

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**LARGURAS DE ESTADOS DE BURACO
NUCLEARES EM UM MODELO
RELATIVÍSTICO ¹**

Maria Helena Steffani

Tese realizada sob a orientação do Dr. Theodor A. J. Maris e do Dr. Michel Betz, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS, em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, dezembro de 1989

¹Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

I have a dream...

...

...

À Carlos A. D. Matheus

Resumo

Desde a década passada tem havido muito interesse no tratamento relativístico de sistemas nucleares. Uma rica variedade de problemas tem sido investigada usando modelos de teoria de campos relativística que incorporam as características essenciais da interação nuclear. Um modelo particularmente simples é o modelo de Walecka no qual a atração de alcance intermediário é devida a troca de um méson escalar-isoescalar σ e a repulsão de curto alcance deve-se à troca de um méson vetorial-isoescalar ω . A teoria de campo médio derivada desse modelo apresenta um grande campo escalar de Lorentz atrativo devido ao méson escalar σ e um também grande campo vetorial de Lorentz repulsivo devido ao méson ω . Esses grandes campos médios quase se cancelam no potencial central de partícula única, mas na obtenção do potencial spin-órbita se somam. Os resultados reproduzem as pequenas energias de ligação experimentais e as separações spin-órbita previstas pelo modelo de camadas.

O presente trabalho tem como objetivo calcular as larguras de estados de buraco nucleares na matéria nuclear, usando o modelo de Walecka, e verificar se, também nesse caso ocorrem cancelamentos. Os resultados são comparados com as larguras de estados de buraco presentes no estado final de experiências de espalhamento quase-livre. O limite não-relativístico também é apresentado nesse trabalho. As diferenças entre os resultados dos cálculos relativísticos e não-relativísticos não são grandes, embora não sejam completamente insignificantes.

A comparação entre os valores experimentais e as larguras obtidas, as quais decorrem de fortes cancelamentos entre os campos médios relativísticos, mostra que o modelo fornece bons resultados, reproduzindo adequadamente as principais tendências dos resultados experimentais.

Abstract

For the last decade there has been much interest in the relativistic treatment of nuclear systems. A great variety of problems have been investigated using models of relativistic mean-field theory, which incorporate the essential characteristic of nuclear interactions. A particularly simple one is the Walecka model in which the intermediate-range attraction is due to the exchange of a scalar-isoscalar σ -meson and the short-range repulsion arises from the exchange of a vector-isoscalar ω -meson. The nuclear mean-field theory corresponding to this model is characterized by a large attractive Lorentz-scalar field due to the σ -meson and an also large repulsive Lorentz vector field due to the ω -meson. These large relativistic mean-fields almost cancel in the central single-particle potential, but they add up in the spin-orbit potential. The results reproduce the small experimental binding energies and the spin-orbit splittings of the shell-model.

The goal of this work is to calculate the widths of nuclear hole states in nuclear matter, within the Walecka model, and to verify if strong cancellations occurs in this case also. The calculated widths are compared with the experimental widths of nuclear hole states that are present in the final states of quasi-free scattering experiments. The non-relativistic limit is also discussed. The differences between the results of relativistic and non-relativistic calculations are not large, nevertheless they are not completely negligible.

The comparison between the experimental values and the calculated widths, which are obtained from strong cancellations between the relativistic mean-fields, shows that the results are in good agreement with experimental data and the Walecka model adequately reproduces the main trends of the experimental widths of nuclear holes states.

Sumário

1	Introdução	3
2	Teoria Nuclear Relativística - Revisão	9
2.1	Introdução	9
2.2	Hadrodinâmica Quântica I (HDQ-I)	11
2.3	Hadrodinâmica Quântica II (HDQ - II)	20
2.3.1	HDQ-II - Aproximação de Thomas-Fermi	21
2.3.2	HDQ-II - Aproximação Relativística de Hartree	22
2.3.3	Comentários	24
2.4	Teoria Relativística de Brueckner-Hartree-Fock	25
3	Propagadores Relativísticos	32
3.1	Expansão dos operadores de campo fermiônico em termos de soluções das equações de campo médio - Operadores criação para partículas, buracos e antipartículas	32
3.2	Propagadores e anticomutadores a tempos iguais	35
3.3	Representações de Lehmann	38
3.4	Propagadores "livres" no campo médio	45
3.5	Interpretação física dos propagadores	49
3.6	Relação entre a decomposição de Dirac da auto-energia e do propagador	50
3.7	Propagadores aproximados	52
3.8	Tempos de vida	56

3.9	Representações de Lehmann (aproximadas) dos propagadores calculados em teoria de perturbação	60
4	Cálculo da Largura de Estados de Buraco na Matéria Nuclear	63
4.1	Cálculo relativístico	64
4.2	Limite Não-Relativístico	73
4.3	Análise dos resultados numéricos	77
4.4	Caso fictício: iguais massas e constantes de acoplamento para os mésons σ e ω	81
5	Comparação com Resultados de Experiências de Espalhamento Quase-Livres	85
6	Conclusões e Comentários Finais	92
	Apêndice A	94
	Apêndice B	100
	Apêndice C	103
	Apêndice D	106
	Referências	111

Capítulo 1

Introdução

O problema da descrição de uma força de curto alcance como a força nuclear foi tratado por Yukawa em 1935. Sua teoria mesônica [1] nasceu da aplicação das consequências de duas brilhantes teorias desse século: relatividade restrita e mecânica quântica, e exigia a existência de uma partícula então desconhecida. Somente na década seguinte foi descoberto o méson π [2]. Entretanto a investigação da estrutura nuclear tradicionalmente ateu-se à busca de soluções aproximadas para a equação de muitos corpos de Schrödinger não-relativística com um potencial núcleon-núcleon estático extraído de dados de espalhamento de dois corpos e propriedades do dêuteron. Apesar de seu considerável sucesso, esse tratamento não é o mais adequado para fornecer uma compreensão mais detalhada do sistema nuclear, pois, conhecendo-se os quanta da força nuclear, parece natural que na descrição de núcleos estes deveriam ser levados em conta. Isso se deu através da parametrização do potencial de troca de um bóson (OBEP), que no começo da década de 70 apresentava significativo desenvolvimento e incluía a troca de mésons π , σ , ω e ρ . Mais recentemente foram desenvolvidas teorias em que os graus de liberdade mesônicos são incluídos explicitamente, assegurando assim um tratamento teórico mais consistente de sistemas nucleares.

Uma maneira simplificada, e em alguns casos conveniente, de investigar um sistema de muitos corpos como o núcleo, consiste em estudar as propriedades nucleares volumétricas em termos da interação entre dois núcleons livres considerando-se o limite da matéria

nuclear infinita. A energia de um núcleo contendo B núcleons (Z prótons e N nêutrons), numa primeira aproximação, é dada pela fórmula semi-empírica de massa de Weizsäcker. A matéria nuclear é definida fazendo $N=Z$, desprezando a interação coulombiana e tomando o limite $B \rightarrow \infty$ da fórmula semi-empírica de massa, o que implica em uma energia/partícula constante. Essa condição associada à de que a densidade de partículas é uma constante independente do tamanho do núcleo exhibe a propriedade de saturação das forças nucleares. A matéria nuclear é tratada como um sistema de Fermi degenerado cuja densidade determina o momentum de Fermi k_F . Obviamente todo tratamento de sistemas nucleares deve levar em conta as características essenciais da interação de dois núcleons: interação forte, de curto alcance, repulsiva a pequenas distâncias e atrativa a distâncias maiores.

Devido à impossibilidade de resolver exatamente um problema de muitos corpos importante contribuição para a compreensão da estrutura nuclear se deu através da utilização de modelos nucleares. Em particular, um modelo em que os núcleons se movem em um potencial de partícula única, modelo de camadas [3], obteve muito sucesso e constituiu a base de aproximações de potencial médio autoconsistente [4] como Hartree-Fock, Brueckner-Hartree-Fock e Hartree-Fock dependente de densidade.

Apesar do sucesso do tratamento não relativístico de sistemas nucleares, medidas de densidade de carga, distribuições de corrente e densidades de magnetização obtidas em experiências de espalhamento de elétrons em meados de 70 tornavam evidente que se estava atingindo o limite desse tratamento e se fazia necessária uma teoria sistemática fundamental que incorporasse as contribuições mesônicas[5]. Uma teoria quântica de muitos corpos relativística que inclui explicitamente os graus de liberdade mesônicos pode fornecer uma descrição mais completa e satisfatória da matéria de densidade nuclear ou superiores[6,7]. Ademais, um formalismo relativístico que usa a equação de Dirac com termos de potenciais óticos [8] tem apresentado resultados superiores ao formalismo não-relativístico, especialmente no que trata de observáveis de spin, a polarização e a rotação de spin, em espalhamento elástico próton-núcleo a energias médias [9].

Simultaneamente, com a realização de experiências de espalhamento a energias altas e, em particular, desde a descoberta da partícula J/Ψ [10], tomou impulso o modelo de Gell-Mann, Ne'eman e Zweig segundo o qual todos os hádrons são compostos por partículas mais elementares: quarks [11]. O modelo de quarks da estrutura hadrônica foi inicialmente proposto devido a considerações de simetria no início dos anos 60. Nesse modelo os bárions são formados por 3 quarks (qqq) e os mésons são constituídos de um par quark-antiquark ($q\bar{q}$). Novo grau de liberdade é incluído para assegurar a validade da estatística de Fermi[12]. Surge então uma teoria mais fundamental para as interações fortes: a cromodinâmica quântica (CDQ) [13] que é usada para descrever a interação entre quarks. Devido às dificuldades em resolver exatamente as equações da CDQ, criaram-se modelos que incorporam as principais características dessa teoria: o confinamento e a liberdade assintótica. Embora haja poucas evidências experimentais para o papel explícito dos quarks na física nuclear a energias baixas ou médias, considerável parcela de literatura atual é dedicada à aplicação de modelos de quarks a problemas de estrutura hadrônica e física nuclear [14].

Nos dias de hoje esses tratamentos coexistem e complementam-se em direções opostas, isto é, CDQ descreve adequadamente problemas que envolvem pequenas distâncias e, a grandes distâncias, uma descrição dos fenômenos nucleares em termos de bárions e mésons pontuais parece adequada.

Um modelo simples de teoria de campo que reproduz as características essenciais da interação nuclear, no qual a atração de alcance médio é reproduzida pela troca de um méson escalar σ e a repulsão de curto alcance se deve à troca de um méson vetorial ω , foi proposto por Walecka [6]. Uma característica particularmente interessante é que a teoria de campo médio derivada desse modelo apresenta um grande campo escalar de Lorentz atrativo devido ao méson σ e um, também grande, campo vetorial de Lorentz repulsivo devido ao méson ω . Essas quantidades quase se cancelam na obtenção do potencial central de partícula única, reproduzindo as pequenas energias de ligação experimentais, e se somam na obtenção do potencial spin-órbita, produzindo separações spin-órbita

em acordo com a fenomenologia do modelo de camadas. Forte cancelamento entre as componentes escalar e vetorial de Lorentz também acontece no cálculo da parte imaginária do potencial ótico.

Outra situação física em que esse comportamento poderia se manifestar diz respeito a larguras de estados de buraco nucleares e constitui a motivação básica desse trabalho, que se propõe a verificar se semelhante cancelamento ocorre e, assim, fornece mais um teste para o modelo de Walecka comparando os resultados obtidos com os valores extraídos de experiências de espalhamento quase-livre[15].

O processo de decaimento de um buraco na matéria nuclear ocorre pela excitação de um par adicional partícula-buraco. No contexto da teoria de Brueckner não-relativística larguras de estados de buraco para alguns núcleos foram calculadas por Köhler [16] levando em conta uma interação central atrativa de longo alcance e repulsiva ("caroço") a curta distância. Os valores obtidos apresentam boa concordância com os resultados experimentais.

No presente trabalho calculamos as larguras dos estados de buraco no modelo de Walecka usando a teoria de perturbação em torno do campo médio[17].

A largura do estado de buraco está relacionada com a parte imaginária da auto-energia do buraco na matéria nuclear, calculada a partir dos diagramas de Feynman relevantes.

No cálculo de cada componente de Lorentz da parte imaginária da auto-energia, ocorre um forte cancelamento entre as contribuições dos mésons σ e ω . Isto se deve à interferência destrutiva entre as amplitudes de espalhamento núcleon-núcleon devidas às trocas dos dois tipos de mésons, o méson escalar σ produzindo atração e o méson vetorial ω repulsão. Além desse cancelamento, e a exemplo do que acontece no cálculo da parte imaginária do potencial ótico, se verifica no cálculo da largura um significativo cancelamento entre as componentes escalar e vetorial de Lorentz da parte imaginária da auto-energia. Argumentamos que este efeito também resulta, embora menos obviamente, da interferência destrutiva mencionada acima. No tratamento não-relativístico, também apresentado nesse trabalho, esta interferência destrutiva se manifesta de maneira particularmente transpa-

rente, como um cancelamento entre os potenciais de Yukawa, respectivamente negativos e positivos, devidos aos mésons σ e ω . Quanto aos resultados, pode-se dizer, de maneira geral, que as diferenças entre os cálculos relativísticos e não-relativísticos não são grandes, embora não sejam completamente insignificantes.

Convém ressaltar que embora o cálculo desse processo seja qualificado ao longo do texto como relativístico, o estado fundamental não exhibe completa invariância de Lorentz, pois a matéria nuclear não é invariante sob "boosts".

A comparação das larguras de estados de buraco com os resultados experimentais extraídos de dados de espalhamento quase-livre é encorajadora, pois mostra que o modelo não somente dá valores razoavelmente corretos para as larguras (valores esses que emergem de fortes cancelamentos entre termos de ordem de grandeza superior), como também reproduz as principais tendências dos resultados experimentais.

Como a literatura atual manifesta um crescente interesse na descrição do núcleo como um sistema relativístico, no capítulo 2 apresentaremos as características essenciais dos modelos relativísticos mais usados. O modelo de Walecka é apresentado nas suas duas versões: a Hadrodinâmica Quântica I (HDQ - I) que contém campos neutros escalar (σ) e vetorial (ω) e que é usada neste trabalho para calcular as larguras dos estados de buraco na matéria nuclear, e a Hadrodinâmica Quântica II (HDQ - II) que inclui uma descrição renormalizável da interação de campos carregados pseudoescalar (π) e vetorial (ρ); as propriedades nucleares são calculadas na aproximação de campo médio autoconsistentemente ou na aproximação de Thomas-Fermi, sendo algumas delas utilizadas para fixar os parâmetros do modelo. Segue um breve apanhado da teoria Relativística Brueckner-Hartree-Fock que leva em conta correlações de dois corpos e se caracteriza como uma teoria sem parâmetros livres além daqueles introduzidos para reproduzir os dados de espalhamento núcleon-núcleon livre.

No capítulo 3, de caráter essencialmente didático, desenvolve-se o formalismo básico para obtenção de propagadores relativísticos para partícula, buraco e antipartícula na matéria nuclear e discute-se a sua interpretação física. Esse formalismo é aplicado à

construção de propagadores relativísticos no campo médio. As expressões dos tempos de vida de estados de buraco, partícula e antipartícula, em termos das componentes de Lorentz da parte imaginária da auto-energia correspondente são derivadas nesse capítulo no quadro da teoria de perturbação.

O cálculo propriamente dito das larguras de estados de buraco nucleares, tanto o relativístico como a aproximação não-relativística, é desenvolvido no capítulo 4. Nesse capítulo apresenta-se uma análise de ambos resultados e, numa tentativa de elucidar a origem dos cancelamentos observados nesses cálculos, discute-se um caso fictício considerando-se iguais massas e constantes de acoplamento para os mésons σ e ω .

Comparações dos resultados obtidos com os dados experimentais de reações quase-livres são mostradas no capítulo 5. Ademais, comentários sobre as informações experimentais são incluídos.

Finalmente no capítulo 6 são apresentados comentários e conclusões sobre a aplicabilidade do modelo de Walecka ao problema investigado.

Dentre os quatro apêndices incluídos, os dois primeiros mostram detalhes sobre os cálculos das integrais que podem ser resolvidas analiticamente no cálculo relativístico e não-relativístico. No apêndice C mostra-se que a largura do decaimento de um buraco na matéria nuclear é dada pela integral sobre o espaço das fases apropriado da seção de choque de dois núcleons via troca de méson σ e ω . O apêndice D contém um conjunto de tabelas relativas aos resultados dos cálculos desenvolvidos no capítulo 4, as quais podem ser usadas para avaliar as diversas contribuições para a largura.

Capítulo 2

Teoria Nuclear Relativística - Revisão

2.1 Introdução

Uma vez conhecida a interação eletrostática, considerável progresso se deu na descrição de átomos em termos de potenciais simples de dois corpos. No caso dos núcleos também, apesar das dificuldades adicionais devidas à ausência de um corpo central e à magnitude da interação, uma descrição baseada na equação de Schrödinger com potenciais de dois corpos, tem sido considerada como geralmente satisfatória. Porém, sendo a interação nuclear de natureza forte, em colisões de altas energias ocorre a produção múltipla de quanta nucleares (mésons) enquanto que eventos dessa natureza no caso atômico (quanta eletromagnéticos) são raros. Assim, no caso nuclear, na medida em que estados virtuais de mésons estejam presentes torna-se possivelmente inadequada a descrição de núcleos através de potenciais de dois corpos, a exemplo do tratamento de problemas em física atômica. Em núcleos pesados o número de mésons virtuais no mesmo estado quântico pode ser considerável e, portanto, o comportamento da interação de muitos corpos deve se assemelhar àquele de um campo clássico, o que tornaria mais simples o estudo de tais sistemas.

Em 1955 M.H. Johnson e E. Teller[18] propuseram um potencial nuclear clássico com mésons escalares neutros como quanta. Nesse trabalho, em que a interação dos núcleons com o campo mesônico é linear no campo do méson, propriedades de saturação, energias

de ligação empíricas e densidades nucleares são obtidas quando um termo adicional, proporcional à energia cinética do núcleon, é incluído. Esse termo adicional no potencial é repulsivo, aumenta com a densidade e tem o efeito de diminuir a massa dos núcleons dentro do núcleo.

Uma tentativa de formulação relativística[19] dessa teoria fenomenológica leva em conta uma interação devida a um campo escalar e à quarta componente de um campo mesônico vetorial. Nessa teoria, os núcleons são fontes de duas espécies de mésons neutros: escalares e vetoriais, a troca dos primeiros conduzindo a um potencial atrativo e a dos últimos, a um potencial repulsivo. No limite não-relativístico esta formulação corresponde ao potencial dependente de velocidade da ref.[18] e reproduz resultados ali obtidos, tais como saturação da ligação nuclear e razões entre números de nêutrons e de prótons aproximadamente corretas. Ademais, nesse limite, a teoria prediz um forte acoplamento spin-órbita.

Com o advento das fábricas de mésons tornou-se viável estudar uma rica variedade de fenômenos relacionados com a produção, absorção e espalhamento de mésons por núcleos, e, portanto, uma descrição teórica mais adequada dos núcleos deveria incluir explicitamente os graus de liberdade mesônicos. Além disso, para descrever o comportamento de sistemas que envolvem fluxo de matéria nuclear a velocidades que se aproximam da velocidade da luz ou propriedades de sistemas de densidades superiores à nuclear como é o caso de estrelas de nêutrons, o tratamento não-relativístico tradicional se mostra inadequado. Torna-se fundamental que o tratamento teórico incorpore os princípios básicos da relatividade especial.

A estrutura de Lorentz da interação nuclear estabelece uma nova escala de energia uma vez que, neste contexto, a massa nucleônica reduz-se por um fator da ordem de 2 e grandezas nucleares relativamente pequenas, tais como energias de ligação, decorrem de fortes cancelamentos entre contribuições atrativa e repulsiva para energia potencial separadamente da ordem de grandeza da massa efetiva. A validade da utilização do tratamento não-relativístico convencional com inclusões de correções relativísticas deve,

portanto, ser reexaminada pois, com a redução da massa nucleônica m para uma massa efetiva $m_e \simeq m/2$, a velocidade dos núcleons aumenta e contribuições das componentes inferiores do vetor função de onda podem se tornar significativas.

Considerável número de trabalhos tem sido publicados desde meados da década de 70 quando Walecka[6] formulou uma teoria quântica relativística da matéria nuclear. No início dos anos 80 um grupo de pesquisadores apresentou um modelo alternativo usualmente referido como Teoria de Brueckner-Hartree-Fock Relativística[20]. Nas seções seguintes apresentamos as características principais dessas teorias.

2.2 Hadrodinâmica Quântica I (HDQ-I)

Uma teoria quântica de campos relativística que leva em conta explicitamente os graus de liberdade mesônicos, além dos bariônicos, através de uma densidade lagrangeana local foi proposta por Walecka[6] em 1974 e tem sido referida como Hadrodinâmica Quântica I (HDQ - I). Nesse modelo uma das mais simples densidades lagrangeanas renormalizáveis, que reproduz as principais características da interação núcleon-núcleon, contém um campo bariônico ψ , um campo mesônico escalar neutro ϕ acoplado à densidade escalar $\bar{\psi}\psi$ e um campo mesônico vetorial neutro V_μ acoplado à corrente bariônica conservada $B_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, e é escrita na forma ¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_\sigma^2\phi^2) + \frac{1}{2}m_\omega^2V_\mu V^\mu + \\ & - \frac{1}{4}(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi V^\mu + g_\sigma\bar{\psi}\psi\phi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Em (2.1) m , m_σ e m_ω são, respectivamente, as massas bariônica e dos mésons escalar e vetorial, que juntamente com as constantes de acoplamento g_σ e g_ω formam o conjunto de parâmetros da teoria. Ambos os campos ϕ e V_μ são isoescalares.

A densidade lagrangeana (2.1) tem sido usada no estudo de matéria altamente condensada, com densidades iguais ou superiores à da matéria nuclear [6,22] e seus parâmetros são ajustados para reproduzir as propriedades observadas na matéria nuclear.

¹Nós usamos a notação de J.D. Bjorken and S.D. Drell[21].

A motivação para esse modelo reside no fato de que a troca de mésons escalares e vetoriais é a maneira natural e simples de obter as características essenciais da interação núcleon-núcleon. Para bárions movendo-se não-relativisticamente, o potencial núcleon-núcleon devido à troca de mésons é repulsivo a curtas distâncias se $g_\omega > g_\sigma$, e atrativo a distâncias médias se $m_\omega > m_\sigma$. Dessas características decorre a propriedade de saturação na matéria nuclear. Campos associados aos mésons π e ρ não estão incluídos em (2.1), pois na matéria nuclear, devido a forte dependência de spin e isospin do potencial de troca de um méson pseudoescalar ou isovetorial, as contribuições destes mésons se anulam. Cabe ressaltar que o méson σ aqui introduzido não corresponde a uma partícula experimentalmente identificada, mas representa possivelmente um estado de dois píons correlacionados.

As equações de movimento para os campos, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange da densidade (2.1), são

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2)\phi = g_\sigma \bar{\psi}\psi \quad (2.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 V^\nu = g_\omega \bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (2.3)$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega V_\mu) - (m - g_\sigma \phi)]\psi = 0. \quad (2.4)$$

Essas equações são relativísticas e covariantes de Lorentz. A equação para o méson escalar é do tipo Klein-Gordon com uma fonte escalar; a do méson vetorial tem a forma da equação fundamental da Eletrodinâmica Quântica (EDQ) massiva tendo como fonte uma corrente bariônica conservada. O campo bariônico obedece uma equação de Dirac modificada pela presença dos campos mesônicos escalar e vetorial. Como consequência da conservação da corrente bariônica B^ν

$$\partial_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\psi = 0, \quad (2.5)$$

segue que $\partial_\nu V^\nu = 0$, que pode ser facilmente verificado a partir de (2.3), e que o número bariônico

$$B \equiv \int d^3x B^0 = \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (2.6)$$

é uma constante de movimento.

As equações (2.2) – (2.4) são equações quânticas de campos não lineares que podem apresentar soluções aproximadas razoavelmente simples para sistemas de altas densidades. Considere-se um sistema consistindo de B bárions em uma caixa de volume Ω . À medida em que a densidade bariônica do sistema aumenta, os termos de fonte em (2.2)- (2.3) tornam-se grandes. No limite de alta densidade os campos mesônicos podem ser aproximados por seus valores esperados que são grandes e,consequentemente, as equações dos campos mesônicos se reduzem às equações clássicas:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \langle \phi \rangle = \bar{\phi} \\ V_\mu &\rightarrow \langle V_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \bar{V}_0.\end{aligned}$$

Se o sistema for uniforme e estático, $\bar{\phi}$ e \bar{V}_0 são constantes e as soluções para as equações de campo mesônicos (2.2) e (2.3) são

$$\bar{\phi} = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_S \quad (2.7)$$

$$\bar{V}_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B . \quad (2.8)$$

Essas equações relacionam os campos clássicos condensados $\bar{\phi}$ e \bar{V}_0 com as densidades escalar $\rho_S = \langle \bar{\psi} \psi \rangle$ e bariônica $\rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle$ do sistema, respectivamente.

Note-se que para um sistema uniforme, a densidade bariônica $\rho_B = B/\Omega$ é uma constante de movimento e portanto a intensidade do campo mesônico vetorial \bar{V}_0 fica completamente determinada pelas equação (2.8). O mesmo não acontece com relação ao campo mesônico escalar $\bar{\phi}$, pois este está relacionado com a densidade escalar de Lorentz $\rho_S = \langle \bar{\psi} \psi \rangle$, que só pode ser determinada depois de se obter a solução para as funções de onda bariônicas.

Substituindo-se em (2.4) os campos mesônicos pelos seus valores clássicos (2.7) e (2.8) a equação de Dirac para o campo bariônico toma a forma

$$[i \not{\partial} - g_\omega \beta \bar{V}_0 - (m - g_\sigma \bar{\phi})] \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.9)$$

onde se fez uso da notação $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$ e $\gamma^0 = \beta$.

A quantidade $g_\sigma \bar{\phi}$ pode ser incorporada à massa bariônica livre definindo-se a massa bariônica efetiva

$$m_* = m - g_\sigma \bar{\phi}. \quad (2.10)$$

Considerando-se soluções de estado estacionário para um sistema uniforme do tipo onda plana

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_{\vec{k}s}(\vec{x}) \exp(-i \varepsilon t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_*^2}{k^2 + m_*^2} \right)^{1/2} \psi_{\vec{k}s} \exp(-i \varepsilon t) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (2.11)$$

onde $k \equiv |\vec{k}|$, $\psi_{\vec{k}s}$ é um vetor coluna de quatro componentes, usualmente chamado "spinor" de Dirac, e s corresponde ao índice de spin, a equação (2.9) torna-se

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m_*) \psi_{\vec{k}s} = (\varepsilon - v_0) \psi_{\vec{k}s}. \quad (2.12)$$

sendo $v_0 = g_\omega \bar{V}_0$.

Note-se que a presença do campo escalar tem como efeito alterar a massa bariônica, enquanto que o campo vetorial desloca a energia das soluções. A equação de autovalores decorrente de (2.12) é

$$\varepsilon(k) = \varepsilon^{(\pm)}(k) = v_0 \pm \sqrt{k^2 + m_*^2} \quad (2.13)$$

que, de acordo com a natureza da equação de Dirac, implica na existência de soluções correspondentes às raízes positiva e negativa:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m_*) u(\vec{k}s) = (\varepsilon^{(+)}(k) - v_0) u(\vec{k}s) = \sqrt{k^2 + m_*^2} u(\vec{k}s) \quad (2.14.a)$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m_*) v(-\vec{k}s) = (\varepsilon^{(-)}(k) - v_0) v(-\vec{k}s) = -\sqrt{k^2 + m_*^2} v(-\vec{k}s) \quad (2.14.b)$$

A solução geral de (2.9) pode ser escrita como uma superposição das soluções (2.11):

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_s \int d^3k [b_s(\vec{k}) U_{\vec{k}s}(\vec{x}) \exp(-i\varepsilon^{(+)}t) + d_s^*(\vec{k}) V_{\vec{k}s}(\vec{x}) \exp(-i\varepsilon^{(-)}t)] \quad (2.15)$$

onde

$$U_{\vec{k}s}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_*}{E_k}} u(\vec{k}s) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (2.16.a)$$

$$V_{\vec{k}s}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_*}{E_k}} v(\vec{k}s) \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (2.16.b)$$

e

$$E_k = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

De acordo com o procedimento de quantização canônica do campo de Dirac, as amplitudes de modo-normal $b_s^\dagger(\vec{k})$, $b_s(\vec{k})$, $d_s^\dagger(\vec{k})$, $d_s(\vec{k})$ podem ser interpretadas como operadores criação e destruição de partículas e antipartículas e obedecem as relações de anticomutação

$$\{b_s(\vec{k}), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')\} = \{d_s(\vec{k}), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.17.a)$$

$$\{b_s(\vec{k}), b_{s'}(\vec{k}')\} = \{b_s(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')\} = \{d_s(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')\} = \{b_s(\vec{k}), d_s^\dagger(\vec{k}')\} = 0 \quad (2.17.b)$$

Note-se que ψ é a única variável campo da qual depende todas as quantidades físicas do sistema. O tensor energia-momentum nessa teoria de campo médio torna-se

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \left(\frac{1}{2} m_w^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \bar{\phi}^2 \right) g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde fez-se uso da equação de movimento para o campo ψ . Para um fluido clássico uniforme o tensor energia-momentum toma a forma[23]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -P g_{\mu\nu} + (\varepsilon + P) A_\mu A_\nu \quad (2.19)$$

onde P é a pressão, ε é a densidade de energia e A_μ é o quadrivetor velocidade do fluido. Para um fluido em repouso $P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle$ e $\varepsilon = \langle T_{00} \rangle$. A energia do sistema é dada por

$$E = \int_\Omega d^3x \langle T_{00} \rangle = \int_\Omega d^3x \varepsilon \quad (2.20)$$

Usando a expansão do campo fermiônico (2.15) e as relações de ortonormalidade obedecidas por $U_{\vec{k}s}(\vec{x})$ e $V_{\vec{k}s}(\vec{x})$:

$$\int d^3x U_{\vec{k}'s'}^\dagger(\vec{x}) U_{\vec{k}s}(\vec{x}) = \frac{m_s}{E_k} U^\dagger(\vec{k}s') U(\vec{k}s) \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta_{s's} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.21.a)$$

$$\int d^3x U_{\vec{k}'s'}^\dagger(\vec{x}) V_{\vec{k}s}(\vec{x}) = \frac{m_s}{E_k} U^\dagger(-\vec{k}s') V(\vec{k}s) \delta(\vec{k} + \vec{k}') = 0 \quad (2.21.b)$$

$$\int d^3x V_{\vec{k}'s'}^\dagger(\vec{x}) U_{\vec{k}s}(\vec{x}) = \frac{m_s}{E_k} V^\dagger(-\vec{k}s') U(\vec{k}s) \delta(\vec{k} + \vec{k}') = 0 \quad (2.21.c)$$

$$\int d^3x V_{\vec{k}'s'}^\dagger(\vec{x}) V_{\vec{k}s}(\vec{x}) = \frac{m_s}{E_k} V^\dagger(\vec{k}s') V(\vec{k}s) \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta_{s's} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.21.d)$$

obtém-se de (2.18) o operador hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = \int_{\Omega} d^3x T_{00} &= \sum_{\vec{k}_s} (k^2 + m_s^2)^{\frac{1}{2}} (b_{\vec{k}_s}^{\dagger} b_{\vec{k}_s} + d_{\vec{k}_s}^{\dagger} d_{\vec{k}_s}) + v_0 \hat{B} \\ &- \left(\frac{1}{2} m_{\omega}^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_{\sigma}^2 \bar{\phi}^2 \right) \Omega \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $\hat{B} = \sum_{\vec{k}_s} (b_{\vec{k}_s}^{\dagger} b_{\vec{k}_s} - d_{\vec{k}_s}^{\dagger} d_{\vec{k}_s})$. Conforme prescrição da teoria que impõe ordenamento normal do conjunto de operadores, todos os operadores de destruição foram movidos para a direita dos de criação, ocorrendo troca de sinal sempre que dois deles são trocados. Pode-se identificar \hat{B} como o operador número bariônico do sistema.

O problema da teoria de campo médio fica definido pelo hamiltoniano (2.22) e pode ser exatamente resolvido uma vez que esse é diagonal. Fisicamente esse modelo representa bárions e antibárions movendo-se em campos mesônicos neutros escalar ($\bar{\phi}$) e vetorial (V_0) constantes. V_0 está relacionado com a corrente bariônica conservada e fica determinado por (2.8). $\bar{\phi}$, que está inserido em m_* , é uma quantidade dinâmica e deve ser determinado autoconsistentemente.

Essa é, basicamente, a estrutura do modelo da Hadrodinâmica Quântica, ou seja, é uma teoria covariante de Lorentz que inclui explicitamente os graus de liberdade mesônicos e as antipartículas. A simplicidade das soluções das equações na aproximação de campo médio, presumivelmente válida a altas densidades, torna esse modelo muito atraente para investigação de efeitos relativísticos em sistemas nucleares.

Se o estado fundamental do sistema é um mar composto por estados de partícula única com número de onda \vec{k} e degenerescência spin-isospin γ preenchido até um nível de Fermi k_F , obtém-se

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k = \frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon = \frac{g_{\omega}^2}{2m_{\omega}^2} \rho_B^2 + \frac{m_{\sigma}^2}{2g_{\sigma}^2} (m - m_*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (k^2 + m_s^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

$$P = \frac{g_{\omega}^2}{2m_{\omega}^2} \rho_B^2 - \frac{m_{\sigma}^2}{2g_{\sigma}^2} (m - m_*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{(k^2 + m_s^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.25)$$

As expressões (2.24) e (2.25) dão a equação de estado da matéria nuclear à temperatura zero em forma paramétrica: $\varepsilon(\rho_B)$ e $P(\rho_B)$.

