

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DIONÍSIO DOERING

**O USO DA TRANSFORMADA WAVELET BI-DIMENSIONAL
NO CONCEITO DO ESPAÇO DE ESCALA.**

Porto Alegre

2005

DIONÍSIO DOERING

**O USO DA TRANSFORMADA WAVELET BI-DIMENSIONAL
NO CONCEITO DO ESPAÇO DE ESCALA.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica

ORIENTADOR: Adalberto Schuck Júnior

Porto Alegre

2005

DIONÍSIO DOERING

O USO DA TRANSFORMADA WAVELET BI-DIMENSIONAL NO CONCEITO DO ESPAÇO DE ESCALA.

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Adalberto Schuck Júnior, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto

Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antônio Fernando Catelli Infantsi, UFRJ

Doutor pela Imperial College – Londres, Inglaterra

Prof. Dr. Waldir Leite Roque, UFRGS

Doutor pela University of Cape Town – Cape Town, África do Sul

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Altamiro Amadeu Susin, UFRGS

Doutor pela INPG – Grenoble, França

Coordenador do PPGEE: _____

Prof. Dr. Carlos Eduardo Pereira

Porto Alegre, janeiro de 2005.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, em especial pela dedicação e apoio em todos os momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Aos colegas do PPGEE pelo seu auxílio nas tarefas desenvolvidas durante o curso e apoio na revisão deste trabalho.

À CAPES pela provisão da bolsa de mestrado.

RESUMO

O processamento de imagens tem sido amplamente utilizado para duas tarefas. Uma delas é o realce de imagens para a posterior visualização e a outra tarefa é a extração de informações para análise de imagens. Este trabalho apresenta um estudo sobre duas teorias multi-escalas chamadas de espaço de escala e transformada wavelet, que são utilizadas para a extração de informações de imagens. Um dos aspectos do espaço de escalas que tem sido amplamente discutido por diversos autores é a sua base (originalmente a gaussiana). Tem se buscado saber se a base gaussiana é a melhor, ou para quais casos ela é a melhor. Além disto, os autores têm procurado desenvolver novas bases, com características diferentes das pertencentes à gaussiana. De posse destas novas bases, pode-se compará-las com a base gaussiana e verificar onde cada base apresenta melhor desempenho. Neste trabalho, foi usada (i) a teoria do espaço de escalas, (ii) a teoria da transformada wavelet e (iii) as relações entre elas, a fim de gerar um método para criar novas bases para o espaço de escalas a partir de funções wavelets. O espaço de escala é um caso particular da transformada wavelet quando se usam as derivadas da gaussiana para gerar os operadores do espaço de escala. É com base nesta característica que se propôs o novo método apresentado. Além disto, o método proposto usa a resposta em frequência das funções analisadas. As funções bases do espaço de escala possuem resposta em frequência do tipo passa baixas. As funções wavelets, por sua vez, possuem resposta do tipo passa faixas. Para obter as funções bases a partir das wavelets faz-se a integração numérica destas funções até que sua resposta em frequência seja do tipo passa baixas. Algumas das funções wavelets estudadas não possuem definição para o caso bi-dimensional, por isso foram estudadas três formas de gerar funções bi-dimensionais a partir de funções unidimensionais. Com o uso deste método foi possível gerar dez novas bases para o espaço de escala. Algumas dessas novas bases apresentaram comportamento semelhante ao apresentado pela base gaussiana, outras não. Para as funções que não apresentaram o comportamento esperado, quando usadas com as definições originais dos operadores do espaço de escala, foram propostas novas definições para tais operadores (detectores de borda e bolha). Também foram geradas duas aplicações com o espaço de escala, sendo elas um algoritmo para a segmentação de cavidades cardíacas e um algoritmo para segmentação e contagem de células sanguíneas.

Palavras-chaves: Espaço de escala. Transformada Wavelet Contínua Bi-dimensional. Bases para o espaço de escala.

ABSTRACT

Image processing has been widely used for two tasks. One of them is image enhancement for visualization and the other one is information extraction for image analysis. This work presents a study about two multiscale image processing theory called scale space and wavelet transform. One of the scale space subjects that have been widely discussed is its kernel (originally the gaussian kernel). The researchers are trying to find out if the gaussian kernel is the best, or in which cases it is the best. Beyond that, they are developing new kernels with different features from the gaussian kernel. With these new kernels, it will be possible to compare them with the gaussian kernel and check in which cases each one is the best. In this work, it was used (i) the scale space theory, (ii) the wavelet theory and (iii) their relationship to create a novel method to develop new scale space kernels based on wavelet functions. The scale space is a special case of wavelet transform when it is used the gaussian derivatives to generate the scale space operators. The proposed method is based in this feature. Beyond that, the proposed method uses the frequency response of the analyzed functions. The scale space kernels have its frequency response like a low pass filter. The wavelet functions have its frequency response like a band pass filter. To be able to obtain kernel functions from wavelet functions it is done the numerical integration of the analyzed functions until its frequency response become like a low pass filter. Some of the wavelet functions have no definition for the 2D case, because of this it was studied three ways to create 2D functions from 1D functions. Using the proposed method it was created ten new scale space kernels. Some of them exhibit features like the gaussian kernel, others no. For the ones that do not exhibit features as we expected, when used with the original scale space operators definition, it was proposed new definitions for them (edge and blobs detectors). It was also developed two applications with the scale space theory, one of them is an algorithm for segmentation of cardiac chambers and the other is an algorithm for blood cell segmentation and counting.

Keywords: Scale Space. Bi-dimensional Continuous Wavelet Transform. Scale Space kernels.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 OBJETIVO	19
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	20
2.1 REPRESENTAÇÃO DE IMAGENS EM MÚLTIPLAS ESCALAS	20
2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER	21
2.3 O ESPAÇO DE ESCALA	24
2.3.1 Detecção de Bolhas em Espaço de Escala	27
2.3.2 Detecção de Bordas em Espaço de Escala	28
2.3.3 Formas de Medida de Importância de Detalhes Detectados Usando o Espaço de Escalas	31
2.4 WAVELETS	32
2.4.1 A Transformada Wavelet Contínua (CWT)	32
2.4.2 A Transformada Wavelet Contínua Bi-dimensional (CWT2D)	34
2.4.3 As Famílias de wavelets mãe	35
2.4.3.1 Wavelet Haar	36
2.4.3.2 Wavelet Morlet	36
2.4.3.3 Wavelet Mexican Hat	37
2.5 RELAÇÕES ENTRE O ESPAÇO DE ESCALAS E A TRANSFORMADA WAVELET	38
3 REVISÃO DE LITERATURA	40
3.1 O ESPAÇO DE ESCALA	40
3.2 A TRANSFORMADA WAVELET	43
4 MATERIAIS E MÉTODOS	47
4.1 A IMPLEMENTAÇÃO DO ESPAÇO DE ESCALAS	49
4.2 A IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA BI-DIMENSIONAL	54
4.3 MÉTODO PARA GENERALIZAR O ESPAÇO DE ESCALAS COM AS DIFERENTES FAMÍLIAS DE WAVELETS	55
4.3.1 A Escolha da Função Wavelet Mãe	56
4.3.2 Geração de Funções Bi-dimensionais a Partir de Funções Unidimensionais	57
4.3.3 Re-definição do Operador Detector de Bolhas para a Wavelet Bi-ortogonal 1.3	64
4.3.4 Re-definição do Operador Detector de Bordas para a Wavelet Bi-ortogonal 1.3	67
4.4 APLICAÇÕES	70
4.4.1 Segmentação de Cavidades Cardíacas	70
4.4.2 Segmentação e Contagem de Células Sangüíneas	71
4.4.3 Aplicação do Operador Detector de Bolhas Baseado na Wavelet Haar para Detecção de Células Sangüíneas	72
5 RESULTADOS	74
6 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO	116
6.1 Análise dos Resultados	116
6.2 Conclusão	123
Referência	124

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Representação multi-escala de uma imagem.....	21
Figura 2 (a) Sinal formado pela soma de duas senóides de 5 Hz e 10 Hz. (b) Série de Fourier do sinal apresentado em (a).....	22
Figura 3 Imagem da Lena e sua DFT2D (parte real e parte imaginária respectivamente).....	24
Figura 4 Definição de bolhas para um sinal bidimensional. Esta figura mostra bolhas claras em um fundo escuro.....	28
Figura 5 Direção do gradiente e da borda, onde as linhas contínuas denotam intensidades iguais.....	29
Figura 6 (a) Perfil da borda, (b) sua derivada, (c) segunda derivada e (d) terceira derivada...	30
Figura 7 Imagem da função PSI da wavelet Haar.....	36
Figura 8 Imagem da função PSI da wavelet Morlet.....	37
Figura 9 Imagem da função PSI da wavelet Mexican Hat.....	37
Figura 10 Imagem original “rice.tif”	47
Figura 11 Imagem Lenna em 256 tons do cinza.....	48
Figura 12 Imagem original “echo.bmp”	48
Figura 13 Imagem das células em tons de cinza (imagem #9 da Tabela 2).....	48
Figura 14 Operador gaussiana (g) na escala $t = 64$	49
Figura 15 Operador derivada da gaussiana em relação a x (g_x) na escala $t = 64$	49
Figura 16 Operador derivada segunda da gaussiana em relação a x (g_{xx}) na escala $t = 64$	50
Figura 17 Operador Laplaciano da gaussiana para a escala $t = 64$	50
Figura 18 Imagem “rice.tif” na escala $t = 2$ (a) e $t = 20$ (b) usando FFT.....	51
Figura 19 Imagem “rice.tif” (a), bolhas detectadas na escala $t = 2$ (b) e bolhas detectadas na escala $t = 20$ (c).....	51
Figura 20 Imagem “rice.tif” (a), bordas detectadas na escala $t = 2$ (b) e bordas detectadas na escala $t = 20$ (c).....	52
Figura 21 Imagem “rice.tif” (a), as dez bolhas mais significativas detectadas na escala $t = 2$ (b) e $t = 20$ (c).....	53
Figura 22 bolhas da imagem “rice.tif” nas escalas (a) 2, (b) 6, (c) 16, (d) 32 e (e) a imagem dos pixels que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento.....	54
Figura 23 Função gaussiana unidimensional (esquerda) e bi-dimensional gerada por rotação (direita).....	58
Figura 24 Função gaussiana unidimensional (esquerda) e bi-dimensional gerada por produto tensorial (direita).....	58
Figura 25 Função gaussiana unidimensional (esquerda) e bi-dimensional gerada por convolução (direita).....	59
Figura 26 Imagem artificial denominada <i>phantom1</i>	61
Figura 27 Imagem artificial denominada <i>phantom2</i>	62

Figura 28 Imagem artificial denominada <i>phantom3</i>	62
Figura 29 Função suavizadora da função wavelet Bi-ortogonal 1.3.....	64
Figura 30 Representação do espaço de escala da imagem gerado a partir da função wavelet Bi-ortogonal 1.3 para a escala 64.....	65
Figura 31 Bolhas do espaço de escalas para a imagem gerada a partir da função wavelet Bi-ortogonal 1.3 para a escala 64.....	65
Figura 32 Laplaciano da imagem para a imagem nas escalas.....	66
Figura 33 Bordas detectadas com o espaço de escala da função Bi-ortogonal 1.3 para a escala 64.....	68
Figura 34 Segunda derivada direcional (L_{vv}) da imagem na escala 64.....	69
Figura 35 Terceira derivada direcional (L_{vvv}) da imagem na escala 64.....	69
Figura 36 (a) wavelet Bi-ortogonal 1.3; (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 1.3.....	74
Figura 37 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 1.3 e (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 1.3.....	74
Figura 38 (a) wavelet Bi-ortogonal 1.5 e (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 1.5.....	74
Figura 39 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 1.5 e (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 1.5.....	75
Figura 40 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.2, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2 e (b) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2.....	75
Figura 41 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.2, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.2 e (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.2.....	76
Figura 42 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.4, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.4 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.4.....	76
Figura 43 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.4, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.4 e (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.4.....	76
Figura 44 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.6, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.6 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.6.....	76
Figura 45 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.6, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.6 e -ortogonal 2.6, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.6.....	77
Figura 46 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.8, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.8 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.8.....	77
Figura 47 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.8, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.8 e (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.8.....	77
Figura 48 (a) wavelet Bi-ortogonal 4.4, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4 e (d) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4.....	78
Figura 49 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 4.4, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 4.4, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 4.4, (d) terceira integral da wavelet Biortogonal 4.4 e (d) quarta integral da wavelet Biortogonal 4.4.....	78
Figura 50 (a) wavelet Bi-ortogonal 5.5; (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (e) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (f) quinta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 e (g) sexta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5.....	79

Figura 51 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 5.5, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 5.5, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 5.5, (d) terceira integral da wavelet Biortogonal 5.5, (e) quarta integral da wavelet Biortogonal 5.5, (f) quinta integral da wavelet Biortogonal 5.5 e (g) sexta integral da wavelet Biortogonal 5.5.....	80
Figura 52 (a) wavelet Bi-ortogonal 6.8, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (e) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (f) quinta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8e (g) sexta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8.....	81
Figura 53 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 6.8, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 6.8, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 6.8, (d) terceira integral da wavelet Biortogonal 6.8, (e) quarta integral da wavelet Biortogonal 6.8, (f) quinta integral da wavelet Biortogonal 6.8 e (g) sexta integral da wavelet Biortogonal 6.8.....	82
Figura 54 (a) wavelet Haar na escala 32 e (b) primeira integral da wavelet Haar na escala 32.....	82
Figura 55 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Haar e (b) primeira integral da wavelet Haar.....	83
Figura 56 (a) wavelet Mexican Hat, (b) primeira integral da wavelet Mexican Hat e (c) segunda integral da wavelet Mexican Hat.....	83
Figura 57 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Mexican Hat, (b) primeira integral da wavelet Mexican Hat Hat e (c) segunda integral da wavelet Mexican Hat.....	83
Figura 58 Imagem da função suavizadora de Haar 2D na escala 32 por rotação (a), por produto tensorial (b) e por convolução (c).....	85
Figura 59 Imagem da função suavizadora Bi-ortogonal 1.3 2D por rotação na escala 64 (a), por produto tensorial na escala 256 (b) e por convolução na escala 256(c).....	85
Figura 60 Imagem da função suavizadora Bi-ortogonal 4.4 2D na escala 64 por rotação (a), por produto tensorial (b) e por convolução (c).....	85
Figura 61 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Mexican Hat, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).	86
Figura 62 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Haar, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	87
Figura 63 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	87
Figura 64 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	88
Figura 65 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Haar, gerada por produto tensorial para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	88
Figura 66 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Haar, gerada por convolução para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	89
Figura 67 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, gerada por produto tensorial para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	89
Figura 68 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, gerada por convolução para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	90

Figura 69 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Mexican Hat, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	91
Figura 70 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Haar, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	91
Figura 71 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	92
Figura 72 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	92
Figura 73 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Mexican Hat, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	93
Figura 74 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Haar, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	93
Figura 75 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	94
Figura 76 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).....	94
Figura 77 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 12 (b), 26 (c), 42 (d), 64 (e), 92 (f).....	96
Figura 78 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 10 (b), 40 (c), 54 (d), 66 (e), 80 (f).....	96
Figura 79 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 12 (b), 22 (c), 44 (d), 64 (e), 84 (f).....	97
Figura 80 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 10 (b), 16 (c), 26 (d), 40 (e), 72 (f).....	97
Figura 81 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 12 (b), 26 (c), 42 (d), 64 (e), 92 (f).....	98
Figura 82 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 8 (b), 16 (c), 36 (d), 56 (e), 70 (f).....	98
Figura 83 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 16 (c), 32 (d), 64 (e), 96 (f).....	99
Figura 84 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 16 (c), 32 (d), 42 (e), 56 (f).....	99
Figura 85 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 8 (c), 12 (d), 16 (e), 32 (f).....	100

Figura 86 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 8 (c), 16 (d), 32 (e), 36 (f).....	100
Figura 87 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 64 (c), 128 (d), 256 (e), 356 (f).....	101
Figura 88 Bolhas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 8 (c), 12 (d), 16 (e), 20 (f).....	101
Figura 89 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	103
Figura 90 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 3 (b), 4 (c), 8 (d), 12 (e) e 16 (f).....	103
Figura 91 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	104
Figura 92 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom1</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	104
Figura 93 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	105
Figura 94 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 3 (b), 4 (c), 8 (d), 12 (e) e 16 (f).....	105
Figura 95 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	106
Figura 96 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom2</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	106
Figura 97 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	107
Figura 98 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 3 (b), 4 (c), 8 (d), 12 (e) e 16 (f).....	107
Figura 99 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	108
Figura 100 Bordas detectadas com a imagem do <i>phantom3</i> a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).....	108
Figura 101 Bolhas da imagem Phantom3.bmp para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 512 (a) e bolhas da imagem Phantom3.bmp obtidas com o detector de bolhas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 512 (b).....	109
Figura 102 Bolhas da imagem Phantom2.bmp para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 768 (a) e bolhas da imagem Phantom2.bmp obtidas com o detector de bolhas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 768 (b).....	109
Figura 103 – Bolhas da imagem da Lena para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 64 (a) e bolhas da imagem da Lena obtidas com o detector de bolhas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 64 (b).....	109

Figura 104 Bordas da imagem Phantom3 para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 2 (a) e bordas da imagem Phantom3 obtidas com o detector de bordas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 2 (b).....	110
Figura 105 Bordas da imagem Phantom2 para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 4 e (a) bordas da imagem Phantom2 obtidas com o detector de bordas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 4 (b).....	110
Figura 106 Bordas da imagem da Lena para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 4 (a) e bordas da imagem da Lena obtidas com o detector de bordas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 2 (b).....	111
Figura 107 Representação da imagem #6 da Tabela 2 em espaço de escalas, binarizadas para as escalas 1 (a), 4 (b), 32 (c) e 256 (d).....	111
Figura 108 <i>Pixels</i> das imagens que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento. Em (a) imagem #6 da Tabela 2 e em (b) imagem #3 da Tabela 2.....	112
Figura 109 Exemplo de resultado obtido com cavidade fechada (imagem #6 da Tabela 2), (a) Imagem original com a indicação da cavidade selecionada, (b) Imagem original com as bordas destacadas.....	112
Figura 110 Exemplo de resultado obtido com cavidade fechada (imagem #3 da Tabela 2), (a) Imagem original com a indicação da cavidade selecionada, (b) Imagem original com as bordas destacadas.....	112
Figura 111 Resultados obtidos com o algoritmo de contagem de células para as imagens #1(a), #4(b), #9(c) e #10(d) da Tabela 4.....	113
Figura 112 Imagem resultante da aplicação do operador detector de <i>blobs</i> da função wavelet Haar nas escalas 4 (a), 8 (b), 16 c), 256 (d) (imagem #9 da Tabela 4).....	114
Figura 113 (a) Imagem obtida após ser realizada a operação AND nas imagens apresentadas na Figura 120. Imagem dos <i>blobs</i> restantes após a etapa de eliminação de <i>pixels</i> ruidosos(b).	114
Figura 114 Imagem obtida depois de realizado todo o processamento do método proposto para a imagem da Figura 13 com o operador detector de blobs para a wavelet Haar.....	115
Figura 115 Resultados obtidos com o algoritmo de contagem de células para as imagens #1(a), #4(b) e #10(c) da Tabela 4 usando o detector de bolhas com a wavelet Haar.....	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Medida de força normalizada para seleção de escala.....	31
Tabela 2 Imagens utilizadas, o tipo de cavidade encontrada (Aberta ou Fechada) e o limiar calculado para a sua binarização.....	48
Tabela 3: Resumo das características que as funções wavelets possuem quando submetidas ao algoritmo definido no item 4.3.....	84
Tabela 4: Número das imagens (Img. (#)), contagens obtidas com o método proposto (Cont. 1), contagem manual (Cont. 2), contagem com o método descrito em (KOYA, 2001) (Cont. 3) e contagem usando as bolhas da função wavelet Haar (Cont.4).....	114

LISTA DE ABREVIATURAS

CWT: Transformada Wavelet Contínua

CWT^{-1} : Transformada Wavelet Contínua Inversa

CWT2D: Transformada Wavelet Contínua Bi-dimensional

DTFT: Discrete-Time Fourier Transform

DFT: Discrete Fourier Transform

DFT2D: Discrete Fourier Transform Bi-dimensional

FFT: Fast Fourier Transform

FFT^{-1} : Inverse Fast Fourier Transform

PPGEE: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

1 INTRODUÇÃO

O processamento de imagens tem sido amplamente utilizado para duas tarefas. Uma delas é o realce de imagens para a posterior visualização e a outra tarefa é a extração de informações para análise de imagens, como explica Gonzáles (1992). Este trabalho apresenta um estudo que se situa na segunda tarefa citada. Nele são estudadas duas teorias multi-escalas chamadas de espaço de escala e transformada wavelet.

A teoria do espaço de escala foi inicialmente proposta por Witkin (1983). Nela, a representação de um sinal unidimensional em diferentes escalas é formada pela convolução do sinal de interesse com uma função gaussiana. A escala é dada pela “largura” da gaussiana, que funciona como uma função suavizadora.

A teoria do espaço de escalas para sinais bi-dimensionais foi apresentada por Koenderink (1984). Essa teoria tem sido amplamente utilizada para a extração de informações de imagens. Alguns exemplos de aplicações do espaço de escala são a detecção de bordas (LINDEBERG, 1996), detecção de vértices (CUNHA, 2000), segmentação de estruturas (LINDEBERG, 1992; ZUCCOLOTTO, 2002) e detecção de movimento (LAPTEV, 2004).

A representação de uma imagem no espaço de escala é formada por um conjunto de imagens com diferentes níveis de suavização (escalas). Lindeberg (1992) argumenta que as informações obtidas com o espaço de escala estão contidas de forma implícita nessa representação. Para torná-las explícitas é necessário o uso de operadores. Os operadores do espaço de escalas são obtidos a partir das derivadas das imagens representadas no espaço de escalas. O operador detector de bordas (LINDEBERG, 1996), por exemplo, é definido usando as segunda e terceira derivadas da imagem na direção do gradiente, e o operador detector de bolhas (LINDEBERG, 1992) é definido a partir do laplaciano das imagens no espaço de escalas.

Ao se trabalhar em processamento de imagens multi-escala, não basta extrair informações das imagens nas diferentes escalas, é necessário relacioná-las. Em seus textos iniciais, Witkin (1983) e Koenderink (1984), segundo (FLORACK, 2000) propuseram estudar a denominada estrutura profunda (*deep structure*) de uma imagem, ou seja, o conjunto de estruturas que ocorrem em todos os níveis de resolução simultaneamente. O relacionamento das estruturas extraídas nas diferentes imagens também pode ser realizado com o esboço primário do espaço de escala (*scale space primal sketch*) proposto por Lindeberg (1992).

O espaço de escalas gerado a partir da convolução da imagem com a gaussiana possui as propriedades (LINDEBERG, 1996) de (i) causalidade, (ii) isotropia, (iii) homogeneidade, (iv) não criação de extremos locais, (v) não ênfase de extremos, (vi) estrutura de semi-grupo e (vii) gerador infinitesimal. Florack et. al. (1995) discutem que em um método de representação de imagens onde não há o conhecimento de informações prévias essas propriedades são interessantes, pois, tratam as informações igualmente em todas as direções da imagem. Porém, em algumas aplicações onde se deseja enfatizar algumas direções onde existam informações interessantes, a gaussiana pode não ser a melhor escolha. Outro problema do uso da gaussiana como núcleo do espaço de escalas, destacado por Remaki e Cheriet (1999), é que a região de suporte da gaussiana vai de menos a mais infinito o que implica na necessidade de usar máscaras grandes. Na prática usam-se máscaras com tamanho finito que podem ser dependentes do desvio padrão (σ). Em função desses problemas diversos autores têm procurado desenvolver novos núcleos para o espaço de escala.

Conforme mencionado no início desse capítulo, nesse trabalho são usadas duas teorias de representação de imagens multi-escalas, sendo elas o espaço de escalas e a transformada wavelet. A teoria da transformada wavelet foi proposta por Morlet e Grossmann (1984). Nela a transformada wavelet de um sinal é definida como sendo o produto interno entre o sinal e a função wavelet mãe dilatada (em uma determinada escala) e transladada. Na definição dessa transformada não é definida uma função específica como função wavelet mãe, o que permite a essa transformada uma grande flexibilidade, o que não ocorre no espaço de escala. Nesta transformada são apenas definidas as propriedades que uma função deve ter para ser considerada uma função wavelet. A condição de admissibilidade e a condição de regularidade são as mais importantes. Segundo a primeira condição, a componente de frequência da função para a frequência zero deve ser zero. De acordo com a segunda condição, uma função wavelet deve ser local no domínio tempo e no domínio frequência. Isso implica que as funções wavelets são filtros passa faixas.

Devido a sua grande flexibilidade, a transformada wavelet se tornou um caso geral de outras transformadas multi-escala. O algoritmo de Canny (1986) e o próprio espaço de escala (WITKIN, 1983) são algumas das representações que podem ser consideradas como casos particulares da transformada wavelet. O espaço de escala é um caso particular da transformada

wavelet quando se usam as derivadas da gaussiana para a extração de informações. Essa demonstração foi feita por Mallat (1992), e será vista neste trabalho.

1.1 OBJETIVO

O espaço de escalas e a transformada wavelet são duas teorias multi-escalas que têm sido amplamente utilizadas em processamento de imagens e estas duas teorias estão relacionadas, sendo o espaço de escalas um caso particular da transformada wavelet (MALLAT, 1992). Porém, tais relações não têm sido utilizadas para a solução de problemas de processamento de imagens. Um dos aspectos do espaço de escalas que tem sido amplamente discutido por diversos autores é a sua base (originalmente a gaussiana). Tem se buscado saber se a base gaussiana é a melhor, ou para quais casos ela é a melhor. Além disto, os autores têm procurado desenvolver novas bases, com características diferentes das pertencentes à gaussiana. De posse destas novas bases, pode se fazer a comparação com a base gaussiana e verificar onde cada uma delas apresenta melhor desempenho.

Neste trabalho, será usada (i) a teoria do espaço de escalas, (ii) a teoria da transformada wavelet e (iii) as relações entre elas, com o objetivo de criar novas bases para o espaço de escala a partir das funções wavelets.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Para que seja possível a realização do objetivo deste trabalho, apresentado na seção 1.1, serão realizados os seguintes procedimentos:

- a) Selecionar entre as funções wavelets estudadas quais serão utilizadas;
- b) Criar as funções suavizadoras a partir destas wavelets;
- c) Testar a teoria do espaço de escala e alguns de seus operadores para estas novas funções. Para isto serão utilizadas imagens artificiais e imagens reais;
- d) Se for necessário, criar novos operadores para as novas bases.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são apresentadas as definições teóricas do espaço de escala, da transformada wavelet e as suas relações. Isso permitirá o desenvolvimento de um novo método para o desenvolvimento de novos núcleos para o espaço de escalas a partir de funções wavelets. Este método será apresentado no capítulo Materiais e Métodos.

2.1 REPRESENTAÇÃO DE IMAGENS EM MÚLTIPLAS ESCALAS

Uma propriedade inerente dos objetos é que eles só têm significado em um certo intervalo de escalas, sendo que a escala está associada ao tamanho das ferramentas usadas para extrair informações da imagem. Esta idéia é exemplificada por Lindeberg (1996) através do exemplo da folha, árvore ou floresta. Nesse exemplo, o autor mostra que o conceito de uma árvore só tem sentido se a mesma for observada de alguns centímetros a no máximo a alguns metros. Se ela for observada a uma distância de nanômetros deve-se analisar as partes que constituem uma folha da árvore. E ao se observar a árvore a alguns quilômetros de distância deve-se focar na floresta em que a mesma está situada. Este exemplo mostra a importância da escala ao se observar e descrever objetos em uma imagem.

Com o avanço do uso de computadores nas mais diversas ciências, a necessidade de análise automática de imagens tornou-se uma atividade constante de pesquisa. Neste caso o computador que irá analisar a imagem deve interagir com a imagem usando certas ferramentas. Alguns problemas surgem nesse momento, que são:

- a) quais ferramentas usar;
- b) onde usar;
- c) qual o tamanho essas ferramentas devem ter.

Além disto, essas ferramentas devem ser capazes de lidar com o conceito de escala previamente exposto. Nesse sentido, várias maneiras de se representar uma imagem em múltiplas escalas tem sido utilizadas, por exemplo a *quad-tree* (LINDEBERG, 1994), pirâmides (LINDEBERG, 1994), *wavelets* (DAUBECHIES, 1992) e o espaço de escalas (WITKIN, 1983). A Figura 1 mostra a idéia de representação de uma imagem em múltiplas escalas onde t representa a escala em que a imagem se encontra.

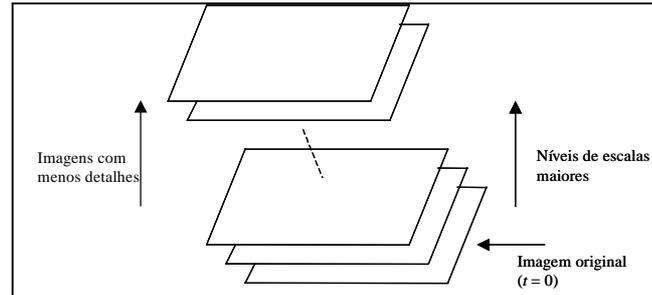


Figura 1 Representação multi-escala de uma imagem.

2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER

Segundo a teoria de Fourier, um sinal pode ser decomposto em um somatório de exponenciais complexas. Tais exponenciais complexas podem ser entendidas como as componentes de frequência do sinal. De acordo com o tipo de sinal, ou seja, analógico ou discreto, periódico ou aperiódico, usa-se a série de Fourier, a transformada de Fourier ou, suas versões discretas. Segundo (OPPENHEIM, 1983), dado um sinal analógico e periódico $x(t)$ definido por:

$$x(t) = x(t + T) \quad (1)$$

onde T é o período do sinal e $t \in \mathfrak{R}$, $t > 0$.

A representação deste sinal pode ser feita com o uso da série de Fourier, dada por:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2)$$

onde ω_0 é a frequência fundamental do sinal e a_k é a amplitude da k -ésima harmônica. Ou, pode ser definida como:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \text{seno}(k\omega_0 t)] \quad (3)$$

onde a_0 é o nível médio do sinal, B_k e C_k são as amplitudes da k -ésima componente cosenoidal e senoidal do sinal respectivamente e ω_0 é a frequência fundamental do sinal. Essa representação demonstra que qualquer sinal periódico pode ser representado por seus componentes elementares em diferentes frequências. Um exemplo dessa decomposição, para um sinal $x(t)$ formado pela soma de duas senóides de frequências diferentes, pode ser visto na Figura 2.

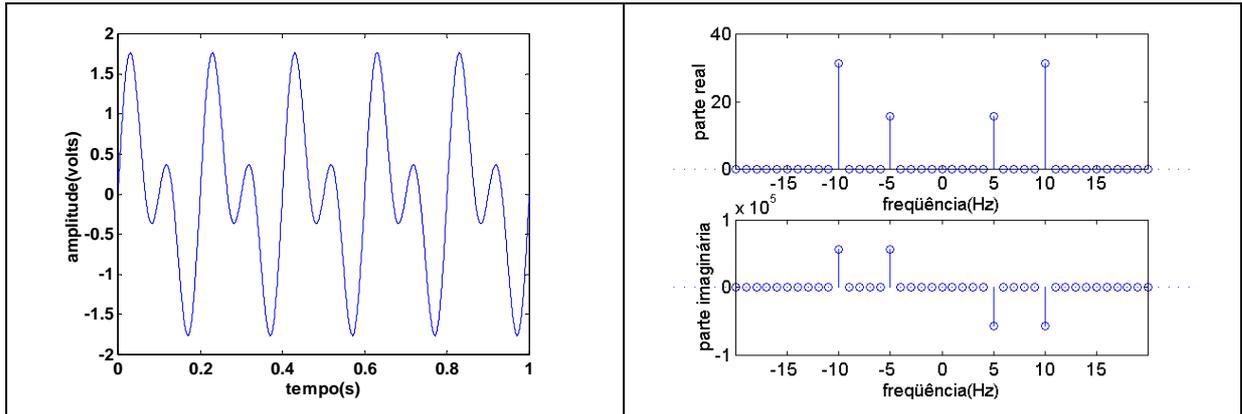


Figura 2 (a) Sinal formado pela soma de duas senóides de 5 Hz e 10 Hz. (b) Série de Fourier do sinal apresentado em (a).

A idéia de representar um sinal como o somatório de exponenciais complexas pode ser estendido para sinais não periódicos, sendo necessário o uso da transformada de Fourier. Dado um sinal aperiódico $x(t)$, sua transformada de Fourier $X(\omega)$ é:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

e sua transformada inversa é:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \quad (5)$$

Para sinais periódicos as exponenciais complexas têm amplitudes a_k (equação (2)) ocorrendo em um conjunto discreto de frequências. No caso de sinais aperiódicos as frequências das exponenciais complexas ocorrem de forma contínua.

A transformada de Fourier apresenta muitas propriedades já bem definidas na literatura, para uma revisão das mesmas recomenda-se (OPPENHEIM, 1983).

Os sinais analisados neste trabalho são versões discretas dos sinais analógicos, necessitando assim a redefinição da série de Fourier e da transformada de Fourier para o caso discreto. Dado um sinal discreto e periódico com algum período $N > 0$, dado por:

$$x[n] = x[n + N] \quad (6)$$

Sua série de Fourier será definida como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (7)$$

onde a_k é definido como:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) n} \quad (8)$$

Os sinais discretos aperiódicos são decompostos em suas componentes de frequência, ou exponenciais complexas com o uso da DTFT (*Discrete-Time Fourier Transform*). Uma aproximação da DTFT pode ser obtida com o uso da DFT (*Discrete Fourier Transform*), com a vantagem de que se pode usar algum algoritmo de *Fast Fourier Transform* (FFT) para seu cálculo. A implementação deste trabalho foi feita em matlab 5.3 que usa, por exemplo, (a) o algoritmo radix-2 para sinais que tenham tamanhos iguais a uma potência de dois, (b) o algoritmo de fator primo para sinais que tenham tamanhos diferentes de uma potência de dois e não sejam números primos e (c) o algoritmo da DFT para sinais com tamanho igual a algum número primo. A definição da DFT para um sinal $x[n]$ aperiódico é dada por:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) n}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

onde N é o número de amostras do sinal, k é a componente discreta de frequência e $\tilde{X}[k]$ é definido como:

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) n}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

No caso de um sinal bidimensional $f(x, y)$, por exemplo uma imagem, GONZÁLES e WOODS (1992) definem a DFT2D como sendo:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}, x = 0, 1, \dots, M-1 / y = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

onde M e N são o número de amostras da imagem nas direções x e y respectivamente, u e v são as componentes das frequências espaciais da imagem e $F(u, v)$ é definido como:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} u = 0, 1, \dots, M-1 / v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

Um exemplo da DFT2D para uma imagem é mostrado na Figura 3.

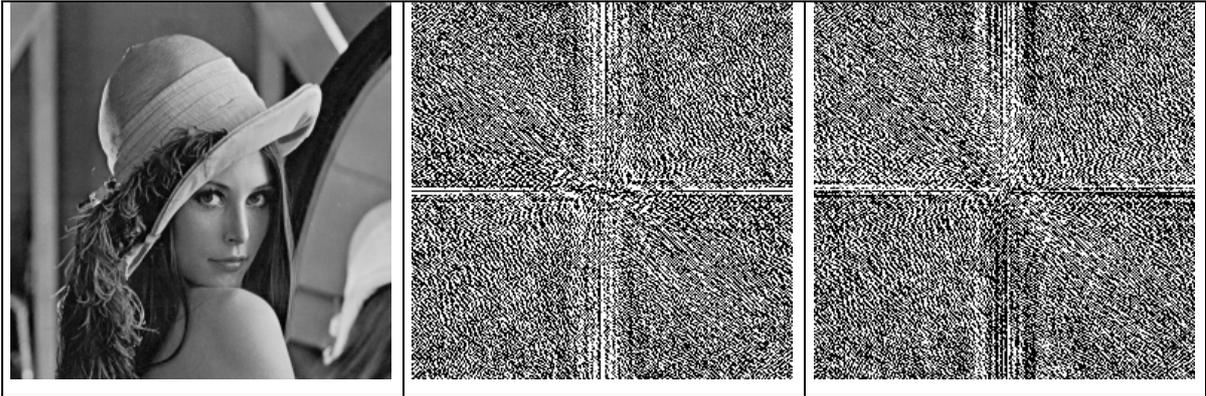


Figura 3 Imagem da Lena e sua DFT2D (parte real e parte imaginária respectivamente).

Como apresentado pela teoria descrita anteriormente e no exemplo da Figura 3, a transformada de Fourier de um sinal mostra quais frequências constituem uma dada imagem, sendo então chamada de uma transformada local no domínio frequência. No entanto, esta transformada não informa onde essas frequências ocorrem, sendo então considerada global no domínio tempo ou espaço para o caso bi-dimensional. Sabe-se que as bordas de uma imagem, por exemplo, estão associadas às altas frequências e para detectá-las é necessário saber onde elas ocorrem. Esse tipo de limitação da transformada de Fourier faz com que seja necessário o uso de outras transformadas para a execução deste tipo de tarefa. Tais transformadas devem ser locais no tempo (ou espaço) e na escala (o termo frequência é reservado ao se referir à transformada de Fourier). Exemplos de transformadas que são usadas para este tipo de tarefa são o espaço de escalas e a transformada wavelet.

2.3 O ESPAÇO DE ESCALA

Inicia-se o estudo de espaço de escalas entendendo-se o conceito de escala nesse domínio. Sabe-se que para observar uma imagem é necessário um instrumento, tal como o olho humano, uma câmera, ou um telescópio. As faixas de escalas que estes instrumentos podem operar são fixadas de duas maneiras (ROMENY, 1996): a escala interna define o menor detalhe que pode ser visto (por exemplo, um elemento da matriz de CCD), ou seja, a resolução da imagem; e a escala externa é o maior detalhe que pode ser visto, ou seja, o tamanho do campo de visão.

A representação de uma imagem em espaço de escalas é um conjunto de imagens que representam a imagem original em diferentes escalas. Matematicamente, dada uma função bidimensional $f(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a sua representação em espaço de escalas $L(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$L(x, y, t) = f(x, y) * g(x, y, t) \quad (13)$$

onde t é a escala, $*$ é o operador convolução e $g(x, y, t) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$, significa o núcleo (*kernel*) gaussiano dado por:

$$g(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi t)} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2t}} \quad (14)$$

onde a escala t é entendido como a variância (σ^2) da função gaussiana. Por simplicidade, não serão apresentadas as variáveis x e y nas definições das funções, sendo $f(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, y, t) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$, $g(x, y, t) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ definidas respectivamente como:

$$f(x, y) = f(\cdot) \quad (15)$$

$$L(x, y, t) = L(\cdot, t) \quad (16)$$

$$g(x, y, t) = g(\cdot, t) \quad (17)$$

As derivadas do espaço de escala (LINDEBERG, 1998) podem ser definidas como:

$$L_{x^\alpha y^\beta}(\cdot, t) = \partial_{x^\alpha y^\beta} L(\cdot, t), \text{ ou} \quad (18)$$

$$L_{x^\alpha y^\beta}(\cdot, t) = \partial_{x^\alpha y^\beta} \{g(\cdot, t) * f(\cdot)\}, \text{ ou} \quad (19)$$

$$L_{x^\alpha y^\beta}(\cdot, t) = \partial_{x^\alpha y^\beta} \{g(\cdot, t)\} * f(\cdot) \quad (20)$$

onde x^α e y^β são as derivadas nas direções x e y respectivamente e (α, β) são as ordens das diferenciações. Pode ser explicada a validade de se calcular as derivadas da imagem no espaço de escala usando (20) através da Transformada de Fourier, como segue:

$$\partial_{x^\alpha y^\beta} \{g(\cdot, t) * f(\cdot)\} \xrightarrow{F} (iw_x)^\alpha (iw_y)^\beta (\hat{G}\hat{F}) = ((iw_x)^\alpha (iw_y)^\beta \hat{G})\hat{F} \quad (21)$$

onde:

$$((iw_x)^\alpha (iw_y)^\beta \hat{G})F \xrightarrow{F^{-1}} \partial_{x^\alpha y^\beta} \{g(\cdot, t)\} * f(\cdot) = L_{x^\alpha y^\beta}(\cdot, t) \quad (22)$$

onde F é o operador DFT2D e F^{-1} é o operador DFT2D inverso, \hat{F} é a DFT2D de $f(\cdot)$ e \hat{G} é a DFT2D de $g(\cdot, t)$. Os resultados destas derivadas podem servir de base para representar um grande número de operadores visuais, tais como, detectores de bordas, bolhas e cristas. Para facilitar a interpretação das equações a notação que será usada para $L_{x^\alpha y^\beta}$ será, por exemplo para $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ L_{xxyyy} ou, para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ L_{xyy} .

Como exemplo de derivadas, pode-se definir a primeira (L_x) e a segunda (L_{xx}) derivada em relação a x como sendo:

$$\begin{aligned} L_x(.,t) &= \partial_x L(.,t) \\ &= \partial_x \{g(.,t) * f(.)\} \\ &= \partial_x \{g(.,t)\} * f(.) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} L_{xx}(.,t) &= \partial_{xx} L(.,t) \\ &= \partial_{xx} \{g(.,t) * f(.)\} \\ &= \partial_{xx} \{g(.,t)\} * f(.) \end{aligned} \quad (24)$$

A escolha da função gaussiana para gerar o espaço de escala não é arbitrária. Esta função satisfaz a todos os axiomas que definem o espaço de escalas (LINDEBERG, 1996; CUNHA, 2000; BOSWORTH, 2003). São eles:

a) Causalidade: O conceito de causalidade introduzido por Koenderink (1984) significa que novas superfícies de nível não podem ser criadas com o aumento do parâmetro t . O que significa dizer que não há criação de detalhes com o aumento de escala, ou seja, detalhes em escalas maiores sempre têm causa em detalhes de escalas menores. Ou ainda, um objeto em escalas maiores é uma simplificação do mesmo objeto em uma escala menor.

b) Isotropia: Segundo este axioma, não há direções preferenciais para a representação de um detalhe (borda, crista ou bolha).

c) Homogeneidade: Este axioma exige que um operador no espaço de escalas seja invariante por translação.

d) Não criação de extremos locais: Para que um núcleo não crie extremos locais, ele deve ser não negativo e unimodal (o valor do núcleo deve crescer até atingir seu máximo e decrescer a partir dele).

e) Não ênfatização de extremos: O axioma de não aumento de extremo implica que: se para algum nível de escala t_0 , um ponto x_0 é um extremo local, não degenerado, então seu valor não pode crescer quando o parâmetro escala aumenta. Analogamente, se o ponto for um mínimo local, não degenerado, então o seu valor não pode decrescer com o aumento do parâmetro escala.

f) Estrutura de semi-grupo: A estrutura de semi-grupo, para núcleos de uma mesma família, implica que o resultado de uma convolução entre dois núcleos, entre outras propriedades, tem que gerar um outro núcleo pertencente a mesma família. As propriedades que definem um semi-grupo C_0 , no espaço de Banach E , são (PAZOS, 1995):

$$g(., t_1) * g(., t_2) = g(., t_1 + t_2), \quad (25)$$

para todo $t_1, t_2 \geq 0$;

$$g(x, y, 0) = I_E, \quad (26)$$

onde I_E é o operador identidade;

$$t \rightarrow g(., t) * f(.) \quad (27)$$

é contínuo para $t \geq 0$ e cada $f(x, y) \in E$.

g) Gerador infinitesimal: Para a família do espaço de escala ter um operador infinitesimal é necessária a estrutura de semi-grupo e ter continuidade em relação à escala. Em outras palavras, se um operador de transformação τ_t transforma o sinal original em sua representação no espaço de escalas, para qualquer escala t , definido por:

$$L(., t) = \tau_t f, \quad (28)$$

então sobre condições de regularidade razoável (LINDEBERG, 1996) existe o caso limite deste operador (gerador infinitesimal), dado por:

$$Af = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_h f - f}{h} \quad (29)$$

2.3.1 Detecção de Bolhas em Espaço de Escala

Ao se lidar com uma imagem real em tons de cinza como se fosse uma superfície tridimensional, os objetos se tornarão bolhas (*blobs*), conforme LINDEBERG (1992). A partir desta análise, existem dois tipos de bolhas, uma delas formado por regiões claras em um fundo escuro e o outro formado por regiões escuras em um fundo claro. Um exemplo para o primeiro caso é visto na Figura 4.

