamento da informação ocorrem após já ter acontecido a formação de algumas representações semióticas para o assunto.

O raciocínio apresentado pelo grupo 3 para o mesmo problema consiste em continuar a construção da tabela de valores obtidos para o imóvel. Porém nota-se que o grupo afirma que o tempo procurado na questão é um valor entre 7 e 8 anos, pois o valor de R$60000,00 estará entre R$58461,51 e R$64307,66. No momento da aula questionou-se para o grupo 3 os motivos que tornaram possível essa conclusão. O argumento utilizado pelo grupo foi que o imóvel sempre se valoriza com uma porcentagem, logo se o imóvel assumir um valor maior entre dois outros valores dados, ocorre que entre o maior valor e o segundo maior da lista haverá uma desvalorização do imóvel, sendo isso um absurdo. Notamos que a apropriação desse tipo de argumento matemático pelos alunos é feito após mobilizar as estruturas cognitivas adequadas para organizar os esquemas e propriedades matemáticas previamente conhecidas e já representadas.

Obtenha a expressão da função $V(t)$, que é a função que calcula o valor do imóvel em um determinado ano t. $30.000 \cdot 1,1^{x}$

Pergunta-se:

a) Qual a variável independente da função $V(t)$?

Tempo

b) Em quanto tempo o imóvel estará valendo o dobro do que ele vale em $t = 0$?

Entre 7 e 8 anos, pois:

6 anos = 53146,83
7 anos = 58461,513
8 anos = 64307,6643

Figura 43: Dia 2, problema 3, resolução do grupo 3.

No terceiro dia de atividades foi apresentada a função logarítmica através de problemas que envolviam o estudo da escala Richter, o pH (potencial hidrogeniônico) de substâncias químicas e o crescimento de alguns tipos de plantas. Observamos que o conteúdo que envolvia os problemas despertou o interesse dos estudantes, pois eles não consideravam a possibilidade do logaritmo ser aplicado em diversas situações de utilidade no cotidiano. Essa foi a motivação para os alunos conceberem a importância do estudo dos logaritmos na escola.

De forma geral, todos os grupos apresentaram uma solução satisfatória para o problema da medição da escala Richter do terremoto. Os cálculos desenvolvidos pelos grupos demonstraram a organização dos conceitos e teoremas em ação necessários para a execução das tarefas. Apresentamos a resolução do primeiro problema proposto deste dia pelo grupo 3, destacando que as etapas de cálculo apresentadas demonstram a organização conceitual e a transição entre esquemas ocorre utilizando conceitos e teoremas em ação.

<u>Problema 1:</u> Leia o texto: *"A escala de Richter foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, ambos membros do California Institute of Technology, que estudavam sismos no sul da Califórnia (EUA), utilizando um equipamento específico – o sismógrafo Wood-Anderson. Após recolher dados de inúmeras ondas sísmicas liberadas por terremotos, criaram um sistema para calcular as magnitudes dessas ondas. A história não conservou o nome de Beno Gutenberg. No princípio, esta escala estava destinada a medir unicamente os tremores que se produziram na Califórnia.* Apesar do surgimento de vários outros tipos de escalas para medir terremotos, a escala Richter continua sendo largamente utilizada."

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

Usa-se a escala Richter para se determinar a intensidade dos terremotos que ocorrem no planeta. Essa escala numérica vai de 0 até $8{,}9$ que é o terremoto mais intenso que se tem notícia. A função usada para descrever esse fenômeno é dada por $I(E) = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$, onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora(kWh). Calcule a intensidade na escala Richter para as seguintes energias liberadas:

a) $E = 7.10^{9}$ kWh $I(7\cdot10^9) = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{7\cdot10^9}{7\cdot10^{-3}}\right) \to \frac{2}{3}\cdot\log_{10}(10^{12})$
$\frac{2}{3}\cdot 12\cdot\log_{10}(10) \to \frac{2}{3}\cdot 12\cdot 1 \to \frac{2}{3}\cdot 12 \to \frac{24}{3} = 8$

b) $E = 7.10^{7}$ kWh $I(7\cdot10^7) = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{7\cdot10^7}{7\cdot10^{-3}}\right) \to \frac{2}{3}\cdot\log_{10}(10^{10})$
$\frac{2}{3}\cdot 10\log_{10}(10) \to \frac{2}{3}\cdot 10\cdot 1 \to \frac{2}{3}\cdot 10 \to \frac{20}{3} \cong 6{,}66$

c) $E = 7.10^{5}$ kWh $I(7\cdot10^5) = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{7\cdot10^5}{7\cdot10^{-3}}\right) \to \frac{2}{3}\cdot\log_{10}(10^{8})$
$\frac{2}{3}\cdot 8\log_{10}(10) \to \frac{2}{3}\cdot 8\cdot 1 \to \frac{2}{3}\cdot 8 \to \frac{16}{3} \cong 5{,}33$

d) Se a energia liberada é cada vez maior nos terremotos, o que ocorre com o valor da sua escala Richter? Justifique a sua resposta.

Quanto maior for a energia liberada no terremoto, maior será a escala Richter, devido os cálculos acima.

Figura 44: Dia 3, problema 1, resolução do grupo 3.

O problema envolvendo o pH (potencial hidrogeniônico) de substâncias químicas foi considerado pela turma o mais interessante no terceiro dia de atividades, pois como os alunos são do curso médio integrado ao técnico de plásticos, a disciplina de química é uma das disciplinas mais importantes do seu currículo. Destacamos que a curiosidade dos alunos evidenciada pela situação apresentada nesse problema, fez com que a turma conversasse com a professora de química esclarecendo suas dúvidas e curiosidades sobre esse assunto. No currículo da escola, esse conteúdo é abordado com os alunos no segundo ano do ensino médio. Na resolução desse problema, verificamos que a apresentação de um texto informativo inicial possibilitou aos alunos conhecer um pouco sobre a origem do termo pH usado em cálculos químicos.

Apresentamos a resolução proposta pelo grupo 7 do problema, destacando as principais características observadas na resolução. Quando o grupo identificou a relação matemática para o cálculo de pH, iniciou os cálculos para descobrir quanto valia o pH de cada substância proposta. Para cada uma das substâncias dadas o grupo 7 evidencia as notações $P(10^{-4})$, $P(10^{-7})$, $P(10^{-12})$ e $P(10^{-8})$. Observa-se nessa ação que o grupo associa de forma correta a variável independente da função, calculando o valor do pH de cada solução. Essa identificação da variável independente pode ser associada com a formação do conceito de variável construído nas atividades da primeira aula da sequência.

A ocorrência de teoremas em ação é freqüente na resolução proposta pelo grupo 7, pois são utilizadas a definição e as propriedades dos logaritmos na resolução dos cálculos. Após obter valores de pH para cada substância, o grupo soube classificá-las de acordo com a definição do ponto de vista da química. Para realizar a classificação das substâncias percebe-se que já estava formado o conceito de ordenação pelos alunos, pois eles deveriam classificar observando as desigualdades > (maior) e < (menor).

Destacamos ainda a necessidade do grupo em mudar o esquema conceitual envolvido no cálculo do logaritmo. Quando o cálculo exigiu que os alunos soubessem o valor de $\log_{10}(10)$, eles recorreram para a equação exponencial $10^x = 10$ obtendo $x = 1$ para a resposta. Isso mostra a fluência entre os esquemas e representações desenvolvidas pelos alunos perante o problema, onde eles recorrem para outras formas de representação, que podemos considerar semióticas, com o objetivo de obter uma solução para o cálculo de logaritmo.

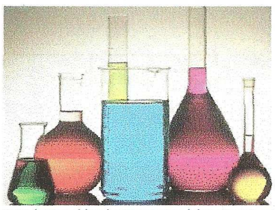
Quanto ao item (b) do problema 2 destacamos que ao representar os números 10^{-12} e 10^{-4} na sua forma decimal utilizando a transição entre representações semióticas distintas, o grupo procurou desenvolver uma forma para poder comparar essas duas quantidades. Ao transformar $10^{-12} = \left(\frac{1}{10}\right)^{12} = 0{,}1^{12} = 0{,}000000000001$ a cada sinal de igual observa-se a mudança na forma de representação semiótica para a quantidade 10^{-12} . Os alunos realizaram essas mudanças com o objetivo de visualizar qual o melhor critério de comparação que eles podiam usar. Quando eles representaram na forma decimal cada uma das quantidades puderam comparar satisfatoriamente os dois valores entre si e deduzir uma conclusão.

Problema 2: Leia o texto: *"**pH** é o símbolo para a grandeza físico-química **potencial hidrogeniônico**, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. O "p" vem do alemão potenz, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+)."*

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

O cálculo matemático para determinar o pH de um solução aquosa é dado pela relação $P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ onde H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \le pH \le 14$ Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

$P(10^{-4}) = -\log_{10} 10^{-4}$
$P(10^{-4}) = (-4) . -\log 10$
$P(10^{-4}) = (-4) . (-1)$
$P(10^{-4}) = 4$
Rosa é ácida



Fonte: http://solucoesqm.blogspot.com/

$P(10^{-7}) = \log_{10} 10^{-7}$
$P(10^{-7}) = (-7) . -\log 10$
$P(10^{-7}) = (-7) . (-1)$
$P(10^{-7}) = 7$
Verde é neutro

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

$P(10^{-12}) = -\log_{10} 10^{-12}$
$P(10^{-12}) = (-12) . -\log 10$
$P(10^{-12}) = (-12) . (-1)$
$P(10^{-12}) = 12$
Laranja é básico

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Rosa	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, efetuando alguns cálculos.

$P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$
$P(10^{-8}) = -\log_{10}(10^{-8})$
$P(10^{-8}) = (-8) . -\log 10$
$P(10^{-8}) = (-8) . (-1)$
$P(10^{-8}) = 8$

$10^x = 10$
$x = 1$

Azul é básica

b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrogeniônica? E a menor concentração? Justifique a sua resposta.

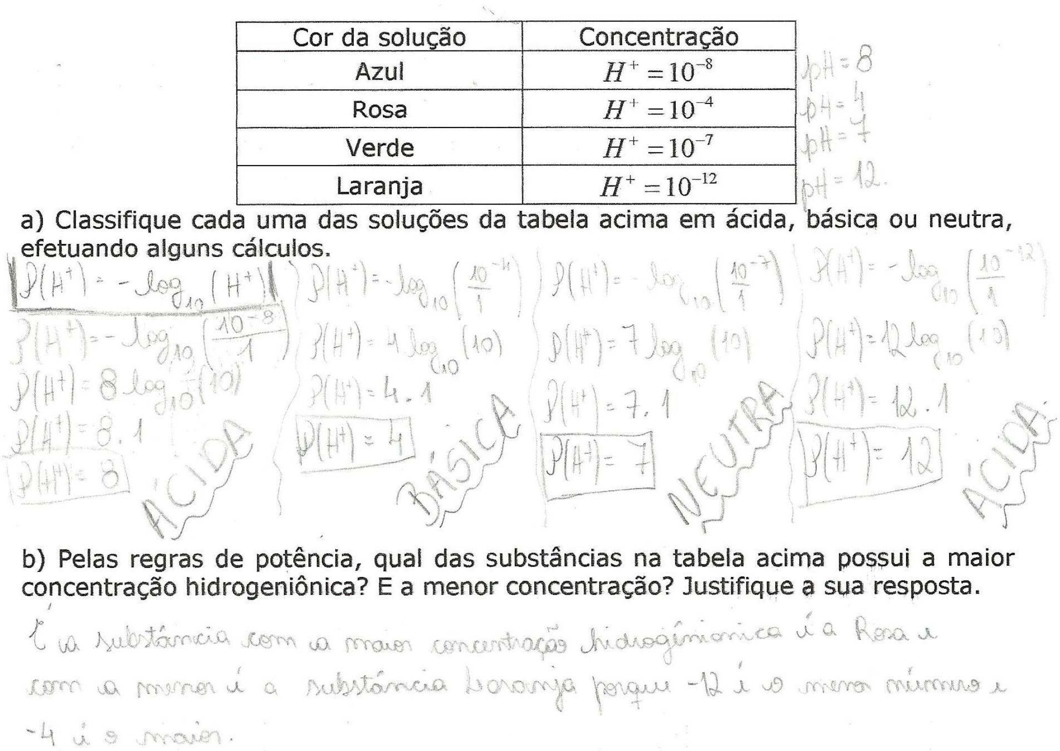
$10^{-12} = \frac{1}{10}^{12} = 0,1^{12} = 0,000000000001 \rightarrow$ Menor
Pois tem menos íons de H^+.

$10^{-4} = \frac{1}{10}^{4} = 0,1^{4} = 0,0001 \rightarrow$ Maior
Pois tem mais íons de H^+.

Figura 45: Dia 3, problema 2, resolução do grupo 7.

Diferentemente do grupo 7, a resolução apresentada pelo grupo 5 para o problema do pH envolve a observação de outras características. Nota-se que o grupo 5 não recorre para outra forma de esquema conceitual para o cálculo de $\log_{10}(10)$, uma vez que eles já haviam aprendido como obter o valor desse tipo de logaritmo escrito em base 10 em aulas anteriores à sequência didática.

Para a resolução do item (b), o grupo 5 estabelece uma comparação entre expoentes, sendo portanto considerado desnecessário a comparação entre as quantidades através de outras formas de representação. Isso demonstra a capacidade do grupo 5 em deduzir uma conclusão utilizando menos representações semióticas do que o grupo 7. Esse fenômeno é comum em sala de aula, pois cada aluno desenvolve a quantidade de representações semióticas que considerar mais adequado para efetuar as conversões entre os esquemas o mais natural possível, tornando eficaz a sua apropriação dos conceitos.



Cor da solução	Concentração	
Azul	$H^+ = 10^{-8}$	pH = 8
Rosa	$H^+ = 10^{-4}$	pH = 4
Verde	$H^+ = 10^{-7}$	pH = 7
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$	pH = 12.

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, efetuando alguns cálculos.

$p(H^+) = -\log_{10}(H^+)$

$p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-8}}{1}\right)$; $p(H^+) = 8\log_{10}(10)$; $p(H^+) = 8.1$; $\boxed{p(H^+) = 8}$ ÁCIDA

$p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-4}}{1}\right)$; $p(H^+) = 4\log_{10}(10)$; $p(H^+) = 4.1$; $\boxed{p(H^+) = 4}$ BÁSICA

$p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-7}}{1}\right)$; $p(H^+) = 7\log_{10}(10)$; $p(H^+) = 7.1$; $\boxed{p(H^+) = 7}$ NEUTRA

$p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-12}}{1}\right)$; $p(H^+) = 12\log_{10}(10)$; $p(H^+) = 12.1$; $\boxed{p(H^+) = 12}$ ÁCIDA

b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrogeniônica? E a menor concentração? Justifique a sua resposta.

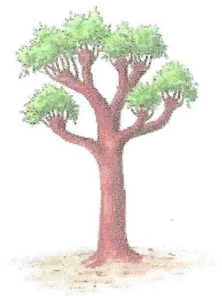
É a substância com a maior concentração hidrogiônica é a Rosa e com a menor é a substância Laranja porque -12 é o menor número e -4 é o maior.

