

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de
Materiais (PPGE3M)

UMA ALTERNATIVA PARA A ESTIMATIVA DE TEORES EM DEPÓSITOS DE
OURO: GEOESTATÍSTICA PARAMÉTRICA DE CAMPO

ROCHANA DA SILVA MACHADO

Dissertação para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre
2012

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de
Materiais (PPGE3M)

**UMA ALTERNATIVA PARA A ESTIMATIVA DE TEORES EM DEPÓSITOS DE
OURO: GEOESTATÍSTICA PARAMÉTRICA DE CAMPO**

ROCHANA DA SILVA MACHADO
Engenheira de Minas

Trabalho realizado no Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro (LPM – DEMIN) da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGE3M), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Tecnologia Mineral e Metalurgia Extrativa

Porto Alegre
2012

Esse trabalho foi julgado adequado como dissertação de mestrado em Engenharia, área de concentração de Tecnologia Mineral e Metalurgia Extrativa e aprovada em sua forma final, pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

Orientador: Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jair Carlos Koppe

Prof. Dr. Maria Noel Morales Boezio

Prof. Dr. Vlândia Cristina de Souza

Prof. Dr. Telmo Roberto Strohaecker
Coordenador do PPGE3M

Dedico à minha família, pelo apoio e
compreensão.

AGRADECIMENTOS

Ao professor João Felipe Costa, pela orientação durante o mestrado, sempre com sugestões valiosas e conselhos que me conduziram à busca de mais conhecimento, e pelas oportunidades de crescimento profissional.

Ao professor Miguel Armony, falecido em 2012, pelas observações e contribuições de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro – LPM, pelo companheirismo e bons momentos de convivência.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Minas – DEMIN e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais – PPGE3M.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pela bolsa concedida.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho, o meu reconhecimento.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE TABELAS.....	x
RESUMO.....	xiii
ABSTRACT	xiv

CAPÍTULO 1

Introdução.....	1
1.1 Identificação dos valores extremos	2
1.2 Estimativa na presença de valores extremos	4
1.3 Meta e objetivos	5
1.4 Metodologia	6
1.5 Organização da dissertação	6

CAPÍTULO 2

Estimativa de teores com distribuições de probabilidade altamente assimétricas: Estado da Arte.....	8
2.1 Análise exploratória dos dados na detecção de valores extremos.....	8
2.1.1 Sumários estatísticos e medidas de simetria de uma distribuição	9
2.1.2 Histograma de frequência.....	10
2.1.3 Mapas de localização amostral	12
2.1.4 Gráficos de probabilidade.....	13

2.2	Procedimentos para avaliação dos valores extremos	13
2.3	Métodos de Krigagem aplicados à estimativa de teores na presença de <i>outliers</i>	16
2.3.1	Krigagem Ordinária	16
2.3.2	Krigagem dos Indicadores	18
2.3.3	Krigagem Lognormal.....	19
2.4	Comentários finais.....	21

CAPÍTULO 3

Geoestatística Paramétrica de Campo..... 22

3.1	Observações a respeito da estimativa de teores por krigagem.....	22
3.1.1	Variável adotada	22
3.1.2	Continuidade e representatividade.....	23
3.1.3	Precisão da variável	24
3.2	Teoria da Geoestatística Paramétrica de Campo.....	24
3.2.1	Conceitos gerais.....	25
3.2.2	Formulação matemática.....	27
3.3	Transformação do teor em extensão.....	32
3.3.1	O ponto de inflexão	33
3.3.2	Utilização da técnica FPG	34
3.4	Comentários finais.....	35

CAPÍTULO 4

Estudos de caso 36

4.1	Banco de dados Walker Lake.....	37
4.1.1	Banco de dados exaustivo.....	37

4.1.2	Banco de dados amostral	39
4.1.3	Procedimentos.....	41
4.1.4	Análise das distribuições e medidas de continuidade espacial	42
4.1.5	Resultados.....	51
4.2	Banco de dados Amapari.....	57
4.2.1	Apresentação do banco de dados	57
4.2.2	Procedimentos.....	58
4.2.3	Análise das distribuições e medidas de continuidade espacial	59
4.2.4	Resultados.....	67
4.3	Comentários finais.....	71

CAPÍTULO 5

Conclusões e recomendações	72
5.1 Conclusões	72
5.2 Trabalhos futuros.....	73

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75
---	-----------

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 – Histogramas de teores exemplificando as diferentes feições entre uma distribuição aproximadamente simétrica (esquerda) e uma distribuição com forte assimetria positiva (direita). 1
- Figura 1.2 – Gráficos de probabilidade acumulada de uma distribuição de teores simétrica (esquerda) e de uma distribuição com forte assimetria positiva (direita); a mudança brusca na inclinação do gráfico na presença de valores extremos é evidente. 4
- Figura 2.1 – Exemplos de histogramas: (a) distribuição simétrica; (b) distribuição lognormal; (c) distribuição bimodal; (d) distribuição com forte assimetria positiva. 11
- Figura 2.2 – Mapas de localização: (a) com malha amostral regular; (b) com amostragem preferencial (Goovaerts, 1997). 12
- Figura 3.1 – Unidade de lavra quadrada, com quatro furos da detonação e análises nas respectivas posições. 26
- Figura 3.2 – Curva de frequências relativas acumuladas dentro da unidade de lavra. 27
- Figura 3.3 – Exemplos ilustrativos de semivariogramas calculados: (a) a partir das 140 amostras do banco de dados sintético apresentado em Deutsch e Journel (1998) , sem qualquer alteração dos valores; (b) 140 amostras do banco de dados sintético, após a transformação dos valores em extensões; (c) dados de espessura de uma camada de caulim de um depósito no estado do Amazonas, Brasil, sem qualquer alteração dos valores; (d) dados de espessura de uma camada de caulim de um depósito no estado do Amazonas, Brasil, após a transformação dos valores em extensões. 33
- Figura 4.1 – Mapas gerados pela amostragem exaustiva: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com escala de cores (valores em ppm). 37
- Figura 4.2 – Histograma dos dados gerados pela amostragem exaustiva: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com valores em ppm. 38

Figura 4.3 – Histograma dos dados gerados pela amostragem exaustiva, após a mudança de suporte amostral para 5x5m: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com valores em ppm.	39
Figura 4.4 – Mapa de localização das amostras analisadas: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com escala de cores (valores em ppm).	40
Figura 4.5 – Histograma das amostras ponderadas pelos pesos de desagrupamento: (a) para a variável U e (b) para a variável V (valores em ppm).	40
Figura 4.6 – Covariogramas experimentais da variável U, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.	42
Figura 4.7 – Covariogramas experimentais da variável V, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.	43
Figura 4.8 – Covariogramas experimentais da variável U, após corte (<i>capping</i>) nos altos teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.	45
Figura 4.9 – Covariogramas experimentais da variável V, após corte (<i>capping</i>) nos altos teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.	46
Figura 4.10 – Covariogramas experimentais dos indicadores para a mediana da variável U, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.	47
Figura 4.11 – Covariogramas experimentais dos indicadores para a mediana da variável V, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.	47
Figura 4.12 – Gráficos de frequência acumulada, ponderada pelos pesos de desagrupamento: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com escala de cores (valores em ppm).	49

- Figura 4.13 – Covariogramas experimentais para as extensões da variável U, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade..... 50
- Figura 4.14 – Covariogramas experimentais para as extensões da variável V, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade..... 50
- Figura 4.15 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável U. 55
- Figura 4.16 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável V. 56
- Figura 4.17 – Histograma das amostras analisadas para a variável Au, ponderadas pelos pesos de desagrupamento: (a) teores menores que 5 ppm e (b) teores maiores ou iguais a 5 ppm..... 57
- Figura 4.18 – Mapa de localização das amostras analisadas para a variável Au: (a) porção norte do domínio e (b) porção sul do domínio, com escala de cores (valores em ppm).
..... 58
- Figura 4.19 – Correlogramas experimentais para a variável Au, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.
..... 59
- Figura 4.20 – Correlogramas experimentais para a variável Au, após corte (*capping*) no quantil Q98 da distribuição de teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.
..... 61
- Figura 4.21 – Correlogramas experimentais para a variável Au, após corte (*capping*) no quantil Q95 da distribuição de teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.
..... 62
- Figura 4.22 – Correlogramas experimentais dos indicadores para a mediana da variável Au,

- com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção $N0^\circ$, de maior continuidade; (b) direção $N90^\circ E$, de continuidade intermediária; e (c) direção $N0^\circ D90^\circ$ (vertical), de menor continuidade..... 63
- Figura 4.23 – Gráfico de frequência acumulada para a variável Au, ponderada pelos pesos de desagrupamento, onde destaca-se o ponto de inflexão da curva em 5 ppm..... 64
- Figura 4.24 – Correlogramas experimentais para as extensões dos altos teores da variável Au (acima de 5 ppm), com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção $N0^\circ$, de maior continuidade; (b) direção $N90^\circ E$, de continuidade intermediária; e (c) direção $N0^\circ D90^\circ$ (vertical), de menor continuidade..... 65
- Figura 4.25 – Correlogramas experimentais para os teores da variável Au menores ou iguais a 5 ppm, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção $N0^\circ$, de maior continuidade; (b) direção $N90^\circ E$, de continuidade intermediária; e (c) direção $N0^\circ D90^\circ$ (vertical), de menor continuidade..... 66
- Figura 4.26 – Correlogramas experimentais dos indicadores para a variável Au, para o trecho de teores menores ou iguais a 5 ppm, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção $N0^\circ$, de maior continuidade; (b) direção $N90^\circ E$, de continuidade intermediária; e (c) direção $N0^\circ D90^\circ$ (vertical), de menor continuidade. 66
- Figura 4.27 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável Au, realizadas na porção norte da área. 69
- Figura 4.28 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável Au, realizadas na porção sul da área. 70