As bolhas possuem as seguintes características (LINDEBERG, 1993b):

- a) Possuem pelo menos um extremo local.
- b) O nível base é a altura onde duas bolhas adjacentes se tocam.
- c) Seu contraste é a diferença de altura do extremo local e a altura do nível base.
- d) A região de suporte é definida como sendo os pontos que tem nível superior ao nível base que podem ser atingidos a partir do extremo sem precisar passar por um ponto com altura inferior a do nível base.

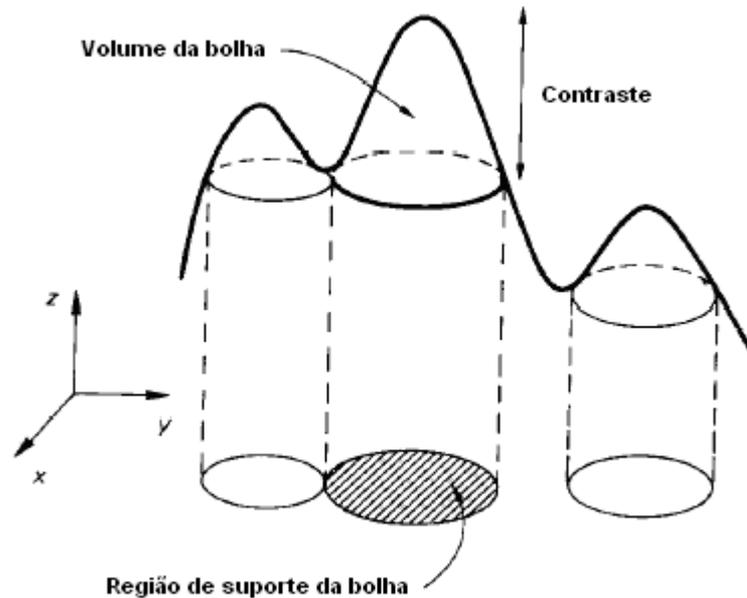


Figura 4 Definição de bolhas para um sinal bidimensional. Esta figura mostra bolhas claras em um fundo escuro.

e) O volume da bolha é delimitado pela superfície de nível e o nível base.

O detector de bolhas, para imagens com regiões claras em um fundo escuro, por exemplo, é definido através do laplaciano da imagem por (LINDBERG, 1992):

$$\begin{aligned} I(\cdot) = 0, \quad \nabla^2 L(\cdot, t) > 0 \\ I(\cdot) = 1, \quad \nabla^2 L(\cdot, t) \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

onde I é a imagem binarizada, sendo 0 = preto = fundo da imagem e 1 = branco = bolha, e o laplaciano $\nabla^2 L(\cdot, t)$ é dado por:

$$\nabla^2 L(\cdot, t) = L_{xx}(\cdot, t) + L_{yy}(\cdot, t) \quad (31)$$

onde $L_{xx}(\cdot, t)$ é a derivada segunda de $L(\cdot, t)$ em relação a x e $L_{yy}(\cdot, t)$ é a derivada segunda de $L(\cdot, t)$ em relação a y .

2.3.2 Detecção de Bordas em Espaço de Escala

Em processamento de imagens a detecção de bordas é uma tarefa comumente realizada, pois, estas estruturas delimitam as fronteiras entre regiões distintas. Considerando uma imagem como uma função bi-dimensional cujo valor que esta função retorna é a sua intensidade, as bordas são os *pixels* onde esta função intensidade muda abruptamente (SONKA, 1998).

Uma maneira de encontrar os *pixels* que formam a borda dos objetos em uma imagem é através do operador gradiente. Este operador é formado pela soma das derivadas parciais da imagem nas direções x e y. Este operador gera um vetor com módulo e fase. Sendo o módulo da borda igual ao módulo do gradiente e a direção da borda igual à direção do gradiente defasada de menos noventa graus (Figura 5), ou seja, a direção onde existem *pixels* com a mesma intensidade. Para calcular o módulo e a direção do gradiente são usadas as equações (32) e (33), respectivamente:

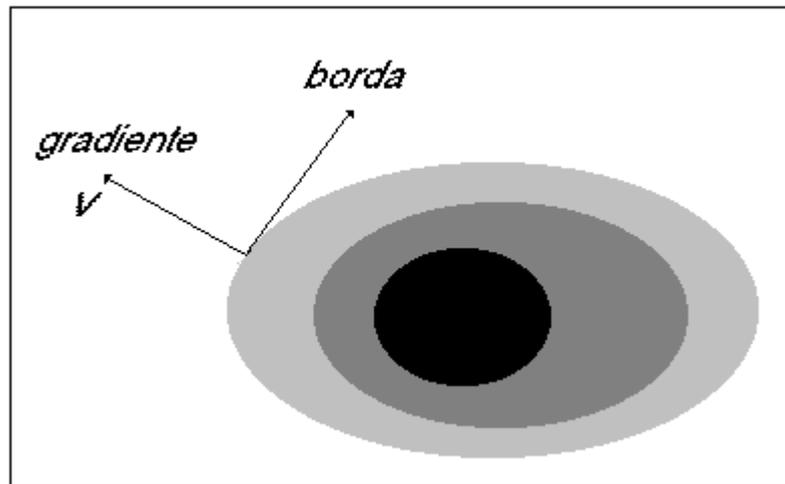


Figura 5 Direção do gradiente e da borda, onde as linhas contínuas denotam intensidades iguais.

$$|\text{grad}(g(x, y))| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \quad (32)$$

$$\psi(g(x, y)) = \arg\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad (33)$$

As bordas possuem diferentes tipos de perfil. Em (SONKA, 1998), o autor apresenta quatro diferentes tipos, sendo eles, o degrau (*step*), o telhado (*roof*), o linha (*line*) e o ruidoso (*noisy*). O perfil tipo degrau é apresentado na Figura 6 (a).

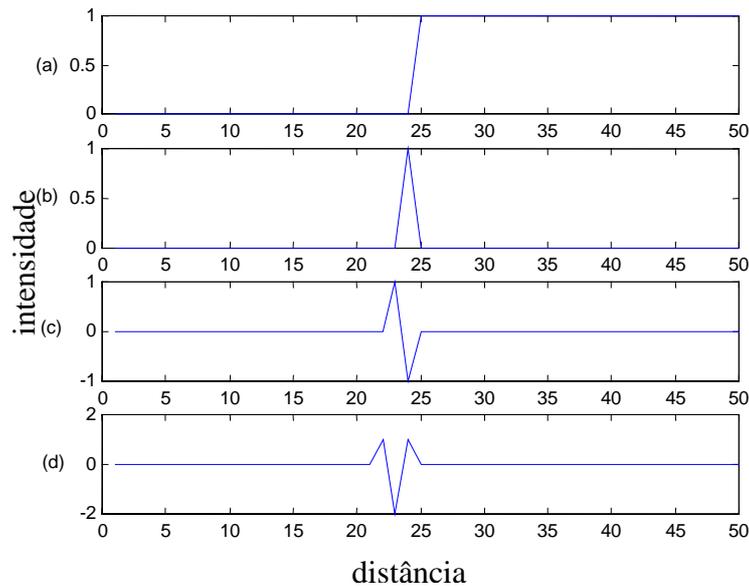


Figura 6 (a) Perfil da borda, (b) sua derivada, (c) segunda derivada e (d) terceira derivada.

Foram calculadas as três primeiras derivadas deste perfil. Elas são apresentadas na Figura 6 (b), (c) e (d), respectivamente. Baseado nestas derivadas, podem ser usadas diferentes lógicas para a detecção dos *pixels* de borda. Mallat (1992) sugere o uso da primeira e segunda derivadas. Nesse caso, um *pixel* será *pixel* de borda quando a primeira derivada for máxima e a segunda derivada for igual a zero.

Lindeberg (1996) propõe a detecção dos *pixels* de borda usando a segunda e terceira derivada da imagem no espaço de escala. Nesse caso um *pixel* será *pixel* de borda se a segunda derivada for zero e a terceira derivada for negativa. Para realizar os cálculos o autor introduz um sistema de coordenadas locais (u, v) . Sendo v paralelo a direção do gradiente e u perpendicular a v . Com isto um *pixel* será definido como *pixel* de borda se a derivada segunda L_{vv} na direção v for zero e a derivada terceira L_{vvv} na direção v for negativa (1996):

$$L_{vv} = 0 \quad (34)$$

$$L_{vvv} < 0 \quad (35)$$

Reescrevendo-se (34) e (35) em função de x e y e suprimindo o termo de normalização (LINDBERG, 1998) tem-se:

$$\tilde{L}_{vv} = L_x^2 L_{xx} + 2L_x L_y L_{xy} + L_y^2 L_{yy} = 0 \quad (36)$$

$$\tilde{L}_{vvv} = L_x^3 L_{xxx} + 3L_x^2 L_y L_{xxy} + 3L_x L_y^2 L_{xyy} + L_y^3 L_{yyy} < 0 \quad (37)$$

2.3.3 Formas de Medida de Importância de Detalhes Detectados Usando o Espaço de Escalas.

Uma vez representada uma imagem em diferentes escalas, diferentes detalhes (bordas, bolhas ou cristas) podem ser extraídos das mesmas. Então, é necessário encontrar uma forma de avaliar o grau de importância de cada detalhe nas diversas escalas, de forma a caracterizar quais são mais importantes. Existem diversas formas para realizar essa medida, por exemplo, o uso da derivada normalizada, tempo de vida útil, volume, área ou contraste de bolhas.

Como ferramenta a ser utilizada na medida de características extraídas da imagem usando as derivadas do espaço de escala (20), Lindeberg (1993b) introduziu a idéia de derivada normalizada. Esta idéia foi estendida para derivada normalizada com parâmetro γ (LINDEBERG, 1998):

$$\partial_{x,\gamma-norm} = t^{\gamma/2} \partial_x \quad (38)$$

A seleção da escala depende do tipo de característica que se busca extrair da imagem. Porém, o princípio de funcionamento é calcular alguma característica da imagem usando (38) e selecionar a escala em que este parâmetro atinge um máximo. A Tabela 1 mostra para cada tipo de operador a forma de como medir a força deste operador de forma normalizada (LINDEBERG, 1996).

Tabela 1 Medida de força normalizada para seleção de escala.

Tipo de operador	Medida de força normalizada para seleção de escala	Valor de γ
Borda	$t^{\gamma/2} L_v$	$1/2$
Crista	$t^{2\gamma} (L_{pp} - L_{qq})^2$	$3/4$
Bolha	$t^{\gamma} \nabla^2 L$	1

onde v é a direção do gradiente e (p, q) formam um sistema de coordenadas alinhado com a direção da curvatura principal (LINDEBERG, 1996).

Outro método apresentado por Lindeberg e Eklundh (1992) para classificar a importância de uma estrutura é o tempo de vida útil. Segundo este conceito quanto maior for o tempo de vida útil de um elemento (a presença destes elementos nas diferentes imagens do espaço de escalas) maior será a sua importância.

Explicando o conceito de tempo de vida útil para bolhas, pode-se dizer inicialmente que as bolhas que existem em um nível de escala representada em espaço de escala terão uma bolha similar em um nível de escala menor e em um nível de escala maior. Mas, em alguns

níveis de escala no espaço de escala pode ser impossível encontrar uma bolha em uma escala maior ou menor que seja similar a bolha representada na escala atual. Nesse caso um efeito catastrófico de conectividade entre as bolhas ocorreu. Os efeitos que podem ocorrer nessas situações são a aniquilação, fusão, divisão ou criação das bolhas. Estes pontos são usados para delimitar a extensão em escala dessas bolhas. Conseqüentemente, cada bolha no espaço de escala será associada a uma escala mínima e a uma escala máxima. A diferença entre essas duas escalas é chamada de tempo de vida útil da bolha em espaço de escala.

Quando se representa uma imagem em um determinado e delimitado conjunto de escalas, podem existir bolhas que estejam presentes em todas as escalas. Neste caso pode-se dizer que tais bolhas possuem tempo de vida útil igual a cem por cento. Foi criado então uma nova forma de avaliar a importância dos objetos representadas em espaço de escala. Segundo esta forma de avaliação, serão importantes os objetos que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento, e não serão importantes os demais objetos.

2.4 WAVELETS

A transformada wavelet é uma ferramenta matemática eficiente para a análise local de sinais não estacionários e transientes (ZHANG, 2001). Isto faz dela uma alternativa para a solução das deficiências, descritas no início do capítulo, da transformada de Fourier. As funções base da transformada wavelet, as wavelets, são geradas por dilatação e translação da wavelet mãe. Para ser uma wavelet a função deve satisfazer a condição de admissibilidade e regularidade. Como será visto neste capítulo, essas funções são locais no tempo (ou espaço) e em escala.

A Transformada Wavelet permite o uso de duas versões distintas, sendo elas a CWT (*Continuous Wavelet Transform*) e a DWT (*Discrete Wavelet Transform*). Neste trabalho usou-se apenas a CWT, pois, o espaço de escalas também é contínuo e assim é possível relacionar essas duas teorias, como será visto adiante nesse capítulo.

2.4.1 A Transformada wavelet contínua (CWT)

A CWT de um sinal $f(x) \in L^2$ (onde L^2 é um exemplo de espaço de Hilbert (DAUBECHIES, 1992)) é a decomposição do sinal $f(x)$ em um conjunto de funções base $\psi_{s,\tau}(x)$, chamadas de wavelets, dada por:

$$W_f(t, \tau) = \langle f, \psi_{t, \tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s, \tau}^*(x) dx, \quad (39)$$

onde $\langle \rangle$ é a operação matemática produto interno em L^2 , * indica o complexo conjugado. No entanto, muitas funções wavelets usadas são reais e este termo pode ser eliminado. As funções wavelets são geradas a partir de uma única função base (*mother wavelet*) $\psi(x)$ através de dilatação e translação, dada por:

$$\psi_{t, \tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \psi\left(\frac{x - \tau}{t}\right), \quad (40)$$

onde $t \neq 0$ é o fator de dilatação ou escala e τ é o fator de translação. Substituindo-se (40) em (39) tem-se a definição da CWT:

$$W_f(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^*\left(\frac{x - \tau}{t}\right) dx \quad (41)$$

onde $\frac{1}{\sqrt{t}}$ é um fator de normalização de energia e implica em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{s, \tau}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (42)$$

Uma condição necessária para que uma função seja uma *wavelet* é a condição de admissibilidade, dada por:

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|^2} dw < \infty, \quad (43)$$

onde c_ψ é uma constante e $\hat{\psi}(w)$ é a transformada de Fourier da função *wavelet*. Uma consequência de (43) é que a transformada de Fourier da *wavelet* para $w=0$ deve ser zero, como indicado:

$$\left. \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|^2} \right|_{w=0} = 0, \quad (44)$$

o que leva a seguinte definição no domínio tempo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (45)$$

A Condição de admissibilidade garante a existência da CWT^{-1} (*Inverse Continuous Wavelet Transform*), pois, satisfaz a Resolução da Identidade definida por Daubeschies

(1992). A partir desta condição pode-se afirmar que um sinal decomposto por (41) pode ser recuperado sem perdas de informações, pela CWT⁻¹ dada por:

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{t,\tau} \rangle \psi_{t,\tau}^* \frac{dtd\tau}{t^2} \quad (46)$$

2.4.2 A Transformada Wavelet Contínua Bi-dimensional (CWT2D)

A CWT pode ser estendida para duas ou mais dimensões com exatamente as mesmas propriedades do caso 1D (ANTOINE, 1993). Dado um sinal bidimensional (2D), por exemplo, uma imagem $f(x,y)$ a sua CWT2D com relação a *wavelet* ψ é:

$$W2D(t, \theta, b_x, b_y) = \frac{1}{t} \left\langle \psi \left(\frac{r_\theta(x-b_x, y-b_y)}{t} \right), f(x, y) \right\rangle = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{r_\theta(x-b_x, y-b_y)}{t} \right)^* f(x, y) dx dy \quad (47)$$

onde $\langle \rangle$ é o operador matemático produto interno, ψ é a *wavelet* bi-dimensional, transladada de b_x na direção x e b_y na direção y , dilatada de t ($t > 0$) e girada de θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) onde r_θ é a matriz de rotação da *wavelet*. Para ser válida a definição (47) é necessário que a imagem $f(x,y)$ tenha energia finita, seja integrável ao quadrado e definida no plano \mathfrak{R}^2 , ou seja, a função $f(x, y) \in L^2$, o que implica em:

$$\|f(x, y)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (48)$$

A função *wavelet* deve ser um sinal que satisfaça a condição de admissibilidade:

$$c_\psi = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(s, \theta, w_x, w_y)|^2}{w_x w_y} dw_x dw_y < \infty \quad (49)$$

onde $\hat{\psi}(s, \theta, w_x, w_y)$ é a transformada de Fourier da função *wavelet*, w_x e w_y são as frequências espaciais nas direções x e y , respectivamente.

A condição de admissibilidade, como no caso 1D, significa que a *wavelet* deve ser zero para w_x e w_y iguais a zero, ou seja:

$$\left| \hat{\psi}(w_x, w_y) \right|_{w_x=w_y=0} = 0 \quad (50)$$

ou no domínio espacial:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dx dy = 0. \quad (51)$$

A reconstrução da imagem original, a partir dos componentes da CWT2D, é dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{c_{\psi}^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{s, \theta, b_x, b_y}(x, y) W2D(t, \theta, b_x, b_y) \frac{dt d\theta db_x db_y}{t^3} \quad (52)$$

A CWT2D definida em (47) é uma transformada com quatro parâmetros (t, θ, b_x, b_y) (ANTOINE, 1993). Para tornar possível a visualização desta transformada é necessário que se fixe alguns dos parâmetros. Diversas são as combinações possíveis, porém as combinações onde se mantém (b_x, b_y) ou (a, θ) fixos têm sido mais exploradas, uma vez que, a sua interpretação física é de grande importância. Por exemplo, para (b_x, b_y) fixos se tem uma visão da frequência espacial (ANTOINE, 1993). No caso de (a, θ) fixos se mostra a distribuição espacial (ANTOINE, 1993). Este trabalho usa esta segunda abordagem e assim, a CWT2D de uma imagem $f(x, y)$ é dada por:

$$W2D_{t, \theta}(b_x, b_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{s, \theta}(x - b_x, y - b_y) f(x, y) dx dy \quad (53)$$

A transformada de Fourier de $W2D$ é dada por:

$$\hat{W2D}_{t, \theta}(b_x, b_y) = \hat{\psi}_{t, \theta}(w_x, w_y) \hat{f}(w_x, w_y) \quad (54)$$

2.4.3 As Famílias de wavelets mãe

As wavelets mãe (*mother wavelets*) podem ser definidas de diversas formas, ou por uma equação explícita no domínio tempo (ou espaço), ou por suas características no domínio frequência. Como exemplo, citam-se as famílias:

- a) Morlet
- b) Mexican hat
- c) Meyer
- d) Haar
- e) Daubechies
- f) Symlets
- g) Coiflets
- h) Splines biorthogonal wavelets

Estas famílias apresentam formas e características muito diferentes. Para exemplificar estas diferenças são apresentadas as definições das funções wavelets Haar, Morlet e Mexican Hat.

2.4.3.1 Wavelet Haar

A função Haar foi introduzida, historicamente por Haar em 1910 (DAUBECHIES, 1992). Esta função é um degrau bipolar, definido por:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases} \quad (55)$$

A wavelet Haar é uma função real, anti-simétrica com relação a $x = 1/2$. Essa função satisfaz a condição de admissibilidade. Na Figura 7 é apresentada a função PSI da wavelet Haar.

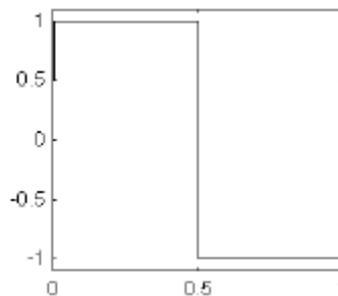


Figura 7 Imagem da função PSI da wavelet Haar.

Nesse trabalho, é usada uma versão da wavelet Haar com simetria em relação a $x = 0$, definida por:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (56)$$

2.4.3.2 Wavelet Morlet

A *wavelet* Morlet foi introduzida por Martinet, Morlet e Grossmann (BENTLEY, 1994). Esta função é a multiplicação da base de Fourier por uma gaussiana, definida por:

$$\psi(x) = e^{jw_0x} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (57)$$

Esta função é complexa, sendo sua parte real uma função co-seno gaussiana e sua parte imaginária uma função seno gaussiana. Em diversos trabalhos apenas a parte real desta função complexa é considerada (Figura 8), sendo definida por:

$$\psi(t) = \cos(w_0t) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (58)$$

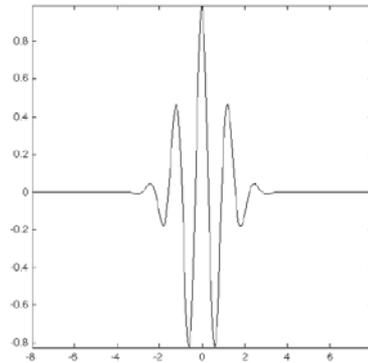


Figura 8 Imagem da função PSI da wavelet Morlet.

A Morlet não satisfaz a condição de admissibilidade, o que quer dizer que:

$$\left| \hat{\psi}(w) \right|_{w=0}^2 \neq 0 \quad (59)$$

Porém, para frequências (w_0) grandes o suficiente, por exemplo $w_0 = 5$, a condição de admissibilidade é praticamente satisfeita.

2.4.3.3 Wavelet Mexican Hat

A *wavelet Mexican Hat* foi introduzida por Gabor (SHENG, 1996) e é definida a partir da segunda derivada da gaussiana, definida por:

$$\psi(t) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (60)$$

A função *Mexican Hat* é real e par (Figura 9). Ela satisfaz a condição de admissibilidade, também é local tanto no domínio do tempo quanto da frequência. Além disto ela é infinitamente derivável. De fato, qualquer derivada de ordem n da gaussiana pode ser uma *wavelet* (SHENG, 1996).

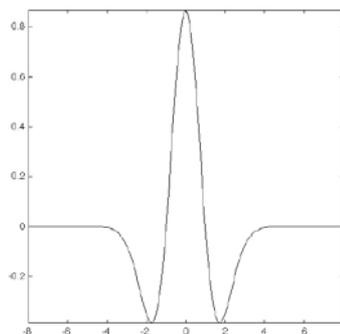


Figura 9 Imagem da função PSI da wavelet Mexican Hat.

2.5 RELAÇÕES ENTRE O ESPAÇO DE ESCALAS E A TRANSFORMADA WAVELET.

As relações entre o espaço de escalas e a transformada *wavelet* foram demonstradas por Mallat (1992). Nesta demonstração o autor afirma que a teoria do espaço de escala, desenvolvida antes do surgimento da teoria das *wavelets* é um caso especial da última. Lindeberg (1994) confirma esta afirmação. Mallat, além de demonstrar as relações entre essas duas teorias, acabou criando um método de gerar funções *wavelets* a partir de funções suavizadoras. Este novo método será usado no capítulo 4 para criar um novo método para gerar novas bases para o espaço de escala a partir das famílias de funções *wavelets*. De acordo com Malat, a demonstração para o caso unidimensional das relações entre o espaço de escala e a transformada *wavelet* é feita da seguinte forma:

Seja uma função suavizadora $\theta(x)$ tal que $\theta(x) = O\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, cuja integral seja diferente de zero. Onde O significa que o limite da divisão entre $\theta(x)$ e a função $\frac{1}{1+x^2}$ quando x tende a zero ou a infinito é uma constante diferente de zero (DAUBECHIES, 1992). Tal função suavizadora pode ser vista como a resposta ao impulso de um filtro passa baixa. Um exemplo de função suavizadora freqüentemente usada em processamento de imagens é a função gaussiana. Então, seja $\theta_s(x)$ dado por:

$$\theta_t(x) = \frac{1}{t} \theta\left(\frac{x}{t}\right) \quad (61)$$

Dada uma função $f(x)$, real e pertencente à $L^2(\mathfrak{R})$, os *pixels* de borda de $f(x)$ na escala t e suavizadas por $\theta_t(x)$ serão *pixels* onde $\psi_x(x)$ for máximo e $\psi_{xx}(x)$ cruzar por zero, sendo $\psi_x(x)$ e $\psi_{xx}(x)$ definidas, respectivamente, como:

$$\psi_x(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (62)$$

$$\psi_{xx}(x) = \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \quad (63)$$

As transformadas *wavelet* definidas para cada uma dessas funções são:

$$W_x f(t, x) = f(x) * \psi_{xt}(x) \quad (64)$$

e

$$W_{xx} f(t, x) = f(x) * \psi_{xxt}(x) \quad (65)$$

ou,

$$W_x f(t, x) = f(x) * \left(t \frac{d\theta_t(x)}{dx} \right) = t \frac{d}{dx} (f(x) * \theta_t(x)) \quad (66)$$

e

$$W_{xx} f(t, x) = f(x) * \left(t^2 \frac{d^2 \theta_t(x)}{dx^2} \right) = t^2 \frac{d^2}{dx^2} (f(x) * \theta_t(x)) \quad (67)$$

As Transformadas $W_x f(t, x)$ e $W_{xx} f(t, x)$ são proporcionais, respectivamente, a primeira e segunda derivadas de $f(x)$ suavizada por $\theta_t(x)$. Para uma escala fixa t , os pontos de extremos de $W_x f(t, x)$ correspondem aos pontos de cruzamento por zero de $W_{xx} f(t, x)$ e aos pontos de inflexão de $f(x) * \theta_t(x)$, ou seja, as bordas de $f(x)$.

Quando o filtro $\theta_t(x)$ for uma função gaussiana, pode-se mudar o seu nome de $\theta_t(x)$ para $g_t(x)$, conforme a notação do espaço de escalas, ou seja:

$$g_t(x) = \theta_t(x) \quad (68)$$

Re-escrevendo (66) e (67) a partir de (68), tem-se:

$$W_x f(t, x) = f(x) * \left(t \frac{dg_t(x)}{dx} \right) = t \frac{d}{dx} (f(x) * g_t(x)) \quad (69)$$

e

$$W_{xx} f(t, x) = f(x) * \left(t^2 \frac{d^2 g_t(x)}{dx^2} \right) = t^2 \frac{d^2}{dx^2} (f(x) * g_t(x)) \quad (70)$$

A menos de um constante multiplicativa, pode-se dizer que:

$$W_x f(t, x) = L_x \quad (71)$$

e

$$W_{xx} f(t, x) = L_{xx} \quad (72)$$

Assim foi demonstrada, por Mallat (1992), a relação entre o espaço de escala e a transformada wavelet.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Visando uma maior compreensão dos conceitos que envolvem a teoria do espaço de escalas e da transformada Wavelet, é apresentada nesse capítulo a revisão de literatura. Nela são mostradas as evoluções das duas teorias, desde sua criação até o estado da arte.

3.1 O ESPAÇO DE ESCALA

A teoria de espaço de escala é uma ferramenta desenvolvida pela comunidade de visão computacional e foi proposta por Witkin (1983). Nela, a representação de um sinal unidimensional em diferentes escalas é formada pela convolução do sinal de interesse com uma função gaussiana. A escala é dada pela “largura” da gaussiana, que funciona como uma função suavizadora.

Uma imagem é a representação, através de uma função bi-dimensional, das informações obtidas a respeito do mundo real a partir da luz refletida nele. Para processar estas informações de forma a se extrair estruturas significativas é necessário tratar o problema da escala, como enfatizado por Koenderink (1984).

A representação em espaço de escala não contém as informações a respeito da imagem de forma explícita, e sim implícita (LINDEBERG, 1992). Lindeberg e Eklundh (1992) apresentam uma nova representação multi-escala de estruturas em níveis de cinza, chamada *Scale-space primal sketch*, que torna explícita algumas características (*features*) em espaço de escala e também as relações entre as características em diferentes níveis de escala. Esta representação gera uma descrição qualitativa da estrutura da imagem permitindo a extração de estruturas significativas, tais como, escalas estáveis e regiões de interesse. Experimentos em imagens reais obtiveram resultados razoáveis, conforme mencionam os autores.

Lindeberg (1993b) apresenta (i) uma revisão do *Scale-space primal sketch*; (ii) uma metodologia para extrair estruturas significantes da imagem do tipo bolha; e (iii) aplicações para detecção de bordas, análise de histogramas e classificação de junções, demonstrando como o método proposto pode ser usado para guiar os próximos estágios de processamento de imagens.

O espaço de escalas gerado a partir da convolução da imagem com a gaussiana (WITKIN, 1983) é o único que possui as propriedades (LINDEBERG, 1996) (i) causalidade, (ii) isotropia, (iii) homogeneidade, (iv) não criação de extremos locais, (v) não ênfase de

extremos, (vi) estrutura de semi-grupo e (vii) gerador infinitesimal. Florack et. al. (1995) discutem que em um método de representação de imagens onde não há o conhecimento de informações prévias essas propriedades são interessantes, pois tratam as informações igualmente em todas as direções da imagem. Porém, em algumas aplicações onde se deseja enfatizar algumas direções onde existam informações interessantes, a gaussiana pode não ser a melhor escolha. Para este tipo de problema outros núcleos podem ser usados, podendo eles ser lineares ou não. Nesse trabalho, Florack et. al. (1995) propõem o uso do espaço de escalas não linear.

Quando se extrai informações de uma imagem usando operadores do espaço de escala, o tipo de informação extraída é extremamente dependente das escalas usadas. Lindeberg (1996) apresenta um mecanismo para a seleção automática das escalas para a detecção de estruturas uni-dimensionais, tais como, bordas e cristas. O autor também introduz um novo conceito para bordas em espaço de escala. Definindo a borda como um conjunto de pontos conectados onde (i) a magnitude do gradiente da imagem assume um máximo local na direção do gradiente, e (ii) uma medida normalizada da força da borda assume um máximo local em relação às escalas. Nesse trabalho são apresentadas duas formas diferentes de medir a força da borda.

Wang e Lee (1998) apresentam a teoria do espaço de escala baseado em uma base formada por B-splines. Os autores apresentam como pode se usar as B-splines para gerar representações contínuas, diádicas e compactas para o espaço de escala. Um algoritmo rápido para a implementação do espaço de escala contínuo é proposto. Para o caso diádico, algoritmos eficientes são obtidos a partir de técnicas de B-spline e são usados para analisar a geometria de imagens. A relação entre várias formas de se obter o espaço de escala são estudadas. Em especial, a evolução da teoria wavelet a partir dos filtros do espaço de escala pode ser entendida em termos de B-spline, conforme Wang e Lee (1998). Neste trabalho, os autores propõem o espaço de escala para sinais uni-dimensional e estendem para bi-dimensionais usando o produto tensorial.

Weickert et. al. (1999), apresentam à comunidade científica um relato sobre os estudos feitos por Tazio Iijama e publicados em um artigo em 1959 em japonês. Neste artigo, Iijama propõe axiomas que definem o espaço de escala gaussiano uni-dimensional.

Um problema do uso da gaussiana como núcleo do espaço de escalas, destacado por Remaki e Cheriet (1999), é que a região de suporte da gaussiana se estende de menos a mais infinito, o que implica na necessidade de usar máscaras grandes. Na prática são usadas

máscaras com tamanhos finito e que podem ser dependes do desvio padrão (σ). Alguns exemplos de tamanhos são 11.31σ ou 6σ (REMAKI, 1999). Porém, ao usar núcleos que tenham suporte compacto pode-se reduzir o custo computacional para a representação e/ou extração de informações em espaço de escala. Nesse trabalho, Remaki e Cheriet propõem um núcleo com suporte compacto o que permite usar uma máscara com tamanho de apenas 2σ .

Cunha (2000) discorre sobre as principais propriedades teóricas de espaços de escala lineares contínuos e discretos, e descreve vários tipos de espaços de escala discretos, a saber: (a) gaussiana amostrada, (b) Poisson, (c) gaussiana recursiva, (d) convoluções cruzadas, (e) splines e (f) gerador infinitesimal. Também discorre sobre detalhes específicos da implementação destes espaços de escala discretos. Ainda descreve métodos para a detecção de arestas a partir de uma imagem e a partir da análise multi-escala de uma imagem, como também alguns detalhes dessas implementações.

Zuccolotto, Olabbarriaga e Schuck Jr. (2001) estudam a aplicação da teoria do espaço de escalas na segmentação de cavidades em imagens eco-cardiográficas. Iniciam apresentando o problema da segmentação em imagens eco-cardiográficas, seguido por uma breve revisão da teoria do espaço de escalas. Os autores utilizam para detecção do centro da cavidade de interesse um operador do tipo detector de bolhas e a escolha da escala adequada baseia-se na máxima resposta deste operador em uma faixa de valores de escalas pré-definidas. O tamanho da cavidade é estimado em função da melhor escala.

Bosworth e Acton (2003) apresentam uma revisão extensiva do estado da arte em técnicas de geração de espaço de escala para processamento de imagens, incluindo métodos lineares, métodos baseados em difusão e enfatizam os métodos morfológicos. Após, introduzem uma nova abordagem morfológica para o espaço de escala, chamado “lomo”. A técnica introduz uma generalização bi-dimensional do conceito de sinais localmente monotônicos. O lomo é uma representação de imagens localmente monotônicas onde a escala é especificada pela extensão espacial ou grau de monotonicidade local. O processo morfológico usado para gerar o lomo mantém muitas das propriedades desejáveis de outros métodos morfológicos, tais como, localização de bordas e suavização de extremos. Em contraste com outros métodos morfológicos, em espaço de escala, os filtros aplicados são *self-dual* não introduzindo o erro de *bias* em nível de cinza nas representações em diferentes escalas. O método em espaço de escala revisado e introduzido pode ser aplicado a várias tarefas de processamento multi-escala, como segmentação, compressão baseada em objetos, busca baseada em conteúdo, e localização em vídeo.

Laptev e Lindeberg (2004), apresentam um estudo experimental da influência da adaptação da velocidade para o reconhecimento de padrões espaço-temporal usando métodos estatísticos baseados em histograma. A idéia básica consiste em adaptar a forma das bases usadas para filtrar a imagem na direção da velocidade local, permitindo a obtenção de descritores da imagem que são invariantes ao movimento relativo entre a câmera e os objetos ou eventos em estudo que estão no plano da imagem. Este trabalho usa um método recursivo de espaço de escala espaço-temporal.

Duits et. al. (2004) demonstram que, ao contrário do que se sabia até o momento, o espaço de escala formado pela função gaussiana não é o único que atende a todos os axiomas que o definem. Nesse trabalho, os autores provam que o espaço de escala formado pela função Poisson também atende a tais axiomas. O fato de se provar que existe mais de uma função que pode definir o espaço de escala com os mesmos axiomas demonstra que o estudo das diferentes bases que formam esta teoria é um dos atuais temas de pesquisa em visão computacional.

3.2 A TRANSFORMADA WAVELET

A transformada Wavelet foi proposta por Grossmann e Morlet (1984). Conforme Daubeschies (1992), essa é uma transformada relativamente nova, a qual divide o sinal em diferentes componentes de frequências (escalas) para então estudá-los.

Antoine et. al. (1993), apresentam como se pode analisar e reconstruir imagens usando a Transformada Wavelet Contínua Bi-dimensional (CWT2D), baseado no grupo euclidiano bi-dimensional com dilatações. Em (ANTOINE, 1993), o autor discute o uso da CWT2D e da Transformada Wavelet Discreta bi-dimensional (DWT2D). Eles afirmam que ao usar a DWT2D, obtém-se uma base ortonormal cuja performance para a codificação e compressão de sinais é muito boa. Porém, quando se deseja extrair informações específicas de um sinal, a CWT2D é mais flexível e por isso mais frequentemente escolhida. A CWT2D é mais flexível, por ser uma função com quatro parâmetros, dois de translação, um de rotação e outro de dilatação (escala). Nesse trabalho, após discutirem as propriedades da CWT2D demonstram suas aplicações em diversos casos.

Mallat e Zhong (1991), descrevem a segunda geração de um algoritmo de codificação de imagem baseado em bordas multi-escala. As bordas são detectadas através do máximo local da transformada wavelet bi-dimensional da imagem. A imagem pode ser reconstruída a

partir do mapa de bordas multi-escala. Para a codificação, são selecionadas as bordas importantes para a visualização da imagem e estas informações são codificadas. Quando a informação da textura não é importante, pode-se obter taxas de compressão elevada, como por exemplo os autores apresentam taxas em torno de trinta.

Mallat e Hwang (1992) discutem que a maioria da informação de um sinal está freqüentemente contida em estruturas irregulares e fenômenos transientes. Os autores apresentam uma caracterização matemática de singularidades através de expoentes de Lipschitz. São revisados os teoremas que permitem estimar os expoentes de Lipschitz de funções a partir da evolução através da escala da sua transformada wavelet. Além disto é demonstrado que a wavelet é um caso geral de diversas outras teorias multi-escalas, entre elas o espaço de escalas.

Antoine et. al. (1996), apresentam um novo método de representação e análise de estruturas bi-dimensionais. Os autores realizam essa tarefa tratando o contorno de um objeto bi-dimensional como um sinal unidimensional e o analisam usando a transformada wavelet contínua. Aplicações são apresentadas para a detecção de vértices, escalas naturais e o comportamento fractal de formas bi-dimensionais.

Fayolle et. al. (2000) apresentam um novo método para a detecção de pontos (vértices) em imagens em tons de cinza. O seu princípio é estudar a fase do gradiente do sinal ao longo da borda do objeto e caracterizar o comportamento através das escalas da transformada wavelet do sinal. Os pontos de interesse são determinados como pontos onde ocorrem as transições deste sinal. Na segunda parte do trabalho, os autores estudam a robustez do método contra a variação de parâmetros da aquisição da imagem (ponto de vista e zoom da câmera, rotação do objeto, variação da luminância e ruído da imagem). Os resultados mostram a eficiência do método, pois, os pontos são detectados mesmo com a mudança destes parâmetros, como destacado pelos autores.

Khalil e Bayoumi (2000) propõem uma técnica de reconhecimento de objetos que sofrem transformações de tipo rotação, translação e mudança de escala. A técnica é baseada na transformada wavelet contínua e em redes neurais. Neste trabalho, os autores aplicam a transformada wavelet contínua nas bordas da imagem e o diagrama $\theta - S$ para fazer o reconhecimento dos objetos. O método apresentado é comparado com alguns métodos tradicionais (invariância de momento bi-dimensional e análise e síntese de curvas fechadas usando descritores de Fourier). Os resultados mostram que o método obtém sucesso na

classificações dos objetos considerados e que o mesmo obtém uma resposta superior na classificação dos objetos quando comparada com os outros métodos apresentados.

Zhang e Lenders (2001) detectam as bordas do rosto de diferentes pessoas usando CWT2D com a função Morlet como wavelet mãe. Neste trabalho os autores argumentam que o uso da CWT2D é uma ferramenta poderosa para a extração de singularidades da imagem, mas não tem sido muito utilizada (pelo menos em reconhecimento de bordas de rosto). Os autores argumentam que se podem explorar as características direcionais de algumas wavelets para extrair informações em direções específicas. Neste trabalho são usadas as informações das bordas obtidas com a transformada wavelet contínua em várias direções dos rostos em estudo e estas informações são fundidas para obter o resultado final. A eficiência do método é demonstrada com uso do banco de dados de imagens de rostos de Yale.

Ovarlez et. al. (2003) apresentam a descrição e o desenvolvimento da transformada wavelet contínua multi-dimensional para análise de imagens de radar com abertura sintética. Os métodos usuais assumem que os reflectores são isotrópicos (que eles se comportam do mesmo modo independente do ângulo que são iluminados) e brancos (as suas propriedades são as mesmas dentro de toda a banda de frequência do sinal emitido). As novas modalidades de processamento mostram que estas afirmações são obsoletas. O objetivo do trabalho é apresentar métodos que usam a transformada wavelet contínua que levem em consideração estas características para a construção e análise de imagens bi-dimensionais.

Gao et. al. (2003) detectam vértices na imagem de contorno de imagens reais usando a transformada wavelet contínua (CWT). Os pontos de vértices são detectados a partir do máximo do módulo local da transformada wavelet do sinal do contorno da imagem. Para reduzir os efeitos co-laterais da discretização e suavização da imagem é adotado um método de pós-processamento: não supressão de máximo. Os autores argumentam que existe uma maior redundância de informações quando se usa a CWT ao invés da transformada wavelet diádica. Porém, é esta redundância de informação que existe na CWT que torna o método proposto mais robusto que os outros métodos apresentados no texto.

Huang e Dubois (2004) apresentam um novo método para a medição da dispersão de imagens baseado na transformada wavelet contínua (CWT), usando a redundância de informações provenientes da CWT. Este método é usado para encontrar a correspondência entre pontos em um par de imagens estéreo. Os autores testaram vários tipos de funções wavelets mãe, incluindo funções wavelets unidimensionais e funções wavelets bi-dimensionais não separáveis e ortogonais. Os resultados são comparados sob dois aspectos, a

taxa de acerto e a preservação de informações. A partir dos resultados, os autores concluem que o método usando CWT apresenta melhores performances que os obtidos com métodos baseados em área. Em adição, um novo método que usa a intersecção por zero é apresentado para aumentar a taxa de acerto.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo são descritos os métodos para a implementação do espaço de escalas, dos seus operadores, da transformada wavelet e do método usado para criar novas bases para o espaço de escalas a partir das diferentes famílias das funções wavelets. As funções que executam essas tarefas foram desenvolvidas no programa Matlab 5.3. O processamento das imagens foi realizado em um computador Athlon Xp 1.2 GHz com 256 Mb de memória RAM.