Figura 46: Dia 3, problema 2, resolução do grupo 5.

O último problema apresentado no terceiro dia da sequência didática envolvia uma modelagem utilizando a função logarítmica para acompanhar a evolução da altura de um tipo de árvore. Destacamos a solução proposta por dois grupos, pois consideramos que as soluções apresentam por parte dos alunos o domínio de esquemas e relação entre as representações semióticas distintas.

O grupo 7 apresentou a conclusão para o item (a) após ter surgido uma impossibilidade algébrica no cálculo do logaritmo solicitado. Nota-se que a impossibilidade do grupo avançar no cálculo é decorrência das representações estabelecidas e da presença dos teoremas em ação envolvidos na situação. Na resolução do item (c) o grupo 7 recorreu para outra forma de esquema conceitual para obter o logaritmo, uma vez que já havia sido utilizada essa técnica no problema anterior. Destaca-se nessa resolução que o grupo conseguiu alcançar as expectativas esperadas e se apropriou dos conceitos matemáticos envolvidos.

Problema 3: Um biólogo ao estudar uma determinada espécie de árvore na Amazônia, modelou o crescimento dela de acordo com a relação $C(t) = 1 + 0{,}5\log_3(t-2)$, onde t representa o tempo em anos e $C(t)$ é a altura em metros.



Fonte: http://omundodasarvorestga.blogspot.com/

Pergunta-se:

a) É possível calcular o tamanho da árvore quando $t = 0$? Justifique a sua resposta.

$C(t) = 1 + 0{,}5 \log_3 (0-2)$

$C(t) = 1 + 0{,}5 \log_3 (-2)$

Não dá para ir adiante, pois o nº 2 é negativo, não tendo como obter o logaritmo

b) Qual o domínio matemático dessa função?

$t - 2 > 0$

c) Obtenha a altura da árvore quando $t = 11$ e $t = 29$. A altura diminui, aumenta ou permanece constante com o passar dos anos? Justifique a sua resposta.

$C(t) = 1 + 0{,}5 \log_3 (11-2)$

$C(t) = 1 + 0{,}5 \log_3 (9)$

$\log_3(9) = x$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

$C(t) = 1 + 0{,}5 \cdot 2$

$C(t) = 1 + 1$

$C(t) = 2$

$C(t) = 1 + 0{,}5 \log_3 (29-2)$

$C(t) = 1 + 0{,}5 \log_3 (27)$

$\log_3(27) = x$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$x = 3$

$C(t) = 1 + 0{,}5 \cdot 3$

$C(t) = 1 + 1{,}5$

$C(t) = 2{,}5$

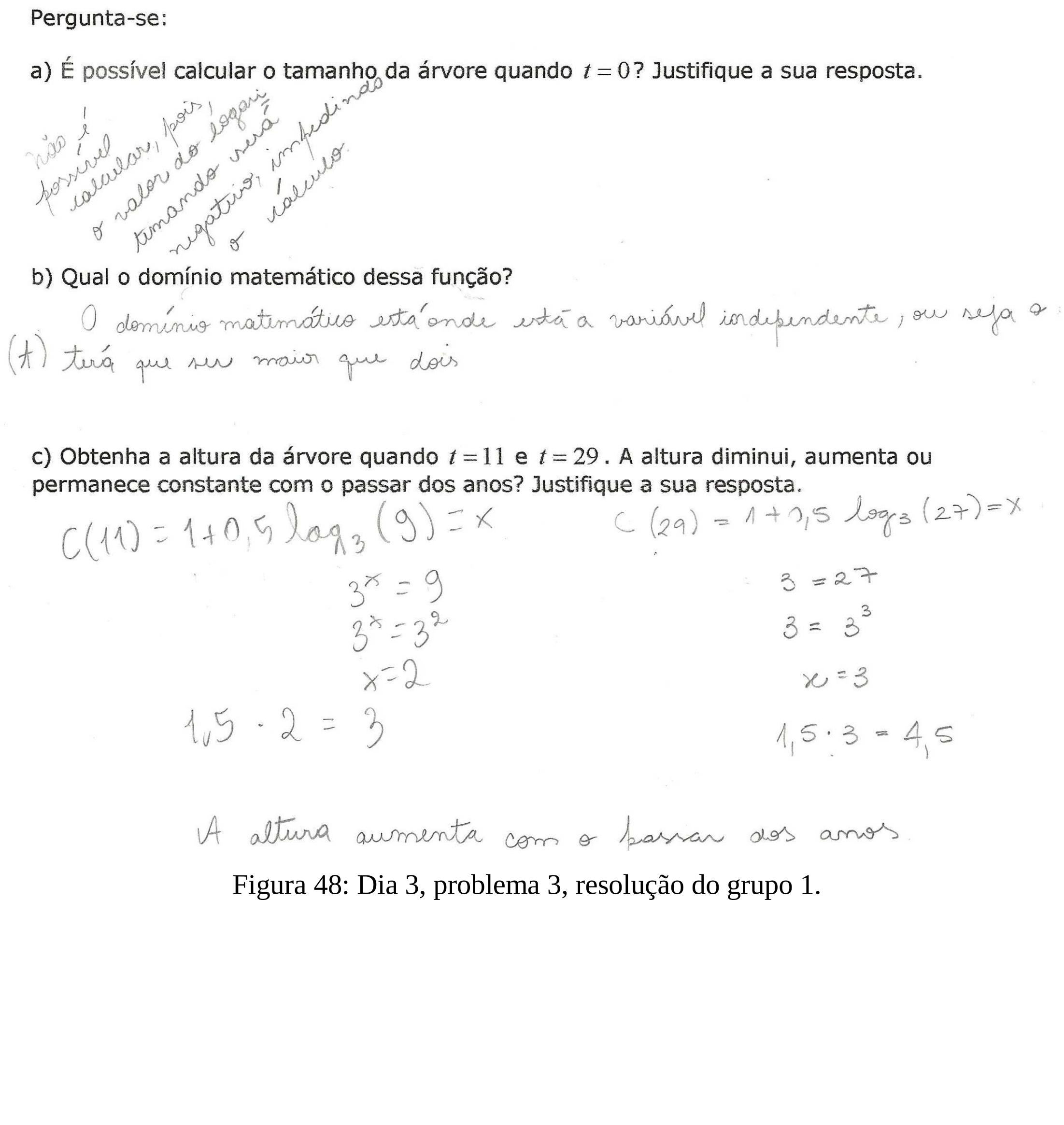
A altura aumenta com o passar dos anos.

Figura 47: Dia 3, problema 3, resolução do grupo 7.

Em comparação com a solução apresentada pelo grupo 7 está a proposta elaborada pelo grupo 1. Esse grupo conseguiu mobilizar estruturas cognitivas necessárias para responder os dois primeiros itens sendo considerado desnecessário explicitar o cálculo matemático. Porém observa-se na resolução do item (c) que a execução dos teoremas em ação falha após o grupo já ter feito o cálculo de cada logaritmo.

Com isso, eles recorreram para outras formas conceituais com a finalidade de obter o valor do logaritmo, na qual exigiu a formação de outras representações para a compreensão desse conceito. No momento de retornar ao esquema que já vinha sendo desenvolvido, o grupo se equivoca ao realizar a operação numérica entre os valores, sendo que eles fazem primeiro a soma para após multiplicar o resultado.

Uma possível justificativa para esse equívoco é que a representação da soma estava mais visível que a representação da multiplicação, logo o grupo 1 concebeu que a operação de soma deveria ser efetuada antes da operação de multiplicação. Não houve consulta aos esquemas e registros já apropriados para a execução das operações matemáticas elementares, implicando o erro do grupo na etapa final da resolução.



Pergunta-se:

a) É possível calcular o tamanho da árvore quando $t = 0$? Justifique a sua resposta.

não é possível calcular, pois, o valor do logaritmando será negativo, impedindo o cálculo.

b) Qual o domínio matemático dessa função?

O domínio matemático está onde está a variável independente, ou seja o (t) terá que ser maior que dois

c) Obtenha a altura da árvore quando $t = 11$ e $t = 29$. A altura diminui, aumenta ou permanece constante com o passar dos anos? Justifique a sua resposta.

$C(11) = 1 + 0,5 \log_3 (9) = x$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

$1,5 \cdot 2 = 3$

$C(29) = 1 + 0,5 \log_3 (27) = x$

$3 = 27$

$3 = 3^3$

$x = 3$

$1,5 \cdot 3 = 4,5$

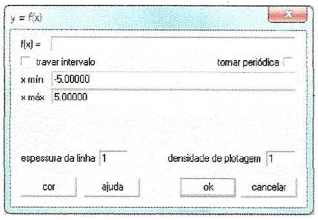
A altura aumenta com o passar dos anos.

Figura 48: Dia 3, problema 3, resolução do grupo 1.

No quarto dia de atividades da sequência didática os alunos foram envolvidos na construção dos gráficos referentes às funções exponenciais e funções logarítmicas utilizando o software *Winplot*. Acreditamos que essa atividade ao final da sequência proporcionou o fechamento da proposta apresentada, pois se partindo da apresentação de problemas envolvendo o cotidiano, conduzimos os alunos para a compreensão do conceito de função como relação entre grandezas e também para o reconhecimento do conceito de variável dependente e independente para somente no final propor a construção dos gráficos.

As atividades realizadas no laboratório de informática ocorreram durante dois períodos consecutivos, logo o tempo foi suficiente para os alunos realizarem as resoluções dos problemas. Os conceitos até agora trabalhados na sequência didática seriam evidenciados nesse dia, onde os alunos colocariam em prática os teoremas em ação necessários para a se apropriar dos conceitos presentes nos gráficos. Notamos que todos os grupos se envolveram na execução das atividades usando o *Winplot*, já que era a primeira vez que muitos dos alunos estavam aprendendo matemática através da informática como recurso. A análise das atividades desse dia consiste na apresentação da resolução proposta por alguns grupos, destacando os principais aspectos teóricos envolvidos. Nos anexos encontram-se alguns gráficos produzidos pelos grupos.

Atividade 1: Utilizando o software Winplot, na opção de janela 2D, ao pressionar o botão F1 do teclado, irá aparecer a seguinte janela:



O gráfico sumiu, pois com o parênteses o valor de - 3 assume um valor negativo na base.

No campo de digitação para a função $f(x)$, deve ser digitada a função $f(x)=3^x$. Observe que identificamos $y=f(x)$, pois não há diferença nessa representação. Atenção: para fazer o software "entender" que x deve ser um expoente, você deve digitar sempre antes do expoente o símbolo ^. Antes do "ok", altere a espessura da linha para 2, afim de proporcionar uma melhor percepção sobre essa representação gráfica. Em seguida, pressione o botão "ok". Visualize o que acontece. Pergunta-se: essa função apresenta um crescimento ou decrescimento? Justifique a sua resposta. Apresenta um crescimento; pois 3^x $3>0$

Na opção "editar" da janela de inventário, reescreva a função para $f(x)=(-3)^x$, utilizando os parênteses. Em seguida, pressione o botão "ok". O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Construa o gráfico da função $f(x)=-3^x$, sem atribuir os parênteses. O que aconteceu? Justifique a sua resposta. O gráfico apareceu, pois sem o parenteses o - 3, só assume valor negativo p/ ele, e não para a base.

Faça agora outras construções gráficas. Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x)=5^x$, $g(x)=7^x$, $h(x)=6^x$. Compare os quatro gráficos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

*"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função exponencial $f(x)=b^x$, com a base b **maior** que 1, o gráfico será côncavo para* cima *(cima/baixo). A função será* crescente *(crescente/decrescente), seu domínio é* todos *(todos/alguns) números reais e a sua imagem será o conjunto dos números reais* positivos *(positivos/negativos)."*

Figura 49: Dia 4, atividade 1, resolução do grupo 7.

A solução do problema 1 proposta pelo grupo 7 mostrada na figura anterior apresenta características importantes quanto à manipulação das representações semióticas criadas pelos alunos para resolver o problema. Notamos que eles conseguiram identificar através do esboço do gráfico produzido com o *Winplot*, as propriedades da função exponencial de base maior do que um. Ao questionar a construção do gráfico da possível função $f(x)=(-3)^x$, o grupo 7 mobilizou as representações semióticas das propriedades das potências anteriormente aprendidas juntamente com o conceito em ação de variável para chegar à conclusão que não era possível fazer o esboço desse gráfico, pois o sinal negativo tornaria a base da função negativa. Em nenhum momento o grupo considerou a hipótese do software estar com algum erro ou os dados de entrada digitados por eles estar errados. Nos que se refere às outras atividades desse dia, o grupo 7 alcançou as expectativas desejadas.

Na segunda atividade apresentamos a resolução dada pelo grupo 5. Esse grupo apresenta detalhadamente as características das funções aqui propostas para a construção do gráfico no *Winplot*. O detalhamento das observações feitas pelos alunos e as informações que eles descrevem nos leva a concluir que há o domínio do campo conceitual de funções por eles, onde diante da situação que são colocados, eles conseguem verificar e explicitar as propriedades que estão apresentadas na tela do computador.

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- decrescendo
- para cima
- D = todo o eixo x
- I = do 0 ao infinito

$g(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x$
- decrescendo
- para cima
- D = todo o eixo x
- I = do 0 ao infinito

$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
- decrescendo
- para cima
- D = todo o eixo x
- I = do 0 ao infinito

<u>Atividade 2:</u> Com as ferramentas já utilizadas no exercício anterior, vamos analisar agora mais um tipo de função exponencial. No campo de digitação para a função $f(x)$, deve ser digitada a função $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$. Antes do "ok", altere a espessura da linha para 2, afim de proporcionar uma melhor percepção sobre essa representação gráfica. Em seguida, pressione o botão "ok". Visualize o que acontece. Pergunta-se: essa função apresenta um crescimento ou decrescimento? Justifique a sua resposta. Está decrescendo pois a linha está caindo.