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável U.....	42
Tabela 4.2 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável V.....	43
Tabela 4.3 – Quantis das distribuições de teores para as variáveis U e V, base para a análise de sensibilidade das médias após o <i>capping</i>	44
Tabela 4.4 – Resultados da análise de médias desagrupadas para a variável U.....	44
Tabela 4.5 – Resultados da análise de médias desagrupadas para a variável V.....	44
Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável U, após corte (<i>capping</i>) nos altos teores.....	45
Tabela 4.7 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável V, após corte (<i>capping</i>) nos altos teores.....	46
Tabela 4.8 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma dos indicadores para a mediana da variável U.	47
Tabela 4.9 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma dos indicadores para a mediana da variável V.	47
Tabela 4.10 – Nove decis das distribuições de teores de U e V, base para os trechos da krigagem de indicadores.....	48
Tabela 4.11 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para as extensões da variável U.....	50
Tabela 4.12 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para as extensões da variável V.....	50
Tabela 4.13 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável U.	51

Tabela 4.14 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável V.	52
Tabela 4.15 – Coeficientes de correlação entre os valores estimados para a variável U e os valores do banco de dados exaustivo, utilizado como referência.	53
Tabela 4.16 – Coeficientes de correlação entre os valores estimados para a variável V e os valores do banco de dados exaustivo, utilizado como referência.	54
Tabela 4.17 – Parâmetros estatísticos calculados para os teores da variável Au.	57
Tabela 4.18. Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma para a variável Au.	60
Tabela 4.19 – Quantis das distribuições de teores para a variável Au, base para a análise de sensibilidade das médias após o <i>capping</i>	60
Tabela 4.20 – Resultados da análise de médias desagrupadas para a variável Au.	61
Tabela 4.21 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma para a variável Au, após corte (<i>capping</i>) no quantil Q98 da distribuição de teores.	62
Tabela 4.22 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma para a variável Au, após corte (<i>capping</i>) no quantil Q95 da distribuição de teores.	62
Tabela 4.23 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma dos indicadores para a mediana da variável Au.	63
Tabela 4.24 – Nove decis da distribuição de teores de Au, base para os trechos da krigagem de indicadores.	63
Tabela 4.25 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma das extensões dos altos teores para a variável Au.	65
Tabela 4.26 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma dos teores para a variável Au, menores ou iguais a 5 ppm.	66
Tabela 4.27 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma dos indicadores para a variável Au, para o trecho de teores menores ou iguais a 5 ppm.	67
Tabela 4.28 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável Au na porção norte.	68

Tabela 4.29 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável Au na porção sul.	68
---	----

RESUMO

Teores elevados e erráticos são comuns no campo das geociências, encontrados principalmente em depósitos minerais de metais preciosos, tais como ouro e platina. A ocorrência de *outliers*, ou valores extremos, não parece seguir o mesmo padrão de ocorrência dos teores mais baixos. Devido aos possíveis efeitos na estimativa de teores, tais como superestimativa do metal contido, e conseqüentemente dos recursos minerais, os *outliers* devem ser identificados e tratados de forma cuidadosa.

Analistas de recursos minerais têm trabalhado em diversos depósitos auríferos, e em todos eles, nenhum dos métodos matemáticos foi capaz de evitar intervenções manuais, tais como o corte de altos teores para estimativas locais ou a utilização de informações além dos dados para inferir os variogramas. A Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG) foi estudada nesta dissertação como uma alternativa para a realização de estimativas a partir de dados que exibem distribuição de probabilidade altamente assimétrica. Esta técnica se propõe a efetuar o controle dos valores extremos com certo rigor matemático e menos subjetividade do que as técnicas atualmente aplicadas. Na aplicação da FPG, os teores e sua representatividade são incorporados a uma nova variável mais adequada às estimativas – a extensão acumulada padronizada do teor (τ), o que reduz automaticamente a influência dos altos teores sem intervenção manual direta.

Neste trabalho, são realizados estudos comparativos entre os resultados produzidos na aplicação do FPG e resultados obtidos com outras técnicas comumente usadas na estimativa de teores, através da aplicação no banco de dados Walker Lake e no depósito aurífero de Amapari, localizado no norte do Brasil. A Geoestatística Paramétrica de Campo forneceu resultados robustos para a estimativa de teores na presença de valores extremos, local e globalmente. Para os dados cuja distribuição de frequências apresenta pouca ou nenhuma assimetria os resultados globais e locais fornecidos pela metodologia FPG podem ser obtidos de forma semelhante pela aplicação da krigagem ordinária. De forma geral, a Geoestatística Paramétrica de Campo mostrou-se uma alternativa adequada para a estimativa de teores de minérios auríferos, com distribuição de frequência fortemente assimétrica, sem a subjetividade inerente à escolha de teores de corte para valores extremos.

ABSTRACT

High anomalous grades are common in geosciences, mostly found in mineral deposits of precious metals such as gold and platinum. The occurrence of outliers in mineral deposits does not seem to follow the same pattern of occurrence of low grades. Due to the possible undesirable effects caused by high values on grade estimation, such as overestimation of the metal content, and therefore overestimation of mineral resources, outliers should be identified and treated carefully.

Mineral resources analysts have worked on several gold deposits, and in all of them, none of interpolation methods were able to avoid manual interventions, such as cutting high grades for local estimation or using more information beyond the data to infer the variogram. The Field Parametric Geostatistics (FPG) was studied in this thesis as an alternative for the estimation from data that have highly skewed probability distribution. This technique aims to control the effect of extreme values on the block estimations with some mathematical rigor and less subjectivity than the techniques currently applied. In the application of FPG, the grades and their representativeness are incorporated into a new variable that is more suitable for the estimates - the cumulative standardized extension of grades (τ), which automatically reduces the influence of high grades without manual intervention.

In this study, various tests were realized using distinct kriging methods and the results compared to the ones derived from the application of FPG. Two case studies were selected including the Walker Lake dataset and the Amapari gold deposit, located in northern Brazil. The results showed that Field Parametric Geostatistics provided robust results for grade estimation in the presence of outliers, locally and globally. For data showing symmetric (or low asymmetry) probability distribution function, the results provided by FPG were similar to the ones obtained by ordinary kriging. Overall, the Field Parametric Geostatistics was a suitable alternative for grade estimation whose probability distribution function shows strong positive asymmetry, such as gold grades, and its use refrain from the subjectivity inherent to the choice of cutoff grades for extreme values.

Capítulo 1

Introdução

A estimativa de teores e tonelagens para a quantificação dos recursos minerais é importante devido à influência dos seus resultados no planejamento econômico do empreendimento e lucratividade do projeto. Amostras analisadas, geralmente, constituem cerca de 0,0001% do volume de um depósito para qual um inventário mineral está sendo estimado. Conseqüentemente, os erros são esperados e devem ser minimizados o tanto quanto for possível (Sinclair e Blackwell, 2004).

A presença de uma pequena quantidade de altos teores erráticos, em relação a uma maioria dos dados que possuem baixo teor, faz com que sua distribuição de frequência possua assimetria positiva, onde a feição principal do histograma é a presença de uma cauda que se afasta em relação à média na direção dos altos valores. A Figura 1.1 demonstra as características do histograma para distribuições quase simétricas e distribuições com forte assimetria positiva.

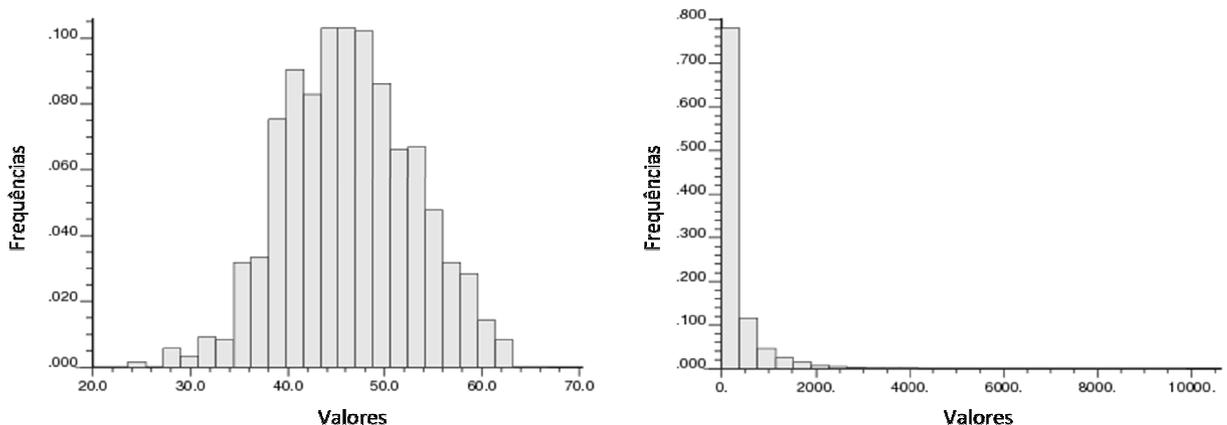


Figura 1.1 – Histogramas de teores exemplificando as diferentes feições entre uma distribuição aproximadamente simétrica (esquerda) e uma distribuição com forte assimetria positiva (direita).

Durante a fase de exploração, as minas cujo conjunto de amostras possui alta assimetria positiva são as que apresentam maiores diferenças entre a produção de metal estimada e a produção realizada. King *et al.* (1982) cita que estas discrepâncias já aconteceram com algumas das companhias mais experientes da indústria.

Teores elevados e erráticos são comuns no campo das geociências, encontrados principalmente em depósitos minerais de metais preciosos, tais como ouro e platina. Costa (2003) cita que uma pequena quantidade de valores altos dispersos em muitos dados de médio e baixo valor, pode ser suficiente para justificar o desenvolvimento de um projeto mineral. Devido aos seus efeitos na estimativa de recursos, os valores extremos devem ser identificados e tratados de forma cuidadosa.