A massa efetiva pode ser obtida minimizando $\varepsilon(m_*)$ com relação a m_* , ou usando (2.14) na equação de campo (2.7), o que conduz à relação de autoconsistência

$$m_* = m - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{m_*}{(k^2 + m_*^2)^{3/2}}, \quad (2.26)$$

cuja integral pode ser feita analiticamente resultando a equação transcendental

$$m_* = m - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma m_*}{4\pi^2} \left[k_F E_F - m_*^2 \ln \left(\frac{k_F + E_F}{m_*} \right) \right] \quad (2.27)$$

onde $E_F = (k_F^2 + m_*^2)^{1/2}$.

Examinando expansões a altas e baixas densidades da densidade de energia (2.24) verifica-se que o sistema é não-ligado, isto é, $E/B > m$. À densidades intermediárias o sistema satura se as constantes de acoplamento forem escolhidas apropriadamente, de maneira a garantir que a interação escalar atrativa predomine sobre a interação vetorial repulsiva. Usando as propriedades de equilíbrio da matéria nuclear da referência[24]

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{B} - m \right) &= -15.75 \text{ MeV} \\ k_F &= 1.42 \text{ fm}^{-1} \\ \gamma &= 4 \end{aligned} \quad (2.28)$$

as constantes de acoplamento que as reproduzem adequadamente são

$$C_\sigma^2 = g_\sigma^2 (m^2/m_\sigma^2) = 267.1 \quad (2.29.a)$$

$$C_\omega^2 = g_\omega^2 (m^2/m_\omega^2) = 195.9 \quad (2.29.b)$$

A figura 2.1 mostra a curva de saturação resultante desse procedimento e também inclui a predição para matéria de nêutrons, onde usa-se $\gamma = 2$.

Uma importante quantidade física presente nessa teoria de campo médio é a massa efetiva, que deriva da presença do campo escalar. A figura 2.2 mostra a razão m_*/m em função de k_F para matéria nuclear ($\gamma = 4$) e matéria de nêutrons ($\gamma = 2$). A escala da direita mostra os correspondentes valores do campo escalar condensado $g_\sigma \bar{\phi}$ responsável pela redução da massa livre. Para a densidade nuclear ordinária essa redução é bastante

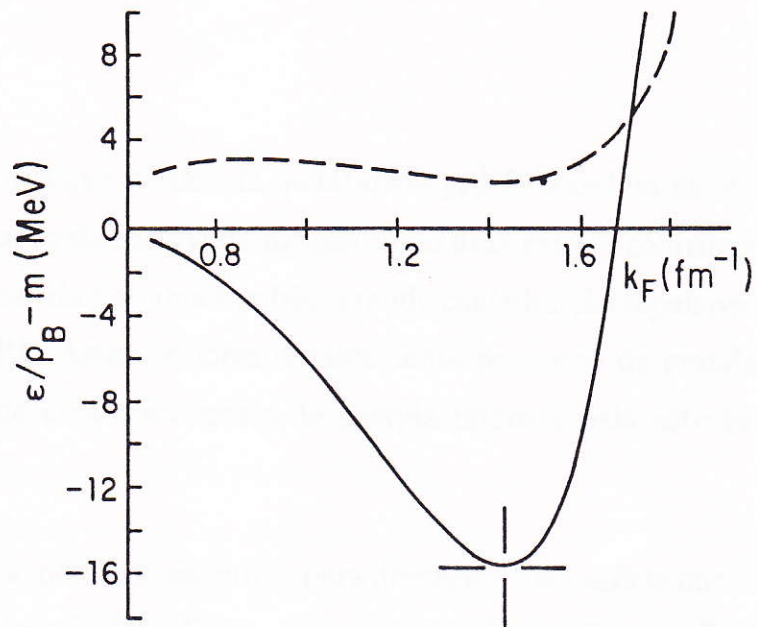


Figura 2.1: Curva de saturação para matéria nuclear (linha sólida) e matéria de nêutrons (linha tracejada) obtidas na HDQ-I através das equações (2.23) e (2.26). As constantes de acoplamento (2.29) são ajustadas pelo valor e posição do mínimo da curva para matéria nuclear. (Extraída de [7].)

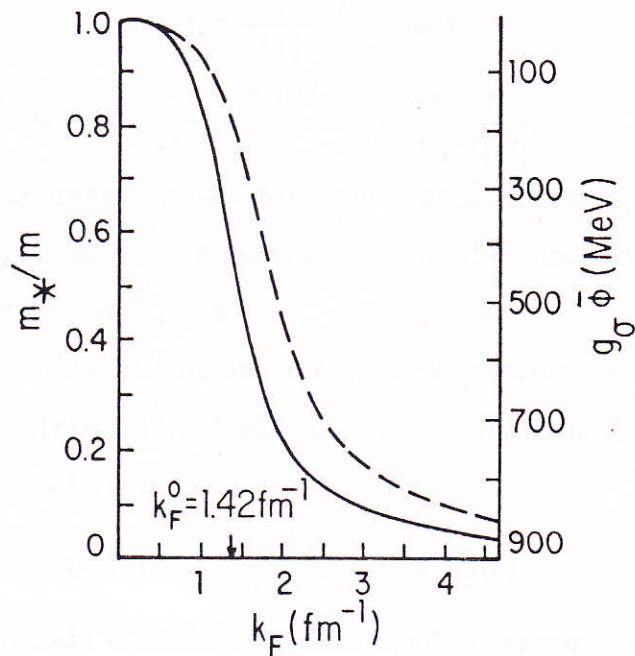


Figura 2.2: Massa efetiva em função da densidade para matéria nuclear (linha sólida) e matéria de nêutrons (linha tracejada). (Extraída de [7].)

significativa uma vez que o valor da quantidade $g_\sigma \bar{\phi}$ é da ordem de 400 MeV . Esse valor se reflete na obtenção da energia de ligação como uma grande contribuição atrativa que é parcialmente cancelada por uma também grande contribuição repulsiva do méson vetorial ($g_\omega \bar{V}_0 \cong 330 \text{ MeV}$). Assim, valores relativamente pequenos de grandezas nucleares são tratados dentro de uma nova escala de energia imposta pela estrutura de Lorentz da teoria.

Esse formalismo pode ser estendido para descrever a superfície nuclear e a distribuição de massa em núcleos finitos. Dentro da aproximação de Thomas-Fermi[25], os campos médios globalmente constantes são substituídos por campos que apresentam uma variação espacial esfericamente simétrica $\bar{\phi}(r)$ e $\bar{V}_0(r)$ sendo $r = |\vec{x}|$, porém suficientemente suave para permitir que os bárions " sintam " os campos localmente constantes em cada ponto. Nessa aproximação as densidades bariônica e escalar são determinadas a partir dos resultados da matéria nuclear, sendo calculadas em cada ponto através das equações:

$$\rho_B(r) = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F(r)} d^3k \quad (2.30)$$

$$\rho_S(r) = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F(r)} d^3k \frac{m_*(r)}{[k^2 + m_*^2(r)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.31)$$

sendo a função $k_F(r)$ determinada a partir da minimização da energia total.

Os campos mesônicos localmente constantes são obtidos inserindo essas fontes locais nas equações de movimento dos campos.

A interação spin-órbita de partícula única $\alpha_{SO}(r) \vec{S} \cdot \vec{L}$ para um núcleon que se move em campos escalar e vetorial $\bar{\phi}(r)$ e $\bar{V}_0(r)$, obtida através da redução de Foldy-Wouthuysen[21] da equação de Dirac, tem a forma

$$\alpha_{SO}(r) = \frac{1}{2m^2 r} \frac{d}{dr} [g_\sigma \bar{\phi}(r) + U_0(r)] \quad (2.32)$$

onde $U_0(r) = g_\omega \bar{V}_0(r)$ quando o modelo inclui somente o méson vetorial ω . (Para sistemas em que se faz necessário a inclusão do méson ρ neutro e do campo coulombiano,

acrescenta-se em $U_0(\mathbf{r})$ os termos correspondentes a esses campos; entretanto suas contribuições são pequenas comparadas às dos campos $\bar{\phi}(\mathbf{r})$ e $V_0(\mathbf{r})$. [26])

Observa-se que em (2.32), ao contrário do que acontece no cálculo da energia de ligação onde os grandes valores de $\bar{\phi}$ e V_0 tendem a se cancelar, ocorre a soma desses valores. É notável que a interação spin-órbita assim obtida possui a intensidade requerida para explicar os espectros de níveis de partícula única.

Excitações coletivas de núcleos finitos também podem ser tratadas no formalismo da HDQ-I permitindo-se aos campos mesônicos uma pequena dependência temporal além da espacial [27].

2.3 Hadrodinâmica Quântica II (HDQ - II)

Para generalizar os resultados de matéria nuclear à descrição de núcleos com número de nêutrons e de prótons diferentes ($N \neq Z$) o modelo deve incluir, além do campo coulombiano A_0 , o méson ρ neutro (ρ^0) cujo campo b_0 apresenta um valor esperado clássico estático no estado fundamental.

Considerando-se estados fundamentais de núcleos esfericamente simétricos com momentum angular total zero e com paridade e carga bem definidos a densidade Lagrangeana apropriada[28] é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{II} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 A_0 - (m - g_\sigma \bar{\phi})] \psi \\ & - \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \bar{\phi})^2 + m_\sigma^2 \bar{\phi}^2] + \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} V_0)^2 + m_\omega^2 V_0^2] \\ & + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} A_0)^2 + \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} b_0)^2 + m_\rho^2 b_0^2] \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde g_ρ e m_ρ denotam a constante de acoplamento e massa do méson ρ , respectivamente.

A ausência do pión em (2.33) e dos mésons ρ carregados deve-se ao fato de os valores esperados de campos pseudoescalares se anularem quando o estado fundamental tem paridade bem definida, o mesmo acontecendo com os valores esperados de campos carregados com relação a estados fundamentais com carga Z bem definida.

As equações de campo que seguem da densidade Lagrangeana (2.33) são

$$\{i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 V_0(r) - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0(r) + e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 A_0(r) - [m - g_\sigma \bar{\phi}(r)]\} \psi(x^\mu) = 0 \quad (2.34.a)$$

$$(\vec{\nabla}^2 - m_\sigma^2) \bar{\phi}(r) = -g_\sigma \rho_S(r) \quad (2.34.b)$$

$$(\vec{\nabla}^2 - m_\omega^2) V_0(r) = -g_\omega \rho_B(r) \quad (2.34.c)$$

$$(\vec{\nabla}^2 - m_\rho^2) b_0(r) = -\frac{1}{2} g_\rho \rho_S(r) \quad (2.34.d)$$

$$\vec{\nabla}^2 A_0 = -e \rho_P(r) = -e \frac{1}{2} [\rho_B(r) + \rho_S(r)] \quad (2.34.e)$$

onde $\rho_S = \langle \psi^\dagger \tau_3 \psi \rangle$.

A aplicação do modelo a cálculos de propriedades de núcleos finitos tem sido feita basicamente de duas maneiras: aproximação de Thomas-Fermi ou aproximação relativística de Hartree. Em ambas os campos mesônicos são tratados como campos clássicos estáticos. Na aproximação relativística de Hartree, as densidades bariônica e escalar são obtidas das funções de onda bariônicas que são soluções da equação de Dirac com os campos mesônicos espacialmente dependentes.

2.3.1 HDQ-II - Aproximação de Thomas-Fermi

Na aproximação de Thomas-Fermi as densidades bariônicas são dadas por

$$\rho_{B,S}(r) = \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\int_0^{k_{F,p}(r)} d^3k \pm \int_0^{k_{F,n}(r)} d^3k \right)$$

$$\rho_S(r) = \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\int_0^{k_{F,p}(r)} d^3k \frac{m_*(r)}{(k^2 + m_*^2(r))^{1/2}} + \int_0^{k_{F,n}(r)} d^3k \frac{m_*(r)}{(k^2 + m_*^2(r))^{1/2}} \right)$$

onde, na primeira equação, o sinal positivo refere-se à $\rho_B(r)$ e o negativo à $\rho_S(r)$. Os campos mesônicos são soluções das equações (2.34.b-d) com estas fontes.

Usando esse modelo B. Serot e J.D. Walecka [28] calcularam parâmetros da fórmula de massa e densidades de próton para os núcleos ^{40}Ca e ^{208}Pb . Nesse cálculo o conjunto de parâmetros C_σ^2 , C_ω^2 , $C_\rho^2 = g_\rho^2(m^2/m_\rho^2)$ e m_σ foram ajustados para reproduzir a energia de ligação nuclear (15.75 MeV) para um valor de k_F levemente menor ($k_F \simeq 1.325 \text{ fm}^{-1}$),

o qual é obtido da densidade central observada do ^{208}Pb , a correta razão Z/B no ^{208}Pb e a espessura superficial da densidade bariônica do ^{40}Ca . A comparação das densidades obtidas com as determinadas pelo espalhamento elástico de elétrons mostra que esse modelo simples de teoria relativística de campo médio descreve muito razoavelmente a densidade de carga e especialmente de uma forma bastante precisa a densidade interior do ^{208}Pb . Os autores também obtiveram o espectro de energia para um núcleon de valência em torno do núcleo ^{208}Pb resolvendo a equação (2.34.a) com os potenciais mesônicos de Thomas-Fermi. A comparação com resultados experimentais mostra que o modelo descreve a interação spin-órbita observada em núcleos. De maneira geral os níveis calculados e os experimentais apresentam boa concordância. A adequação do modelo na descrição da interação spin-órbita já havia sido apontada por R. Brockmann e W. Weise [29]. Esse sucesso dos potenciais de Thomas-Fermi na descrição de ambas propriedades de volume e de partícula-única representou mais um argumento a favor do uso de uma teoria relativística na descrição de núcleos finitos.

2.3.2 HDQ-II - Aproximação Relativística de Hartree

Nesta aproximação, as equações para os campos mesônicos clássicos são as mesmas que na aproximação de Thomas-Fermi. Na equação (2.34.a), embora o campo bariônico seja ainda um operador, os campos mesônicos são clássicos e, portanto, essa equação linear admite soluções de modo normal de forma $\psi(x^\mu) = \psi(\vec{x})e^{-iEt}$, o que permite escrever

$$h\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

onde h é o Hamiltoniano de Dirac de partícula única

$$h \equiv \left\{ -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + g_\omega V_0 + \frac{1}{2}g_\rho \tau_3 b_0 + e\frac{1}{2}(1 + \tau_3)A_0 + \beta(m - g_\sigma \bar{\phi}) \right\}$$

A exemplo da seção anterior obtém-se soluções de energia positiva e negativa $U(\vec{x})$ e $V(\vec{x})$ e o operador de campo pode ser expandido na representação de Schrödinger na

forma

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\alpha} [A_{\alpha} u_{\alpha}(\vec{x}) + B_{\alpha}^{\dagger} v_{\alpha}(\vec{x})]$$

onde A_{α}^{\dagger} e B_{α}^{\dagger} são interpretados como operadores criação para bárions e antibárions e satisfazem relações de comutação análogas as (2.17).

Utilizando coordenadas esféricas, as soluções de energia positiva são escritas na forma

$$u_{\alpha}(\vec{x}) = u_{n\chi mt}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} i[G_{n\chi t}(r)/r]\phi_{\chi m}\eta_t \\ [F_{n\chi t}(r)/r]\phi_{-\chi m}\eta_t \end{pmatrix}$$

onde χ e m indicam números quânticos angulares e t o de isospin.

Os termos de fonte nas equações (2.34.b-e) são calculados preenchendo as B órbitas de menor energia. Assim obtém-se um conjunto de equações de campo que contém toda informação sobre o estado fundamental do sistema nessa aproximação.

O cálculo da energia total do sistema resulta em

$$E = \sum_{n\chi t}^{\infty} E_{n\chi t}(2j_{\chi} + 1) - \frac{1}{2} \int d^3x [-g_{\sigma}\bar{\phi}(r)\rho_S(r) + g_{\omega}\bar{V}_0(r)\rho_B(r) + \frac{1}{2}g_{\rho}b_0(r)\rho_S(r) + eA_0(r)\rho_p(r)] \quad (2.35)$$

onde $j_{\chi} = |\chi| - 1/2$, é o número quântico de momentum angular de partícula única e a soma é sobre todas as órbitas ocupadas. A equação (2.35) basicamente estabelece que a energia do sistema é obtida somando-se todos os autovalores de partícula única e subtraindo-se metade da energia potencial que surge das interações com os campos mesônicos condensados.

Nesse modelo são tomados como fixos os valores experimentais $m = 939 \text{ MeV}$, $m_{\omega} = 783 \text{ MeV}$, $m_{\rho} = 770 \text{ MeV}$ e $\alpha^2/4\pi = 1/137.036$ e, como parâmetros, g_{σ} , g_{ω} , g_{ρ} e m_{σ} . Uma vez escolhido um valor para o número de onda de Fermi da matéria nuclear k_F^0 , as razões C_{σ}^2 e C_{ω}^2 (veja-se (2.29)) são fixadas para reproduzir a energia de ligação e a razão $C_{\rho}^2 = g_{\rho}^2(m^2/m_{\rho}^2)$ é ajustada para obter a energia de simetria de volume por bárion (35 MeV)[30], pois essas energias são bem definidas no limite de matéria nuclear

da fórmula semi-empírica de massa. Para um valor fixo de C_0^2 a massa m_σ , que em última análise está relacionada com a espessura da superfície de núcleos finitos[30], é ajustada para reproduzir o raio quadrático médio de carga do ^{40}Ca .

Na comparação com os dados experimentais emergem como importantes testes para a teoria os cálculos de densidades de carga e de níveis de energia nucleares[30]. Os primeiros são comparados com os valores experimentalmente bem determinados por espalhamento de elétrons e raio X de captura de múons e os últimos com resultados de reações $(p, 2p)$ e $(e, e'p)$. Para oxigênio, cálcio, zircônio e chumbo as densidades de carga calculadas apresentam boa concordância com os resultados experimentais[30]. A distribuição de níveis de energia obtidos nos cálculos de Hartree relativísticos reproduz corretamente, para o ^{40}Ca e o ^{208}Pb , o ordenamento de níveis, o espaçamento e as camadas fechadas do modelo de camadas nuclear. A interação spin-órbita também transparece no espectro e surge naturalmente nesse modelo em que a partícula de Dirac se move em grandes campos escalares e vetoriais.

2.3.3 Comentários

A extensão do modelo para incluir os mésons isovetoriais carregados π e ρ pode ser feita ainda mantendo a renormalizabilidade da teoria.

O méson π é introduzido através de um lagrangeano mínimo $\mathcal{L}_{\pi N}$ consistente com a fenomenologia das interações píon-núcleon a baixas energias. Quanto ao méson ρ , introduzindo-se um lagrangeano $\mathcal{L}_{\rho N}$ com um termo de acoplamento escrito em analogia ao do méson vetorial neutro em (2.1), resulta que o méson ρ não se acopla à corrente isovetorial conservada e a teoria torna-se não renormalizável. Esse problema é revertido quando se impõe a invariança de gauge local e o méson ρ é incluído usando uma teoria de gauge não-abeliana com quebra espontânea de simetria. A exigência de simetria local implica na presença de mésons vetoriais sem massa. A massa do méson ρ é gerada pelo mecanismo de Higgs[31] através da inclusão de campos escalares complexos com uma particular forma de auto-interação.

Sendo HDQ uma teoria quântica de campos relativística de acoplamento forte, tem havido preocupação em formular e investigar esquemas de aproximação adequados à teorias desse gênero[32,33]. Para isso métodos de integral de caminho[34] tem sido usados para discutir a expansão em loops da densidade de energia no modelo de Walecka. Resultados para correções de vácuo de um loop são semelhantes aos obtidos quando correções de troca (Hartree-Fock relativística) são incluídas na teoria de campo médio[32]. Já as contribuições de dois loops com parâmetros que reproduzem a saturação da matéria nuclear (a um loop) e valores de m_* que minimizem a energia (também a um loop), são muito grandes quando calculadas perturbativamente: a matéria nuclear satura a $k_F \simeq 2fm^{-1}$ com uma energia de ligação de 400 MeV/núcleon. Isso significa que correções de dois loops produzem grandes mudanças na descrição da matéria nuclear quando os parâmetros são mantidos fixos. Um reajuste dos parâmetros para reduzir as correções de vácuo de dois loops resulta em um potencial efetivo e curva de saturação que qualitativamente se aproximam dos resultados de um loop. Esses novos parâmetros entretanto implicam numa interação núcleon-núcleon diferente daquela a nível de um loop, o que parece indicar que esse tipo de expansão não é adequado para esse modelo de teoria quântica de campos, a menos que ocorram cancelamentos a ordens mais altas[32].

2.4 Teoria Relativística de Brueckner-Hartree-Fock

O modelo da HDQ apresentado nas seções anteriores se distingue da descrição tradicional da dinâmica nuclear pela presença de grandes potenciais escalar e vetorial responsáveis, o primeiro, pela drástica redução da massa nucleônica e, o segundo, por um significativo aumento na energia das soluções, impondo assim uma nova escala de energia para tratamento de sistemas nucleares. Tais potenciais reproduzem a magnitude da interação spin-órbita em núcleos finitos e a redução desses potenciais a um potencial central efetivo coerente com o tratamento não-relativístico usual (equação de Schrödinger) reencontra as características essenciais desse último. Certos parâmetros livres nesse modelo são

ajustados para reproduzir dados nucleares.

Entretanto, no início da presente década, um grupo de pesquisadores[20,35] propôs uma teoria relativística sem parâmetros ajustáveis, além dos introduzidos na reprodução dos dados de espalhamento núcleon-núcleon livre e propriedades do dêuteron. Essa teoria, intitulada teoria relativística de Brueckner- Hartree-Fock (RBHF), dá uma descrição excelente da densidade e da energia de saturação da matéria nuclear. Aliás, a dependência de densidade da interação efetiva núcleon-núcleon[36] também é explicada pelo mecanismo responsável pela propriedade de saturação nesse modelo. O objetivo principal é a formulação de uma teoria relativística de mésons e núcleons interagentes que inclui efeitos de correlação de dois corpos, que não são tratados adequadamente nas aproximações de campo médio, Hartree e Hartree-Fock. No modelo de Walecka tais efeitos são levados em conta implicitamente através do uso de constantes de acoplamento efetiva diferentes das determinadas pelo ajuste com dados de espalhamento.

No modelo RBHF o "spinor" do núcleon na matéria nuclear $f(\vec{p}, s)$ é a solução de energia $\varepsilon(p)$ positiva da equação :

$$[\gamma^0 \varepsilon(p) - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m - \Sigma(\vec{p})] f(\vec{p}, s) = 0 \quad (2.36)$$

onde Σ é a auto-energia do núcleon. As soluções $f(\vec{p}, s)$ obedecem a condição de normalização ²

$$f^\dagger(\vec{p}, s) f(\vec{p}, s) = E_p/m. \quad (2.37)$$

É conveniente definir o projetor

$$\rho_{\alpha\alpha'}(\vec{p}) = \frac{m}{E_p} \sum_s f_\alpha(\vec{p}, s) \bar{f}_{\alpha'}(\vec{p}, s) \quad (2.38)$$

onde α é o índice de Dirac usual.

Correlações de dois corpos estão incorporadas na teoria pelo uso da matriz de reação \hat{M} , em termos da qual a auto-energia é dada pela expressão

$$\Sigma_{\alpha\alpha'}(\vec{p}_1) = \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \hat{M}(1 - \hat{P}_{12}) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_{\alpha\beta, \alpha'\beta'} \rho_{\beta\beta'}(\vec{p}_2) \Theta(k_F - p_2) \quad (2.39)$$

²Nesta seção, a energia relativística E_p é calculada usando a massa livre m , $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$.

onde \hat{P}_{12} é o operador de troca de dois núcleons. A matriz de reação é a solução da equação de Bethe-Goldstone

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \hat{M} | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle &= \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \hat{U} | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle \\ &+ \int \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^6} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \hat{U} | \vec{p}_3 \vec{p}_4 \rangle g^{++}(\vec{p}_3 \vec{p}_4; \varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2)) \langle \vec{p}_3, \vec{p}_4 | \hat{M} | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Os símbolos que aparecem nesta equação representam matrizes cujos elementos são especificados por dois pares de índices de Dirac, referentes às partículas 1 e 2 respectivamente. Estes índices estão indicados em (2.39) mas suprimidos em (2.40) para simplificar a notação. O termo gerador \hat{U} é fornecido por um modelo de troca de um bóson, incluindo vários tipos de mésons. O propagador g^{++} é dado por

$$g^{++}(\vec{p}_3, \vec{p}_4; \varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2))_{\alpha\beta, \alpha'\beta'} = \frac{\Theta(p_3 - k_F)\Theta(p_4 - k_F)}{\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2) - \varepsilon(p_3) - \varepsilon(p_4)} \rho_{\alpha\alpha'}(\vec{p}_3) \rho_{\beta\beta'}(\vec{p}_4). \quad (2.41)$$

Note-se que este propagador contém projetores sobre estados de energia maior do que a energia de Fermi, para ambos os núcleons.

O sistema de equações acima constitui uma aproximação autoconsistente para o spinor $f(\vec{p}, s)$ e a energia $\varepsilon(p)$, uma vez que a matriz de reação e a auto-energia são funcionais destas quantidades. A solução completa deste problema representa uma tarefa computacional formidável. Por isto, os primeiros trabalhos realizados nesta linha de pesquisa abriram mão da autoconsistência, substituindo $f(\vec{p}, s)$ pelo spinor livre, $u(\vec{p}, s)$, nas equações (2.38) – (2.41). Consideremos brevemente as características da auto-energia nesta aproximação. É conveniente escolher o eixo de quantização do spin paralelo ao momentum \vec{p} . Com esta escolha os elementos de matriz do operador auto-energia na base dos spinores livres $u(\vec{p}, s)$ e $w(\vec{p}, s) = v(-\vec{p}, -s)$ tomam a forma

$$\Sigma_{ss'}^{++}(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}, s)\Sigma(\vec{p})u(\vec{p}, s') = \delta_{ss'}\Sigma^{++}(p) \quad (2.42.a)$$

$$\Sigma_{ss'}^{-+}(\vec{p}) = \bar{w}(\vec{p}, s)\Sigma(\vec{p})u(\vec{p}, s') = \delta_{ss'}(-1)^{1/2-s}\Sigma^{-+}(p) \quad (2.42.b)$$

$$\Sigma_{ss'}^{+-}(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}, s)\Sigma(\vec{p})w(\vec{p}, s') = \delta_{ss'}(-1)^{1/2-s}\Sigma^{+-}(p) \quad (2.42.c)$$

$$\Sigma_{ss'}^{--}(\vec{p}) = \bar{w}(\vec{p}, s)\Sigma(\vec{p})w(\vec{p}, s') = \delta_{ss'}\Sigma^{--}(p) \quad (2.42.d)$$

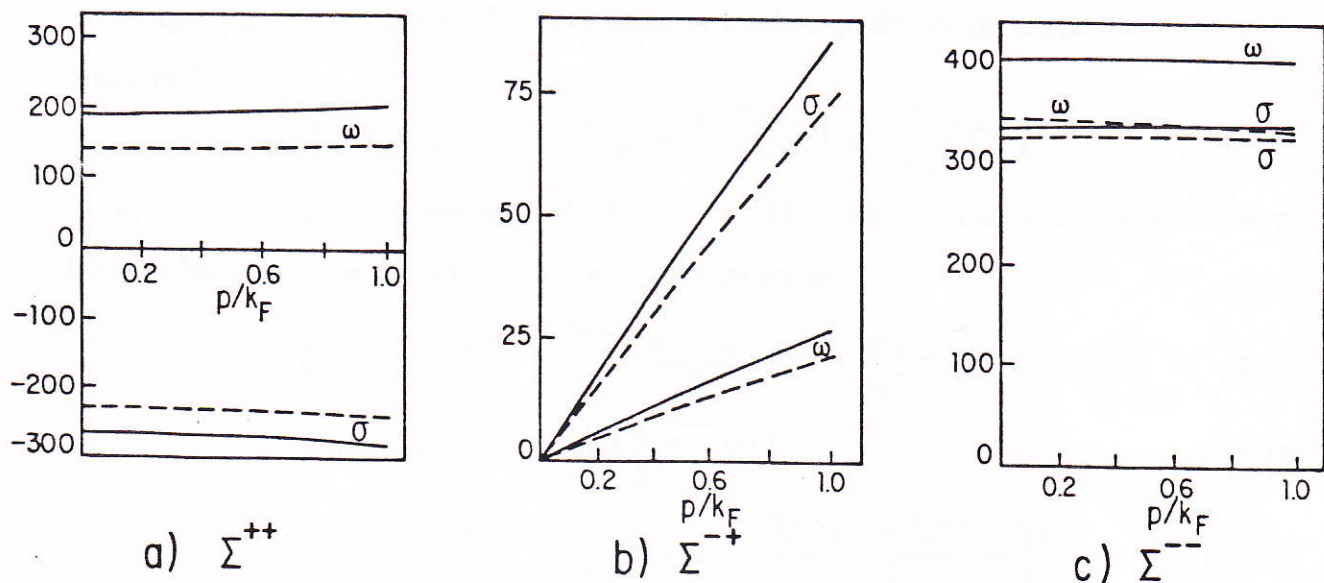


Figura 2.3: Contribuições para a) Σ^{++} , b) Σ^{-+} e c) Σ^{--} em função de p/k_F ($k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$) devido a troca de mésons σ e ω para o potencial HM2. As linhas sólidas correspondem a aproximação de Hartree-Fock e as tracejadas mostram os resultados com correlações incluídas.

Pode-se verificar que $\Sigma^{-+}(p) = \Sigma^{+-}(p)$. Os resultados obtidos para as quantidades Σ^{++} , Σ^{-+} e Σ^{--} considerando-se potenciais de troca de um bóson do tipo discutido em [37] (HM2) são mostrados nas figuras 2.3.a-c, onde a aproximação de Hartree-Fock que consiste em aproximar \hat{M} por \hat{U} , é representada por linhas sólidas e as tracejadas correspondem aos resultados que incluem efeitos de correlação. Essas figuras, que mostram contribuições para Σ^{++} , Σ^{-+} e Σ^{--} em função de p/k_F ($k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$) devido somente à troca de mésons σ e ω , foram adaptadas de [35]. No referido trabalho além das contribuições devidas a outros mésons (π , ρ , ϕ , δ) também são mostrados resultados para outro potencial de troca de um bóson HEA[38]. Note-se que as quantidades Σ^{++} e Σ^{--} são aproximadamente independentes do momentum p , mesmo com correlações incluídas.

É interessante observar também que os efeitos da troca dos mésons σ e ω são de sinais opostos em Σ^{++} e de mesmo sinal em Σ^{--} .

A auto-energia de um núcleon na matéria nuclear pode ser decomposta da seguinte maneira ³

$$\Sigma(\vec{p}) = \Sigma^S(p) + \gamma^0 \Sigma^0(p) + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{m} \Sigma^V(p) + \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{m} \Sigma^T(p), \quad (2.43)$$

O termo tensorial Σ^T é desprezível. Usando (2.42) e as propriedades dos spinores de Dirac, obtém-se após algumas manipulações algébricas

$$\Sigma^S(p) = \left(\frac{m}{E_p}\right)^2 \left[\frac{\Sigma^{++}(p) - \Sigma^{--}(p)}{2} - \frac{p}{m} \Sigma^{-+}(p) \right] \quad (2.44)$$

$$\Sigma^0(p) = \frac{m}{E_p} \left[\frac{\Sigma^{++}(p) + \Sigma^{--}(p)}{2} \right] \quad (2.45)$$

$$\Sigma^V(p) = \left(\frac{m}{E_p}\right)^2 \left[\frac{m}{p} \Sigma^{-+}(p) + \left(\frac{\Sigma^{++}(p) - \Sigma^{--}(p)}{2} \right) \right]. \quad (2.46)$$

A figura 2.4, extraída de [35], mostra Σ^S , Σ^0 e Σ^V em função de p/k_F ($k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$) para o potencial HM2 com trocas de outros mésons (além de σ e ω) incluídas. Note-se que essas quantidades são aproximadamente independentes do momentum p e que $\Sigma^S(p)$ e $\Sigma^0(p)$ assumem valores grandes e de sinais opostos, enquanto $\Sigma^V(p)$ é pequeno. A figura também nos permite avaliar a importância dos efeitos de correlação sobre as componentes da auto-energia e mostra que a influência é maior em $\Sigma^0(p)$. Porém, mesmo na presença de correlações, as características apontadas acima permanecem. Isto indica que os efeitos das correlações e do termo de Fock podem ser aproximadamente levados em conta pelo ajuste dos parâmetros utilizados na aproximação de Hartree, na qual $\Sigma^V = 0$ e Σ^S , Σ^0 são grandes, constantes e de sinais opostos [vide eq. (2.14)]. Este é o procedimento utilizado nos modelos HDQ I e II.

Mais recentemente, resultados[39] obtidos pela resolução completa do sistema de equações (2.36)-(2.41) demonstraram que a teoria RBHF é capaz de explicar as pro-

³Utilizamos aqui as notações da ref.[35]; as definições de Σ^V e Σ^T diferem por um fator $-p/m$ daquelas utilizadas adiante, vide eq.(3.106).

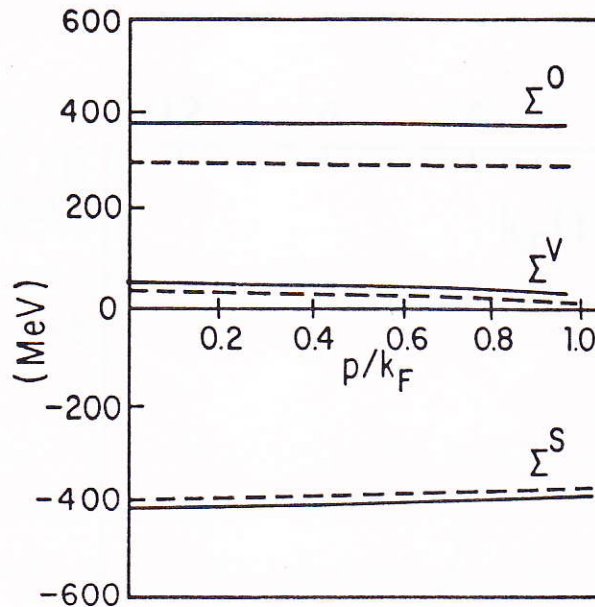


Figura 2.4: As quantidades Σ^S , Σ^0 e Σ^V (eqs. (2.44) – (2.46)) em função de p/k_F ($k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$) para o potencial HM2. As linhas sólidas correspondem a aproximação de Hartree-Fock e as tracejadas mostram os resultados com correlações incluídas.

priedades de saturação da matéria nuclear. A energia por partícula é dada por

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\rho_B} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m + \frac{1}{2}\Sigma(\vec{p})] \rho(\vec{p}) \Theta(k_F - p) \quad (2.47)$$

Como mostra a figura 2.5, é possível construir um modelo de troca de um bóson que reproduz simultaneamente os dados de espalhamento núcleon-núcleon e a energia e densidade de saturação da matéria nuclear calculadas na teoria RBHF. A figura ilustra também a importância de um tratamento completamente autoconsistente.