Na opção "editar" da janela de inventário, reescreva a função para $f(x)=\left(-\frac{1}{5}\right)^x$, utilizando os parênteses. Em seguida, pressione o botão "ok". O que aconteceu? Justifique a sua resposta. Não cria o gráfico porque é negativo o $\left(-\frac{1}{5}\right)$

Construa o gráfico da função $f(x)=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$, com o sinal negativo fora dos parênteses. O que aconteceu? Justifique a sua resposta. O gráfico foi criado, a concavidade é para baixo e ela está sendo contínua pelo número 1 do eixo e outra para baixo

Faça agora outras construções gráficas. Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{2}{7}\right)^x$, $h(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Compare os quatro gráficos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

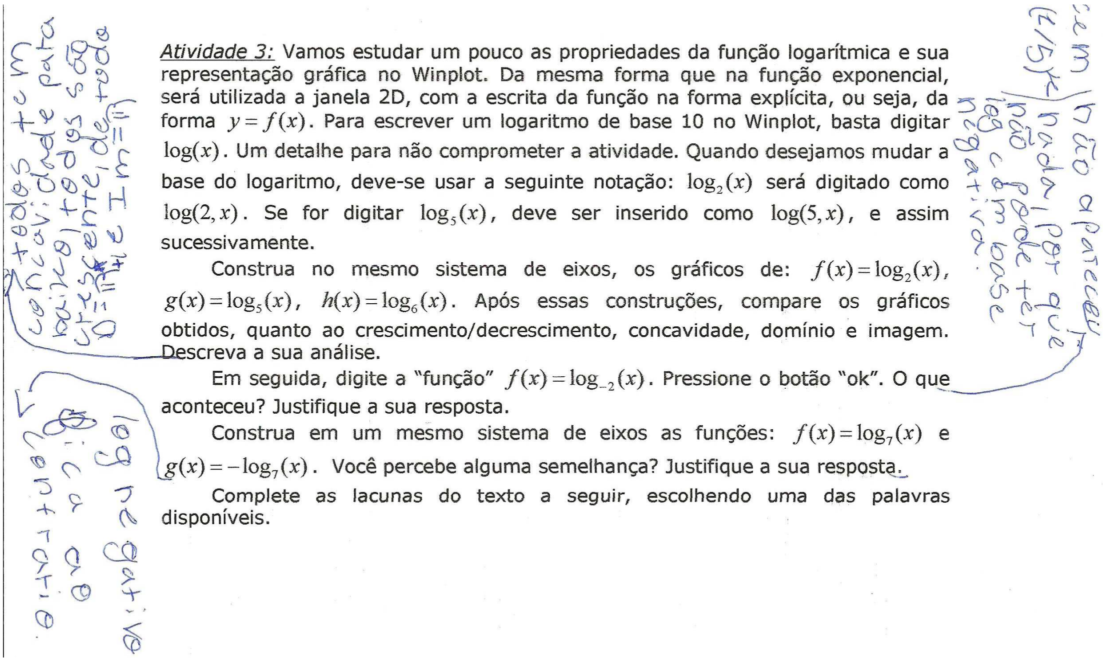
Complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função exponencial $f(x)=b^x$, com a base b ***menor*** *que 1, o gráfico será côncavo para* cima *(cima/baixo). A função é* decrescente *(crescente/decrescente), seu domínio será* todos *(todos/alguns) números reais e a sua imagem será o conjunto dos números reais* negativos *(positivos/negativos)."*

Figura 50: Dia 4, atividade 2, resolução do grupo 5.

Observamos ainda na atividade anterior a noção conceitual envolvida na explicação do grupo para a não criação do gráfico da função $f(x)=\left(-\frac{1}{5}\right)^x$. Os alunos raciocinaram observando que o sinal negativo estava presente na base da função, logo não era possível obter o gráfico, diferentemente quando a função analisada foi $f(x)=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$. Neste caso, eles observaram que foi possível construir o gráfico e que as características de crescimento e concavidade se alteravam. Isso demonstra por parte dos alunos o domínio do campo conceitual das propriedades que uma função possui. Foi percebido pelos alunos que uma alteração na forma algébrica de uma função pode alterar as características do gráfico dessa função.

Ao abordar a construção do gráfico da função logarítmica destacamos a resolução apresentada por dois grupos. Na primeira parte onde foi abordada a função logarítmica crescente que possui a base maior do que um, observamos que o grupo 6 destacou a diferença entre o logaritmo ser negativo e a sua ser negativa. Esses dois fatos explicam fenômenos distintos no esboço do gráfico. A referência "ao contrário" significa para o grupo "simétrico", no sentido que o gráfico fica refletido em relação ao eixo horizontal. Isso demonstra a manipulação explícita de esquemas conceituais para análise da situação proposta aos alunos.



Atividade 3: Vamos estudar um pouco as propriedades da função logarítmica e sua representação gráfica no Winplot. Da mesma forma que na função exponencial, será utilizada a janela 2D, com a escrita da função na forma explícita, ou seja, da forma $y = f(x)$. Para escrever um logaritmo de base 10 no Winplot, basta digitar $\log(x)$. Um detalhe para não comprometer a atividade. Quando desejamos mudar a base do logaritmo, deve-se usar a seguinte notação: $\log_2(x)$ será digitado como $\log(2,x)$. Se for digitar $\log_5(x)$, deve ser inserido como $\log(5,x)$, e assim sucessivamente.

Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \log_5(x)$, $h(x) = \log_6(x)$. Após essas construções, compare os gráficos obtidos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Em seguida, digite a "função" $f(x) = \log_{-2}(x)$. Pressione o botão "ok". O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Construa em um mesmo sistema de eixos as funções: $f(x) = \log_7(x)$ e $g(x) = -\log_7(x)$. Você percebe alguma semelhança? Justifique a sua resposta.

Complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

em todos tem concavidade para baixo, todos são crescente, domínio $\mathbb{R}^*_+$ e $Im = \mathbb{R}$

em não aparece nada, por que não pode ter log com base negativa.

log negativo é ao contrário.

Figura 51: Dia 4, parte 1 da atividade 3, resolução do grupo 6.

Ainda destacamos que o grupo 6 relatou nesse dia em aula que a característica de simetria não era somente percebida nas funções exponenciais e funções logarítmicas, pois ao trabalhar com funções de 2° grau (quadráticas) no início do ano, eles visualizaram propriedade semelhante ao colocar um sinal negativo na frente da função. Isso demonstra que os registros de representações semióticas desenvolvidos em atividades anteriores a essa sequência didática estavam sendo relembrados naquele momento.

Na segunda parte da atividade 3 analisamos a proposta elaborada pelo grupo 1. A identificação dos conceitos referentes ao domínio, imagem, concavidade, crescimento e decrescimento foram evidenciadas pelo grupo de forma correta, demonstrando a correta utilização dos esquemas conceituais já apropriados em atividades anteriores. Os esquemas produzidos e manipulados pelos alunos os conduzem para a correta conversão dos registros de representação envolvidos, logo para a aprendizagem dos conceitos de matemática.

"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função logarítmica $f(x) = \log_b(x)$, com a base b ***maior*** *que 1, o gráfico será côncavo para ________ (cima/baixo). A função é ____________ (crescente/decrescente), seu domínio será os números reais ___________ (positivos/negativos) e a sua imagem será __________ (todos/alguns) números reais."*

Agora, vamos colocar uma base no logaritmo que seja menor que 1. Construa o gráfico de $f(x) = \log_{1/5}(x)$. No Winplot, você deve digitar $f(x) = \log(1/5, x)$ para realizar essa construção. O que você observa sobre o crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem dessa função. Descreva a sua análise. Ela decresce, conçavidade para çima, o dominio são os reais positivo e a imagem são toda os reais.

Faça agora outras construções gráficas. Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x) = \log_{1/3}(x)$, $g(x) = \log_{2/5}(x)$, $h(x) = \log_{3/7}(x)$. Compare os quatro gráficos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Elas decrescem, concavidade para cima, com domínio dos reais positivos e imagem de todos os reais.

Para encerrar, complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função logarítmica $f(x) = \log_b(x)$, com a base b ***menor*** *que 1, o gráfico será côncavo para ________ (cima/baixo). A função é ____________ (crescente/decrescente), seu domínio será os números reais ___________ (positivos/negativos) e a sua imagem será __________ (todos/alguns) números reais."*

Figura 52: Dia 4, parte 2 da atividade 3, resolução do grupo 1.

No último dia ocorreu a realização da atividade avaliativa dos grupos, com o objetivo de verificar se eles se apropriaram dos conceitos de matemática abordados nos quatro dias da sequência didática. Os resultados obtidos pela turma com a avaliação alcançaram as expectativas planejadas inicialmente. Ressaltamos que a dificuldade apresentada pelos grupos foi na construção dos gráficos sem utilizar o software *Winplot*, destacando que neste momento eles tiveram que produzir esquemas conceituais novos para tratar da situação.

A elaboração de novos esquemas requer a organização dos alunos, pois através de representações extraídas de uma situação nova, os alunos devem organizar os registros das representações semióticas para conseguir realizar a conversão em registros que promovam a apropriação dos conceitos, ou seja, possibilite a aprendizagem de matemática. Ao longo da análise exposta aqui constatamos que a turma alcançou os objetivos inicialmente propostos pela sequência didática. Possibilitamos com essas atividades apresentar um conjunto de situações onde se manifestava o conceito de função, função exponencial e função logarítmica através de problemas presentes no cotidiano.

Do ponto de vista da teoria dos campos conceituais de Vergnaud o uso de problemas e situações em sala de aula implica para o aluno a elaboração de representações que então proporcionam o desenvolvimento de esquemas, que simbolizam a organização das representações extraídas do problema matemático. Essas representações, segundo Duval, são consideradas semióticas, pois através da interpretação, avaliação e organização das informações, os alunos manipulam os esquemas cognitivos para converter as representações em registros, ou seja, transformam as referências apresentadas em uma situação em significado e consequentemente em significante que é a fase final para a apropriação do conceito apresentado.

Após termos apresentado uma análise da produção da turma relacionando com a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e a teoria das representações semióticas de Duval, o mapa conceitual apresentado na figura 53 a seguir destaca as relações existentes entre a produção dos alunos durante a sequência de atividades e os aspectos teóricos envolvidos. Consideramos o mapa conceitual a seguir um recurso necessário para o leitor visualizar as conexões entre a fundamentação teórica adotada e a produção dos alunos. Salientamos que a cor amarela encontrada no mapa são as etapas das atividades propostas durante a sequência didática.

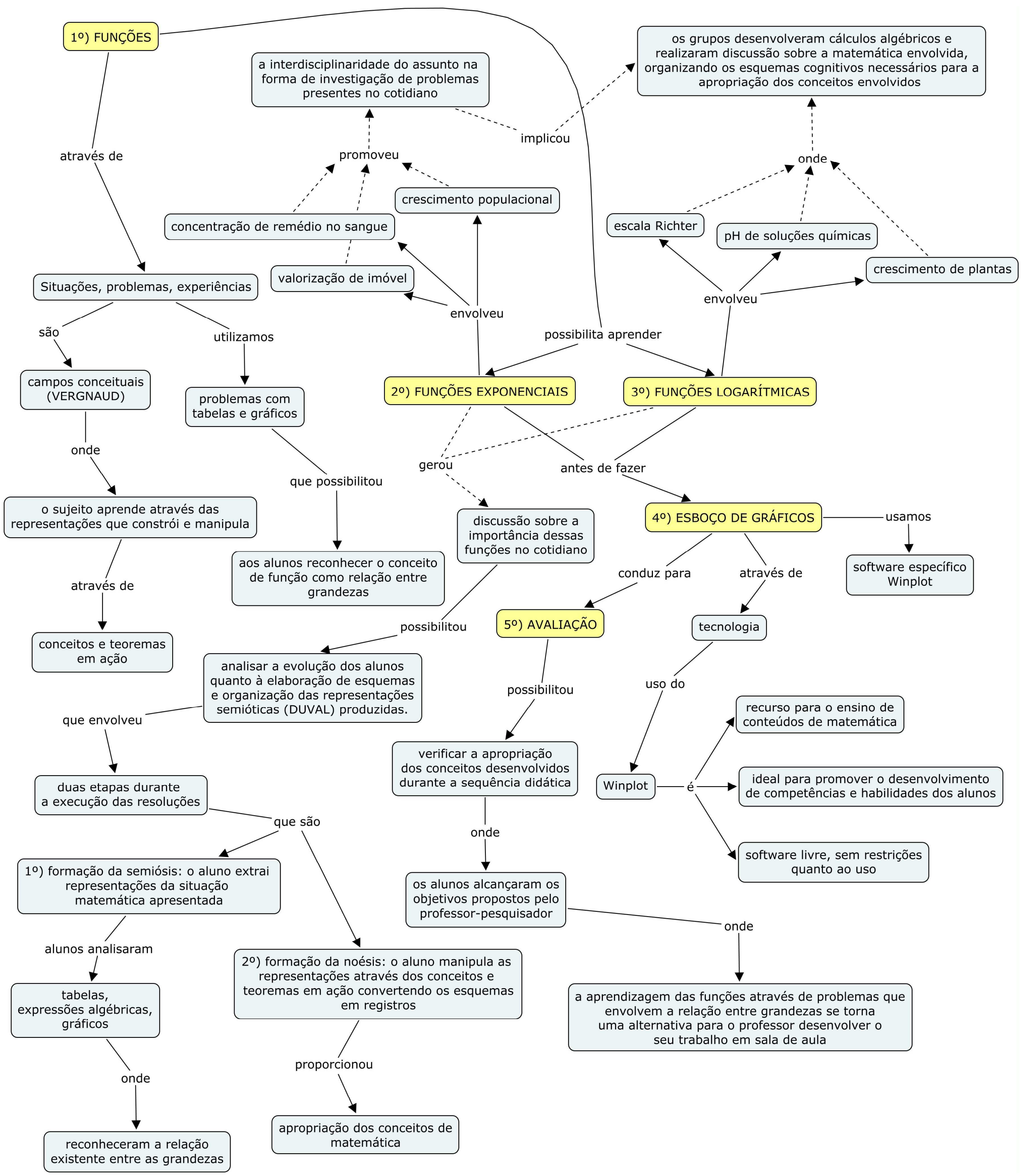


Figura 53: Mapa conceitual apresentando os resultados da análise da produção dos alunos.