Os programas desenvolvidos foram testados com a imagem *rice.tif* (de tamanho 256 x 256 pixels e 256 tons de cinza, Figura 10) que acompanha o pacote do Matlab 5.3; oito imagens de eco-cardiografia; dez imagens de células sanguíneas; uma imagem da Lena (Figura 11); e três imagens artificiais. As oito imagens de eco-cardiografia estão na vista denominada 4 câmaras e foram obtidas do banco de dados do Dr. Iran Castro do Instituto de Cardiologia do Rio Grande do Sul com o uso do equipamento HP Sonos 2500 e seu tamanho é de 640 x 480 *pixels* com 256 cores em níveis de cinza, sendo que elas foram recortadas para ficarem quadradas com tamanho final igual a 480 x 480 *pixels*. Nestas imagens podem ser encontradas cavidades com a borda aberta, ou seja, situações onde não há fronteira entre duas cavidades e também cavidades com a borda fechada (conforme a Tabela 2). Um exemplo de imagem desse conjunto é apresentado na Figura 12. As dez imagens que formam o segundo conjunto foram retiradas do banco de dados do Laboratório de Processamento de Sinais (Lapsi) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Elas estão no formato *Joint Photographic Experts Group* (JPEG) com tamanho de 618 x 646 *pixels* e 16 milhões de cores. Um exemplo de imagem desse conjunto pode ser observado na Figura 13.

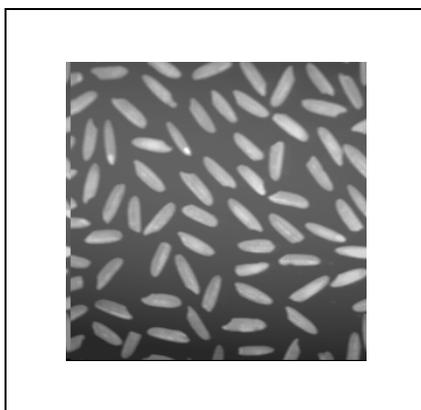


Figura 10 Imagem original “rice.tif”.



Figura 11 Imagem Lenna em 256 tons do cinza.

Tabela 2 Imagens utilizadas, o tipo de cavidade encontrada (Aberta ou Fechada) e o limiar calculado para a sua binarização.

Imagem (#)	Tipo
1	Fechada
2	Fechada
3	Fechada
4	Fechada
5	Aberta
6	Fechada
7	Aberta
8	Aberta
9	Aberta

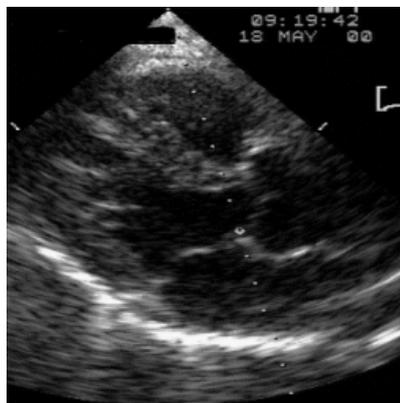


Figura 12 Imagem original “echo.bmp”.

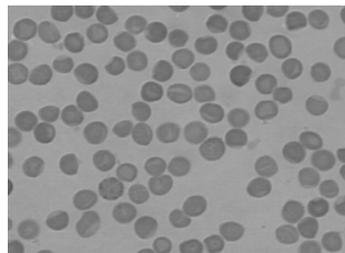


Figura 13 Imagem das células em tons de cinza (imagem #9 da Tabela 2).

4.1 A IMPLEMENTAÇÃO DO ESPAÇO DE ESCALAS

A implementação do espaço de escalas é realizada usando o núcleo formado pela gaussiana bi-dimensional dada por (14) e apresentada na Figura 14. Os operadores do espaço de escalas são realizados usando as derivadas da gaussiana bidimensional dada por (20). Alguns exemplos de derivadas da gaussiana são apresentados nas Figuras 15 a 17.

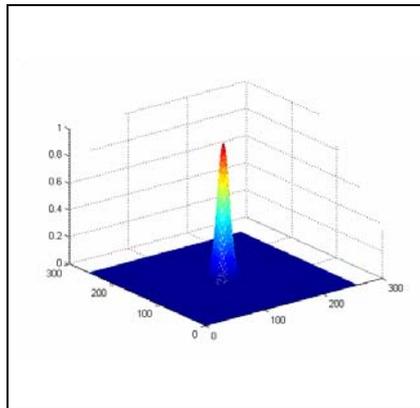


Figura 14 Operador gaussiana (g) na escala $t = 64$.

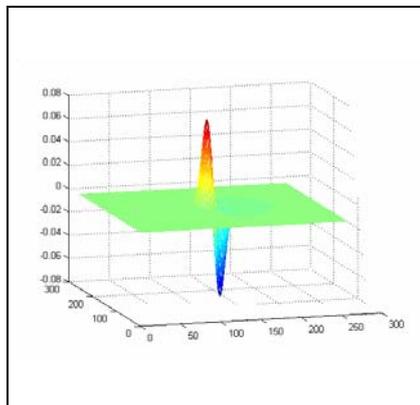


Figura 15 Operador derivada da gaussiana em relação a x (g_x) na escala $t = 64$.

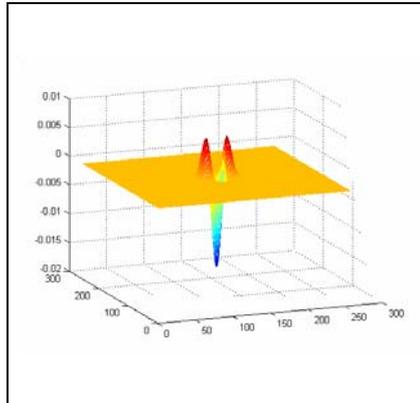


Figura 16 Operador derivada segunda da gaussiana em relação a x (g_{xx}) na escala $t = 64$.

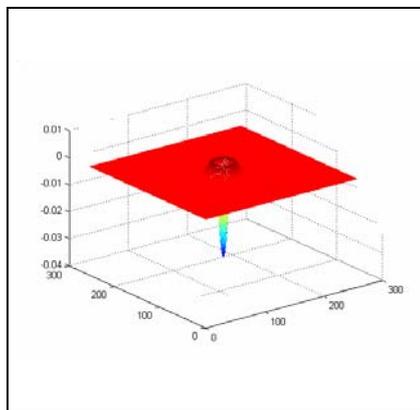


Figura 17 Operador Laplaciano da gaussiana para a escala $t = 64$.

A representação de uma imagem em espaço de escala pode ser realizada através da convolução da imagem com o núcleo gaussiano (13), que pode ser calculado no domínio da frequência. Os resultados obtidos ao aplicar este operador na imagem rice.tif (Figura 10), para as escalas 2 e 20, são apresentados na Figura 18.

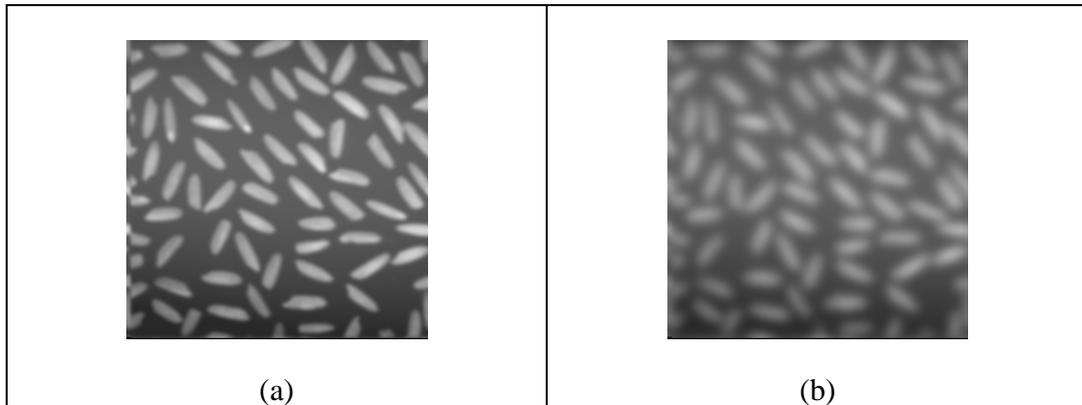


Figura 18 Imagem “rice.tif” na escala $t = 2$ (a) e $t = 20$ (b) usando FFT.

Iniciando o estudo sobre os operadores do espaço de escalas, descreve-se a implementação de dois de seus operadores, os detectores de bolhas (*blobs*) e de bordas (*edges*).

As bolhas em espaço de escala foram determinadas usando (30) e o seguinte procedimento:

- a) Leitura da imagem e da escala
- b) Gerar matriz contendo o Laplaciano da gaussiana do tamanho da imagem
- c) Calcular a FFT da imagem e da matriz do Laplaciano da gaussiana
- d) Multiplicar as duas matrizes ponto a ponto e calcular a FFT^{-1}
- e) Aplicar a equação (30) para determinar os *blobs* da imagem na escala dada.

O resultado deste algoritmo aplicado à imagem rice.tif é apresentado na Figura 19, para as escalas 2 e 20.

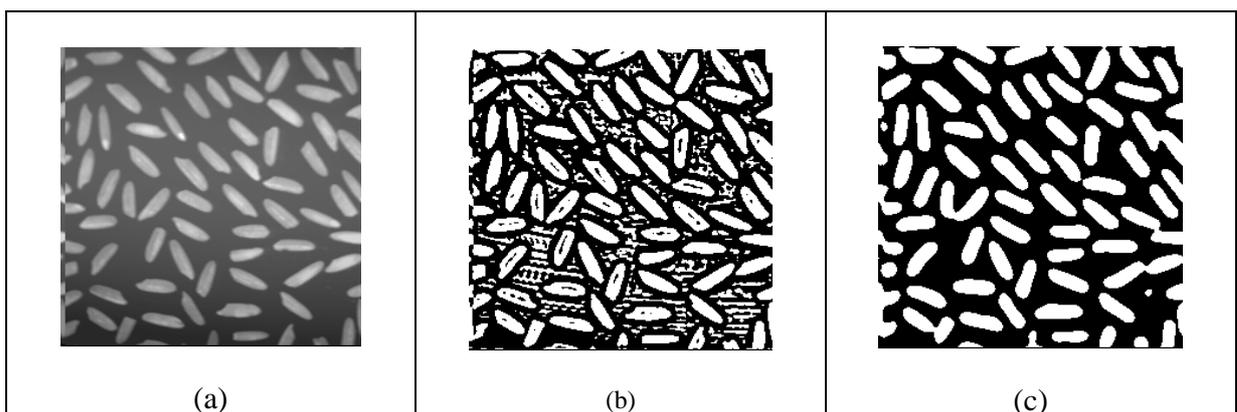


Figura 19 Imagem “rice.tif” (a), bolhas detectadas na escala $t = 2$ (b) e bolhas detectadas na escala $t = 20$ (c).

As bordas dos objetos de uma imagem, detectadas usando o espaço de escalas, são extraídas a partir das equações (34) e (35) e do seguinte algoritmo:

- a) Leitura da imagem e da escala
- b) Gerar duas matrizes contendo as segunda e terceira derivadas direcionais da gaussiana do tamanho da imagem
- c) Calcular a FFT da imagem e das matrizes das derivadas direcionais da gaussiana
- d) Multiplicar cada uma das duas matrizes das derivadas pela imagem, ponto a ponto, e calcular a FFT^{-1} das duas matrizes resultantes.
- e) Aplicar as equações (34) e (35) para determinar as bordas da imagem na escala dada.

O resultado deste algoritmo aplicado à imagem *rice.tif* é apresentado na Figura 20, para as escalas 2 e 20.

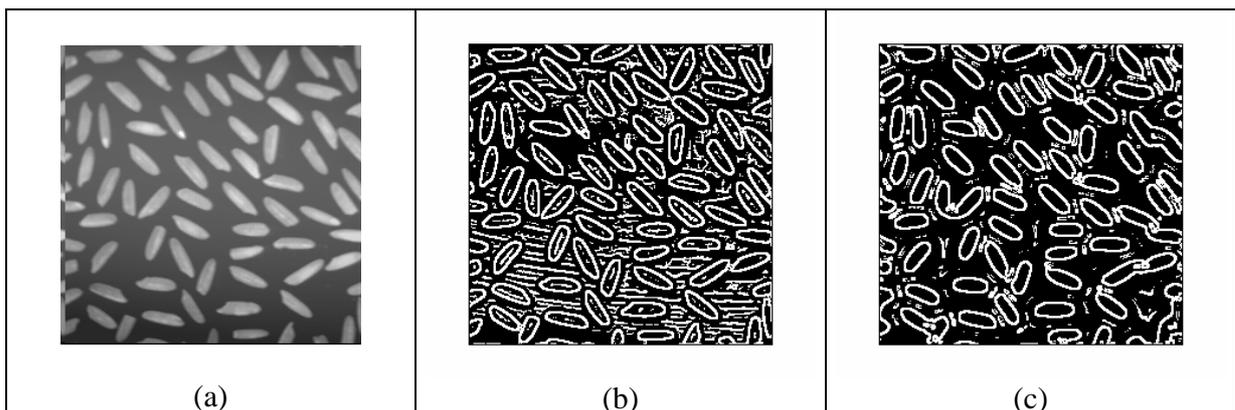


Figura 20 Imagem “*rice.tif*” (a), bordas detectadas na escala $t = 2$ (b) e bordas detectadas na escala $t = 20$ (c).

Também foram analisados dois métodos de avaliar a importância de estruturas extraídas de uma imagem usando os seus operadores. O primeiro método é o cálculo do volume de uma bolha e o segundo método é o tempo de vida útil.

O método usado para determinar as bolhas mais importantes baseado em seu volume (38) segue o próximo algoritmo:

- a) Leitura da imagem e da escala
- b) Gerar matriz contendo o Laplaciano da gaussiana do tamanho da imagem
- c) Calcular a FFT da imagem e da matriz do Laplaciano da gaussiana
- d) Multiplicar as duas matrizes, ponto a ponto, e calcular a FFT^{-1}

- e) Multiplicar a matriz resultante pelo fator de normalização, conforme equação (38)
- f) Aplicar a equação (30) para determinar as bolhas da imagem na escala dada
- g) Segmentar as bolhas detectados e calcular o seu volume
- h) Mostrar as \underline{n} bolhas mais importantes que neste caso são as \underline{n} bolhas de maior volume

O resultado deste algoritmo para a imagem rice.tif destacando, por exemplo, as dez bolhas mais importantes (ou seja, as dez bolhas com maior volume) é apresentado na Figura 21, para as escalas 2 e 20.

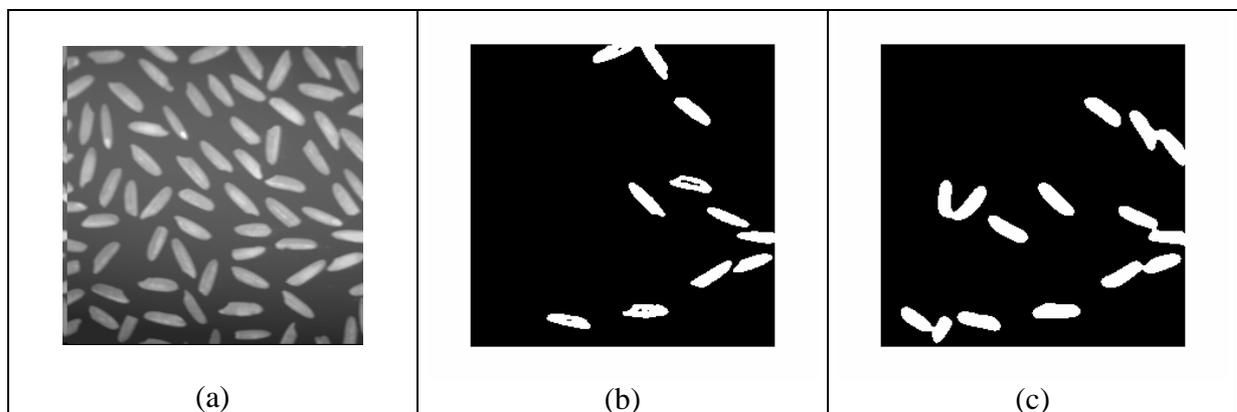


Figura 21 Imagem “rice.tif” (a), as dez bolhas mais significativas detectadas na escala $t = 2$ (b) e $t = 20$ (c).

Para calcular os *pixels* que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento, usou-se o seguinte método:

- a) Leitura da imagem e das escalas
- b) Cálculo das bolhas nas diferentes escalas
- c) Cálculo da lógica “AND” entre as diferentes imagens

O resultado deste algoritmo para a imagem das bolhas é apresentado na Figura 22.

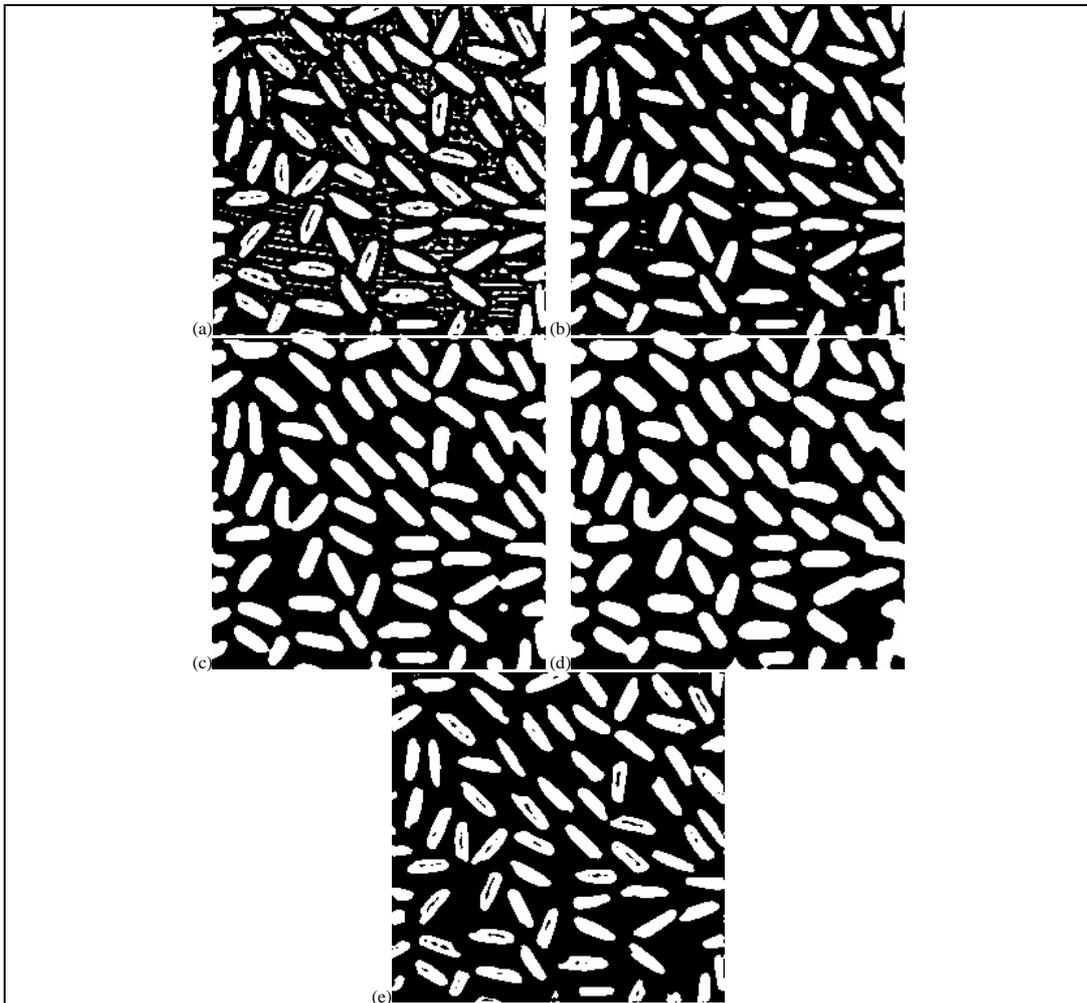


Figura 22 Bolhas da imagem “rice.tif” nas escalas (a) 2, (b) 6, (c) 16, (d) 32 e (e) a imagem dos pixels que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento.

4.2 A IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA BI-DIMENSIONAL

A implementação da Transformada Wavelet Contínua Bidimensional (CWT2D) foi feita no domínio da frequência usando a equação (54) e o seguinte algoritmo:

- a) Leitura da imagem e da escala
- b) Gerar matriz contendo a wavelet na escala do tamanho da imagem
- c) Calcular a FFT da imagem e da matriz wavelet
- d) Multiplicar as duas matrizes, ponto a ponto, conforme a equação (54)
- e) Calcular a FFT^{-1}

4.3 MÉTODO PARA GENERALIZAR O ESPAÇO DE ESCALAS COM AS DIFERENTES FAMÍLIAS DE WAVELETS

Conforme foi descrito na seção 3.5 o espaço de escalas é um caso especial da transformada wavelet. Mallat (1992), além de provar essa relação gerou um método de criar wavelets a partir de uma função suavizadora. Esse método pode ser descrito como:

Defina-se uma função suavizadora como:

$$\theta_s(x) = \frac{1}{s} \theta\left(\frac{x}{s}\right) \quad (73)$$

Crie-se wavelets a partir das derivadas da função suavizadora

$$\psi^1(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (74)$$

$$\psi^2(x) = \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \quad (75)$$

Em seu trabalho Mallat (1992) usou a função gaussiana bidimensional como função suavizadora e gerou duas wavelets. Sheng (1996) afirma que qualquer derivada de ordem n de uma gaussiana pode ser uma wavelet. Isso permite expandir o método usado por Mallat para até a ordem n (com $n > 0$) e então as wavelets serão definidas por:

$$\psi^n(x) = \frac{d^n\theta(x)}{dx^n} \quad (76)$$

O objetivo do presente trabalho é gerar o espaço de escala e seus operadores a partir das diferentes famílias de wavelets. Os operadores do espaço de escalas são definidos como derivadas da função gaussiana, que possui características de filtro passa baixa. As wavelets são funções do tipo passa faixa. É necessário então associar cada wavelet a um filtro passa baixa, para então, a partir desse filtro, poder-se aplicar as definições dos operadores do espaço de escalas. Para fazer essa associação será utilizado o algoritmo do Mallat, descrito acima, na ordem inversa, ou seja, parte-se das wavelet ($\psi(x)$) em busca da função suavizadora ($\theta_s(x)$).

Assim, é necessário considerar que as wavelet são derivadas de alguma função suavizadora, mas não se sabe de que função suavizadora e qual a ordem de derivada é a wavelet. O que se sabe é que as wavelets têm como característica uma resposta em frequência do tipo passa faixas e a função suavizadora tem a resposta em frequência do tipo passa baixa. Usando-se

essas características, pode ser determinada a ordem a que pertence a wavelet (se é que existe uma função suavizadora) através do seguinte procedimento:

- a) Considera-se a wavelet em estudo como sendo a n -ésima derivada de uma função suavizadora
- b) Integra-se a função wavelet
- c) Gera-se um gráfico com a resposta em frequência da função integrada
- d) Se a função for um filtro passa faixas repete-se os itens 2 e 3.
- e) Se a função for um filtro passa baixa assume-se que esta é a função suavizadora que gera a wavelet em estudo.
- f) Determina-se a ordem da derivada como sendo igual ao número de vezes que os itens 2 e 3 foram realizados, ou seja, o número de vezes que foram necessário integrar a wavelet.

Uma vez de posse da função suavizadora, pode-se então aplicar os operadores do espaço de escalas para diferentes funções suavizadoras. Como apresentado no capítulo anterior, os operadores do espaço de escalas são definidos a partir das derivadas da função suavizadora (que para o espaço de escalas é a gaussiana) (L_x, L_{xx}, \dots).

4.3.1 A Escolha da Função Wavelet Mãe

A escolha da wavelet mãe (*mother wavelet*) é de fundamental importância para a análise de um sinal por esta transformada, independentemente da dimensão usada (1D, 2D, ...). Antoine (1993), estabelece algumas formas para se resolver este problema. Primeiramente pode-se escolher a wavelet que melhor responda a aplicação. Segundo, pode-se construir uma nova *mother wavelet* para a sua aplicação. Em terceiro lugar se pode usar algumas famílias que tem seu comportamento e sua definição conhecida, pelo menos para o caso 1D. Nesse trabalho é utilizada a terceira forma de escolha das famílias das wavelets, adicionada de algumas condições necessárias para que se possa comparar os resultados com o espaço de escalas. Essas condições são postuladas como:

- a) Existir uma função suavizadora gerada a partir da integração da wavelet n vezes.
- b) Esta função suavizadora deve ser real e simétrica.

- c) As suas derivadas devem respeitar as propriedades exigidas pela teoria de wavelets, sendo elas a condição de admissibilidade e regularidade. Nesse caso, sabe-se que pelo menos a wavelet em estudo é uma wavelet e por isso respeita essas propriedades.

Este trabalho não tem o intuito de provar a necessidade e/ou suficiência das propriedades descritas acima, uma vez que está fora do escopo do mesmo. Sua comprovação é feita experimentalmente e as wavelets que não possuem essas propriedades não serão analisadas. Tais demonstrações são sugeridas como trabalhos futuros. As funções wavelet que satisfazem as condições postuladas nessa seção são:

- a) Derivas da Gaussinas (Mexican Hat)
- b) Haar
- c) Bi-ortogonal 1.3
- d) Bi-ortogonal 1.5
- e) Bi-ortogonal 2.2
- f) Bi-ortogonal 2.4
- g) Bi-ortogonal 2.6
- h) Bi-ortogonal 2.8
- i) Bi-ortogonal 4.4
- j) Bi-ortogonal 5.5
- k) Bi-ortogonal 6.8

Os resultados obtidos com cada uma dessas funções, quando submetido ao algoritmo do item 4.3, são apresentados nas Figuras 36 a 57. O resumo dos resultados obtidos para estas funções é apresentado na Tabela 3.

4.3.2 Geração de Funções Bi-dimensionais a Partir de Funções Unidimensionais

Algumas das funções apresentadas no capítulo anterior não apresentam definição matemática explícita no domínio do tempo (espaço) para o caso bi-dimensional, por isso, foram utilizadas três formas de geração de funções bi-dimensionais a partir de funções unidimensionais.

O primeiro método de geração de uma função bi-dimensional a partir de uma função unidimensional recebe uma dada a função $y = f(x)$, simétrica em relação a algum ponto e gera a função bi-dimensional por rotação. Esta rotação é feita numericamente e a função é girada em

relação ao eixo z. A Figura 23 mostra a função gaussiana unidimensional e bi-dimensional gerada por este método.

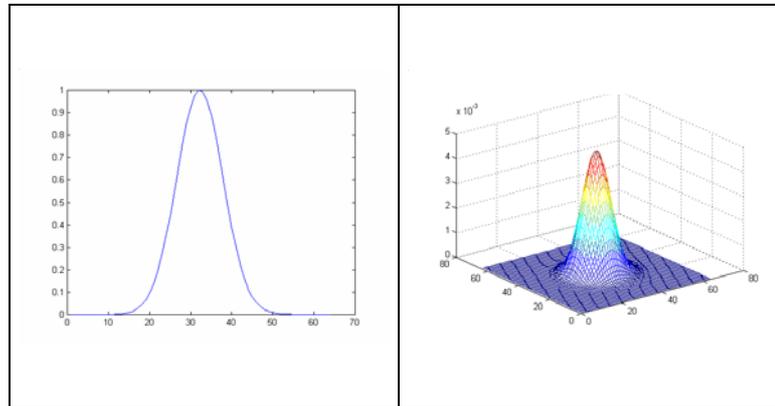


Figura 23 Função gaussiana unidimensional (esquerda) e bi-dimensional gerada por rotação (direita).

O segundo método de geração de uma função bi-dimensional a partir de uma função unidimensional recebe uma dada a função $f(x)$ e uma função $f(y)$, simétrica em relação a algum ponto e gera a função bi-dimensional por produto tensorial. O produto tensorial entre duas funções $f(x)$ e $f(y)$ é definido como sendo:

$$f(x,y) = f(x)f(y) \quad (77)$$

A Figura 24 mostra a função gaussiana unidimensional e bi-dimensional gerada pelo método do produto tensorial.

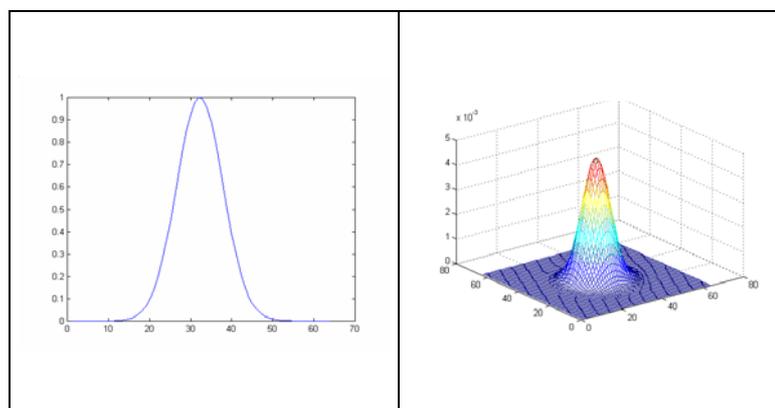


Figura 24 Função gaussiana unidimensional (esquerda) e bi-dimensional gerada por produto tensorial (direita).

O terceiro método de geração de uma função bi-dimensional a partir de uma função unidimensional recebe uma dada função $f(x)$, simétrica em relação a algum ponto, e gera a função bi-dimensional por convolução. A convolução entre as funções é definida como sendo:

$$f(x,y) = f(x) * f(y) \quad (78)$$

onde $*$ representa o operador convolução.

A Figura 25 mostra a função gaussiana unidimensional e bi-dimensional gerada pelo método da convolução, sendo que a função bi-dimensional foi truncada para manter o tamanho de (60×60) pixels.

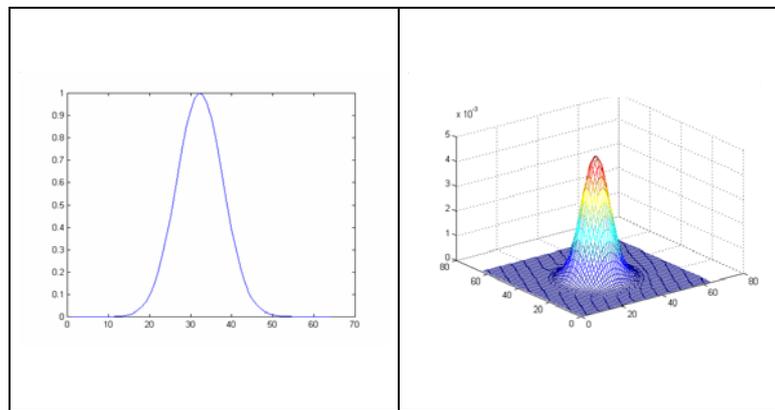


Figura 25 Função gaussiana unidimensional (esquerda) e bi-dimensional gerada por convolução (direita).

Conforme as imagens apresentadas nas Figuras 23, 24 e 25, observa-se que as funções bi-dimensionais geradas são idênticas às calculadas por (14), o que demonstra que os três métodos podem ser utilizados. Porém, quando se utilizam outras funções, os resultados das funções bi-dimensionais podem ser diferentes para cada método. Isto pode ser observado nas Figuras 58, 59 e 60 para as funções suavizadoras das funções wavelets Haar, Bi-ortogonal 1.3 e Bi-ortogonal 4.4 respectivamente. Neste trabalho, serão mostrados apenas os resultados obtidos com as funções geradas por rotação, pois, este método é o que gera resultados mais parecidos com o espaço de escalas formado pela gaussiana. Além disso, com este método se obtém operadores simétricos em relação ao eixo z, tornando-os invariantes por rotação. Essa é uma característica que existe no espaço de escala e que se pretende preservar neste trabalho.

A representação de uma imagem pode ser feita para os diferentes espaços de escalas, tanto gerado por diferentes funções suavizadoras quanto por diferentes métodos de geração de função bi-dimensional. Um exemplo é a representação da imagem do rosto da Lena. Na Figura 61 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função Mexican Hat gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 62 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Haar gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 63 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 64 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4 gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Por curiosidade, também serão apresentados os espaços de escalas gerados a partir das funções suavizadoras de Haar e da Bi-ortogonal 1.3 geradas por convolução e produto tensorial. Na Figura 65 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Haar gerada por produto tensorial para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 66 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Haar gerada por convolução para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 67 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 gerada por produto tensorial para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 68 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 gerada por convolução para as escalas 2, 16, 32 e 64.

Como foi apresentado anteriormente o espaço de escalas possui diferentes operadores. Tais operadores foram definidos com sendo as derivadas de uma função suavizadora, no caso a função gaussiana. Ao utilizar as mesmas definições nas novas funções suavizadoras, também são obtidas bolhas e bordas. Na Figura 69 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Mexican Hat para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 70 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Haar para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 71 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 72 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4 para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 73 são

apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Mexican Hat para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 74 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Haar para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 75 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 76 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4 para as escalas 2, 16, 32 e 64.

A imagem da Lena é uma boa forma de mostrar o funcionamento dos espaços de escalas e seus operadores de forma qualitativa. Porém, com o intuito de analisar algumas propriedades de forma isolada, criou-se três imagens artificiais, sendo elas denominadas de *phantom1* (Figura 26), *phantom2* (Figura 27) e *phantom3* (Figura 28). Na imagem do *phantom1* há objetos de formas diferentes e tamanhos diferentes, mas com o mesmo contraste. Isso permite que se observe o comportamento dos operadores nas diferentes escalas. Na imagem do *phantom2* há imagens com formas diferentes e valores de contrastes diferentes, mas com tamanho semelhante. Isso permite que se avalie o comportamento dos operadores indicando se eles são locais ou globais. Na imagem do *phantom3* existe apenas um objeto com diferentes ângulos de rotação em diferentes posições da imagem. Isso permite verificar se os operadores são invariantes por rotação e se eles possuem ou não regiões preferências.

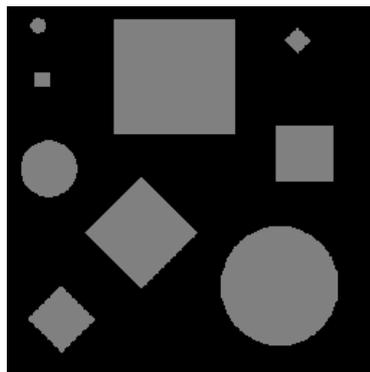


Figura 26 Imagem artificial denominada *phantom1*.

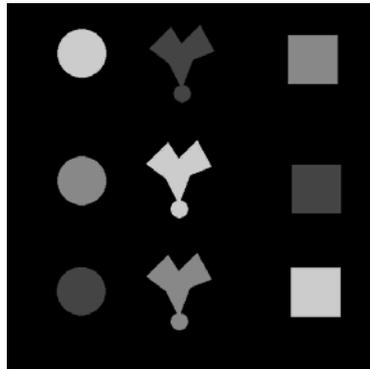


Figura 27 Imagem artificial denominada *phantom2*.

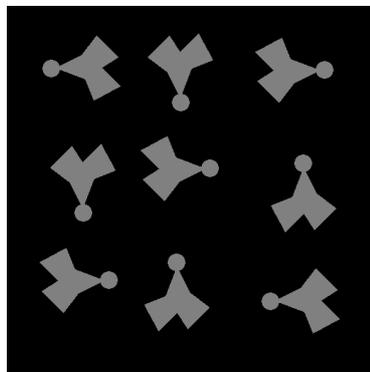


Figura 28 Imagem artificial denominada *phantom3*.

Os operadores detectores de bolhas e bordas do espaço de escalas foram aplicados às três imagens artificiais. Na Figura 77 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2, 12, 26, 42, 64 e 92. Na Figura 78 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 10, 40, 54, 66 e 80. Na Figura 79 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2, 12, 22, 44, 64 e 84. Na Figura 80 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2, 10, 16, 26, 40 e 72. Na Figura 81 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 18, 36, 56 e 70. Na Figura 82 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação,

para as escalas 2, 8, 16, 32, 64 e 96. Na Figura 83 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 16, 32, 64 e 96. Na Figura 84 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 16, 32, 42 e 56. Na Figura 85 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 8, 12, 16 e 32. Na Figura 86 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 8, 16, 32 e 36. Na Figura 87 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 64, 128, 256 e 356. Na Figura 88 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 8, 12, 16 e 20.

Na Figura 89 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 90 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 3, 4, 8, 12 e 16. Na Figura 91 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 92 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 93 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 94 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 3, 4, 8, 12 e 16. Na Figura 95 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 96 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 97 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 98 são

apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 3, 4, 8, 12 e 16. Na Figura 99 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 100 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16.

4.3.3 Re-definição do Operador Detector de Bolhas para a Wavelet Bi-ortogonal 1.3

A wavelet Bi-ortogonal 1.3 foi analisada com o algoritmo proposto no início deste capítulo. Os resultados obtidos pelo método mostram que esta wavelet tem o comportamento de primeira derivada de uma função suavizadora (Figura 29). Por isso é possível gerar o espaço de escala e seus operadores a partir desta função. A imagem *Phantom3* e as suas bolhas são apresentadas nas Figuras 30 e 31 respectivamente, para a escala 64.

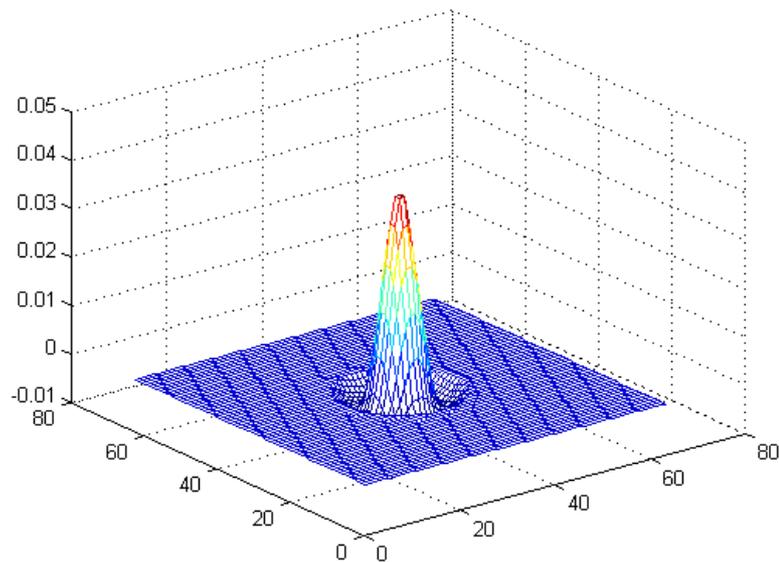


Figura 29 Função suavizadora da função wavelet Bi-ortogonal 1.3.



Figura 30 Representação do espaço de escala da imagem gerado a partir da função wavelet Bi-ortogonal 1.3 para a escala 64.

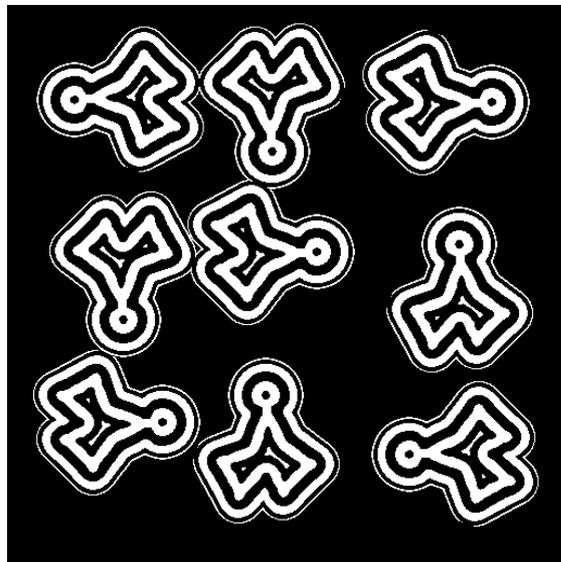


Figura 31 Bolhas do espaço de escalas para a imagem gerada a partir da função wavelet Bi-ortogonal 1.3 para a escala 64.

As bolhas apresentadas na Figura 31 possuem uma característica considerada indesejável para a segmentação de objetos. Essa característica é que a bolha de um objeto não é um elemento único, apresentando regiões não conectadas que pertencem à bolha de um mesmo objeto. Este fato não ocorre nos espaços de escalas gerados pelas funções Mexican Hat e Haar, por exemplo. Uma solução para este problema pode ser a re-definição do operador detector de bolhas para esta função.

Para fazer uma nova definição do detector de bolhas para a função wavelet Bi-ortogonal 1.3 é necessário, primeiramente, identificar as causas desse efeito. A Figura 32 apresenta a matriz tri-dimensional do laplaciano da imagem *Phantom3* para a escala 64.

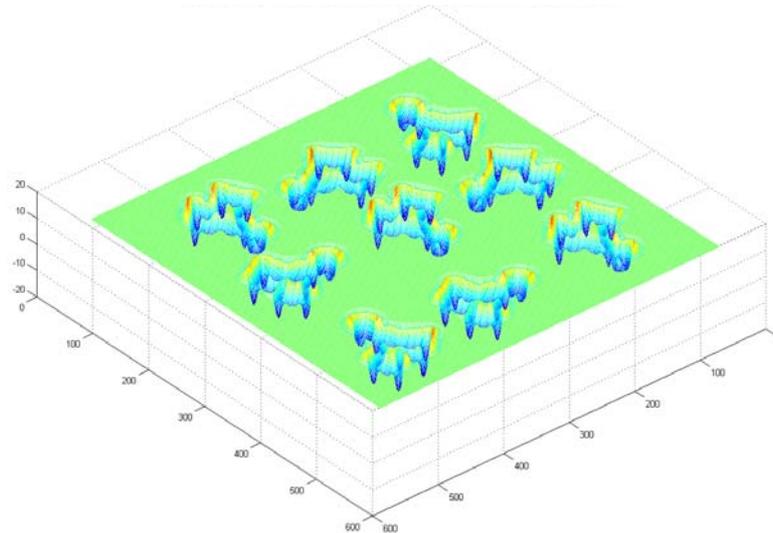


Figura 32 Laplaciano da imagem para a imagem nas escalas.

Pode ser observado na matriz tri-dimensional da Figura 32 que as bolhas desta imagem são formadas por uma região central de grande amplitude e outras regiões com amplitudes menores. A região de grande amplitude é considerada neste trabalho como sendo a região válida da bolha, sendo as demais regiões consideradas artefatos criados pela função laplaciano da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3.