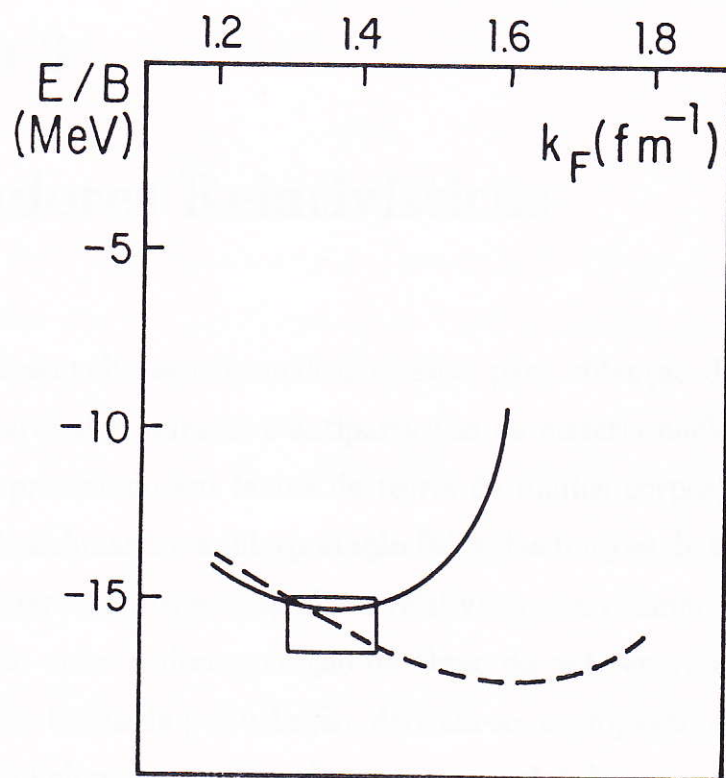


Figura 2.5: Energia de ligação por núcleon como função do momentum de Fermi k_F . A linha tracejada é obtida usando como função de onda espinores de onda plana; a linha sólida corresponde ao uso de funções de onda espinoriais determinadas autoconsistentemente. O retângulo indica os valores empíricos para E/B . (Extraída de [39].)

Capítulo 3

Propagadores Relativísticos

Nesse capítulo desenvolve-se o formalismo básico para obtenção de propagadores relativísticos para partículas, buracos e antipartículas na matéria nuclear de forma análoga ao tratamento apresentado em textos de teoria de muitos corpos[24]. Discutem-se as representações de Lehmann e a interpretação física das funções de Green e aplica-se este formalismo à construção dos propagadores relativísticos no campo médio. Apresenta-se também a relação entre a decomposição de Dirac da auto-energia e do propagador e, finalmente, usando teoria de perturbação, derivam-se os propagadores, tempos de vida e representações de Lehmann aproximados para partículas, buracos e antipartículas.

3.1 Expansão dos operadores de campo fermiônico em termos de soluções das equações de campo médio - Operadores criação para partículas, buracos e antipartículas

Na seção 2.2 a solução geral da equação de Dirac para o campo bariônico no campo médio foi escrita como uma superposição das soluções correspondentes às frequências positivas e negativas. Conseqüentemente, na representação de Schrödinger, o operador campo fermiônico pode ser expandido na forma

$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \sum_s \int d^3k [b_s(\vec{k})U_{\vec{k}s}(\vec{x}) + d_s^\dagger(\vec{k})V_{\vec{k}s}(\vec{x})] \quad (3.1)$$

com $U_{\vec{k}_s}(\vec{x})$ e $V_{\vec{k}_s}(\vec{x})$ definidos em (2.16).

Através de uma transformação canônica para partículas ($k > k_F$) e buracos ($k < k_F$) a amplitude de modo normal $b_s(\vec{k})$, que em (3.1) desempenha o papel de operador destruição de partículas, pode ser redefinida como

$$b_s(\vec{k}) = \begin{cases} b_s(\vec{k}) & k > k_F \\ c_{-s}^\dagger(-\vec{k}) & k < k_F \end{cases} \quad (3.2)$$

Note-se que (3.2) preserva as regras de comutação (2.17) e $c_s^\dagger(\vec{k})$ pode ser interpretado como um operador que cria um buraco de momentum \vec{k} e projeção de spin s .

Introduzindo essa transformação em (3.1) obtém-se

$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \sum_s \int d^3k [\theta(k - k_F) b_s(\vec{k}) U_{\vec{k}_s}(\vec{x}) + \theta(k_F - k) c_s^\dagger(\vec{k}) U_{-\vec{k}_s}(\vec{x}) + d_s^\dagger(\vec{k}) V_{\vec{k}_s}(\vec{x})] \quad (3.3)$$

A equação acima pode ser escrita na representação de Heisenberg, que concentra toda dependência temporal nos operadores:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_s \int d^3k [\theta(k - k_F) b_s(\vec{k}, t) U_{\vec{k}_s}(\vec{x}) + \theta(k_F - k) c_s^\dagger(\vec{k}, t) U_{-\vec{k}_s}(\vec{x}) + d_s^\dagger(\vec{k}, t) V_{\vec{k}_s}(\vec{x})], \quad (3.4)$$

com

$$b_s(\vec{k}, t) = e^{iHt} b_s(\vec{k}) e^{-iHt} \quad (3.5.a)$$

$$c_s(\vec{k}, t) = e^{iHt} c_s(\vec{k}) e^{-iHt} \quad (3.5.b)$$

$$d_s(\vec{k}, t) = e^{iHt} d_s(\vec{k}) e^{-iHt} \quad (3.5.c)$$

onde H é o hamiltoniano total do sistema.

No modelo de Walecka, o hamiltoniano H é independente do tempo e pode ser escrito como a soma de dois termos

$$H = H_0 + H_I,$$

onde H_0 é o hamiltoniano não interagente que incluindo os campos médios tem a forma (ver (2.22)):

$$\begin{aligned}
H_0 &= \sum_{\vec{s}} \int d^3k [\theta(k - k_F)(E_k + g_w V_0) b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k}) \\
&\quad - \theta(k_F - k)(E_k + g_w V_0) c_s^\dagger(\vec{k}) c_s(\vec{k}) + (E_k - g_w V_0) d_s^\dagger(\vec{k}) d_s(\vec{k})] \\
&\quad + (\text{parte mesônica}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto o operador campo fermiônico na representação de interação é

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}^I(\vec{x}, t) &= e^{iH_0 t} \hat{\psi}(\vec{x}) e^{-iH_0 t} \\
&= \sum_{\vec{s}} \int d^3k [\theta(k - k_F) b_s^I(\vec{k}, t) U_{\vec{k}_s}(\vec{x}) + \theta(k_F - k) c_s^{I\dagger}(\vec{k}, t) U_{-\vec{k}-s}(\vec{x}) \\
&\quad + d_s^{I\dagger}(\vec{k}, t) V_{\vec{k}_s}(\vec{x})]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

com

$$b_s^I(\vec{k}, t) = e^{iH_0 t} b_s(\vec{k}) e^{-iH_0 t} \tag{3.8.a}$$

$$c_s^I(\vec{k}, t) = e^{iH_0 t} c_s(\vec{k}) e^{-iH_0 t} \tag{3.8.b}$$

$$d_s^I(\vec{k}, t) = e^{iH_0 t} d_s(\vec{k}) e^{-iH_0 t}. \tag{3.8.c}$$

Usando (2.13) e inserindo (3.6) em (3.8) obtém-se:

$$b_s^I(\vec{k}, t) = b_s^I(\vec{k}) e^{-ie^{(+)}t} \tag{3.9.a}$$

$$c_s^I(\vec{k}, t) = c_s^I(\vec{k}) e^{ie^{(+)}t} \tag{3.9.b}$$

$$d_s^I(\vec{k}, t) = d_s^I(\vec{k}) e^{ie^{(-)}t}, \tag{3.9.c}$$

que nos permite reescrever (3.7) na forma

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}^I(\vec{x}, t) &= \sum_{\vec{s}} \int d^3k [\theta(k - k_F) b_s(\vec{k}) U_{\vec{k}_s}(\vec{x}, t) + \theta(k_F - k) c_s^\dagger(\vec{k}) U_{-\vec{k}-s}(\vec{x}, t) \\
&\quad + d_s^\dagger(\vec{k}) V_{\vec{k}_s}(\vec{x}, t)]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde

$$U_{\vec{k}_s}(\vec{x}, t) = U_{\vec{k}_s}(\vec{x}) e^{-ie^{(+)}t} \tag{3.11.a}$$

$$V_{\vec{k}_s}(\vec{x}, t) = V_{\vec{k}_s}(\vec{x}) e^{-ie^{(-)}t} \tag{3.11.b}$$

3.2 Propagadores e anticomutadores a tempos iguais

A função de Green de partícula única, também chamada propagador de Feynman, é definida pela equação

$$iG_{\alpha\beta}(\vec{x}t', \vec{x}t) = \langle 0 | T[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t')\hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)] | 0 \rangle \quad (3.12)$$

onde $|0\rangle$ é o estado fundamental de Heisenberg do sistema interagente e os operadores de campo que exibem dependência temporal estão na representação de Heisenberg.

Em (3.12) o "produto T" representa

$$T[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t')\hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)] = \begin{cases} \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t')\hat{\psi}_\beta(\vec{x}t) & t' > t \\ -\hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t') & t > t' \end{cases}$$

onde o sinal menos, como usual, se deve ao fato que os operadores de campo são fermiônicos.

É conveniente definir os propagadores "retardado" e "avanzado", respectivamente:

$$iG_{\alpha\beta}^R(\vec{x}t', \vec{x}t) = \langle 0 | \{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t'), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)\} | 0 \rangle \theta(t' - t) \quad (3.13)$$

$$iG_{\alpha\beta}^A(\vec{x}t', \vec{x}t) = -\langle 0 | \{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t'), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)\} | 0 \rangle \theta(t - t') \quad (3.14)$$

e o anticomutador

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(\vec{x}t', \vec{x}t) &= \langle 0 | \{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t'), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t'), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}t)\} | 0 \rangle \gamma_{\delta\beta}^0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que para tempos iguais é simplesmente

$$\Delta_{\alpha\beta}(\vec{x}t, \vec{x}t) = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x}' - \vec{x}). \quad (3.16)$$

As definições (3.12)-(3.16) podem ser escritas em uma forma genérica:

$$iM_{\alpha\beta}(\vec{x}t', \vec{x}t) = \langle 0 | \Pi[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}t'), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}t)] | 0 \rangle \quad (3.17)$$

onde Π indica ou o produto T ou o anticomutador.

Multiplicando $iM_{\alpha\beta}(\vec{x}'t', \vec{x}t)$ pela direita por $U_{\vec{k}_s}(\vec{x})$ e pela esquerda por $U_{\vec{k}'_s}(\vec{x}')$, integrando sobre \vec{x} e \vec{x}' e usando as relações de ortogonalidade (2.21), obtém-se para o elemento de matriz associado ao propagador de partículas

$$\langle 0 | \Pi[b_{s'}(\vec{k}'t')b_s^\dagger(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \int d^3x d^3x' U_{\vec{k}'_s}^\dagger(\vec{x}') iM(\vec{x}'t', \vec{x}t) \gamma^0 U_{\vec{k}_s}(\vec{x}) \quad k, k' > k_F \quad (3.18.a)$$

Correspondentemente, para buracos e antipartículas obtém-se

$$\langle 0 | \Pi[c_s^\dagger(\vec{k}'t')c_{s'}(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \int d^3x d^3x' U_{-\vec{k}'_s}^\dagger(\vec{x}') iM(\vec{x}'t', \vec{x}t) \gamma^0 U_{-\vec{k}_s}(\vec{x}) \quad k, k' < k_F \quad (3.18.b)$$

$$\langle 0 | \Pi[d_s^\dagger(\vec{k}'t')d_{s'}(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \int d^3x d^3x' V_{\vec{k}'_s}^\dagger(\vec{x}') iM(\vec{x}'t', \vec{x}t) \gamma^0 V_{\vec{k}_s}(\vec{x}) \quad (3.18.c)$$

Para um sistema invariante sob translação espacial e temporal tem-se

$$M(\vec{x}'t', \vec{x}t) = M(\vec{x}' - \vec{x}, t' - t) \quad (3.19)$$

Usando essa propriedade e as expressões (2.16) as integrais sobre \vec{x} e \vec{x}' podem ser realizadas em cada termo de (3.18). Assim,

a) se $k' > k_F$ e $k > k_F$

$$\langle 0 | \Pi[b_{s'}(\vec{k}'t')b_s^\dagger(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m_s}{\sqrt{E_{k'}E_k}} \int d^3x d^3x' e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{x}')} u^\dagger(\vec{k}'s') iM(\vec{x}' - \vec{x}, t' - t) \gamma^0 u(\vec{k}s).$$

Fazendo a mudança de variáveis $\vec{y} = \vec{x}' - \vec{x}$ e definindo a transformada de Fourier

$$M(\vec{k}, t' - t) = \int d^3y e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} M(\vec{y}, t' - t) \quad (3.20)$$

e, portanto,

$$M(\vec{y}, t' - t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} M(\vec{k}, t' - t) \quad (3.21)$$

obtém-se

$$\langle 0 | \Pi[b_{s'}(\vec{k}'t')b_s^\dagger(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \frac{m_s}{E_k} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) u^\dagger(\vec{k}, s') iM(\vec{k}, t' - t) \gamma^0 u(\vec{k}, s). \quad (3.22)$$

Procedendo de forma análoga com os outros termos segue que:

b) se $k' < k_F$ e $k < k_F$

$$\langle 0 | \Pi [c_s^\dagger(\vec{k}'t') c_s(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \frac{m_s}{E_k} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) u^\dagger(-\vec{k} - s') iM(-\vec{k}, t' - t) \gamma^0 u(-\vec{k} - s), \quad (3.23)$$

c) se k e k' são arbitrários

$$\langle 0 | \Pi [d_s^\dagger(\vec{k}'t') d_s(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \frac{m_s}{E_k} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) v^\dagger(\vec{k}s') iM(-\vec{k}, t' - t) \gamma^0 v(\vec{k}s). \quad (3.24)$$

Se o hamiltoniano e o estado fundamental do sistema são invariantes sob rotações e inversões espaciais, as quantidades definidas por (3.12) – (3.15) devem ser da forma

$$M(\vec{k}, t' - t) = M_S(k, t' - t) + \gamma^0 M_0(k, t' - t) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} M_V(k, t' - t) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} M_T(k, t' - t). \quad (3.25)$$

Para expressar (3.22) – (3.24) em termos de M_S , M_0 , M_V e M_T lança-se mão das propriedades dos "spinors" de Dirac

$$(\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_s) u(\vec{k}s) = 0 \quad (3.26)$$

$$(\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_s) v(\vec{k}s) = 0 \quad (3.27)$$

$$\bar{u}(\vec{k}s') u(\vec{k}s) = -\bar{v}(\vec{k}s') v(\vec{k}s) = \delta_{s's} \quad (3.28)$$

$$u^\dagger(\vec{k}s') u(\vec{k}s) = v^\dagger(\vec{k}s') v(\vec{k}s) = \delta_{s's} \frac{E_k}{m_s} \quad (3.29)$$

e, depois de algumas manipulações, obtem-se

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle 0 | \Pi [b_{s'}(\vec{k}'t') b_s^\dagger(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \\ i\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \frac{m_s M_S(k, t' - t) + E_k M_0(k, t' - t) + k M_V(k, t' - t)}{E_k} \quad k > k_F \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \langle 0 | \Pi [c_s^\dagger(\vec{k}'t') c_s(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \\ i\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \frac{m_s M_S(k, t' - t) + E_k M_0(k, t' - t) + k M_V(k, t' - t)}{E_k} \quad k < k_F \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \langle 0 | \Pi [d_s^\dagger(\vec{k}'t') d_s(\vec{k}t)] | 0 \rangle = \\ -i\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \frac{m_s M_S(k, t' - t) - E_k M_0(k, t' - t) + k M_V(k, t' - t)}{E_k}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Usando a definição de propagador de Feynman (3.12), as quantidades (3.30) – (3.32) podem ser escritas respectivamente na forma:

$$\langle 0 | T[b_{s'}(\vec{k}'t')b_s^\dagger(\vec{k}t)] | 0 \rangle = i\delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's}g_{(p)}(k, t' - t) \quad (3.33.a)$$

com

$$g_{(p)}(k, t' - t) = \frac{m_s G_S(k, t' - t) + E_k G_0(k, t' - t) + k G_V(k, t' - t)}{E_k} \quad k > k_F \quad (3.33.b)$$

$$\langle 0 | T[c_s^\dagger(\vec{k}'t')c_{s'}(\vec{k}t)] | 0 \rangle = -i\delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's}g_{(b)}(k, t' - t) \quad (3.34.a)$$

com

$$g_{(b)}(k, t' - t) = -\frac{m_s G_S(k, t' - t) + E_k G_0(k, t' - t) + k G_V(k, t' - t)}{E_k} \quad k < k_F \quad (3.34.b)$$

$$\langle 0 | T[d_s^\dagger(\vec{k}'t')d_{s'}(\vec{k}t)] | 0 \rangle = -i\delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's}g_{(a)}(k, t' - t) \quad (3.35.a)$$

com

$$g_{(a)}(k, t' - t) = \frac{m_s G_S(k, t' - t) - E_k G_0(k, t' - t) + k G_V(k, t' - t)}{E_k} \quad (3.35.b)$$

Expressões análogas podem ser escritas envolvendo as definições de propagadores retardado e avançado, (3.13) e (3.14) respectivamente. (Nesse caso Π é interpretado como o anticomutador a tempos diferentes e é acompanhado pela função θ apropriada.)

3.3 Representações de Lehmann

Considere-se $|n\vec{p}\rangle$ um conjunto completo de auto-estados do operador hamiltoniano \hat{H} e do operador momentum $\hat{\vec{p}}$ na representação de Heisenberg:

$$\hat{H} |n\vec{p}\rangle = E_{n\vec{p}} |n\vec{p}\rangle \quad (3.36.a)$$

$$\hat{\vec{p}} |n\vec{p}\rangle = \vec{p} |n\vec{p}\rangle. \quad (3.36.b)$$

Inserindo a relação de completicidade $\sum_{n\vec{p}} |n\vec{p}\rangle\langle n\vec{p}| = 1$ em (3.12), substituindo o operador campo fermiônico em qualquer ponto do espaço e tempo por

$$\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}'t') = e^{i(Rt' - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{x}')} \hat{\psi}_\alpha(0) e^{-i(Rt' - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{x}')}.$$

obtem-se para o propagador de Feynman

$$\begin{aligned}
 iG_{\alpha\beta}(\vec{x}'t', \vec{x}t) = & \\
 & \sum_{n\vec{p}} [\theta(t' - t) e^{-i(E_{n\vec{p}} - E_0)(t' - t)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(0) | n\vec{p} \rangle \langle n\vec{p} | \hat{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle \\
 & - \theta(t - t') e^{i(E_{n\vec{p}} - E_0)(t' - t)} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \langle 0 | \hat{\psi}_\beta(0) | n\vec{p} \rangle \langle n\vec{p} | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle]. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

A transformada de Fourier de (3.37) é definida por

$$iG_{\alpha\beta}(\vec{k}\omega) = \int d^3(x' - x) \int d(t' - t) e^{i\omega(t' - t)} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} iG_{\alpha\beta}(\vec{x}'t', \vec{x}t). \quad (3.38)$$

Usando a normalização em uma caixa

$$\int d^3x e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{x}} = V \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}$$

e realizando as integrais temporais

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} e^{-i(E_{n\vec{p}} - E_0)\tau} \theta(\tau) &= \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - E_{n\vec{p}} + E_0)\tau} = \\
 \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega + i\eta - E_{n\vec{p}} + E_0)\tau} &= \frac{i}{\omega - E_{n\vec{p}} + E_0 + i\eta}
 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} e^{i(E_{n\vec{p}} - E_0)\tau} \theta(-\tau) = \frac{-i}{\omega + E_{n\vec{p}} - E_0 - i\eta},$$

(3.38) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta}(\vec{k}\omega) = & V \sum_n \left[\frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle}{\omega - (E_{n\vec{k}} - E_0) + i\eta} \right. \\
 & \left. + \frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\beta(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle}{\omega + (E_{n-\vec{k}} - E_0) - i\eta} \right] \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

O operador número bariônico é dado por

$$\hat{B} = \int d^3x : \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x}) : = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x}) + \text{um número } C \quad (3.40)$$

onde os dois pontos significam ordenamento normal do produto de operadores de campo. Das relações de anticomutação obedecidas pelos operadores de campo é fácil mostrar que

$$\hat{B}\hat{\psi}_\alpha(\vec{y}) = \hat{\psi}_\alpha(\vec{y})(\hat{B} - 1) \quad (3.41.a)$$

e, similarmente,

$$\hat{B}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(\vec{y}) = \hat{\bar{\psi}}_\alpha(\vec{y})(\hat{B} + 1) \quad (3.41.b)$$

o que permite afirmar que se o número bariônico de $|0\rangle$ é N , o primeiro termo de (3.39) é a soma sobre estados de número bariônico $N + 1$ e o segundo termo é a soma sobre estados de número bariônico $N - 1$. Os denominadores de (3.39) podem ser reescritos convenientemente. No primeiro termo tem-se

$$\begin{aligned} \omega - [E_{n\vec{k}}(N + 1) - E_0(N)] &= \omega - [E_{n\vec{k}}(N + 1) - E_0(N + 1)] - [E_0(N + 1) - E_0(N)] \\ &= \omega - \varepsilon_{n\vec{k}}(N + 1) - \mu(N) \end{aligned} \quad (3.42.a)$$

onde $\varepsilon_{n\vec{k}}(N + 1)$ é a energia de excitação do estado n do sistema com número bariônico $N + 1$ e momentum \vec{k} e

$$\mu(N) \equiv E_0(N + 1) - E_0(N). \quad (3.42.b)$$

Com semelhantes definições os denominadores do segundo termo são

$$\omega + [E_{n\vec{k}}(N - 1) - E_0(N)] = \omega + \varepsilon_{n\vec{k}}(N - 1) - \mu(N - 1) \quad (3.43)$$

No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) espera-se

$$\mu(N) = \mu(N - 1) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Usando as relações (3.42) e (3.43) em (3.39) obtém-se

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\vec{k}\omega) &= V \sum_n \left[\frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\bar{\psi}}_\beta(0) | 0 \rangle}{\omega - \mu - \varepsilon_{n\vec{k}}(N + 1) + i\eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_\beta(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle}{\omega - \mu + \varepsilon_{n-\vec{k}}(N - 1) - i\eta} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Procedendo da mesma maneira obtém-se para as funções de Green retardada e avançada, respectivamente,

$$G_{\alpha\beta}^R(\vec{k}\omega) = V \sum_n \left[\frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle}{\omega - \mu - \varepsilon_{n\vec{k}}(N+1) + i\eta} + \frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\beta(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle}{\omega - \mu + \varepsilon_{n-\vec{k}}(N-1) + i\eta} \right] \quad (3.45)$$

$$G_{\alpha\beta}^A(\vec{k}\omega) = V \sum_n \left[\frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle}{\omega - \mu - \varepsilon_{n\vec{k}}(N+1) - i\eta} + \frac{\langle 0 | \hat{\psi}_\beta(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle}{\omega - \mu + \varepsilon_{n-\vec{k}}(N-1) - i\eta} \right] \quad (3.46)$$

Algumas propriedades importantes podem ser observadas diretamente em (3.45) e (3.46):

$$G^R(\vec{k}\omega) \text{ é analítica para } \text{Im } \omega > 0 \quad (3.47)$$

$$G^A(\vec{k}\omega) \text{ é analítica para } \text{Im } \omega < 0 \quad (3.48)$$

$$[G^R(\vec{k}\omega)\gamma^0]_{\alpha\beta}^* = [G^A(\vec{k}\omega)\gamma^0]_{\beta\alpha} \text{ para } \omega \text{ real} \quad (3.49)$$

e, uma vez que todos os $\varepsilon_{n\vec{k}}$ são positivos,

$$G^R(\vec{k}\omega) = G(\vec{k}\omega) \text{ para } \omega \text{ real } > \mu \quad (3.50)$$

$$G^A(\vec{k}\omega) = G(\vec{k}\omega) \text{ para } \omega \text{ real } < \mu \quad (3.51)$$

A partir da definição do anticomutador de operadores de campo a tempos iguais, tomando a transformada de Fourier e usando $\Delta_{\alpha\beta}(\vec{x}'t', \vec{x}t) = \gamma^0 \delta(\vec{x}' - \vec{x})$ (ver (3.15)), pode-se escrever

$$V \sum_n [\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{\psi}_\beta(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle] = \gamma_{\alpha\beta}^0 \quad (3.52)$$

No limite $N \rightarrow \infty$, o espaçamento entre níveis de energia adjacentes tende a zero, o que permite substituir a variável discreta n por uma variável contínua. Seja dn o número

de níveis no intervalo $\varepsilon < \varepsilon_{n\vec{k}} < \varepsilon + d\varepsilon$. Para qualquer função f da energia de excitação é possível expressar:

$$\begin{aligned}
 & V \sum_{\vec{n}} \langle 0 | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_{\beta}(0) | 0 \rangle f(\varepsilon_{n\vec{k}}) \\
 &= V \int dn \langle 0 | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_{\beta}(0) | 0 \rangle f(\varepsilon_{n\vec{k}}) \\
 &= V \int_0^{\infty} d\varepsilon \langle 0 | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{\psi}_{\beta}(0) | 0 \rangle \frac{dn}{d\varepsilon} f(\varepsilon) \\
 &= \int_0^{\infty} d\varepsilon A_{\alpha\beta}(\vec{k}, \varepsilon) f(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde a última igualdade define $A_{\alpha\beta}(\vec{k}, \varepsilon)$. Analogamente:

$$\begin{aligned}
 & V \sum_{\vec{n}} \langle 0 | \hat{\psi}_{\beta}(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | 0 \rangle f(\varepsilon_{n-\vec{k}}) \\
 &= V \int dn \langle 0 | \hat{\psi}_{\beta}(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | 0 \rangle f(\varepsilon_{n-\vec{k}}) \\
 &= V \int_0^{\infty} d\varepsilon \langle 0 | \hat{\psi}_{\beta}(0) | n - \vec{k} \rangle \langle n - \vec{k} | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | 0 \rangle \frac{dn}{d\varepsilon} f(\varepsilon) \\
 &= \int_0^{\infty} B_{\alpha\beta}(\vec{k}, \varepsilon) f(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

sendo $B_{\alpha\beta}(\vec{k}, \varepsilon)$ definido pela última igualdade.

Usando essas definições, as funções de Green (3.44) – (3.46) e a relação (3.52) podem ser reescritas na forma

$$G_{\alpha\beta}(\vec{k}\omega) = \int_0^{\infty} d\omega' \left[\frac{A_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} + \frac{B_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu + \omega' - i\eta} \right] \tag{3.55}$$

$$G_{\alpha\beta}^R(\vec{k}\omega) = \int_0^{\infty} d\omega' \left[\frac{A_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} + \frac{B_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu + \omega' + i\eta} \right] \tag{3.56}$$

$$G_{\alpha\beta}^A(\vec{k}\omega) = \int_0^{\infty} d\omega' \left[\frac{A_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' - i\eta} + \frac{B_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu + \omega' - i\eta} \right] \tag{3.57}$$

$$\int_0^{\infty} d\omega [A_{\alpha\beta}(\vec{k}\omega) + B_{\alpha\beta}(\vec{k}\omega)] = \gamma_{\alpha\beta}^0 \tag{3.58}$$

Das equações (3.55) – (3.58) pode-se deduzir o comportamento das funções de Green para $|\omega| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 G(\vec{k}\omega) &\sim G^R(\vec{k}\omega) \sim G^A(\vec{k}\omega) \sim \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} d\omega' [A(\vec{k}, \omega') + B(\vec{k}, \omega')] \\
 &\sim \frac{\gamma^0}{\omega} \text{ para } |\omega| \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Se o hamiltoniano e o estado fundamental do sistema são invariantes sob rotações e reflexões espaciais, as matrizes A e B devem ter a forma:

$$A(\vec{k}, \omega) = A_S(k, \omega) + \gamma^0 A_0(k, \omega) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} A_V(k, \omega) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} A_T(k, \omega) \quad (3.60)$$

$$B(\vec{k}, \omega) = B_S(k, \omega) + \gamma^0 B_0(k, \omega) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} B_V(k, \omega) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} B_T(k, \omega) \quad (3.61)$$

As quantidades A e B satisfazem as relações

$$(A\gamma^0)_{\alpha\beta}^* = (A\gamma^0)_{\beta\alpha} \quad \text{ou} \quad (A\gamma^0)^\dagger = A\gamma^0 \quad (3.62)$$

$$(B\gamma^0)_{\alpha\beta}^* = (B\gamma^0)_{\beta\alpha} \quad \text{ou} \quad (B\gamma^0)^\dagger = B\gamma^0 \quad (3.63)$$

conforme pode ser facilmente verificado a partir das definições (3.53) e (3.54). (Veja-se relação (3.49).)

Usando $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ e $\vec{\gamma}^\dagger = -\vec{\gamma}$, de (3.60) e (3.62) segue que

$$\begin{aligned} A_S^*(k, \omega) &= A_S(k, \omega); & A_0^*(k, \omega) &= A_0(k, \omega) \\ A_V^*(k, \omega) &= A_V(k, \omega); & A_T^*(k, \omega) &= -A_T(k, \omega) \end{aligned} \quad (3.64)$$

e, similarmente, de (3.61) e (3.63):

$$\begin{aligned} B_S^*(k, \omega) &= B_S(k, \omega); & B_0^*(k, \omega) &= B_0(k, \omega) \\ B_V^*(k, \omega) &= B_V(k, \omega); & B_T^*(k, \omega) &= -B_T(k, \omega) . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Usando (3.33.b), (3.34.b) e (3.35.b) e correspondentes expressões para as funções de Green retardada e avançada para partícula, buraco e antipartícula obtém-se de (3.55) – (3.57) as representações de Lehmann das funções de Green que podem, genericamente, ser escritas na forma :

$$g(k, \omega) = \int_0^\infty d\omega' \left[\frac{a(k, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} + \frac{b(k, \omega')}{\omega - \mu + \omega' - i\eta} \right] \quad (3.66)$$

$$g^R(k, \omega) = \int_0^\infty d\omega' \left[\frac{a(k, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} + \frac{b(k, \omega')}{\omega - \mu + \omega' + i\eta} \right] \quad (3.67)$$

$$g^A(k, \omega) = \int_0^\infty d\omega' \left[\frac{a(k, \omega')}{\omega - \mu - \omega' - i\eta} + \frac{b(k, \omega')}{\omega - \mu + \omega' - i\eta} \right] \quad (3.68)$$

onde as funções $a(k, \omega)$ e $b(k, \omega)$ para partícula ($k > k_F$), buraco ($k < k_F$) e antipartícula são dadas, respectivamente, por

$$a_{(p)}(k, \omega) = \frac{m_* A_S(k, \omega) + E_k A_0(k, \omega) + k A_V(k, \omega)}{E_k} \quad (3.69)$$

$$b_{(p)}(k, \omega) = \frac{m_* B_S(k, \omega) + E_k B_0(k, \omega) + k B_V(k, \omega)}{E_k} \quad (3.70)$$

$$a_{(b)}(k, \omega) = -\frac{m_* A_S(k, \omega) + E_k A_0(k, \omega) + k A_V(k, \omega)}{E_k} \quad (3.71)$$

$$b_{(b)}(k, \omega) = -\frac{m_* B_S(k, \omega) + E_k B_0(k, \omega) + k B_V(k, \omega)}{E_k} \quad (3.72)$$

$$a_{(a)}(k, \omega) = \frac{m_* A_S(k, \omega) - E_k A_0(k, \omega) + k A_V(k, \omega)}{E_k} \quad (3.73)$$

$$b_{(a)}(k, \omega) = \frac{m_* B_S(k, \omega) - E_k B_0(k, \omega) + k B_V(k, \omega)}{E_k} \quad (3.74)$$

De (3.64) e (3.65) seguem as relações

$$(a(k, \omega))^* = a(k, \omega); \quad (b(k, \omega))^* = b(k, \omega), \quad (3.75)$$

o que implica em

$$(g^R(k, \omega))^* = g^A(k, \omega), \quad (3.76)$$

relações essas que são obedecidas nos três casos.

Inserindo (3.60) e (3.61) em (3.58) obtém-se

$$\int_0^\infty d\omega [A_S(k, \omega) + B_S(k, \omega)] = 0 \quad (3.77.a)$$

$$\int_0^\infty d\omega [A_0(k, \omega) + B_0(k, \omega)] = 1 \quad (3.77.b)$$

$$\int_0^\infty d\omega [A_V(k, \omega) + B_V(k, \omega)] = 0 \quad (3.77.c)$$

$$\int_0^\infty d\omega [A_T(k, \omega) + B_T(k, \omega)] = 0. \quad (3.77.d)$$

Das equações acima e de (3.69) – (3.74) decorre que

$$\int_0^{\infty} d\omega [a(k, \omega) + b(k, \omega)] = \begin{cases} +1 & \text{para partículas} \\ -1 & \text{para buracos e antipartículas} \end{cases} \quad (3.78)$$

e, portanto,

$$g(k, \omega) \simeq g^R(k, \omega) \simeq g^A(k, \omega) \simeq \pm \frac{1}{\omega} \quad \text{para } |\omega| \rightarrow \infty, \quad (3.79)$$

onde o sinal positivo é válido somente para partículas.