6.2 Análise dos resultados individuais

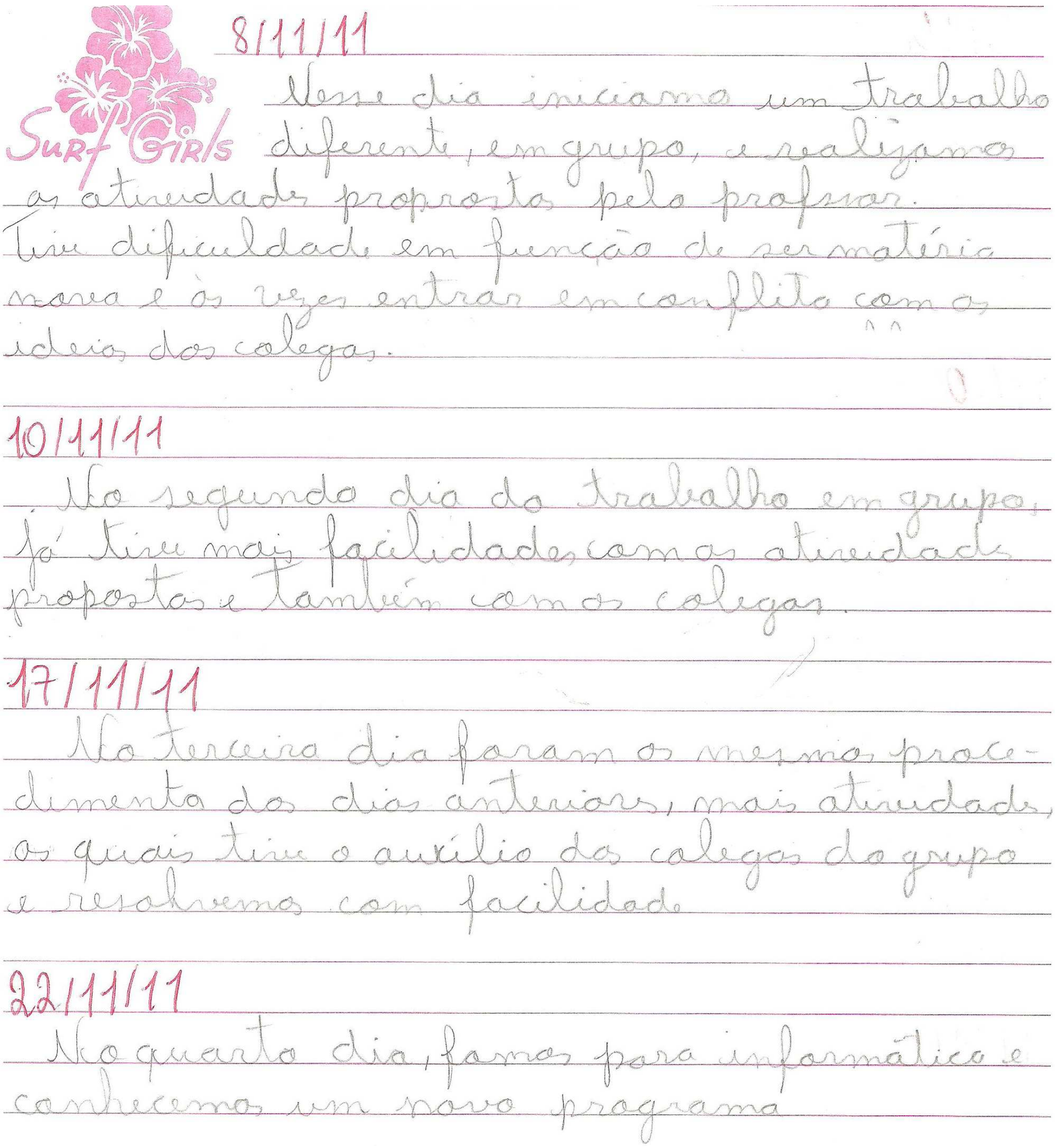
O portfólio individual foi uma tarefa sugerida para a turma com o objetivo de verificar a forma utilizada por eles no momento de expor as sua ideias no que se refere às aulas de matemática ocorridas. Em vista da pequena disponibilidade de tempo para a elaboração do portfólio em formato digital, os alunos se envolveram na criação do portfólio manuscrito. A aceitação da proposta pela turma foi grande, eles apenas consideraram estranho desenvolver esse tipo de trabalho na disciplina de matemática, pois não estavam acostumados com a proposta.

A apresentação da ideia sobre o portfólio foi realizada antes da aplicação da sequência de atividades, proporcionando aos alunos a possibilidade de produzi-lo durante o desenvolvimento das atividades. Porém, nota-se que a maioria dos trabalhos entregue pelos alunos apresenta uma resumida descrição das atividades propostas durante a sequência didática.

Poucos portfólios apresentam o desenvolvimento de conteúdos de matemática, fato justificado pela incompreensão dos alunos da estrutura que o portfólio deveria possuir. Destacamos três exemplos de portfólios produzidos, nos quais se faz uma análise sobre a apropriação dos conceitos matemáticos trabalhados em aula através da sequência didática sobre funções, funções exponenciais e funções logarítmicas. Os nomes dos autores dos portfólios serão omitidos durante a nossa análise.

A aluna X relata em seu portfólio brevemente cada uma das aulas em que foi desenvolvida a proposta da sequência didática. Percebe-se que no início do seu relato, que a proposta de atividade inicialmente pareceu estranha, uma vez que ela já estava acomodada em um sistema baseado em aulas de matemática tradicionais, no modelo em que o professor é um transmissor e o aluno é o receptor do conhecimento.

A partir do segundo dia, nota-se a diminuição da dificuldade em compreender as atividades propostas, demonstrada pela interação desenvolvida com os colegas de grupo. As relações estabelecidas durante a discussão no grupo possibilitam a organização das estruturas cognitivas de forma que o aluno tenha que se posicionar perante as indagações dos colegas, sustentando uma argumentação plausível de aceitação pelos demais. Percebe-se que a elaboração de representações através da interpretação das situações apresentadas possibilitou que essa aluna manipulasse esquemas conceituais e juntamente com o seu grupo de trabalho, criasse os registros necessários para a apropriação dos conceitos matemáticos.


Surf Girls

8/11/11

Nesse dia iniciamos um trabalho diferente, em grupo, e realizamos as atividades propostas pela professora. Tive dificuldade em função de ser matéria nova e às vezes entrar em conflito com as ideias dos colegas.

10/11/11

No segundo dia do trabalho em grupo, já tive mais facilidades com as atividades propostas e também com os colegas.

17/11/11

No terceiro dia foram os mesmos procedimentos dos dias anteriores, mais atividades, os quais tive o auxílio dos colegas do grupo e resolvemos com facilidade.

22/11/11

No quarto dia, fomos para informática e conhecemos um novo programa

Figura 54: Relato no portfólio da aluna X.

A aluna Y relata no seu portfólio a mesma dificuldade apresentada pela aluna X, pois o “não saber nada” mencionado por ela reflete a posição a posição de aluna passiva durante sua vida escolar. Ela manifesta ser necessário ter uma explicação do assunto antes de passar os exercícios. Isso demonstra a sua dificuldade em se deparar com situações novas, onde serão apresentados os conceitos através de problemas e situações. Neste caso, espera-se que ela perceba que o papel do professor é possibilitar através da orientação a organização dos esquemas conceituais necessários para manipular as representações extraídas das situações-problema.

No segundo dia de atividades percebe-se que ocorreu a diminuição das dificuldades apresentadas por ela no dia anterior, visto que o método das atividades propostas já estava assimilado. Neste momento, ocorre a cooperação mútua entre os alunos durante o momento da aula, proporcionando a organização das representações criadas com a finalidade de transformar em registros em apropriação dos conceitos. Percebemos que a aluna Y já parece concordar com a ideia de propor atividades e auxiliar conforme o andamento das mesmas. Neste momento, ela deixa para trás o modelo tradicional de ensino e se adapta às novas características metodológicas utilizadas em aula, partindo da concepção do uso de problemas para promover o ensino.

Ressaltamos ainda a contribuição verificada pelo uso do software *Winplot* em aula, evidenciado pelo relato da aluna Y, que o desenvolvimento das atividades envolvendo o esboço dos gráficos das funções exponenciais e funções logarítmicas juntamente com o reconhecimento das propriedades dessas funções foi obtido com sucesso. Isso demonstra que a mobilização dos esquemas cognitivos formados através das representações criadas nas situações apresentadas no *Winplot* foram essenciais para a apropriação das propriedades matemáticas envolvendo as funções exponenciais e logarítmicas.

8/11/11, terça-feira: Começamos uma nova atividade diferente em grupo, introduzindo a nova matéria, que seria funções logaritimicas, trabalhamos com alguns gráficos, tive dificuldade no início do projeto pois não sabia nada do assunto e algumas vezes minhas resoluções entravam em conflito com as dos meus colegas. Eu teria explicado o conteúdo antes de passar os exercícios.

10/11/11, quinta- feira: Este foi o segundo dia de trabalho em grupo, recebemos mais exercícios, mas desta vez com uma dinâmica um pouco diferente, tive menos dificuldades para realizar os exercícios. Se tivesse que explicar a matéria daria exercícios e auxilio para os alunos conforme solicitado.

15/11/11, terça-feira: Feriado!

17/11/11, quinta-feira: No terceiro dia de trabalho em grupo seguimos o mesmo modelo dos dias anteriores, me lembro que não tive dificuldades para realizar o mesmo já que tive ajuda dos meus amigos.

22/11/11, terça-feira: No quarto dia de trabalho conhecemos um programa diferente para realizar o estudo de funções, o Winplot, foi realmente proveitoso e útil, facilitou demais e eu não tive nenhuma dificuldade em realizar as atividades propostas e gostei muito do método do professor, ensinaria assim também.

Figura 55: Relato no portfólio da aluna Y.

O portfólio proposto pela aluna Z apresenta exemplos do conteúdo abordado durante a sequência didática, evidenciando a importância dada a ela para os exemplos de situações que possam ajudar o leitor na compreensão do conteúdo. Verifica-se com essa atitude a postura da aluna Z em organizar os seus esquemas conceituais, demonstrando a conversão de seus registros de representação em registros de apropriação através do uso de exemplos para explicar a matéria. De forma análoga a aluna Y, a aluna Z destaca a importância no uso do Winplot na apropriação das propriedades matemáticas presentes no gráfico da função exponencial e função logarítmica.

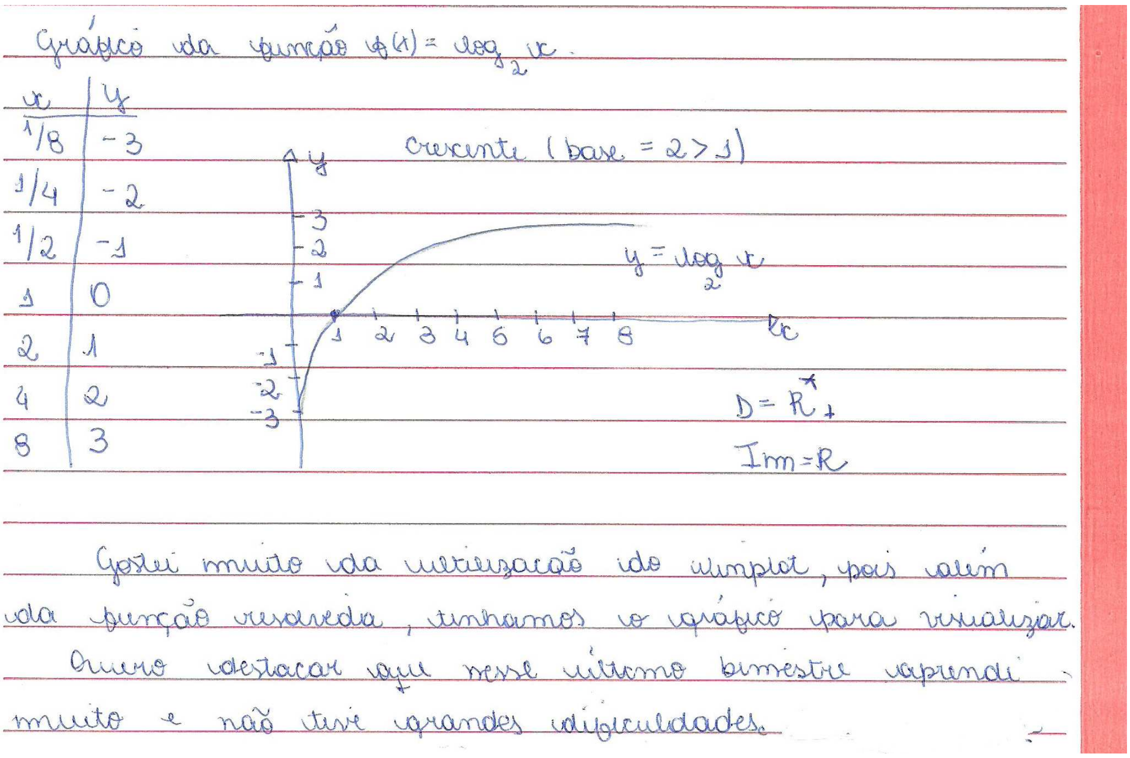


Figura 56: Relato no portfólio da aluna Z.

Logo, a análise dos portfólios individuais permite considerar que através da sequência de atividades proposta, ocorreu a mobilização de estruturas e esquemas cognitivos capazes de proporcionar a apropriação de conceitos matemáticos. Apesar de no início a proposta parecer estranha por parte dos alunos, logo os alunos consideraram que o trabalho desenvolvido em grupo e orientado pelo professor seria um recurso importante para aprender matemática.

6.3 Certezas e incertezas

Ao final da análise na produção feita pelos alunos, destacamos alguns aspectos positivos e negativos que ocorreram durante a aplicação a sequência didática.

Aspectos positivos:

- A disponibilidade da instituição de ensino em possibilitar e incentivar a realização da pesquisa;
- A participação integral dos alunos em todas as atividades propostas;
- As atividades proporcionaram o desapego do uso do livro didático em aula;
- A sequência didática proporcionou aos alunos uma visão mais ampla da importância do estudo das funções na escola, através da resolução de problemas;
- Ao realizar as tarefas em grupos, promovemos o diálogo entre os alunos durante o momento da aula, a fim de expor as suas hipóteses e confrontar com as ideias dos demais colegas;
- As atividades propostas destacaram para o grupo de alunos as competências e habilidades individuais de cada um, evidenciando o momento do aluno “se dar conta” do que está aprendendo;
- A elaboração do portfólio pelos alunos foi aceito integralmente pela turma utilizada na pesquisa e também foi considerada uma novidade para as aulas de matemática.

Aspectos negativos:

- Devido ao interesse demonstrado pela turma na proposta, o número de aulas para a aplicação das atividades deveria ser maior, sendo possível explorar mais situações-problema envolvendo os conceitos abordados;
- Após trabalhar com os problemas apresentados, os alunos poderiam participar juntamente com o professor na criação de situações envolvendo o uso das funções exponenciais e logarítmicas;
- A prática dos docentes de matemática se molda quase totalmente em aulas consideradas tradicionais, no modelo que considera o professor um transmissor do conhecimento para os alunos;

- Percebe-se que o uso intenso do livro didático em aula não proporciona ao aluno desenvolver uma visão crítica sobre os assuntos abordados, nem mesmo considera a possibilidade do aluno contribuir na sua própria formação.

Ressaltamos que o título da presente seção nos conduz a pensar na obrigatoriedade de obter certezas e incertezas ao final da análise da produção dos alunos. Na verdade a nossa análise serviu para apresentar uma nova abordagem para o assunto funções exponenciais e logarítmicas na escola, evidenciando que as dificuldades apresentadas pelos alunos muitas vezes está associada à metodologia utilizada pelo professor em sala de aula, na qual se prioriza a transmissão de conhecimento e se evita que os alunos desenvolvam tarefas em grupo com o objetivo de aprender matemática.

Nossa pesquisa mostrou que apresentar os conteúdos de matemática através de situações-problema privilegia o diálogo entre os alunos, onde eles podem construir suas hipóteses e verificar sua validade. Neste caso, o professor conduz o aluno durante o seu processo de aprendizagem, evidenciando os principais elementos matemáticos que devem ser extraídos das situações-problema apresentadas.

A pesquisa demonstra a possibilidade do professor que ler esse trabalho ir além das propostas sugeridas pelo livro didático durante as suas aulas. O reconhecimento das propostas nas diretrizes oficiais (PCN) conduz o docente para tornar a matemática da escola uma fonte de conhecimentos inesgotável para os alunos, desde que através da sua proposta metodológica o professor consiga mostrar aos alunos a importância que a matemática possui no âmbito da ciência.