1.1 Identificação dos valores extremos

De acordo com Barnett e Lewis (1984), pode-se definir um *outlier* em um conjunto de dados como uma observação (ou subconjunto de observações) que aparenta ser inconsistente em relação ao restante dos valores observados. A ocorrência dos *outliers*, ou valores extremos, não parece seguir o mesmo padrão de ocorrência dos teores mais baixos.

Tipicamente encontrados em teores de minério aurífero, uma pequena quantidade de valores extremos pode ser responsável por uma porção de metal no modelo estimado muito maior do que deveria ser atribuído na realidade. Isso evidencia que, nesses casos, a mínima alteração na proporção de altos teores pode ocasionar diferenças enormes entre as reservas estimadas e as reservas lavradas.

O surgimento de *outliers* em um banco de dados pode ser devido a vários fatores:

- Valores errôneos – as possíveis causas são os erros de análise ou de sua digitação, troca de amostras, contaminação de amostras ou até mesmo ações fraudulentas.
- Valores pertencentes à outra população – podem ocorrer devido à mistura de teores de diferentes litologias, ou que possuem processo formacional em épocas geológicas distintas. A revisão dos domínios geológicos modelados é recomendada, de forma a tratar e estimar os dados separadamente.
- Valores pertencem à mesma população – na maioria das vezes ocorrem quando

a época e ambiente de deposição dos teores são as mesmas, mas devido a outros fatores geológicos há uma concentração preferencial do elemento de interesse em algumas porções do depósito. Métodos geométricos ou matemáticos podem ser utilizados para limitar a influência dos teores a um volume específico no seu entorno.

Srivastava (2001) cita que o descarte de dados reais não é considerado uma boa prática; uma análise completa das causas da presença de *outliers* pode levar a reinterpretação das suposições iniciais a respeito do conjunto de dados. Todas as situações em que esse descarte torna-se necessário devem ser documentadas, e uma nova amostra deve ser tomada na vizinhança da amostra descartada.

Constatada a sua veracidade, deve-se buscar uma maneira de lidar com esses *outliers*, de forma que seus impactos sejam minimizados. Os seguintes problemas causados pela presença de valores extremos podem ser citados (King *et al*, 1982):

- i) Introdução de variabilidade substancial nas estimativas de vários parâmetros estatísticos, incluindo a média, variância, e covariância. Por isso, eles têm um impacto nas medidas de autocorrelação, tais como o semivariograma experimental, em relação ao que poderia ser obtido sem a sua presença.
- ii) Um valor *outlier*, que está aproximadamente centralizado ao bloco sendo estimado, pode resultar em um alto valor anormalmente atribuído ao bloco, levando a um problema de superestimativa tanto da tonelagem de altos teores quanto do seu teor.
- iii) Em procedimentos de estimativa de blocos tais como a krigagem, se um *outlier* coincide com um peso negativo, a estimativa resultante pode estar seriamente incorreta, podendo até ser negativa em casos extremos.

Uma questão problemática nestes casos é a identificação de quais teores serão considerados *outliers*. Srivastava (2001) discute alguns passos para a avaliação de valores extremos, mas não há uma metodologia definitiva para isto. A distinção é comumente baseada em critérios subjetivos e vai depender da abordagem utilizada.

Algumas ferramentas estatísticas podem ser úteis na identificação dos valores extremos. Gráficos de probabilidade e distribuição acumulada são métodos para visualização da tendência dos dados, onde o limite entre os valores extremos e o restante da distribuição é

verificado através da existência de pontos de mudança na inclinação do gráfico (Figura 1.2). A classificação dos *outliers* pode ser feita, ainda, utilizando como teor limitante o valor da média da distribuição completa mais dois desvios padrão. Uma análise dos quantis superiores da distribuição também pode ser conduzida com o mesmo intuito.

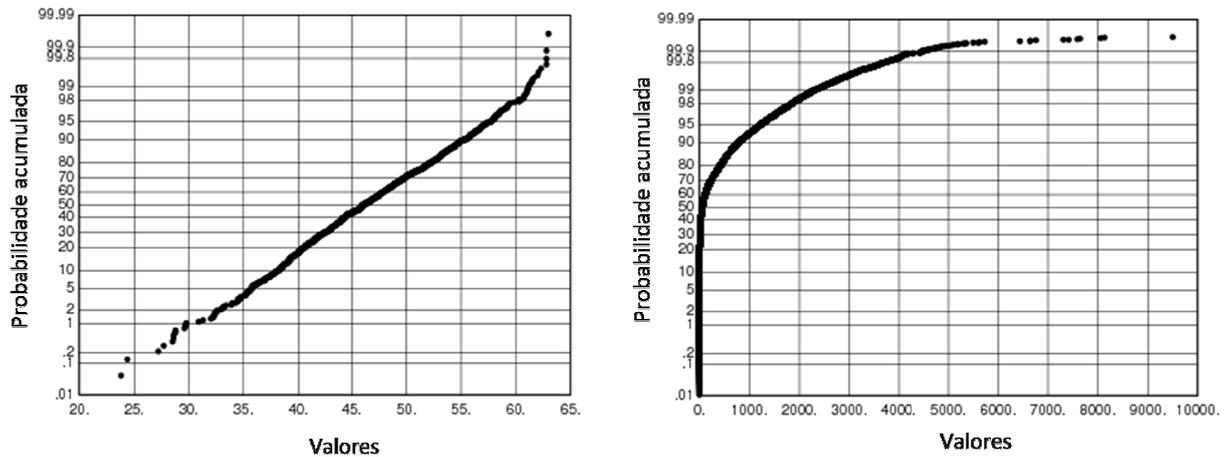


Figura 1.2 – Gráficos de probabilidade acumulada de uma distribuição de teores simétrica (esquerda) e de uma distribuição com forte assimetria positiva (direita); a mudança brusca na inclinação do gráfico na presença de valores extremos é evidente.

1.2 Estimativa na presença de valores extremos

A estimativa de distribuições altamente assimétricas requer mais do que a simples aplicação de algoritmos de interpolação; mesmo a krigagem não é capaz de fornecer boas estimativas locais nessas situações. Analistas de recursos minerais têm trabalhado em diversos depósitos auríferos, e em todos eles, nenhum dos métodos matemáticos foi capaz de evitar intervenções manuais, tais como o corte de altos teores para estimativas locais e utilização de informações além dos dados para inferir os variogramas (Machado *et al*, 2011). Como lidar com amostras erráticas de alto teor é um dos problemas mais complicados na estimativa de minérios (McKinstry, 1948).

Técnicas de corte ou “*capping*” dos valores extremos para limitar a sua influência são amplamente empregadas na estimativa de recursos nas últimas décadas. O *capping* é o procedimento de redução dos teores, acima de um determinado teor de corte, para este valor; porém o corte de teores é geralmente indesejado porque sua natureza arbitrária pode levar a grandes incertezas na estimativa de tonelagens e teores (Sinclair e Blackwell, 2004).

A Krigagem dos Indicadores (Journel, 1982), método que foi desenvolvido para

estimar distribuições de densidade de probabilidade local, mostra que a transformação em indicadores é um modo efetivo de limitar o efeito de valores muito altos (Glacken e Blackney, 1998). Mas, muitas vezes é difícil definir a continuidade espacial para indicadores acima do quantil $Q_{95\%}$, devido a poucas amostras presentes nessa classe e sua distribuição espacial esparsa. Outras metodologias desenvolvidas especialmente para a estimativa na presença de valores extremos já foram publicadas, tais como Robust Kriging (Cressie e Hawkins, 1980), onde os valores extremos do banco de dados são alterados pela aplicação de equações, envolvendo uma estimativa robusta no ponto amostrado e uma constante que controla a quantidade de dados que são considerados *outliers*; Outlier Restricted Kriging (Arik, 1992), técnica baseada na identificação do valor extremo durante o processo de estimativa através de uma variável indicatriz, onde o peso desta amostra é definido como a probabilidade de encontrar um *outlier* dentro do raio de busca utilizado; entre outras.

Analisando as técnicas empregadas para tratamento e estimativa de teores na presença de valores extremos, Armony (2000) desenvolveu uma nova teoria voltada para métodos matemáticos de intervenção, denominada Geoestatística Paramétrica de Campo ou FPG (do inglês *Field Parametric Geostatistics*). A metodologia baseia-se na construção de uma nova variável a ser estimada, que contém informações do teor e sua representatividade no depósito em questão, de forma que a influência dos valores extremos seja minimizada e com nível menor de intervenções empíricas na manipulação destes dados.

1.3 Meta e objetivos

A meta do presente estudo consiste em avaliar a metodologia denominada Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG) como uma alternativa para estimativa de depósitos minerais com distribuição de teores altamente assimétricas, que apresentam valores extremos. A avaliação desta metodologia possibilitará investigar uma nova abordagem no tratamento dos dados que apresentam esta característica, com certo rigor matemático e menos subjetividade do que as técnicas atualmente aplicadas. Desta forma, as estimativas de teores e recursos *in situ* podem ser mais próximas à realidade do depósito, tornando mais confiáveis as previsões de produção e investimentos a serem efetuados acerca do empreendimento.

Os objetivos deste trabalho foram estabelecidos a partir da meta proposta, sendo listados a seguir:

- i) Aplicar as metodologias atualmente empregadas na indústria mineral a um banco de dados que possua características de alta assimetria e presença de valores extremos;
- ii) Verificar a aplicabilidade da Geoestatística Paramétrica de Campo para a estimativa de teores cuja distribuição de frequências apresenta forte assimetria positiva;
- iii) Analisar os resultados obtidos com a nova técnica e com os métodos tradicionais, observando as vantagens e limitações dos métodos aplicados.

1.4 Metodologia

A metodologia seguida para o desenvolvimento deste estudo pode ser descrita por estas etapas:

- i) Revisão bibliográfica das metodologias tradicionais aplicadas ao tratamento dos dados e à estimativa na presença de valores extremos;
- ii) Estudo dos fundamentos da teoria, que deram origem à Geoestatística Paramétrica de Campo;
- iii) Aplicação das metodologias tradicionais e da FPG a um banco de dados presente em bibliografias, que possui dados exaustivos na área de interesse. O modelo de reconciliação gerado a partir de dados exaustivos é então comparado aos modelos estimados;
- iv) Aplicação das metodologias tradicionais e da FPG a um banco de dados oriundo de um depósito brasileiro de ouro, efetuando o comparativo entre os resultados obtidos pelas diferentes técnicas.