3.4 Propagadores "livres" no campo médio

Como ilustração e teste para o formalismo desenvolvido nas seções anteriores, aqui são obtidos os propagadores para partícula, buraco e antipartícula movendo-se livremente no campo médio. Nesse caso o operador de campo de Heisenberg (3.4) reduz-se ao operador de campo na representação de interação (3.7) e o estado fundamental satisfaz

$$b_s(\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle = c_s(\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle = d_s(\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle = 0. \quad (3.80)$$

Partindo da definição de propagador de Feynman (3.12) e usando (3.7), (2.16) e as relações canônicas de anticomutação pode-se escrever

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{x}'t', \vec{x}t) &= \langle 0_{(0)} | T[\hat{\psi}'_{\alpha}(\vec{x}'t') \hat{\psi}_{\beta}(\vec{x}t)] | 0_{(0)} \rangle \\ &= \theta(t' - t) \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m_s}{E_k} \theta(k - k_F) u_{\alpha}(\vec{k}s) \bar{u}_{\beta}(\vec{k}s) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} e^{-i(E_k + v_0)(t' - t)} \\ &\quad - \theta(t - t') \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m_s}{E_k} \theta(k_F - k) \bar{u}_{\beta}(-\vec{k} - s) u_{\alpha}(-\vec{k} - s) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} e^{-i(E_k + v_0)(t' - t)} \\ &\quad - \theta(t - t') \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m_s}{E_k} \bar{v}_{\beta}(\vec{k}s) v_{\alpha}(\vec{k}s) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} e^{-i(v_0 - E_k)(t' - t)}. \end{aligned}$$

Fazendo-se uso das relações

$$\theta(\tau) = i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\eta} \quad (3.81)$$

$$\sum_s u_{\alpha}(\vec{k}s) \bar{u}_{\beta}(\vec{k}s) = \frac{1}{2m_s} (\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_s)_{\alpha\beta} \quad (3.82.a)$$

$$\sum_s v_{\alpha}(\vec{k}s) \bar{v}_{\beta}(\vec{k}s) = \frac{1}{2m_s} (\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_s)_{\alpha\beta} \quad (3.82.b)$$

e passando à transformada de Fourier obtém-se

$$G^0(\vec{k}, \omega) = \left(\frac{\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_*}{2E_k} \right) \left[\frac{\theta(k - k_F)}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} \right] + \left(\frac{\gamma^0 E_k + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_*}{2E_k} \right) \frac{1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \quad (3.83)$$

e, depois de algumas manipulações matemáticas, chega-se a expressão equivalente

$$G^{(0)}(\vec{k}, \omega) = \frac{\gamma^0(\omega - v_0) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_*}{2E_k} \times \left[\frac{\theta(k - k_F)}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} - \frac{1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \right] \quad (3.84)$$

A comparação de (3.83) com (3.25) conduz à identificação de

$$G_S^{(0)}(k, \omega) = \frac{m_*}{2E_k} \left[\frac{\theta(k - k_F)}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} - \frac{1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \right] \quad (3.85.a)$$

$$G_0^{(0)}(k, \omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta(k - k_F)}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} + \frac{1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \right] \quad (3.85.b)$$

$$G_V^{(0)}(k, \omega) = \frac{k}{2E_k} \left[\frac{\theta(k - k_F)}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} - \frac{1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \right] \quad (3.85.c)$$

$$G_T^{(0)}(k, \omega) = 0, \quad (3.85.d)$$

o que juntamente com (3.33.b)-(3.35.b) leva às seguintes expressões para os propagadores para partículas, buracos e antipartículas no espaço de energia-momentum:

$$g_{(p)}^{(0)}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} \quad (k > k_F) \quad (3.86)$$

$$g_{(b)}^{(0)}(k, \omega) = \frac{-1}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} \quad (k < k_F) \quad (3.87)$$

$$g_{(a)}^{(0)}(k, \omega) = \frac{-1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \quad (3.88)$$

A obtenção da representação de Lehmann dos propagadores na aproximação de campo médio exige a análise dos possíveis estados intermediários em (3.53) e (3.54), uma vez que

o operador de campo $\hat{\psi}(0)$ aplicado ao estado fundamental pode somente criar um buraco ou uma antipartícula. Já a aplicação do operador de campo $\hat{\psi}^\dagger(0)$ ao estado fundamental pode somente criar uma partícula com momentum $k > k_F$.

Assim, na soma (3.53) o estado intermediário pode somente ser um estado de partícula do tipo $b_s^\dagger(\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle$; a energia de excitação ε correspondente ao momentum \vec{k} sendo $\varepsilon = E_k + v_0 - \mu$, uma vez que μ é a energia de partícula única no nível de Fermi (ver (3.42.b)):

$$\mu = E_F + v_0$$

com $E_F = \sqrt{k_F^2 + m_*^2}$.

Nesse caso, de (3.53) obtém-se

$$A_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}, \omega) = V \sum_s \langle 0_{(0)} | \hat{\psi}_\alpha(0) b_s^\dagger(\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle \langle 0_{(0)} | b_s(\vec{k}) \hat{\psi}_\beta(0) | 0_{(0)} \rangle \times \delta(\omega - E_k - v_0 + \mu) \theta(k - k_F) \quad (3.89)$$

Na soma (3.54), o estado intermediário pode somente ser um estado de buraco do tipo $c_s^\dagger(-\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle$, de energia de excitação $\varepsilon = \mu - E_k - v_0$, ou um estado de antinúcleon $d_s^\dagger(-\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle$, de energia de excitação $\varepsilon = \mu + E_k - v_0$, o que leva a concluir que

$$B_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}, \omega) = V \sum_s \langle 0_{(0)} | \hat{\psi}_\beta(0) c_s^\dagger(-\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle \langle 0_{(0)} | c_s(-\vec{k}) \hat{\psi}_\alpha(0) | 0_{(0)} \rangle \times \delta(\omega + E_k + v_0 - \mu) \theta(k_F - k) + V \sum_s \langle 0_{(0)} | \hat{\psi}_\beta(0) d_s^\dagger(-\vec{k}) | 0_{(0)} \rangle \langle 0_{(0)} | d_s(-\vec{k}) \hat{\psi}_\alpha(0) | 0_{(0)} \rangle \times \delta(\omega - E_k + v_0 - \mu) \quad (3.90)$$

Usando a versão normalizada em uma caixa de (3.3), ou seja,

$$\hat{\psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m_*}{E_k}} \sum_s \int d^3k [\theta(k - k_F) u(\vec{k}s) b_s(\vec{k}) + \theta(k_F - k) u(-\vec{k} - s) c_s^\dagger(\vec{k}) + v(\vec{k}s) d_s^\dagger(k)]$$

para calcular os elementos de matriz presentes em (3.88) e (3.90), obtém-se :

$$A_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}, \omega) = \left(\frac{\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_*}{2E_k} \right)_{\alpha\beta} \theta(k - k_F) \delta(\omega - E_k - v_0 + \mu) \quad (3.91)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}, \omega) = \left(\frac{\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_*}{2E_k} \right)_{\alpha\beta} \theta(k_F - k) \delta(\omega + E_k + v_0 - \mu) \\ + \left(\frac{\gamma^0 E_k + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_*}{2E_k} \right)_{\alpha\beta} \delta(\omega - E_k + v_0 - \mu). \quad (3.92)$$

O uso dessas relações na representação de Lehmann(3.55) reproduz a expressão (3.83) do propagador de Feynman.

Usando (3.91) e (3.92) em (3.69) e (3.70) segue que, para $k > k_F$:

$$a_{(p)}^{(0)}(k, \omega) = \delta(\omega - E_k - v_0 + \mu) \quad (3.93.a)$$

$$b_{(p)}^{(0)}(k, \omega) = 0 \quad (3.93.b)$$

o que implica em que a representação de Lehmann (3.66) para partícula toma a forma

$$g_{(p)}^{(0)}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - E_k - v_0 + i\eta} \quad (3.94)$$

e, portanto, reproduz (3.86).

Analogamente, do uso de (3.91) e (3.92) em (3.71), (3.72) e (3.66) obtém-se, para $k < k_F$

$$a_{(b)}^{(0)}(k, \omega) = 0 \quad (3.95.a)$$

$$b_{(b)}^{(0)}(k, \omega) = -\delta(\omega + E_k + v_0 - \mu) \quad (3.95.b)$$

$$g_{(b)}^{(0)}(k, \omega) = \frac{-1}{\omega - E_k - v_0 - i\eta} \quad (3.96)$$

Como era de se esperar, (3.96) reproduz (3.87).

O mesmo procedimento para antipartículas resulta em

$$a_{(a)}^{(0)}(k, \omega) = 0 \quad (3.97.a)$$

$$b_{(a)}^{(0)}(k, \omega) = -\delta(\omega - E_k + v_0 - \mu), \quad (3.97.b)$$

para qualquer valor de k e portanto a representação de Lehmann (3.66) para antipartículas é

$$g_{(a)}^{(0)}(k, \omega) = \frac{-1}{\omega + E_k - v_0 - i\eta} \quad (3.98)$$

que, por sua vez, reproduz (3.89).

Note-se que (3.91) e (3.92) satisfazem as relações(3.77). Da mesma forma as expressões (3.93),(3.95) e (3.97) satisfazem as correspondentes relações (3.78) para partícula, buraco e antipartícula. Também as representações de Lehmann (3.94),(3.96) e (3.98) satisfazem as correspondentes relações (3.79).

3.5 Interpretação física dos propagadores

Considere-se o estado fundamental na representação de interação em um tempo t , $|0^I(t)\rangle$, e adicione-se a esse estado uma partícula de momentum \vec{k} e projeção de spin s , $b_s^\dagger(\vec{k}, t) |0^I(t)\rangle$.

Definindo-se um operador unitário $\hat{U}^I(t', t)$ responsável pela evolução temporal de um estado na representação de interação, a amplitude de probabilidade de encontrar esse sistema em $t' > t$ no estado formado pelo estado fundamental mais uma partícula com momentum \vec{k}' e projeção de spin s' pode ser escrita como

$$P(\vec{k}' s' t', \vec{k} s t) = \langle 0^I(t') | b_{s'}^\dagger(\vec{k}', t') \hat{U}^I(t', t) b_s^\dagger(\vec{k}, t) | 0^I(t) \rangle \quad t' > t \quad (3.99)$$

Como $|\psi^I(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\psi^s(t)\rangle = e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi^H\rangle$, onde $|\psi^s(t)\rangle$ e $|\psi^H\rangle$ representam, respectivamente, um estado qualquer nas representações de Schrödinger e de Heisenberg, é fácil verificar que

$$\hat{U}^I(t', t) = e^{iH_0 t'} e^{-iH(t'-t)} e^{-iH_0 t} ,$$

pois

$$\begin{aligned} |\psi^I(t')\rangle &= e^{iH_0 t'} |\psi^s(t')\rangle = e^{iH_0 t'} e^{-iH(t'-t)} |\psi^s(t)\rangle \\ &= e^{iH_0 t'} e^{-iH(t'-t)} e^{-iH_0 t} |\psi^I(t)\rangle . \end{aligned}$$

Essas relações juntamente com (3.5.a) e (3.8.a) permitem reexpressar a amplitude de probabilidade (3.99) em termos da representação de Heisenberg:

$$P(\vec{k}' s' t', \vec{k} s t) = \langle 0 | b_{s'}^\dagger(\vec{k}', t') b_s^\dagger(\vec{k}, t) | 0 \rangle \quad t' > t \quad (3.100)$$

A comparação da equação acima com (3.33.a) leva a concluir que

$$P(\vec{k}'s't', \vec{k}st) = i\delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's}g_{(p)}(k, t' - t) \quad t' > t \quad (3.101)$$

e, portanto, o estudo da dependência temporal de $g_{(p)}$ fornecerá diretamente a evolução temporal, ou particularmente o tempo de vida, de estados de uma partícula.

Analogamente a amplitude de probabilidade para um sistema, que inicialmente (a um tempo t) se constitui do estado fundamental $|0^i(t)\rangle$ mais um buraco (ou antipartícula) de momentum \vec{k} e projeção de spin s , se encontre em $t' > t$ no estado formado pelo estado fundamental mais um buraco (ou antipartícula) com momentum \vec{k}' e projeção de spin s' , é dada por

$$H(\vec{k}'s't', \vec{k}st) = \langle 0 | c_{s'}(\vec{k}', t) c_s^\dagger(\vec{k}, t) | 0 \rangle \quad t' > t \quad (3.102)$$

para um buraco ou

$$A(\vec{k}'s't', \vec{k}st) = \langle 0 | d_{s'}(\vec{k}', t) d_s^\dagger(\vec{k}, t) | 0 \rangle \quad t' > t \quad (3.103)$$

para uma antipartícula.

Da comparação de (3.102) com (3.34.a) e de (3.103) com (3.35.a) segue que

$$H(\vec{k}'s't', \vec{k}st) = i\delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's}g_{(b)}(k, t - t') \quad t' > t \quad (3.104)$$

e

$$A(\vec{k}'s't', \vec{k}st) = i\delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's}g_{(a)}(k, t - t') \quad t' > t \quad (3.105)$$

que indicam que a dependência temporal de $g_{(b)}$ (ou $g_{(a)}$) dará diretamente a evolução temporal, qual seja o tempo de vida, de estados de buraco único (ou de antipartícula única).

3.6 Relação entre a decomposição de Dirac da auto-energia e do propagador

Se o hamiltoniano e o estado fundamental do sistema são invariantes com relação a rotações e a reflexões espaciais, a auto-energia bariônica Σ pode ser decomposta na forma

(3.25), conforme procedimento adotado para os propagadores na seção 3.2:

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = \Sigma^S(k, \omega) + \gamma^0 \Sigma^0(k, \omega) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma^V(k, \omega) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma^T(k, \omega) . \quad (3.106)$$

O propagador bariônico e a auto-energia estão relacionados pela equação

$$\begin{aligned} G(\vec{k}, \omega) &= [\gamma^0(\omega - v_0) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_s - \Sigma(\vec{k}, \omega)]^{-1} \\ &= D^{-1}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \quad (3.107)$$

onde essa última igualdade define a matriz inversa $D(\vec{k}, \omega)$ do propagador $G(\vec{k}, \omega)$.

Tanto o propagador como sua inversa podem ser decompostos conforme (3.25) e escritos na forma

$$G(\vec{k}, \omega) = G^S(k, \omega) + \gamma^0 G^0(k, \omega) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} G^V(k, \omega) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} G^T(k, \omega) \quad (3.108)$$

$$D(\vec{k}, \omega) = D^S(k, \omega) + \gamma^0 D^0(k, \omega) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} D^V(k, \omega) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} D^T(k, \omega) \quad (3.109)$$

O objetivo dessa seção é estabelecer relações entre os coeficientes da decomposição da auto-energia $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ (eq.(3.106)) e do propagador bariônico $G(\vec{k}, \omega)$ (eq.(3.108)) as quais serão úteis na seção seguinte onde são introduzidas aproximações nesse formalismo.

De (3.106),(3.107) e (3.109) pode-se identificar

$$D^S(k, \omega) = -m_s - \Sigma^S(k, \omega) \quad (3.110.a)$$

$$D^0(k, \omega) = \omega - v_0 - \Sigma^0(k, \omega) \quad (3.110.b)$$

$$D^V(k, \omega) = k - \Sigma^V(k, \omega) \quad (3.110.c)$$

$$D^T(k, \omega) = -\Sigma^T(k, \omega) . \quad (3.110.d)$$

Usando (3.108) e (3.109) em

$$D(\vec{k}, \omega)G(\vec{k}, \omega) = 1 \quad (3.111)$$

e lembrando que $\gamma^0 \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \gamma^0 = 0$ e $(\vec{\gamma} \cdot \hat{k})^2 = -1$, obtém-se o conjunto de equações

$$D^S G^S + D^0 G^0 - D^V G^V + D^T G^T = 1 \quad (3.112.a)$$

$$D^S G^0 + D^0 G^S + D^V G^T - D^T G^V = 0 \quad (3.112.b)$$

$$D^S G^V + D^0 G^T + D^V G^S - D^T G^0 = 0 \quad (3.112.c)$$

$$D^S G^T + D^0 G^V - D^V G^0 + D^T G^S = 0. \quad (3.112.d)$$

Assumindo $D^S \neq 0$, verifica-se facilmente que (3.112.b-d) são satisfeitas se

$$G^0 = -\frac{D^0}{D^S} G^S \quad (3.113.a)$$

$$G^V = -\frac{D^V}{D^S} G^S \quad (3.113.b)$$

$$G^T = -\frac{D^T}{D^S} G^S \quad (3.113.c)$$

e, inserindo essas relações em (3.112.a), segue que

$$[(D^S)^2 - (D^0)^2 + (D^V)^2 - (D^T)^2] G^S = D^S. \quad (3.114)$$

Finalmente, definindo-se

$$\Delta(k, \omega) = [\omega - v_0 - \Sigma^0(k, \omega)]^2 - [m_* + \Sigma^S(k, \omega)]^2 - [k - \Sigma^V(k, \omega)]^2 + [\Sigma^T(k, \omega)]^2 \quad (3.115)$$

obtem-se as relações entre os coeficientes da auto-energia $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ e do propagador $G(\vec{k}, \omega)$:

$$G^S(k, \omega) = \frac{m_* + \Sigma^S(k, \omega)}{\Delta(k, \omega)} \quad (3.116.a)$$

$$G^0(k, \omega) = \frac{\omega - v_0 - \Sigma^0(k, \omega)}{\Delta(k, \omega)} \quad (3.116.b)$$

$$G^V(k, \omega) = \frac{k - \Sigma^V(k, \omega)}{\Delta(k, \omega)} \quad (3.116.c)$$

$$G^T(k, \omega) = \frac{-\Sigma^T(k, \omega)}{\Delta(k, \omega)}. \quad (3.116.d)$$

3.7 Propagadores aproximados

O objetivo principal do presente trabalho é o cálculo das larguras de estados de buraco nucleares no modelo $\sigma - \omega$ de Walecka. Para tanto, usa-se a teoria de perturbação a partir do campo médio. Nesta seção discute-se a forma aproximada do propagador de um buraco

na matéria nuclear, adequada para este propósito. Como nas seções anteriores, considera-se também os propagadores para partícula ($k > k_F$) e antipartícula. O formalismo correspondente serviria para o estudo da parte imaginária do potencial ótico ou, ainda, para a avaliação das larguras de estados de antinúcleons ligados nos núcleos.

Considere-se inicialmente estados de partículas. Se o objetivo é estudar a parte imaginária do potencial ótico então basta concentrar-se no cálculo das partes imaginárias das componentes de Lorentz da auto-energia Σ para $\omega = E_k + v_0$, ignorando as partes reais. Em mais baixa ordem em teoria de perturbação escreve-se

$$\Sigma^S(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^S(k, E_k + v_0)/_{TF} \equiv iW^S(k) \quad (3.117)$$

$$\Sigma^0(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^0(k, E_k + v_0)/_{TF} \equiv iW^0(k) \quad (3.118)$$

$$\Sigma^V(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^V(k, E_k + v_0)/_{TF} \equiv iW^V(k) \quad (3.119)$$

$$\Sigma^T(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^T(k, E_k + v_0)/_{TF} \equiv iW^T(k) \quad (3.120)$$

onde $/_{TF}$ significa "calculado em mais baixa ordem em teoria de perturbação" e as quantidades W são definidas pelas identidades. A motivação básica para escrever (3.117) – (3.120) decorre do seguinte: o propagador de partícula livre em teoria de campo médio tem um pólo em $\omega = E_k + v_0$ (ver (3.94)). Quando interações são incluídas, a localização do pólo adquire uma parte imaginária, que eventualmente será responsável pelo tempo de vida finito da excitação de partícula única. O deslocamento na parte real do pólo pode, nesse caso, ser ignorado, uma vez que esse deslocamento não afeta o tempo de vida, que é a grandeza física de interesse no problema que se está tratando. Se a teoria de perturbação é válida, os deslocamentos na localização do pólo devido às interações deveriam ser pequenos. Isso significa que no cálculo dos deslocamentos, ou seja dos $Im\Sigma$'s, justifica-se ignorar o deslocamento e colocar $\omega = E_k + v_0$. Dessa maneira obtém-se um propagador aproximado, válido para ω real mas próximo ao pólo (que por sua vez é próximo de $E_k + v_0$). Com a aproximação (3.117) – (3.120) o denominador do propagador (definido em (3.115)) é

$$\Delta(k, \omega) \simeq [\omega - v_0 - iW^0(k)]^2 - [m_* + iW^S(k)]^2 - [k - iW^V(k)]^2 - (W^T(k))^2. \quad (3.121)$$

Portanto, os pólos do propagador são

$$\omega = v_0 + iW^0(k) \pm \sqrt{E_k^2 + W^T(k)^2 - W^S(k)^2 - W^V(k)^2 + 2i(m_*W^S(k) - kW^V(k))} \quad (3.122)$$

Se a filosofia da teoria de perturbação é válida, os W 's são pequenos comparados com as outras grandezas (E_k, v_0, m_*) e pode-se linearizar (3.122).

$$\omega = v_0 + iW^0(k) \pm [E_k + \frac{i}{E_k}(m_*W^S(k) - kW^V(k))]. \quad (3.123)$$

Uma vez que os W 's são pequenos, o pólo que está próximo de $\omega = E_k + v_0$ corresponde a

$$\omega = E_k + v_0 + \frac{i}{E_k}(E_kW^0(k) + m_*W^S(k) - kW^V(k)). \quad (3.124)$$

O presente cálculo do propagador $G(k, \omega)$ é válido somente próximo ao pólo, onde se pode fazer a aproximação $\omega = E_k + v_0$ nos fatores não singulares, obtendo-se

$$\Delta(k, \omega) \simeq 2E_k [\omega - E_k - v_0 + i\gamma_{(p)}(k)] \quad (3.125)$$

com $\gamma_{(p)}(k)$ definido por

$$\gamma_{(p)}(k) = \frac{-m_*W^S(k) - E_kW^0(k) + kW^V(k)}{E_k}. \quad (3.126)$$

O uso da mesma aproximação em (3.116.b) conduz à

$$G^0(k, \omega) \simeq \frac{1}{\Delta(k, \omega)} E_k. \quad (3.127)$$

Finalmente, o propagador aproximado para partícula pode ser obtido usando em (3.33.b) as equações (3.116.a), (3.116.c), (3.127), (3.117) – (3.119) e (3.125), o que resulta em

$$g_{(p)}(k, \omega) \simeq \frac{1}{\omega - E_k - v_0 + i\gamma_{(p)}(k)}. \quad (3.128)$$

O propagador aproximado para partícula (3.128) é válido em teoria de perturbação para ω real e próximo a $E_k + v_0$ e para $k > k_F$.

Para o caso de estados de buraco ($k < k_F$) todas as considerações acima são válidas, mas agora define-se

$$\gamma_{(b)}(k) = \frac{m_* W^S(k) + E_k W^0(k) - kW^V(k)}{E_k} \quad (3.129)$$

e, portanto, (3.125) é substituída por

$$\Delta(k, \omega) \simeq 2E_k [\omega - E_k - v_0 - i\gamma_{(b)}(k)] . \quad (3.130)$$

Usando (3.34.b) juntamente com (3.116.a), (3.116.c), (3.127), (3.117) – (3.119) e (3.130) obtém-se o propagador aproximado para buraco

$$g_{(b)}(k, \omega) \simeq \frac{-1}{\omega - E_k - v_0 - i\gamma_{(b)}(k)} . \quad (3.131)$$

Esse resultado é válido em teoria de perturbação, para ω real e próximo a $E_k + v_0$ e para $k < k_F$.

A motivação para definir diferentemente os γ 's para partícula e buraco surge de (3.86) e (3.87), pois o propagador livre para partícula (buraco) tem um pólo infinitesimalmente abaixo (acima) do eixo real. Espera-se, portanto, que os γ 's assim definidos sejam positivos e estejam diretamente relacionados com as larguras, conforme será demonstrado nas seções seguintes.

Considere-se, finalmente, estados de antipartículas (k qualquer). As partes imaginárias dos Σ 's são agora calculadas para $\omega = -E_k + v_0$ e, em mais baixa ordem em teoria de perturbação, (ignorando-se as partes reais), pode-se escrever

$$\Sigma^S(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^S(k, -E_k + v_0)/_{TP} \equiv i\bar{W}^S(k) \quad (3.132)$$

$$\Sigma^0(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^0(k, -E_k + v_0)/_{TP} \equiv i\bar{W}^0(k) \quad (3.133)$$

$$\Sigma^V(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^V(k, -E_k + v_0)/_{TP} \equiv i\bar{W}^V(k) \quad (3.134)$$

$$\Sigma^T(k, \omega) \simeq iIm\Sigma^T(k, -E_k + v_0)/_{TP} \equiv i\bar{W}^T(k) . \quad (3.135)$$

As relações acima definem as quantidades \bar{W} 's. Procedendo como no caso para partícula, conclui-se que os pólos do propagador são novamente dados por (3.123) com

os W 's substituídos por \bar{W} 's. O pólo que está próximo a $-E_k + v_0$ corresponde a

$$\omega = -E_k + v_0 + \frac{i}{E_k} (E_k \bar{W}^0(k) - m_* \bar{W}^S(k) + k \bar{W}^V(k)) \quad (3.136)$$

e, conseqüentemente, próximo a esse pólo tem-se

$$\Delta(k, \omega) \simeq -2E_k [\omega + E_k - v_0 - i\gamma_{(a)}(k)] \quad (3.137)$$

com

$$\gamma_{(a)}(k) = \frac{E_k \bar{W}^0(k) - m_* \bar{W}^S(k) + k \bar{W}^V(k)}{E_k} . \quad (3.138)$$

Também (3.116.b) pode ser substituída por

$$G^0(k, \omega) \simeq \frac{-1}{\Delta(k, \omega)} E_k . \quad (3.139)$$

Usando em (3.35.b) as equações (3.116.a), (3.116.c), (3.139), (3.132)–(3.134) e (3.137) obtém-se o propagador aproximado para antipartícula

$$g_{(a)}(k, \omega) \simeq \frac{-1}{\omega + E_k - v_0 - i\gamma_{(a)}(k)} \quad (3.140)$$

que é válido em teoria de perturbação para ω real e próximo a $-E_k + v_0$.

3.8 Tempos de vida

Quando da análise da interpretação física dos propagadores (seção 3.5) mostrou-se que o estudo da dependência temporal dos propagadores permite determinar o tempo de vida dos estados de partícula, buraco e antipartícula. (Atente-se para as equações (3.101), (3.104) e (3.105) e comentários que as seguem.) Nesta seção, faz-se uso dos propagadores aproximados obtidos na seção anterior para extrair as expressões dos tempos de vida e das larguras destes estados, em função das partes imaginárias das componentes da auto-energia correspondente. Como este formalismo será aplicado nos capítulos posteriores somente aos estados de buraco, consideramos este caso primeiramente, resumindo em seguida os resultados que seriam alcançados por argumentos análogos nos casos de partícula e antipartícula.

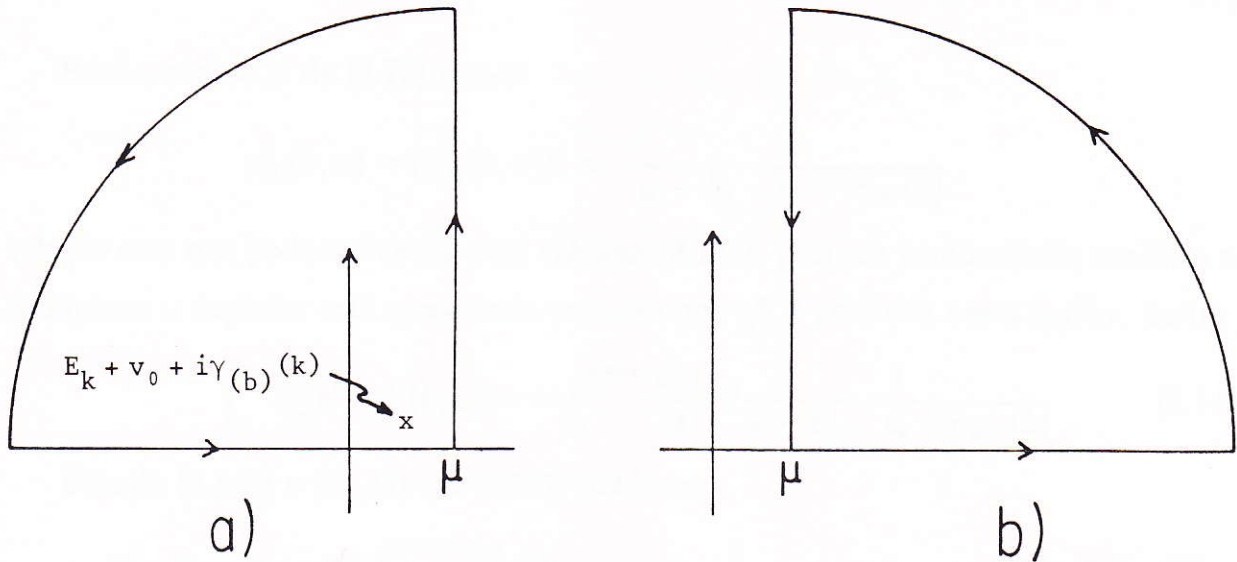


Figura 3.1: Contornos usados no cálculo de $g_{(b)}(k, -t)$ para $t > 0$.

Para investigar o tempo de vida de estados de buraco único deve-se estudar o comportamento de $g_{(b)}(k, -t)$ para $t > 0$ e $k < k_F$:

$$\begin{aligned} g_{(b)}(k, -t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}(k, \omega) + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}(k, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}^A(k, \omega) + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}^R(k, \omega) \end{aligned} \quad (3.141)$$

onde para escrever essa última igualdade lançou-se mão das propriedades (3.50) e (3.51).

Para ω real $< \mu$ a equação (3.131) fornece uma aproximação para $g_{(b)}$ e conseqüentemente também para $g_{(b)}^A$ (em vista em (3.141)) e pode-se escrever

$$\int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}^A(k, \omega) = - \int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{\omega - E_k - v_0 - i\gamma_{(b)}(k)} \quad (3.142)$$

Essa integral pode ser calculada usando o contorno indicado na figura 3.1(a) e resulta em

$$- i e^{i(E_k + v_0)t} e^{-\gamma_{(b)}(k)t} + \int_{\mu}^{\mu + i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{\omega - E_k - v_0 - i\gamma_{(b)}(k)} \quad (3.143)$$

Como $g_{(b)}^R(k, \omega)$ é analítica no semiplano ω superior, usando o contorno correspondente (figura 3.1(b)) segue que:

$$\int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}^R(k, \omega) = \int_{\mu}^{\mu + i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}^R(k, \omega) \quad (3.144)$$

Para ω real $< \mu$ de (3.76) tem-se

$$g_{(b)}^R(k, \omega) = (g_{(b)}^A(k, \omega))^* = -\frac{1}{\omega - E_k - v_0 + i\gamma_{(b)}(k)},$$

relação essa que pode ser usada para calcular (3.144), pois sua continuidade analítica no semiplano ω superior está assegurada uma vez que $g_{(b)}^R$ é analítica nessa região. Assim

$$\int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} g_{(b)}^R(k, \omega) = -\int_{\mu}^{\mu+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{\omega - E_k - v_0 + i\gamma_{(b)}(k)} \quad (3.145)$$

Usando (3.143) e (3.145) em (3.141) obtém-se

$$g_{(b)}(k, -t) = 2i\gamma_{(b)}(k) \int_{\mu}^{\mu+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{(\omega - E_k - v_0)^2 + (\gamma_{(b)}(k))^2} - ie^{i(E_k+v_0)t} e^{-\gamma_{(b)}(k)t} \quad (3.146)$$

Se teoria de perturbação é aplicável então deve-se supor que

$$\gamma_{(b)}(k) \ll E_F - E_k. \quad (3.147)$$

Essa relação pode ser satisfeita mesmo para valores de k próximos do momentum de Fermi k_F pois $\lim_{k \rightarrow k_F} \gamma_{(b)}(k) = 0$. Então, se t não é muito grande nem muito pequeno, ou seja,

$$t(E_F - E_k) \gg 1 \quad (3.148)$$

mas tal que

$$t\gamma_{(b)}(k) < 1 \quad (3.149)$$

é fácil mostrar que o primeiro termo de (3.146) é desprezível. Para tanto basta fazer a mudança de variável $\omega \rightarrow u = -i(\omega - \mu)$ e usar $\mu = E_F + v_0$:

$$\begin{aligned} & 2i\gamma_{(b)}(k) \int_{\mu}^{\mu+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{(\omega - E_k - v_0)^2 + (\gamma_{(b)}(k))^2} \\ &= -\frac{\gamma_{(b)}(k)}{\pi} e^{i\mu t} \int_0^{\infty} du \frac{e^{-ut}}{(E_F - E_k + iu)^2 + (\gamma_{(b)}(k))^2} \\ &\simeq -\frac{\gamma_{(b)}(k)}{\pi} e^{i\mu t} \frac{1}{(E_F - E_k)^2} \int_0^{\infty} du e^{-ut} \\ &\simeq -\frac{\gamma_{(b)}(k)}{\pi t} \frac{e^{i\mu t}}{(E_F - E_k)^2} \end{aligned} \quad (3.150)$$

(para escrever a penúltima expressão fez-se uso das relações (3.147) – (3.148).)