Nas aulas de matemática, o que se nota é o professor iniciando a aula com os conceitos e definições, seguidos de exemplos e exercícios que são apenas reproduções de propriedades e relações. No próximo momento ocorre a apresentação dos problemas onde eventualmente são investigadas pelo professor e alunos as características mais interessantes presentes nas situações. Acreditamos que esse encaminhamento metodológico pode não proporcionar aos alunos a possibilidade de desenvolver o seu potencial matemático adequadamente, pois o ensino neste caso se caracteriza essencialmente pela transmissão do conhecimento pelo professor.

A presente pesquisa demonstrou que a apresentação de situações-problema envolvendo o conceito de função, funções exponenciais e logarítmicas juntamente com o desenvolvimento das atividades em grupo, possibilitou uma aula de matemática mais produtiva em termos de apropriação do conhecimento, pois os alunos interagiram entre si durante o encaminhamento das resoluções, confrontando hipóteses, evidenciando a formação e manipulação de esquemas e a construção dos registros de representações semióticas para os conceitos matemáticos.

Basso (2009, p.18) apresenta um esquema sugerindo uma possível ordem que os professores podem adotar ao criar o seu planejamento metodológico. A proposta desenvolvida nesta pesquisa de mestrado se encaixa nos moldes apresentado pelo esquema da figura abaixo, pois partimos da necessidade de resolver problemas para desenvolver com os alunos a investigação necessária para enfim apresentar os conceitos de matemática envolvidos. Percebe-se que desenvolver os conceitos de matemática utilizando essa maneira, desperta o interesse e curiosidade dos alunos em conhecer as aplicações da teoria matemática no cotidiano, tornando o momento da aprendizagem infinitamente melhor e com resultados qualitativos positivos.

Figura 57: Esquema metodológico proposto por Basso (2009, p.18).

7. Considerações finais

No início do texto apresentamos a questão norteadora para a presente pesquisa: "*Apresentar o conceito de função, a partir da análise de fenômenos e tabelas, envolvendo relações entre grandezas, contribui na compreensão e aprendizagem de funções logarítmicas e exponenciais?".*

Em busca de uma resposta, positiva ou não, para a questão norteadora, elaborou-se a sequência didática aplicada e analisada nessa dissertação. Ao final do trabalho, pode-se concluir que as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos relacionados com funções está ligada à forma como esse conteúdos são levados pelo professor até os alunos. Seguir o roteiro de atividades dispostas em um livro didático não torna uma aula de matemática qualitativamente produtiva, pelo contrário, desmotiva e passa a impressão para os alunos de que a matemática é uma disciplina difícil e complicada de entender.

Percebe-se que o processo de aprendizagem está ligado à forma que o professor dá para a matemática que vai ser apresentada aos alunos. A forma está associada à maneira como o professor vai tornar o conteúdo matemático possível do aluno extrair os símbolos necessários para a formação de esquemas, que serão organizados através de conceitos e teoremas em ação, tornando as relações entre as representações possíveis de formar um registro para a apropriação dos conceitos. Ao compreender a forma de apresentar o conteúdo, o professor está organizando quais campos conceituais e experiências são relevantes para o estudo de determinado assunto.

No início das atividades da sequência didática quando os alunos se depararam com as situações inéditas, percebemos que o desenvolvimento da sequência didática seria difícil, pois eles estavam acostumados com um modelo de aula de matemática considerada tradicional. Essas dificuldades foram percebidas através da análise dos portfólios individuais. Ao propor a realização das atividades em grupo, criamos um ambiente propicio de interação entre os alunos, possibilitando que as discussões entre eles também fosse um elemento importante para a sua aprendizagem. A discussão em grupo possibilita aos alunos o momento de troca de informações, eles podem evidenciar, confrontar e justificar as suas hipóteses individuais perante o grupo.

A formação de representações semióticas durante as atividades pelos alunos ocorreu de forma natural e através dos problemas propostos a cada dia da sequência didática foi possível ter a aprendizagem de matemática. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais é explicita a sugestão dada aos professores de que em suas aulas eles devem proporcionar aos alunos o contato com a aplicação da matemática como ciência capaz de resolver problemas, em vez de somente valorizar as manipulações algébricas.

Destacamos que essa pesquisa vem contribuir juntamente com os estudos já apresentados na seção 3.1.3 no âmbito da educação matemática, no sentido de proporcionar aos colegas professores uma alternativa para o trabalho que envolve as funções exponencias e funções logarítmicas. A análise feita nos livros didáticos, usualmente utilizados nas instituições de ensino, indicam a carência de propostas que envolvem o assunto funções exponenciais e logarítmicas de forma mais satisfatória, capaz de envolver o aluno em situações-problema onde ele aprende conceitos de matemática.

O esquema capaz de resumir os aspectos metodológicos assumidos nessa pesquisa foi mostrado anteriormente na figura 57, onde salientamos que a escolha de tornar a sequência didática uma oficina para a resolução de problemas, foi o elemento motivador para a apresentação e discussão dos conceitos matemáticos.

Ao trabalhar os gráficos e suas propriedades dessas funções utilizando o software *Winplot*, destaca-se que o envolvimento dos alunos com a proposta foi maior do que se tivéssemos feito o contrário: apresentar a função inicialmente para depois analisar a sua representação gráfica. Quando os alunos tiveram inicialmente contato com os problemas, eles perceberam a importância de aprender a matemática capaz de resolver cada situação, motivando-se em busca de uma solução.

E finalmente, destacamos que a proposta de atividades aqui apresentada não constitui um material pronto e acabado, é apenas um modelo de proposta que os demais colegas professores podem programar na sua aula de matemática. Os problemas podem ser reformulados e adaptados conforme a necessidade e o interesse da turma que estão sendo utilizados. Basta o professor adaptar conforme a sua realidade escolar!

Referências

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S.. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. 2008. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/13031/12137&sa=U&ei=558VT4vON4_CgAfz3tG_Aw&ved=0CBQQFjAA&usg=AFQjCNEozUOBLWI-nxvoiiRbri1RCr9pkg . Acesso em 05/01/2012.

ANDRADE, L. S.; KAIBER, C. T.. Registros de representação semiótica e o estudo das funções. Artigo. 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII CIAEM. Recife, 2011. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1010/283 . Acesso em: 20/11/2011.

ANTON, H. **Cálculo: um novo horizonte**. V. 1. 6º edição. São Paulo: Bookman Companhia Editora, 2007.

ARAUJO, C.; BONATTO, D.; MILANI, R.. **Diferentes abordagens para o ensino e a aprendizagem de funções exponenciais.** Artigo, 10º Encontro Nacional de Educação Matemática, X ENEM. Salvador, BA. 2010. Disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br/xenem/artigos/MC/T11_MC948.pdf . Acesso em 20/10/2011.

ARDENGHI, M. J.. **Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 à 2005 no Brasil.** Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo, 2008. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos_jose_ardenghi.pdf . Acesso em: 20/09/2011.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUM, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996. p.193-217.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para licenciatura.** 2º edição revisada e ampliada. Editora Edgar Blücher. São Paulo, 2005.

BARROSO, J. M.; & Colaboradores. **Conexões com a matemática**. Volume 1. 1º edição. Editora Moderna. São Paulo, SP. 2010.

BASSO, M.V.A. **Palestra Matemática na Escola: Experiências e Perspectivas.** Mesa Redonda Ciência - Formação aos professores da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~mbasso/apresentacoes/expmat_SMED2009.pdf . Acesso em 31/01/2012.

BIANCHINI, E., PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. Volume único, 3º edição. Moderna. São Paulo: 2003.

BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1º Edição. Editora CRV. Curitiba, 2009.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. **Coleção Matemática Completa, 1º série do ensino médio**. 2º edição renovada, São Paulo, FTD, 2005.
BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2º edição. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasília, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf . Acesso em 12/09/2011.

________. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em: 12/09/2011.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUM, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996. p.35-113.

CALLIARE, L. R.; LOPEZ, L. F. **Matemática Aplicada na Educação Profissional**. Ensino médio técnico. Base Editorial. Curitiba, PR. 2010.

CARRAHER, T. N. **O método clínico: usando os exames de Piaget**. Editora Vozes. Petrópolis, 1983.

CASTRO SANTOS, A. T.. **O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra.** Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo, 2008. Disponível:http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/adriana_tiago_castro_santos.pdf . Acesso em: 20/09/2011

DANTE, L. R. **Matemática – 1º Série**. 1º edição. São Paulo: Ática 2006.

________. **Matemática – 2º Série**. 1º edição. São Paulo: Ática 2006.

________. **Matemática – Contexto e aplicações**. 2º edição. São Paulo: Ática 2007.

DE BONA, A. S. Portfólio de matemática : um instrumento de análise do processo de aprendizagem. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Porto Alegre, 2010. Disponível em : http://hdl.handle.net/10183/278977 . Acesso em: 20/09/2010.

DUVAL, R. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993.

________. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?** Recherches en Didactique Mathématiques (RDM), v 16, n3, p. 349-382. 1996.

________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p.11-33, 2003.

________. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu de Silveira. 1º Ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FALCÃO, J. T. R. **Psicologia da Educação Matemática, uma introdução**. Coleção tendências em educação matemática. Belo Horizonte. Autêntica: 2003.

FIORENTINI, D.; LORENZATO S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos**. 3° edição revisada. Campinas. Autores Associados, 2009.

FLICK, U. Desenho da pesquisa qualitativa. 1º Ed. Porto Alegre, Artmed, 2009.

FREDERICO, P. R.. **Logaritmos, maravilhosos logaritmos pra sempre**. Universidade do Extremo Sul Catarinense, UNESC. Curso de Especialização “Lato Sensu” em Educação Matemática. Criciúma, 2008. Disponível em: http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000039/00003925.pdf . Acesso em 20/09/2011.

FURTH, H. G. **Piaget for theachers**. Englewood Cliffs, N. J. Prencite-Hall, 1970.

GOLDSTEIN, L.J.; LAY, D. C.; SCHNEIDER, D. I. **Matemática Aplicada. Economia, administração e contabilidade.** Tradução de Heloísa Bauzer Medeiros. 10º edição. Porto Alegre, Bookman, 2007.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Matemática**. Volume único. 3º ed, Atual. São Paulo. 2003.

________. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos, funções. São Paulo: Atual, 2004. Vol. 1.

JAKUBOVIC, J.; TROTTA, F.; IMENES, L. M. P. **Matemática Aplicada, 1º série, 2º grau.** Editora Moderna. São Paulo, 1979.

LIMA, E. L. **Curso de Análise, volume 1.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 2004.

________. **Logaritmos.** Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol 1. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LISZKA, J.J. **A General Introduction to the Semeiotic of Charles Sanders Peirce.** Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press. 1996.

MERICHELLI, M. A. J. ; ALLEVATO, N. S. G.. **O ensino dos logaritmos em uma turma do ensino médio.** Artigo, 10º Encontro Nacional de Educação Matemática, X ENEM. Salvador, BA. 2010. Disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br/xenem/artigos/CC/T11_CC1108.pdf . Acesso em 20/10/2011.

NÖTH, W. **Panorama da Semiótica: de Platão a Peirce.** São Paulo: Annablume. 1995.

PAIVA, M. **Matemática, volume 1**. 1º edição. Editora Moderna. São Paulo, SP. 2009.

PAULO, S.. **Caderno do professor: matemática, ensino médio – 1ª série, 3º bimestre.** Coordenação geral: Maria Inês Fini. São Paulo, SEE, 2008.

RÊGO, R. G.. **Um estudo sobre a construção do conceito de função.** Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN. Tese de Doutorado em Educação. Natal, 2000.

RESENDE, L. M. G. **Paradigma e trabalho pedagógico.** In: Aprendizagem e trabalho pedagógico. TACCA, C. V. R. (org.). Campinas. Ed. Alínea. 2006.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. Lições do Rio Grande: livro do professor**. Caderno pedagógico de Matemática, da 5º série do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio**. Porto Alegre: SE/DP, 2009. Vol.4.

________. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. **Lições do Rio Grande: Matemática e suas tecnologias.** Porto Alegre: SE/DP, 2009.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. Brasiliense. São Paulo. 1983.

SANTOS. D.. **Gráficos e Animações: uma estratégia lúdica para o ensino-aprendizagem de funções**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29993 . Acesso em: 20/01/2012.

SILVA JÚNIOR, G. B.; GAZIRE, E. S.. **Ensino de Biologia e Matemática: possibilidades de influências mútuas.** Artigo. 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII CIAEM. Recife, 2011. Disponível em: http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/701/930. Acesso em 20/11/2011.

SOUZA, C. V.. **A função exponencial no caderno do professor de 2008 da secretaria do estado de São Paulo, análise das atividades realizadas por alunos da 2º série do ensino médio.** Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo, 2010.

Disponível: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/claudia_vicente_souza.pdf . Acesso em: 20/09/2011.

TOGNI, A. C.. **Construção de funções em matemática com o uso de objetos de aprendizagem no ensino médio noturno**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Tese de Doutorado em Informática na Educação. Porto Alegre, 2007. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/13291 . Acesso em: 20/01/2012.

VERGNAUD, G. **A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems.** In: CARPENTER, T., MOSER, J. & ROMBERG, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erbaum. 1982. p. 39-59.

________. **La théorie des champs conceptuals. Récherches em Didactique dês Mathématiques.** 1990. p. 133-170.

________. **Multiplicative conceptual Field: what and why?** In GUERSHON, H. and CONFREY, J. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N. Y.: State University of New York Press. 1994. p. 41-59.

________. **A teoria dos campos conceptuais.** In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes pedagógicos, p.155-191. 1996.

________. **A comprehensive theory of representation for mathematics education.** Journal of Mathematical Behavior, p. 167-181. 1998.

________. **Qu'est-ce que la penseé? dans les actes du Colloque: Qu'est-ce que la penseé?** Suresne, Laboratoire De Psychologie Cognitive et Activités Finalissés, Université Paris VIII, p.1-28. 1998.

VEEN, W.; VRAKKING B. **Homo Zappiens: educando na era digital**. Trad: Vinicius Figueira. Porto Alegre. Artmed: 2009.

Apêndices

Apêndice 1 - Atividades aplicadas aos estudantes

Nesta seção estão apresentadas todas as atividades aplicadas com os alunos em sala de aula durante a sequência didática. As atividades estão no seu formato original, os materiais podem ser reproduzidos e utilizados em aula, sendo, portanto uma referência disponível para auxiliar outros professores em sua prática docente na escola. Destacamos que o texto dessa pesquisa constitui-se de duas partes: a primeira consiste em apresentar a pesquisa realizada, fundamentando teoricamente e analisando os dados obtidos da aplicação das atividades; a segunda parte consiste no conjunto de atividades apresentadas aos alunos, onde o professor pode “destacar” esse material para ser utilizado em sala de aula.