O objetivo de re-definir o operador detector de bolhas é obter uma técnica que permita identificar apenas a região de grande amplitude como bolha, desconsiderando as outras regiões.

Para tanto se fez a seguinte re-definição do operador detector de bolhas para a wavelet Bi-ortogonal 1.3, dada por:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= 0, & \nabla^2 L(.,t) > th \\ I(x, y) &= 1, & \nabla^2 L(.,t) \leq th \end{aligned} \quad (79)$$

onde I é a imagem binarizada, sendo 0 = preto = fundo da imagem e 1 = branco = bolha, $\nabla^2 L(.,t)$ é o laplaciano da imagem e th é definido por:

$$th = c * \min(\nabla^2 L(.,t)) \quad (80)$$

onde a função $\min(f)$ retorna o mínimo global de uma função f e c é uma constante definida heurísticamente. É sugerido o uso de c igual a 0,2. Na Figura 101 são apresentadas as bolhas da imagem *Phantom3* com a definição original (eq. 24 e 25) (a) e com a definição modificada (eq. 25 e 74) para a escala 512. Na Figura 102 são apresentadas as bolhas da imagem *Phantom2* com a definição original (eq. 24 e 25) (a) e com a definição modificada (eq. 25 e 74) para a escala 768. Na Figura 103 são apresentadas as bolhas da imagem da Lena com a definição original (eq. 24 e 25) (a) e com a definição modificada (eq. 25 e 74) para a escala 64.

4.3.4 Re-definição do Operador Detector de Bordas para a Wavelet Bi-ortogonal 1.3

O operador detector de bordas gerado a partir da função wavelet Bi-ortogonal 1.3 2D gerada por rotação, apresenta a característica de detectar bordas triplas onde deveria detectar bordas simples, conforme apresentado na Figura 33.

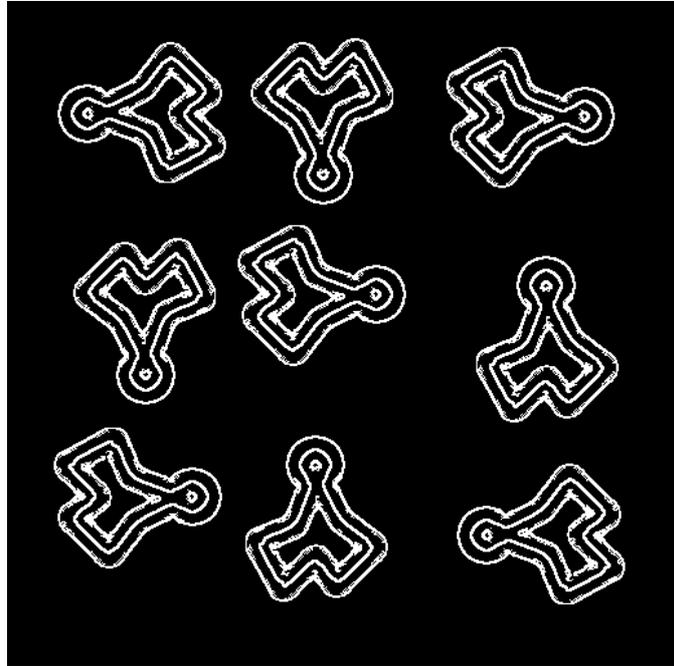


Figura 33 Bordas detectadas com o espaço de escala da função Bi-ortogonal 1.3 para a escala 64.

Uma solução para este problema pode ser a re-definição do operador detector de bordas. Para fazer uma nova definição do detector de bordas para a função wavelet Bi-ortogonal 1.3 2D é necessário, primeiramente, identificar as causas desse efeito. As Figuras 34 e 35 apresentam as matrizes tri-dimensionais das segunda e terceira derivadas direcionais (L_{vv} e L_{vvv}) para a imagem *Phantom3*, respectivamente.

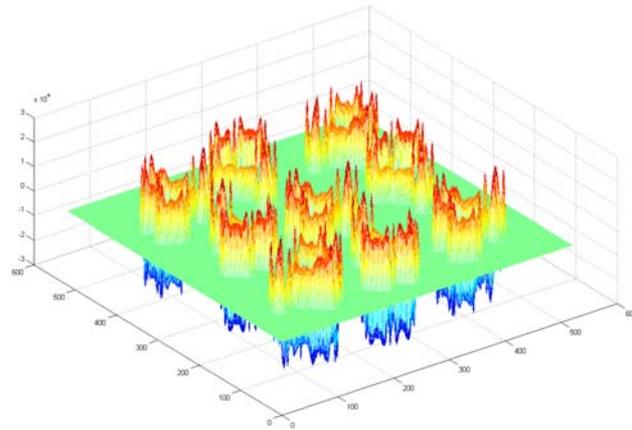


Figura 34 Segunda derivada direcional (L_{vv}) da imagem na escala 64

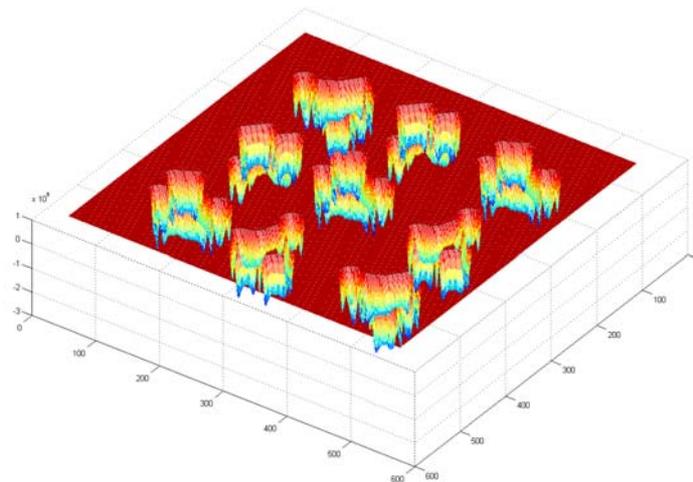


Figura 35 Terceira derivada direcional (L_{vvv}) da imagem na escala 64.

Pode ser observado que nas duas matrizes apresentadas existem oscilações junto às bordas de cada objeto. Tais oscilações são responsáveis pela criação das bordas repetidas detectadas para os diferentes objetos. No caso da matriz gerada a partir da terceira derivada direcional (Figura 35) as oscilações são proporcionalmente pequenas quando comparadas com o mínimo central. Com base nesta constatação, foi re-definido o operador detector de bordas como sendo:

$$L_{vv} = 0 \quad (81)$$

$$L_{vvv} < th \quad (82)$$

onde th é o limiar de comparação, dado por:

$$th = c * \min(L_{vvv}) \quad (83)$$

onde a função $\min(f)$ retorna o mínimo global de uma função f e c é uma constante definida heurísticamente. É sugerido o uso de c igual a 0,005. Na Figura 104 são apresentadas as bordas da imagem *Phantom3* com a definição original (eq. 28 e 29) (a) e com a definição modificada (eq. 76 e 77) para a escala 2. Na Figura 105 são apresentadas as bordas da imagem *Phantom2* com a definição original (eq. 28 e 29) (a) e com a definição modificada (eq. 76 e 77) para a escala 4. Na Figura 106 são apresentadas as bordas da imagem da Lena com a definição original (eq. 28 e 29) (a) e com a definição modificada (eq. 76 e 77) para a escala 2.

4.4 APLICAÇÕES

Para demonstrar a utilidade do espaço de escala e a versatilidade que se obteve com a geração de novos espaços de escalas, foram geradas duas aplicações ligadas ao processamento de imagens médicas, sendo elas a segmentação de cavidades cardíacas e a contagem de células sanguíneas. Estas duas aplicações são descritas a seguir.

4.4.1 Segmentação de Cavidades Cardíacas

A eco-cardiografia é uma técnica amplamente utilizada em diagnósticos de doenças cardíacas (CASTRO, 1999). Com o intuito de aumentar a qualidade do diagnóstico e diminuir sua dependência da experiência dos técnicos, é desejável a extração de parâmetros a respeito do coração (deformação do ventrículo esquerdo (LIN, 2003), fração de fluxo ejetado e débito cardíaco (ZUCCOLOTTO, 2002) de forma automática ou semi-automática. Para isso é necessária a segmentação automática das cavidades cardíacas.

As imagens de ultra-som vêm acompanhadas de diversos tipos de degradações, incluindo, ruído impulsivo, distorções e não homogeneidade das intensidades (XIAO, 2002), o que não permite o uso de técnicas convencionais para a realização da segmentação dessas imagens.

A segmentação e extração das bordas de cavidades cardíacas usando o espaço de escalas foram realizadas de acordo com o seguinte algoritmo:

- a) Seleção de uma região no interior da cavidade de interesse pelo usuário;
- b) Cálculo do histograma da região selecionada no item 1.

- c) Determinação do limiar para a binarização da imagem.
- d) Representação das imagens em espaço de escala.
- e) Binarização das imagens nas diferentes escalas.
- f) Cálculo dos *pixels* que possuem tempo de vida útil igual a 100%
- g) Segmentação da cavidade
- h) Cálculo dos *pixels* de borda da cavidade.

Maiores detalhes podem ser obtidos em (DOERING, 2004a), porém é importante destacar que a forma usada neste trabalho para medir a importância das estruturas foi o tempo de vida útil. Para tanto, calcularam-se os *pixels* da imagem com tempo de vida útil igual a 100%, fazendo-se uma lógica E (*And*) com todas as imagens binarizadas (Figura 107) nas diferentes escalas (item 5). Isto é mostrado nas Figuras 108-(a) e 108-(b). Nas Figuras 109 e 110 são mostrados exemplos dos resultados obtidos com o procedimento apresentado.

4.4.2 Segmentação e Contagem de Células Sangüíneas

As técnicas reconhecidas e utilizadas para a contagem de células são: contagem manual e contagem automática por citômetro de fluxo (BROWN, 1988; National Committee for Clinical Laboratory Standards, 1993). Apesar da utilização destes equipamentos sofisticados a contagem manual ainda é muito requisitada. Como alternativa para a contagem manual tem-se o uso de técnicas de processamento e reconhecimento de imagem digital. A automação da contagem de células do sangue através de técnicas de processamento de imagens apresenta as seguintes vantagens: a) aumenta o número de amostras examinadas por dia, quando comparada ao exame manual; b) armazenamento das amostras em forma de imagens (mídia digital); c) um maior número de células é contado e d) o exame através de processamento de imagens tem custo mais baixo que o exame por citômetro de fluxo.

Características das imagens de células do sangue como baixo contraste, distribuição não uniforme da luminosidade e o formato toroidal da hemácia tornam o processo de binarização, ou separação fundo-célula, uma tarefa difícil. Da mesma forma, a aglomeração das células exige um processo de decomposição destas partículas. Outras características como tipo de doença e idade do paciente, por exemplo, fazem da inferência de um parâmetro no processo um fator muito dependente destas características.

A segmentação e contagem de células sanguíneas foram realizadas de acordo com a seguinte seqüência de passos:

- a) Leitura da imagem original e conversão para tons de cinza.
- b) Cálculo do laplaciano da imagem em diferentes escalas, detecções dos *blobs* e a escolha das escalas mais adequadas para o item 3.
- c) Cálculo dos *pixels* com tempo de vida útil igual a cem por cento.
- d) Eliminação de *blobs* inválidos.
- e) Contagem e representação das células sanguíneas.

Os resultados das contagens de células, para as imagens analisadas com este algoritmo, com a contagem manual e com os resultados obtidos pelo algoritmo proposto em (KOYA, 2001) são apresentados também na Tabela 4. Na Figura 111 são apresentados os resultados deste algoritmo para 4 imagens diferentes. Maiores detalhes podem ser obtidos em (DOERING, 2004b).

4.4.3 Aplicação do Operador Detector de Bolhas Baseado na Wavelet Haar para Detecção de Células Sanguíneas.

Como o intuito de comprovar a utilidade desses novos operadores, repetiu-se o experimento de detecção de células sanguíneas para o operador Haar. Essas tarefas foram realizadas de acordo com a seguinte seqüência de passos:

- a) Leitura da imagem original e conversão para tons de cinza.
- b) Cálculo do laplaciano da imagem em diferentes escalas, detecções dos *blobs* e a escolha das escalas mais adequadas para o item 3.
- c) Cálculo dos *pixels* com tempo de vida útil igual a cem por cento.
- d) Eliminação de *blobs* inválidos.
- e) Contagem e representação das células sanguíneas.

Inicia-se o algoritmo com a leitura da imagem e sua conversão para tons de cinza. Esta conversão é realizada através da média aritmética dos valores das componentes de cor vermelha (R), verde (G) e azul (B), dado por (GONZÁLES, 1992):

$$f(x, y) = \frac{R(x, y) + G(x, y) + B(x, y)}{3} \quad (84)$$

onde f é a imagem representada em tons de cinza (Figura 13). O uso da média aritmética para esta conversão é justificado por minimizar a variação de contraste nas diferentes imagens.

A partir da imagem representada em tons da cinza, aplicou-se o operador detector de *blobs* (4) para as escalas 8, 16, 32 e 64 (Figura 112 (a) – (d) respectivamente).

Após a detecção dos *blobs* nas diferentes imagens realizou-se a lógica *and* entre as diferentes imagens dos *blobs*. O resultado desta operação é apresentado na Figura 113 (a).

A partir do resultado a operação *and*, obteve-se a imagem dos *blobs* das células adicionado de alguns pontos de ruído. Foi então realizada uma etapa de eliminação de objetos que não correspondem a *blobs* de células. Este processo foi realizado em duas partes: primeiramente, eliminou-se os *blobs* que tocavam a borda da imagem, eliminando assim efeitos de ruídos de borda. Em seguida, foi feita a eliminação de objetos com tamanho inferior a 250 *pixels*. Este parâmetro foi fixado após verificar-se que para uma das imagens o menor tamanho de *blob* detectado foi de 263 *pixels*. Este resultado é apresentado na Figura 113 (b).

Finalizando o algoritmo foi então realizada a contagem do número de *blobs* restantes, o qual é considerado igual ao número de células detectadas. Para cada *blob* foi desenhado um círculo em seu centróide para facilitar a visualização do resultado do algoritmo (Figura 114). Os resultados das contagens de células, para as imagens analisadas com este algoritmo, com a contagem manual e com os resultados obtidos pelo algoritmo proposto em (LINDEBERG, 1993a) são apresentados também na Tabela 4. Na Figura 115 são apresentados os resultados deste algoritmo para outras 3 imagens.

5 RESULTADOS

Neste capítulo são mostrados os resultados das funções descritas no capítulo anterior. Elas demonstram o comportamento das funções desenvolvidas para o estudo da teoria de espaço de escala, da transformada wavelet e suas relações. Além disto mostram os resultados obtidos com os algoritmos propostos neste trabalho.

Na Figura 36 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 1.3 (a) e sua primeira integral (b). Na Figura 37 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 1.3 (a) e o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 1.3. Na Figura 38 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 1.5 (a) e sua primeira integral (b). Na Figura 39 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 1.5 (a) e o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 1.5.

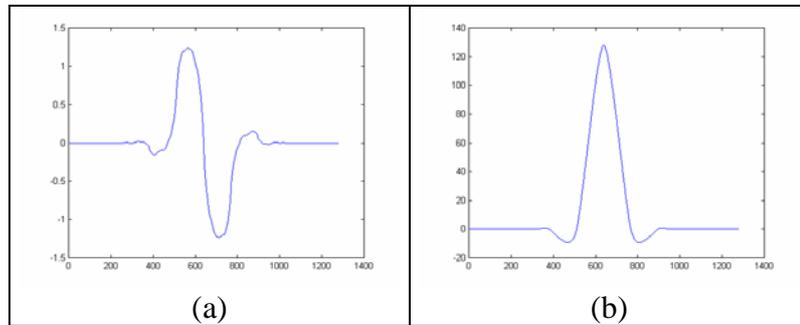


Figura 36 (a) wavelet Bi-ortogonal 1.3; (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 1.3.

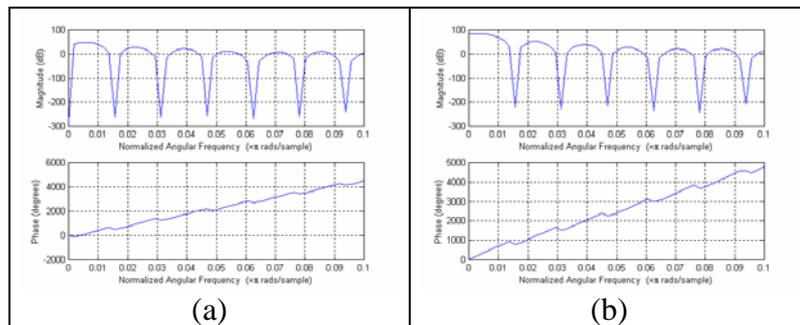


Figura 37 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 1.3 e (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 1.3.

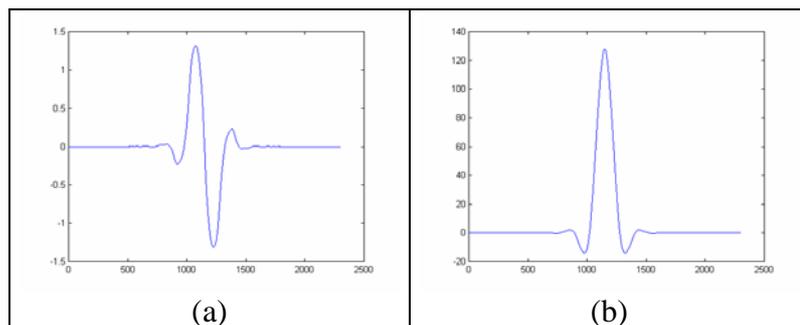


Figura 38 (a) wavelet Bi-ortogonal 1.5 e (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 1.5.

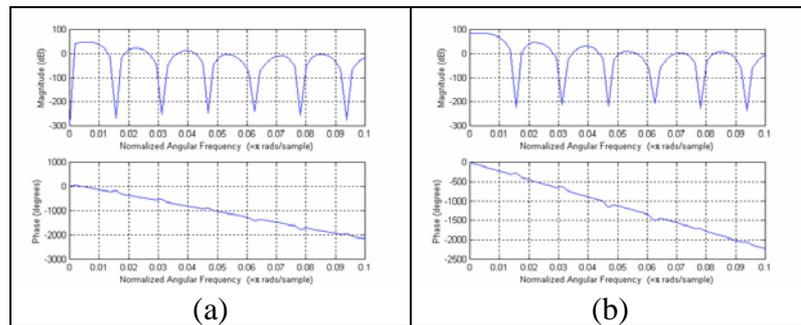


Figura 39 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 1.5 e (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 1.5.

Na Figura 40 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 2.2 (a), sua primeira integral (b) e sua segunda integral (c). Na Figura 41 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 2.2 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2 e o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2. Na Figura 42 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 2.4 (a), sua primeira integral (b) e sua segunda integral (c). Na Figura 43 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 2.4 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.4 e o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.4. Na Figura 44 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 2.6 (a), sua primeira integral (b) e sua segunda integral (c). Na Figura 45 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 2.6 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.6 e o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.6. Na Figura 46 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 2.8 (a), sua primeira integral (b) e sua segunda integral (c). Na Figura 47 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 2.8 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.8 e o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.8.

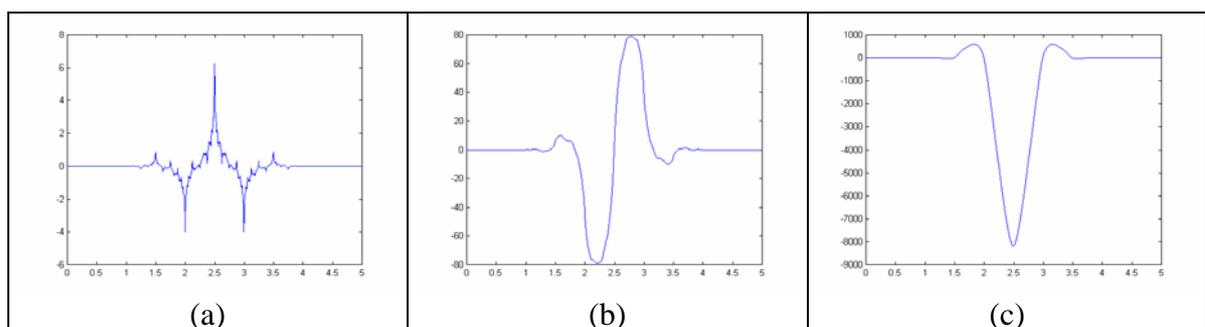


Figura 40 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.2, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2.

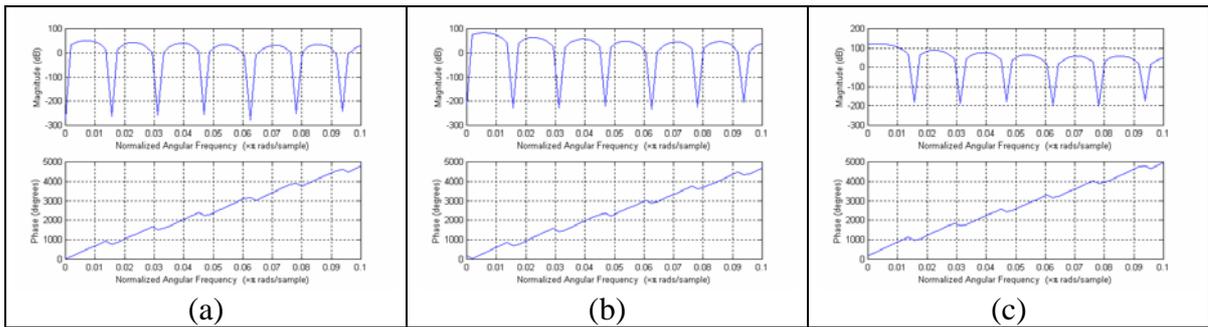


Figura 41 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.2, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.2 e (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.2.

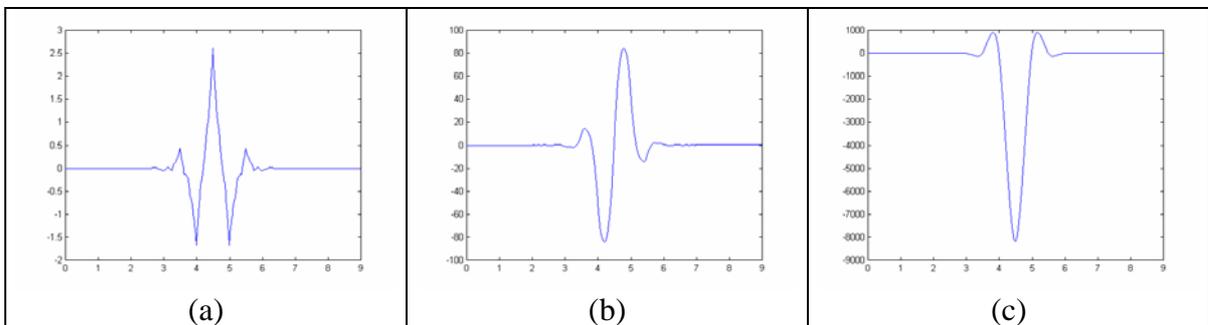


Figura 42 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.4, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.4 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.4.

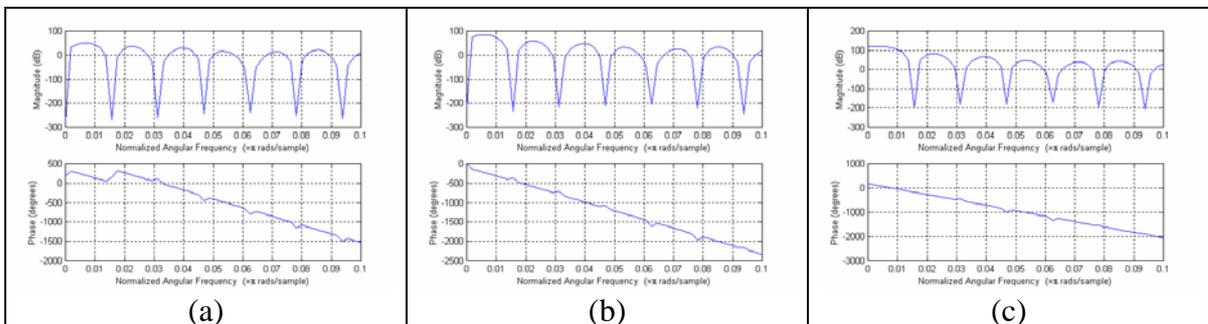


Figura 43 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.4, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.4 e (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.4.

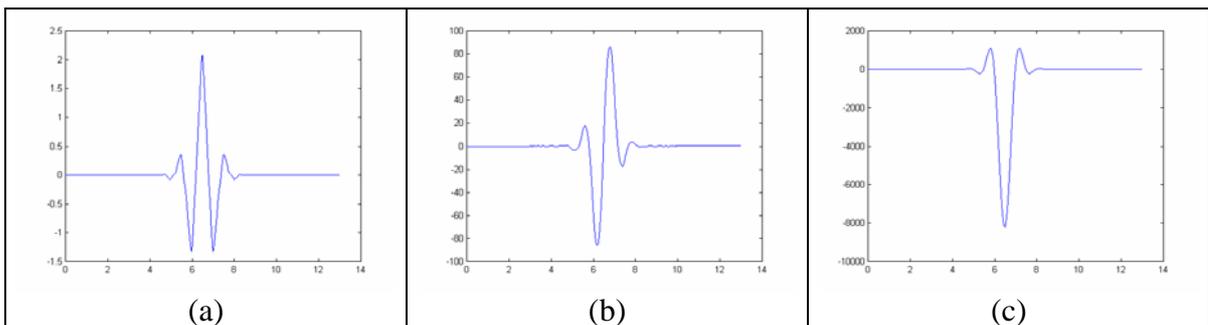


Figura 44 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.6, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.6 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.6.

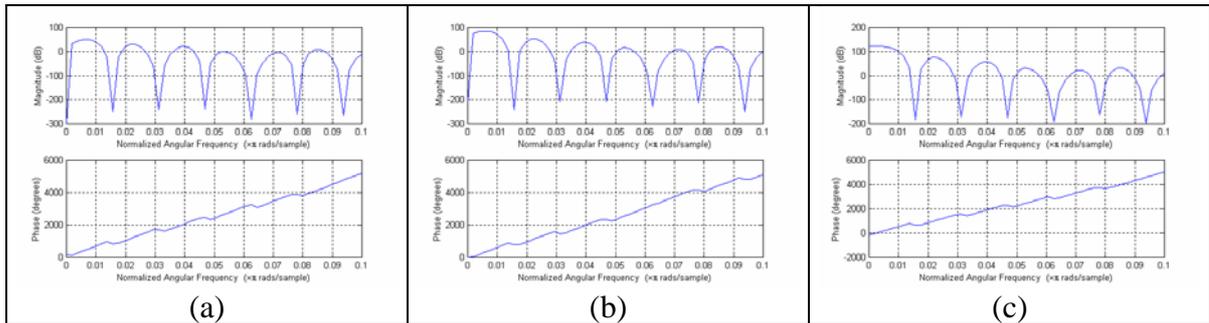


Figura 45 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.6, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.6 e -ortogonal 2.6, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.6.

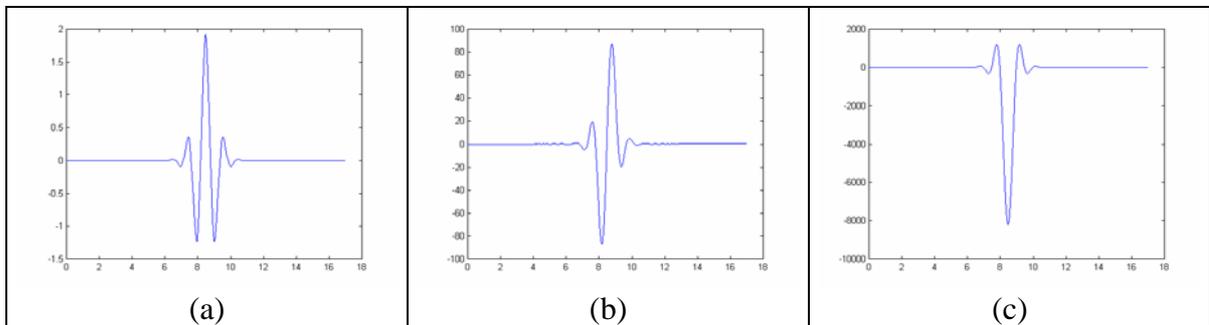


Figura 46 (a) wavelet Bi-ortogonal 2.8, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.8 e (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 2.8.

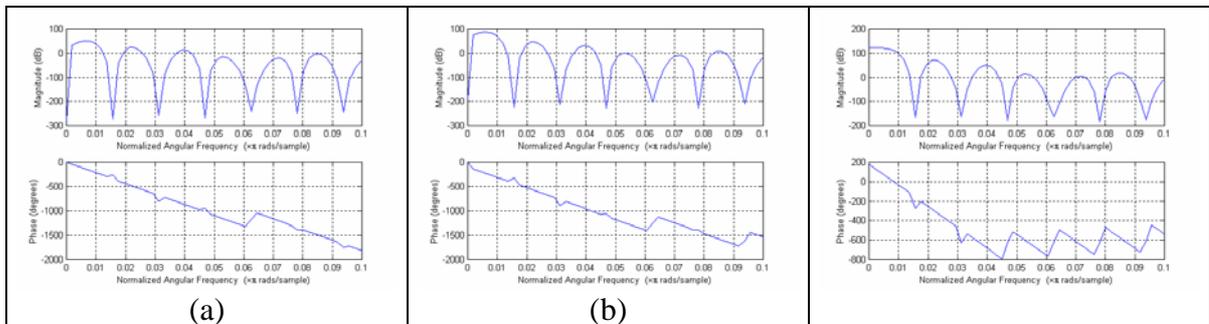


Figura 47 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 2.8, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 2.8 e (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 2.8.

Na Figura 48 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 4.4 (a), sua primeira integral (b), sua segunda integral (c), sua terceira integral (d) e , sua quarta integral (e). Na Figura 49 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 4.4 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 2.2 (b), o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4 (c), o módulo e a fase da terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4 (d) e o módulo e a fase da quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4 (e).

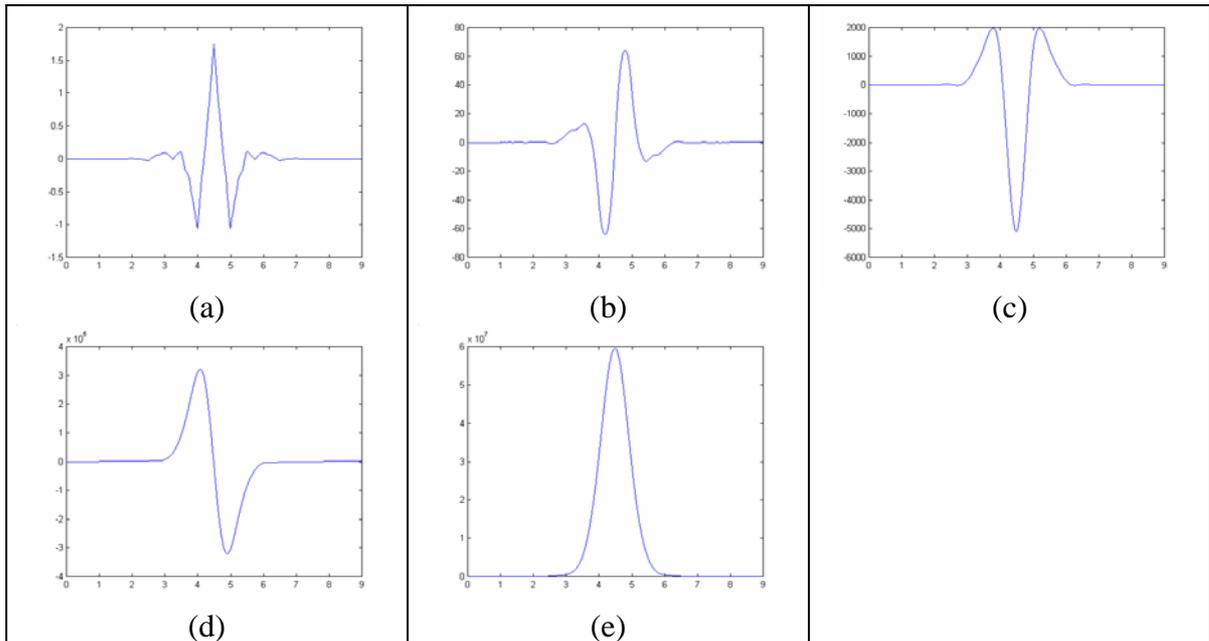


Figura 48 (a) wavelet Bi-ortogonal 4.4, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4 e (e) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4.

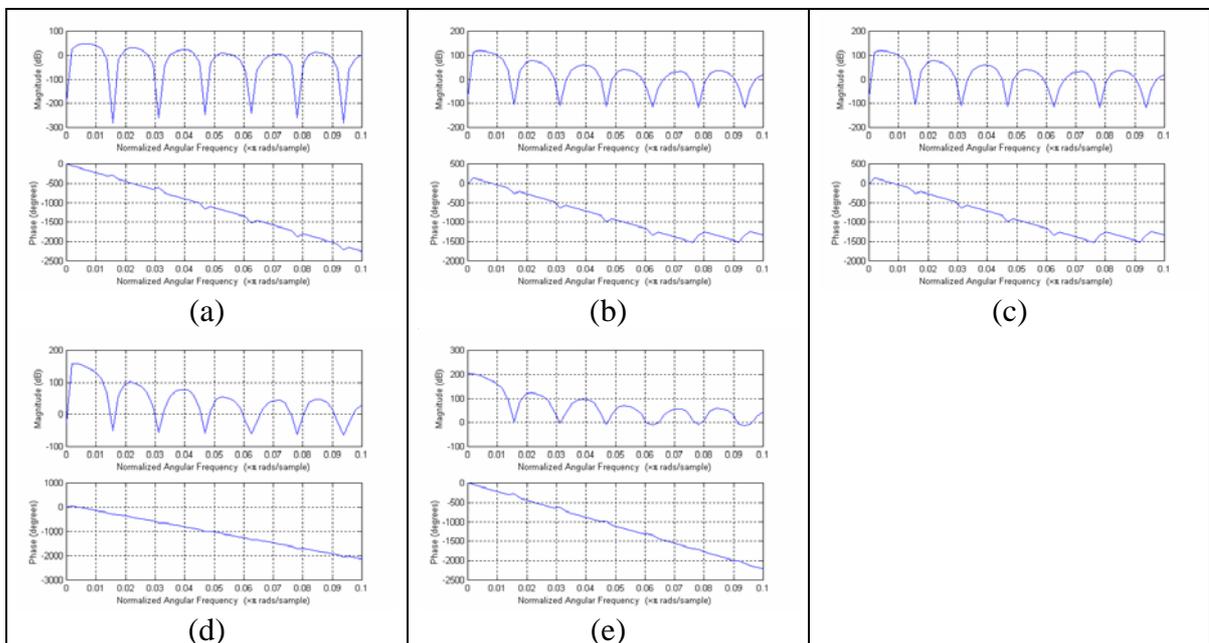


Figura 49 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 4.4, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4 e (e) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 4.4.

Na Figura 50 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 5.5 (a), sua primeira integral (b), sua segunda integral (c), sua terceira integral (d), sua quarta integral (e) e sua quinta integral (f). Na Figura 51 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 5.5 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 (b), o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 (c), o módulo e a fase da terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 (d), o módulo e a fase da quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 (e) e o módulo e a fase da quinta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 (f).

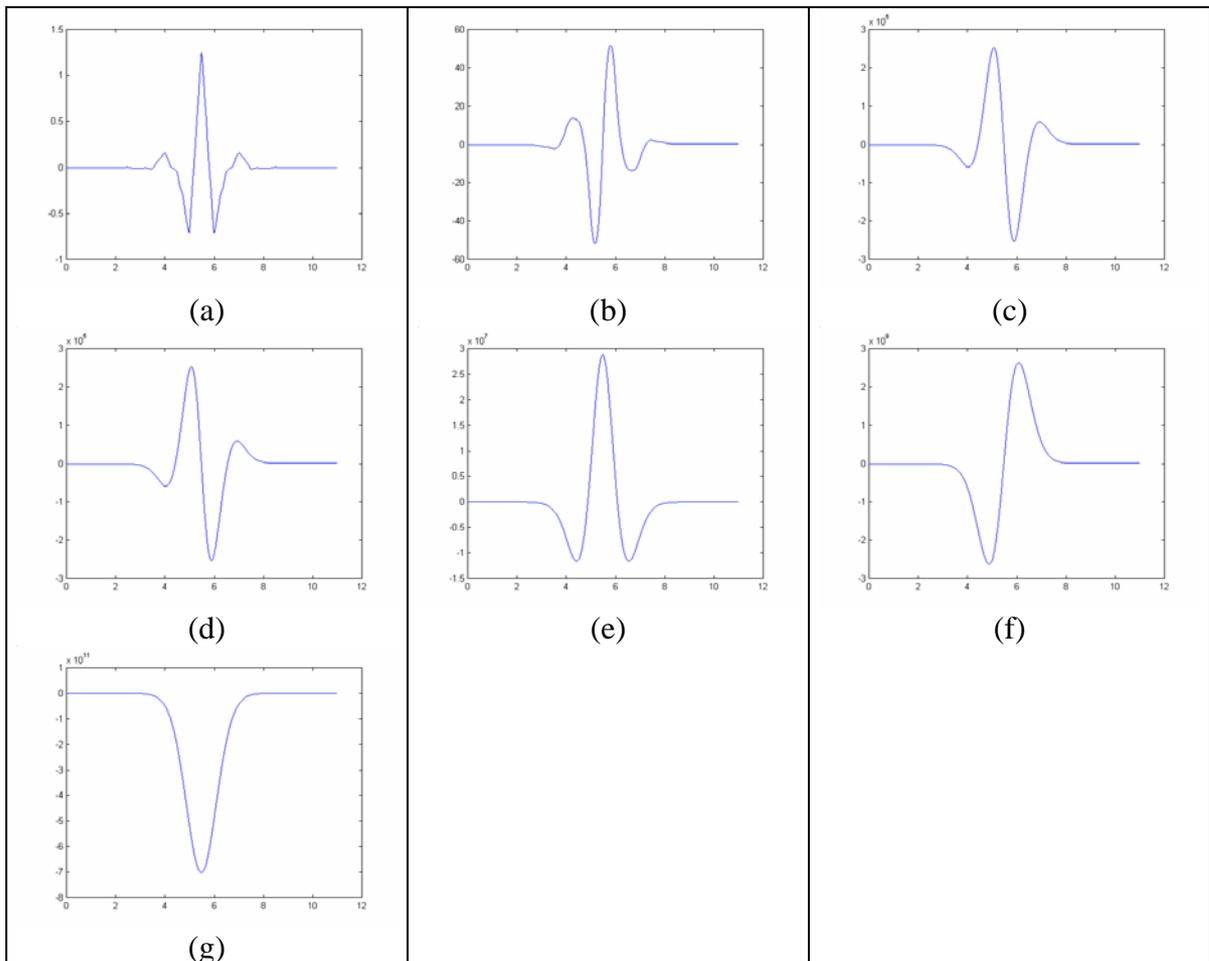


Figura 50 (a) wavelet Bi-ortogonal 5.5; (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (e) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5, (f) quinta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5 e (g) sexta integral da wavelet Bi-ortogonal 5.5.

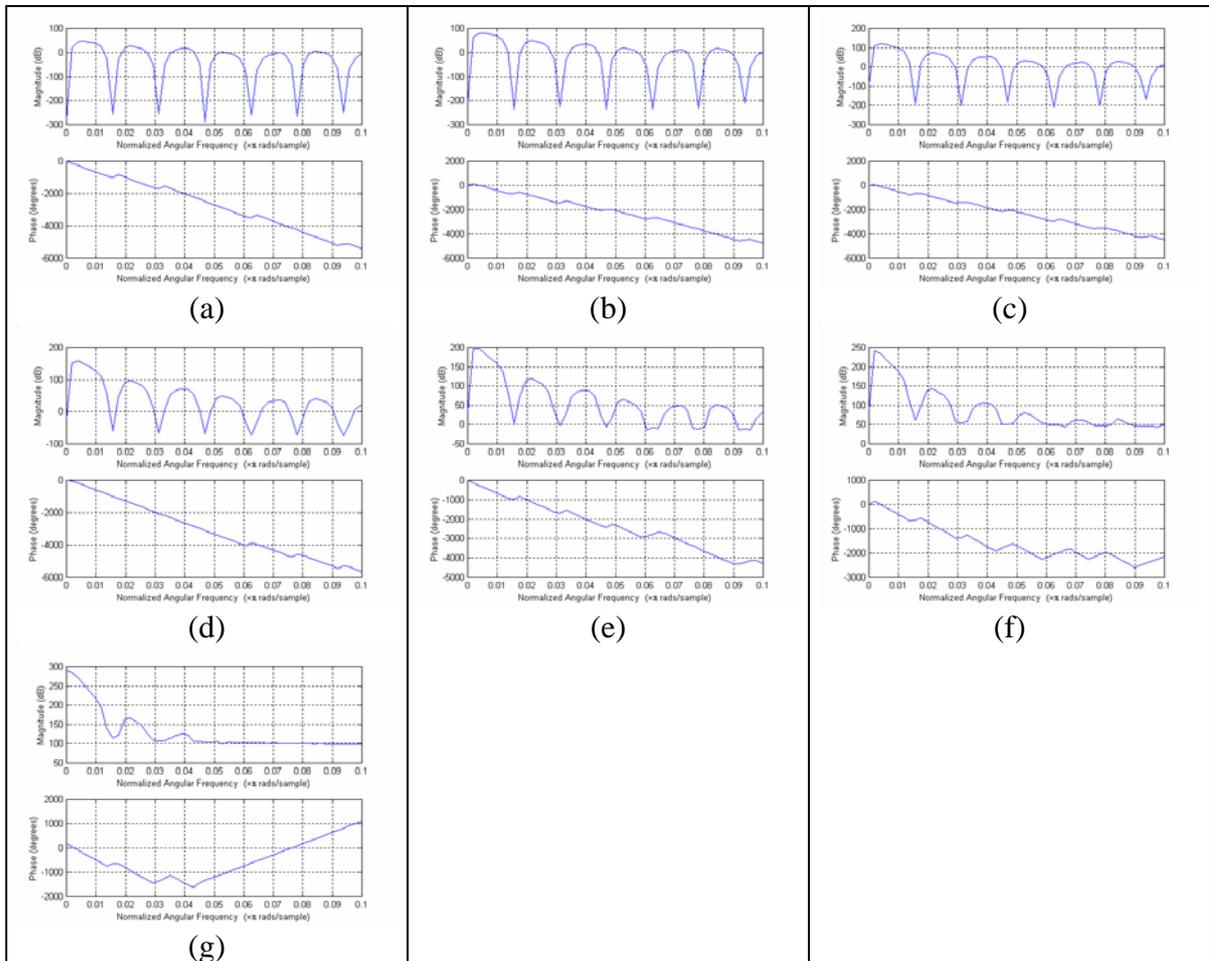


Figura 51 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 5.5, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 5.5, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 5.5, (d) terceira integral da wavelet Biortogonal 5.5, (e) quarta integral da wavelet Biortogonal 5.5, (f) quinta integral da wavelet Biortogonal 5.5 e (g) sexta integral da wavelet Biortogonal 5.5.