Quando as condições (3.148) e (3.149) são satisfeitas

$$\left| -\frac{\gamma_{(b)}(k)}{\pi t} \frac{e^{i\mu t}}{(E_F - E_k)^2} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{(b)}(k)t}{[t(E_k - E_F)]^2} \ll 1$$

e

$$\left| -ie^{i(E_k + v_0)t} e^{-\gamma_{(b)}(k)t} \right| \simeq 1$$

o que leva a concluir que

$$g_{(b)}(k, -t) \simeq -ie^{i(E_k + v_0)t} e^{-\gamma_{(b)}(k)t} \quad (3.151)$$

ou seja, o estado de buraco único se propaga como um auto-estado aproximado com um fator de redução $e^{-\gamma_{(b)}(k)t}$ para a amplitude e, conseqüentemente, com um fator $e^{-2\gamma_{(b)}(k)t}$ para a probabilidade. O tempo de vida do estado de buraco único é então

$$\tau_{(b)}(k) = \frac{1}{2\gamma_{(b)}(k)}. \quad (3.152)$$

Procedimento similar quando se estuda a dependência temporal do propagador de estados de partícula única $g_{(p)}(k, t)$ para $t > 0$ e $k > k_F$ dentro do limite de aplicabilidade da teoria de perturbação em que se supõe

$$\gamma_{(p)}(k) \ll E_k - E_F \quad (3.153)$$

e também t tal que $t(E_k - E_F) \gg 1$ mas $t\gamma_{(p)}(k) < 1$ permite concluir que

$$g_{(p)}(k, t) = -ie^{-i(E_k + v_0)t} e^{-\gamma_{(p)}(k)t}. \quad (3.154)$$

Logo, o estado de partícula única se propaga como um auto-estado aproximado com um fator de redução $e^{-\gamma_{(p)}(k)t}$ para a amplitude e, portanto, $e^{-2\gamma_{(p)}(k)t}$ para a probabilidade. Conseqüentemente, o tempo de vida é

$$\tau_{(p)}(k) = \frac{1}{2\gamma_{(p)}(k)}. \quad (3.155)$$

Para estados de antipartícula única, no estudo da dependência temporal de $g_{(a)}(\mathbf{k}, -t)$ para $t > 0$ usa-se os mesmos argumentos que para $g_{(b)}(\mathbf{k}, -t)$. As diferenças básicas entre os estados de buraco e antipartícula são as substituições $E_{\mathbf{k}} \rightarrow -E_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{(b)}(\mathbf{k}) \rightarrow \gamma_{(a)}(\mathbf{k})$. A condição relevante torna-se portanto

$$\gamma_{(a)}(\mathbf{k}) \ll E_F + E_{\mathbf{k}} \quad (3.156)$$

e o t apropriado satisfaz as condições $t(E_F + E_{\mathbf{k}}) \gg 1$ mas $t\gamma_{(a)}(\mathbf{k}) < 1$. Conclui-se que o propagador apresenta a forma

$$g_{(a)}(\mathbf{k}, -t) \simeq -ie^{i(-E_{\mathbf{k}}+v_0)t} e^{-\gamma_{(a)}(\mathbf{k})t} \quad (3.157)$$

que mostra que o estado de antipartícula única se propaga como um auto-estado aproximado com um fator de redução $e^{-\gamma_{(a)}(\mathbf{k})t}$ para a amplitude e, então $e^{-2\gamma_{(a)}(\mathbf{k})t}$ para a probabilidade. O tempo de vida é

$$\tau_{(a)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\gamma_{(a)}(\mathbf{k})}. \quad (3.158)$$

3.9 Representações de Lehmann (aproximadas) dos propagadores calculados em teoria de perturbação

É possível escrever diretamente as funções peso Lorentzianas tais que as representações de Lehmann (3.66) para buraco, partícula e antipartícula reproduzam os propagadores aproximados (3.131), (3.128) e (3.140). Para buracos ($k < k_F$) identifica-se

$$a_{(b)}(\mathbf{k}, \omega) \simeq 0 \quad (3.159.a)$$

$$b_{(b)}(\mathbf{k}, \omega) \simeq -\frac{\gamma_{(b)}(\mathbf{k})}{\pi[(\omega + E_{\mathbf{k}} - E_F)^2 + (\gamma_{(b)}(\mathbf{k}))^2]} \quad (3.159.b)$$

Devido à condição (3.147) $b_{(b)}$ apresenta um pico em torno de $\omega = E_F - E_{\mathbf{k}}$ e não se comete um erro significativo se se expande a região de integração de 0 a ∞ para $-\infty$ a ∞ . Dessa forma pode-se escrever

$$g_{(b)}(\mathbf{k}, \omega) \simeq -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\gamma_{(b)}(\mathbf{k})}{[(\omega' + E_{\mathbf{k}} - E_F)^2 + (\gamma_{(b)}(\mathbf{k}))^2](\omega - E_F - v_0 + \omega' - i\eta)}$$

Essa integral pode ser calculada fechando-se o contorno no semi-plano inferior selecionando-se assim somente o pólo em $\omega' = E_F - E_k - i\gamma_{(b)}(k)$. Obtém-se

$$\begin{aligned} g_{(b)}(k, \omega) &= -\frac{1}{\pi}(-2\pi i) \frac{\gamma_{(b)}(k)}{(-2i\gamma_{(b)}(k))} \frac{1}{\omega - E_k - v_0 - i\gamma_{(b)}(k)} \\ &= \frac{-1}{\omega - E_k - v_0 - i\gamma_{(b)}(k)} \end{aligned} \quad (3.160)$$

que reproduz (3.131).

Note-se também que com essas aproximações a regra de soma (3.78) é para buracos (aproximadamente) satisfeita, pois

$$\int_0^\infty d\omega [a_{(b)}(k, \omega) + b_{(b)}(k, \omega)] \simeq - \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\gamma_{(b)}(k)}{(\omega + E_k - E_F)^2 + (\gamma_{(b)}(k))^2} = -1.$$

A comparação de (3.159.a-b) com (3.95.a-b) permite ver que o efeito das interações é distribuir o peso sobre uma pequena região de energia. A largura total correspondente à meia altura é

$$\Gamma_{(b)}(k) = 2\gamma_{(b)}(k). \quad (3.161)$$

Analogamente, para estados de partícula ($k > k_F$) tem-se

$$a_{(p)}(k, \omega) \simeq \frac{\gamma_{(p)}(k)}{\pi[(\omega - E_k + E_F)^2 + (\gamma_{(p)}(k))^2]} \quad (3.162.a)$$

$$b_{(p)}(k, \omega) \simeq 0 \quad (3.162.b)$$

Com a condição (3.153) $b_{(p)}$ apresenta um pico em torno de $\omega = E_k - E_F$ e com uma razoável aproximação pode-se escrever

$$g_{(p)}(k, \omega) \simeq \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\gamma_{(p)}(k)}{[(\omega' - E_k + E_F)^2 + (\gamma_{(p)}(k))^2](\omega - E_F - v_0 - \omega' + i\eta)}$$

O cálculo dessa integral, fechando o contorno no semiplano inferior reproduz (3.128). Também a regra de soma (3.78) para partícula é (aproximadamente) satisfeita. A comparação de (3.162.a-b) com (3.93.a-b) mostra que o peso é distribuído pelas interações sobre uma pequena região de energia. A largura total da distribuição à meia altura é

$$\Gamma_{(p)}(k) = 2\gamma_{(p)}(k). \quad (3.163)$$

Finalmente, para antipartículas tem-se

$$a_{(a)}(k, \omega) \simeq 0 \quad (3.164.a)$$

$$b_{(a)}(k, \omega) \simeq -\frac{\gamma_{(a)}(k)}{\pi[(\omega - E_k - E_F)^2 + (\gamma_{(a)}(k))^2]} \quad (3.164.b)$$

onde $b_{(a)}$ apresenta um pico em torno de $\omega = E_k + E_F$ (veja-se (3.156)). Com o mesmo procedimento que para partículas e buracos mostra-se que a representação de Lehmann aproximada reduz-se ao propagador (3.140) e que a regra de soma (3.78) para antipartícula também é (aproximadamente) satisfeita.

Da comparação de (3.164.a-b) com (3.97.a-d) torna-se transparente que o efeito das interações é distribuir o peso em torno de uma pequena região que engloba o valor de energia correspondente ao caso "livre" no campo médio. A largura total à meia altura é

$$\Gamma_{(a)}(k) = 2\gamma_{(a)}(k). \quad (3.165)$$

Como era de se esperar, as larguras das distribuições Lorentzianas são os inversos dos tempos de vida dos estados correspondentes.

Capítulo 4

Cálculo da Largura de Estados de Buraco na Matéria Nuclear

Tendo por base a Hadrodinâmica Quântica I, cujos princípios básicos foram resumidamente apresentados no capítulo 2, e o formalismo desenvolvido no capítulo 3, onde entre outros resultados foram obtidos os propagadores relativísticos e a expressão da largura em termos das componentes de Lorentz da auto-energia dentro da teoria de perturbação a partir do campo médio para partícula, buraco e antipartícula, pode-se agora atacar o problema proposto neste trabalho. A rigor, do capítulo 3, apenas os resultados que se referem a estados de buraco serão usados, uma vez que se está interessado em obter larguras de estados de buraco na matéria nuclear.

Primeiramente, nesse capítulo, apresenta-se o cálculo relativístico das larguras destes estados e, com o objetivo de avaliar as características e a importância dos efeitos relativísticos, desenvolve-se também um cálculo não-relativístico. Inclui-se ainda uma discussão dos valores numéricos das partes imaginárias das componentes de Lorentz da auto-energia do buraco que contribuem para as larguras. No capítulo seguinte os resultados aqui obtidos serão comparados com as larguras extraídas de dados experimentais de reações quase-livres, onde estados de buraco estão presentes no estado final da reação.

4.1 Cálculo relativístico

Como foi mostrado no capítulo 3, o tempo de vida de um buraco no meio nuclear pode ser extraído da auto-energia do buraco $\Sigma(K)$ que é uma matriz de Dirac 4×4 .¹ Para sistemas que exibem invariância translacional, rotacional e sob reflexão espacial, como a matéria nuclear, a matriz auto-energia pode ser decomposta na forma (3.106):

$$\Sigma(K) = \Sigma^S(K) + \gamma^0 \Sigma^0(K) - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma^V(K) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma^T(K) \quad (4.1)$$

onde Σ^S , Σ^0 , Σ^V e Σ^T são funções complexas que podem ser extraídas de (4.1) tomando-se os traços:

$$\Sigma^S(K) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Sigma(K)] \quad (4.2.a)$$

$$\Sigma^0(K) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma^0 \Sigma(K)] \quad (4.2.b)$$

$$\Sigma^V(K) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma(K)] \quad (4.2.c)$$

$$\Sigma^T(K) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma(K)] . \quad (4.2.d)$$

É conveniente adotar-se uma notação capaz de condensar as equações para as quatro componentes de Lorentz em apenas uma equação. Para tanto, introduz-se um índice superior genérico L para simbolizar o índice de Lorentz ($L = S, 0, V, T$) e matrizes $\gamma^L(\hat{k})$ definidas por

$$\gamma^S(\hat{k}) = I ; \gamma^0(\hat{k}) = \gamma^0 ; \gamma^V(\hat{k}) = \vec{\gamma} \cdot \hat{k} ; \gamma^T(\hat{k}) = \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{k} . \quad (4.3)$$

Com essa notação as equações (4.2) podem ser compactadas em

$$\Sigma^L(K) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma^L(\hat{k}) \Sigma(K)] . \quad (4.4)$$

No capítulo anterior mostrou-se que a largura de estados de buraco ($k < k_F$), presumindo válida a teoria de perturbação, está relacionada com a parte imaginária das

¹Neste capítulo e nos apêndices utiliza-se a notação $K \equiv (\vec{k}, K_0)$ em vez da notação (\vec{k}, ω) utilizada no capítulo 3.

componentes de Lorentz da auto-energia $W^L(k)$ na seguinte forma:

$$\Gamma = \Gamma^0 + \Gamma^S + \Gamma^V \quad (4.5.a)$$

com

$$\Gamma^0 = 2W^0(k) \quad (4.5.b)$$

$$\Gamma^S = \frac{2m_*}{E_k} W^S(k) \quad (4.5.c)$$

$$\Gamma^V = -\frac{2k}{E_k} W^V(k); \quad (4.5.d)$$

(veja-se equações (3.117) – (3.119), (3.161) e (3.129).) Convém lembrar que na dedução da equação acima, os W 's foram considerados pequenos comparados com outras grandezas (E_k, m_*, v_0), o que é confirmado pelos resultados numéricos como pode-se avaliar mais adiante. Note-se também que W^T não aparece em (4.5) e, portanto, não precisa ser calculado. Finalmente, vale ressaltar que os Γ^L 's não possuem individualmente a interpretação de larguras, alguns podendo até ser negativos, desde que a soma Γ seja positiva.

Em mais baixa ordem em teoria de perturbação a auto-energia é dada pela soma de diagramas mostrados na figura 4.1. Usando as regras de Feynmann de ref.[7] pode-se facilmente escrever as expressões correspondentes a cada diagrama. Entretanto, com o objetivo de expressar essas contribuições compactamente, faz-se necessário introduzir uma notação adequada: o propagador bariônico (3.84) passa a ser escrito na forma

$$iG(K) = i \frac{\bar{K} + m_*}{2E_k} g(K) \quad (4.6)$$

onde $\bar{K}_\mu = K_\mu - g_\omega V_0 \delta_{\mu 0}$ e

$$g(K) = \frac{\theta(k - k_F)}{\bar{K}_0 - E_k + i\varepsilon} + \frac{\theta(k_F - k)}{\bar{K}_0 - E_k - i\varepsilon} - \frac{1}{\bar{K}_0 + E_k - i\varepsilon}; \quad (4.7)$$

o fator de vértice núcleon-méson e o propagador para mésons vetoriais são

$$iJ_{\omega;\mu} = -ig_\omega \gamma_\mu; \quad iM_\omega^{\mu\nu}(Q) = i \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{m_\omega^2}}{Q^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon}; \quad \mu, \nu = (0, 1, 2, 3); \quad (4.8)$$

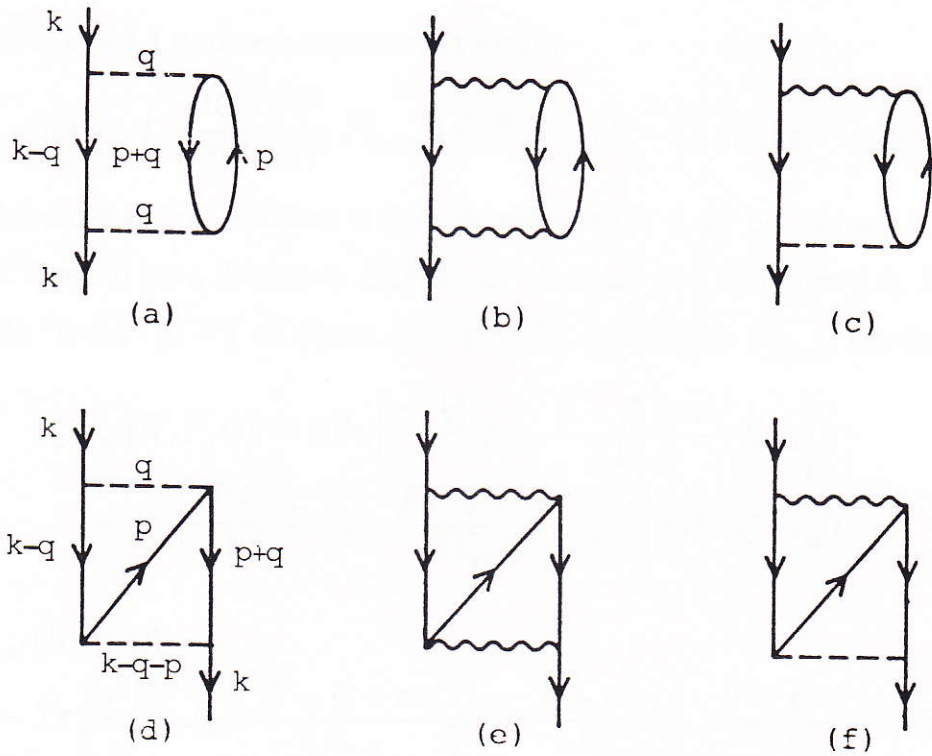


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para contribuições de mais baixa ordem para a auto-energia de um buraco nuclear. Linhas cheias representam propagadores bariônicos no campo médio; linha tracejada corresponde ao propagador de méson escalar livre e linha ondulada representa o propagador de méson vetorial livre.

e, finalmente, para mesons escalares, mantendo uma notação formalmente similar a (4.8) porém com índices μ, ν assumindo um único valor (indicado pela letra s), escreve-se

$$iJ_{\sigma;\mu} = ig_{\sigma}; \quad iM_{\sigma}^{\mu\nu}(Q) = \frac{i}{Q^2 - m_{\sigma}^2 + i\epsilon}; \quad \mu, \nu = (s). \quad (4.9)$$

Cabe observar que, como o campo de méson vetorial acopla-se à corrente bariônica conservada, a parte $Q^{\mu}Q^{\nu}$ do propagador do méson ω não contribui para as quantidades físicas e pode ser ignorada[21].

Usando (4.4) e as definições (4.6) – (4.9), a contribuição para a função Σ^L de cada

diagrama da figura 4.1 pode ser expressa na forma

$$\Sigma_{X;mm'}^L(K) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4P}{(2\pi)^4} F_{X;mm'}^L(\bar{K}, \bar{P}, Q) g(K-Q) g(P) g(P+Q) \quad (4.10)$$

onde os subíndices m, m' indicam o tipo de mésons (m e m' podem ser σ ou ω) e o subíndice X é usado para distinguir diagramas "diretos" (a-c da figura 4.1; $X = D$) dos diagramas de "troca" (d-f da figura 4.1; $X = E$). As funções $F_{X;mm'}^L$ são dadas por

$$F_{D;mm'}^L(K, P, Q) = 2Tr \left[\frac{\gamma^L(\hat{k})}{4} J_{m;\mu} \frac{\bar{K} - Q + m_*}{2E_{k-q}} J_{m';\lambda} \right] \\ \times Tr \left[\frac{P + m_*}{2E_p} J_{m;\nu} \frac{P + Q + m_*}{2E_{p+q}} J_{m';\tau} \right] M_m^{\mu\nu}(Q) M_{m'}^{\lambda\tau}(Q), \quad (4.11)$$

$$F_{E;mm'}^L(K, P, Q) = \\ - Tr \left[\frac{\gamma^L(\hat{k})}{4} J_{m;\mu} \frac{\bar{K} - Q + m_*}{2E_{k-q}} J_{m';\lambda} \frac{P + m_*}{2E_p} J_{m;\nu} \frac{P + Q + m_*}{2E_{p+q}} J_{m';\tau} \right] \\ \times M_m^{\mu\nu}(Q) M_{m'}^{\lambda\tau}(K - Q - P). \quad (4.12)$$

O fator 2 em (4.11) tem sua origem na soma sobre isospin no "loop" de núcleons.

Como as partes de antipartículas dos propagadores não contribuem para as larguras de estados de buraco, pode-se suprimi-las ao calcular (4.10) que então pode ser escrita na forma

$$\Sigma_{X;mm'}^L(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{dP_0}{2\pi} \left[\frac{\theta(E_p - E_F)}{P_0 - E_p + i\varepsilon} + \frac{\theta(E_F - E_p)}{P_0 - E_p - i\varepsilon} \right] \\ \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{dQ_0}{2\pi} F_{X;mm'}^L(K, P, Q) \left[\frac{\theta(E_{p+q} - E_F)}{P_0 + Q_0 - E_{p+q} + i\varepsilon} + \frac{\theta(E_F - E_{p+q})}{P_0 + Q_0 - E_{p+q} - i\varepsilon} \right] \\ \times \left[\frac{\theta(E_{k-q} - E_F)}{E_k - Q_0 - E_{k-q} + i\varepsilon} + \frac{\theta(E_F - E_{k-q})}{E_k - Q_0 - E_{k-q} - i\varepsilon} \right] \quad (4.13)$$

Observe-se que em (4.13) usou-se $K_0 = E_k$, consistentemente com a teoria de perturbação em mais baixa ordem, conforme comentários que seguem as equações (3.117) - (3.120) no capítulo anterior.

Realizando-se primeiramente a integral sobre Q_0 verifica-se que, dos quatro termos que decorrem do produto $g(P+Q)g(\bar{K}-Q)$ sem as partes correspondentes às antipartículas,

dois termos têm pólos no mesmo semi-plano (superior ou inferior) e, portanto, não contribuem para a auto-energia. Contribuirão apenas os termos com os pólos em lados opostos do eixo real:

$$\text{a) } Q_0 = E_{p+q} - P_0 - i\varepsilon, \quad Q_0 = E_k - E_{k-q} + i\varepsilon$$

$$\text{b) } Q_0 = E_{p+q} - P_0 + i\varepsilon, \quad Q_0 = E_k - E_{k-q} - i\varepsilon$$

resultando para (4.13)

$$\begin{aligned} \Sigma_{X;mm'}^L(k) &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{dP_0}{2\pi} \left[\frac{\theta(E_p - E_F)}{P_0 - E_P + i\varepsilon} + \frac{\theta(E_F - E_p)}{P_0 - E_P - i\varepsilon} \right] \\ &\times F_{X;mm'}^L(K, P, Q) \Big|_{Q_0=E_k-E_{k-q}} \left[\frac{\theta(E_F - E_{p+q})\theta(E_F - E_{k-q})}{P_0 + E_k - E_{k-q} - E_{p+q} - i\varepsilon} \right. \\ &\left. - \frac{\theta(E_{p+q} - E_F)\theta(E_{k-q} - E_F)}{P_0 + E_k - E_{k-q} - E_{p+q} + i\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Novamente, ao realizar a integral sobre P_0 somente os dois termos com pólos em lados opostos do eixo real dão contribuição não nula. Obtém-se como resultado

$$\begin{aligned} \Sigma_{X;mm'}^L(k) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_{X;mm'}^L(\bar{K}, \bar{P}, Q) \Big|_{Q_0=E_k-E_{k-q}}^{P_0=E_p} \\ &\times \left[\frac{\theta(E_p - E_F)\theta(E_F - E_{p+q})\theta(E_F - E_{k-q})}{E_p + E_k - E_{k-q} - E_{p+q} - i\varepsilon} \right. \\ &\left. + \frac{\theta(E_F - E_p)\theta(E_{p+q} - E_F)\theta(E_{k-q} - E_F)}{E_p + E_k - E_{k-q} - E_{p+q} + i\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como na expressão para a largura de estados de buraco (4.5) aparece apenas uma combinação das partes imaginárias das componentes de Lorentz da energia própria dos diagramas considerados, o trabalho restringe-se ao cálculo dessas quantidades, que podem ser extraídas de (4.15) usando-se a identidade simbólica

$$(\omega - i\varepsilon)^{-1} = \mathcal{P}\omega^{-1} + i\pi\delta(\omega) \quad (4.16)$$

para ω real.

Note-se que para $E_k < E_F$, ou seja, para um buraco no mar de Fermi, o segundo termo de (4.15) somente daria uma contribuição não nula a parte imaginária se $E_p > E_{k-q}$,

o que contradiz as restrições impostas pelas outras funções θ desse termo, que exigem $E_p < E_F$ e $E_{k-q} > E_F$. Assim, somente o primeiro termo contribui para a parte imaginária para $E_k < E_F$:

$$\begin{aligned}
 W_{X;mm'}^L(k) &= \pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_{X;mm'}^L(K, P, Q) \Big|_{Q_0=E_k-E_{k-q}}^{P_0=E_p} \\
 &\times \theta(E_p - E_F) \theta(E_F - E_p - E_k + E_{k-q}) \theta(E_F - E_{k-q}) \\
 &\times \delta(E_p + E_k - E_{k-q} - E_{p+q})
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Com o objetivo de escolher variáveis de integração convenientes introduz-se em (4.17) variáveis de integração extras e funções δ apropriadas, o que permite que se escreva (4.17) na forma

$$W_{X;mm'}^L(k) = \pi \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4P}{(2\pi)^4} F_{X;mm'}^L(K, P, Q) \mathcal{P}_F(K, P, Q) \tag{4.18}$$

onde \mathcal{P}_F é um fator do espaço das fases que coloca os núcleons na camada de massa efetiva e assegura a conservação de energia e as restrições impostas pelo princípio de Pauli:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_F(K, P, Q) &= \theta(P_0 - E_F) \theta(E_F - P_0 - Q_0) \theta(E_F - E_k + Q_0) \delta(P_0 - E_p) \\
 &\times \delta(Q_0 - E_k + E_{k-q}) \delta(P_0 + Q_0 - E_{p+q})
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Note-se que o campo médio V_0 correspondente ao méson vetorial não aparece explicitamente na expressão para $W_{X;mm'}^L$.

Para calcular (4.18) considerou-se o sistema fixo $OXYZ$ (OZ na direção \hat{k}) e o sistema $OX'Y'Z'$ dependente de \hat{q} (OZ' na direção de \hat{q} e OX' no plano ZOZ' , isto é o plano definido por \hat{k} e \hat{q}). Conforme mostra a figura 4.2 ϕ é o ângulo azimutal de \hat{q} com relação a $OXYZ$ e ψ é o ângulo azimutal de \hat{p} com relação a $OX'Y'Z'$.

Em geral, a função F que aparece em (4.18) depende das direções dos vetores através dos produtos escalares $\hat{k} \cdot \hat{q} = x$, $\hat{p} \cdot \hat{q} = y$ e $\hat{k} \cdot \hat{p} = xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \cos \psi$. Usando-se a relação de equivalência

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i),$$

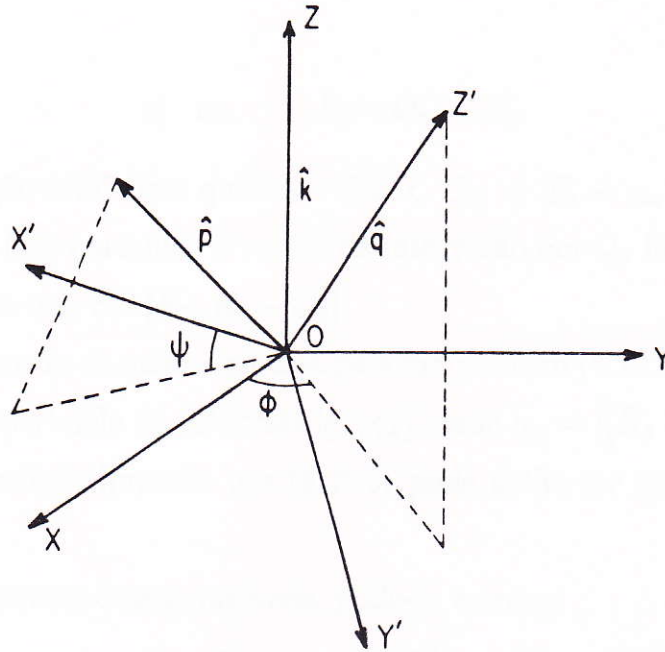


Figura 4.2: Sistemas de coordenadas usadas no cálculo das quantidades $W_{x;mm'}^L(k)$.

onde a soma é sobre os zeros x_i de $g(x)$, as funções δ por sua vez podem ser reescritas em termos das variáveis x , y e p , tomando a forma

$$\delta(P_0 - E_p) = \frac{P_0}{p} \delta\left(p - \sqrt{P_0^2 - m_*^2}\right) \quad (4.20.a)$$

$$\delta(Q_0 - E_k + E_{k-q}) = \frac{K_0 - Q_0}{kq} \delta\left(x - \frac{k^2 + q^2 - (E_k - Q_0)^2 + m_*^2}{2kq}\right) \quad (4.20.b)$$

$$\delta(P_0 + Q_0 - E_{p+q}) = \frac{P_0 + Q_0}{pq} \delta\left(y - \frac{Q_0^2 - q^2 + 2P_0Q_0}{2pq}\right) \quad (4.20.c)$$

onde $q \equiv |\vec{q}|$ e $p \equiv |\vec{p}|$.

Uma integral em (4.18) é trivial devido à simetria cilíndrica em relação ao momentum \vec{k} . Com as três condições de camada de massa presentes em (4.19) e reescritas na forma (4.20), restam quatro variáveis de integração para as quais é conveniente escolher [40] Q_0 , P_0 , q e o ângulo ψ entre os planos definidos pelos pares de vetores (\vec{q}, \vec{p}) e (\vec{q}, \vec{k}) .

As funções θ em (4.19) determinam os limites de integração em Q_0 e P_0 :

- a) $P_0 > E_F$
- b) $m_* < P_0 + Q_0 < E_F$

$$c) \quad m_* < E_k - Q_0 < E_F$$

pois a última condição estabelece que $E_k - E_F < Q_0 < E_k - m_*$ e as duas primeiras mostram que $Q_0 < 0$ e, portanto, a região de integração em Q_0 limita-se ao intervalo $[E_k - E_F, 0]$ enquanto que $P_0 \in [E_F, E_F - Q_0]$.

A condição de camada de massa imposta pela função δ em (4.20.b) pode ser satisfeita, com $|x| \leq 1$, se q pertence ao intervalo $[q_-, q_+]$, onde $q_{\pm} = [(K_0 - Q_0)^2 - m_*^2]^{1/2} \pm k$. Verifica-se que a condição imposta por (4.22.c) pode então ser sempre satisfeita, com $|y| \leq 1$.

Finalmente, em termos dessas variáveis, pode-se escrever

$$W_{X;mm'}^L(k) = \frac{1}{16\pi^3} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 \int_{E_F}^{E_F - Q_0} dP_0 \int_{q_-}^{q_+} dq \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{P_0}{k} \times (K_0 - Q_0)(P_0 + Q_0) F_{X;mm'}^L(k, P_0, Q_0, q, \psi). \quad (4.21)$$

Usando (4.11) – (4.12) e os vínculos na camada de massa que aparecem em (4.19) as funções F são facilmente calculadas. Com o objetivo de facilitar uma discussão posterior, as expressões para essas funções serão escritas em termos das variáveis Q_0 , P_0 , Q^2 e R^2 , com $R = K - P - Q$. Essas duas últimas variáveis podem ser reexpressas em termos das variáveis q e ψ usadas na integração (4.21); tem-se:

$$Q^2 = Q_0^2 - q^2 \quad \text{e} \quad R^2 = 2m_*^2 - Q^2 - 2K_0P_0 + 2\vec{k} \cdot \vec{p} \quad (4.22)$$

com

$$K_0 = E_k; \quad p = \sqrt{P_0^2 - m_*^2}; \quad (4.23.a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{p} = kp[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \cos \psi]; \quad (4.23.b)$$

$$x = \hat{k} \cdot \hat{q} = \frac{2K_0Q_0 - Q^2}{2kq}; \quad (4.23.c)$$

$$y = \hat{p} \cdot \hat{q} = \frac{2P_0Q_0 + Q^2}{2pq}. \quad (4.23.d)$$

Calculando-se os traços de (4.11) – (4.12) e definindo-se, ainda, as quantidades

$$\mathcal{V}_m(Q^2) = \frac{\zeta_m g_m^2}{Q^2 - m_m^2} \quad \text{com} \quad \zeta_\sigma = +1 \quad \text{e} \quad \zeta_\omega = -1 \quad (4.24)$$

$$D \equiv (K_0 - Q_0) P_0 (P_0 + Q_0)$$

$$\mathcal{W}_{D;mm'} = \mathcal{V}_m(Q^2) \mathcal{V}_{m'}(Q^2)/D, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{W}_{E;mm'} = -\mathcal{V}_m(Q^2) \mathcal{V}_{m'}(R^2)/4D. \quad (4.26)$$

pode-se, finalmente, escrever os resultados para as funções F na seguinte forma:

$$F_{D;\sigma\sigma}^S = \mathcal{W}_{D;\sigma\sigma} m_* (2m_*^2 - Q^2/2), \quad (4.27.a)$$

$$F_{D;\sigma\sigma}^0 = \mathcal{W}_{D;\sigma\sigma} (K_0 - Q_0) (2m_*^2 - Q^2/2), \quad (4.27.b)$$

$$F_{D;\omega\omega}^S = \mathcal{W}_{D;\omega\omega} m_* (2m_*^2 + Q^2), \quad (4.28.a)$$

$$F_{D;\omega\omega}^0 = \mathcal{W}_{D;\omega\omega} [2m_*^2 (P_0 + Q_0 - R_0) - Q^2 P_0 - R^2 (2P_0 + Q_0)] \quad (4.28.b)$$

$$F_{D;\sigma\omega}^S = F_{D;\sigma\omega}^S = \mathcal{W}_{D;\sigma\omega} m_* (2m_*^2 - Q^2/2 - R^2), \quad (4.29.a)$$

$$F_{D;\sigma\omega}^0 = F_{D;\sigma\omega}^0 = \mathcal{W}_{D;\sigma\omega} m_*^2 (2P_0 + Q_0), \quad (4.29.b)$$

$$F_{E;\sigma\sigma}^S = \mathcal{W}_{E;\sigma\sigma} m_* (2m_*^2 - Q^2/2 - R^2/2), \quad (4.30.a)$$

$$F_{E;\sigma\sigma}^0 = \mathcal{W}_{E;\sigma\sigma} [m_*^2 (P_0 + K_0) - Q^2 R_0/4 - R^2 Q_0/4] \quad (4.30.b)$$

$$F_{E;\omega\omega}^S = \mathcal{W}_{E;\omega\omega} 2m_* (m_*^2 - Q^2 - R^2), \quad (4.31.a)$$

$$F_{E;\omega\omega}^0 = \mathcal{W}_{E;\omega\omega} 2[m_*^2 K_0 + (R^2 + Q^2) P_0] \quad (4.31.b)$$

$$F_{E;\sigma\omega}^S = \mathcal{W}_{E;\sigma\omega} m_* (2m_*^2 - Q^2/2 + R^2), \quad (4.32.a)$$

$$F_{E;\sigma\omega}^0 = \mathcal{W}_{E;\sigma\omega} [m_*^2 (2P_0 - Q_0 + 4R_0) - Q^2 (K_0 - Q_0)]. \quad (4.32.b)$$

As funções $F_{E;\omega\sigma}^L$ são obtidas de (4.32) fazendo a troca de variáveis $Q \rightleftharpoons R$. As funções $F_{X;mm'}^V$ tem a mesma forma das funções $F_{X;mm'}^0$, mas com K^0 , P_0 , Q_0 e R_0 substituídos por k , $\hat{k} \cdot \vec{p}$, $\hat{k} \cdot \vec{q}$ e $\hat{k} \cdot \vec{r}$, respectivamente, onde \vec{r} é definido por $\vec{r} = \vec{k} - \vec{p} - \vec{q}$. Pode-se ainda acrescentar que as funções $F_{X;mm'}^T$ são todas identicamente nulas, exceto $F_{E;\sigma\sigma}^T$ e $F_{E;\omega\omega}^T$, cujas expressões são omitidas aqui porque elas não contribuem para a largura (veja-se (4.5)).