As atividades podem ser aplicadas em seu formato original ou podem sofrer as modificações necessárias proposta pelo professor que as utiliza. As atividades não constituem um conjunto de problemas fixos e não modificáveis, cabe ao professor que as utiliza verificar as adequações necessárias para o seu uso em sala de aula. Ao final de cada dia de atividades propostas, apresentamos um guia com algumas sugestões de como o professor pode apresentar os problemas em suas aulas.

Dia 1 – conceitos iniciais sobre funções através de problemas

Objetivos: Através de problemas práticos, será mostrado aos alunos que a relação que existe entre grandezas é chamada de função. Usa-se tabelas e representações gráficas para se apresentar os problemas. A noção de variável dependente e independente é utilizada na resolução dos problemas 1, 2, 3 e 4. Com esses problemas, espera-se que os alunos percebam que a noção de função está presente em situações do cotidiano e que o estudo desse assunto na disciplina de matemática é fundamental para compreender os fenômenos que os cercam no cotidiano.

Problema 1: Uma pessoa aplica hoje em fundo de investimento R$10,00 e a cada dia que passa, o seu saldo na conta bancária é verificado de acordo com a tabela:

Tempo(dias)	Saldo (R$)
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
.	.
.	.
.	.
x	$S(x) = ?$

Após x dias, qual a expressão matemática $S(x)$ que pode representar a quantidade de dinheiro que essa pessoa possui?

obs.: a quantidade x é chamada de variável ____________________
a quantidade $S(x)$ é chamada de variável ____________________

Problema 2: Na tabela a seguir, é apresentado o número de pessoas que chegam em um show, com o passar do tempo.

Tempo (horas)	Número de pessoas
1	1000
2	2000
3	6000
4	8000
.	.
.	.
.	.
t	$P(t) = ?$

Após t horas, qual a expressão matemática $P(t)$ que pode representar o número pessoas que já chegou para o show?

obs.: a quantidade t é chamada de variável _____________________
a quantidade $P(t)$ é chamada de variável _____________________

Problema 3: A tabela abaixo representa a variação do número de bactérias em uma fatia de pão deixada sobre uma mesa em um dia quente:

Tempo (horas)	Número de bactérias(nº de indivíduos)
0	1
1	100
2	10000
3	1000000
4	100000000
.	.
.	.
	.
t	$N(t)=?$

Após t horas, qual a expressão matemática $N(t)$ que pode representar o número de bactérias encontradas nessa fatia de pão?

obs.: a quantidade t é chamada de variável _____________________
a quantidade $N(t)$ é chamada de variável _____________________

Problema 4: A tabela abaixo apresenta o valor pago por um empresário que utiliza o serviço de táxi para realizar visitas aos seus fornecedores de matéria prima. Ele sempre percorre uma quantidade inteira de quilômetros a cada deslocamento.

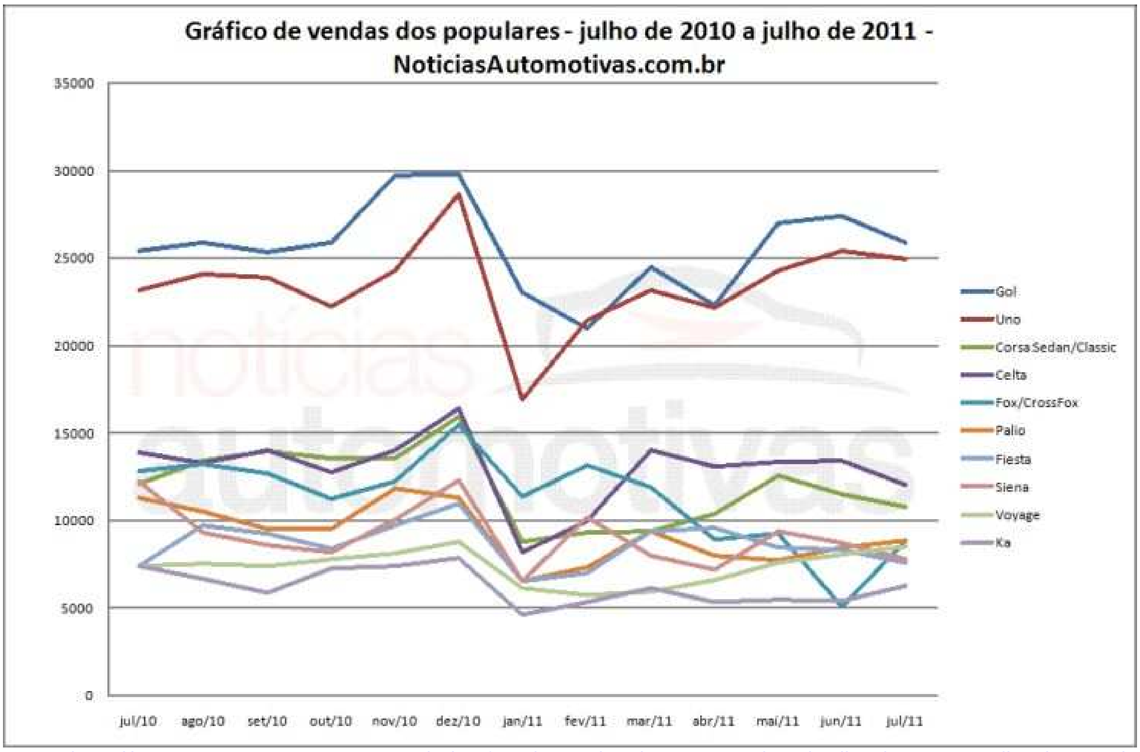
Distância (Km)	Valor Pago (R$)
1	R$15,00
2	R$30,00
3	R$45,00
4	R$60,00
.	.
.	.
d	$V(d)=?$

Analisando a tabela acima, qual a expressão matemática $V(d)$ que pode representar o valor pago pela viagem de d quilômetros?

obs.: *a quantidade d é chamada de variável* ____________________

a quantidade $V(d)$ é chamada de variável ____________________

Problema 5: A representação gráfica a seguir apresenta o processo de venda de alguns modelos de carros populares.



Fonte: http://www.noticiasautomotivas.com.br/grafico-de-vendas-de-carros-no-brasil-julho-de-2010-a-julho-de-2011/

Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) As vendas do veículo Gol apresentaram períodos de crescimento? Em qual(is) época(s)? Justifique sua resposta.

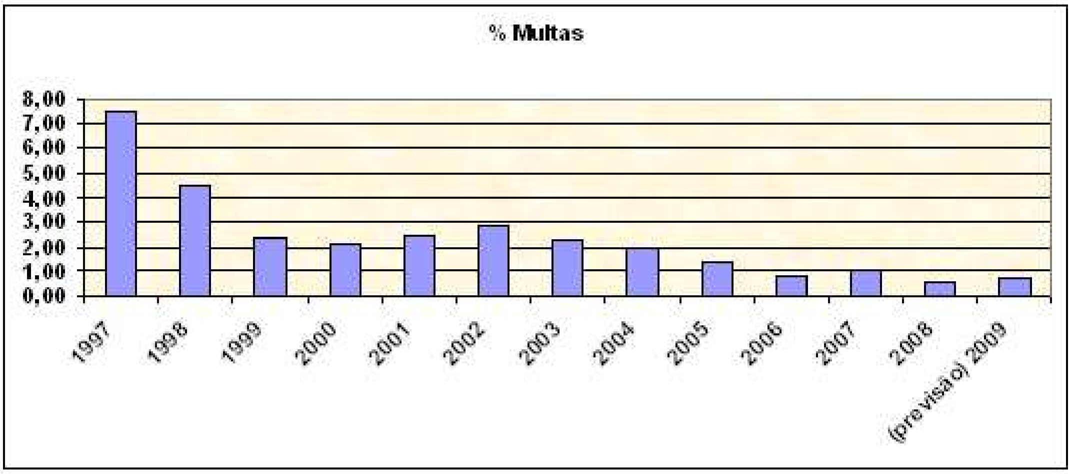
ii) As vendas do veículo Uno apresentaram períodos de decrescimento? Em qual(is) época(s)? Justifique sua resposta.

iii) No período de junho(2011) a julho(2011), qual o carro popular que possuiu maior *crescimento* nas vendas? E qual o carro que possuiu o maior *decrescimento* nas vendas? Justifique sua resposta.

iv) Analisando mensalmente cada um dos períodos de venda, é possível afirmar que em algum período houve somente diminuição no número das vendas? Justifique sua resposta.

Problema 6: Leia o seguinte texto: *"O projeto Multa Zero visa reduzir a valores próximos de zero a quantidade de multas (ou cobranças por excesso) pagas nas faturas de energia. Após a última atualização dos dados e correções no sistema Contaluz (banco de dados de faturas de energia elétrica da USP), verificou-se que em 1997, a porcentagem de multas era 7,5%, baixando para 2,1% em 2000. Em 2005, este índice foi para 1,4%, em 2006 para 0,8%, em 2007 para 1,1%, em 2008 para 0,6%, e em 2009 este índice deve fechar em aproximadamente 0,7%, conforme apresentado pelo gráfico abaixo."*

Extraído de: http://www.usp.br/pure/estatico.php?v_content_id=134



Fonte: http://www.usp.br/pure/estatico.php?v_content_id=134

Com base na leitura do texto e em suas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

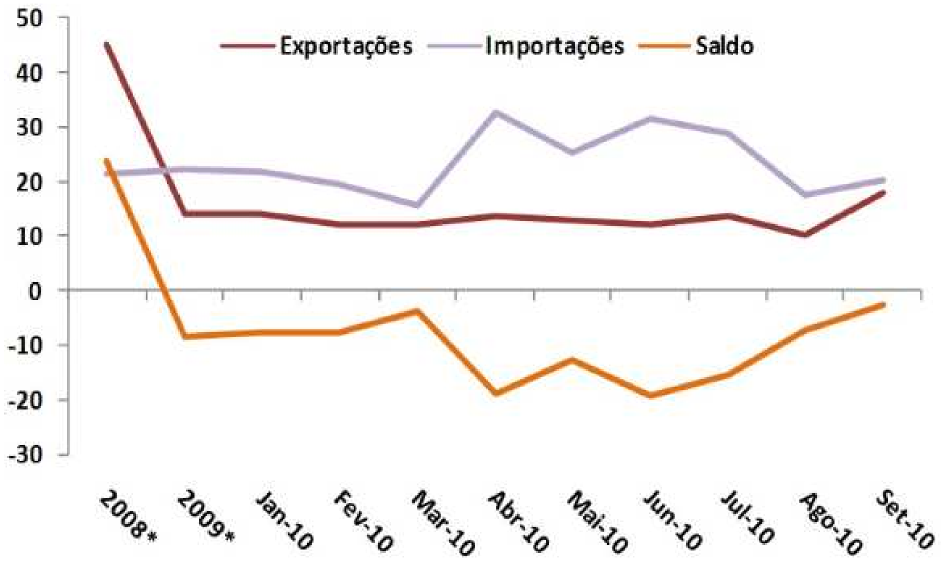
i) Em qual(is) período(s) houve uma *diminuição* na porcentagem (%) de multas pagas pelos usuários dos da energia elétrica? Justifique sua resposta.

ii) Em qual(is) período(s) houve um *aumento* na porcentagem (%) de multas pagas pelos usuários dos da energia elétrica? Justifique sua resposta.

iii) Qual a variável independente neste problema?

iv) Qual a variável dependente neste problema?

Problema 7: A representação gráfica a seguir apresenta a análise da balança comercial de lácteos do Brasil no ano de 2010.



*Média mensal
Fonte: Aliceweb/MDIC
Figura 1. Balança comercial de lácteos brasileira, em US$ milhões.
Fonte: http://www.cigeneticabovina.com.br/index.php?ref=04&id=1754

Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:
i) Em algum momento as importações e as exportações foram em quantidades iguais? Justifique a sua resposta.

ii) Qual dos três gráficos apresenta maior período de estabilidade entre Janeiro(2010) e Julho(2010)? Justifique a sua resposta.

iii) No período de Agosto(2010) a Setembro(2010) qual possuiu maior crescimento: exportação ou importação? Justifique a sua resposta.

iv) Entre Março(2010) e Agosto(2010) houve um crescimento ou decrescimento nas importações de lácteos? Justifique a sua resposta.

Sugestões para o Dia 1

O primeiro dia de atividades consiste em apresentar o conceito de função para os alunos através da relação entre grandezas apresentadas graficamente ou com uma tabela de valores. A noção de variável independente e dependente também é abordada dentro dos problemas. As noções de domínio e imagem de uma função são levadas até os alunos pela análise dos contextos apresentados. Cada um dos problemas envolvendo gráfico foi elaborado utilizando informações atuais disponibilizadas em sites da internet, com isso o professor demonstra aos alunos a importância do estudo desse assunto na escola.

Nesse primeiro dia, o professor pode organizar os grupos que irão desenvolver a sequência de atividades no decorrer dos dias. Pode-se deixar a formação dos grupos ocorrerem livremente entre os alunos ou estabelecer algum critério. Geralmente os alunos se organizam por afinidade, pois desse modo o diálogo entre eles já é familiar e pode ser um elemento contribuinte na aprendizagem da matemática.

Ao abordar o assunto através dos problemas, sugerimos que o professor não antecipe para os alunos os conceitos envolvidos na proposta, tais como variável dependente, variável independente, domínio, imagem, crescimento e decrescimento de gráficos. É necessário que os alunos se deparem com as situações e através da interpretação dos problemas extraiam as representações necessárias para a formação dos esquemas cognitivos necessários para a aprendizagem dos conceitos.

Sugerimos que o professor oriente os alunos durante a execução dos problemas, evitando fornecer respostas prontas, e sim questionando possíveis soluções e encaminhamentos propostos pelos estudantes. Assim, mostra-se aos alunos a possibilidade deles participarem ativamente no seu processo de aprendizagem.

Dia 2 – função exponencial

Objetivos: A função exponencial é utilizada na modelagem de algumas formas de crescimento ou decrescimento presentes em alguns fenômenos da natureza, como também no funcionamento dos juros compostos, importantes na matemática financeira. A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problema, os alunos serão conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema, com o objetivo de obter uma resposta satisfatória em cada situação.

Problema 1: Devido às doenças ocorridas em uma pequena cidade, serão utilizadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ para modelar o crescimento populacional dos ratos e das pessoas respectivamente, em um período entre 0 e 5 anos. Inicialmente, há 50000 ratos e 10000 pessoas. O pesquisador verificou que a cada ano que passa, a população de ratos *dobra* de tamanho e a as pessoas *triplica*. Vamos construir uma tabela para representar essa situação (pode deixar as potências indicadas):

Tempo(anos)	Nº de ratos
0	50000
1	
2	
3	
4	
5	

Tempo(anos)	Nº de pessoas
0	10000
1	
2	
3	
4	
5	

Vamos generalizar a ideia? Para uma quantidade de tempo qualquer, qual a função que representa o número de ratos e qual a função que representa o número de pessoas dessa cidade? Quando o número de pessoas supera o número de ratos? Justifique a sua resposta.