1.5 Organização da dissertação

Esta dissertação está estruturada na forma de capítulos, organizados da seguinte maneira:

O Capítulo 1 trata da introdução do tópico, descreve a problemática do estudo e os objetivos propostos para a sua realização.

A revisão bibliográfica a respeito das metodologias tradicionais de estimativa

aplicadas à estimativa de distribuições altamente assimétricas é apresentada no Capítulo 2, focando nas técnicas implementadas durante o trabalho. Neste capítulo, são ressaltados seus pontos fortes e fraquezas no tocante ao tratamento dos valores extremos e seu impacto nas estimativas.

No Capítulo 3, é apresentada a Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG), evidenciando as razões e insatisfações com as técnicas atualmente empregadas de forma simples e objetiva, assim como os conceitos e definições para a construção da teoria.

O Capítulo 4 contém os estudos de caso realizados, com um banco de dados obtido na bibliografia e com um banco de dados oriundo de um depósito real. Neste capítulo são discutidas a aplicação das diferentes metodologias e seus resultados.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas durante o estudo e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Estimativa de teores com distribuições de probabilidade altamente assimétricas: Estado da Arte

Este capítulo apresenta uma breve revisão bibliográfica de algumas metodologias de estimativa aplicadas a banco de dados de teores com presença de valores extremos. Apenas as técnicas mais relevantes empregadas na indústria mineral são apresentadas, com comentários a respeito das vantagens e desvantagens de sua utilização no tratamento de valores extremos e na estimativa de recursos.

A Seção 2.1 descreve algumas das ferramentas estatísticas para análise exploratória de dados, utilizadas na identificação de valores extremos em distribuições de teores altamente assimétricas.

A Seção 2.2 fala das boas práticas que podem ser aplicadas para avaliação dos valores extremos, citando também os procedimentos comumente utilizados no tratamento destes valores.

A Seção 2.3 aborda algumas metodologias de estimativa de teores na presença de valores extremos. São apresentados métodos de krigagem, com variantes adaptadas ao tratamento destes valores, além de técnicas de estimativa não-lineares para controle do impacto destes valores sobre as estimativas.

2.1 Análise exploratória dos dados na detecção de valores extremos

A análise exploratória dos dados emprega uma variedade de ferramentas gráficas e matemáticas, tendo por objetivo coletar o máximo de informações possíveis sobre o banco de dados em estudo. Good (1983) define a análise exploratória dos dados como uma coleção de técnicas para resumir as propriedades dos dados (estatística descritiva), mas também para

detectar padrões nos dados, identificar feições incomuns ou interessantes nos dados, detectar erros, distinguir feições acidentais de feições importantes e formular hipóteses a partir dos dados.

As informações coletadas durante a análise exploratória permitem tirar conclusões sobre a distribuição dos dados e tomar decisões razoáveis com base nesta inferência. O conhecimento detalhado dos dados com os quais se está trabalhando é de grande importância para as decisões futuras, pois suposições errôneas a respeito do banco de dados podem prejudicar seriamente o estudo. Frequentemente, o tempo despendido durante a análise exploratória é recompensado nas etapas subsequentes, através de uma rápida identificação de possíveis fontes de erro e aplicação de soluções apropriadas a cada caso.

2.1.1 Sumários estatísticos e medidas de simetria de uma distribuição

Os sumários estatísticos apresentam, de forma resumida, os parâmetros que caracterizam a distribuição dos dados, tais como média e desvio padrão. Além desses parâmetros, um sumário estatístico geralmente contém os valores mínimo e máximo da distribuição, que definem o intervalo de variação da variável (Goovaerts, 1997).

Em alguns casos uma análise dos principais quantis também é conduzida na elaboração do sumário estatístico. Para distribuições altamente assimétricas, a medida de tendência central mais apropriada é a mediana, que equivale ao quantil $Q_{50\%}$ da distribuição, pois é menos afetada pela presença de valores extremos. Outros quantis de ampla utilização para obter um melhor entendimento sobre o conjunto de dados são os quantis $Q_{25\%}$ e $Q_{75\%}$, mais comumente chamados de 1º quartil e 3º quartil da distribuição.

Uma forma de caracterizar e quantificar o grau de assimetria de uma distribuição é o valor estatístico denominado coeficiente de assimetria φ , que pode ser definido pela equação

$$\varphi = \frac{\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N [z(u_{\alpha}) - m]^3}{\sigma^3} \quad (2.1)$$

onde $z(\alpha)$ é o valor analisado para a amostra α , N é o número total de amostras do banco de dados, m é a média dos valores amostrais e σ descreve o desvio padrão. O coeficiente de assimetria é mais sensível aos valores extremos do que a média e a variância. Um único valor alto pode influenciar profundamente o coeficiente de assimetria uma vez que a diferença entre

cada dado e a média é elevada ao cubo (Isaaks e Srivastava, 1989).

Um parâmetro alternativo ao coeficiente de assimetria e comumente utilizado para verificar o grau de variabilidade de uma distribuição é o coeficiente de variação CV , definido pela razão entre o desvio padrão e a média:

$$CV = \frac{\sigma}{m} \quad (2.2)$$

O coeficiente de variação permite caracterizar a dispersão dos dados em relação ao valor médio da distribuição: quanto menor o coeficiente calculado, maior a homogeneidade do conjunto de dados. Este índice é utilizado primariamente para distribuições as quais os valores são todos positivos e cuja assimetria também seja positiva; embora possa ser calculado para outros tipos de distribuição, sua utilidade como um índice de forma torna-se questionável (Isaaks e Srivastava, 1989).

Na estimativa de recursos minerais, o coeficiente de variação pode fornecer um alerta de problemas com valores extremos. Referências a respeito da relação entre valores extremos e o coeficiente de variação são encontradas (Isaaks e Srivastava, 1989; Kerry e Oliver, 2007), citando que um $CV > 1$ indica a presença de valores altos e erráticos, os quais poderão ter impacto significativo nas estimativas finais. Algumas regras para interpretar o coeficiente de variação são propostas em Hartman (1992), onde o CV é representado como percentual em relação à média:

- $0\% < CV \leq 25\%$: Distribuição de teores simples, simétrica. Estimativa de recursos é fácil, muitos métodos funcionam.
- $25\% < CV \leq 100\%$: Distribuições assimétricas com dificuldade moderada na estimativa de recursos. Distribuições são tipicamente lognormais.
- $100\% < CV \leq 200\%$: Distribuições altamente assimétricas com um amplo espalhamento dos teores. Dificuldade em estimar as reservas locais é indicada.
- $CV > 200\%$: Dados altamente erráticos, assimétricos ou múltiplas populações. Teores locais são difíceis ou impossíveis de estimar com precisão alta.

2.1.2 Histograma de frequência

O histograma é um gráfico de barras, onde os intervalos ou classes de valores

observados são descritos no eixo horizontal, e a frequência com que ocorrem no conjunto de dados é representada pela altura das barras e quantificada no eixo vertical. Exemplos deste tipo de gráfico são apresentados na Figura 2.1, onde a unidade que retrata a ocorrência das classes é a frequência relativa, dada pela razão entre o número de amostras na categoria e o número total de amostras.