Uma vez obtidas as funções F resta calcular as integrais indicadas em (4.21). No apêndice A estão incluídos alguns detalhes sobre esses cálculos. Verifica-se que as integrais sobre ψ podem ser feitas analiticamente em todos os casos. Para os diagramas

"diretos" (veja-se apêndice A) as integrais sobre P_0 e q também podem ser realizadas analiticamente, ficando apenas a integral sobre Q_0 para ser feita numericamente. Para os diagramas de "troca", as integrais sobre Q_0 , P_0 e q devem ser todas calculadas numericamente.

4.2 Limite Não-Relativístico

O conhecimento da solução não-relativística para o problema proposto nesse trabalho pode ser instrutivo, tanto do ponto de vista didático, quanto do de possibilitar uma avaliação da importância e também das características do tratamento relativístico, através da comparação dos resultados.

Entenda-se por limite não-relativístico que as energias cinéticas dos núcleons são pequenas em comparação com as energias de massa de repouso efetiva, e diferenças de energias nucleônicas são calculadas não-relativisticamente. Nesse limite, o propagador relativístico no campo médio (4.6) – (4.7) pode ser escrito na forma

$$iG_{ij}(K) = \begin{cases} i\delta_{ij}g^{NR}(K) & \text{se } i, j = 1, 2 \\ 0 & \text{se } i, j \neq 1, 2 \end{cases} \quad (4.33)$$

onde i e j são índices matriciais de Dirac e

$$g^{NR}(K) = \frac{\theta(k - k_F)}{K_0 - E_k + i\varepsilon} + \frac{\theta(k_F - k)}{K_0 - E_k - i\varepsilon}. \quad (4.34)$$

Observe-se que na expressão acima, como de resto procede em toda seção, K_0 não inclui a energia de massa de repouso efetiva e $E_k = k^2/2m_*$. Por sua vez, a matriz auto-energia nucleônica nesse contexto não-relativístico toma a forma

$$\Sigma_{ij}(K) = \begin{cases} \delta_{ij}\Sigma^{NR}(K) & \text{se } i, j = 1, 2 \\ 0 & \text{se } i, j \neq 1, 2. \end{cases}$$

A contribuição para Σ^{NR} de cada diagrama da figura 4.1 pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \Sigma_{X;mm'}^{NR}(K) &= \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4P}{(2\pi)^4} F_{X;mm'}^{NR}(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \\ &\times g^{NR}(K - Q) g^{NR}(P) g^{NR}(P + Q), \end{aligned} \quad (4.35)$$

com

$$F_{D;mm'}^{NR}(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) = 4 \mathcal{V}_m(-q^2) \mathcal{V}_{m'}(-q^2), \quad (4.36)$$

$$F_{E;mm'}^{NR}(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) = - \mathcal{V}_m(-q^2) \mathcal{V}_{m'}(-r^2), \quad (4.37)$$

onde, conforme definido anteriormente, $\vec{r} = \vec{k} - \vec{p} - \vec{q}$ e \mathcal{V}_m é dada por (4.24). Note-se que ao escrever (4.36) – (4.37) as diferenças de energia nucleônica nos propagadores mesônicos foram desprezadas. Esse procedimento é consistente com a aproximação não-relativística uma vez que as massas mesônicas são da mesma ordem de grandeza da massa nucleônica efetiva.

Para o cálculo das larguras contribuem apenas as partes imaginárias da auto-energia dos diagramas considerados. Assim, seguindo os passos que levaram à obtenção de (4.18) – (4.19) a partir de (4.10) e, finalmente, à expressão (4.21) para as partes imaginárias da auto-energia relativística dos diagramas da figura 4.1, no limite não-relativístico obtém-se para essas quantidades

$$W_{X;mm'}^{NR}(k) = \frac{1}{16\pi^3} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 \int_{E_F}^{E_F - Q_0} dP_0 \int_{q_-}^{q_+} dq \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{m_s^3}{k} \\ \times F_{X;mm'}^{NR}(k, P_0, Q_0, q, \psi), \quad (4.38)$$

onde $q_{\pm} = [k^2 - 2m_s Q_0]^{1/2} \pm k$ e as funções F são escritas em termos das variáveis de integração usando os vínculos de (4.19). Note-se que esses vínculos, que no tratamento relativístico estabeleceram o conjunto de relações (4.22) e (4.23) agora fixam

$$p = \sqrt{2m_s P_0} \quad (4.39.a)$$

$$x = \hat{k} \cdot \hat{q} = \frac{2m_s Q_0 + q^2}{2kq} \quad (4.39.b)$$

$$y = \hat{p} \cdot \hat{q} = \frac{2m_s Q_0 - q^2}{2pq} \quad (4.39.c)$$

Para as contribuições diretas, todas as integrais podem ser feitas analiticamente enquanto que, para os termos de troca, três integrações devem ser realizadas numericamente. Alguns detalhes pertinentes ao cálculo dessas integrais são mostrados no apêndice B.

Somando sobre os tipos de mésons as expressões não-relativísticas (4.38), ou seja, calculando $W_X^{NR}(k) = \sum_{mm'} W_{X;mm'}^{NR}(k)$, obtém-se para as contribuições totais dos diagramas diretos e de troca da figura 4.1, respectivamente,

$$W_D^{NR}(k) = 4\pi \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^3} \frac{d^4P}{(2\pi)^3} |\mathcal{V}(-q^2)|^2 \mathcal{P}_F(K, P, Q), \quad (4.40)$$

$$W_E^{NR}(k) = -\pi \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^3} \frac{d^4P}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(-q^2) \mathcal{V}(-r^2) \mathcal{P}_F(K, P, Q), \quad (4.41)$$

onde

$$\mathcal{V}(-q^2) = \mathcal{V}_\sigma(-q^2) + \mathcal{V}_\omega(-q^2) = \frac{g_\omega^2}{q^2 + m_\omega^2} - \frac{g_\sigma^2}{q^2 + m_\sigma^2}. \quad (4.42)$$

No limite não-relativístico, a largura total do estado de buraco é dada por

$$\Gamma^{NR} = 2[W_D^{NR} + W_E^{NR}]. \quad (4.43)$$

É interessante notar que as fórmulas (4.40) – (4.42) tem uma interpretação transparente, pois $\mathcal{V}(-q^2)$ é a transformada de Fourier do potencial de Yukawa correspondente à troca de σ e ω : a largura do decaimento é calculada integrando sobre o espaço das fases apropriado a probabilidade de espalhamento na aproximação de Born de dois núcleons no mar de Fermi, um dos quais preenche o buraco e outro é ejetado acima do mar de Fermi. (Veja-se apêndice C.) A contribuição W_E^{NR} é devida à interferência entre as duas amplitudes obtidas pela troca dos núcleons no estado final.

A figura 4.3 mostra os resultados dos cálculos das funções correspondentes a ambos os diagramas diretos $W_{D;mm'}^{NR}$ e de troca $W_{E;mm'}^{NR}$, e também as somas sobre os tipos de mésons W_X^{NR} . Note-se que as funções correspondentes aos diagramas de troca $W_{E;mm'}^{NR}$ exibem o mesmo comportamento que as funções diretas $W_{D;mm'}^{NR}$, somente com sinais trocados e reduzidas por um fator 4, conforme previsto, devido à contagem em spin e isospin (veja-se (4.40) – (4.41) e note-se que os valores relevantes dos momenta transferidos pelos mésons são pequenos em comparação com as suas massas, de maneira que as integrais presentes nestas equações são aproximadamente iguais). Repare-se também que os valores finais de W_X^{NR} resultam de fortes cancelamentos entre $W_{X;\sigma\sigma}^{NR} + W_{X;\omega\omega}^{NR}$ e $W_{X;\sigma\omega}^{NR} + W_{X;\omega\sigma}^{NR}$.

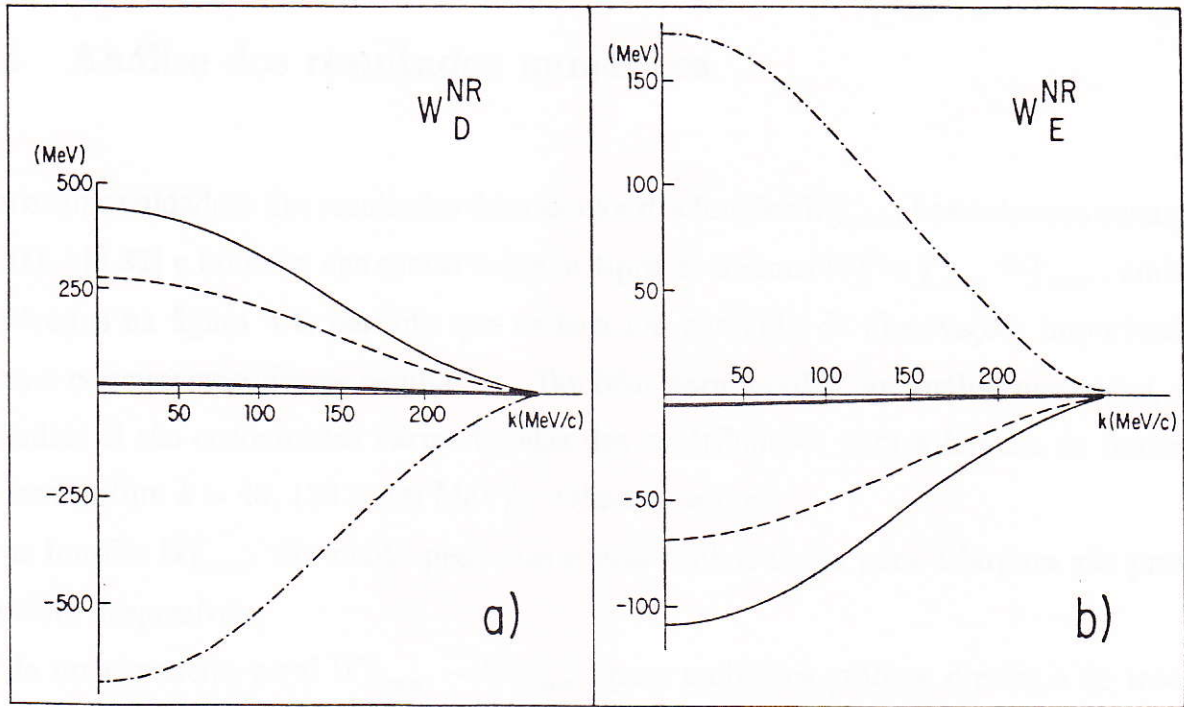


Figura 4.3: Partes imaginárias da auto-energia não-relativística dos diagramas a) diretos $W_{D;mm'}^{NR}$, e b) de troca $W_{E;mm'}^{NR}$, como função do momentum linear do buraco (linha sólida leve para $W_{X;\sigma\sigma}^{NR}$; linha tracejada para $W_{X;\omega\omega}^{NR}$ e linha composta traço-ponto para $W_{X;\sigma\omega}^{NR} + W_{X;\omega\sigma}^{NR}$). A soma $W_X^{NR} = \sum_{mm'} W_{X;mm'}^{NR}$ é representada pela linha sólida pesada.

que são individualmente muito grandes. Estes cancelamentos evidenciam a interferência destrutiva entre os termos de troca dos mésons σ e ω no potencial de Yukawa (4.42). É de se esperar que semelhantes efeitos estejam presentes nos cálculos relativísticos, que voltamos a considerar na próxima seção.

4.3 Análise dos resultados numéricos

Um exame cuidadoso dos resultados dos cálculos das funções $W_{X;mm'}^L$, baseados nas equações (4.21) – (4.32) e também das somas sobre os tipos de mésons $W_X^L = \sum_{mm'} W_{X;mm'}^L$, ambos mostrados na figura 4.4, permite que se faça um conjunto de observações importantes para a compreensão desses resultados. Também para auxiliar na análise que segue, no apêndice D são encontradas várias tabelas das contribuições para a largura de buracos de momentum $k = 40, 120$ e 200 MeV/c. Observe-se que:

- a) as funções $W_{X;mm'}^V$ são muito pequenas e suas contribuições para a largura são praticamente desprezíveis;
- b) de uma maneira geral $W_{X;mm'}^S \sim W_{X;mm'}^0$, para ambos os gráficos diretos e de troca, exceto no caso em que $m = m' = \omega$, no qual consideráveis desvios dessa regra são observados;
- c) de uma maneira geral $W_{E;mm'}^L \sim -\frac{1}{4}W_{D;mm'}^L$, para $L = 0$ ou S ; novamente o caso $m = m' = \omega$ foge a essa regra no que diz respeito à proporcionalidade numérica mantendo, entretanto, a inversão de sinal. A análise das equações (4.24) – (4.32) permite que se espere as três características apontadas acima, se o limite não relativístico é uma primeira aproximação razoável. Os resultados indicam que efeitos relativísticos são especialmente significativos para diagramas com dois mésons ω ;
- d) em cada soma W_X^L , existe um forte cancelamento entre $W_{X;\sigma\sigma}^L + W_{X;\omega\omega}^L$ e $W_{X;\sigma\omega}^L + W_{X;\omega\sigma}^L$. Isso é uma clara manifestação da interferência destrutiva entre as contribuições de troca de σ e ω para amplitude de espalhamento núcleon-núcleon. Que uma interferência desse tipo deve ocorrer é particularmente evidente da expressão não-relativística (4.42), como já mencionado;
- e) para ambos gráficos diretos e de troca, as somas sobre os tipos de mésons W_X^S e W_X^0 são ainda relativamente grandes, da mesma ordem de magnitude e de sinais opostos;
- f) as somas W_D^0 e W_E^0 são ambas positivas, enquanto as somas W_D^S e W_E^S são ambas negativas.

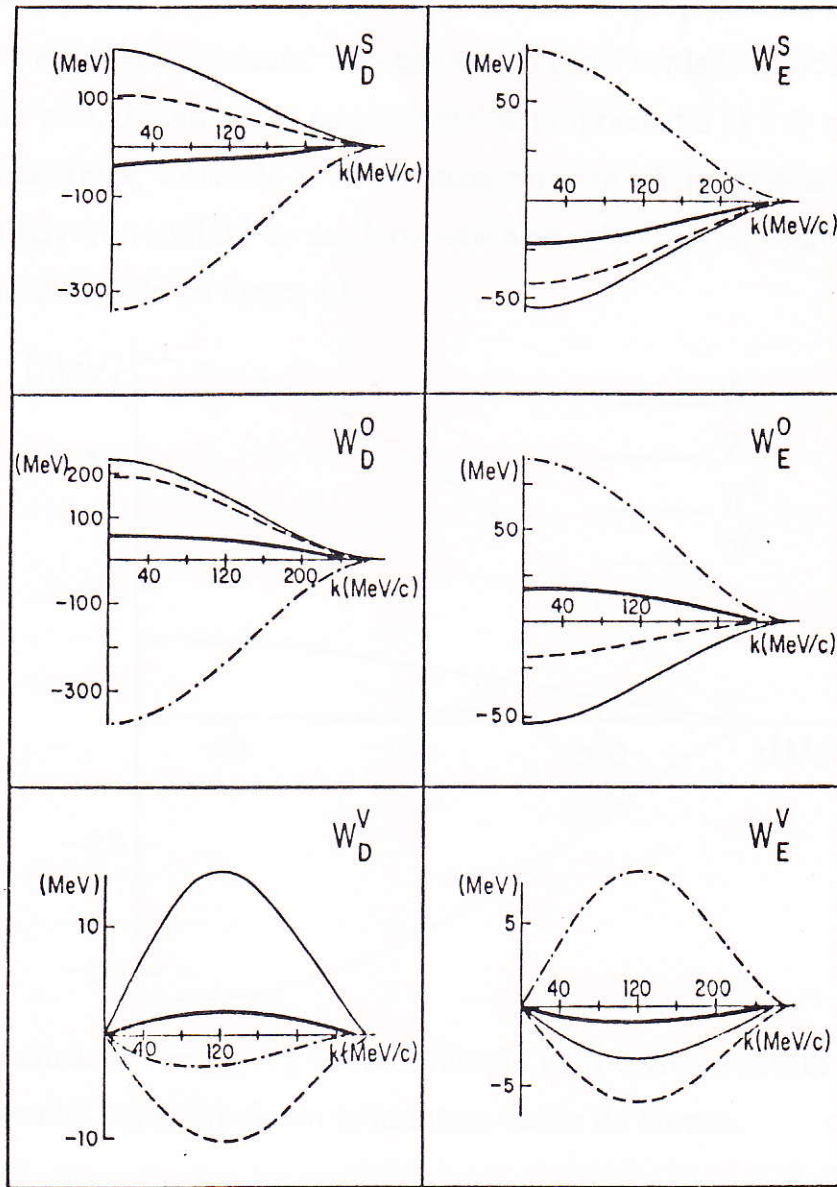


Figura 4.4: Partes imaginárias das componentes de Lorentz da auto-energia $W_{X;mm'}^L$ como função do momentum linear do buraco (linha sólida leve para $W_{X;\sigma\sigma}^L$; linha tracejada para $W_{X;\omega\omega}^L$ e linha composta traço-ponto para $W_{X;\sigma\omega}^L + W_{X;\omega\sigma}^L$. As somas $W_X^L = \sum_{mm'} W_{mm'}^L$ são representadas por linhas sólidas densas.

É interessante notar que, numa observação ligeira, as propriedades e) e f) parecem contradizer b) e c), respectivamente. Isso entretanto não é verdade devido à propriedade d). Vale a pena pois, discutir mais amplamente as propriedades e) e f) que não são tão diretamente entendidas, tornando-se assim mais curiosas. A propriedade e) estabelece que o valor da largura resultará de um forte cancelamento entre as contribuições de W^0 e W^S , conforme mostrado na figura 4.5.

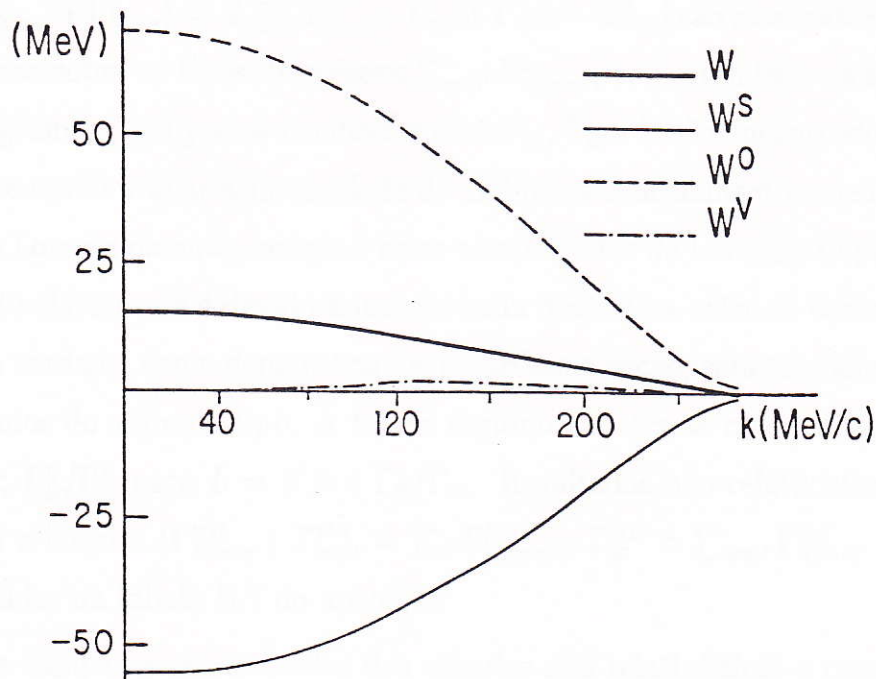


Figura 4.5: As somas $W^L = \sum_X W_X^L$ e a combinação (4.5) correspondente à meia largura (linha sólida pesada) como função do momentum linear do buraco.

Semelhante cancelamento entre as partes imaginárias das componentes de Lorentz da auto-energia tem sido verificado na literatura[40] para a parte imaginária do potencial ótico associado com estados de partículas. Esse cancelamento é também uma manifestação da interferência destrutiva entre as trocas dos mésons σ e ω . Para elucidar a origem dos cancelamentos observados nos resultados numéricos é qualitativamente apropriado considerar um caso fictício em que os mésons tem massas e constantes de acoplamento iguais. Esse caso será discutido na seção seguinte. Entretanto,

com o objetivo de propiciar uma apreciação adicional da magnitude dos cancelamentos, no apêndice são apresentadas tabelas das contribuições para a largura para buracos de momentum 40, 120 e 200 MeV/c. Assim, nas tabelas D.1 e D.2 encontram-se as contribuições devido somente ao méson σ e ω , respectivamente. As somas dessas contribuições $[\Gamma_{X;\sigma\sigma}^L + \Gamma_{X;\omega\omega}^L; \sum_X (\Gamma_{X;\sigma\sigma}^L + \Gamma_{X;\omega\omega}^L) \text{ e } \Gamma_{\sigma\sigma} + \Gamma_{\omega\omega}]$ estão dispostas na tabela D.3. As somas das contribuições devido à interferência entre os mésons $\sigma-\omega$ $[\Gamma_{X;\sigma\omega}^L + \Gamma_{X;\omega\sigma}^L = 2\Gamma_{X;\sigma\omega}^L; \sum_X (\Gamma_{X;\sigma\omega}^L + \Gamma_{X;\omega\sigma}^L) = 2\sum_X \Gamma_{X;\sigma\omega}^L; \Gamma_{\sigma\omega} + \Gamma_{\omega\sigma} = 2\Gamma_{\sigma\omega}]$ são mostradas nas tabelas D.4. Já as somas sobre os tipos de mésons $\sum_{mm'} \Gamma_{X;mm'}^L$, como também as somas sobre os tipos de diagramas $\sum_X \Gamma_X^L$ e os resultados para Γ_D , Γ_E e Γ são encontrados na tabela D.5, podendo-se então avaliar a intensidade de ambos os cancelamentos: dentro de cada componente de Lorentz da auto-energia e entre componentes de Lorentz. O primeiro tipo de cancelamento claramente é devido à interferência destrutiva entre as contribuições de troca σ e ω ; na verdade, como demonstramos na próxima seção, esta também é a origem dos cancelamentos do segundo tipo. A tabela seguinte mostra as razões $\Gamma_{E;mm'}^L/\Gamma_{D;mm'}^L$; $\Gamma_{E;mm'}/\Gamma_{D;mm'}$; Γ_E^L/Γ_D^L para $L = S, 0$ e Γ_E/Γ_D . Resultados não-relativísticos das contribuições para a largura ($\Gamma_{X;mm'}^{NR}$; $\Gamma_{mm'}^{NR} = \sum_X \Gamma_{X;mm'}^{NR}$; $\Gamma_X^{NR} = \sum_{mm'} \Gamma_{X;mm'}^{NR}$ e Γ^{NR}) podem ser apreciados na tabela D.7 do apêndice.

Resta ainda comparar os resultados dos cálculos não relativísticos e completamente relativístico para a largura. Essa comparação, para as contribuições "diretas" e de "troca", é mostrada na tabela 4.1. Maiores detalhes podem ser extraídos das tabelas apresentadas no apêndice, que permitem que se estabeleça, por exemplo, comparações entre as contribuições relativísticas para a largura devido a cada tipo de méson trocado para ambos os diagramas diretos e de troca ($\Gamma_{X;\sigma\sigma}$, $\Gamma_{X;\omega\omega}$ e $\Gamma_{X;\sigma\omega}$ para $X = D, E$) e também para soma sobre os tipos de diagramas ($\Gamma_{\sigma\sigma}$, $\Gamma_{\omega\omega}$, $\Gamma_{\sigma\omega}$). (Veja-se tabelas D.1, D.2, D.4 e D.7.)

De uma maneira geral pode-se dizer que as diferenças entre os resultados relativístico e os do limite não-relativístico para as contribuições "diretas" não são superiores a 10%. Entretanto, no que diz respeito aos valores referentes às contribuições de "troca" os resul-

$k(\text{MeV}/c)$	Γ_D	Γ_E	Γ_D^{NR}	Γ_E^{NR}
40	35.8	-6.6	38.7	-9.4
120	24.4	-2.6	25.7	-5.9
200	8.4	0.24	8.9	-1.7

Tabela 4.1: Contribuições para a largura em MeV.

tados são qualitativamente diferentes nos dois cálculos. Conforme mostra a tabela 4.1, no limite não-relativístico tem-se que $\Gamma_E^{NR} \sim -\Gamma_D^{NR}/4$, relação essa já esperada das equações (4.40) – (4.41), com já mencionado na seção 4.2. No cálculo relativístico os valores de Γ_E são bem menos negativos, exceto para muito pequenos momenta do buraco, tornando-se mesmo positivos para buracos próximos do nível de Fermi. É interessante notar que as considerações analíticas qualitativas apresentadas na seção seguinte indicam que Γ_E seria positivo no caso em que os mésons tivessem massas e constantes de acoplamento iguais.

4.4 Caso fictício: iguais massas e constantes de acoplamento para os mésons σ e ω

Para finalizar a discussão dos resultados dos cálculos desenvolvidos nesse trabalho, é interessante concentrar a atenção nos cancelamentos verificados entre as partes imaginárias das componentes de Lorentz da auto-energia de valores numéricos bastante grandes, gerando para a largura valores de razoável magnitude quando comparados com dados experimentais, como verificar-se-á no próximo capítulo.

Para tentar esclarecer a origem desses cancelamentos considere-se a situação fictícia de iguais massas e constantes de acoplamento para os mésons σ e ω . Nesse caso, no limite não-relativístico, existe completa interferência destrutiva entre as amplitudes de troca do méson σ e do méson ω e a largura é exatamente zero (veja (4.42)). Espera-se que uma grande interferência destrutiva ocorra no cálculo relativístico também. Como todas contribuições para a largura são dadas por integrais de funções F dadas pelas expressões

(4.27) – (4.32) sobre o mesmo espaço das fases, pode-se comparar a magnitude das várias contribuições comparando diretamente a magnitude das correspondentes funções F . Para tanto, é necessário fazer uma estimativa das variáveis cinemáticas que aparecem nessas funções. Definindo-se as energias cinéticas $\kappa_0 = K_0 - m_*$ e $\pi_0 = P_0 - m_*$, verifica-se que mesmo se m_* é pequeno (~ 500 MeV), $\pi_0 \lesssim 100$ MeV e $\kappa_0 \lesssim 50$ MeV. Note-se também que as transferências de momentum são pequenas, $-Q^2 \sim q^2 \sim (200 \text{ MeV}/c)^2$ ou $(300 \text{ MeV}/c)^2$ na maior parte do espaço das fases; o mesmo acontecendo com $-R^2$. Assim, tem-se

$$-Q^2 \pi_0 \ll -Q^2 m_* \sim m_*^2 \pi_0 \ll m_*^3. \quad (4.44)$$

Semelhantes desigualdades se verificam com π_0 substituído por uma das variáveis κ_0 ou Q_0 ou R_0 , e também com $-Q^2$ substituído por $-R^2$. O sinal \ll usado em (4.44) significa um fator de ordem 5 ou maior se m_* é maior do que 500 MeV.

Nas considerações qualitativas que seguem, a pequena contribuição para a largura devido à componente Σ^V da auto-energia será ignorada. Define-se, por conveniência,

$$F_{X+}^L = f_L(F_{X;\sigma\sigma}^L + F_{X;\omega\omega}^L); \quad F_{X-}^L = f_L(F_{X;\sigma\omega}^L + F_{X;\omega\sigma}^L); \quad X \equiv D, E \quad (4.45)$$

onde $f_0 = 1$ e $f_S = m_*/K_0$ (veja-se (4.5)). Usando as definições anteriores para as energias cinética, pode-se aproximadamente tomar $f_S \simeq 1 - \kappa_0/m_*$.

Considere-se inicialmente os gráficos "diretos". O efeito da interferência entre a troca do méson σ e do méson ω pode ser avaliado comparando-se $F_{D+} \equiv F_{D+}^S + F_{D+}^0$ com $F_{D-} \equiv F_{D-}^S + F_{D-}^0$. Quando $m_\sigma = m_\omega$ e $g_\sigma = g_\omega$ tem-se $\mathcal{W}_{X;\sigma\sigma} = \mathcal{W}_{X;\omega\omega} = -\mathcal{W}_{X;\sigma\omega} = -\mathcal{W}_{X;\omega\sigma} \equiv \mathcal{W}_X$ (veja-se (4.24) – (4.26)) e, portanto, de (4.27) – (4.29) obtém-se

$$F_{D+} = \mathcal{W}_D [2m_*^2(4m_* - Q_0 - 2R_0) - Q^2(m_* + \kappa_0 + \pi_0 - Q_0/2) + 2R^2(m_* + \pi_0 + Q_0/2)] \quad (4.46.a)$$

$$F_{D-} = -\mathcal{W}_D [2m_*^2(4m_* - Q_0 - 2R_0) - (Q^2 + 2R^2)(m_* - \kappa_0)] \quad (4.46.b)$$

Somando essas expressões, os termos proporcionais a m_*^3 se cancelam; o mesmo acon-

tece com os termos $O(m_*^2 Q_0)$ e $O(m_* Q^2)$. Resta apenas

$$F_D = F_{D+} + F_{D-} = \mathcal{W}_D [-Q^2(2\kappa_0 + \pi_0 - Q_0/2) - 2R^2(\kappa_0 + \pi_0 + Q_0/2)] \quad (4.47)$$

Por outro lado, se se deseja verificar como a interferência entre a troca do σ e do ω afeta W_D^S e W_D^0 separadamente, deve-se calcular

$$F_D^S = F_{D+}^S + F_{D-}^S = \mathcal{W}_D(m_* - \kappa_0)(3Q^2/2 + 2R^2) \quad (4.48.a)$$

$$\begin{aligned} F_D^0 &= F_{D+}^0 + F_{D-}^0 \\ &= \mathcal{W}_D [-Q^2(3m_* + R_0 + 3\pi_0)/2 - R^2(2m_* + 2\pi_0 + Q_0)] \end{aligned} \quad (4.48.b)$$

que mostra que os termos $O(m_*^3)$ se cancelam separadamente em F_D^S e F_D^0 , mas os termos $O(m_* Q^2)$ permanecem em ambos. O cancelamento desses termos somente acontece quando se somam F_D^S e F_D^0 para obter (4.47).

Procedimento análogo para os diagramas de "troca" conduz a

$$F_E^S = F_{E+}^S + F_{E-}^S = -3\mathcal{W}_E(m_* - \kappa_0)(Q^2 + R^2) \quad (4.49.a)$$

$$\begin{aligned} F_E^0 &= F_{E+}^0 + F_{E-}^0 \\ &= 3\mathcal{W}_E[(m_* + \pi_0)(Q^2 + R^2) + (Q^2 R_0 + R^2 Q_0)/4] \end{aligned} \quad (4.49.b)$$

$$\begin{aligned} F_E &= F_E^S + F_E^0 \\ &= 3\mathcal{W}_E[(\kappa_0 + \pi_0)(Q^2 + R^2) + (Q^2 R_0 + R^2 Q_0)/4]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Observe-se que também aqui os termos $O(m_*^3)$ cancelam-se separadamente em F_E^S e F_E^0 , mas os termos $O(m_* Q^2)$ cancelam-se somente na soma $F_E^S + F_E^0$.

Como $-Q^2$ e $-R^2$ são pequenos comparados com o quadrado das massas mesônicas tem-se $\mathcal{W}_E \simeq -\mathcal{W}_D/4$ (veja-se (4.25) – (4.26)) e, portanto, aproximadamente $F_{E;mm'}^L \simeq -F_{D;mm'}^L/4$ para cada tipo de méson. Entretanto, quando se soma sobre os tipos de mésons a proporção $F_E^L \simeq -F_D^L/4$ não se mantém. Note-se também, de (4.48) e (4.49), que F_D^S e F_E^S são ambos negativos, enquanto F_D^0 e F_E^0 são ambos positivos. Ademais,

como $\pi_0 > |Q_0|$ e $\pi_0 > |R_0|$, (4.50) mostra que Γ_E , um pouco surpreendentemente, é mesmo positivo.

Convém lembrar que todas essas considerações dizem respeito ao caso fictício $m_\sigma = m_\omega$ e $g_\sigma = g_\omega$. Contudo, como $-Q^2$ e $-R^2$ são pequenos em comparação com m_σ^2 e m_ω^2 é fácil ver de (4.24) – (4.26) que para que essas considerações se mantenham aproximadamente verdadeiras é suficiente que $C_\sigma^2 \simeq C_\omega^2$, relação essa que, numa aproximação um tanto grosseira, é satisfeita pelos parâmetros usados nos cálculos. (Veja-se (2.29).)

Resumindo a discussão sobre a influência que interferência $\sigma-\omega$ exerce na largura, pode-se dizer que os resultados são da ordem $(q^2/m_\sigma^2)^2$ quando comparados com os resultados que se obteria se somente uma espécie de méson tivesse sido considerado. Mas os cancelamentos presentes nas somas W_X^L [item d) da seção 4.3] dão resultados da ordem q^2/m_σ^2 quando comparados aos termos individuais. Logo, deve ocorrer um segundo cancelamento na combinação de W^S e W^0 para obter uma largura de ordem (q^2/m_σ^2) comparada com W^S e W^0 . O fato de no primeiro cancelamento os termos de ordem (q^2/m_σ^2) não desaparecerem, pode ser interpretado como uma consequência dos diferentes caracteres de Lorentz dos dois mésons. Em particular, como um resultado do caráter vetorial do méson ω , esses termos tendem a forçar $W_{X;\omega\omega}^S$ para baixo e $W_{X;\omega\omega}^0$ para cima. Isso pode ser conferido nas equações (4.27) – (4.32) e é evidente na figura 4.4. Esses efeitos são também responsáveis pela propriedade f) na seção anterior; (veja-se equações (4.48) e (4.49)).