Problema 2: Quando uma pessoa toma um medicamento, ele vai sendo eliminado naturalmente de tal modo que a quantidade ativa do remédio no organismo, segue uma lei exponencial da forma $Q(t) = Q_0.\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Onde Q_0 é a quantidade (em mg) ingerida inicialmente. Pergunta-se:

a) Construa uma tabela para a quantidade de medicamento ativo no organismo de uma pessoa que ingere inicialmente 2000mg para $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$. Essas quantidades estão aumentando ou diminuindo? Justifique a sua resposta.

b) É possível que todo esse medicamento seja eliminado do organismo, ou seja, é possível que a quantidade $Q(t)$ seja zero após algum tempo?

Problema 3: Um imóvel localizado em Caxias do Sul (RS) possui hoje uma avaliação de R$30000,00. O proprietário percebe que a cada ano que passa, o imóvel valoriza 10% do seu valor do ano anterior, devido ao aumento do bairro onde esse imóvel está localizado. Ele começa a fazer alguns cálculos matemáticos para analisar a possibilidade de vender esse imóvel daqui alguns anos e ganhar mais dinheiro com isso. Complete a tabela abaixo, que descreve a valorização desse imóvel em um período de 6 anos.

Tempo (anos)	Valor (R$)
0	R$30000,00
1	
2	
3	
4	
5	

Obtenha a expressão da função $V(t)$, que é a função que calcula o valor do imóvel em um determinado ano t.

Pergunta-se:

a) Qual a variável independente da função $V(t)$?

b) Em quanto tempo o imóvel estará valendo o dobro do que ele vale em $t=0$?

Sugestões para o Dia 2

Para a realização das atividades do segundo dia, a sugestão é que os grupos estabelecidos no encontro do dia anterior sejam mantidos. No segundo dia de atividades a abordagem será sobre as funções exponenciais. Inicialmente sugerimos que o professor tenha uma conversa com os alunos sobre a importância dessas funções no cotidiano e quais são as situações em que ela aparece na modelagem de fenômenos.

O professor pode comentar como essas funções descrevem modelos matemáticos em termos de crescimento e decrescimento ao longo do tempo. Ele também pode justificar o motivo do nome da função ser exponencial em virtude da variável independente estar no expoente de uma base. Para iniciar o assunto o professor pode abordar um exemplo hipotético de crescimento populacional, explicando a relevância que a função exponencial tinha quando se começaram a estudar esse tipo de fenômeno.

Na sequência dos problemas é importante destacar para os alunos o desenvolvimento correto das propriedades operatórias das potências com o objetivo de obter respostas satisfatórias para cada situação-problema. O encaminhamento correto da álgebra envolvendo equações exponenciais e manipulação dos expoentes conduz os alunos para a apropriação adequada dos conceitos matemáticos envolvidos nos problemas sobre função exponencial.

Conforme mencionamos anteriormente, sugerimos que o professor oriente os alunos durante a execução dos problemas, evitando fornecer respostas prontas, e sim questionando possíveis soluções e encaminhamentos propostos pelos estudantes. Assim, mostra-se aos alunos a possibilidade deles participarem ativamente no seu processo de aprendizagem.

Dia 3 – função logarítmica

Objetivos: A função logarítmica é utilizada para modelar inúmeros fenômenos da natureza, tais como: calcular a intensidade de terremotos, a altura de determinadas plantas, o pH de soluções químicas, entre outras. A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problema, os alunos serão conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema, com o objetivo de obter uma resposta satisfatória em cada situação.

Problema 1: Leia o texto: *"A escala de Richter foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, ambos membros do California Institute of Technology, que estudavam sismos no sul da Califórnia (EUA), utilizando um equipamento específico – o sismógrafo Wood-Anderson. Após recolher dados de inúmeras ondas sísmicas liberadas por terremotos, criaram um sistema para calcular as magnitudes dessas ondas. A história não conservou o nome de Beno Gutenberg. No princípio, esta escala estava destinada a medir unicamente os tremores que se produziram na Califórnia.* Apesar do surgimento de vários outros tipos de escalas para medir terremotos, a escala Richter continua sendo largamente utilizada."

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

Usa-se a escala Richter para se determinar a intensidade dos terremotos que ocorrem no planeta. Essa escala numérica vai de 0 até $8{,}9$ que é o terremoto mais intenso que se tem notícia. A função usada para descrever esse fenômeno é dada por $I(E)=\frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$, onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora(kWh). Calcule a intensidade na escala Richter para as seguintes energias liberadas:

a) $E=7.10^{9}$ kWh

b) $E=7.10^{7}$ kWh

c) $E=7.10^{5}$ kWh

d) Se a energia liberada é cada vez maior nos terremotos, o que ocorre com o valor da sua escala Richter? Justifique a sua resposta.

<u>*Problema 2:*</u> Leia o texto: *"**pH** é o símbolo para a grandeza físico-química **potencial hidrogeniônico**, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. O "p" vem do alemão potenz, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+)."*

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

O cálculo matemático para determinar o pH de um solução aquosa é dado pela relação $P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ onde H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \leq pH \leq 14$ Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

Fonte: http://solucoesqm.blogspot.com/

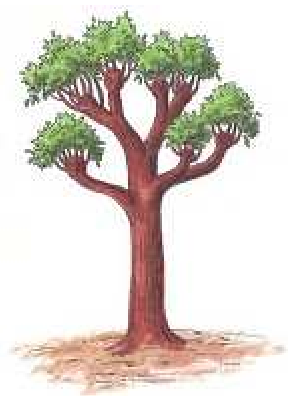
Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Rosa	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, efetuando alguns cálculos.

b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrogeniônica? E a menor concentração? Justifique a sua resposta.

Problema 3: Um biólogo ao estudar uma determinada espécie de árvore na Amazônia, modelou o crescimento dela de acordo com a relação $C(t) = 1 + 0{,}5\log_3(t-2)$, onde t representa o tempo em anos e $C(t)$ é a altura em metros.



Fonte: http://omundodasarvorestga.blogspot.com/

Pergunta-se:

a) É possível calcular o tamanho da árvore quando $t = 0$? Justifique a sua resposta.

b) Qual o domínio matemático dessa função?

c) Obtenha a altura da árvore quando $t = 11$ e $t = 29$. A altura diminui, aumenta ou permanece constante com o passar dos anos? Justifique a sua resposta.

Sugestões para o Dia 3

Para o terceiro dia de atividades da sequência, sugerimos que o professor inicie conversando com a turma sobre a importância que a função logarítmica possui na resolução de problemas para a ciência, destacando que o seu uso facilita compreender diversos fenômenos da natureza como, por exemplo, quantificar a intensidade de um terremoto.

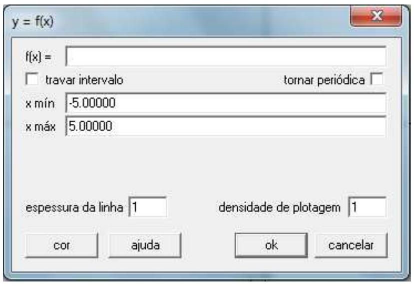
Novamente, sugerimos que o professor oriente os alunos durante a execução dos problemas, evitando fornecer respostas prontas, e sim questionando possíveis soluções e encaminhamentos propostos pelos estudantes. Assim, mostra-se aos alunos a possibilidade deles participarem ativamente no seu processo de aprendizagem.

A abordagem da função logarítmica através de situações-problema possibilita aos alunos reconhecer a necessidade de se estudar esse assunto na escola. Desse modo, acreditamos que uma abordagem através de problemas motive os estudantes para a discussão em sala de aula sobre o assunto, onde eles podem expor o seu ponto de vista, elaborar e confrontar hipóteses com o professor e com os colegas.

Dia 4 – atividades no laboratório de informática

Objetivos: Proporcionar aos alunos contato com a tecnologia para aprender matemática. Utilizar o software Winplot[24] permite que os alunos façam construções de gráficos bidimensionais, elaborem hipóteses durante a resolução dos problemas e cheguem às conclusões através de um raciocínio dedutivo. Com essas atividades espera-se que os alunos visualizem as principais propriedades das funções exponenciais e logarítmicas, tais como crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem.

Atividade 1: Utilizando o software Winplot, na opção de janela 2D, ao pressionar o botão F1 do teclado, irá aparecer a seguinte janela:



No campo de digitação para a função $f(x)$, deve ser digitada a função $f(x) = 3^x$. Observe que identificamos $y = f(x)$, pois não há diferença nessa representação. Atenção: para fazer o software "entender" que x deve ser um expoente, você deve digitar sempre antes do expoente o símbolo **^**. Antes do "ok", altere a espessura da linha para 2, afim de proporcionar uma melhor percepção sobre essa representação gráfica. Em seguida, pressione o botão "ok". Visualize o que acontece. Pergunta-se: essa função apresenta um crescimento ou decrescimento? Justifique a sua resposta.

Na opção "editar" da janela de inventário, reescreva a função para $f(x) = (-3)^x$, utilizando os parênteses. Em seguida, pressione o botão "ok". O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Construa o gráfico da função $f(x) = -3^x$, sem atribuir os parênteses. O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Faça agora outras construções gráficas. Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x) = 5^x$, $g(x) = 7^x$, $h(x) = 6^x$. Compare os quatro gráficos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função exponencial $f(x) = b^x$, com a base b ***maior*** *que 1, o gráfico será côncavo para _________ (cima/baixo). A função será _____________ (crescente/decrescente), seu domínio é __________ (todos/alguns) números reais e a sua imagem será o conjunto dos números reais ____________ (positivos/negativos)."*

[24] Software livre, disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Atividade 2: Com as ferramentas já utilizadas no exercício anterior, vamos analisar agora mais um tipo de função exponencial. No campo de digitação para a função $f(x)$, deve ser digitada a função $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$. Antes do "ok", altere a espessura da linha para 2, afim de proporcionar uma melhor percepção sobre essa representação gráfica. Em seguida, pressione o botão "ok". Visualize o que acontece. Pergunta-se: essa função apresenta um crescimento ou decrescimento? Justifique a sua resposta.

Na opção "editar" da janela de inventário, reescreva a função para $f(x)=\left(-\frac{1}{5}\right)^x$, utilizando os parênteses. Em seguida, pressione o botão "ok". O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Construa o gráfico da função $f(x)=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$, com o sinal negativo fora dos parênteses. O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Faça agora outras construções gráficas. Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{2}{7}\right)^x$, $h(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Compare os quatro gráficos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

*"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função exponencial $f(x)=b^x$, com a base b **menor** que 1, o gráfico será côncavo para ________ (cima/baixo). A função é ____________ (crescente/decrescente), seu domínio será _________ (todos/alguns) números reais e a sua imagem será o conjunto dos números reais ___________ (positivos/negativos)."*

Atividade 3: Vamos estudar um pouco as propriedades da função logarítmica e sua representação gráfica no Winplot. Da mesma forma que na função exponencial, será utilizada a janela 2D, com a escrita da função na forma explícita, ou seja, da forma $y=f(x)$. Para escrever um logaritmo de base 10 no Winplot, basta digitar $\log(x)$. Um detalhe para não comprometer a atividade. Quando desejamos mudar a base do logaritmo, deve-se usar a seguinte notação: $\log_2(x)$ será digitado como $\log(2,x)$. Se for digitar $\log_5(x)$, deve ser inserido como $\log(5,x)$, e assim sucessivamente.

Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x)=\log_2(x)$, $g(x)=\log_5(x)$, $h(x)=\log_6(x)$. Após essas construções, compare os gráficos obtidos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Em seguida, digite a "função" $f(x)=\log_{-2}(x)$. Pressione o botão "ok". O que aconteceu? Justifique a sua resposta.

Construa em um mesmo sistema de eixos as funções: $f(x)=\log_7(x)$ e $g(x)=-\log_7(x)$. Você percebe alguma semelhança? Justifique a sua resposta.

Complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função logarítmica $f(x) = \log_b(x)$*, com a base* b ***maior*** *que 1, o gráfico será côncavo para ________ (cima/baixo). A função é _____________ (crescente/decrescente), seu domínio será os números reais ____________ (positivos/negativos) e a sua imagem será ___________ (todos/alguns) números reais."*

Agora, vamos colocar uma base no logaritmo que seja menor que 1. Construa o gráfico de $f(x) = \log_{1/5}(x)$. No Winplot, você deve digitar $f(x) = \log(1/5, x)$ para realizar essa construção. O que você observa sobre o crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem dessa função. Descreva a sua análise.

Faça agora outras construções gráficas. Construa no mesmo sistema de eixos, os gráficos de: $f(x) = \log_{1/3}(x)$, $g(x) = \log_{2/5}(x)$, $h(x) = \log_{3/7}(x)$. Compare os quatro gráficos, quanto ao crescimento/decrescimento, concavidade, domínio e imagem. Descreva a sua análise.

Para encerrar, complete as lacunas do texto a seguir, escolhendo uma das palavras disponíveis.

"A conclusão que pode-se chegar nesse caso é: na função logarítmica $f(x) = \log_b(x)$*, com a base* b ***menor*** *que 1, o gráfico será côncavo para ________ (cima/baixo). A função é _____________ (crescente/decrescente), seu domínio será os números reais ____________ (positivos/negativos) e a sua imagem será ___________ (todos/alguns) números reais."*

Sugestões para o Dia 4

Ao trabalhar no laboratório de informática é importante que o professor tenha em mente que deve envolver os alunos durante as atividades propostas, pois a internet pode servir como causa de evasão dos alunos nas atividades. Para isso, acreditamos que a elaboração adequada de um plano de aula envolvendo assuntos de matemática é garantia do bom desenvolvimento das atividades.

Inicialmente é necessário apresentar o software *Winplot* para os alunos, esclarecendo alguns comandos básicos, com o objetivo de proporcionar a iniciação dos estudantes com o software. Consideramos que o professor não deve ensinar *todos* os comandos que serão utilizados durante as atividades, possibilitando pela parte dos alunos o desenvolvimento da autonomia e necessidade em aprender outros comandos para continuar executando as atividades.

Aqui novamente, consideramos que o professor deva orientar os alunos durante a execução das atividades, evitando fornecer os passos ou comandos no software prontos, e sim questionando possíveis soluções e encaminhamentos propostos pelos estudantes. Assim, mostra-se aos alunos a possibilidade deles participarem ativamente no seu processo de construção dos conceitos envolvidos.

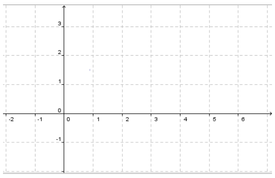
Dia 5 – atividade avaliativa

Prof. Rodrigo

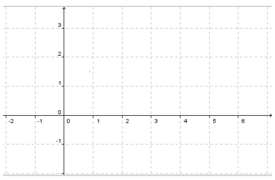
Nome: ______________________________ Data: __________________

1) Esboce cada um dos seguintes gráficos. Determine o domínio e a imagem de cada uma das funções.