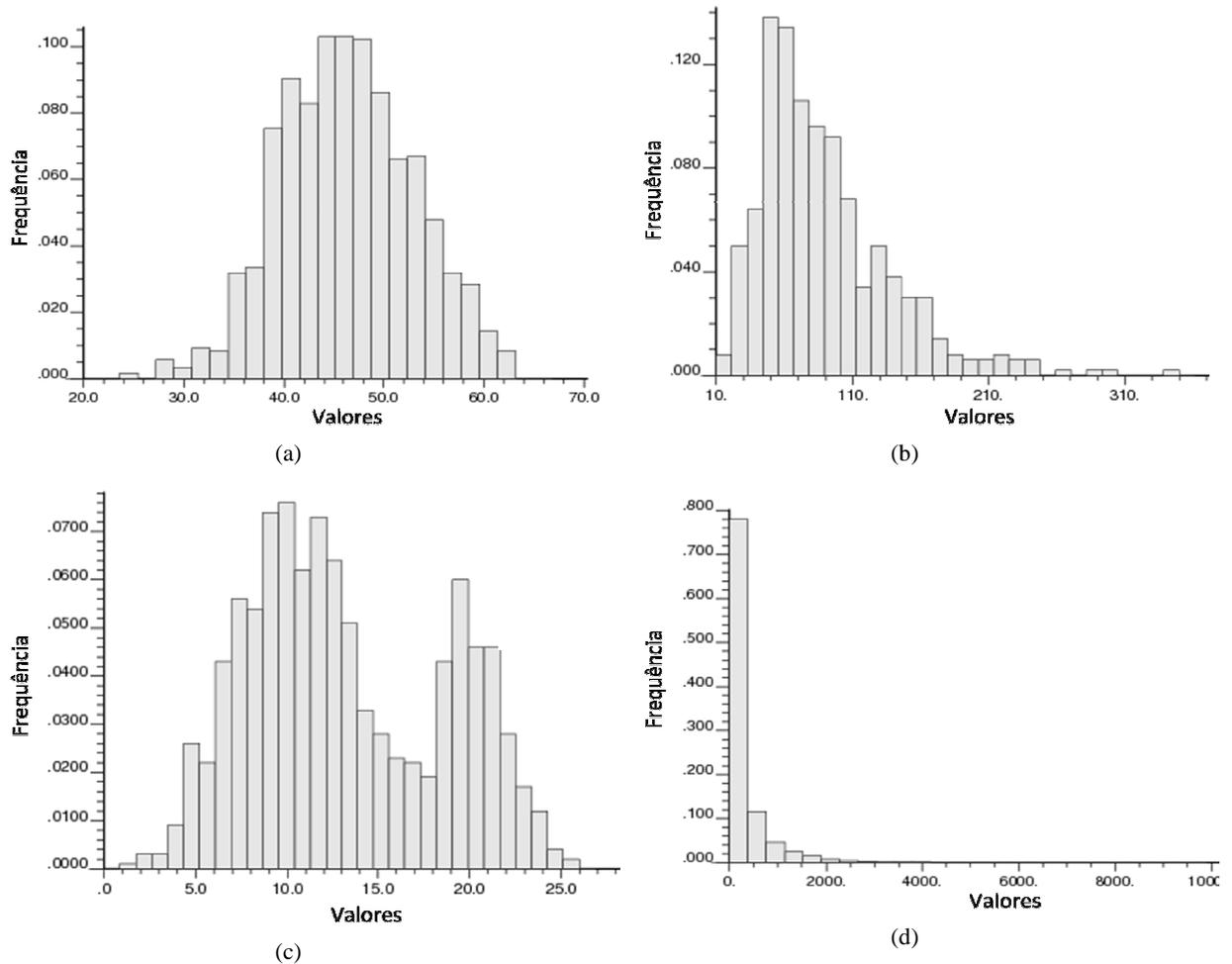


Figura 2.1 – Exemplos de histogramas: (a) distribuição simétrica; (b) distribuição lognormal; (c) distribuição bimodal; (d) distribuição com forte assimetria positiva.

Os histogramas são frequentemente utilizados devido à sua vantagem de visualização rápida da distribuição dos dados. A partir de suas feições pode-se observar se o formato do histograma aproxima-se de uma distribuição conhecida, como a gaussiana ou a lognormal (Figura 2.1-a e Figura 2.1-b), ou se há mistura de populações no banco de dados, através da presença de dois ou mais picos no histograma (Figura 2.1-c). Um histograma também pode indicar a presença de valores extremos no conjunto de dados, mostrada por frequências relativas extremamente altas em relação a outras (Figura 2.1-d), quando o gráfico é gerado com limites compatíveis aos valores mínimo e máximo da variável.

2.1.3 Mapas de localização amostral

Os mapas de localização mostram a posição das amostras do banco de dados, permitindo a identificação da existência de algum padrão amostral ou tendência na distribuição de teores. A Figura 2.2 exemplifica mapas amostrais com escala de cores, que aplicado ao banco de dados alvo de estudo pode facilitar a visualização de algumas feições da área.

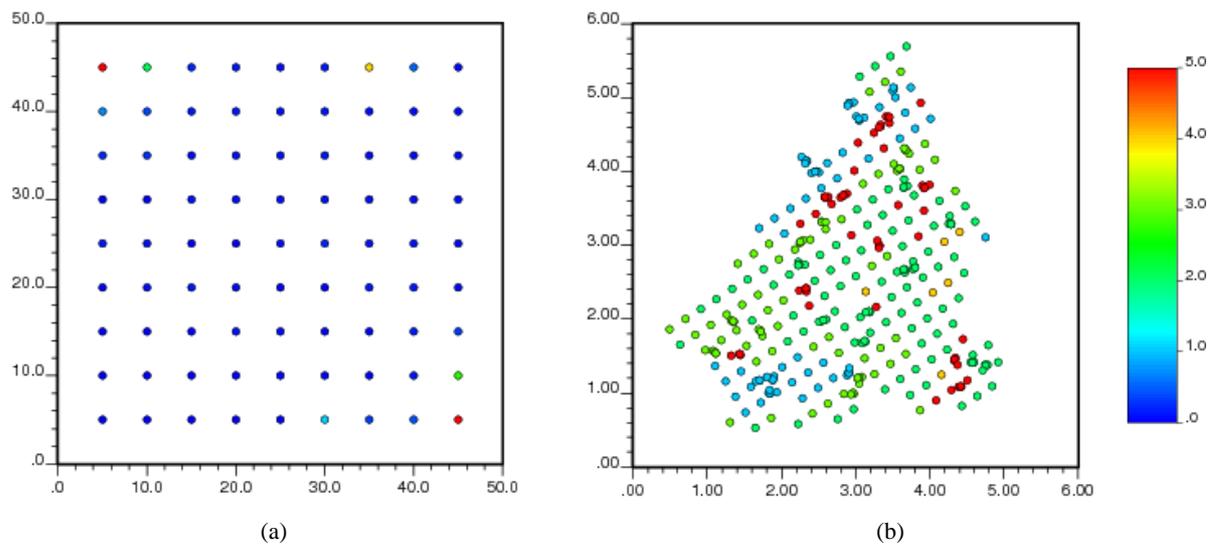


Figura 2.2 – Mapas de localização: (a) com malha amostral regular; (b) com amostragem preferencial (Goovaerts, 1997).

As regiões que possuem os teores mais altos são de grande interesse na indústria mineira, seja em relação aos compostos de valor econômico ou aos elementos contaminantes associados à mineralização; geralmente o adensamento amostral ocorre nessas áreas, visando caracterizar a extensão e a variabilidade dessas zonas anômalas. Porém, a coleta preferencial dos dados leva a um viés das estatísticas globais: o adensamento em zonas mais ricas faz com que haja muitos valores altos, acrescentando viés positivo ao cálculo da média global; além disso, a existência de muitos teores similares entre si faz com que a variância calculada seja suavizada. Nestes casos o mapa auxilia na identificação de áreas com amostragem preferencial, alertando para a necessidade de utilização de técnicas de desagrupamento associadas aos cálculos estatísticos.

Os mapas de localização amostral ajudam a verificar o surgimento dos valores extremos em um contexto espacial, ou seja, verificar se estão posicionados em regiões preferenciais ou espalhados na área de investigação. A característica de localização é um fator

auxiliar na decisão de qual metodologia pode ser aplicada para lidar com os valores extremos em uma situação específica.

2.1.4 Gráficos de probabilidade

Gráficos de probabilidade acumulada possuem uma escala de probabilidade normal no eixo vertical, de tal forma que uma distribuição normal, neste gráfico, se comportaria segundo uma linha reta. Estes gráficos são comumente utilizados para se avaliar o quão bem os dados se ajustam uma distribuição de probabilidade conhecida. A Figura 1.2, exibida no capítulo anterior, mostra exemplos de gráficos de probabilidade acumulada.

Uma vez que estamos frequentemente interessados em valores altos e baixos, o exagero dos valores extremos torna a escala de probabilidade normal mais útil do que a escala de probabilidade aritmética, principalmente para a identificação de valores extremos. Há interpretações úteis que podem ser feitas, por exemplo, uma forte mudança na inclinação pode indicar uma subpopulação com características geológicas diferente.

2.2 Procedimentos para avaliação dos valores extremos

Algumas metodologias sobre a forma de lidar com valores extremos serão discutidas, mas ressalta-se que não há um procedimento universalmente aceito na sua avaliação, que possa ser adotado para qualquer banco de dados. Esta flexibilidade acaba tornando mais difícil escolher a forma de lidar com os valores extremos, que vai depender, entre outros fatores, de experiências prévias e da abordagem utilizada a respeito da origem desses valores.

Uma das primeiras tarefas para avaliar valores extremos é a busca de possíveis erros no banco de dados. Este é um procedimento que demanda tempo durante o estudo, mas é uma das formas de assegurar a confiabilidade dos valores presentes na base de dados. Goovaerts (1997) cita algumas formas de buscar esses erros aplicando ferramentas de análise exploratória, dentre elas a utilização de mapas de localização para verificar possíveis erros de coordenadas, se o padrão de amostragem planejado corresponde ao padrão mostrado no mapa, e principalmente a localização dos valores extremos a respeito de áreas anômalas. Deve-se suspeitar de valores extremos excessivamente fora dos limites esperados para a variável ou que estão isolados fora das regiões de anomalia; nestes casos uma investigação mais profunda

sobre a origem destes dados pode ser conduzida para verificar a veracidade da informação.

A remoção de valores extremos do conjunto de dados somente deve ser feita se os valores estão comprovadamente errados. Um teor muito alto pode ser suspeito, mas ainda assim não é razão suficiente para descartá-lo, principalmente pelo fato de que esse valor pode ser de grande interesse no projeto. Srivastava (2001) ressalta que todas as situações onde um valor extremo é descartado devem ser documentadas, e apresentadas todas as informações importantes relacionadas a amostra descartada.

A existência de regiões preferenciais na área de estudo para a localização de teores altos, incluindo os valores extremos, pode ser um indicativo de zonas favoráveis para a maior acumulação do elemento de interesse em relação ao restante da área. Estas podem representar zonas mais fraturadas, com maior ação de intemperismo ou metamorfismo, ou mesmo uma formação litológica em particular. Nestes casos, pode-se considerar a possibilidade de tratar esses dados de forma diferenciada durante o estudo, como pertencentes a uma população geoestatística distinta do restante das amostras. Entretanto, esta escolha está fortemente condicionada à quantidade de dados disponíveis, pois cada subgrupo deve ter dados suficientes para permitir inferências estatísticas confiáveis para cada população (Goovaerts, 1997). Frequentemente, os valores erráticos compõem uma pequena parte do conjunto amostral, e por esse motivo, o subgrupo oriundo de sua separação pode não prover informações estatísticas representativas.

Quando não há motivos suficientes para a eliminação dos valores extremos existentes no banco de dados, ou justificativas coerentes para tratá-los como uma população distinta, existem formas de reduzir a sua influência. Uma alternativa bastante utilizada na indústria mineira é a prática de corte de altos teores, mais conhecida como *capping*, onde é estabelecido um limite máximo para o teor da variável: todas as amostras cujo valor ultrapassa esse limite têm o seu teor modificado para um teor igual ao valor limitante.