Capítulo 5

Comparação com Resultados de Experiências de Espalhamento Quase-Livres

Uma vez de posse dos resultados para a largura de estados de buraco busca-se a comparação desses com os resultados experimentais para tais larguras, já que os valores calculados, mesmo exibindo ordem de grandeza adequada, tiveram sua origem em cancelamentos entre valores numéricos de ordem superior. Estados de buraco nucleares estão presentes no estado final de reações quase-livres[15].

Em um processo de espalhamento quase-livre uma partícula de energia média arranca um núcleon do núcleo sem que ocorram outras interações violentas entre o núcleo e as partículas incidente ou emergentes. As primeiras experiências que demonstraram que um próton de energia média é espalhado no núcleo como se esse consistisse de núcleons aproximadamente livres foram realizadas em Berkeley em 1952[41]. Da distribuição angular dos prótons emergentes que são detectados em coincidência (originários do mesmo evento) pode-se estimar a distribuição de momentum de prótons nucleares. Em 1954[42], com prótons incidentes de 185 MeV, ambas energias e momenta dos pares de prótons emergentes em coincidência foram determinados. No espectro de energia dos prótons ligados observou-se a presença de picos correspondentes aos vários estados do modelo de camadas dos quais os prótons eram arrancados. Essas experiências quase-livres também determinaram a distribuição de momentum desses estados. As larguras dos picos no es-

pectro de energia correspondem aos tempos de vida dos estados de buraco gerados nesses processos. Dessa maneira pode-se dizer que essas experiências representaram um marco histórico, pois foram as primeiras medidas que mostraram a existência e possibilitaram o estudo dos estados mais internos do modelo de camadas.

Investigações de processos quase-livres começaram com experiências $(p,2p)$ [41,42]. Seguiram-se estudos de espalhamento $(e,e'p)$ que foram propostos por pesquisadores dessa Instituição[43], tendo sido as primeiras experiências realizadas em Frascati[44]. Posteriormente foram estudados processos envolvendo "clusters" nucleares no canal de saída[45] e reações (p,pn) [46] e, mais recentemente, espalhamentos $(\pi,\pi'p)$ [47] têm sido alvo de investigação. Revisões completas de processos quase-livres elétron-próton e núcleon-núcleon foram publicados em 1984[48] e 1985[49], respectivamente.

Como já mencionado, esse tipo de experimento permite que se estude as distribuições de momentum e de energia de separação dos núcleons no núcleo, pois para uma partícula incidente de energia bem definida, a existência de estados de partícula única é comprovada pela presença de picos no espectro de soma das energias dos pares de partículas que emergem em coincidência, e, a correlação angular entre essas partículas fornece informação sobre as distribuições de momentum desses estados. Por sua vez, as larguras destes picos estão relacionadas com o tempo de vida do buraco na camada correspondente no núcleo residual.

Da figura 5.1, que mostra, para um número significativo de núcleos, as larguras e energias de separação de estados de buraco obtidos de espalhamento quase-livre, observa-se que para núcleos leves e médios, para um dado núcleo, quanto mais profunda a camada da qual o núcleon é arrancado, mais largo é o correspondente pico no espectro de energia de separação. Naturalmente esse tipo de comportamento é esperado, pois o modo principal de decaimento consiste em um núcleon cair no buraco existente no núcleo, expelindo um outro núcleon do núcleo. Um buraco mais profundo corresponde a um núcleo de maior energia de excitação tendo, portanto, mais canais de decaimento e um maior espaço das fases para cada um deles. Também pode-se dizer da figura que, para uma dada camada

nuclear, a largura aumenta com o número atômico até atingir uma certa saturação.

É claro que os resultados obtidos dos cálculos para as larguras de estados de buraco na matéria nuclear infinita não podem ser diretamente comparados com os resultados experimentais para núcleos finitos. Seria necessário, em princípio, realizar um cálculo auto-consistente para cada núcleo considerado, procedimento esse que se tornaria impraticável.

As larguras calculadas para matéria nuclear dependem de somente uma variável, que até então foi tomada como sendo o momentum linear do estado de buraco, conforme cálculos apresentados no capítulo anterior. Entretanto, com o objetivo de estabelecer uma comparação entre os resultados para matéria nuclear com os resultados experimentais para núcleos finitos parece adequado usar como parâmetro a profundidade do estado de buraco sob a superfície de Fermi, medida em unidades de energia, pois esse parâmetro corresponde à energia de excitação do estado de buraco, que é o fator principal na determinação da largura. A comparação portanto se dará entre a largura observada de um estado de buraco em um núcleo finito com a largura para um estado de buraco na matéria nuclear com a mesma energia de separação.

Esse método de comparação parece razoável, uma vez que a energia de excitação de um estado de buraco define a energia e o espaço das fases disponíveis para a criação de um par partícula-buraco, o que estabelece o fim da existência do estado de buraco. Conforme mostra a figura 5.1, os resultados experimentais exibem uma certa tendência qual seja, para uma dada energia de excitação, as larguras dos estados de buraco para diferentes núcleos são semelhantes. Espera-se, dessa maneira um pouco indireta, estar levando em conta o principal efeito do tamanho nuclear na largura do estado de buraco.

Uma vez definido o método de comparação outras dificuldades emergem no que diz respeito à seleção de resultados experimentais correspondentes aos tempos de vida de estados de buraco calculados nesse trabalho, pois várias das larguras experimentais incluem distâncias entre níveis de estados de buraco único não-resolvidos, desdobramento de níveis devido à interação spin-órbita e misturas de configurações relacionadas com deformações. Essas larguras seguramente não são adequadas para comparação com nossos

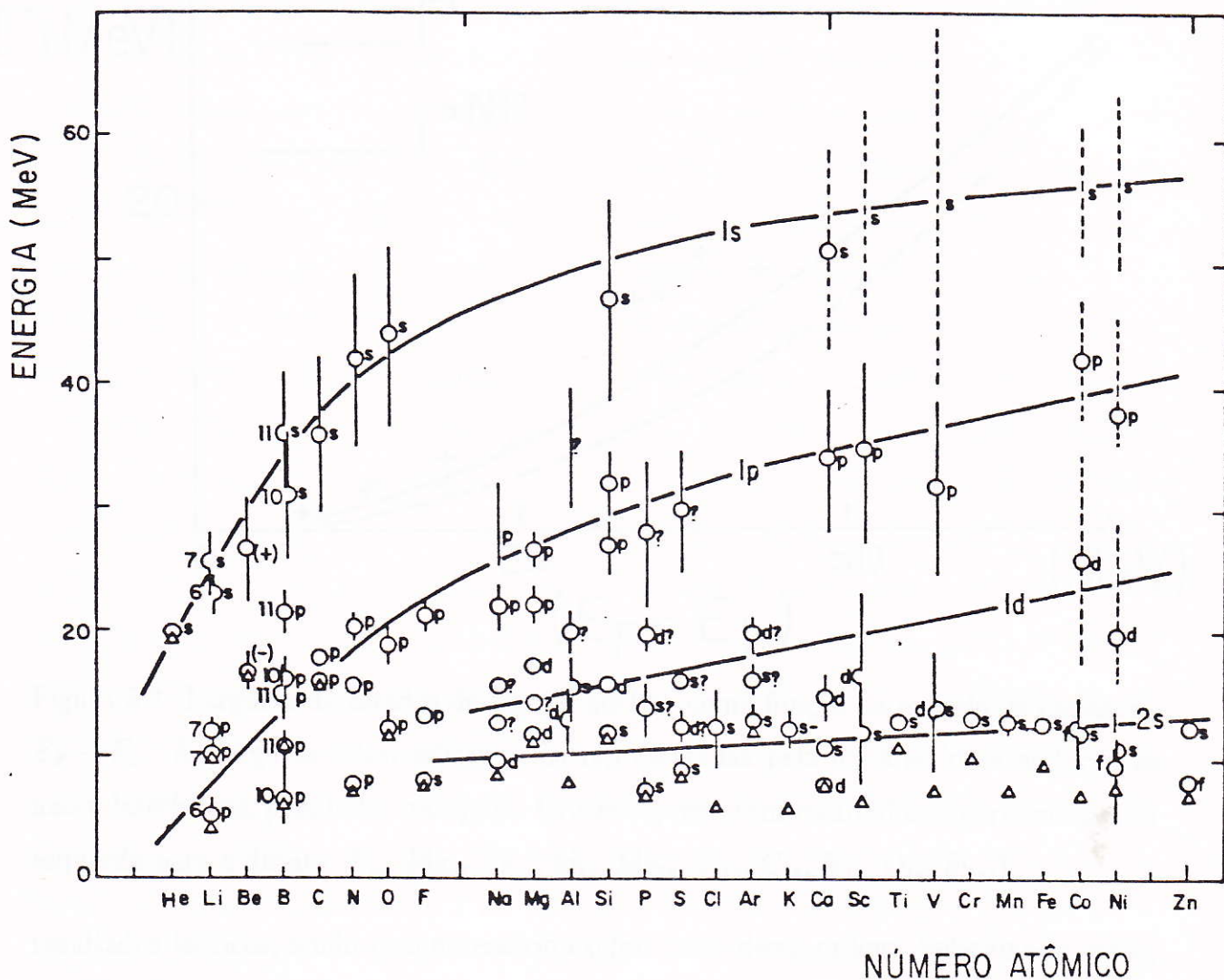


Figura 5.1: Energias de separação, larguras e indicações de momentum angular de estados de buraco obtidos de experiências quase-livres, como funções do número atômico. A posição de um máximo é indicada por um círculo; linhas pontilhadas são usadas para níveis incertos. Os triângulos indicam as energias de separação do próton menos ligado. (Extraída de [15].)

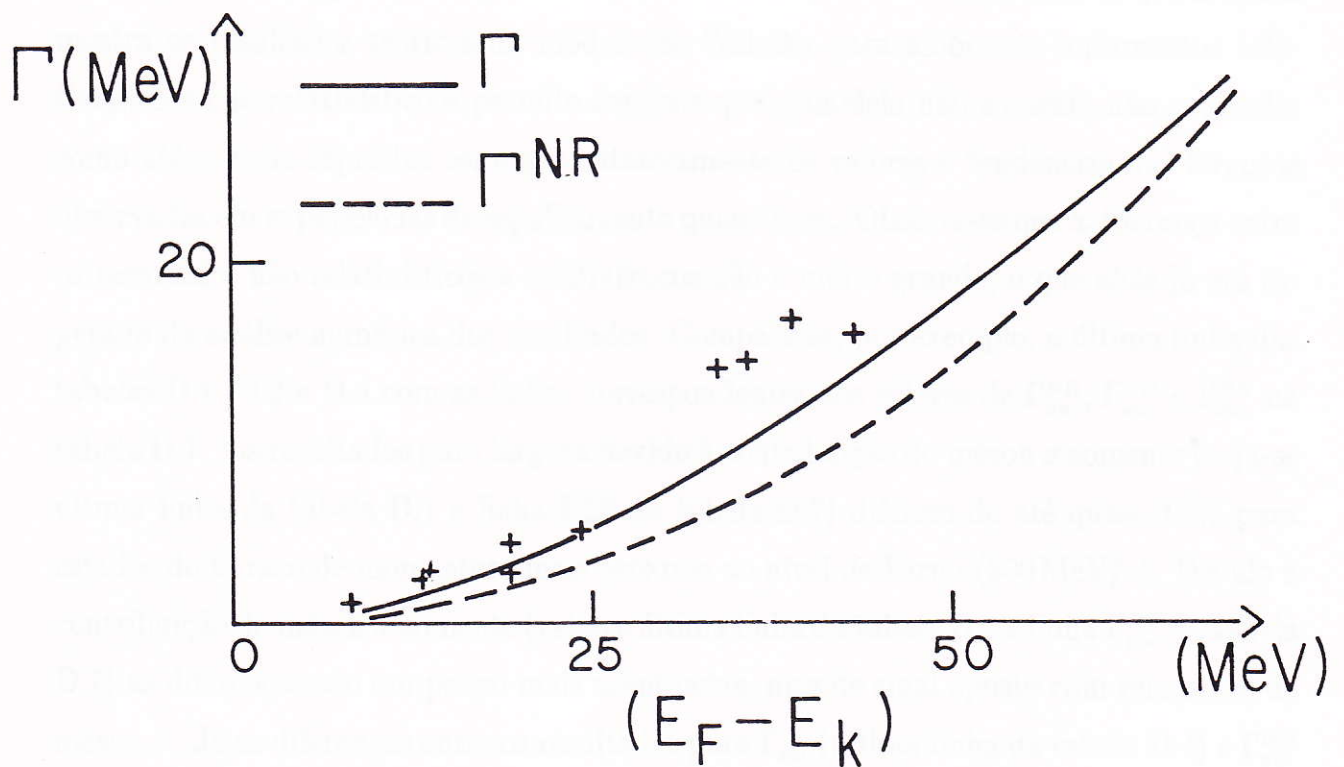


Figura 5.2: Larguras de estados de buraco nuclear como função da energia de excitação $E_F - E_k$. As larguras relativísticas estão representadas pela linha sólida e as larguras não-relativísticas, pela linha tracejada. Cruzes representam resultados experimentais (da esquerda para a direita: F_{1p} , Mg_{1p} , Li_{1s} , Si_{1p} , Mg_{1p} , Si_{1p} , C_{1s} , N_{1s} , O_{1s} , Si_{1s} .)

resultados teóricos, sendo pois necessário excluir casos dessa ordem. Seleciona-se então, para fins de comparação, apenas casos nos quais essas complicações não estão presentes. As larguras dos picos nos espectros de energia experimental apresentam incertezas estimadas em até 15% de seus valores. Deve-se também levar em conta que as correlações de curto alcance que originam altas componentes de momentum, as quais são absorvidas provavelmente por mais de um núcleon, podem influenciar a largura dos picos e não estão incluídas nas nossas considerações.

A comparação das larguras calculadas com os resultados experimentais selecionados pode ser apreciada na figura 5.2 que mostra que, apesar das incertezas recentemente

mencionadas a comparação é consideravelmente encorajadora. Cabe ressaltar que a figura mostra os resultados teóricos do modelo de Walecka para ambos os tratamentos relativístico e não-relativístico e permite concluir que o modelo não somente não contradiz como até mesmo reproduz semi-quantitativamente os valores e tendências das larguras observadas em experiências de espalhamento quase-livre. Observe-se que a diferença entre os resultados não-relativísticos e relativísticos não é muito grande, o que aliás já era esperado da análise numérica dos resultados. Compare-se, por exemplo, a última linha das tabelas D.1, D.2 e D.4 com as linhas correspondentes aos valores de $\Gamma_{\sigma\sigma}^{NR}$, $\Gamma_{\omega\omega}^{NR}$ e $\Gamma_{\sigma\omega}^{NR}$ na tabela D.7. Os resultados para largura devido à contribuição do méson σ somente (veja-se última linha da tabela D.1 e linha $\Gamma_{\sigma\sigma}^{NR}$ na tabela D.7) diferem de até quase 15 % para estados de buraco de momentum mais próximo ao nível de Fermi (200 MeV/c). Devido à contribuição do méson ω somente (veja-se última linha da tabela D.2 e linha $\Gamma_{\omega\omega}^{NR}$ na tabela D.7) as diferenças são um pouco mais acentuadas, mas de sinal oposto com relação as do méson σ . Já as diferenças entre os resultados para $\Gamma_{\sigma\omega}$ (última linha da tabela D.4) e $\Gamma_{\sigma\omega}^{NR}$ (tabela D.7) são realmente muito pequenas (inferiores a 5 %). A pequena diferença entre os resultados relativísticos e não-relativísticos também pode ser apreciada nos resultados das contribuições diretas mostradas na tabela 4.1. Já as contribuições de troca (também mostradas na tabela 4.1) exibem diferenças um pouco mais significativas, especialmente para buracos mais próximos do nível de Fermi, mas essas contribuições alteram muito pouco a largura total do buraco. Claramente, essas diferenças não muito expressivas entre os resultados relativísticos e não-relativísticos eram esperadas, uma vez que todos os núcleons envolvidos nesse processo tem energias cinéticas consideravelmente menores do que suas massas efetivas.

Note-se que as larguras relativísticas estão mais próximas dos resultados experimentais do que as não-relativísticas. Cabe entretanto lembrar que os parâmetros usados nos cálculos foram fixados por um cálculo relativístico na matéria nuclear e, provavelmente, a consequência mais importante desse procedimento diz respeito à considerável redução da massa efetiva nucleônica devido ao grande campo médio escalar atrativo.

Como decorrência dessa redução da massa efetiva, a velocidade do buraco aumenta e, portanto, espera-se que os efeitos relativísticos tenham um destaque um pouco maior nesse caso do que num modelo no qual a massa efetiva tivesse um valor próximo ao da massa nucleônica livre.

Capítulo 6

Conclusões e Comentários Finais

Da comparação entre os resultados obtidos dos cálculos apresentados no capítulo 4 e os resultados experimentais extraídos de dados de reações quase-livres (mostrados no capítulo 5), observa-se que, dentro das incertezas experimentais e teóricas, o modelo de Walecka reproduz adequadamente as larguras experimentais de estados de buraco nuclear. Tal sucesso é surpreendente uma vez que os parâmetros do modelo são fixados pelas propriedades de campo médio. Os resultados relativísticos estão um pouco mais próximos dos experimentais do que os não-relativísticos. Isso mostra que os efeitos relativísticos introduzem pequenas, mas não desprezíveis, modificações nos resultados finais e que essas modificações tendem a melhorar a concordância com os dados experimentais. É interessante atentar para as diferenças entre os resultados relativísticos e não-relativísticos, separadamente, para as contribuições diretas e de troca para a largura. Enquanto os resultados relativísticos e não-relativísticos para as contribuições diretas quase não diferem, as contribuições de troca para a largura não são corretamente dadas, mesmo qualitativamente, no limite não-relativístico.

As larguras obtidas para os estados de buraco resultaram do forte cancelamento entre grandes componentes de Lorentz da decomposição da parte imaginária da auto-energia do buraco, devido à forte interferência destrutiva entre os mésons σ e ω . A literatura refere a um comportamento semelhante na obtenção do potencial ótico para estados de partícula [40]. Efeito contrário é observado no cálculo de larguras para estados de antinúcleon

profundamente ligados devido à interferência construtiva entre as contribuições de troca de mésons σ e ω que ocorre na interação núcleon-antinúcleon. Nesse caso as componentes de Lorentz se somam resultando valores consideravelmente grandes para as larguras[50].

O modelo de Walecka e outros modelos de teoria de campo médio que se seguiram a ele obtiveram considerável sucesso no tratamento de muitos problemas de física nuclear e são atualmente alvo de investigações tanto no que diz respeito aos efeitos de correlações na RPA (Random Phase Approximation)[51] quanto à expansão em loops da densidade de energia[32,33]. Assim, esses modelos que do ponto de vista prático se revelaram potencialmente atraentes na solução de muitos problemas, representam agora a motivação para a busca de uma descrição teórica adequada de teorias de acoplamento forte.

APÊNDICE A

Conforme citado no final da seção 4.1 as integrais sobre ψ na equação (4.21) podem ser feitas analiticamente em todos os casos. Isso pode ser verificado analisando as expressões (4.27)–(4.32). Observe-se que as quantidades $\mathcal{W}_{D;mm'}$ (veja-se (4.25)) não dependem de ψ . Em $F_{D;\omega\omega}^0$, $F_{D;\sigma\omega}^S$ e $F_{D;\sigma\omega}^V$ aparece um termo proporcional a $\cos \psi$, que dá uma contribuição nula; em $F_{D;\omega\omega}^V$ além de um termo desse tipo há também um termo proporcional a $\cos^2 \psi$ que é trivialmente calculado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \cos^2 \psi = 1/2. \quad (\text{A.1})$$

Todas outras integrais sobre ψ para as contribuições diretas são triviais:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} = 1. \quad (\text{A.2})$$

Já no caso das contribuições de troca, $\mathcal{W}_{E;mm'}$ exibem dependência em ψ sob a forma $(A + B \cos \psi)^{-1}$ e, portanto, todas as funções F dependem de ψ . De maneira geral essa dependência implica em resolver uma integral do tipo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{C + D \cos \psi + E \cos^2 \psi}{A + B \cos \psi} \quad (\text{A.3})$$

com $A < 0$, $B > 0$ mas $|A| > B$. A solução dessa integral tem a forma

$$-\frac{C}{\sqrt{A^2 - B^2}} + \frac{D}{B} \left(1 + \frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}} \right) - E \left(\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}} + \frac{1}{A - \sqrt{A^2 - B^2}} \right). \quad (\text{A.4})$$

A constante E é diferente de zero somente em $F_{E;\omega\omega}^V$, enquanto que $D = 0$ somente em $F_{E;\sigma\omega}^0$.

Definindo-se

$$S^2 = 2m_s^2 - Q^2 - 2K_0 P_0 + 2kpxy \quad (\text{A.5.a})$$

e

$$T^2 = 2kp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}, \quad (\text{A.5.b})$$

a quantidade R^2 definida em (4.22) pode ser expressa na forma

$$R^2 = S^2 + T^2 \cos \psi. \quad (\text{A.6})$$

Em termos dessas variáveis as quantidades $\mathcal{W}_{E;mm'}$ (veja-se (4.26)) podem ser escritas como

$$\mathcal{W}_{E;mm'} = -\frac{\mathcal{V}_m(Q^2)}{4D} \frac{\zeta_{m'} g_{m'}^2}{A_{m'} + B \cos \psi} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$A_{m'} = S^2 - m_{m'}^2 \quad (\text{A.8.a})$$

$$B = T^2. \quad (\text{A.8.b})$$

Assim, realizando-se a integração sobre ψ e definindo-se ainda a quantidade

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m'}(S^2, T^2) &= (A_{m'}^2 - B^2)^{1/2} \\ &= [S^4 - T^4 + m_{m'}^2(m_{m'}^2 - 2S^2)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

a expressão (4.21) passa a ter a seguinte forma

$$W_{X;mm'}^L(k) = \frac{1}{16\pi^3} \frac{1}{k} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 \int_{E_F}^{E_F - Q_0} dP_0 \int_{q_-}^{q_+} dq \mathcal{F}_{X;mm'}^L(k, P_0, Q_0, q) \quad (\text{A.10})$$

onde, agora, as funções \mathcal{F} são dadas por

$$\mathcal{F}_{D;\sigma\sigma}^S = g_\sigma^4 m_* (2m_*^2 - Q^2/2) / (Q^2 - m_\sigma^2)^2, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{F}_{D;\sigma\sigma}^0 = g_\sigma^4 (K_0 - Q_0) (2m_*^2 - Q^2/2) / (Q^2 - m_\sigma^2)^2, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{F}_{D;\omega\omega}^S = g_\omega^4 m_* (2m_*^2 + Q^2) / (Q^2 - m_\omega^2)^2, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{F}_{D;\omega\omega}^0 = g_\omega^4 [2m_*^2(2P_0 + 2Q_0 - K_0) - Q^2 P_0 - S^2(2P_0 + Q_0)] / (Q^2 - m_\omega^2)^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{F}_{D;\sigma\omega}^S = \mathcal{F}_{D;\omega\sigma}^S = -g_\sigma^2 g_\omega^2 m_* (2m_*^2 - Q^2/2 - S^2) / [(Q^2 - m_\sigma^2)(Q^2 - m_\omega^2)], \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{F}_{D;\sigma\omega}^0 = \mathcal{F}_{D;\omega\sigma}^0 = -g_\sigma^2 g_\omega^2 m_*^2 (2P_0 + Q_0) / [(Q^2 - m_\sigma^2)(Q^2 - m_\omega^2)], \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{F}_{E;\sigma\sigma}^S = g_\sigma^4 m_* [1/2 + (2m_*^2 - Q^2/2 - m_\sigma^2/2) / \mathcal{H}_\sigma] / [4(Q^2 - m_\sigma^2)], \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E;\sigma\sigma}^0 &= -g_\sigma^4 \{ -Q_0/4 - [m_*^2(P_0 + K_0) - Q^2 R_0/4 \\ &\quad - m_\sigma^2 Q_0/4] / \mathcal{H}_\sigma \} / [4(Q^2 - m_\sigma^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{F}_{E;\omega\omega}^S = -g_\omega^4 2m_* [-1 - (m_*^2 - Q^2 - m_\omega^2) / \mathcal{H}_\omega] / [4(Q^2 - m_\omega^2)], \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{F}_{E;\omega\omega}^0 = -g_\omega^4 2 \{ P_0 - [m_*^2 K_0 + (Q^2 + m_\omega^2) P_0] / \mathcal{H}_\omega \} / [4(Q^2 - m_\omega^2)], \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{F}_{E;\sigma\omega}^S = g_\sigma^2 g_\omega^2 m_* [1 - (2m_*^2 - Q^2/2 + m_\omega^2)/\mathcal{X}_\omega]/[4(Q^2 - m_\sigma^2)], \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{F}_{E;\omega\sigma}^S = g_\sigma^2 g_\omega^2 m_* [-1/2 - (2m_*^2 + Q^2 - m_\sigma^2/2)/\mathcal{X}_\sigma]/[4(Q^2 - m_\omega^2)], \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{F}_{E;\sigma\omega}^0 = -g_\sigma^2 g_\omega^2 [m_*^2(2\bar{P}_0 - Q_0 + 4R_0) - Q^2(K_0 - Q_0)]/[4\mathcal{X}_\omega(Q^2 - m_\sigma^2)] \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E;\omega\sigma}^0 &= g_\sigma^2 g_\omega^2 \{-(\bar{P}_0 + Q_0) - [m_*^2(2\bar{P}_0 + 4Q_0 - R_0) \\ &- (\bar{P}_0 + Q_0)m_\sigma^2]/\mathcal{X}_\sigma\}/[4(Q^2 - m_\omega^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A seguir transcreve-se os resultados da integração sobre ψ das funções $\mathcal{F}_{X;mm'}^V$, uma vez que, com excessão de $\mathcal{F}_{D;\sigma\sigma}^V$ e $\mathcal{F}_{D;\sigma\omega}^V$, elas não podem ser completamente obtidas de $\mathcal{F}_{X;mm'}^0$, simplesmente fazendo a substituição de K_0 , \bar{P}_0 e Q_0 por k , pxy e qx , respectivamente. Observe-se que nessas expressões onde aparecem as letras p , x e y deve-se colocar suas expressões em termos das variáveis de integração Q_0 , \bar{P}_0 e q dadas em (4.23).

$$\mathcal{F}_{D;\sigma\sigma}^V = g_\sigma^4 (k - qx)(2m_*^2 - Q^2/2)/(Q^2 - m_\sigma^2)^2 \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{D;\omega\omega}^V &= g_\omega^4 \{[2m_*^2(2pxy + 2qx - k) - Q^2pxy - S^2(2pxy + qx)] \\ &- T^4/(2k)\}/(Q^2 - m_\omega^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathcal{F}_{D;\sigma\omega}^V = \mathcal{F}_{D;\omega\sigma}^V = -g_\sigma^2 g_\omega^2 m_*^2 (2pxy + qx)/[(Q^2 - m_\sigma^2)(Q^2 - m_\omega^2)] \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E;\sigma\sigma}^V &= -g_\sigma^4 \{-qx/4 - [m_*^2(pxy + k) - Q^2(k - qx - pxy)/4 - m_\sigma^2 qx/4]/\mathcal{X}_\sigma \\ &+ (2k)^{-1}(m_*^2 + Q^2/4)[1 + (S^2 - m_\sigma^2)/\mathcal{X}_\sigma]\}/[4(Q^2 - m_\sigma^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E;\omega\omega}^V &= -g_\omega^4 2\{pxy - [m_*^2 k + (Q^2 + m_\omega^2)pxy]/\mathcal{X}_\omega - T^4/(2k\mathcal{X}_\omega) \\ &+ (2k)^{-1}\{(S^2 + T^2)[1 + (S^2 - m_\omega^2)/\mathcal{X}_\omega] \\ &- T^4/(S^2 - m_\omega^2 - \mathcal{X}_\omega)\}\}/[4(Q^2 - m_\omega^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E;\sigma\omega}^V &= g_\sigma^2 g_\omega^2 \{[-m_*^2(4k - 2pxy - 5qx + (S^2 - m_\omega^2)/k) \\ &+ Q^2(k - qx)]/\mathcal{X}_\omega - m_\sigma^2/k\}/[4(Q^2 - m_\sigma^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E;\omega\sigma}^V &= g_\sigma^2 g_\omega^2 \{-(pxy + qx) - [m_*^2(3pxy + 5qx - k) - (pxy - qx)m_\sigma^2]/\mathcal{X}_\sigma \\ &+ (2k)^{-1}\{-(S^2 - 3m_*^2)[1 + (S^2 - m_\sigma^2)/\mathcal{X}_\sigma] \\ &+ T^4[\mathcal{X}_\sigma^{-1} + (S^2 - m_\sigma^2 - \mathcal{X}_\sigma)^{-1}]\}\}/[4(Q^2 - m_\omega^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

As integrais sobre \bar{P}_0 e q podem ser feitas analiticamente para os diagramas diretos.

O mesmo não acontece para os diagramas de troca, sendo necessário calcular todas as integrais sobre Q_0 , P_0 e q numericamente.