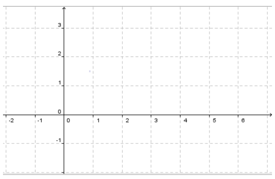
a) $f(x) = 10^x$



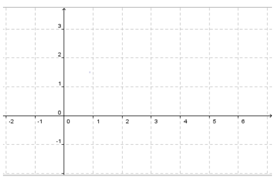
b) $f(x) = \left(\dfrac{2}{9}\right)^x$



c) $f(x) = \log_7(x)$



d) $f(x) = \log_{1/10}(x)$



2) Um biólogo está estudando uma colônia de bactérias que está se desenvolvendo nos alimentos de uma cidade da América do Sul. A cada hora que passa, ele anota o número de indivíduos presentes em um pedaço de alimento. Os dados estão na tabela abaixo.

Tempo	Nº de indivíduos
1	300
2	90000
3	27000000
4	8100000000
t	$N(t) = ?$

Obtenha uma expressão para a função $N(t)$. Quem é a variável independente dessa função? E a variável independente?

3) Um médico pediatra verificou que a altura das crianças de uma certa cidade com idade entre 1 e 15 anos, estão relacionadas com a função $h(t) = \log_{10}(10^{0,7}.\sqrt{t})$. Pergunta-se:

a) Qual o domínio dessa função?

b) Qual a altura de uma criança de 10 nãos?

4) A concentração de álcool no sangue de uma pessoa alcançou o nível de 3 gramas por litro de sangue, após ela ter ingerido um quantidade considerável de bebida alcoólica. A concentração varia de acordo com a função $C(t)=3.\left(\frac{1}{4}\right)^{t}$, onde t é o número de horas após ter ingerido a quantidade inicial. Pergunta-se:

a) Quais as quantidades de álcool encontradas após $1h$, $2h$, $3h$?

b) Essas quantidades estão aumentando ou diminuindo com o passar das horas? Justifique a sua resposta.

5) A pressão sistólica (quando o coração contrai para bombear sangue) pode ser calculada empiricamente pela função $P(i)=40+16\log_2(i+1)$, na qual i é a idade (em anos) de uma pessoa entre 0 e 65 anos. Pede-se:

a) Calcule a pressão sistólica das pessoas com idade: 1 ano, 7 anos 31 anos e 63 anos.

b) Os valores de pressão sistólica encontrados estão aumentando ou diminuindo? Justifique a sua resposta matematicamente.

6) (Winplot) Qual foi a importância das atividades realizadas com o software Winplot para a sua aprendizagem sobre funções exponenciais e logarítmicas?

☺

Sugestões para o Dia 5

Durante o momento da avaliação é importante que o professor verifique se os alunos compreenderam os assuntos abordados durante a sequência didática. Para isso, essa avaliação apresentada anteriormente constitui um modelo que pode ser utilizado após o trabalho com funções exponenciais e logarítmicas. Os problemas propostos abordam contextos onde as funções aparecem na modelagem da situação. Nesta atividade consideramos essencial que o professor mantenha os grupos de trabalho constituídos no primeiro dia de atividades, pois assim poderá verificar se o grupo de alunos consegue elaborar estratégias para elaborar a solução dos problemas.

Ressaltamos ao professor que evite orientar os alunos durante a aplicação dessa avaliação, pois o objetivo é verificar se os alunos construíram os esquemas e representações semióticas necessários para confrontar os problemas apresentados. Nesta última atividade destacamos que a manipulação dos esquemas e registros previamente desenvolvidos será colocada em prática, no momento em que apenas o grupo de alunos deve estabelecer os procedimentos adequados para a resolução dos problemas.

Apêndice 2 - Termo de consentimento informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada *Funções Exponenciais e Logarítmicas: aplicações gerais para o nível básico*, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Rodrigo Sychocki da Silva. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, é analisar como o conceito de função a apropriado pelos(as) alunos(as). Neste trabalho pretendemos analisar o processo de aprendizagem de cada aluno(a) referente a modelagens matemáticas utilizando funções exponenciais e logarítmicas.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) Rodrigo Sychocki da Silva no endereço Rua Mário de Boni (Bairro Floresta, Caxias do Sul, RS) ou pelo e-mail rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br .

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Caxias do Sul, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável: _________________________________

Assinatura do(a) pesquisador(a): _____________________________

Assinatura do Orientador da pesquisa: __________________________

Anexos

Apresentamos aqui alguns gráficos produzidos pelos grupos na aula ocorrida no laboratório de informática, utilizando o software *Winplot*.

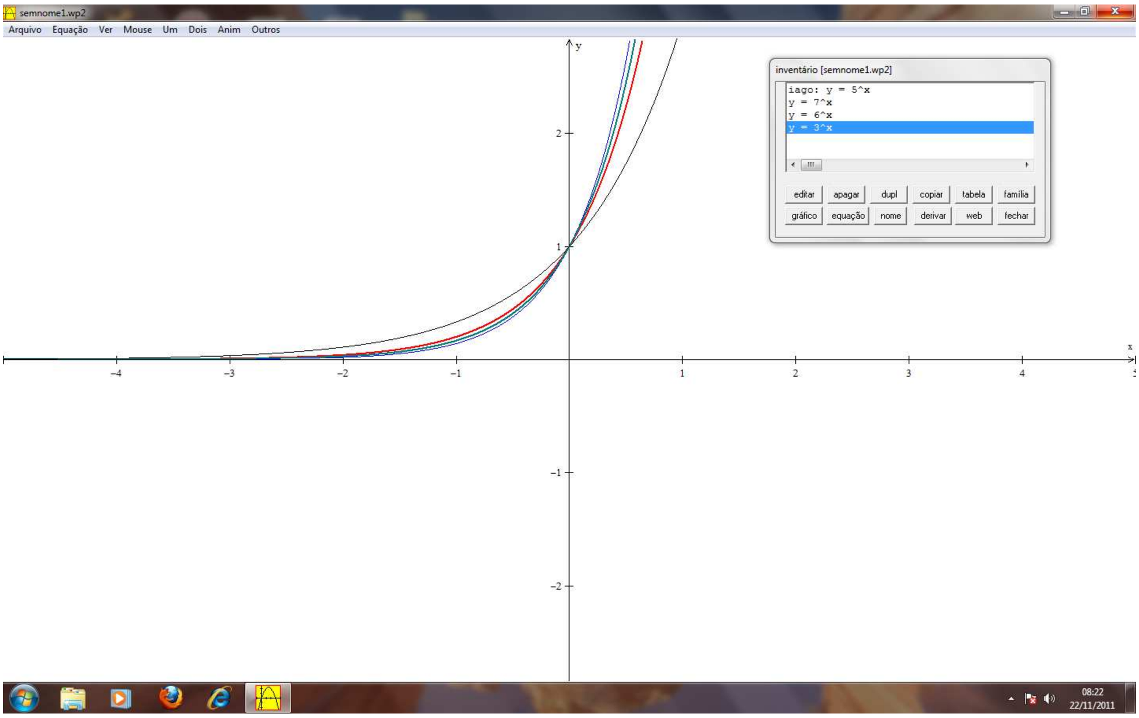


Figura 58: Gráficos produzidos pelo grupo 1.

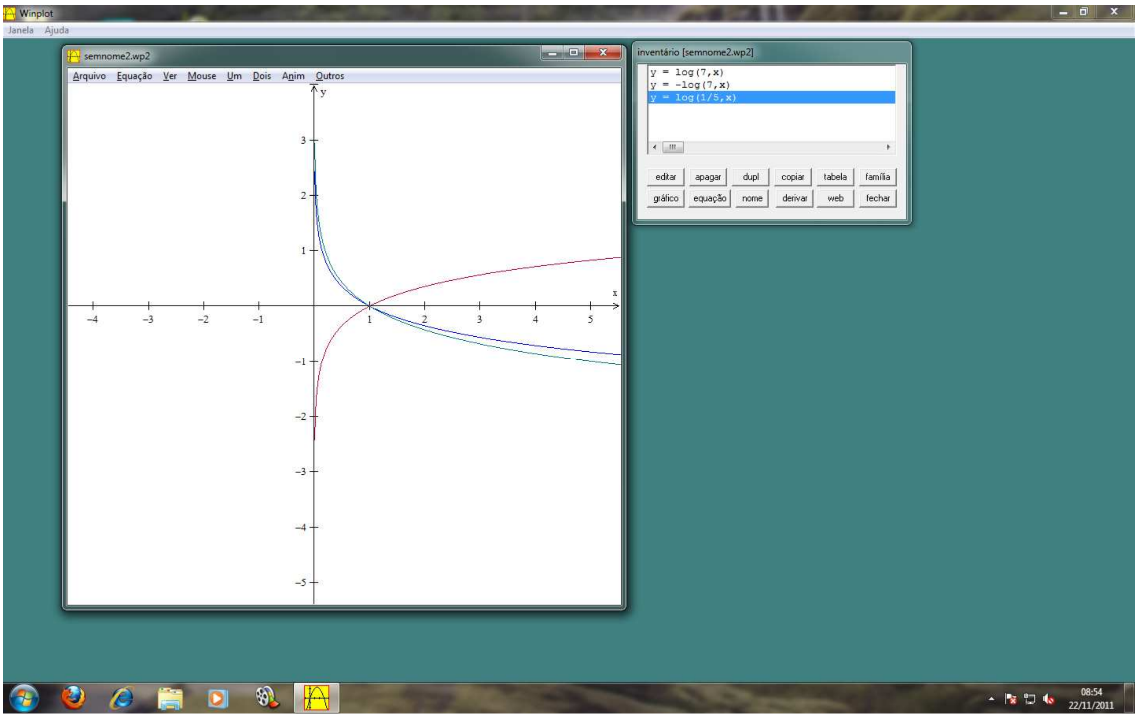


Figura 59: Gráficos produzidos pelo grupo 2.

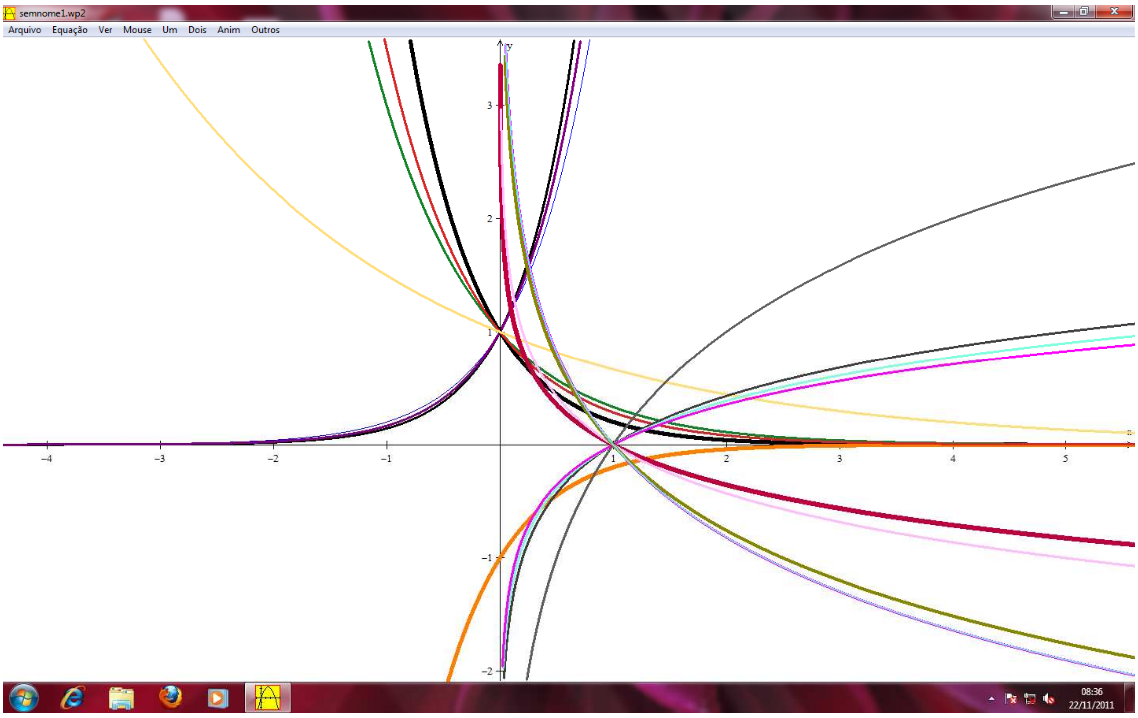


Figura 60: Gráficos produzidos pelo grupo 4.

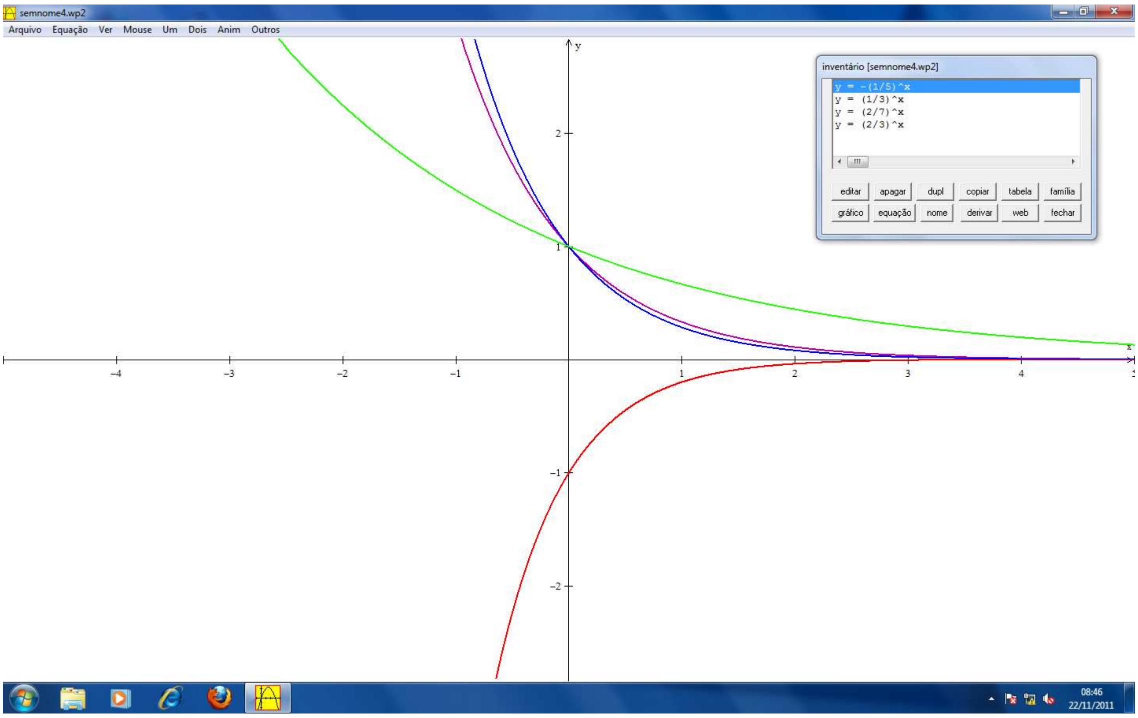


Figura 61: Gráficos produzidos pelo grupo 6.