Na aplicação do corte aos valores extremos, a decisão mais importante é sobre o valor limitante que será estabelecido, pois uma escolha errada pode causar sérias consequências na estimativa de teores. Por exemplo, no tratamento de dados coletados em uma área de mineralização: se é aplicado um valor limite muito alto, a influência dos valores extremos pode não ser bem controlada, ocasionando problemas de superestimativa do metal contido; já o oposto, quando o teor limitante escolhido é mais baixo do que o ideal, estima-se uma quantidade de metal menor do que a existente no depósito mineral, fato que em casos

extremos poderia inviabilizar um projeto que poderia ser rentável. Alguns valores adotados ou recomendados para aplicação deste corte em bancos de dados auríferos podem ser citados, tais como o teor 1 oz/t, o teor equivalente a soma da média à dois/três desvios padrão, ou o teor correspondente a um quantil mais alto da distribuição dos dados, por exemplo $Q_{95\%}$ (Bird, 1991).

Uma observação feita por Clark (1999) levanta uma questão bastante interessante a respeito do corte para controle de valores extremos: qual valor deve ser utilizado para esse procedimento de forma que as estimativas produzidas sejam mais conservadoras. É de senso comum que qualquer decisão arbitrária deve ser evitada, procurando basear a escolha em parâmetros coerentes e adaptados à realidade do banco de dados em estudo. Um teor limitante que se ajusta bem a uma determinada área pode não funcionar para outra, mesmo quando as características geológicas e formacionais entre os depósitos são muito semelhantes.

Existem técnicas que, analogamente ao *capping*, também efetuam um ajuste dos valores extremos, com a diferença que não há um valor único para o ajuste, pois nestas técnicas a atribuição dos novos valores baseia-se na tendência geral da distribuição de probabilidade acumulada. David (1988) sugere a utilização da distribuição de frequência acumulada, corrigindo os valores extremos para os teores que apresentam a mesma probabilidade acumulada no modelo teórico proposto; Costa (1997) ressalta que, neste caso, há o surgimento de problemas quando existe grande número de valores extremos que não podem ser separados logicamente, necessitando de cálculos significativos para implementar a correção.

Transformações no conjunto completo de dados, tais como a aplicação do logaritmo, normalização dos dados ordenados, ou transformação em indicadores, também podem ser conduzidas como uma alternativa para reduzir a influência dos valores extremos. Deve-se ter cautela na utilização destes recursos, principalmente no momento da retro-transformação dos resultados da estimativa para a escala original. Algumas retro-transformações tendem a exagerar qualquer erro associado à interpolação, sendo este efeito mais dramático para valores extremos, apagando muitos dos benefícios de ter estatísticas mais robustas calculadas nos dados transformados. Em geral, se a função de transformação não é linear, a retro-transformação não produz uma boa estimativa.

2.3 Métodos de Krigagem aplicados à estimativa de teores na presença de *outliers*

2.3.1 Krigagem Ordinária

A krigagem, cujas idéias básicas foram propostas inicialmente por Krige (1951) e posteriormente desenvolvidas por Matheron (1963), pode ser definida como “uma coleção de técnicas de regressão linear, generalizadas para minimizar a variância de estimativa, definida a partir de um modelo prévio para a covariância” (Olea, 1991). Existe uma variedade de técnicas específicas de krigagem, todas baseadas no conceito de que os teores amostrais são considerados realizações de uma variável regionalizada, a qual pode ser associada um modelo matemático que descreva o seu comportamento e utilizar este modelo para auxiliar nas previsões dentro do domínio de estudo. A krigagem ordinária é a variante mais utilizada, pois busca manter as condições de minimização da média e variância dos resíduos sem a necessidade do conhecimento prévio da média global estacionária.

A estimativa por krigagem ordinária (*Ordinary Kriging – OK*) de um valor no local u , utilizando as amostras $z(u_\alpha)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) disponíveis na vizinhança de busca, pode ser expressa por:

$$Z_{OK}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha z(u_\alpha) \quad (2.3)$$

onde $Z_{OK}^*(u)$ corresponde ao valor a ser estimado no local não amostrado, e λ_α ($\alpha = 1, \dots, n$) representam os pesos de krigagem calculados para as amostras usadas para estimar-se no local u . Na prática, o cálculo dos pesos de krigagem se dá a partir do seguinte sistema de $n + 1$ equações:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C_{\alpha\beta} + \mu = C_{\alpha 0} & \forall \alpha = 1, \dots, n \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $C_{\alpha\beta}$ representa a covariância entre pares de amostras na vizinhança de u e $C_{\alpha 0}$ é a covariância entre a amostra e o local a ser estimado, ambas tomadas da função de covariância modelada para a continuidade espacial da variável, e μ é o parâmetro de Lagrange, introduzido para que o sistema otimize o cálculo dos pesos mediante a restrição imposta ao seu somatório, satisfazendo a condição de não-tendenciosidade do método.

O sistema de equações é mais comumente expresso em notação matricial; sua resolução se dá através da multiplicação, em ambos os lados, pela matriz inversa de covariância das amostras:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{10} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$C * \lambda = D$$

$$C^{-1} * C * \lambda = C^{-1} * D$$

$$I * \lambda = C^{-1} * D$$

$$\lambda = C^{-1} * D$$

A krigagem ordinária garante a mínima variância de estimativa, dados um modelo de variabilidade espacial e uma configuração dados/blocos específica (Vann e Guibal, 1998). Esta característica leva ao conhecido efeito suavizador da krigagem, que aliado à sensibilidade do cálculo da média local e à presença de valores extremos, faz com que a influência destes valores se estenda pelos blocos em seu entorno, criando auréolas de alto teor que não correspondem à realidade. Além disso, se um valor extremo coincide com um peso negativo, pode resultar em um teor estimado para o bloco completamente incorreto ou até mesmo negativo (Sinclair e Blackwell, 2004).

Normalmente, a utilização da krigagem ordinária para estimativa de distribuições com forte assimetria está associada a métodos de ajuste do banco de dados, que proporcionem certo controle em relação aos valores extremos, tais como a restrição geométrica, o corte dos valores extremos e a normalização dos dados, citados anteriormente. Após esta etapa de ajuste nos dados, os estudos geoestatísticos de análise de continuidade espacial e estimativa seguem como em um banco de dados qualquer; todavia, problemas na escolha destes valores de ajuste para os valores extremos não serão neutralizados no processo de krigagem.

Arik (1992) cita uma prática onde os *outliers* são tratados da mesma forma que os demais dados, mas o teor final estimado é rebaixado por um fator de “diluição”. Tal prática pode ser razoavelmente precisa, quando é baseada nos números obtidos e ajustados com as informações reais de produção, entretanto o problema surge quando não existe produção anterior.

2.3.2 Krigagem dos Indicadores

Na krigagem de indicadores (*Indicator Kriging – IK*) (Journel, 1982), a variável indicatriz $I(u_\alpha; z_k)$ é definida a partir do teor de corte z_k em relação aos teores $z(u_\alpha)$ analisados nos pontos amostrais u_α , através das condições:

$$i(u_\alpha; z_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } z(u_\alpha) \leq z_k \\ 0, & \text{se } z(u_\alpha) > z_k \end{cases} \quad (2.6)$$

A transformação dos dados em indicadores é uma transformação não-linear, dando origem a distribuições binárias que por definição não possuem valores extremos (Journel, 1983). A média m e variância σ^2 das distribuições dos indicadores são definidas pelas seguintes funções:

$$m = p \quad (2.7)$$

$$\sigma^2 = p(1 - p) \quad (2.8)$$

onde p é a proporção de valores menores ou iguais ao teor de corte z_k (proporção de 1's), o que equivale à probabilidade acumulada do teor de corte z_k na distribuição original. Como exemplo, Glacken e Blackney (1998) citam valores de projetos auríferos: os indicadores frequentemente revelam que 30% do metal contido são derivados de teores acima do quantil $Q_{90\%}$; em alguns casos, mais de 70% do metal pode derivar de teores acima do quantil $Q_{90\%}$.

Definido um único teor de corte, o processo de estimativa se resume ao cálculo e modelamento variográfico e aplicação do processo de krigagem (simples ou ordinária), cujo resultado fornece a probabilidade do teor $Z(u)$ no local não amostrado ser igual ou menor do que o teor de corte z_k (Deutsch e Journel, 1998):

$$[I(u; z_k)]^* = E\{i(u; z_k)|(n)\}^* = Prob^*\{Z(u) \leq z_k|(n)\} \quad (2.9)$$

onde n representa a quantidade de amostras condicionantes disponíveis na vizinhança de u . Quando o processo de krigagem dos indicadores é repetido para uma série de K teores de corte z_k ($k = 1, \dots, K$), pode-se construir uma função de distribuição acumulada condicional (*ccdf*), através da interpolação dos pontos de probabilidade calculada, representando assim um modelo probabilístico da incerteza sobre o valor não amostrado de $Z(u)$.

A krigagem múltipla dos indicadores (*Multiple Indicator Kriging*) compreende o cálculo e ajuste de modelos variográficos em todos os trechos definidos pelos teores de corte z_k , o que pode consumir muito tempo para que o resultado final compreenda toda a extensão da distribuição a um nível de detalhamento satisfatório. Uma adaptação sugerida por Journel (1983), a krigagem dos indicadores pela mediana (*Median Indicator Kriging – MIK*), assume que a continuidade espacial dos indicadores pode ser aproximada pela função estrutural observada na mediana da distribuição de teores. Esta simplificação reduz o tempo de análise de continuidade e de estimativa, pois somente um variograma é modelado, levando a um sistema de krigagem onde os pesos calculados são utilizados para todos os trechos.

O variograma do indicador da mediana é tipicamente o mais robusto e com maior alcance, mas há desvantagens nesta aproximação de seu uso em diversos outros quantis (principalmente nos extremos) para distribuições que possuem alta assimetria positiva. Para indicadores definidos no quantil $Q_{90\%}$ ou acima dele, o variograma costuma ter alto efeito pepita e curto alcance devido a pouca quantidade de amostras com distribuição espacial esparsa, o que pode ocasionar problemas de aderência da estimativa ao que é encontrado na realidade.