Na Figura 52 são apresentadas a wavelet Bi-ortogonal 6.8 (a), sua primeira integral (b), sua segunda integral (c), sua terceira integral (d), sua quarta integral (e), sua quinta integral (f) e sua sexta integral (g). Na Figura 53 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (b), o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (c), o módulo e a fase da terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (d), o módulo e a fase da quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (e), o módulo e a fase da quinta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (f) e o módulo e a fase da sexta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8 (f).

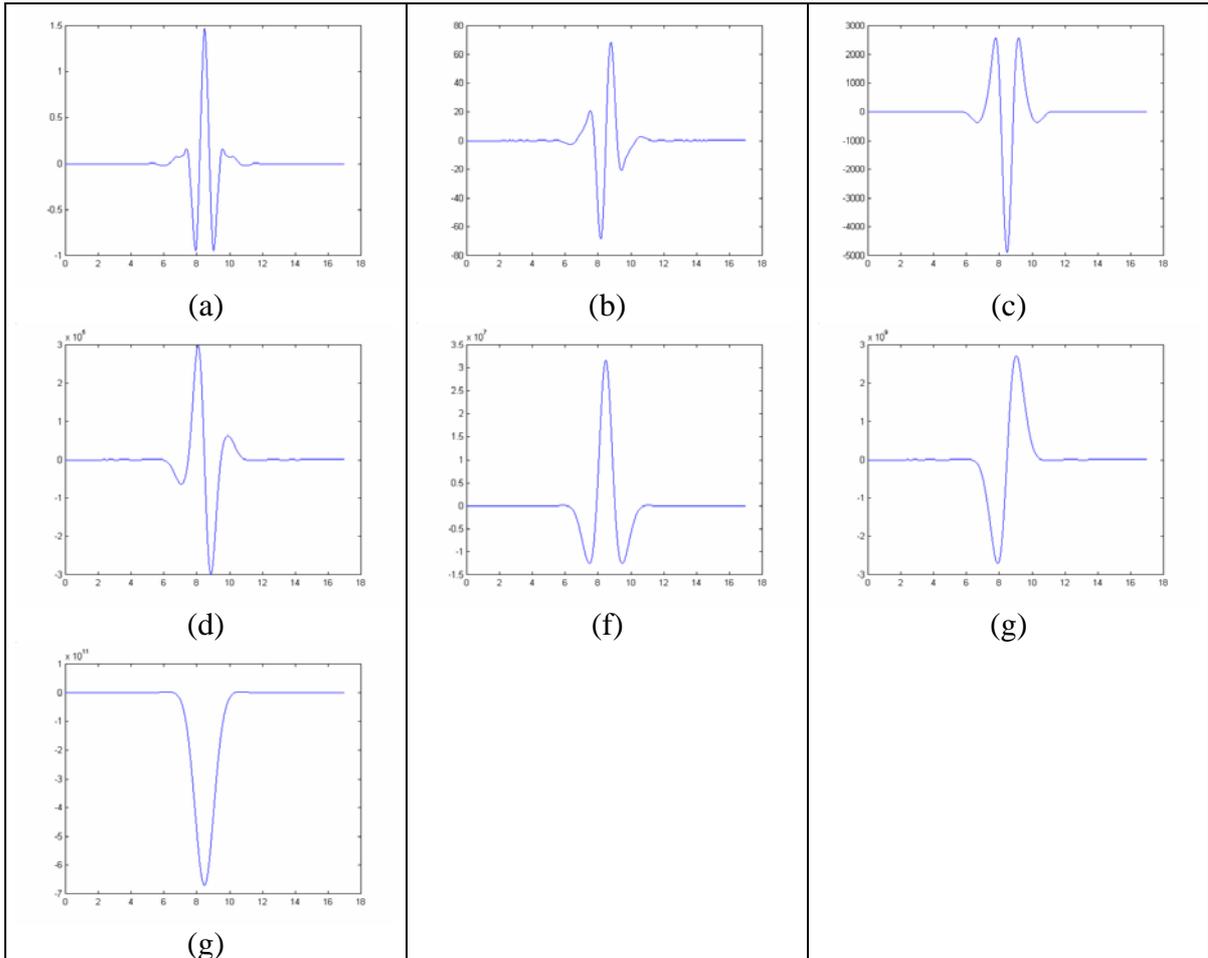


Figura 52 (a) wavelet Bi-ortogonal 6.8, (b) primeira integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (c) segunda integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (d) terceira integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (e) quarta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8, (f) quinta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8e (g) sexta integral da wavelet Bi-ortogonal 6.8.

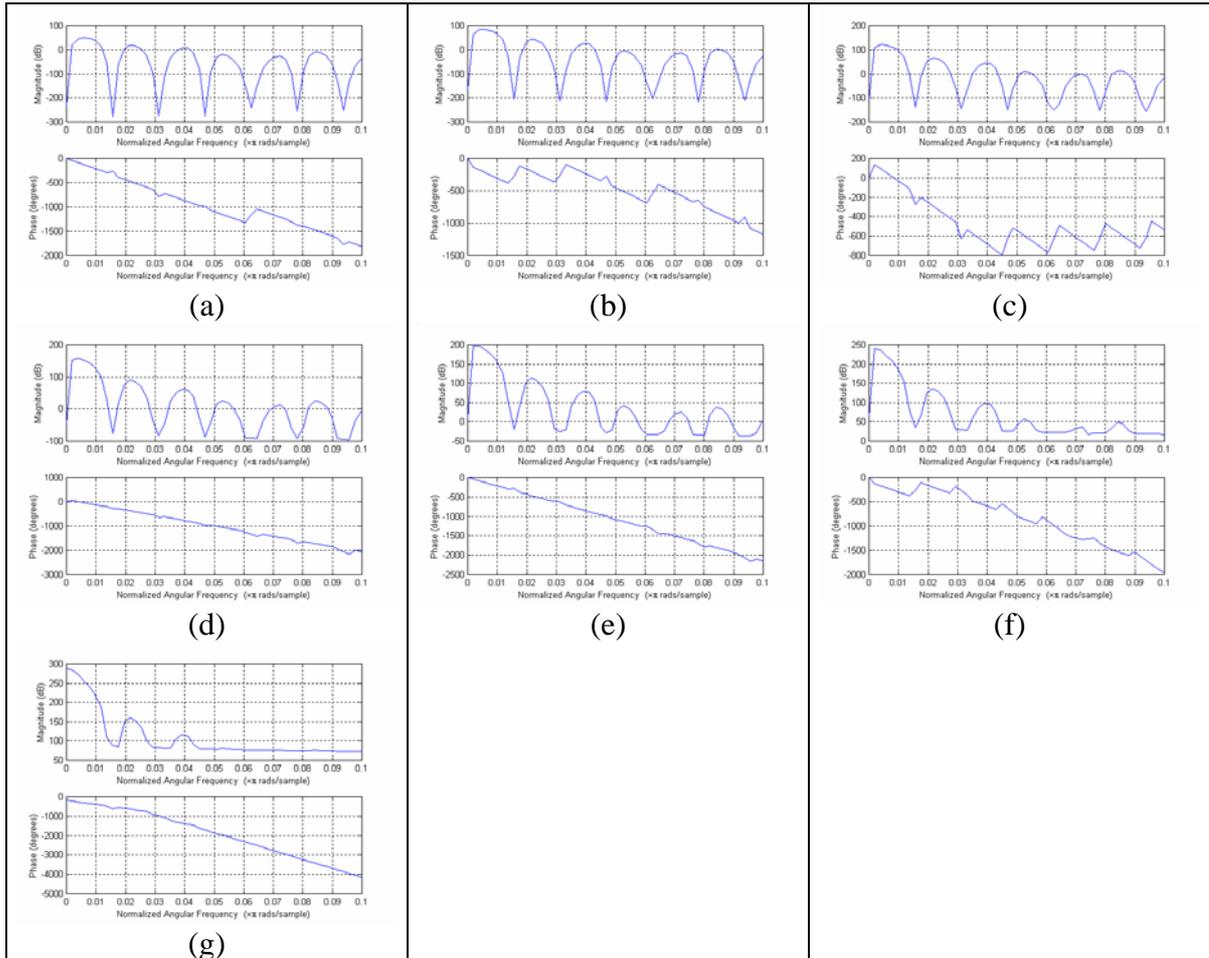


Figura 53 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Bi-ortogonal 6.8, (b) primeira integral da wavelet Biortogonal 6.8, (c) segunda integral da wavelet Biortogonal 6.8, (d) terceira integral da wavelet Biortogonal 6.8, (e) quarta integral da wavelet Biortogonal 6.8, (f) quinta integral da wavelet Biortogonal 6.8 e (g) sexta integral da wavelet Biortogonal 6.8.

Na Figura 54 são apresentadas a wavelet Haar (a) e sua primeira integral (b). Na Figura 55 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Haar (a) e o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Haar.

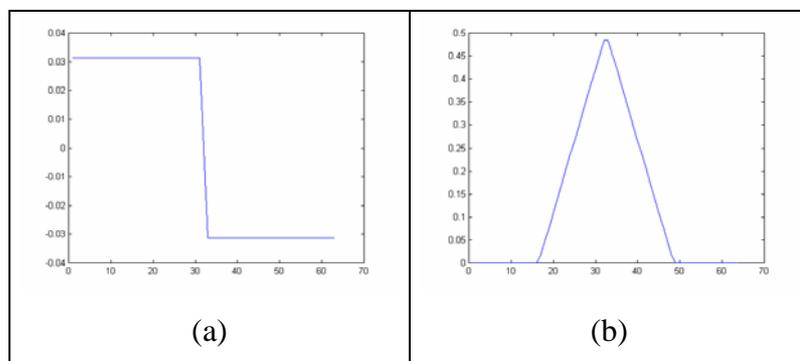


Figura 54 (a) wavelet Haar na escala 32 e (b) primeira integral da wavelet Haar na escala 32.

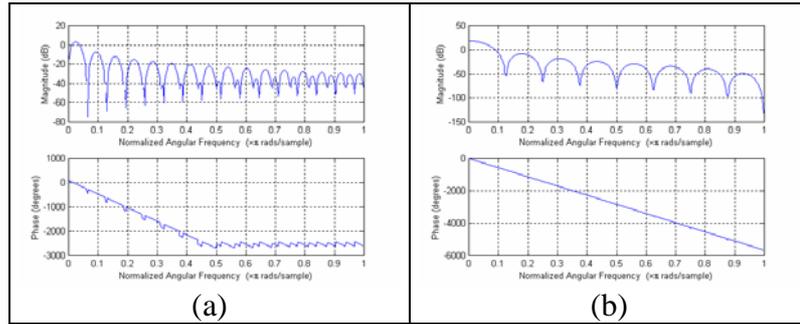


Figura 55 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Haar e (b) primeira integral da wavelet Haar.

Na Figura 56 são apresentadas a wavelet Mexican Hat (a), sua primeira integral (b) e sua segunda integral (c). Na Figura 57 são apresentados o módulo e a fase da wavelet Mexican Hat (a), o módulo e a fase da primeira integral da wavelet Mexican Hat e o módulo e a fase da segunda integral da wavelet Mexican Hat (c).

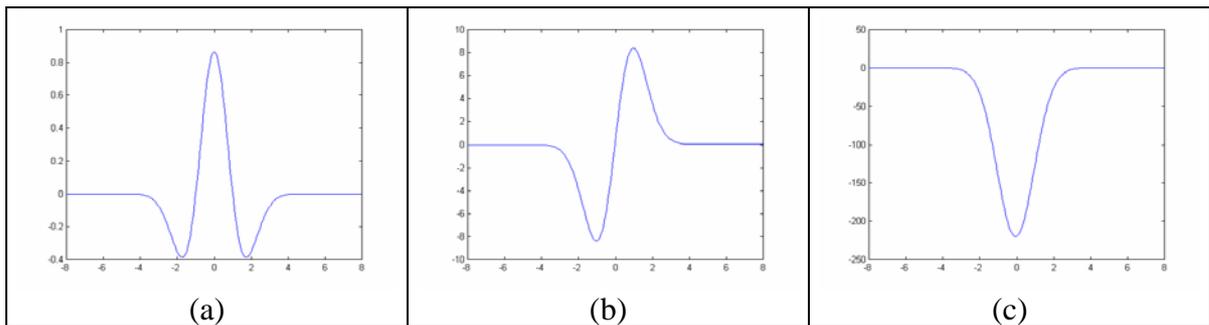


Figura 56 (a) wavelet Mexican Hat, (b) primeira integral da wavelet Mexican Hat e (c) segunda integral da wavelet Mexican Hat.

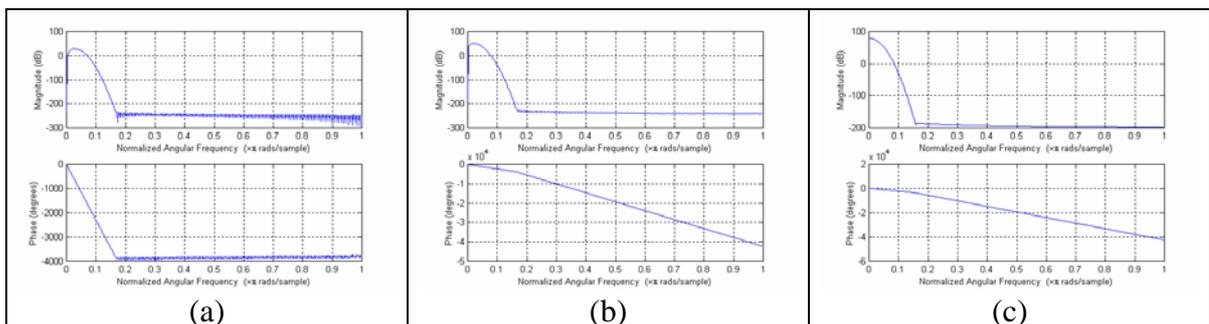


Figura 57 Magnitude e fase da resposta em frequência das funções (a) wavelet Mexican Hat, (b) primeira integral da wavelet Mexican Hat e (c) segunda integral da wavelet Mexican Hat.

Tabela 3: Resumo das características que as funções wavelets possuem quando submetidas ao algoritmo definido no item 4.3.

Nome da função (método usado para gerar a função 2D)	Pode ser usada no método apresentado	Ordem da função*	A função suavizadora 2D possui simetria
Bi-ortogonal 1.3 (rotação)	Sim	1	Sim
Bi-ortogonal 1.3 (convolução)	Sim	1	Não
Bi-ortogonal 1.3 (produto tensorial)	Sim	1	Não
Bi-ortogonal 1.5 (rotação)	Sim	1	Sim
Bi-ortogonal 1.5 (convolução)	Sim	1	Não
Bi-ortogonal 1.5 (produto tensorial)	Sim	1	Não
Bi-ortogonal 2.2 (rotação)	Sim	2	Sim
Bi-ortogonal 2.2 (convolução)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.2 (produto tensorial)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.4 (rotação)	Sim	2	Sim
Bi-ortogonal 2.4 (convolução)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.4 (produto tensorial)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.6 (rotação)	Sim	2	Sim
Bi-ortogonal 2.6 (convolução)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.6 (produto tensorial)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.8 (rotação)	Sim	2	Sim
Bi-ortogonal 2.8 (convolução)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 2.8 (produto tensorial)	Sim	2	Não
Bi-ortogonal 4.4 (rotação)	Sim	4	Sim
Bi-ortogonal 4.4 (convolução)	Sim	4	Sim
Bi-ortogonal 4.4 (produto tensorial)	Sim	4	Sim
Bi-ortogonal 5.5 (rotação)	Sim	6	Sim
Bi-ortogonal 5.5 (convolução)	Sim	6	Sim
Bi-ortogonal 5.5 (produto tensorial)	Sim	6	Sim
Bi-ortogonal 6.8 (rotação)	Sim	6	Sim
Bi-ortogonal 6.8 (convolução)	Sim	6	Sim
Bi-ortogonal 6.8 (produto tensorial)	Sim	6	Sim
Haar (rotação)	Sim	1	Sim
Haar (convolução)	Sim	1	Não
Haar (Produto Tensorial)	Sim	1	Não
Mexican Hat (rotação)	Sim	2	Sim
Mexican Hat(convolução)	Sim	2	Sim
Mexican Hat (produto tensorial)	Sim	2	Sim

* número de vezes que a função deve ser integrada para obter a função suavizadora

Na Figura 58 é apresentada a imagem da função suavizadora de Haar 2D na escala 32 por rotação (a), por produto tensorial (b) e por convolução (c). Na Figura 59 é apresentada a imagem da função suavizadora Bi-ortogonal 1.3 2D por rotação na escala 64 (a), por produto tensorial na escala 256 (b) e por convolução na escala 256(c). Na Figura 60 é apresentada a imagem da função suavizadora Bi-ortogonal 4.4 2D na escala 64 por rotação (a), por produto tensorial (b) e por convolução (c).

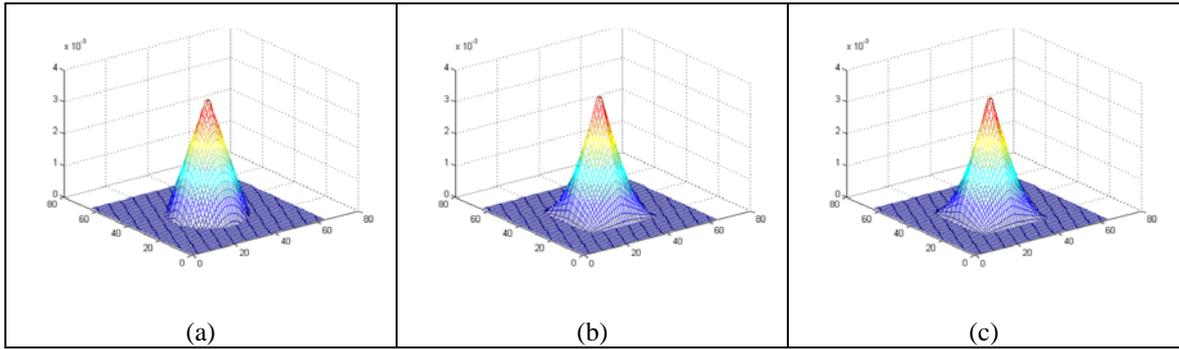


Figura 58 Imagem da função suavizadora de Haar 2D na escala 32 por rotação (a), por produto tensorial (b) e por convolução (c).

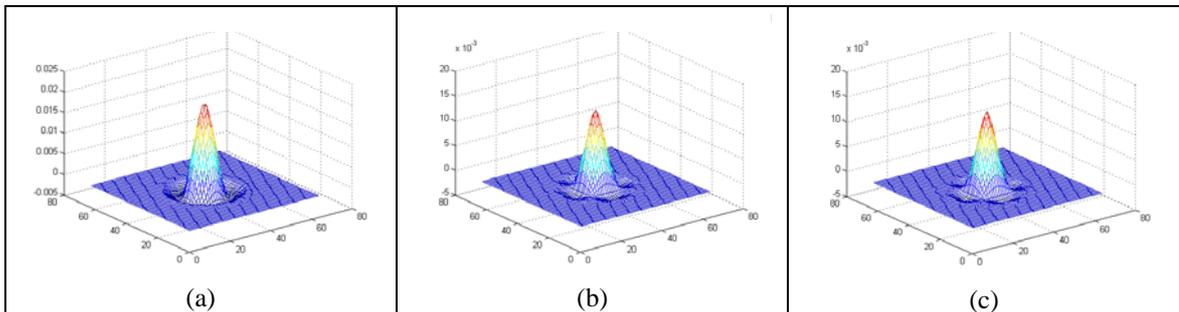


Figura 59 Imagem da função suavizadora Bi-ortogonal 1.3 2D por rotação na escala 64 (a), por produto tensorial na escala 256 (b) e por convolução na escala 256(c).

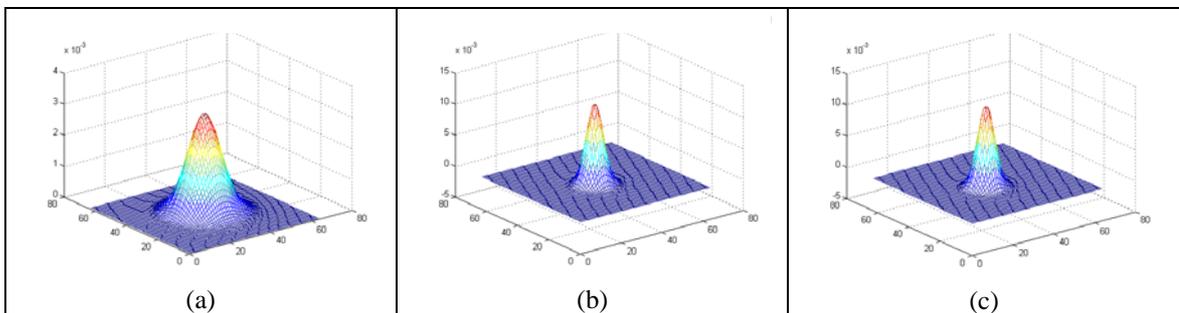


Figura 60 Imagem da função suavizadora Bi-ortogonal 4.4 2D na escala 64 por rotação (a), por produto tensorial (b) e por convolução (c).

Na Figura 61 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função Mexican Hat gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 62 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Haar gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 63 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 64 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4 gerada por rotação para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura

65 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Haar gerada por produto tensorial para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 66 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Haar gerada por convolução para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 67 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 gerada por produto tensorial para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 68 é apresentada a representação em espaço de escala da imagem da Lena para a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 gerada por convolução para as escalas 2, 16, 32 e 64.



Figura 61 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Mexican Hat, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 62 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Haar, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 63 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 64 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 65 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Haar, gerada por produto tensorial para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 66 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Haar, gerada por convolução para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 67 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, gerada por produto tensorial para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 68 Representação da imagem da lena no espaço de escalas formado pela função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, gerada por convolução para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

Na Figura 69 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Mexican Hat para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 70 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Haar para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 71 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 72 são apresentadas as bolhas obtidas da aplicação do operador detector de bolhas (eq. 24 e 25) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4 para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 73 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Mexican Hat para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 74 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Haar para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 75 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3 para as escalas 2, 16, 32 e 64. Na Figura 76 são apresentadas as bordas obtidas da aplicação do operador detector de bordas (eq. 30 e 31) usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4 para as escalas 2, 16, 32 e 64.



Figura 69 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Mexican Hat, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

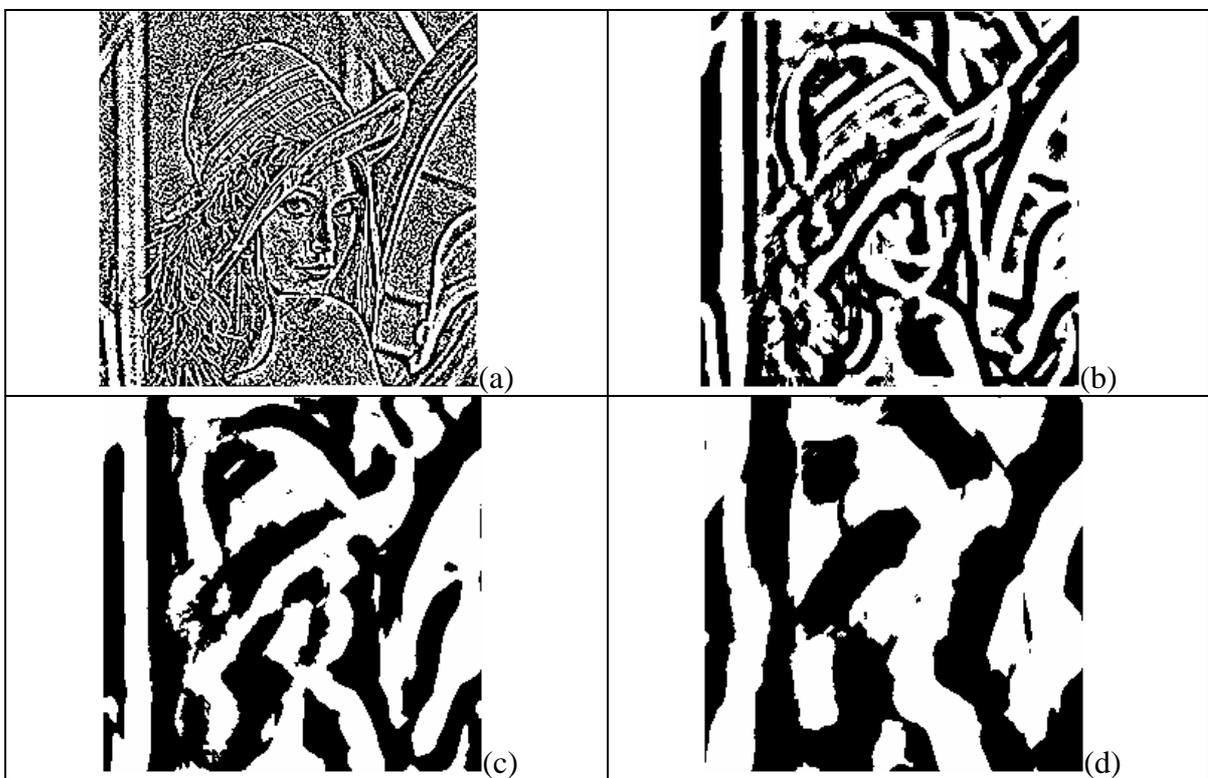


Figura 70 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Haar, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

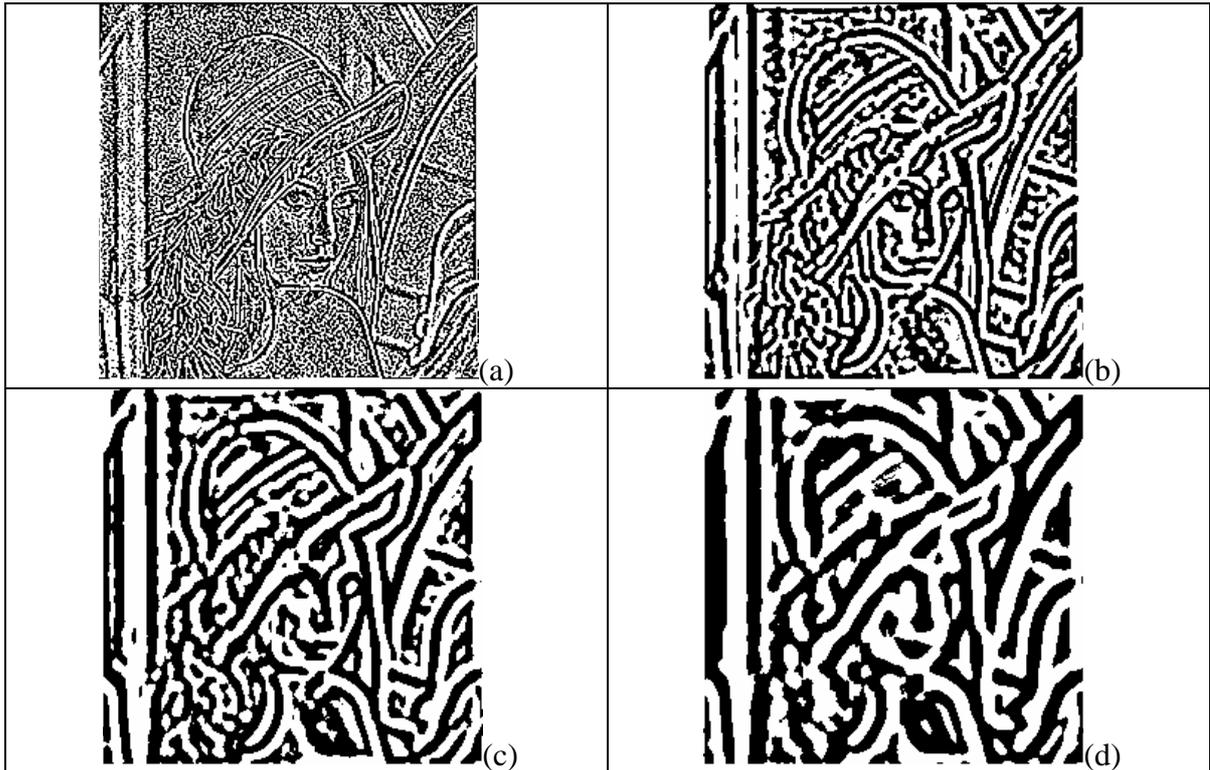


Figura 71 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).



Figura 72 Bolhas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bolhas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

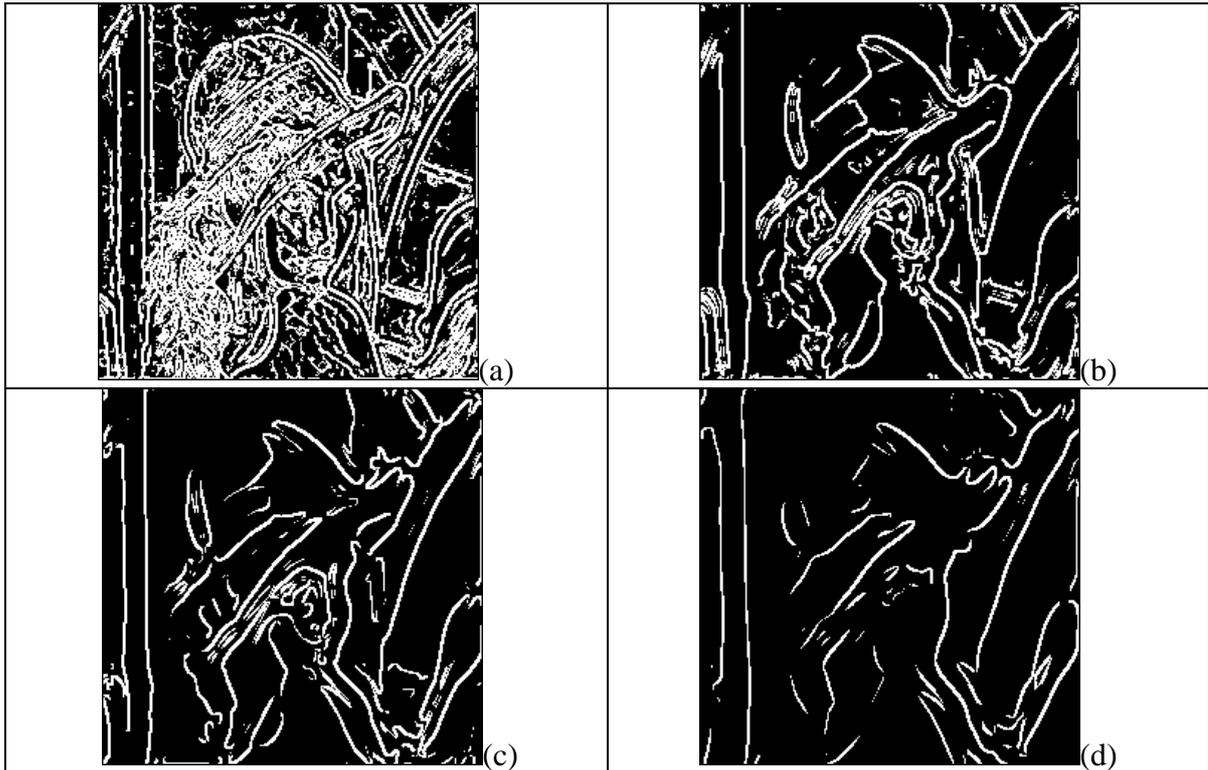


Figura 73 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Mexican Hat, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

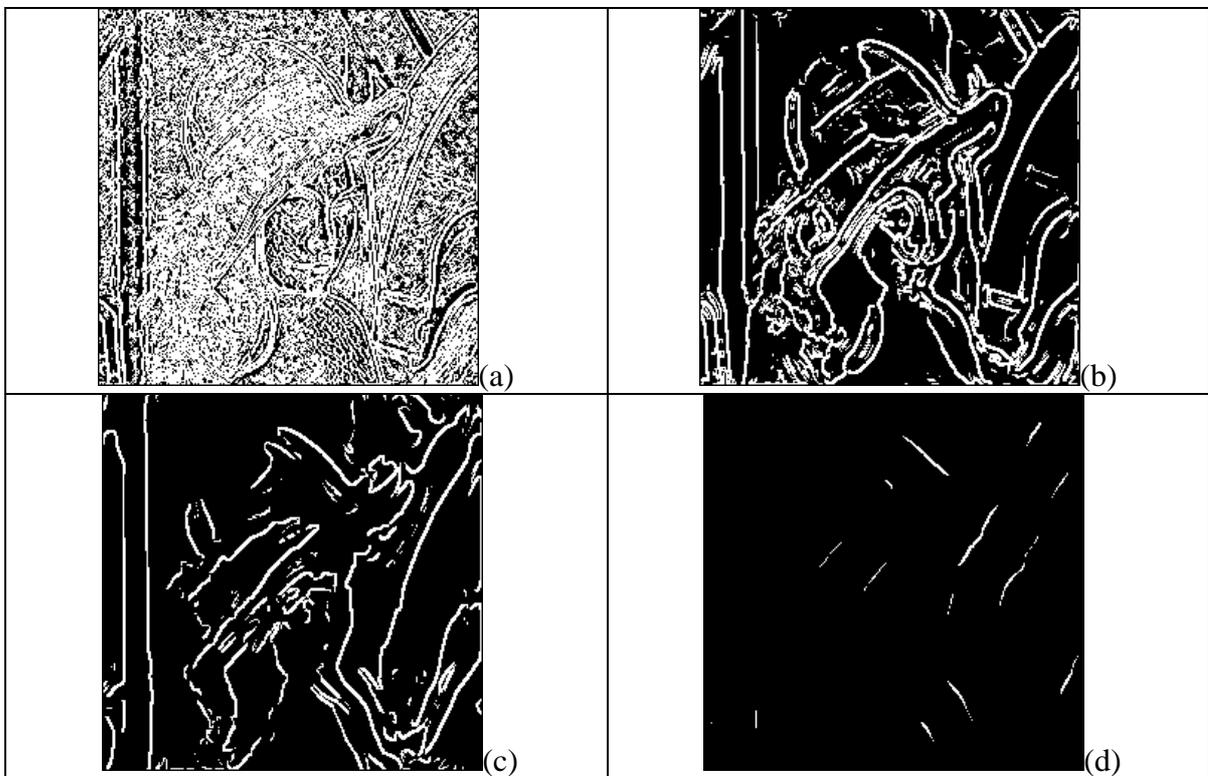


Figura 74 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Haar, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

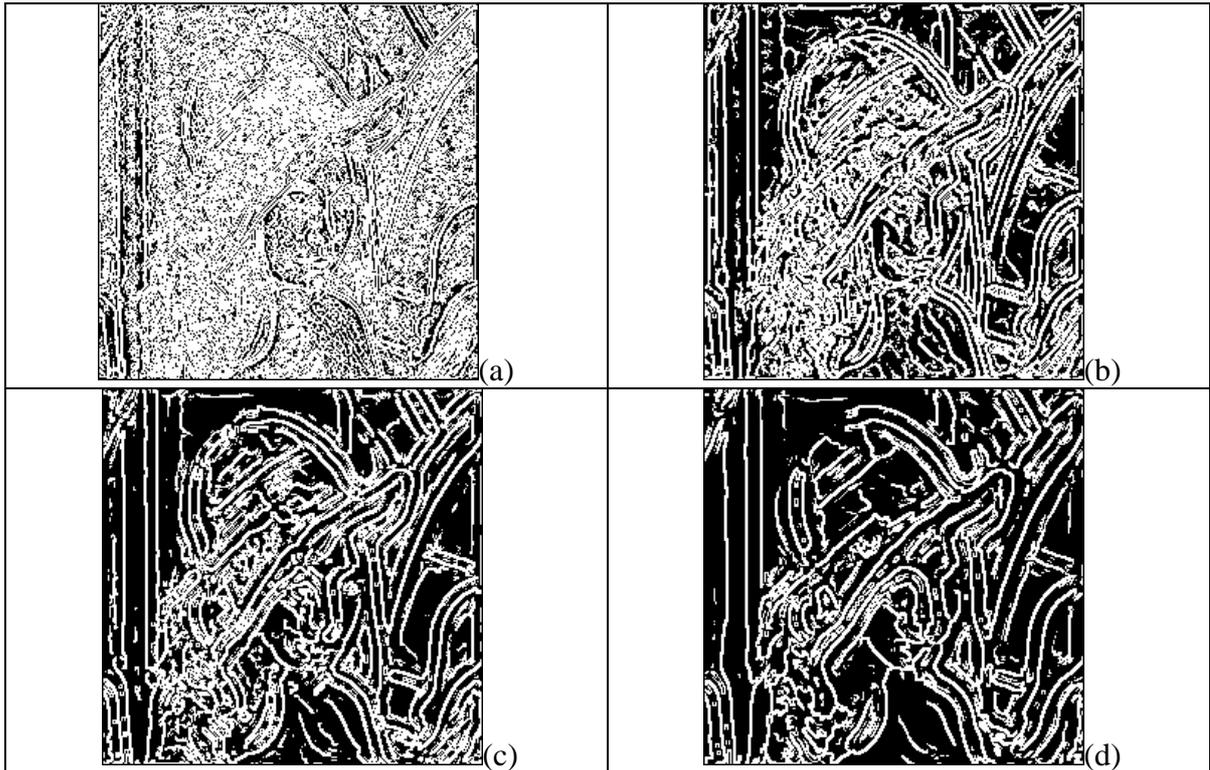


Figura 75 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 1.3, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

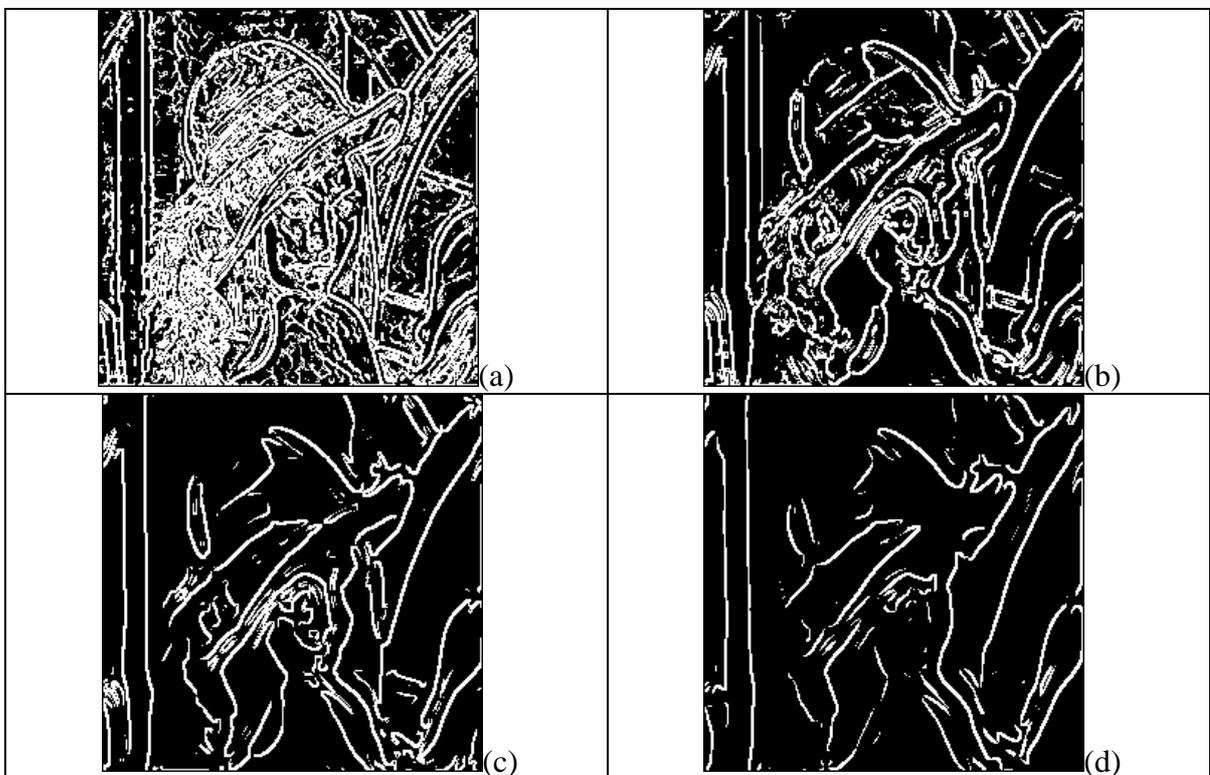


Figura 76 Bordas da imagem da Lena, obtidas aplicando o operador detector de bordas e usando a função suavizadora da Bi-ortogonal 4.4, por rotação para as escalas 2 (a), 16 (b), 32 (c) e 64 (d).

Na Figura 77 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2, 12, 26, 42, 64 e 92. Na Figura 78 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 10, 40, 54, 66 e 80. Na Figura 79 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2, 12, 22, 44, 64 e 84. Na Figura 80 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2, 10, 16, 26, 40 e 72. Na Figura 81 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 18, 36, 56 e 70. Na Figura 82 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 8, 16, 32, 64 e 96. Na Figura 83 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 16, 32, 64 e 96. Na Figura 84 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 16, 32, 42 e 56. Na Figura 85 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 8, 12, 16 e 32. Na Figura 86 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 8, 16, 32 e 36. Na Figura 87 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 64, 128, 256 e 356. Na Figura 88 são apresentadas as bolhas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2, 4, 8, 12, 16 e 20.