As integrações sobre P_0 das funções $F_{D;mm'}^L(k, Q_0, P_0, q)$ dadas em (A.11) – (A.16) são triviais. Já a integração sobre q das funções $F_{D;mm'}^L$ requerem integrais do tipo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{-x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{x^4 dx}{(x^2 + a^2)^2} &= x + \frac{a^2 x}{2(x^2 + a^2)} - \frac{3a}{2} \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2 + a^2)} - \frac{3}{2a^5} \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{dx}{x^4(x^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{3a^4 x^3} + \frac{2}{a^6 x} + \frac{x}{2a^6(x^2 + a^2)} + \frac{5}{2a^7} \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} &= \frac{c}{h} \left\{ \int \frac{dx}{cx^2 + f} - \int \frac{dx}{cx^2 + g} \right\} \text{ para } h^2 > 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{b^2 - 4ac} \\ f &= \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \\ g &= \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \end{aligned}$$

sendo

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

e, finalmente,

$$\int \frac{dx}{x^2(a + bx^2 + cx^4)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} - \frac{1}{a} \int \frac{x^2 dx}{a + bx^2 + cx^4}$$

com

$$\int \frac{x^2 dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{g}{h} \int \frac{dx}{cx^2 + g} - \frac{f}{h} \int \frac{dx}{cx^2 + f}$$

Depois de realizadas as integrações sobre P_0 e q as quantidades diretas $W_{D;mm'}^L(k)$ de (A.10) são dadas por

$$W_{D;mm'}^L(k) = \frac{1}{16\pi^3} \frac{1}{k} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 \mathcal{G}_{D;mm'}^L(k, Q_0) \quad (\text{A.32})$$

onde, definindo-se as funções

$$I_m(k, Q_0) = \frac{k(Q_0^2 - E_k Q_0 - m_m^2/2)}{m_m^2 Q_0^2 - m_m^2(E_k Q_0 - k^2 - m_m^2/4)} \quad (\text{A.33})$$

$$J_m(k, Q_0) = \frac{1}{\sqrt{m_m^2 - Q_0^2}} \left(\arctan \frac{q_+}{\sqrt{\mu^2 - Q_0}} - \arctan \frac{q_-}{\sqrt{\mu^2 - Q_0}} \right), \quad (\text{A.34})$$

os integrandos $\mathcal{G}_{D;mm'}^L$ assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{D;\sigma\sigma}^S &= -g_\sigma^4 m_* \frac{Q_0}{4} \left[\left(1 - \frac{4m_*^2 - Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) I_\sigma(k, Q_0) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{4m_*^2 - Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) J_\sigma(k, Q_0) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{D;\sigma\sigma}^0 &= -g_\sigma^4 \frac{Q_0}{4} (E_k - Q_0) \left[\left(1 - \frac{4m_*^2 - Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) I_\sigma(k, Q_0) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{4m_*^2 - Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) J_\sigma(k, Q_0) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{D;\sigma\sigma}^V &= -g_\sigma^4 \frac{Q_0}{k} \left\{ -\frac{k}{2} + \left[\frac{m_\sigma^2}{8} - \frac{m_*^2}{2} + \frac{k^2 - E_k Q_0 + Q_0^2/2}{4} \left(1 - \frac{4m_*^2 - Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) \right] I_\sigma(k, Q_0) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{3m_\sigma^2}{8} - \frac{m_*^2}{2} - \frac{Q_0^2}{4} + \frac{k^2 - E_k Q_0 + Q_0^2/2}{4} \left(1 + \frac{4m_*^2 - Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) \right] J_\sigma(k, Q_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\mathcal{G}_{D;\omega\omega}^S = g_\omega^4 m_* \frac{Q_0}{2} \left[\left(1 + \frac{2m_*^2 + Q_0^2}{m_\omega^2 - Q_0^2} \right) I_\omega(k, Q_0) + \left(1 - \frac{2m_*^2 + Q_0^2}{m_\omega^2 - Q_0^2} \right) J_\omega(k, Q_0) \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{D;\omega\omega}^0 &= g_\omega^4 \left[-\frac{2Q_0^2 k (2E_F^2 + Q_0^2/6)}{(m_\omega^2 - Q_0^2)^2} + (C_1(k, Q_0) + C_2(k, Q_0)) I_\omega(k, Q_0) \right. \\ &\quad \left. + (C_1(k, Q_0) - 3C_2(k, Q_0)) J_\omega(k, Q_0) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

com

$$C_1(k, Q_0) = \frac{Q_0^2}{4} - \frac{E_k(m_*^2 - 2E_F^2)Q_0 + K_F^2 Q_0^2 - E_k Q_0^3/6 - Q_0^4/6}{m_\omega^2 - Q_0^2}$$

$$C_2(k, Q_0) = \frac{Q_0^3(2E_k - Q_0)(2E_F^2 + Q_0^2/6)}{2(m_\omega^2 - Q_0^2)^2};$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{D;\omega\omega}^V &= g_\omega^4 Q_0 \left\{ \frac{3}{4} + \frac{2}{(Q_0 - 2E_k)(m_\omega^2 - Q_0^2)^2} [C_3(k, Q_0) \right. \\
&+ C_4(k, Q_0) \left(\frac{4k^2 - 6E_k Q_0 + 3Q_0^2}{3(Q_0 - 2E_k)^2} - \frac{2Q_0}{m_\omega^2 - Q_0^2} \right)] \\
&+ \frac{1}{2k} \left[-\frac{3}{8}(m_\omega^2 - Q_0^2) + C_5(k, Q_0) - \frac{C_6(k, Q_0)}{m_\omega^2 - Q_0^2} + \frac{Q_0 C_3(k, Q_0)}{(m_\omega^2 - Q_0^2)^2} \right. \\
&- \frac{Q_0^3 C_4(k, Q_0)}{(m_\omega^2 - Q_0^2)^3} \left. \right] I_\omega(k, Q_0) + \frac{1}{2k} \left[-\frac{9}{8}(m_\omega^2 - Q_0^2) + C_5(k, Q_0) + \frac{C_6}{m_\omega^2 - Q_0^2} \right. \\
&- \left. \frac{3Q_0 C_3(k, Q_0)}{(m_\omega^2 - Q_0^2)^2} + \frac{5Q_0^3 C_4(k, Q_0)}{(m_\omega^2 - Q_0^2)^3} \right] J_\omega(k, Q_0) \left. \right\} \quad (A.40)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
C_3(k, Q_0) &= Q_0 \left[-\frac{5}{12} Q_0^4 + \frac{4}{3} E_k Q_0^3 - \left(2E_F E_k + \frac{E_k^2}{2} + \frac{3}{2} E_F^2 + \frac{2}{3} k^2 \right) Q_0^2 \right. \\
&+ \left. 2E_F(k^2 - E_F^2 + 5E_F E_k) Q_0 - 4E_F^2(k^2 + E_k^2) \right] \\
C_4(k, Q_0) &= \frac{Q_0}{2} \left[\frac{Q_0^4}{4} - E_k Q_0^3 + (E_k^2 + 3E_F^2) Q_0^2 - 12E_k E_F^2 Q_0 + 12E_k^2 E_F^2 \right] \\
C_5(k, Q_0) &= -\frac{11}{12} Q_0^2 + E_k Q_0 - \frac{1}{2} (E_k^2 + E_F^2) \\
C_6(k, Q_0) &= \frac{5}{6} Q_0^4 - \frac{4}{3} E_k Q_0^3 + \left(\frac{E_k^2}{2} + \frac{5}{2} E_F^2 + \frac{2}{3} k^2 \right) Q_0^2 - 4E_k E_F^2 Q_0 + 2E_F^2 k^2 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{D;\sigma\omega}^S &= \mathcal{G}_{D;\omega\sigma}^S = -g_\sigma^2 g_\omega^2 m_* \left\{ -\frac{2k E_F Q_0^2}{(m_\omega^2 - Q_0^2)(m_\sigma^2 - Q_0^2)} + \frac{E_F Q_0(Q_0 - 2E_k)}{m_\omega^2 - m_\sigma^2} \right. \\
&\times \left. \left[\left(1 + \frac{Q_0^2}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) J_\sigma(k, Q_0) - \left(1 + \frac{Q_0^2}{m_\omega^2 - Q_0^2} \right) J_\omega(k, Q_0) \right] \right\} \quad (A.41)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{D;\sigma\omega}^0 = \mathcal{G}_{D;\omega\sigma}^0 = -g_\sigma^2 g_\omega^2 m_* Q_0 \left[-\frac{2E_F m_*}{m_\sigma^2 - m_\omega^2} (J_\sigma(k, Q_0) - J_\omega(k, Q_0)) \right] \quad (A.42)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{D;\sigma\omega}^V &= \mathcal{G}_{D;\omega\sigma}^V = -g_\sigma^2 g_\omega^2 m_* Q_0^2 \left\{ \frac{2m_* E_F}{(m_\omega^2 - Q_0^2)(m_\sigma^2 - Q_0^2)} - \frac{m_* E_F}{km_\omega^2 - m_\sigma^2} \right. \\
&\times \left. \left[\left(1 + \frac{Q_0(Q_0 - 2E_k)}{m_\sigma^2 - Q_0^2} \right) J_\sigma(k, Q_0) - \left(1 + \frac{Q_0(Q_0 - 2E_k)}{m_\omega^2 - Q_0^2} \right) \right. \right. \\
&\times \left. \left. J_\omega(k, Q_0) \right] \right\} \quad (A.43)
\end{aligned}$$

$$\times J_\omega(k, Q_0) \left. \right\} \quad (A.44)$$

$$\quad (A.45)$$

APÊNDICE B

Este apêndice é dedicado ao cálculo das partes imaginárias da auto-energia dos diagramas na figura 4.1 no limite não-relativístico $W_{X;mm'}^{NR}$ (equação (4.38)). Nas funções $F_{X;mm'}^{NR}$ (eqs. (4.36) – (4.37)) as variáveis p , x e y assumem os valores dados em (4.39).

É fácil verificar que as integrais sobre ψ nas contribuições diretas são triviais pois o integrando não depende dessa variável. Para as contribuições de troca as integrais são do tipo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{1}{A_{m'} + B \cos \psi} = -\frac{1}{\sqrt{A_{m'}^2 - B^2}}$$

com

$$\begin{aligned} A_{m'} &= k^2 - q^2 + p^2 - 2kpxy + m_{m'}^2 \\ B &= 2kp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \end{aligned}$$

As quantidades $W_{X;mm'}^{NR}$ depois de realizada a integral sobre ψ passam a ter a forma

$$W_{X;mm'}^{NR} = \frac{1}{16\pi^3} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 \int_{E_F}^{E_F - Q_0} dP_0 \int_{q-}^{q+} dq \frac{m_*^3}{k} \mathcal{F}_{X;mm'}^{NR}(k, Q_0, P_0, q) \quad (\text{B.1})$$

com

$$\mathcal{F}_{D;mm'}^{NR} = 4\mathcal{V}_m(-q^2)\mathcal{V}_{m'}(-q^2) \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{F}_{E;mm'}^{NR} = -\mathcal{V}_m(-q^2)I_{m'}(k, Q_0, P_0, q) \quad (\text{B.3})$$

sendo

$$\begin{aligned} I_{m'}(k, Q_0, P_0, q) &= -g_\omega^2 \left[4m_*^2 P_0^2 + 4m_* P_0 (2m_* Q_0 + m_{m'}^2 - k^2) + (k^2 + m_{m'}^2 - q^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m_{m'}^2 - q^2)}{q^2} (4m_*^2 Q_0^2 - q^4) + 2k^2 (q^2 - 2m_* Q_0) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Note-se que as integrais sobre P_0 podem ser feitas analiticamente em ambos os casos direto e de troca, pois as funções $\mathcal{F}_{D;mm'}^{NR}$ não dependem de P_0 enquanto que em $\mathcal{F}_{E;mm'}^{NR}$ essas integrais têm a forma

$$\int \frac{dP_0}{\sqrt{aP_0^2 + bP_0 + c}} = \frac{1}{a^{1/2}} \log | 2[a(2P_0^2 + bP_0 + c)^{1/2} + 2aP_0 + b] |$$

onde a , b e c podem ser facilmente identificadas em (B.4).

Para as contribuições de troca as integrais restantes são realizadas numericamente.

No caso das contribuições diretas o cálculo das quantidades $W_{D;mm'}^{NR}$, depois da integração sobre P_0 , restringe-se ao cálculo das integrais sobre q e Q_0 :

$$W_{D;mm'}^{NR} = -\frac{1}{16\pi^3} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 \int_{q_-}^{q_+} dq \frac{m_*^3}{k} Q_0 \mathcal{F}_{D;mm'}^{NR}(k, Q_0, q) \quad (\text{B.5})$$

com as funções $\mathcal{F}_{D;mm'}^{NR}(k, Q_0, q)$ ainda dadas pela expressão (B.2).

Ao relizar as integrais sobre q , as quais são do tipo

$$\int \frac{dq}{(q^2 + a^2)^2} = \frac{q}{2a(q^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{q}{a}$$

$$\int \frac{dq}{(q^2 + a^2)(q^2 + b^2)} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{q}{a} - \frac{1}{b} \arctan \frac{q}{b} \right)$$

obtem-se

$$W_{D;mm'}^{NR}(k) = -\frac{1}{16\pi^3} \frac{m_*^3}{k} \int_{E_k - E_F}^0 dQ_0 Q_0 \mathcal{G}_{D;mm'}^{NR}(k, Q_0) \quad (\text{B.6})$$

sendo

$$\mathcal{G}_{D;mm'}^{NR}(k, Q_0) = \frac{4g_m^4}{2m_m^2} \left\{ \frac{k}{m_*} \frac{(Q_0 + m_m^2/2m_*)}{Q_0^2 - Q_0 \frac{m_m^2}{m_*} + \frac{m_m^2}{m_*^2} (k^2 + \frac{m_m^2}{4})} \right.$$

$$+ \frac{1}{m_m} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - 2m_* Q_0 + k}}{m_m} \right) \right.$$

$$\left. \left. - \arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - 2m_* Q_0 - k}}{m_m} \right) \right] \right\} \text{ para } m = m'$$

$$\mathcal{G}_{D;mm'}^{NR}(k, Q_0) = -\frac{4g_m^2 g_{m'}^2}{m_m^2 - m_{m'}^2} \left[\frac{1}{m_m} \arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - 2m_* Q_0 + k}}{m_m} \right) \right.$$

$$- \frac{1}{m_m} \arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - 2m_* Q_0 - k}}{m_m} \right)$$

$$- \frac{1}{m_{m'}} \arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - 2m_* Q_0 + k}}{m_{m'}} \right)$$

$$\left. + \frac{1}{m_{m'}} \arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - 2m_* Q_0 - k}}{m_{m'}} \right) \right] \text{ para } m \neq m'$$

Definindo-se

$$Z_{\pm} = \sqrt{k^2 - 2m_* Q_0} \pm k$$

as integrais sobre Q_0 em (B.6) que envolvem a função arctan podem ser escritas na forma

$$\int (aZ_{\pm}^3 + bZ_{\pm}^2 + cZ_{\pm}) \arctan \frac{Z_{\pm}}{m_m} dZ_{\pm}$$

com intervalos de integração $Z_+ \in [k_F + k, 2k]$ e $Z_- \in [k_F - k, 0]$; as outras integrais sobre Q_0 são do tipo

$$\int \frac{x^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \log |ax^2 + bx + c| + \frac{b^2 - 2ac}{a^2 \sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \log |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{a \sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Ambas as integrais podem ser calculadas analiticamente.

APÊNDICE C

O tempo de vida de um buraco na matéria nuclear está relacionado com a amplitude de probabilidade do processo de espalhamento núcleon-núcleon no mar de Fermi. Deste espalhamento um núcleon preenche o buraco e o outro é ejetado acima do mar de Fermi.

O objetivo desse apêndice é basicamente buscar uma interpretação física para a largura do estado de buraco calculada no capítulo 4. Para tanto calcula-se a amplitude de probabilidade de espalhamento elástico núcleon-núcleon via troca de mésons σ e ω . A amplitude invariante M para o processo é dada por:

$$|M|^2 = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xrightarrow{K, s_1} & & \xrightarrow{K-Q, s'_1} \\ & | & \\ & Q & \\ & | & \\ \xrightarrow{P, s_2} & & \xrightarrow{P+Q, s'_2} \end{array} & + & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{K, s_1} & & \xrightarrow{P+Q, s'_2} \\ & | & \\ & R = K-P-Q & \\ & | & \\ \xrightarrow{P, s_2} & & \xrightarrow{K-Q, s'_1} \end{array} \end{array} \right|^2$$

onde a linha tracejada representa um méson σ ou ω .

Aplicando-se as regras de Feynman [21] e a notação introduzida no capítulo 4 (veja-se as equações (4.8) e (4.9)), pode-se escrever

$$\begin{aligned} M &= \sum_{m=\sigma, \omega} \left\{ \left[\bar{u}(K-Q, s'_1) iJ_{m;\mu} u(K, s_1) iM_m^{\mu\nu}(Q) \bar{u}(P+Q, s'_2) iJ_{m;\nu} u(P, s_2) \right] \right. \\ &\times \chi^\dagger(\tau'_1) \chi(\tau_1) \chi^\dagger(\tau'_2) \chi(\tau_2) \\ &- \left[\bar{u}(P+Q, s'_2) iJ_{m;\mu} u(K, s_1) iM_m^{\mu\nu}(R) \bar{u}(K-Q, s'_1) iJ_{m;\nu} u(P, s_2) \right] \\ &\times \left. \chi^\dagger(\tau'_1) \chi(\tau_2) \chi^\dagger(\tau'_2) \chi(\tau_1) \right\} \end{aligned} \quad (C.1)$$

onde τ é usado para isospin e no propagador para o méson ω , o termo proporcional a $Q^\mu Q^\nu$ é excluído, pois sua contribuição é nula.

Calculando o quadrado da amplitude de espalhamento e somando sobre spins (s) e isospins (τ) obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{s,\tau} |\mathcal{M}|^2 &= 4 \sum_{m,m'} \left\{ M_m^{\nu\mu}(Q) M_{m'}^{\lambda\tau}(Q) \text{Tr} \left[\left(\frac{K+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\tau} \left(\frac{K-Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\mu} \right] \right. \\
&\times \text{Tr} \left[\left(\frac{P+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\lambda} \left(\frac{P+Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\nu} \right] \\
&+ M_m^{\mu\nu}(R) M_{m'}^{\lambda\tau}(R) \text{Tr} \left[\left(\frac{K+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\tau} \left(\frac{P+Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\mu} \right] \\
&\times \text{Tr} \left[\left(\frac{P+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\lambda} \left(\frac{K-Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\nu} \right] \\
&- M_m^{\mu\nu}(Q) M_{m'}^{\lambda\tau}(R) \text{Tr} \left[\left(\frac{K+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\tau} \left(\frac{P+Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\nu} \right] \\
&\left. \times \left(\frac{P+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\lambda} \left(\frac{K-Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\mu} \right\}, \tag{C.2}
\end{aligned}$$

onde se fez uso da relação

$$\sum_s u_\alpha(K, s) \bar{u}_\beta(K, s) = \left(\frac{K+m_s}{2m_s} \right)_{\alpha\beta}.$$

Os dois primeiros termos de (C.2) podem ser combinados fazendo a troca de variáveis $K-Q \longleftrightarrow P+Q$ no segundo termo, obtendo-se assim

$$\begin{aligned}
\sum_{s,\tau} |\mathcal{M}|^2 &= 8 \sum_{m,m'} \left\{ M_m^{\nu\mu}(Q) M_{m'}^{\lambda\tau}(Q) \text{Tr} \left[\left(\frac{K+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\tau} \left(\frac{K-Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\mu} \right] \right. \\
&\times \text{Tr} \left[\left(\frac{P+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\lambda} \left(\frac{P+Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\nu} \right] \\
&- \frac{1}{2} M_m^{\mu\nu}(Q) M_{m'}^{\lambda\tau}(R) \text{Tr} \left[\left(\frac{K+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\tau} \left(\frac{P+Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\nu} \right] \\
&\left. \times \left(\frac{P+m_s}{2m_s} \right) J_{m';\lambda} \left(\frac{K-Q+m_s}{2m_s} \right) J_{m;\mu} \right\}. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Usando (4.5), (4.11), (4.12) e (4.18) pode-se mostrar que

$$\Gamma = 2\pi \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^3} \frac{d^4P}{(2\pi)^3} \frac{m_s^4}{8E_k E_{k-q} E_p E_{p+q}} \sum_{s,\tau} |\mathcal{M}|^2 \mathcal{P}_F(K, P, Q). \tag{C.4}$$

No limite não-relativístico, a expressão (C.3) toma a forma

$$\sum_{s,\tau} |\mathcal{M}|^2 = 8 \sum_{m,m'} \left[\mathcal{V}_m(-q^2) \mathcal{V}_{m'}(-q^2) - \frac{1}{4} \mathcal{V}_m(-q^2) \mathcal{V}_{m'}(-r^2) \right] \tag{C.5}$$

onde, conforme notação introduzida no capítulo 4,

$$\mathcal{V}_\sigma(-q^2) = -\frac{g_\sigma^2}{q^2 + m_\sigma^2} \quad (\text{C.6})$$

e

$$\mathcal{V}_\omega(-q^2) = \frac{g_\omega^2}{q^2 + m_\omega^2}. \quad (\text{C.7})$$

Usando (4.42) pode-se escrever (C.5) como

$$\sum_{s,\tau} |\mathcal{M}|^2 = 8 \left[|\mathcal{V}(-q^2)|^2 - \frac{1}{4} \mathcal{V}(-q^2) \mathcal{V}(-r^2) \right]. \quad (\text{C.8})$$

Note-se que a quantidade $\mathcal{V}(-q^2)$ definida em (4.42) é a transformada de Fourier do potencial de Yukawa correspondente à troca de mésons σ e ω e que o segundo termo em (C.8) é devido à interferência entre as duas amplitudes obtidas pela troca dos núcleons no estado final.

Das equações (4.43) e (4.40)-(4.41) tem-se que no limite não-relativístico a largura total do estado de buraco é dada por

$$\Gamma^{NR} = 8\pi \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^3} \frac{d^4\bar{P}}{(2\pi)^3} \left[|\mathcal{V}(-q^2)|^2 - \frac{1}{4} \mathcal{V}(-q^2) \mathcal{V}(-r^2) \right] \mathcal{P}_F(K, \bar{P}, Q), \quad (\text{C.9})$$

ou seja,

$$\Gamma^{NR} = \pi \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^3} \frac{d^4\bar{P}}{(2\pi)^3} \sum_{s,\tau} |\mathcal{M}|^2 \mathcal{P}_F(K, \bar{P}, Q), \quad (\text{C.10})$$

que mostra, juntamente com (C.4), que a largura é obtida integrando-se sobre o espaço das fases adequado a probabilidade de espalhamento de dois núcleons na aproximação de Born.

APÊNDICE D

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
E_k	529.5	541.5	564.6
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^S$	292.8	254.0	80.6
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^0$	428.2	285.2	95.8
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^V$	-1.2	-6.6	-6.0
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}$	819.8	532.6	170.4
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^S$	-102.2	-66.0	-21.0
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^0$	-102.0	-63.2	-22.0
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^V$	0.2	1.4	1.2
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}$	-204.0	-131.8	-41.8
$\Gamma_{\sigma\sigma}$	615.8	400.8	128.6

Tabela D.1:

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
E_k	529.5	541.5	564.6
$\Gamma_{D;\omega\omega}^S$	213.2	136.8	42.8
$\Gamma_{D;\omega\omega}^0$	349.4	239.6	84.8
$\Gamma_{D;\omega\omega}^V$	0.8	4.4	4.4
$\Gamma_{D;\omega\omega}$	563.4	380.8	132.0
$\Gamma_{E;\omega\omega}^S$	-79.4	-53.8	-18.6
$\Gamma_{E;\omega\omega}^0$	-34.0	-20.8	-5.8
$\Gamma_{E;\omega\omega}^V$	0.4	2.6	2.4
$\Gamma_{E;\omega\omega}$	-113.0	-72.0	-22.0
$\Gamma_{\omega\omega}$	450.4	308.8	110.0

Tabela D.2:

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^S + \Gamma_{D;\omega\omega}^S$	606.6	390.8	123.4
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^S + \Gamma_{E;\omega\omega}^S$	-181.6	-119.8	-39.6
$\Gamma_{\sigma\sigma}^S + \Gamma_{\omega\omega}^S$	424.4	271.0	83.8
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^0 + \Gamma_{D;\omega\omega}^0$	777.6	524.8	180.6
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^0 + \Gamma_{E;\omega\omega}^0$	-136.0	-88.0	-27.8
$\Gamma_{\sigma\sigma}^0 + \Gamma_{\omega\omega}^0$	641.6	436.8	152.8
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^V + \Gamma_{D;\omega\omega}^V$	-0.04	-2.2	-1.6
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^V + \Gamma_{E;\omega\omega}^V$	0.6	4.0	3.6
$\Gamma_{\sigma\sigma}^V + \Gamma_{\omega\omega}^V$	0.2	1.8	2.0
$\Gamma_{\sigma\sigma} + \Gamma_{\omega\omega}$	1066.2	709.6	238.6

Tabela D.3:

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
$\Gamma_{D;\sigma\omega}^S + \Gamma_{D;\omega\sigma}^S$	-673.6	-444.4	-147.0
$\Gamma_{E;\sigma\omega}^S + \Gamma_{E;\omega\sigma}^S$	141.2	90.2	27.8
$\Gamma_{\sigma\omega}^S + \Gamma_{\omega\sigma}^S$	-532.4	-354.2	-119.2
$\Gamma_{D;\sigma\omega}^0 + \Gamma_{D;\omega\sigma}^0$	-674.0	-445.8	-147.6
$\Gamma_{E;\sigma\omega}^0 + \Gamma_{E;\omega\sigma}^0$	169.4	114.6	39.4
$\Gamma_{\sigma\omega}^0 + \Gamma_{\omega\sigma}^0$	-504.6	-331.2	-108.2
$\Gamma_{D;\sigma\omega}^V + \Gamma_{D;\omega\sigma}^V$	0.2	1.2	0.6
$\Gamma_{E;\sigma\omega}^V + \Gamma_{E;\omega\sigma}^V$	-0.6	-3.6	-3.2
$\Gamma_{\sigma\omega}^V + \Gamma_{\omega\sigma}^V$	-0.4	-2.4	-2.6
$\Gamma_{\sigma\omega} + \Gamma_{\omega\sigma}$	-1037.4	-687.8	-230.0

Tabela D.4:

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
Γ_D^S	-67.6	-53.6	-23.6
Γ_E^S	-40.4	-29.6	-11.8
Γ^S	-108.0	-83.2	-35.4
Γ_D^0	103.6	79.0	33.0
Γ_E^0	33.4	26.6	11.6
Γ^0	137.0	105.6	44.6
Γ_D^V	-0.2	-1.0	-1.0
Γ_E^V	0.0	0.4	0.4
Γ^V	-0.1	-0.3	-0.3
Γ_D	35.8	24.4	8.4
Γ_E	-7.0	-2.6	0.2
Γ	28.8	21.8	8.6

Tabela D.5:

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^S/\Gamma_{D;\sigma\sigma}^S$	-0.26	-0.26	-0.26
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^0/\Gamma_{D;\sigma\sigma}^0$	-0.24	-0.24	-0.23
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}/\Gamma_{D;\sigma\sigma}$	-0.25	-0.25	-0.25
$\Gamma_{E;\omega\omega}^S/\Gamma_{D;\omega\omega}^S$	-0.37	-0.39	-0.43
$\Gamma_{E;\omega\omega}^0/\Gamma_{D;\omega\omega}^0$	-0.10	-0.09	-0.07
$\Gamma_{E;\omega\omega}/\Gamma_{D;\omega\omega}$	0.20	-0.19	-0.17
$\Gamma_{E;\sigma\omega}^S/\Gamma_{D;\sigma\omega}^S$	-0.21	-0.20	-0.19
$\Gamma_{E;\sigma\omega}^0/\Gamma_{D;\sigma\omega}^0$	-0.25	-0.26	-0.27
$\Gamma_{E;\sigma\omega}/\Gamma_{D;\sigma\omega}$	-0.23	-0.23	-0.22
Γ_E^S/Γ_D^S	0.60	0.55	0.50
Γ_E^0/Γ_D^0	0.32	0.34	0.35
Γ_E/Γ_D	-0.20	-0.11	0.02

Tabela D.6:

$k(\text{MeV}/c)$	40	120	200
$\Gamma_{D;\sigma\sigma}^{NR}$	840.8	567.2	194.3
$\Gamma_{E;\sigma\sigma}^{NR}$	-209.2	-140.2	-47.2
$\Gamma_{\sigma\sigma}^{NR}$	631.6	427.4	147.1
$\Gamma_{D;\omega\omega}^{NR}$	520.7	354.4	123.0
$\Gamma_{E;\omega\omega}^{NR}$	-130.0	-88.3	-30.4
$\Gamma_{\omega\omega}^{NR}$	390.7	266.1	92.6
$\Gamma_{D;\sigma\omega}^{NR}$	-1322.8	-895.9	-308.4
$\Gamma_{E;\sigma\omega}^{NR}$	329.8	222.6	75.9
$\Gamma_{\sigma\omega}^{NR}$	-993.0	-673.3	-232.5
Γ_D^{NR}	38.7	25.7	8.9
Γ_E^{NR}	-9.4	-5.9	1.7
Γ^{NR}	29.4	19.8	7.2

Tabela D.7:

Referências

- [1] H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **17**,48(1935).
- [2] C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini e C.F. Powell, *Nature* **159**,694(1947).
- [3] M.G. Mayer e J.H.D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Wiley(1955).
- [4] Uma revisão dos principais resultados de cálculos que usam Hartree-Fock, Brueckner-Hartree-Fock, Brueckner-Hartree-Fock renormalizado e Hartree-Fock dependente de densidade até 1968 encontra-se em: J.P. Svenne, *Adv. Nucl. Phys.* **11**, ed. J.W. Negele e E. Vogt (Plenum, N.Y., 1968) p. 179.
- [5] J.W. Negele, *7th Intern. Conf. on High Energy Physics and Nuclear Structure*, ed. M.P. Locker (Birkhäuser, Basel, 1977) p. 17.
- [6] J.D. Walecka, *Ann. of Phys.* **83**, 491(1974); S.A. Chin, *Ann. of Phys.* **108**, 301(1977).
- [7] B.D. Serot e J.D. Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16**, ed. J.W. Negele e E. Vogt (Plenum, N.Y., 1986); C.J. Horowitz e B.D. Serot, *Nucl. Phys.* **A464**, 613(1987).
- [8] B.C. Clark, S. Hama, R.L. Mercer, L. Ray e B.D. Serot, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1644(1983).

- [9] G.W. Hoffmann et al., *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1436(1981); G.W. Hoffmann et al., *Phys. Rev.* **C24**, 541(1981); L. Ray et al., *Phys. Rev.* **C23**, 828(1981); A. Rahbar et al., *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1811(1981).
- [10] J.J. Aubert et al., *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404(1974); J.E. Augustin et al., *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406(1974).
- [11] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, New York, (1964); M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214(1964).
- [12] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 598(1964); M.Y. Han e Y. Nambu, *Phys. Rev.* **139b**, 1006(1965).
- [13] E.S. Aberc e B.W. Lee, *Phys. Rep.* **9c**, 1(1973); W. Marciano e H. Pagels, *Phys. Rep.* **36c**, 137(1978).
- [14] A.W. Thomas, *Adv. Nucl. Phys.* **13**, 1(1981), ed. J.W. Negele e E. Vogt (Plenum, N.Y.); A.W. Thomas, *Nucleon Structure is Important in Nuclear Physics*, invited talk presented at the Int. Nucl. Phys. Conf., São Paulo, SP, Brasil, 1989; W. Weise, *SUBNUCLEAR DEGREES OF FREEDOM - Scale Changes of Nucleons in Nuclei?*, invited talk presented at the Int. Nucl. Phys. Conf., São Paulo, SP, Brasil, 1989.
- [15] G. Jacob e Th.A.J. Maris, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 121(1966); *Rev. Mod. Phys.* **45**, 6(1973).
- [16] H.S. Köhler, *Nucl. Phys.* **88**, 529(1966); H.S. Köhler, *Phys. Rep.* **18**, 217(1975).
- [17] M.H. Steffani, M. Betz e Th.A.J. Maris, *Nucl. Phys.* **A493**, 493(1989).
- [18] M.H. Johnson e E. Teller, *Phys. Rev.* **98**, 783(1955).
- [19] H.P. Duerr, *Phys. Rev.* **103**, 469(1956).
- [20] M.R. Anastasio, L.S. Celenza e C.M. Shakin, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 2096(1980); *Phys. Rev.* **C23**, 2258(1981); *Phys. Rev.* **C23**, 2273(1981); L.S. Celenza e C.M. Shakin,

- Phys. Rev. C* **24**, 2704(1981); L.S. Celenza, B. Goulard e C.M. Shakin, *Phys. Rev. D* **24**, 912(1981); L.S. Celenza, W.S. Pong e C.M. Shakin, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 156(1981); *Phys. Rev. C* **25**, 3115(1982); *Phys. Rev. C* **27**, 1799(1983).
- [21] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [22] B.D. Serot e H. Uechi, *Ann. of Phys.* **179**, 272(1987).
- [23] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.
- [24] A.L. Fetter e J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [25] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **167**, 879(1968).
- [26] R. Brockmann, *Phys. Rev. C* **18**, 1510(1978).
- [27] J.D. Walecka, *Phys. Lett.* **94B**, 293(1980); C.J. Horowitz e J.D. Walecka, *Nucl. Phys. A* **364**, 429(1981).
- [28] B.D. Serot, *Phys. Lett.* **86B**, 146(1979); B.D. Serot and J.D. Walecka, *Phys. Lett.* **87B**, 172(1979).
- [29] R. Brockmann e W. Weise, *Phys. Rev. C* **16**, 1282(1977).
- [30] C.J. Horowitz e B.D. Serot, *Nucl. Phys. A* **368**, 503(1981).
- [31] E.S. Abers e B.W. Lee, *Phys. Rep.* **C9**, 1(1973); P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 132(1964); **13**, 508(1964); T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155**, 1554(1967).
- [32] B.D. Serot, *A Relativistic Theory of Nuclear Matter*, invited lectures given at the Winter School on Nuclear Physics, "Nuclear Matter and Heavy Ion Colisions", Les Houches, France, 1989. IU/NTC 89-5
- [33] R.J. Furnstahl, R.J. Perry e B.D. Serot, *Phys. Rev. C* **40**, 321(1989).

- [34] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [35] M.R. Anastasio, L.S. Celenza, W.S. Pong e C.M. Shakin, *Phys. Reports* **C100**, 327(1983); L.S. Celenza e C.M. Shakin, *Relativistic Nuclear Physics*, World Scientific, Philadelphia, 1986.
- [36] P. Ring e J. Speth, *Phys. Lett.* **44B**, 477(1973); *Nucl. Phys.* **A235**, 315(1974); J. Speth, E. Werner e W. Wild, *Phys. Rep.* **33**, 127(1977).
- [37] K. Holinde e R. Machleidt, *Nucl. Phys.* **A256**, 479(1976).
- [38] K. Holinde, K. Erkelenz e R. Alzetta, *Nucl. Phys.* **A198**, 598(1972).
- [39] R. Brockmann e R. Machleidt, *Phys. Lett.* **149B**, 283(1984).
- [40] C.J. Horowitz, *Phys. Lett.* **117B**, 153(1982); *Nucl. Phys.* **A412**, 228(1984).
- [41] O. Chamberlain e E. Segre, *Phys. Rev.* **87**, 81(1952); J.B. Cladis, W.N. Hess e B.J. Mayer, *Phys. Rev.* **87**, 425(1952).
- [42] H. Tyrén, Th.A.J. Maris e P. Hillman, *Nuovo Cimento* **6**, 1507(1957); H. Tyrén, P. Hillman e Th.A.J. Maris, *Nucl. Phys.* **7**, 10(1958); P. Hillman, H. Tyrén e Th.A.J. Maris, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 107 (1960).
- [43] G. Jacob e Th.A.J. Maris, *Nucl. Phys.* **31**, 139(1962); *Nucl. Phys.* **31**, 152(1962).
- [44] U. Amaldi, G. Campos Venuti Jr., G. Cortelessa, C. Fronterotta, A. Reale, P. Salvadori e P. Hillman, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 341(1964); U. Amaldi, G. Campos Venuti Jr., G. Cortelessa, E. De Sanctis, S. Frullani, R. Lombard e P. Salvadori, *Phys. Lett.* **25B**, 24(1967).
- [45] G. Igo, L.F. Hansen e T.j. Gooding, *Phys. Rev.* **131**, 337(1963); A.N. James e H.G. Pugh, *Nucl. Phys.* **bf 42**, 441(1963); C. Ruhla, M. Rion, M. Gusakov, J.C. Jacmart, M. Liu e L. Valentim, *Phys. Lett.* **6**, 282(1963).

- [46] Th.A.J.Maris, M.R.Teodoro e E.A.Veit, *Phys.Rev.* **C20**,446(1979); W.J.McDonald, *Nucl. Phys.* **A335**, 463(1980); Th.A.J.Maris, M.R.Teodoro e E.A.Veit, *Phys. Lett.* **94B**, 6(1980).
- [47] G.S. Kyle, P.A. Amaudruz, T.S.Bauer, J.J. Domingo, C.H. Ingram, J.Jansen, R. Renker, J. Zicky, R.Stamminger e F.Vogler, *Phy. Rev. Lett.* **52**, 974(1984); G.S. Kyle, *AIP Conf. Proc.* **163**, 289(1988).(Pion-Nucleus Physics:Future Directions and New Facilities at LAMPF, Los Alamos, NM, USA, 17-21 Aug.1987).
- [48] S.Frulani e J.Mougey, "Single particle properties of nuclei through (e,e'p) reactions", *Adv. Nucl. Phys.* **14**, ed. J.W.Negele e E.Vogt (Plenum, N.Y.,1984).
- [49] P.Kitching, W.J.McDonald, Th.A.J.Maris e C.A.Z.Vasconcellos, "Recent developments in quasi-free nucleon-nucleon scattering", *Ad. Nucl. Phys.* **15**, 43(1985), ed. J.W.Negele e E.Vogt (Plenum, N.Y. 1985).
- [50] M. Betz, M.H. Steffani, E.A. Veit e H.B. Rodrigues, *Proc. 1989 Intern. Conf. in Nucl. Phys.* **V1**, 145(1989).
- [51] R.J. Furnstahl e C.J. Horowitz, *Nucl. Phys.* **A485**, 632(1988); M.K. Barnejee e T.D. Cohen, Univ. Of Mariland preprint 88-174.