Seja a krigagem múltipla ou krigagem pela mediana, é necessário em ambos os métodos a interpolação (geralmente linear) dos pontos da função de distribuição acumulada e a suposição a respeito do seu comportamento nos extremos para obtenção de uma função contínua de probabilidade (a krigagem dos indicadores só provém o valor da *ccdf* nos trechos escolhidos). Deutsch e Journel (1998) propõem um método de extrapolação baseada em uma distribuição hiperbólica para representar a distribuição de teores acima do teor mais alto. Neste caso, a média da classe extrema calculada é dependente da razão de decaimento da função hiperbólica, e principalmente do limite superior aplicado à distribuição. Este deve ser escolhido cuidadosamente. A krigagem dos indicadores não elimina completamente os riscos inerentes à estimativa de recursos na presença de valores extremos.

2.3.3 Krigagem Lognormal

A krigagem lognormal (*Lognormal Kriging – LK*) compreende um conjunto de técnicas que são variantes da base matemática proposta inicialmente por Journel e Huijbregts (1978). De forma geral, é aplicada uma log-transformação no banco de dados, através de uma equação do tipo $y(u_\alpha) = \ln[z(u_\alpha)]$, e a krigagem simples ou ordinária é então executada nos

dados transformados. De acordo com Deutsch e Journel (1998), a krigagem lognormal pode ser considerada um caso particular da krigagem multi-gaussiana (Verly, 1983), partindo do pressuposto de que os valores originais seguem uma distribuição lognormal definida positivamente e a função utilizada para a normalização é o logaritmo natural.

Em particular a retro-transformação $e^{Y^*(u)}$ é um estimador tendencioso de $Z(u)$, por produzir uma média geométrica ao invés da média aritmética desejada (Sinclair e Blackwell, 2004). Para obter-se uma retro-transformação não-tendenciosa da estimativa por krigagem lognormal simples $Y^*(u)$ usa-se (Deutsch e Journel, 1998):

$$Z^*(u) = \exp \left[Y^*(u) + \frac{\sigma_{SK}^2(u)}{2} \right] \quad (2.10)$$

onde $\sigma_{SK}^2(u)$ é a variância da krigagem lognormal simples. Para a krigagem lognormal ordinária, a retro-transformação é dada por

$$Z^*(u) = \exp \left[Y^*(u) + \frac{\sigma_{OK}^2(u)}{2} - \mu \right] \quad (2.11)$$

onde $\sigma_{OK}^2(u)$ é a variância da krigagem lognormal ordinária e μ é o parâmetro de Lagrange. Assim como a krigagem dos indicadores, a transformação de variável efetuada para a krigagem lognormal atenua o efeito dos valores extremos durante a estimativa, porém a retro-transformação dos valores krigados traz de volta a questão de lidar com os *outliers* (Costa, 2003).

Ambas as equações de retro-transformação possuem a variância de krigagem incorporada no parâmetro de correção do valor estimado, tornando as previsões de $Z^*(u)$ por krigagem lognormal bastante sensíveis ao ajuste do patamar (*sill*) modelado. Este envolvimento da variância de krigagem requer confiança no *sill* do variograma adotado. David (1988) discute um exemplo onde em um mesmo banco de dados, as alterações nos parâmetros variográficos levam a estimativas completamente diferentes do metal contido, de 2,38% para a utilização de um variograma com determinados parâmetros, e de 1,54% para a utilização de um variograma com parâmetros diferentes do anterior, concluindo que desta forma uma pessoa desonesta poderia obter os teores que quisesse em uma estimativa, o que tornaria a krigagem lognormal uma ferramenta não recomendável. Clark (1999) indica a demonstração de uma validação cruzada minuciosa como uma forma de contornar o problema de confiabilidade do método.

2.4 Comentários finais

Neste capítulo, foram apresentadas algumas das abordagens existentes para a estimativa de distribuições com forte assimetria positiva, verificando algumas deficiências nas técnicas para identificação e controle de valores extremos. No Capítulo 3, será apresentada a metodologia da Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG), com sua formulação teórica e alguns exemplos.

Capítulo 3

Geoestatística Paramétrica de Campo

Neste capítulo, é apresentada a Geoestatística Paramétrica de Campo (*Field Parametric Geostatistics – FPG*), técnica desenvolvida em Armony (2000) e apresentada em Armony (2001, 2005) e Machado *et al.* (2011a, 2011b, 2012), que será avaliada nesta dissertação como uma metodologia alternativa para a estimativa de teores que possuam distribuições de probabilidade com forte assimetria positiva.

A Seção 3.1 apresenta algumas considerações para a formulação da Geoestatística Paramétrica de Campo, que são diferenciadas em relação às abordagens adotadas nas técnicas geoestatísticas atuais.

A Seção 3.2 descreve a formulação teórica e matemática, além de alguns conceitos e definições adotados para o desenvolvimento da teoria.

A Seção 3.3 fala sobre a criação da nova variável de estudo a partir das informações disponíveis, e cita uma linha de ação para a aplicação da metodologia.

3.1 Observações a respeito da estimativa de teores por krigagem

3.1.1 Variável adotada

O teor do metal de interesse, de ouro, por exemplo, é geralmente a variável a ser estimada para quantificar a massa do metal de valor no depósito avaliado, este expresso em gramas por tonelada (g/t) ou partes por milhão (ppm). De acordo com Armony (2000), o teor não seria a melhor variável a ser utilizada para a previsão do metal contido em distribuições altamente assimétricas, pois a expressão do teor contém uma inferência errada em relação à quantidade de metal.

Considerando o alto teor de 100 g/t analisado para uma amostra, em um banco de dados com forte assimetria positiva: se for coletada uma tonelada de material no entorno da amostra analisada, sabe-se que na grande maioria dos casos não serão encontrados 100 gramas de ouro. Entretanto, para uma amostra de 0,2 g/t do mesmo banco de dados, deve-se efetivamente obter 0,2 gramas de ouro para uma tonelada de material no seu entorno, ou algo muito próximo a este valor. Isto significa que os altos teores não podem ser estendidos para o mesmo volume tal como podem ser os baixos teores.

Durante a análise exploratória de um banco de dados aurífero, esta premissa é levada em conta quando os altos teores são rebaixados. A realização de cortes nos altos teores poderia ser justificada como um recurso empírico para a redução da influência espacial destas amostras, buscando uma maior aproximação da realidade. A questão principal na redução da influência dos teores é até que distância ou volume a razão de 100 gramas por tonelada de material, verificada na amostra, ainda é verdadeira. Uma forma de atribuir este volume de influência é calcular um fator de diluição para o depósito, por meio de estudos de reconciliação entre a produção de metal e as estimativas. Na falta destes estudos, no caso de projetos de pré-viabilidade, a aplicação da krigagem por si só não é capaz de prever um fator de ajuste para estas informações.

3.1.2 Continuidade e representatividade

As propriedades desejáveis e que podem ser inferidas ao conjunto de amostras são a continuidade e a representatividade. A representatividade refere-se ao fato de que cada amostra é uma representação de um volume maior do que ela mesma. A continuidade dependerá da variação dos teores entre os volumes representados pelas amostras e suas respectivas massas, que pode ser descrita por uma função contínua.

Na estimativa por krigagem, a continuidade física dos teores é incorporada através dos pesos de krigagem, de acordo com a função modelada aos pontos do semivariograma experimental. Mas a krigagem atribui a mesma representatividade a todas as amostras, independentemente dos teores; uma diferenciação da influência das amostras de acordo com o teor analisado não está implícita na técnica.

3.1.3 Precisão da variável

A krigagem, assim como outros procedimentos de estimativa, consideram que as amostras analisadas são observações pontuais com infinitos valores possíveis para os teores das amostras. Porém, sabe-se que as amostras têm um tamanho, e as observações acerca dos teores possuem uma precisão limitada pelo equipamento de análise. Se os teores analisados variam de 0,00 g/t a 100,00 g/t, com precisão de 0,01 g/t, isto quer dizer que existem 10001 valores possíveis para as amostras. Na Geoestatística Paramétrica de Campo, a abordagem dos teores como um conjunto discreto de valores é essencial para a formulação da teoria.

3.2 Teoria da Geoestatística Paramétrica de Campo

A Geoestatística Paramétrica de Campo foi desenvolvida com o intuito de fornecer uma alternativa para a realização de estimativas a partir de dados que exibem distribuição de probabilidade altamente assimétrica. Armony buscou termos genéricos para denominação da técnica, que estivessem relacionados à abordagem da FPG para a estimativa de variáveis geoposicionadas.

A denominação “paramétrica” está relacionada à utilização dos teores analisados e sua distribuição de frequências para a construção da nova variável. Enquanto os métodos tradicionais analisam a continuidade dos teores no espaço sem levar em conta a sua frequência, para a Geoestatística Paramétrica de Campo cada valor medido e sua ocorrência no banco de dados são vistos como parâmetros de uma distribuição discreta dos teores, e estes parâmetros são considerados no cálculo dos semivariogramas através da variável extensão.

O termo “campo” foi atribuído em analogia ao elétron, que é composto por uma carga admitida como pontual, mais a sua influência espacial. A extensão do valor de uma amostra a uma porção do espaço é similar a isso. A variável pode ser o teor de um elemento, a espessura de uma camada, ou qualquer outro conceito pontual ou derivado; a porção do espaço pode ser uma área, um volume, ou pode ser representada pelo seu peso, o peso do metal nele contido, ou qualquer outro conceito primitivo ou espacial. Sendo assim, pode-se dizer que uma amostra é constituída por um campo, composto por um valor e uma extensão (influência) associados à amostra.

Desta forma, na Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG), os teores analisados e sua representatividade (influência espacial) são incorporados a uma nova variável mais

adequada às estimativas – a extensão acumulada padronizada do teor (τ), a qual será apresentada nos próximos itens.