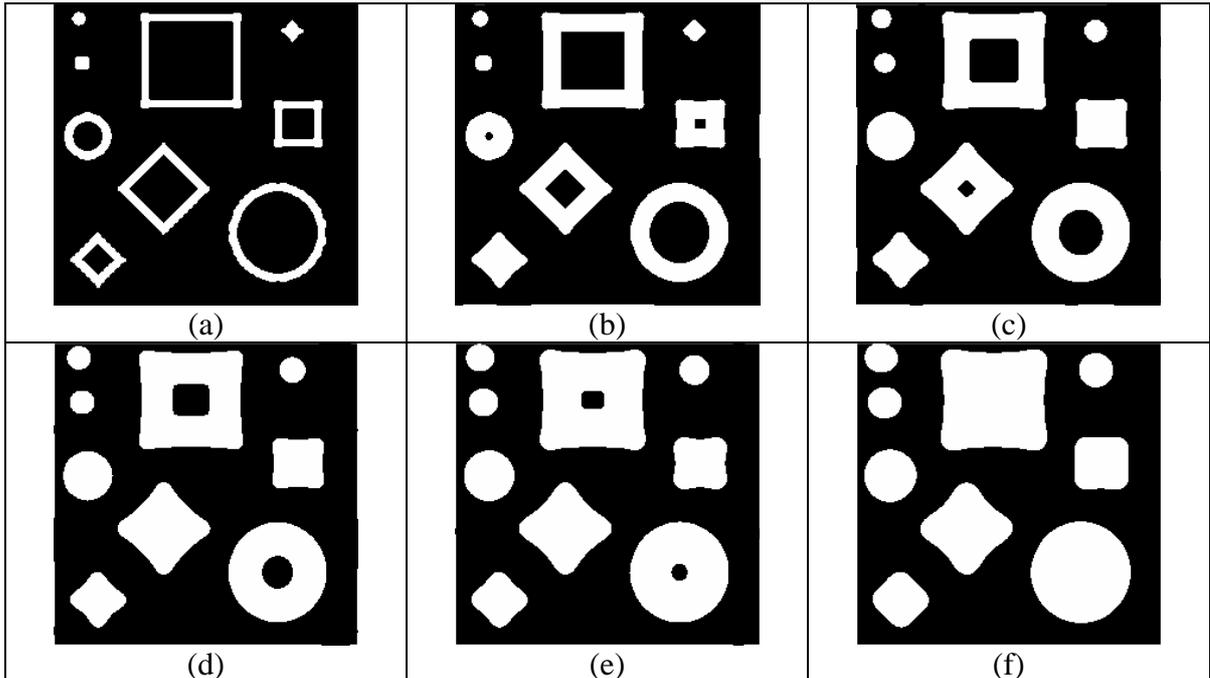


Figura 77 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 12 (b), 26 (c), 42 (d), 64 (e), 92 (f).

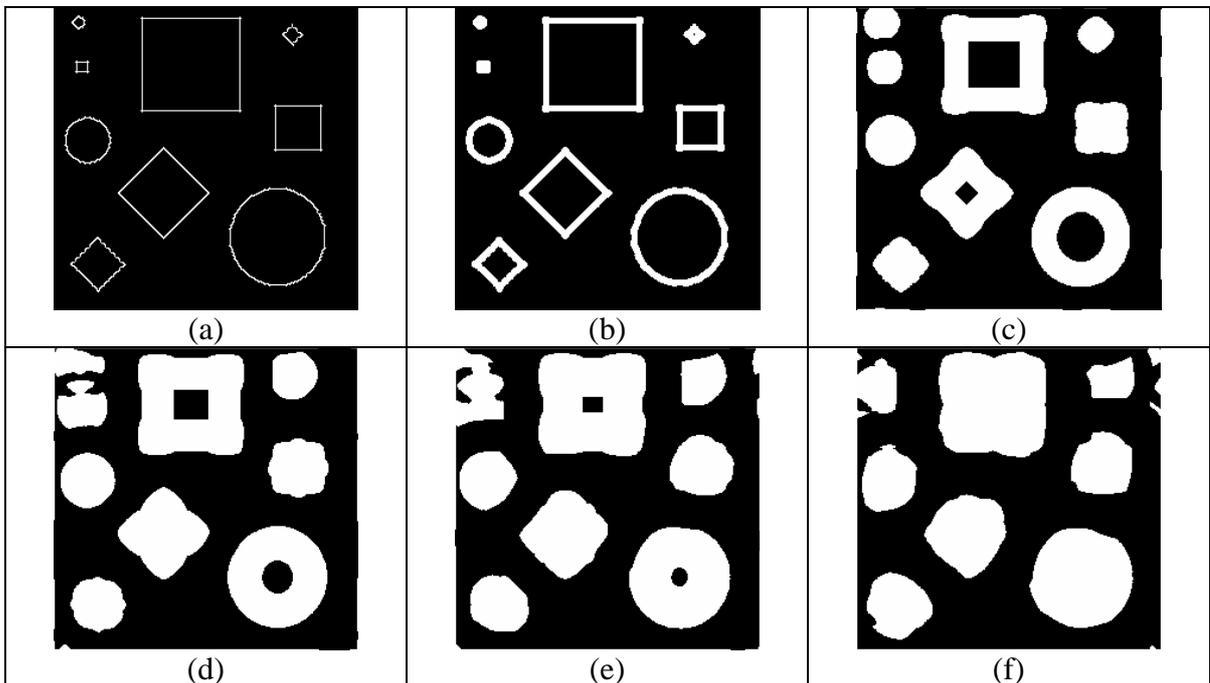


Figura 78 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 10 (b), 40 (c), 54 (d), 66 (e), 80 (f).

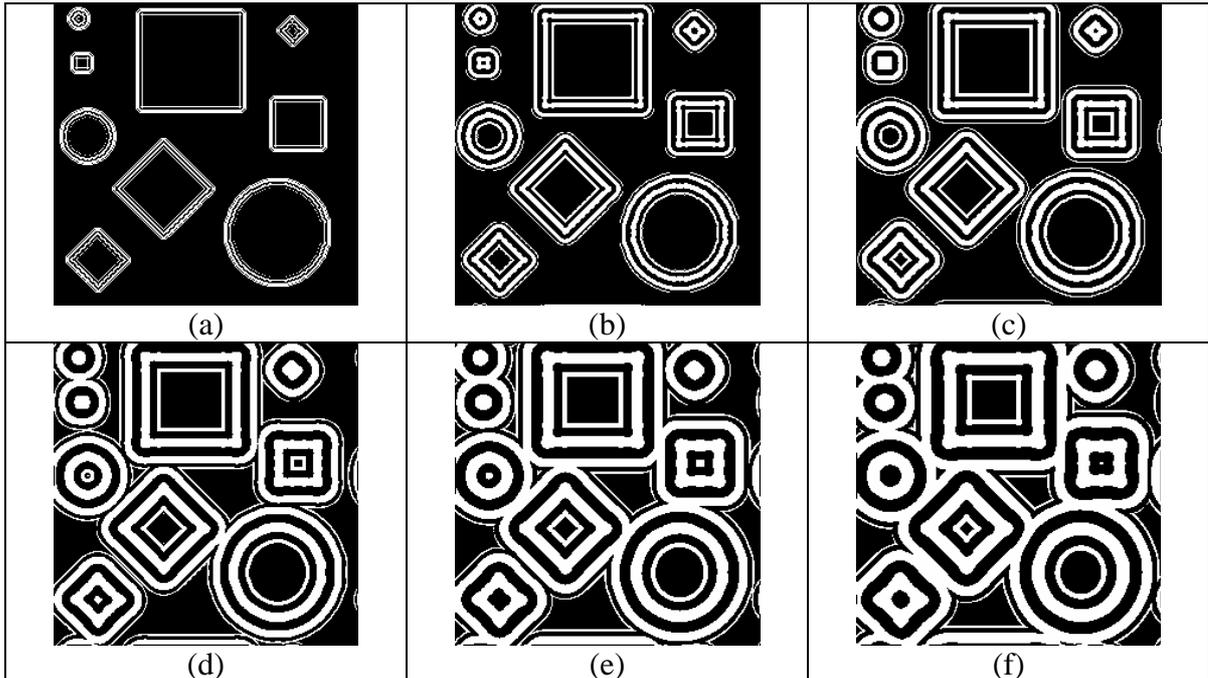


Figura 79 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 12 (b), 22 (c), 44 (d), 64 (e), 84 (f).

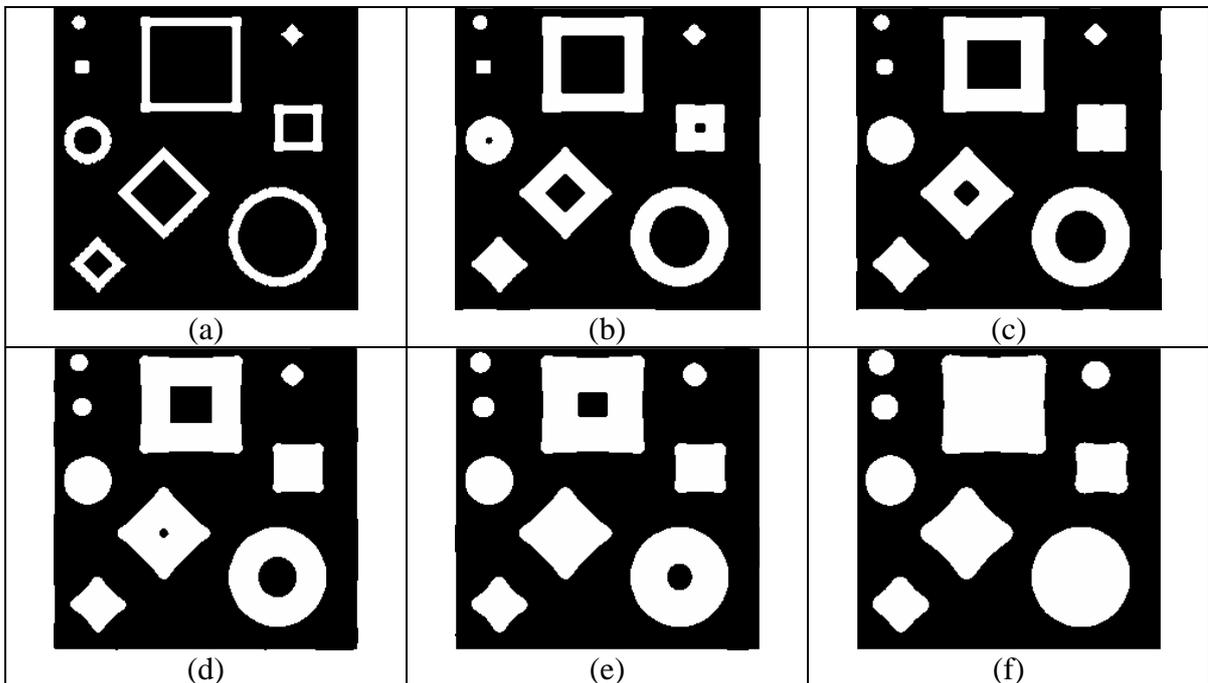


Figura 80 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 10 (b), 16 (c), 26 (d), 40 (e), 72 (f).

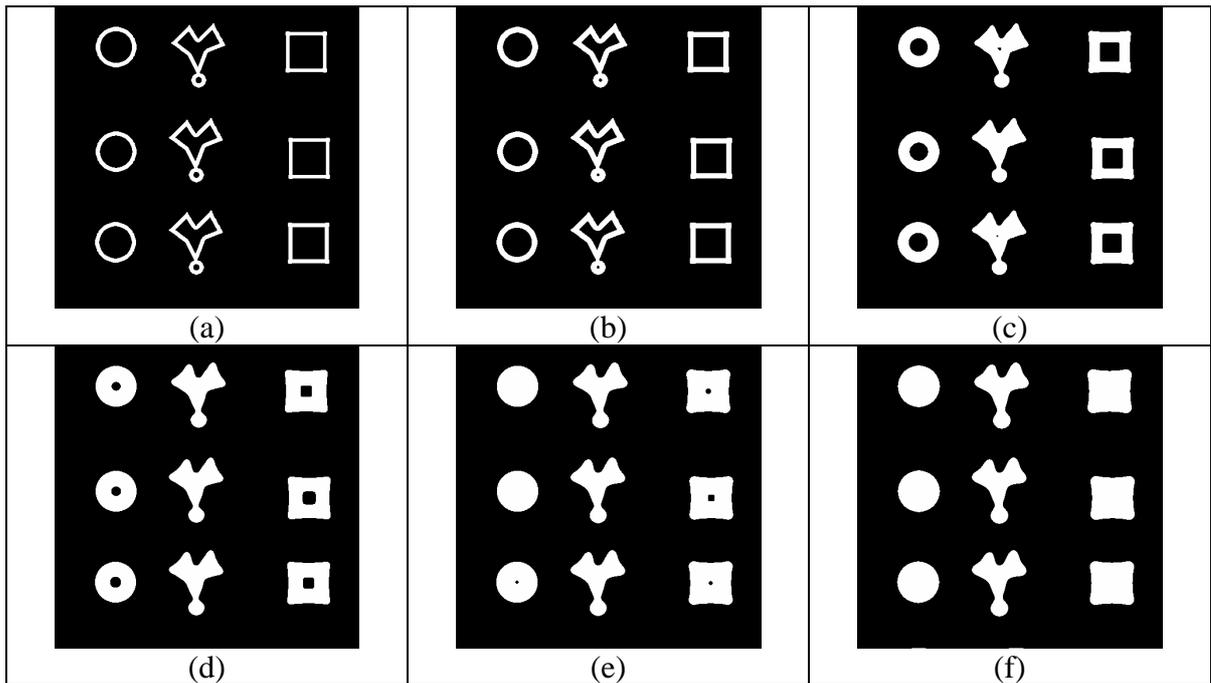


Figura 81 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 12 (b), 26 (c), 42 (d), 64 (e), 92 (f).

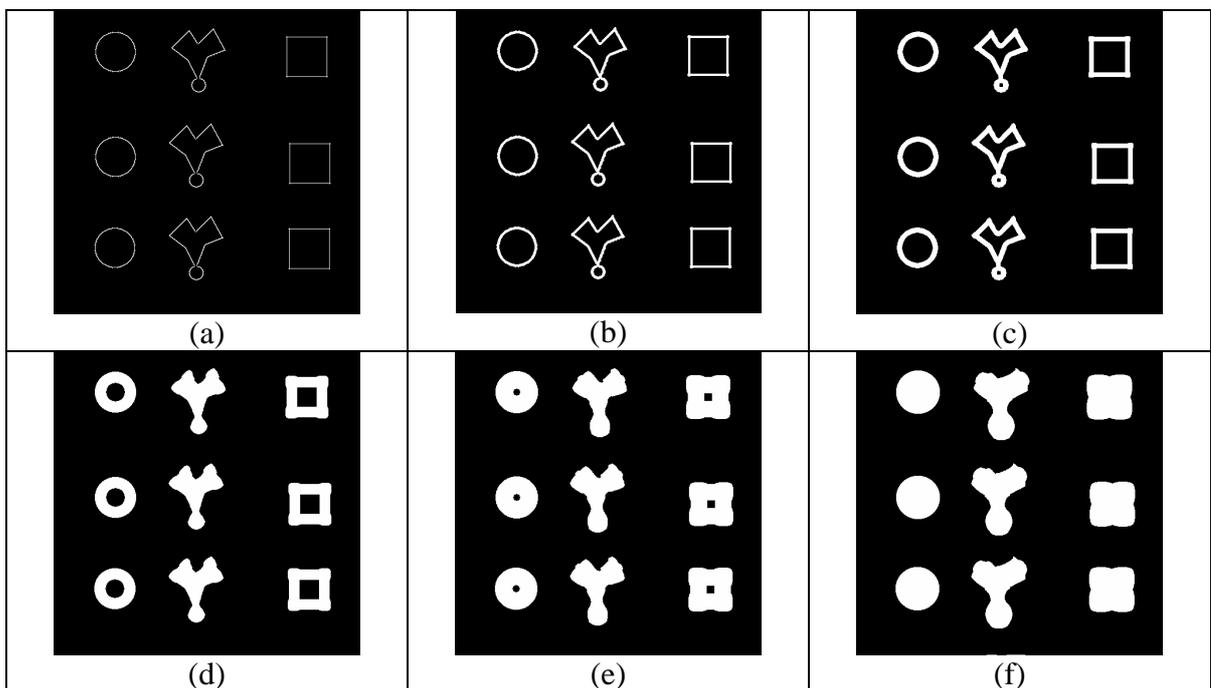


Figura 82 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 8 (b), 16 (c), 36 (d), 56 (e), 70 (f).

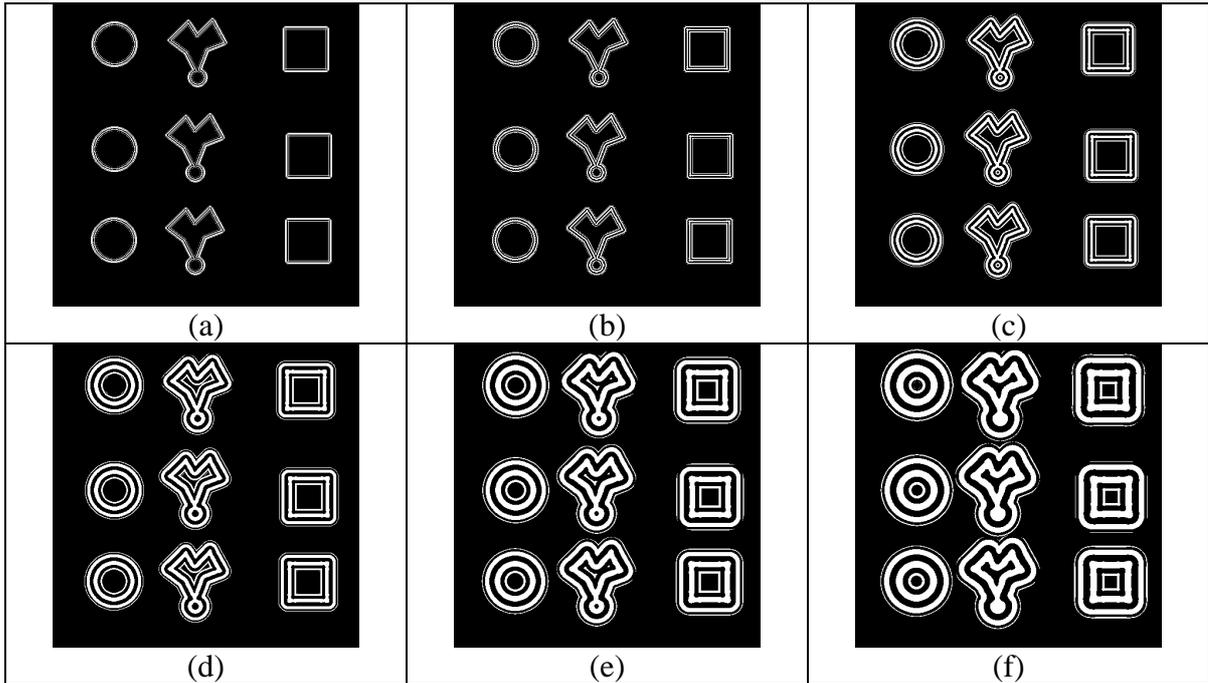


Figura 83 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 16 (c), 32 (d), 64 (e), 96 (f).

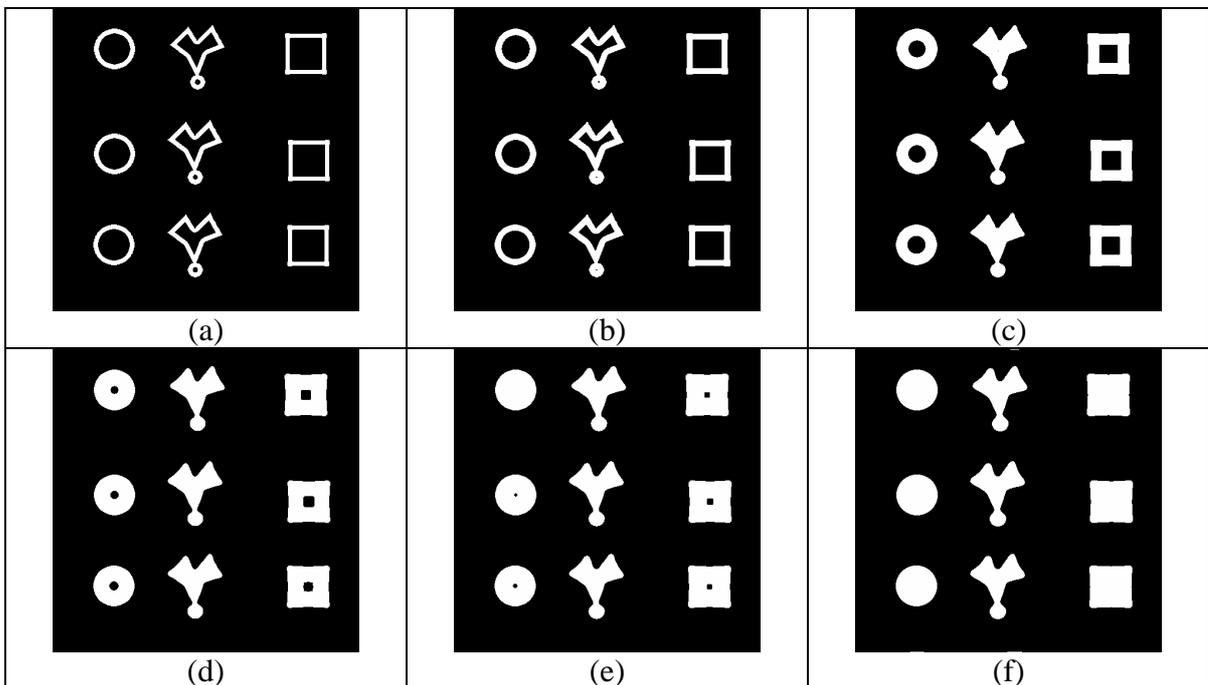


Figura 84 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 16 (c), 32 (d), 42 (e), 56 (f).

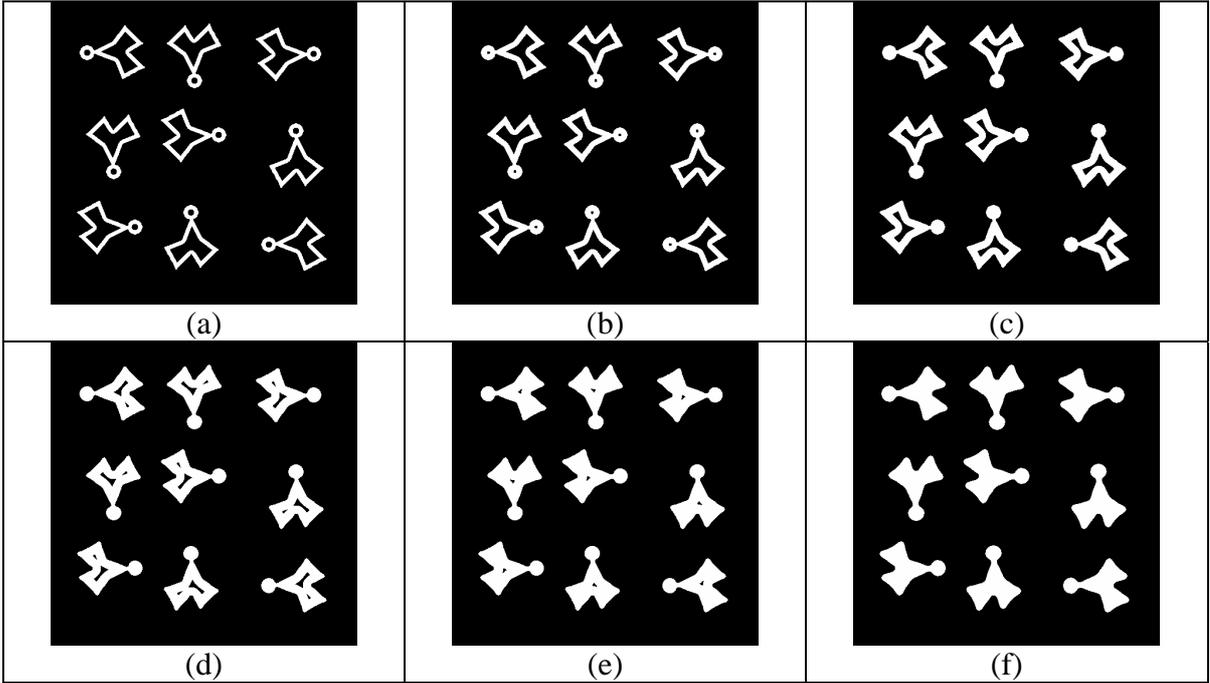


Figura 85 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 8 (c), 12 (d), 16 (e), 32 (f).

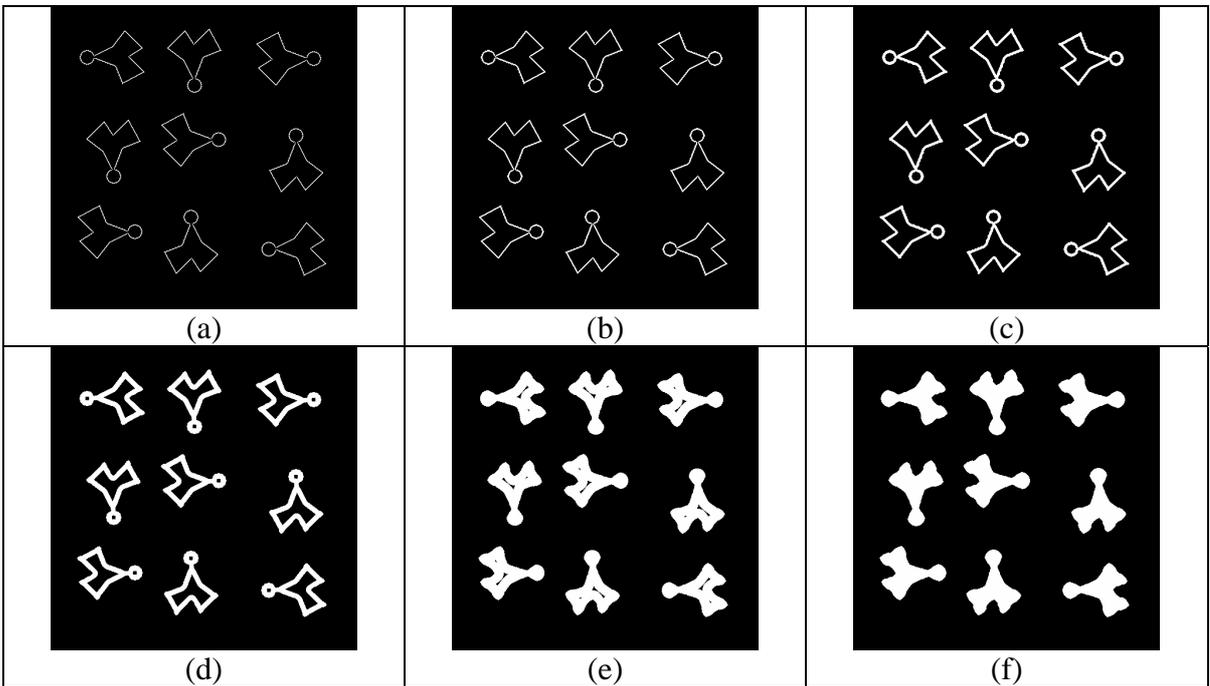


Figura 86 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 8 (c), 16 (d), 32 (e), 36 (f).

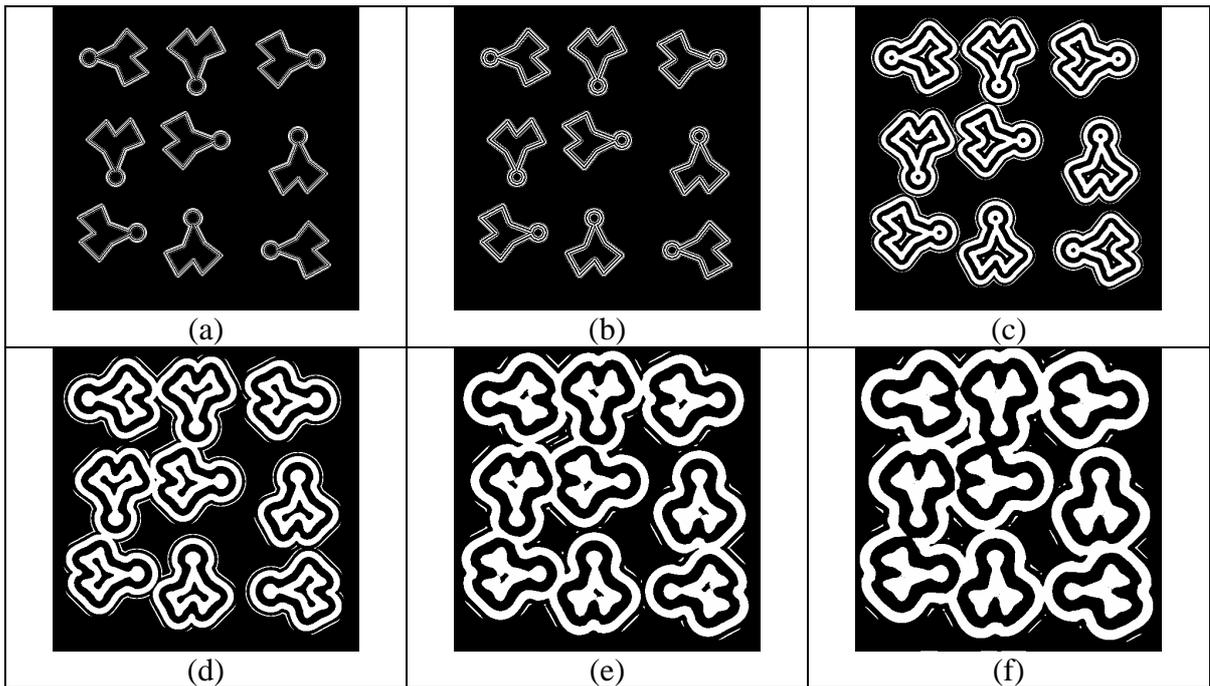


Figura 87 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 64 (c), 128 (d), 256 (e), 356 (f).

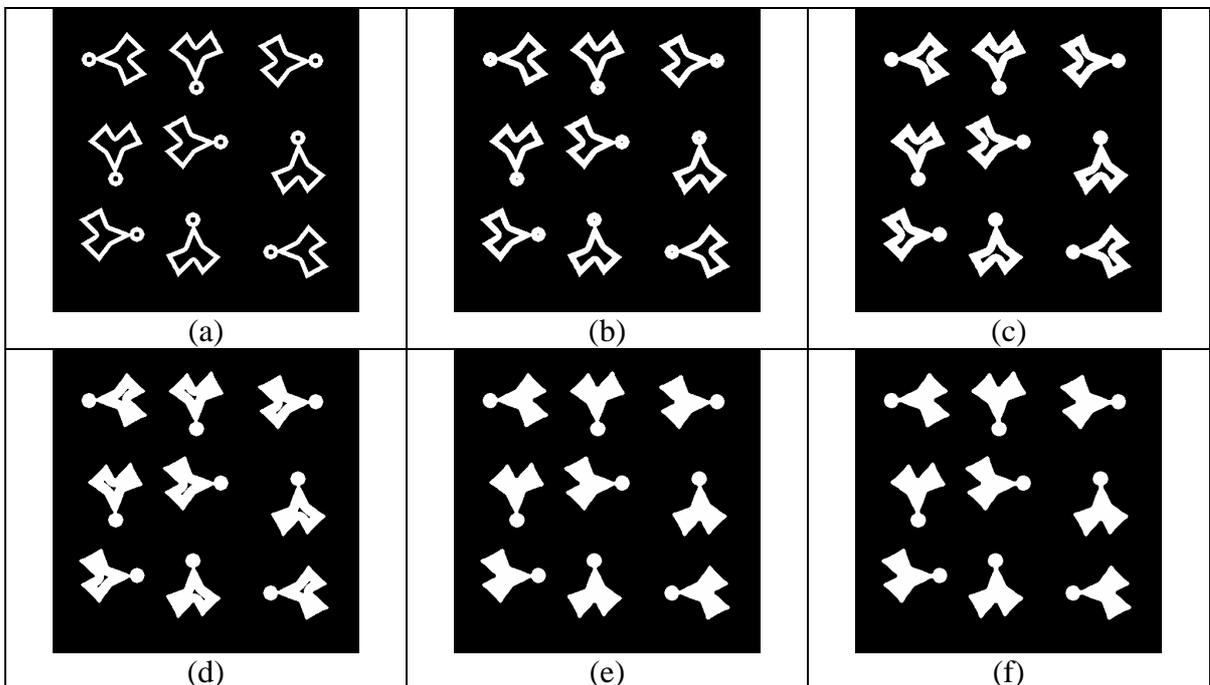


Figura 88 Bolhas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 4 (b), 8 (c), 12 (d), 16 (e), 20 (f).

Na Figura 89 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1, 2,

3, 4, 8 e 16. Na Figura 90 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 3, 4, 8, 12 e 16. Na Figura 91 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 92 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom1 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 93 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 94 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 3, 4, 8, 12 e 16. Na Figura 95 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 96 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom2 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 97 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 98 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2, 3, 4, 8, 12 e 16. Na Figura 99 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16. Na Figura 100 são apresentadas as bordas detectadas com a imagem do phantom3 a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1, 2, 3, 4, 8 e 16.

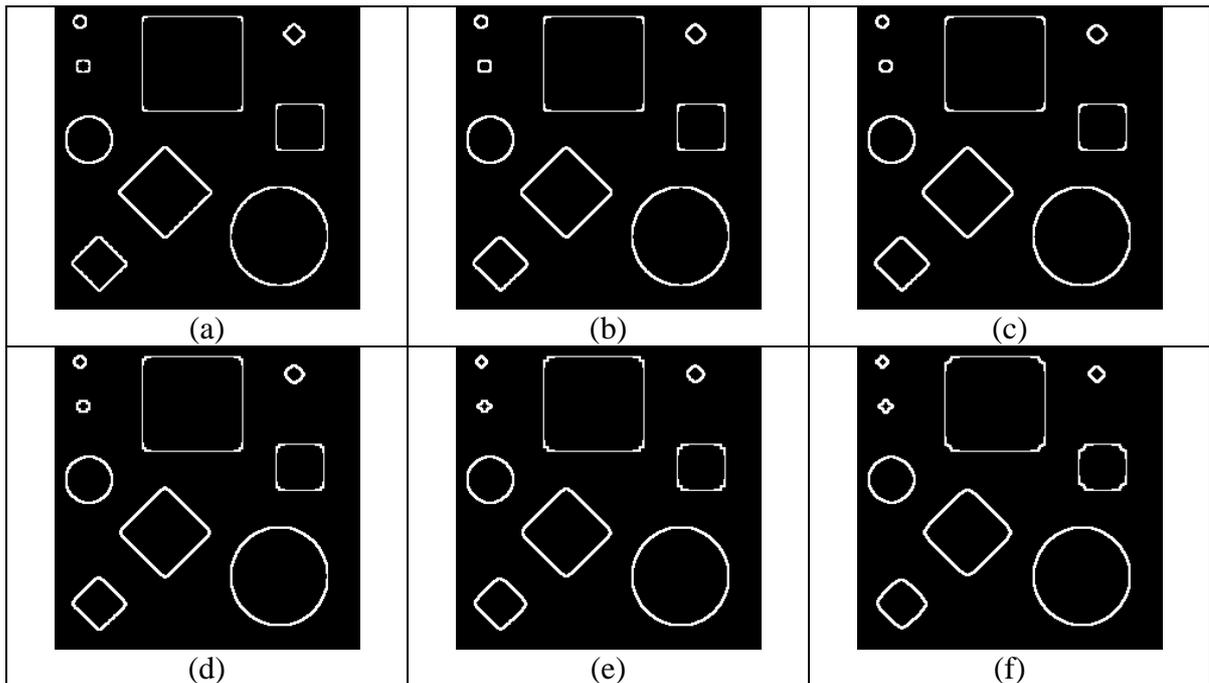


Figura 89 Bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

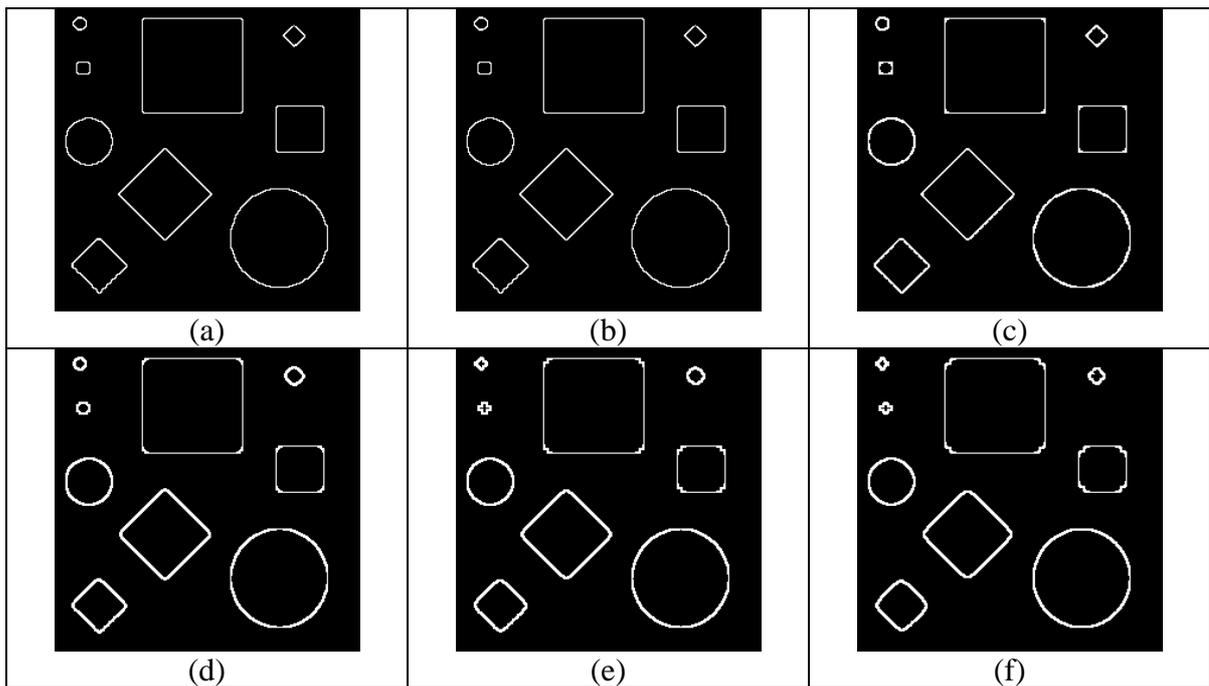


Figura 90 Bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 3 (b), 4 (c), 8 (d), 12 (e) e 16 (f).

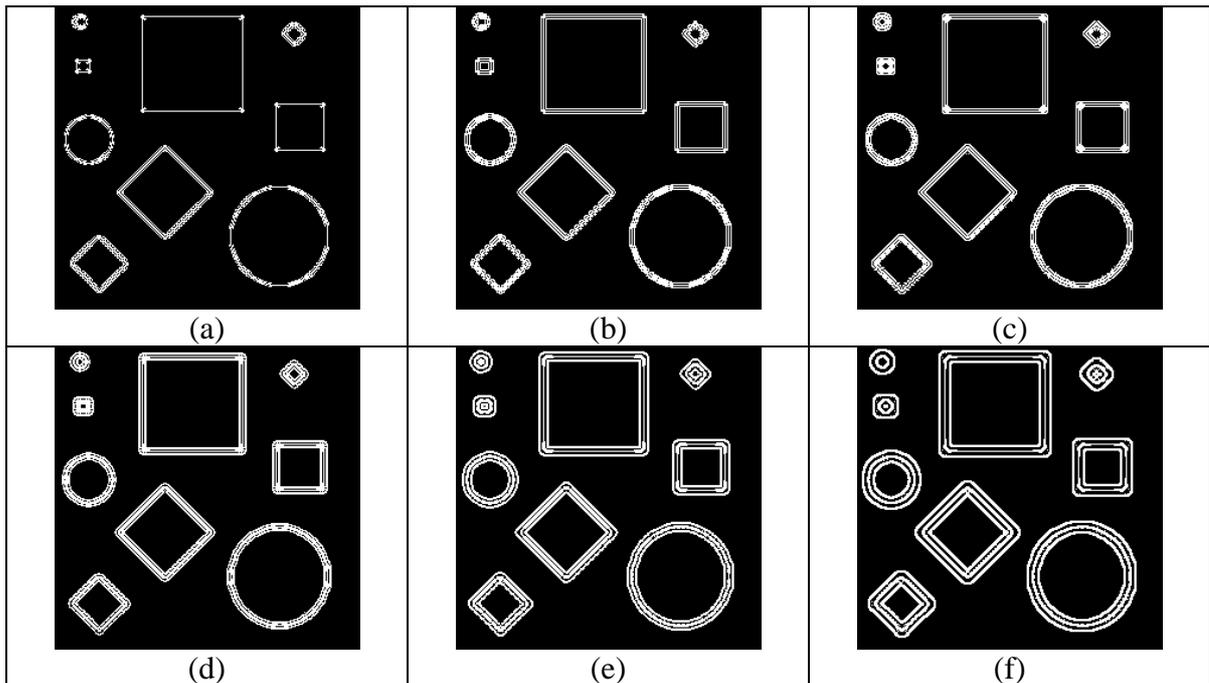


Figura 91 Bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

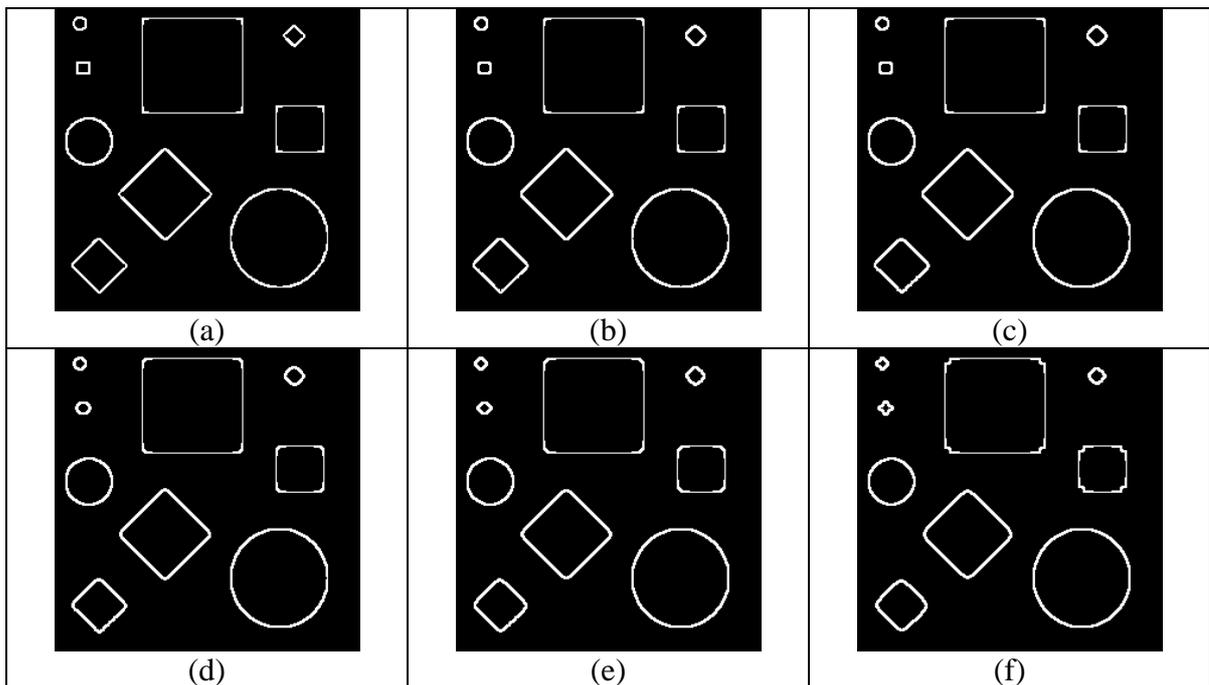


Figura 92 Bordas detectadas com a imagem do *phantom1* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

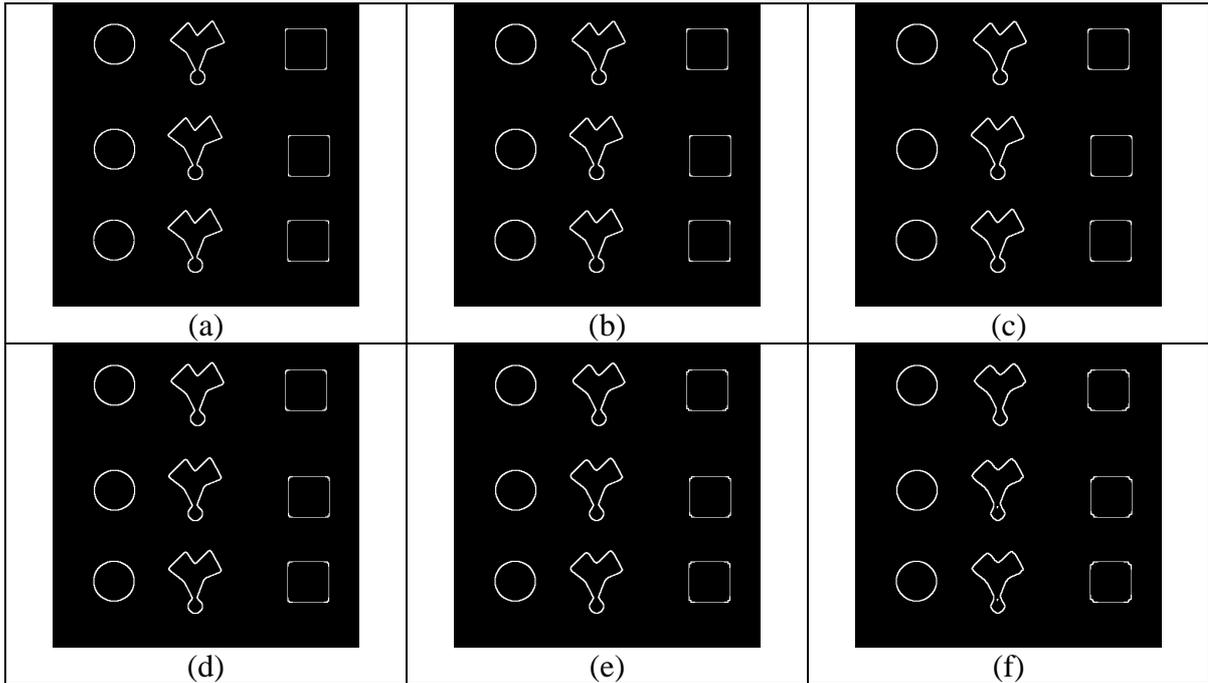


Figura 93 Bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

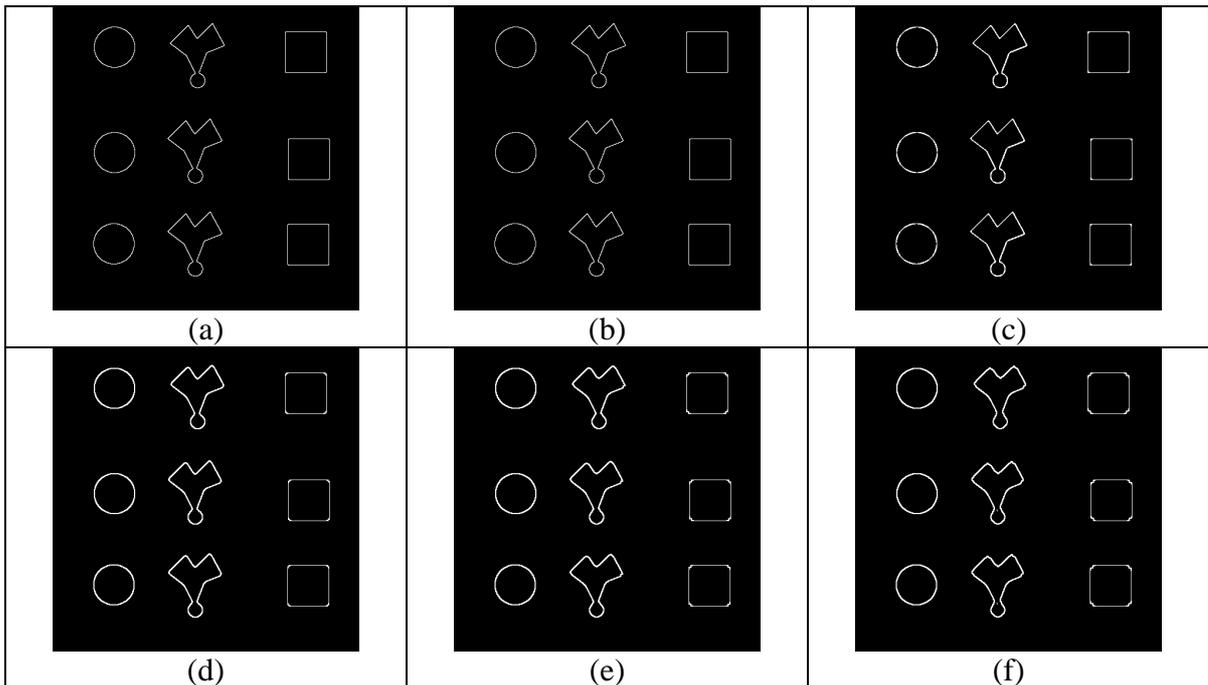


Figura 94 – Bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 3 (b), 4 (c), 8 (d), 12 (e) e 16 (f).

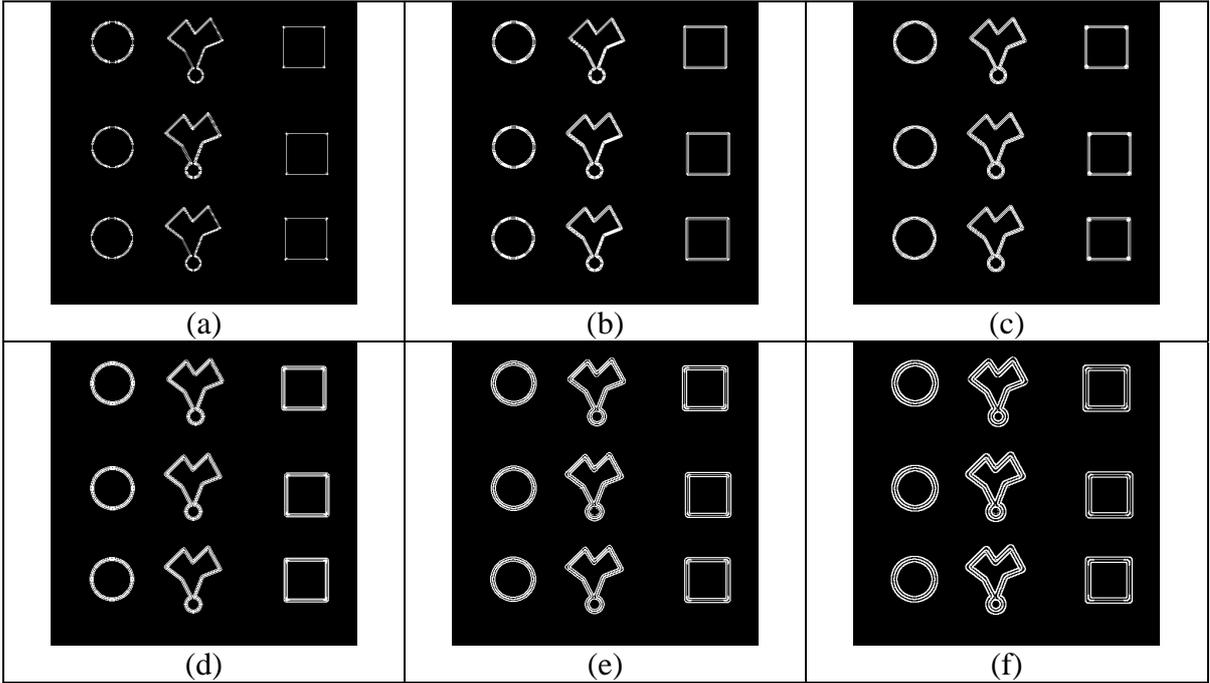


Figura 95 Bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

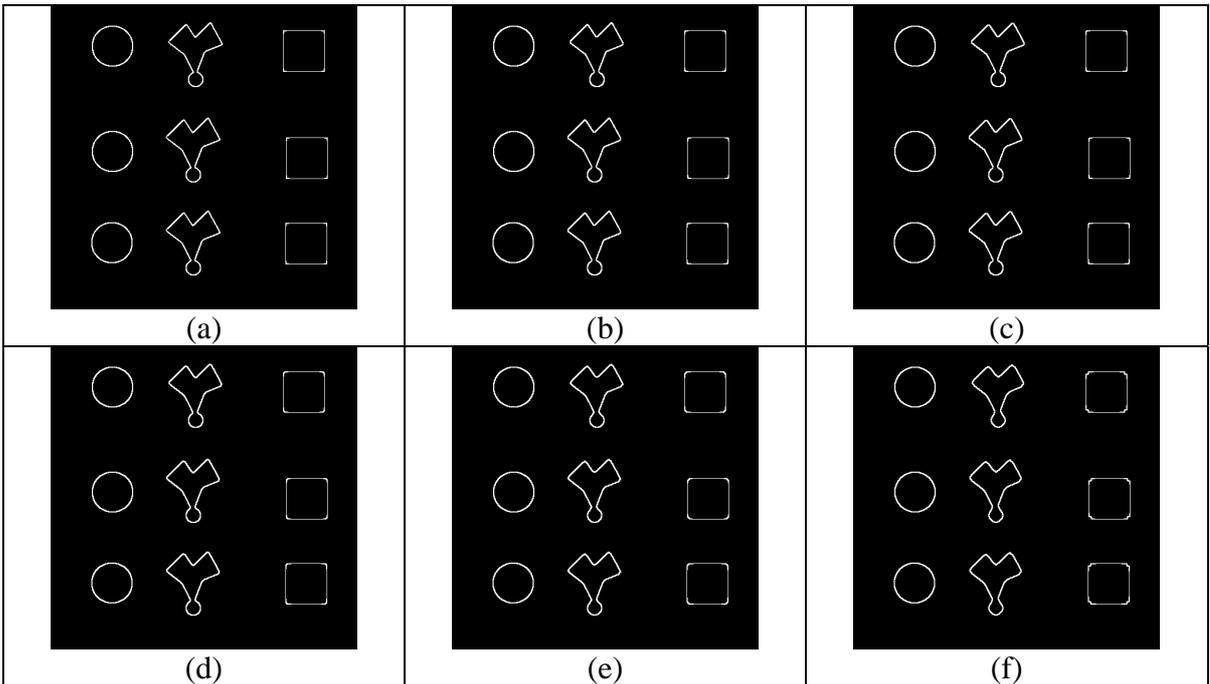


Figura 96 Bordas detectadas com a imagem do *phantom2* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

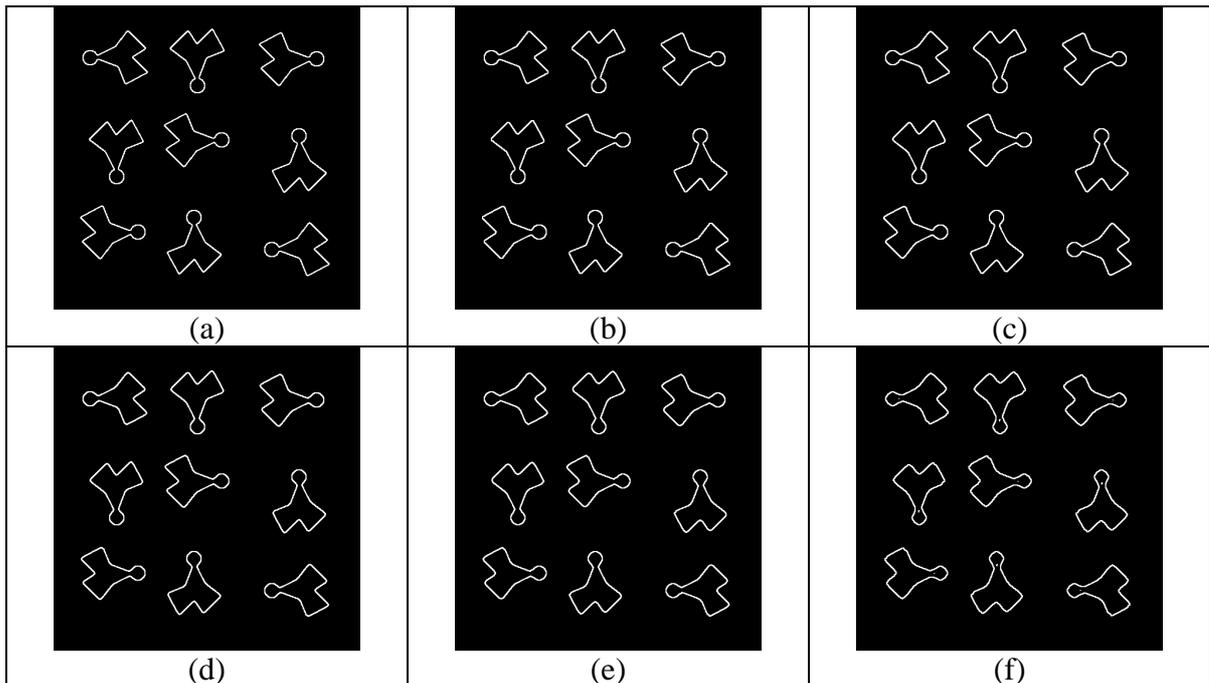


Figura 97 Bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Mexican Hat, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

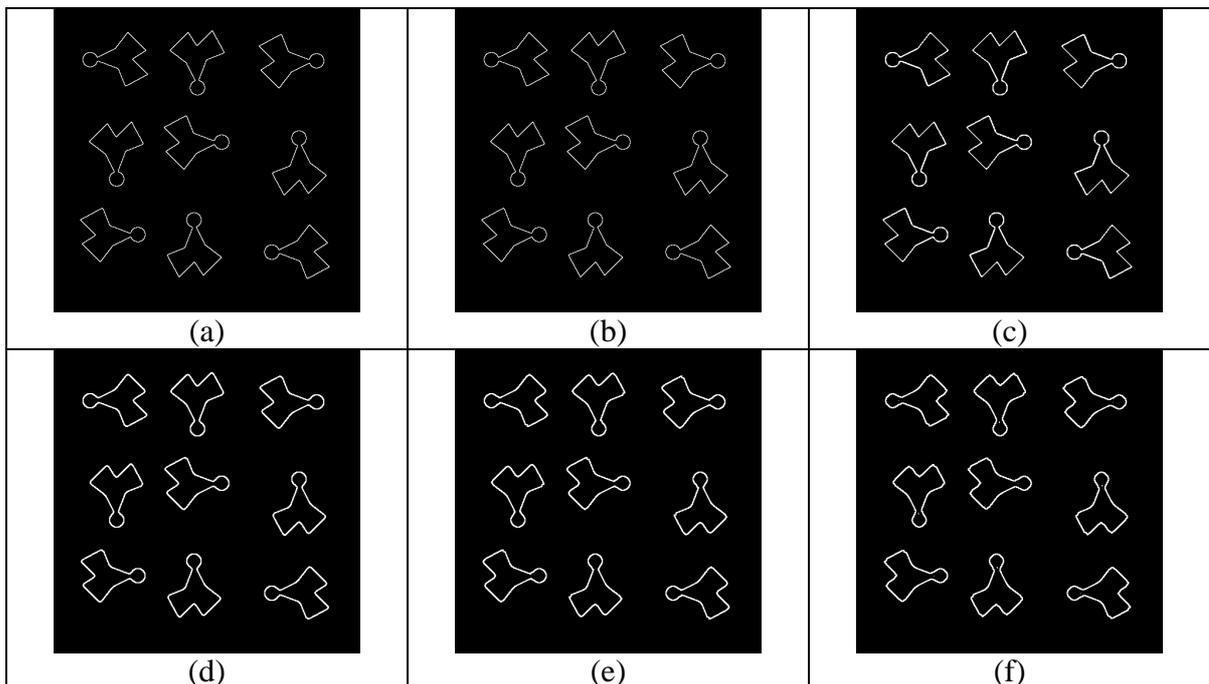


Figura 98 Bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Haar, gerada por rotação, para as escalas 2 (a), 3 (b), 4 (c), 8 (d), 12 (e) e 16 (f).

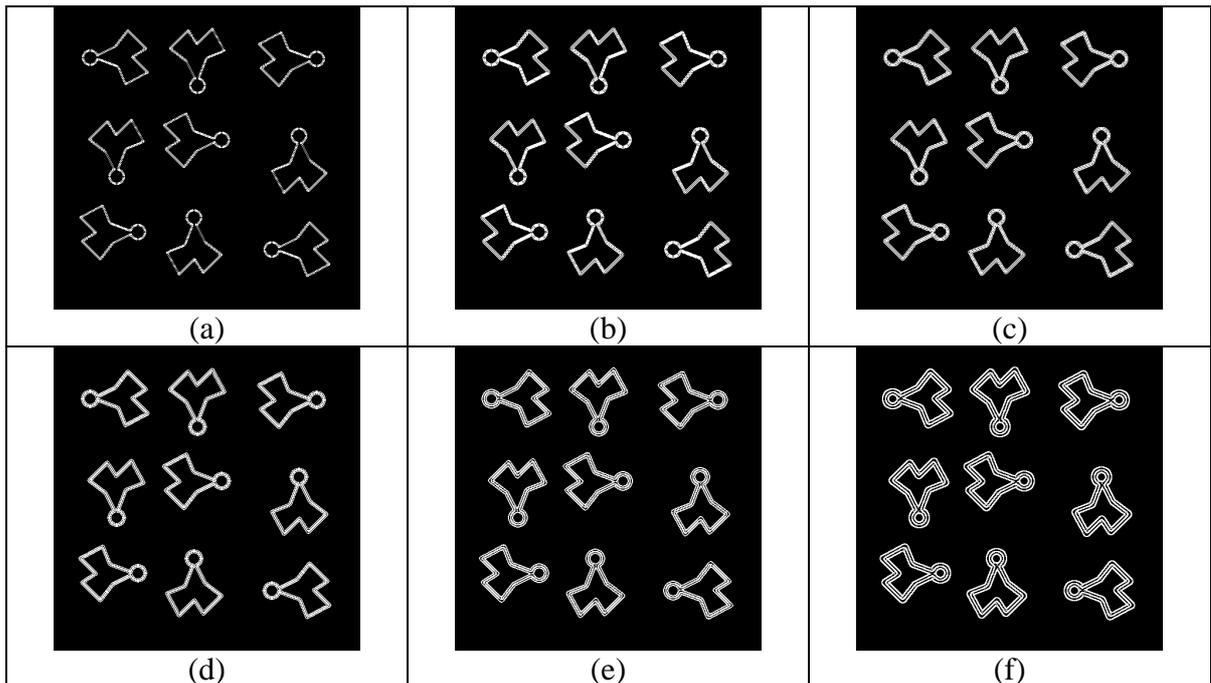


Figura 99 Bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 1.3, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

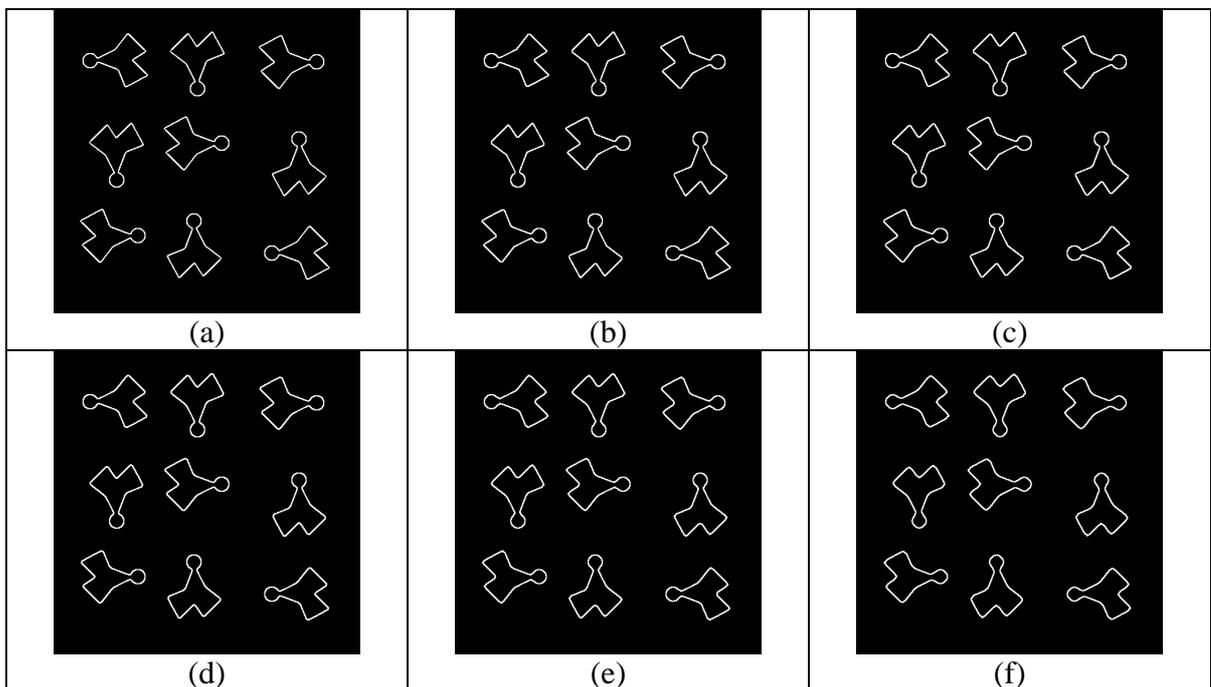


Figura 100 Bordas detectadas com a imagem do *phantom3* a partir da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4, gerada por rotação, para as escalas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 8 (e) e 16 (f).

Na Figura 101 são apresentadas as bolhas da imagem Phantom3 com a definição original (eq. 24 e 25) (a) e com a definição modificada (eq. 24 e 74) para a escala 512. Na Figura 102 são apresentadas as bolhas da imagem Phantom2 com a definição original (eq. 24

e 25) (a) e com a definição modificada (eq. 24 e 74) para a escala 768. Na Figura 103 são apresentadas as bolhas da imagem da Lena com a definição original (eq. 24 e 25) (a) e com a definição modificada (eq. 24 e 74) para a escala 64.

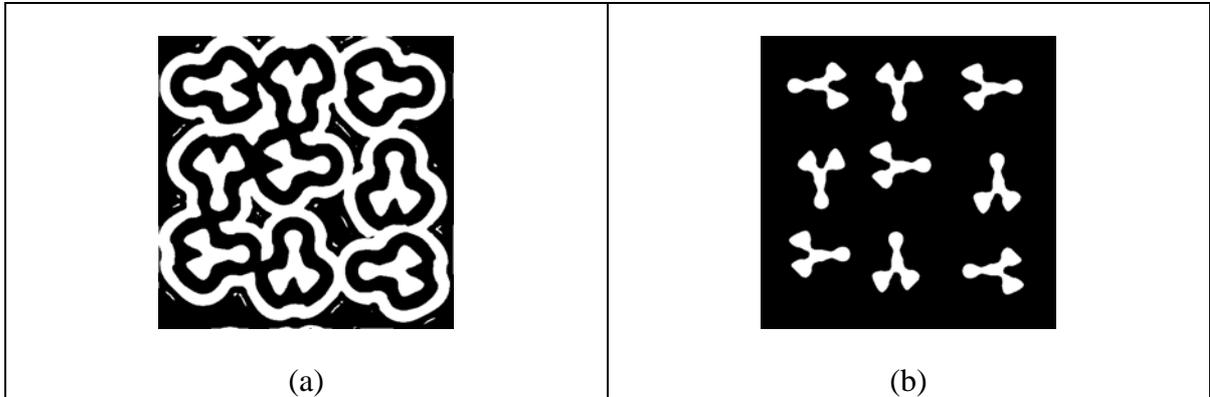


Figura 101 Bolhas da imagem Phantom3.bmp para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 512 (a) e bolhas da imagem Phantom3.bmp obtidas com o detector de bolhas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 512 (b).

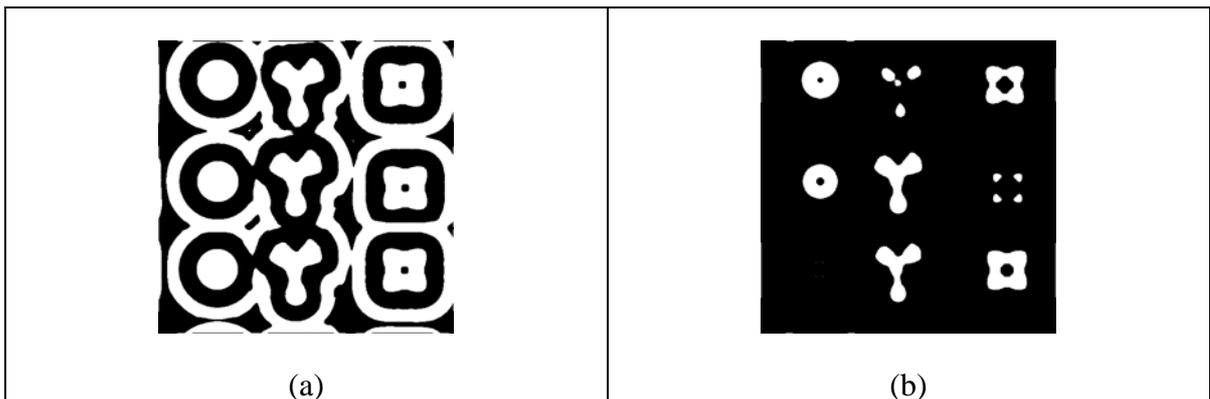


Figura 102 Bolhas da imagem Phantom2.bmp para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 768 (a) e bolhas da imagem Phantom2.bmp obtidas com o detector de bolhas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 768 (b).

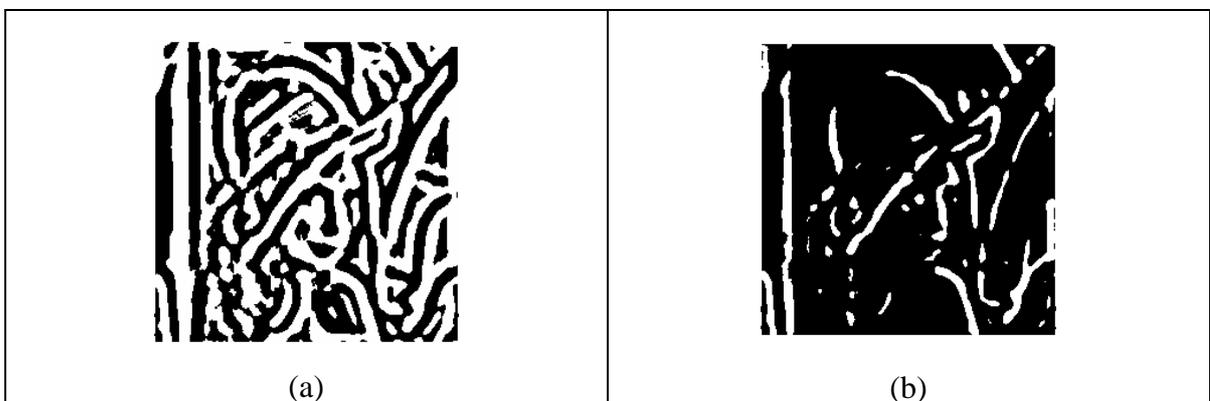


Figura 103 – Bolhas da imagem da Lena para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 64 (a) e bolhas da imagem da Lena obtidas com o detector de bolhas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 64 (b).

Na Figura 104 são apresentadas as bordas da imagem Phantom3 com a definição original (eq. 28 e 29) (a) e com a definição modificada (eq. 76 e 77) para a escala 2. Na Figura 105 são apresentadas as bordas da imagem Phantom2 com a definição original (eq. 28 e 29) (a) e com a definição modificada (eq. 76 e 77) para a escala 4. Na Figura 106 são apresentadas as bordas da imagem da Lena com a definição original (eq. 28 e 29) (a) e com a definição modificada (eq. 76 e 77) para a escala 2.

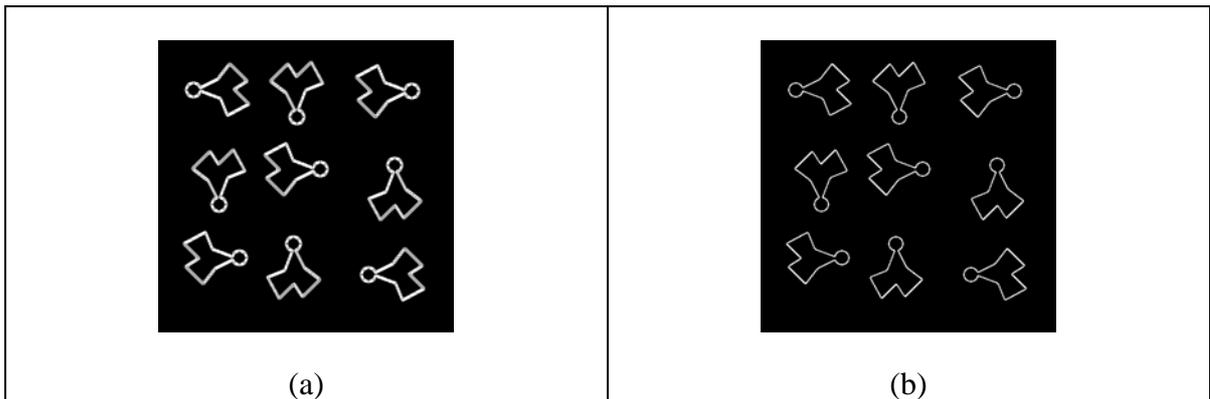


Figura 104 Bordas da imagem Phantom3 para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 2 (a) e bordas da imagem Phantom3 obtidas com o detector de bordas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 2 (b).

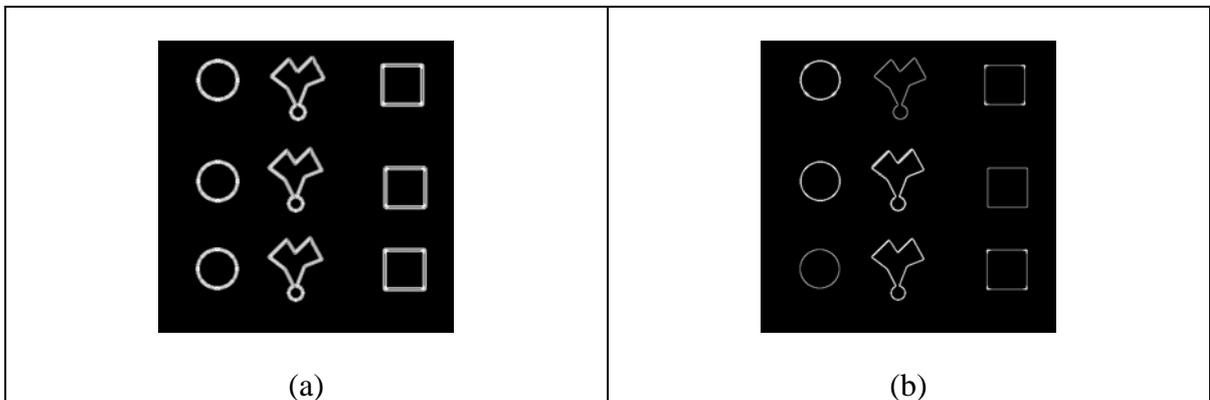


Figura 105 Bordas da imagem Phantom2 para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 4 e (a) bordas da imagem Phantom2 obtidas com o detector de bordas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 4 (b).

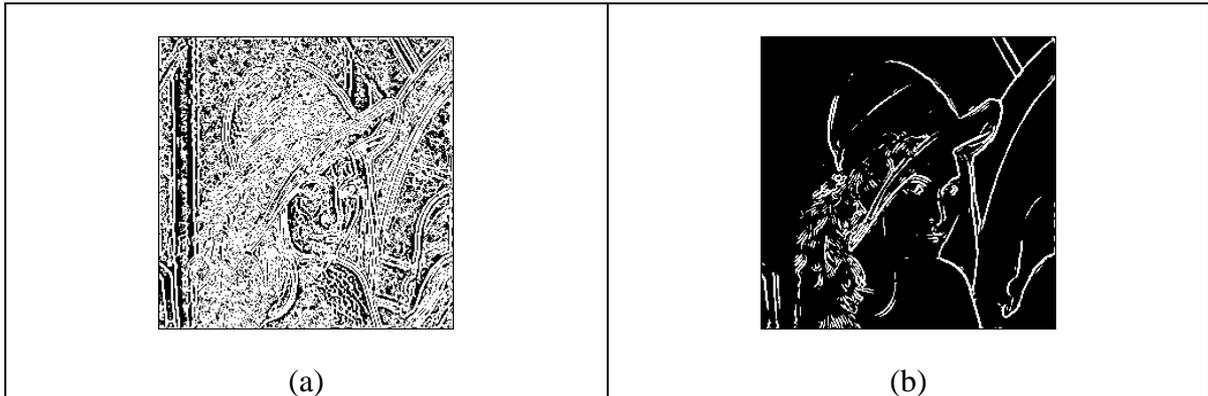


Figura 106 Bordas da imagem da Lena para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 4 (a) e bordas da imagem da Lena obtidas com o detector de bordas proposto para a wavelet Bi-ortogonal 1.3 na escala 2 (b).

A Figura 107 mostra a representação da imagem #6 da Tabela 2 em espaço de escalas, binarizadas pela equação (5). A Figura 108 mostra os pixels da imagem que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento. (a) imagem #6 da Tabela 2 e (b) imagem #3 da Tabela 2. A Figura 109 mostra um exemplo de resultado obtido com cavidade fechada (imagem #6 da Tabela 2), (a) Imagem original com a indicação da cavidade selecionada, (b) Imagem original com as bordas destacadas. A Figura 110 mostra um exemplo de resultado obtido com cavidade fechada (imagem #3 da Tabela 2), (a) Imagem original com a indicação da cavidade selecionada, (b) Imagem original com as bordas destacadas. A

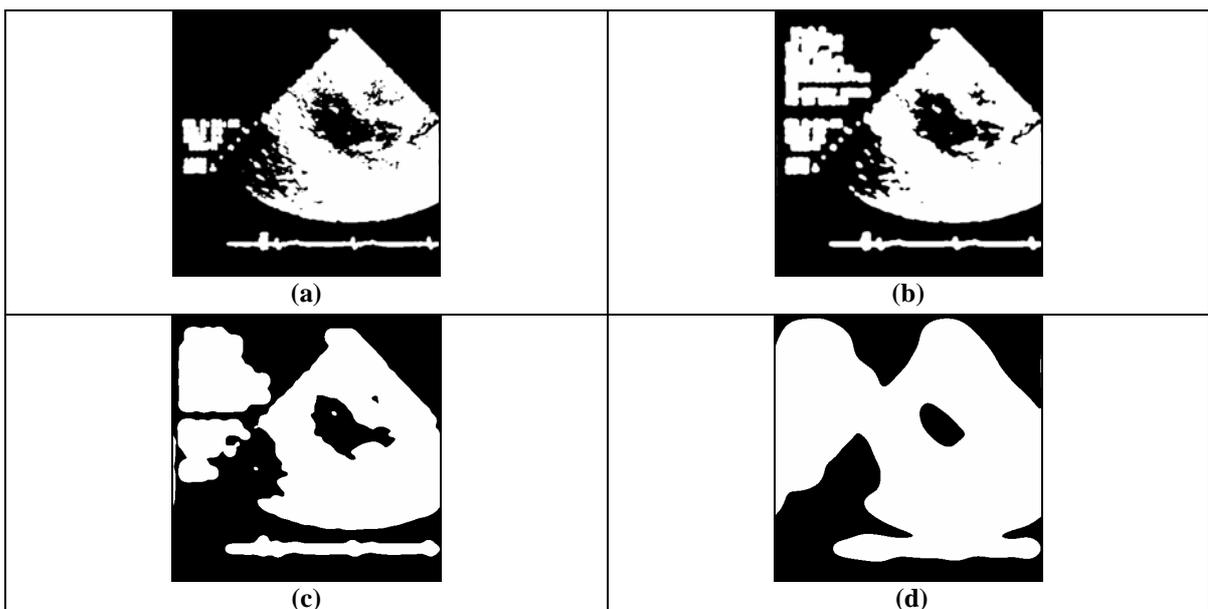


Figura 107 Representação da imagem #6 da Tabela 2 em espaço de escalas, binarizadas para as escalas 1 (a), 4 (b), 32 (c) e 256 (d).

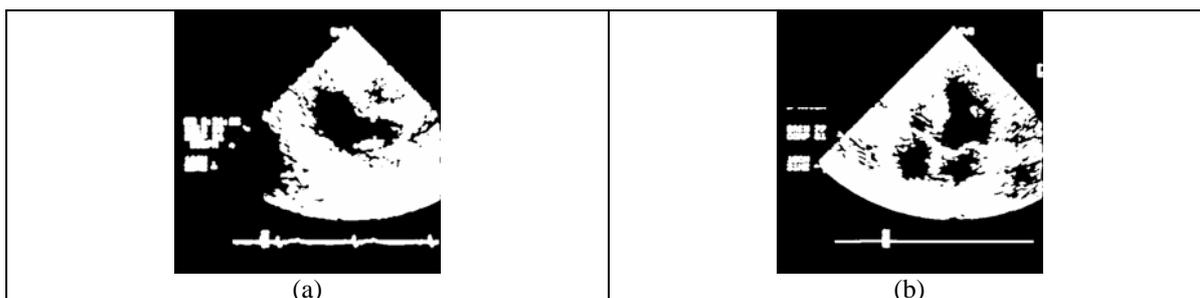


Figura 108 *Pixels* das imagens que possuem tempo de vida útil igual a cem por cento. Em (a) imagem #6 da Tabela 2 e em (b) imagem #3 da Tabela 2.

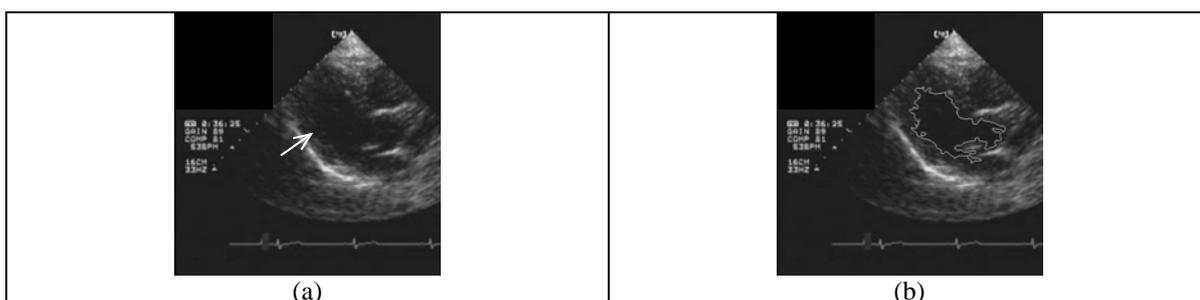


Figura 109 Exemplo de resultado obtido com cavidade fechada (imagem #6 da Tabela 2), (a) Imagem original com a indicação da cavidade selecionada, (b) Imagem original com as bordas destacadas.

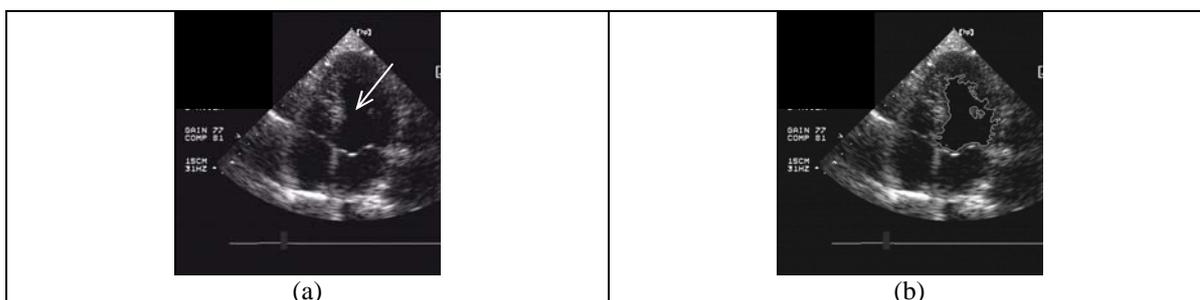


Figura 110 Exemplo de resultado obtido com cavidade fechada (imagem #3 da Tabela 2), (a) Imagem original com a indicação da cavidade selecionada, (b) Imagem original com as bordas destacadas.

Figura 111 mostra os resultados obtidos para as imagens #1(a), #4(b), #9(c) e #10(d) da Tabela 4. A Figura 112 mostra a imagem resultante da aplicação do operador detector de *blobs* nas escalas 4 (a), 8 (b), 16 (c), 256 (d) (imagem #9 da Tabela 4). A Figura 113 (a) mostra a imagem obtida após ser realizada a operação AND nas imagens apresentadas na Figura 112. Imagem dos *blobs* restantes após a etapa de eliminação (b). A Figura 114 mostra a imagem obtida depois de realizado todo o processamento do método proposto para a imagem da Figura 13 com o operador detector de *blobs* para a wavelet Haar. A Figura 115 mostra os resultados obtidos para as imagens #1(a), #4(b) e #10(c) da Tabela 4.

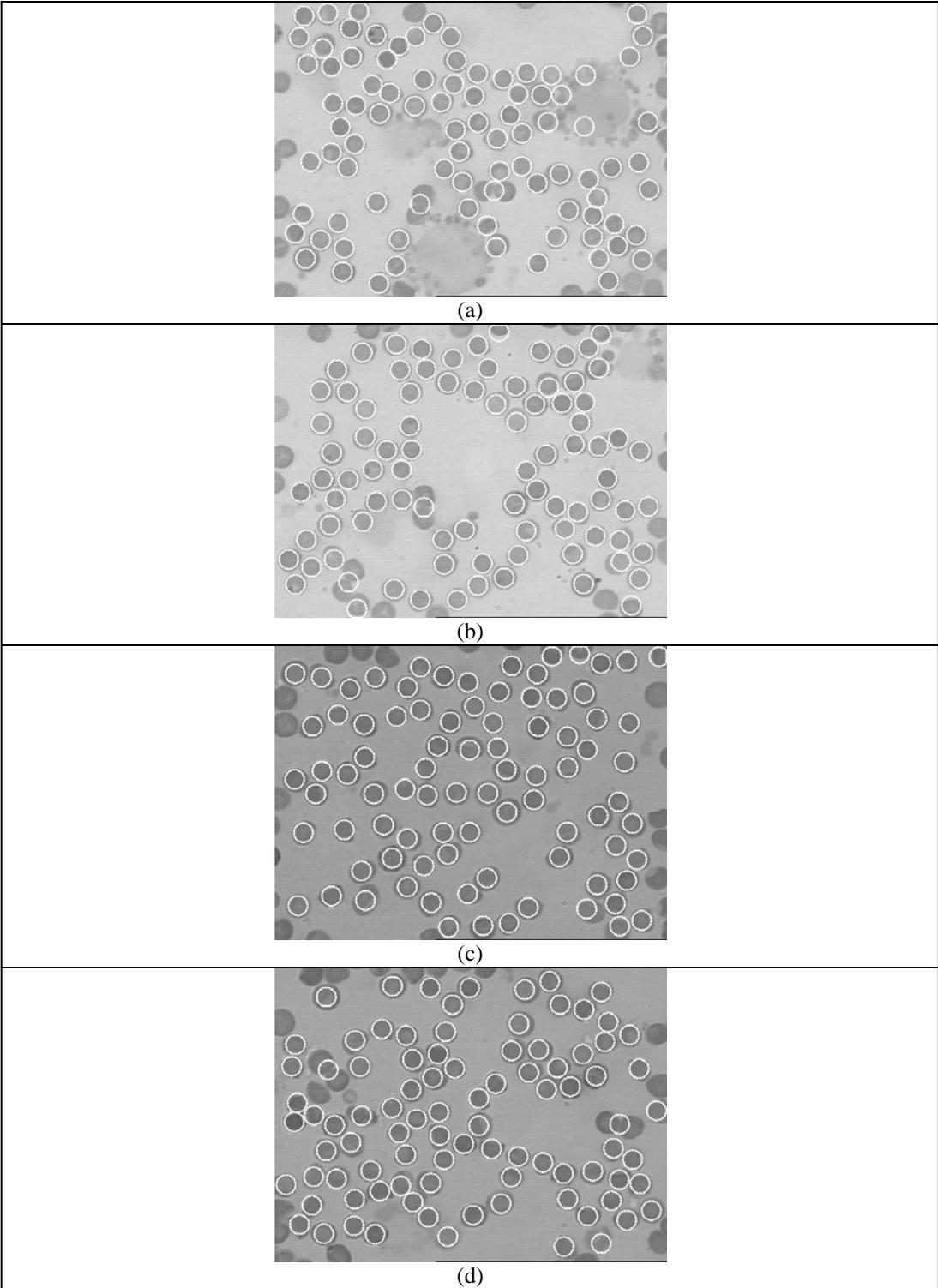


Figura 111 Resultados obtidos com o algoritmo de contagem de células para as imagens #1(a), #4(b), #9(c) e #10(d) da Tabela 4.

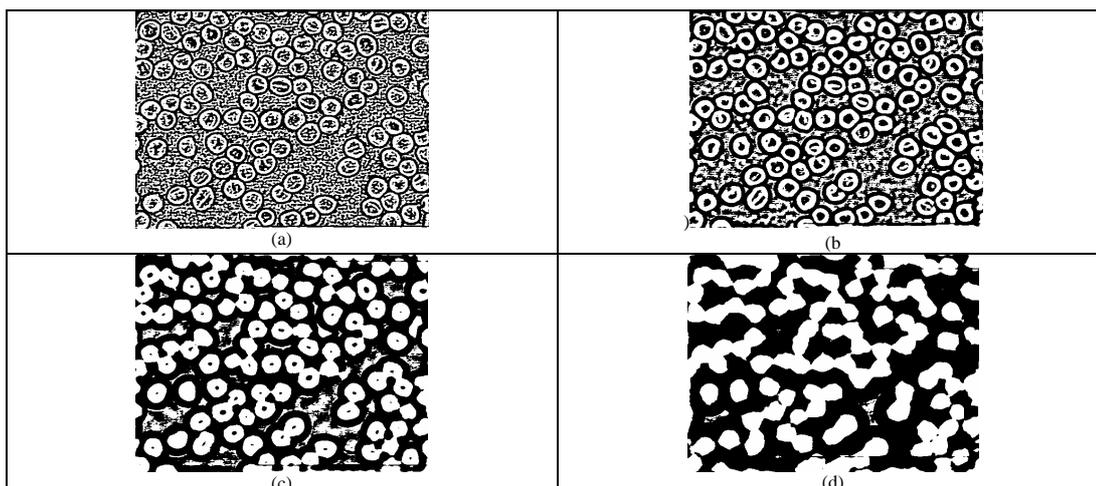


Figura 112 Imagem resultante da aplicação do operador detector de *blobs* da função wavelet Haar nas escalas 4 (a), 8 (b), 16 (c), 256 (d) (imagem #9 da Tabela 4).

Tabela 4: Número das imagens (Img. (#)), contagens obtidas com o método proposto (Cont. 1), contagem manual (Cont. 2), contagem com o método descrito em (KOYA, 2001) (Cont. 3) e contagem usando as bolhas da função wavelet Haar (Cont.4).

Img. (#)	Cont. 1	Cont. 2	Cont. 3	Cont. 4
1	89	91	90	87
2	80	90	84	72
3	83	95	88	82
4	87	86	91	84
5	98	100	103	91
6	89	90	97	84
7	93	101	102	86
8	83	91	90	77
9	86	92	89	82
10	91	95	98	84

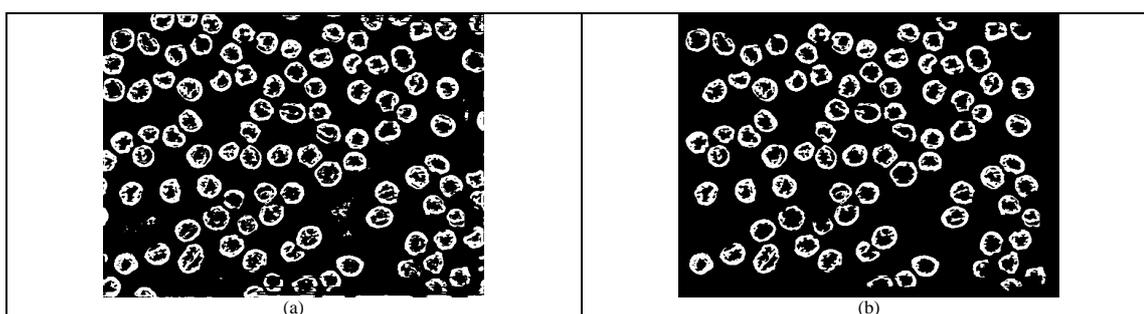


Figura 113 (a) Imagem obtida após ser realizada a operação AND nas imagens apresentadas na Figura 112. Imagem dos *blobs* restantes após a etapa de eliminação de *pixels* ruidosos (b).

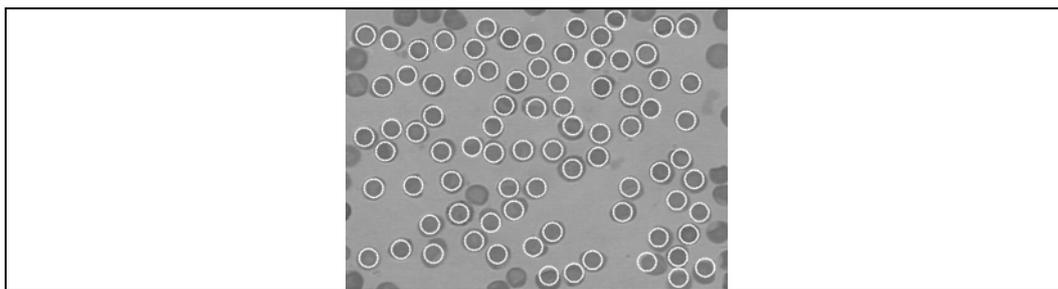


Figura 114 Imagem obtida depois de realizado todo o processamento do método proposto para a imagem da Figura 13 com o operador detector de blobs para a wavelet Haar.

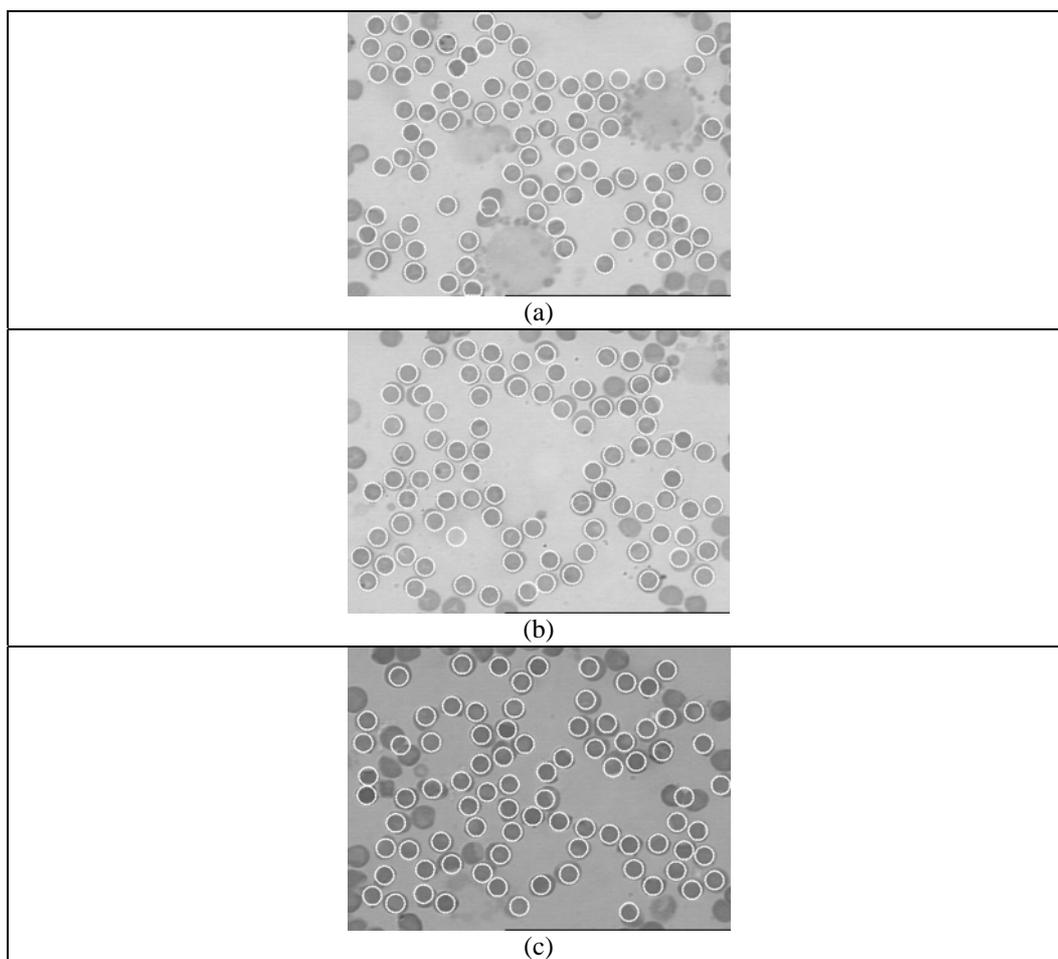


Figura 115 Resultados obtidos com o algoritmo de contagem de células para as imagens #1(a), #4(b) e #10(c) da Tabela 4 usando o detector de bolhas com a wavelet Haar.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

6.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A teoria de espaço de escalas desenvolvida pela comunidade de visão computacional, descrita nesse trabalho, é uma importante ferramenta para a extração de elementos (bolhas, bordas e cristas) de imagens. Essa representação por ser multi-escala leva em consideração uma das características intrínsecas de uma imagem que é a escala. A representação em espaço de escala contém informações de forma implícita, sendo necessário o uso de diversos operadores para a extração dessas informações de forma explícita. Estes operadores, são formados pelas derivadas das funções suavizadoras que formam a base do espaço de escala.

A transformada wavelet, também descrita nesse trabalho, é uma outra forma de se processar uma imagem com o objetivo de extrair informações das imagens usando o conceito de escalas. Uma grande vantagem da transformada wavelet é que é possível usar diferentes famílias de funções para extrair diferentes tipos de informações.

O espaço de escala e a transformada wavelet contínua estão relacionados, sendo que este relacionamento foi descrito por Mallat (1992) e apresentado no capítulo Fundamentos Teóricos deste trabalho. Segundo estas relações, o espaço de escalas é um caso particular da transformada wavelet.

Um dos aspectos do espaço de escalas que tem sido amplamente discutido por diversos autores é a sua base (originalmente a gaussiana). Tem se buscado saber se a base gaussiana é o melhor, ou para quais casos ela é a melhor. Além disto, os autores têm procurado desenvolver novas bases, com características diferentes das pertencentes à gaussiana. De posse destas novas bases, pode-se compará-las com a base gaussiana e verificar onde cada base apresenta melhor desempenho. Neste trabalho, foi usada (i) a teoria do espaço de escalas, (ii) a teoria da transformada wavelet e (iii) as relações entre elas, a fim de gerar um método para criar novas bases (*kernel*) para o espaço de escalas a partir de funções wavelets.

No método proposto, parte-se de uma função wavelet conhecida a priori. Busca-se uma função suavizadora associada a esta wavelet, por meio de integração numérica e análise da resposta em frequência da função obtida. De posse da função suavizadora, aplica-se a definição original dos operadores do espaço de escala. Neste trabalho foram usados os operadores detectores de bolhas e bordas. Muda-se apenas a base, que originalmente foi definida como sendo a gaussiana.

Segundo a teoria da transformada wavelet, as wavelets são funções do tipo passa faixas (ψ). Algumas destas funções tem uma função do tipo passa baixa associada (ϕ). É importante salientar que a função suavizadora não é a função ϕ e sim uma função que foi obtida por meio de integração e análise da resposta em frequência da função integrada. Como foi apresentado neste trabalho, a função Mexican Hat, por exemplo, não possui uma função ϕ , mas possui uma função suavizadora.

O método proposto restringe o número de funções wavelets que podem ser usadas a partir de alguns postulados. Estes postulados foram criados para que ao aplicar uma função wavelet no algoritmo seja possível obter uma nova função com características de filtro passa baixas.

Uma característica que não está presente em muitas das funções wavelets é possuírem simetria. Neste trabalho, deseja-se que as bases do espaço de escala sejam simétricas, facilitando assim a sua comparação com o espaço de escala. Como consequência desta restrição as funções que não possuem simetria não foram selecionadas para serem aplicadas ao método de geração de novas bases para o espaço de escala.

As funções wavelets que foram inicialmente estudadas são as funções a) Morlet, b) Mexican hat, c) Meyer, d) Haar, e) Daubechies, f) Symlets, g) Coiflets e h) Splines biorthogonal wavelets. Dentre elas, as funções wavelets Bi-ortogonal 1.3, Bi-ortogonal 1.5, Bi-ortogonal 2.2, Bi-ortogonal 2.4, Bi-ortogonal 2.6, Bi-ortogonal 2.8, Bi-ortogonal 4.4, Bi-ortogonal 5.5, Bi-ortogonal 6.8, Haar e Mexican Hat apresentaram características que satisfizeram os postulados pré-estabelecidos (seção 4.3.1) e podem ser aplicadas ao método proposto.

Algumas das funções wavelets que foram usadas neste trabalho, não possuem definição para o caso bi-dimensional. Por isso foi necessário criar um método para gerar funções wavelets bi-dimensionais a partir de funções wavelets unidimensionais. Foram apresentados três métodos para solucionar este problema, sendo eles por rotação, produto tensorial e convolução. Quando se aplicou os três métodos a função gaussiana, os resultados obtidos foram muito semelhantes a gaussiana bi-dimensional definida analiticamente. Este resultado demonstra que qualquer um dos métodos poderia ser aplicado neste trabalho.

Uma característica que difere entre os três métodos testados é a largura da função bi-dimensional. Nas Figuras 54, 55 e 56 são apresentadas as funções suavizadoras geradas pelos três métodos para as funções Haar, Bi-ortogonal 1.3 e Bi-ortogonal 4.4. É possível observar que o método por rotação gera uma função bi-dimensional mais larga que os outros dois. A

largura da função suavizadora é proporcional ao grau de suavização, que por sua vez é proporcional à escala. Ou seja, quanto mais larga for a função maior será a suavização da imagem e maior será o parâmetro de escala associado. Por isso ao se comparar as imagens suavizadas pelos filtros gerados por métodos diferentes, o valor da escala será diferente para um mesmo grau de suavização.

As funções bi-dimensionais geradas por produto tensorial e convolução são separáveis. Isto significa que estes filtros podem ser aplicados inicialmente na direção x e em seguida na direção y , ou vice-versa. Diminuindo assim o custo computacional para a sua execução. Já as funções geradas por rotação nem sempre são funções separáveis. Exemplo de função que pode ser gerada por rotação e não é separável é o laplaciano da gaussiana.

Outra característica que varia com os três métodos é a simetria da função bi-dimensional em relação ao eixo z , ou invariância por rotação. Ao aplicar os métodos do produto tensorial e da convolução em funções como a Bi-ortogonal 1.3 e Haar, as funções bi-dimensionais geradas não apresentaram simetria com relação ao eixo z . O único método que preserva esta propriedade é o método que gera as funções bi-dimensionais por rotação. Por causa desse efeito, este foi o método adotado neste trabalho.

De posse das funções wavelet, do método para gerar as bases para o espaço de escala e das funções bi-dimensionais, foi possível gerar os espaços de escala associados a cada função. Como houve um conjunto grande de funções wavelets bi-ortogonais que obtiveram bons resultados, elas foram divididas em grupos para reduzir o número de imagens de resultados, facilitando assim a análise dos mesmos. As funções wavelets Bi-ortogonais foram divididas em dois grupos. O primeiro grupo foi formado por funções cuja função suavizadora apresentou valores positivos e negativos. O outro grupo foi formado pelas funções Bi-ortogonais cujas funções suavizadoras são não negativas. Foram apresentados resultados para uma função representante de cada grupo. Sendo a função wavelet Bi-ortogonal 1.3 a representante do primeiro grupo e a wavelet Bi-ortogonal 4.4 a representante do segundo grupo.

De acordo com o axioma de “Não criação de extremos locais” do espaço de escalas, apresentado no capítulo Fundamentos Teóricos, para que uma função não crie novos extremos locais ela deve ser não negativa e uni-modal. O primeiro grupo das funções wavelets Bi-ortogonais não satisfaz este axioma e como foi apresentado nas Figuras 80, 84, 88, 92, 96 e 100 os operadores com estas funções apresentam bolhas e bordas repetidas. Já o segundo grupo, respeita este axioma e suas bolhas e bordas foram coerentes com os objetos representados nas imagens, como pode ser observado nas Figuras 81, 85, 89, 93, 97 e 101.

Os espaços de escala gerados com as bases Bi-ortogonais apresentam maiores níveis de suavização com o aumento de escala, como esperado. Com o aumento da escala, tanto as bolhas quanto as bordas detectadas com o uso da função suavizadora da wavelet Bi-ortogonal 4.4 apresentam o efeito de arredondamento. Este efeito pode ser observado também nas Figuras 80, 84, 88, 92 e 100

Os operadores detectores de bolhas e bordas do espaço de escala para as bases Bi-ortogonais são operadores locais. Esta propriedade é válida para todas as bases estudadas e pode ser comprovada nas imagens das bolhas e bordas detectadas com a imagem do *Phantom2*. Nestas imagens os objetos apresentam diferentes contrastes, mas as suas bolhas e bordas são detectadas indiferentemente. Além disto todas as bases estudadas são invariantes por rotação. Esta propriedade pode ser verificada com o auxílio das imagens das bolhas e bordas detectadas com a imagem *Phantom3*. Nela, as bolhas e bordas dos objetos que foram girados e transladados são versões giradas e transladadas independentemente da escala.

A função wavelet Haar também foi usada neste trabalho. Ela foi definida no intervalo de menos 0,5 até mais 0,5, isto para que a mesma seja simétrica em relação ao zero. Como esta função está definida em um intervalo fixo pode-se dizer que ela é uma função com suporte compacto. A gaussiana, por exemplo, é definida de menos a mais infinito. Para que o filtro gaussiano seja aplicado em um sinal, ele deve ser truncado em algum valor. Valores baseados no desvio padrão, como dois, seis, ou mais desvios padrões são usualmente aplicados. Por ser truncado, o resultado de se aplicar este filtro a uma imagem é uma aproximação do caso contínuo. Quando maior for o valor onde ocorre o truncamento melhor será a aproximação. Por outro lado quanto maior for este valor maior será o custo de processamento. Uma grande vantagem da base Haar com relação à gaussiana é o fato de ela estar plenamente definida em um intervalo, não precisando ser truncada. Além disso o custo computacional necessário para aplicar esta base em um sinal será menor que o custo necessário para a gaussiana. Bases com suporte compacto tem sido desenvolvidas pela comunidade científica como apresentado em (REMAKI , 1999).

O espaço de escala gerado com a base Haar apresenta maiores níveis de suavização com o aumento de escala, como esperado. Porém, para escalas grandes as bolhas apresentam distorções quando comparadas aos objetos da imagem, como pode ser observado na Figura 79.

A função wavelet Haar é comumente utilizada para detectar discontinuidades. No caso de imagens estas discontinuidades são as bordas dos objetos. Quando aplicou-se a definição original do espaço e escala para a detecção de bordas usando a função suavizadora da base

Haar, as bordas detectadas apresentaram uma boa localização. Esta propriedade se manteve mesmo quando os valores de escalas se tornavam grande, como apresentado na Figura 91 Para este caso as maiores distorções ocorreram nos vértices dos objetos.

Outra função wavelet estudada, foi a Mexican Hat. A base do espaço de escala obtida com esta função é a mesma base obtida com a função gaussiana. Esta função foi aplicada ao método proposto para proporcionar uma forma da validação. Como os resultados obtidos para esta função são idênticos aos resultados obtidos para o espaço de escala definido a partir da função gaussiana bi-dimensional (definida analiticamente) pode-se afirmar que os algoritmos desenvolvidos neste trabalho estão adequados às imagens testadas.

Os resultados apresentados no capítulo anterior para a imagem da Lenna e para as três imagens artificiais obtidos com as novas bases do espaço de escalas gerados a partir do método proposto, possuem características diferentes. A bordas detectadas com a base Haar, por exemplo, possui boa localização. As bolhas detectadas com a base gaussiana e com a base Bi-ortogonal 4.4 provocam o arredondamento dos cantos conforme se aumente a escala. Estas características demonstram que cada base possui características próprias. Em função disto é necessário saber qual base é a melhor base para cada aplicação.

A transformada wavelet, por possuir diversas bases, também possui a necessidade de escolha da melhor base. Antoine (1993), estabelece algumas formas para se resolver este problema. Primeiramente pode-se escolher a wavelet que melhor responda a aplicação. Segundo, pode-se construir uma nova *mother wavelet* para a sua aplicação. Em terceiro lugar se pode usar algumas famílias que tem seu comportamento e sua definição conhecida, pelo menos para o caso 1D. Como para o espaço de escalas está escolha também vai depender da aplicação, fica como sugestão para a solução da escolha da base do espaço de escala o uso das formas apresentadas por Antoine (1993). A colaboração do presente trabalho para esta escolha é o método para gerar novas bases e as dez novas bases apresentadas. Aumentando assim a gama de bases a disposição das pessoas para que elas possam encontrar à melhor base para a sua aplicação.

Como foi apresentado anteriormente, as funções wavelets Bi-ortogonais foram divididas em dois grupos. Os espaços de escalas gerados para estes dois grupos mantiveram as características de que uma imagem em uma escala maior possui um grau de suavização maior do que uma imagem representada em uma escala menor.

Um problema apresentado pelo primeiro grupo de wavelets Bi-ortogonais (as funções que possuem valores positivos e negativos) é que as bolhas destes espaços de escalas geram regiões não conectadas que pertencem à bolha do mesmo objeto. Isto é um problema quando

se busca a segmentação dos objetos em uma imagem. Neste caso se deseja que uma bolha represente apenas um objeto.

Para a solução deste problema foi apresentada uma nova definição do operador detector de bolhas para a função wavelet Bi-ortogonal 1.3 gerada por rotação. Nesta proposta usou-se um valor de limiar (th) definido a partir do mínimo global do laplaciano da imagem. Pode-se considerar que a definição original é um caso particular desta definição, quando o limiar vale zero. Os resultados apresentados para as bolhas da imagem com esta nova definição não apresentam o problema detectado com a versão original do detector de bolhas. Esta proposta pode ser aplicada para as demais funções Bi-ortogonais que apresentarem este problema.

Com a nova definição do operador detector de bolhas surge um novo problema. Dada uma imagem com bolhas de contrastes diferentes, por exemplo, bolhas com elevado contraste e com baixo contraste. Segundo a nova definição do operador detector de bolhas, o valor do limiar será definido a partir do mínimo global do laplaciano da imagem, que será função do objeto com o maior contraste. Neste caso o valor do laplaciano do objeto com baixo contraste pode ser inferior ao valor do limiar, implicando na não detecção desta bolha. Isto significa que o operador detector de bolhas proposto é um operador global e não mais local. A partir disto parece ser necessária uma nova mudança na definição, utilizando um valor de limiar determinado a partir da vizinhança de cada objeto. Vizinhança esta que pode ser definida em função da escala em que se está trabalhando. Porém, para este tipo de abordagem o número de etapas de processamento aumenta consideravelmente. Isto levanta uma questão: O que é mais vantajoso, utilizar este método com inúmeras etapas ou tentar utilizar outra função que não apresente este tipo de característica (mais de uma região definida como bolha para um mesmo objeto)? Neste trabalho optou-se por utilizar um limiar único para toda a imagem e salientar as peculiaridades que esta definição apresenta, sendo deixada como sugestão de trabalhos futuros o desenvolvimento desta outra definição de detector de bolhas local para as funções Bi-ortogonais cujas funções suavizadoras possuem valores positivos e negativos..

O detector de bordas gerado com as funções wavelets Bi-ortogonais do primeiro grupo apresentaram a característica de detecção de bordas triplas ou mais, onde deveria aparecer uma borda única. Problema semelhante ao encontrado no detector de bolhas, conforme apresentado anteriormente. Neste caso, a definição original é baseada nas segunda e terceiras derivadas parciais nas direções ν (direções do gradiente da imagem). Nas Figuras 36 e 37 são apresentadas as segunda e terceira derivadas direcionais para a imagem *Phantom3*. Podem ser observadas oscilações nas duas matrizes junto as bordas dos objetos, sendo que a terceira

derivada apresenta uma grande diferença de valores entre a região menor que zero de interesse e as demais regiões menores que zero responsáveis pelas bordas repetidas. Como solução para este problema aplicou-se uma nova definição do operador detector de bordas onde a terceira derivada deveria ser comparada com um valor de limiar dependente do mínimo global da terceira derivada direcional da imagem, conforme apresentado neste trabalho. Esta nova definição pode ser considerada um caso geral da definição original, sendo que o valor do limiar igual a zero leva a definição original. Os resultados obtidos com esta nova definição apresentaram bordas simples para as imagens testadas.

Com esta nova definição surge o mesmo problema detectado para a definição do operador detector de bolhas. No caso de uma imagem com objetos com muito e pouco contraste, o valor do mínimo global da terceira derivada na direção v será função do objeto de grande contraste. Neste caso pode ser que os objetos com pouco contraste não tenham as suas bordas detectadas. Assim como no caso das bolhas, uma solução possível é utilizar um valor de limiar local, dependente da vizinhança do *pixel* a ser testado. Este caso apresenta um maior número de etapas, e por isso pode-se perguntar novamente, o que é mais vantajoso, utilizar este método com inúmeras etapas ou tentar utilizar outra função que não apresente este tipo de característica (bordas repetidas)? Neste trabalho optou-se por utilizar um limiar único para toda a imagem e salientar as peculiaridades que esta definição apresenta, sendo deixada como sugestão de trabalhos futuros o desenvolvimento desta outra definição de detector de bordas.

Completando este trabalho, foram desenvolvidas duas aplicações usando o espaço de escala e seus operadores. Os problemas abordados são da área de engenharia biomédica. A primeira aplicação desenvolvida foi a segmentação de cavidades cardíacas usando o espaço de escala e segmentação por limiar. A segunda aplicação desenvolvida foi a segmentação e contagem de células sanguíneas usando o operador detector de bolhas do espaço de escala. Esta segunda aplicação foi desenvolvida usando duas bases distintas. Inicialmente usou-se a base original (gaussiana) do espaço de escala. Em seguida trocou-se a base para a função suavizadora da wavelet Haar. Com estas duas bases foi possível segmentar e contar as células sanguíneas presentes em um conjunto de dez imagens diferentes. Demonstrando-se assim, em primeiro lugar, a validade desta nova base gerada. E em segundo lugar, a validade do método para gerar novas bases do espaço de escala como proposto neste trabalho.

6.2 CONCLUSÃO

Neste trabalho, propôs-se um novo método para a criação de novas bases para o espaço de escala a partir de funções wavelets. Este método estudou a resposta em frequência das funções wavelets e das funções geradas por integração das funções wavelets, para determinar a existência de uma função suavizadora que pudesse ser utilizada como base para o espaço de escala. Este método foi aplicado a algumas funções wavelets que satisfazem os postulados estabelecidos na seção Materiais e Métodos. Com isso foram geradas dez novas bases para o espaço de escala. Pode-se concluir a partir do método proposto e das discussões apresentadas que neste trabalho criou-se um novo método para a geração de bases do espaço de escala a partir de funções wavelets.

Algumas das tarefas que estavam sem resposta na teoria do espaço de escala foram solucionadas, mas há inúmeras tarefas a serem resolvidas em trabalhos futuros. Algumas sugestões são:

- a Operador detector de Crista (*ridge*): O operador detector de crista não foi implementado neste trabalho e sua implementação é uma importante tarefa para complementar este trabalho.
- b Estudar bases não simétricas: as bases simétricas têm a propriedade de serem invariantes por rotação. Esta é uma importante característica para os operadores do espaço de escala quando não se têm informações a priori do conteúdo da imagem. No caso onde se deseja encontrar informações em uma determinada direção, bases que possuem direcionalidade podem obter melhores resultados, sendo então sugerido o seu estudo.
- c Axiomas do espaço de escala: foi apresentada na Revisão de Literatura que as duas bases que atendem a todos os axiomas do espaço de escalas, até o momento, são a gaussiana e a Poisson. Não foram discutidos neste trabalho quais os axiomas que são satisfeitos com as novas bases geradas com o método proposto, por estar fora do escopo deste trabalho. As demonstrações teóricas de quais axiomas são satisfeitos por cada uma das bases é uma importante tarefa a ser desenvolvida e que permitirá conhecer melhor cada uma dessas bases. Auxiliando assim a tarefa da escolha de qual a melhor base para cada aplicação.

A partir da apresentação deste trabalho, pode-se afirmar que o método proposto para a geração de novas bases para o espaço de escala a partir (i) da teoria do espaço de escalas, (ii) da teoria da transformada wavelet e (iii) das relações entre elas, foi realizado plenamente. Atingindo-se assim os objetivos propostos.

REFERÊNCIAS

ANTOINE, J. P. et al. Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform. **Signal Processing**, Amsterdam, v. 31, n. 3, p.241-272, apr. 1993.

ANTOINE, J. P. et al. Multi scale shape analysis using the continuous wavelet transform. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, 3., 1996, Lousane, Switzerland. **Proceeding...** New York: IEEE, v.1, p. 291-294.

BENTLEY, P.M.; MCDONNELL, J.T.E. Wavelet transform: an introduction. **Electronics and Communication Engineering Journal**, Stevenage, Engl., v. 6, n. 4,p. 175-186, agu. 1994.

BOSWORTH, J. H.; ACTON, S. T. Morphological scale-space in image processing. **Digital Signal Processing**, Amsterdam, v.13, n. 2, p.338-367, 2003. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_aset=B-WA-A-W-ADE-MSAYWW-UUW-AAUBDBDEVB-AAUABAYDVB-DZBVVEDZE-ADE-U&rdoc=14&fmt=full&udi=B6WDJ-47GXWMM-2&coverDate=04%2F30%2F2003&cdi=6768&orig=search&st=13&sort=d&view=c&acct=C000037798&version=1&urlVersion=0&userid=687304&md5=e37e2be6fcb7861b29bb15aee55c2f3e>. Acesso em: 5 jan. 2004.

BROWN, B. A. **Hematology: principles and procedures**, [S.l.]:Lea & Febiger, 1988. ISBN: 0812116437

CANNY, J. A Computational approach to edge detection. **IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Washington, DC, v. 8, n.1, p. 679-698, 1986.

CASTRO, I. **Cardiologia: princípios e prática**. Porto Alegre: Artmed, 1999. Disponível em: <<http://esquina.cardiol.br/cardio/default.asp>> Acessado em: 16 mar. 2004.

CUNHA, A. M. **Espaço de Escala e Detecção de Arestas**. 2000. 63 f. Dissertação (Mestrado), Instituto de Matemática pura e aplicada. Rio de Janeiro, 2000. Disponível em: <<http://www.visgrafimpa.br/cgi-bin/teseQuery.cgi?Xclass=student-msc|student-phd>>. Acesso em: 15 jan. 2004.

DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992. 357 p. ISBN: 0-89871-274-2.

DOERING, D.; SHUCK Jr. A. Segmentação de cavidades em imagens de eco-cardiografia em espaço de escalas. In: INTERNATIONAL FEDERATION FOR MEDICAL AND BIOLOGICAL ENGINEERING, 2004, João Pessoa, **Proceeding...** João Pessoa: CLAEB, III, 2004a. v.5, p. 1323-1326.

DOERING, D.; SHUCK Jr., A.; GUIMARÃES, L. V. Contagem de células sanguíneas usando o espaço de escalas. In: INTERNATIONAL FEDERATION FOR MEDICAL AND BIOLOGICAL ENGINEERING, 2004, João Pessoa, **Proceeding...** João Pessoa: CLAEB, III, 2004b. v. 5, p. 1239-1242.

DUIITS, R., et al. On the axioms of scale space theory. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, v.20, n.3, p.267-298, 2004.

FAYOLLE, J.; RIOU L.; DUCOTTET, C. Robustness of a multiscale scheme of feature points detection, **Pattern Recognition**, Amsterdam, Holanda, v.33, n.9, p.1437-1453, 2000.

FLORACK, L. M.J. et al. Nonlinear scale-space. **Image and Vision Computing**, Amsterdam, v. 13, n. 4, p. 279-293, may 1995.

FLORACK, L.; KUIJPER, A. The topological structure of scale-space images, **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, Dordrecht, Holanda, v.12, n. 1, p.65-79, feb. 2000.

FLORACK, L.; KUIJPER, A. Logical filtering in scale space. In: DANISH CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION AND IMAGE ANALYSIS 12, 2003, Copenhagen, **Proceeding eletrônico...** Copenhagen: S.I. Olsen (Ed.), DSAGM03, p. 4-11, 2003. Disponível em: <<http://www.cs.uu.nl/research/techreps/aut/florack.html>>. Acesso em: 3 jul. 2004.

GAO, X. et al. Corner detection of contour images using continuous wavelet transform. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATIONS AND SIGNAL PROCESSING, AND PACIFIC RIM CONFERENCE ON MULTIMEDIA, 4, 2003, Singapore, Asia. **Proceedings...** Piscataway, NJ, USA: IEEE,2003. v. 2, dec. 2003. p. 724 – 728.

GONZALES, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento de Imagens Digitais**. São Paulo: Edgard Bülcher, 1992. 509 p. ISBN:85-212-0264-4.

GROSSMAN, A.; MORLET, J. Decomposition of hard functions into square integrable wavelets of constant shape. **SIAM Journal Math. Anal.** Philadelphia, v.15, p.723-736.1984.

KHALIL, M. I.; BAYOUMI, M. M. Invariant 2D object recognition using the wavelet modulus. **Pattern Recognition Letters**, Netherlands, v. 21, n.9, p. 863-872, 2000.

KOENDERINK, J.J. The structure of images. **Biological Cybernetics**. New York, v.50, n.5, p. 363-370, 1984.

KOYA, T. K. **Sistema Automático de Contagem de Células Sangüíneas**. 2001. 76 f. Dissertação (Mestrado em engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LAPTEV, I.; LINDEBERG, T. Velocity adaptation of spatio-temporal receptive fields for direct recognition of activities: an experimental study. **Image and Vision Computing**, Netherlands, v.22, n.2, p.105-116, 2004.

LIMING-ZHANG; LENDERS, P. Locating the head boundary with 2D continuous wavelet. In: INTERNATIONAL SIMPOSIUM ON INTELLIGENT MULTIMEDIA, VIDEO AND SPEECH, 2001, Hong Kong. **Proceedings...** Piscataway, NJ, USA:IEEE, 2001. p. 336-339.

LINDEBERG, T.; EKLUNDH, J. Scale-space primal sketch: construction and experiments. **Image and Vision Computing**, Amsterdam, v. 10, n. 1, p. 3-18. jan. 1992.

LINDEBERG, T. On scale selection for differential operators. In: SCANDINAVIAN CONFERENCE ON IMAGE ANALYSYS, 8., 1993a. Scandinavian, Norway, **Proceedings...** Ttomso, Norway: NOBIN – Norway Soc. Image Process. and Pattern Recognition, may. 1993a. p. 857-866.

LINDEBERG, T. Detecting salient blob-like image structures and their scales with a scale-space primal sketch: a method for focus-of-attention. **International Journal of Computer Vision**, Netherlands, v. 11, n.3, p. 283-318, dec. 1993b.

LINDEBERG, T.; ROMENY, B. M. Ter H. Linear scale-space: early visual operations. Kluwer Academic Publishers, 1994. Disponível em: <<http://www.nada.kth.se/~tony/earlyvision.html>>. Acesso em: 5 jan. 2004.

LINDEBERG, T. **Linear Scale-Space**: basic theory. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1994. 440 p. ISBN: 0792394186.

LINDEBERG, T. Scale-Space: a framework for handling image structures at multiple scales. In: CERN SCHOOL OF COMPUTING. 1996a, Netherlands. **Proceedings eletrônico...** Netherlands: Publicado 1996a. p. 8-21. Disponível em: <http://www.nada.kth.se/~tony/earlyvision.html>>. Acesso em: 5 jan. 2004.

LINDEBERG, T. Edge detection and ridge detection with automatic scale selection. Computer Vision and Pattern Recognition, In: CVPR '96, 1996b, San Francisco. **Proceedings...** San Francisco: IEEE, 1996b, p. 465-470.

LINDEBERG, T. Edge detection and ridge detection with automatic scale selection. **International Journal of Computer Vision**, Netherlands, v. 30, n. 2, p. 117-154, 1998.

MALLAT, S.; ZHONG, S. Compact image coding from edges with wavelets. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 1991, Toronto, Canadá. **Proceedings...** New York: IEEE, 1991. v.4, p. 2745-2748.

MALLAT, S.; HWANG, W. L. Singularity detection and processing with wavelets. **IEEE Transactions on Information Theory**, USA, v. 38, n. 2, p. 617-642, mar. 1992.

NATIONAL COMMITTEE FOR CLINICAL LABORATORY STANDARDS. **Reticulocyte Counting by Flow Cytometry**: proposed guideline. Vilhanova, P. A.: NCCLS, 1993. Document H44-P.

NING-LIN; WEICHUAN-YU; DUNCAN, J. S. Combinative multi-scale level set framework for echocardiographic image segmentation. **Medical Image Analysis**, Amsterdam, v.7, n.4, p.529-537, 2003.

OLVAREZ, J. P. et al. Analysis of SAR images by multidimensional wavelet transform. In: RADAR SONAR AND NAVIGATION, 2003. [S.l.]. **Proceedings...** [S.l.]:IEE, agu. 2003, v. 150, n.4, p. 234-241.

OPPENHEIM, A. V.; WILLISKY, A. S.; YOUNG, I. T. **Signal and Systems**. New Jersey – USA: Prentice-Hall International Editions, 1983. ISBN: 0876925034.

PAZOS, R. P. **Equação de Transporte de Nêutrons: enfoque dos semi-grupos C_0** . 1995. 111 f. Dissertação (Mestrado em matemática aplicada) – Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995.

REMAKI, L.; CHERIET, M. Visual data extraction from bi-level document images using a generalized kernel family with compact support, in scale-space. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON DOCUMENT ANALYSIS AND RECOGNITION, 5, 1999, Bangalore, India. **Proceedings...** New York: IEEE, 1999, p. 609-612.

ROMENY, B. M. ter H. Introduction to scale-space theory: multiscale geometric image analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCALE-SPACE THEORY IN COMPUTER VISION, 1. 1996, Utrecht University, 1996. **Proceedings Eletrônico...** Disponível em: <<http://www.scalespace.org/scaleSpace1997/conferences/Tutorial.html>>. Acesso em: 7 abr. 2004.

SHENG, Y. Wavelet Transform. In: POULARIKAS, Alexander (Ed.). **The Transform and Applications Handbook**. IEEE Press. 1996. p.747-799. ISBN: 0849383420.

SONKA, M.; HLAVAC, C.; BOYLE, R. **Image Processing and Machine Vision**. 2.ed. [S.l.]: Thomson-Engineering, 1998. 800p. ISBN: 053495393X.

WANG, Y.; LEE, S. L. Scale space derived from B-spline. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Washington, DC, v.20, n.10, p.1040-1054, 1998.

WIECKERT, J.; ISHIKAWA, S.; IMIYA, A. Linear scale space has first been proposed in Japan. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, v.10, p.237-252, 1999.

WITKIN, A. P. Scale-space filtering. In: JOINT. CONF. ARTIFICIAL. INTELIGENCE, 8. 1983, Karlsruhe. **Proceedings...** Karlsruhe, West Germany: [S.n.], 1983. p.1019-1022.

XIAO, G. et al. Segmentation of ultrasound B-mode images with intensity inhomogeneity correction. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, New York, v. 21, n. 1, p. 48-57, 2002.

XIAUDONG-HUANG; DUBOIS, E. Dense disparity estimation based on the continuous wavelet transform: stereo image analysis. In: CONFERENCE ON ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING, 2004, Canada. **Proceedings...** Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2004. v.1, p.465-468.

ZUCCOLOTTO, M.; OLABARRIAGA, S.; SCHUCK JR., A. Segmentação de cavidades em imagens cardiográficas utilizando espaço de escalas. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA (CLAEB), 2., 2002, São José dos Campos – SP. **Anais...** São José dos Campos: 2002.