3.2.1 Conceitos gerais

3.2.1.1 Classes naturais absolutas e condicionais

O agrupamento tradicional dos dados em classes para a construção de histogramas segue critérios visuais e numéricos, onde o número de classes estipulado seja suficiente para fornecer um gráfico de fácil interpretação. A teoria FPG aborda os teores como um conjunto de valores discretos, desta forma não seria mais necessária a subdivisão dos dados em intervalos contínuos de teores. Cada teor analisado pode constituir, por si só, uma classe, e para critérios visuais, basta trabalhar com a curva de frequência acumulada.

Partindo deste ponto de vista, o número de classes naturais absolutas $N(d)$ entre os limites mínimo e máximo permitidos, t_{min} e t_{max} , de acordo com a precisão d , é dado por

$$N(d) = \frac{t_{max} - t_{min}}{d} + 1 \quad (3.1)$$

O valor $N(d)$ também corresponde ao número de valores possíveis dentro do intervalo, pois compreendem todos os valores possíveis associado à precisão que as medidas nos permitem obter. Por exemplo, em um banco de dados com valores possíveis entre 0,0 g/t e 10,0 g/t, temos 101 valores possíveis, ou 101 classes naturais absolutas possíveis, onde cada classe contém uma ou várias amostras com apenas um valor para o teor.

Ao analisar um banco de dados, muitas das classes naturais absolutas não estarão representadas, pois nem todos os valores possíveis serão encontrados nas amostras. Dada uma estatística de ordem $\{\theta_j\}, j = 1, \dots, m \mid \theta_{j-1} < \theta_j$, sendo θ_0 um valor numérico escolhido para valor mínimo, denominam-se as classes naturais condicionais as classes definidas pelos intervalos dados por $(\theta_{j-1}; \theta_j]$, onde a determinação dos intervalos está condicionada às medidas θ_j efetuadas.

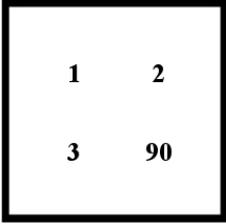
Utilizando um exemplo onde dez amostras são analisadas (2,3; 2,4; 1,1; 8,6; 5,0; 5,0; 8,4; 7,8; 4,6; 3,8), tomado o valor 0,0 como o limite mínimo. Tem-se 87 classes naturais absolutas, e as classes naturais condicionais podem ser criadas da seguinte forma:

- 0,0 a 1,1 – representado por 1,1;
- 1,1 a 2,3 – representado por 2,3;
- 2,3 a 2,4 – representado por 2,4;
- 2,4 a 3,8 – representado por 3,8;
- 3,8 a 4,6 – representado por 4,6;
- 4,6 a 5,0 – representado por 5,0 (com frequência absoluta = 2);
- 5,0 a 7,8 – representado por 7,8;
- 7,8 a 8,4 – representado por 8,4;
- 8,4 a 8,6 – representado por 8,6.

Note que o número de classes naturais condicionais é sempre menor ou igual ao número de classes absolutas, e menor ou igual ao número de valores medidos.

3.2.1.2 Abordagem dos teores como um conjunto de elementos discretos

Um exemplo da percepção do intervalo de dados como um conjunto de valores discretos pode ser demonstrado em uma pequena unidade de lavra, onde é amostrado o pó de perfuratriz de quatro furos simetricamente posicionados no painel quadrado. As amostras têm como resultado os teores 1 g/t, 2 g/t, 3 g/t, e 90 g/t, como mostrado na Figura 3.1, com precisão de análise de duas casas decimais. A Figura 3.2 retrata a distribuição de frequência acumulada, condicionada aos valores analisados internamente à unidade de lavra.



1	2
3	90

Figura 3.1 – Unidade de lavra quadrada, com quatro furos da detonação e análises nas respectivas posições.

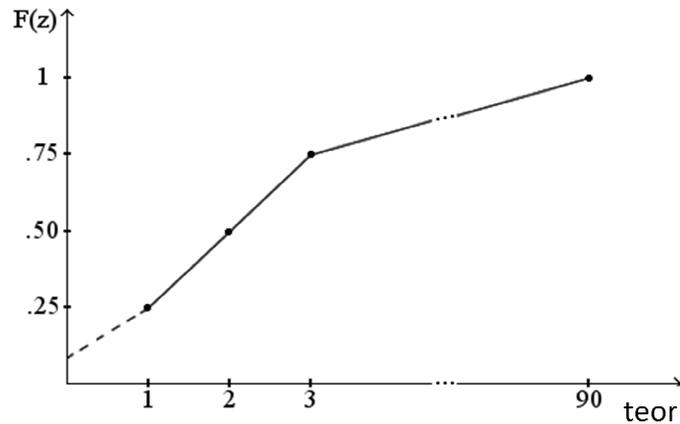


Figura 3.2 – Curva de frequências relativas acumuladas dentro da unidade de lavra.

No gráfico, os segmentos de reta parecem ser contínuos, mas são sequências de pontos associados à precisão dos valores. De 1,00 g/t a 2,00 g/t há 100 pontos; de 2,00 g/t a 3,00 g/t há 100 pontos; de 3,00 g/t a 90,00 g/t há 8700 pontos.

Como os valores estão dentro de um bloco pequeno, pode-se assumir que todos os pontos estão associados a uma única variável aleatória. A probabilidade de obter uma nova amostra com teor entre 1,00 g/t e 2,00 g/t, 2,00 g/t e 3,00 g/t, e entre 3,00 g/t e 90,00 g/t tem o mesmo valor 0,25; porém a probabilidade de tomar uma nova amostra com exatamente 90,00 g/t no intervalo (3,00;90,00] é 87 vezes menor do que tomar uma amostra com teor 3,00 g/t no intervalo (2,00;3,00] por exemplo. Com o tratamento dos teores como valores contínuos, seria mais difícil chegar a esta conclusão.

3.2.2 Formulação matemática

3.2.2.1 Formulação geral da teoria

Seja uma estatística de ordem $\{\theta_j\}, j = 1, \dots, m$ de uma variável de suporte pontual tomando valores sobre as classes naturais de precisão d , $m \leq N(d)$, e seja o valor mínimo escolhido $\theta_0 < \theta_1$. Vamos chamar $\theta_{min} = \theta_0$ e $\theta_{max} = \theta_m$. Portanto:

$$\theta_{j-1} < \theta_j, j = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

Fazendo a correspondência de $\{\theta_j\}$ a um número m de classes, onde cada classe contenha um ou mais valores:

$$(\theta_{j-1}; \theta_j], j = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

Vamos definir uma função que faz corresponder a cada classe $(\theta_{j-1}; \theta_j]$ uma e somente uma extensão $T_j \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$T(\theta_i) = \sum_{j=1}^i T_j \quad (3.4)$$

$T(\theta_i)$ é o somatório das extensões dos campos cuja variável pontual é menor ou igual a θ_i , sendo $T(\theta_{i-1}) < T(\theta_i)$. Vamos chamar:

$$T = T(\theta_m) \quad (3.5)$$

Podemos definir um conjunto $\{\omega_j\}$ de ponderadores de modo que:

$$T_j = \omega_j T, 0 \leq \omega_j \leq 1 \quad (3.6)$$

Vamos definir uma variável global acumulada padronizada:

$$\tau_i = \frac{T(\theta_i)}{T} \quad (3.7)$$

Obviamente, τ_i equivale ao somatório dos ponderadores:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^i \omega_j \quad (3.8)$$

Seja $g(\theta)$ uma função não decrescente, definida sobre todo o intervalo $[\theta_0; \theta_m]$, contínua exceto por um número finito de pontos de descontinuidades, e tal que

$$g(\theta_i) = \tau_i \quad (3.9)$$

ou seja, os valores τ_i podem ser entendidos como os valores de $g(\theta)$ nos pontos de significado físico. Temos $g(\theta_0) = 0$, $g(\theta_m) = \tau_m = 1$, e podemos definir $\tau_0 = 0$.

Chamaremos g de função extensão. Usaremos τ como a variável global acumulada a ser modelada. Estamos chamando τ de variável acumulada, ainda que nem sempre se refira a uma soma de extensões.

Vamos trabalhar, também, com a variável pontual padronizada para o intervalo $(0; 1]$:

$$\zeta_k = \frac{(\theta_k - \theta_{min})}{(\theta_{max} - \theta_{min})}, k = 1, \dots, N(d) \quad (3.10)$$

3.2.2.2 Aplicação sobre as classes naturais condicionais

Seja uma estatística de ordem $\{z_i(u)\}$ com n amostras com valores em \mathbb{Q} , conjunto dos números racionais, medidas numa região $A \subset \mathbb{R}^3$, onde u designa a posição da amostra, $u \in A$. Então:

$$z_i(u_\alpha) \leq z_i(u_\beta) \quad \forall i = 1, \dots, n - 1 \quad (3.11)$$

Ao conjunto $\{z_i(u)\}$ corresponde o conjunto $\{\theta_j\}, j = 1, \dots, m$, $m \leq n + 1$, estatística de ordem de m valores diferentes do conjunto $\{z_i(u)\}$ mais $\theta_{max} = \theta_m$, valor máximo escolhido para a correção do efeito dos extremos. Portanto,

$$\theta_{j-1} < \theta_j, j = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

onde $\theta_0 = \theta_{min}$ é o valor mínimo escolhido para a correção do efeito cauda. Vamos trabalhar com as classes naturais condicionais $(\theta_{j-1}; \theta_j], j = 1, \dots, m$, a partir das quais valem todas as expressões da formulação geral.

O ponderador ω_j é afetado por três fatores:

- i. o fator relativo ao número de amostras com valor θ_j , ou seja a frequência de θ_j ;
- ii. o fator extrínseco, que pode conter até três componentes diferentes. Um deles nos diz qual a extensão espacial ou temporal a ser associada a cada amostra com teor θ_j devido ao seu arranjo espacial (no caso das células móveis, é o fator de desagrupamento). O segundo depende do conhecimento que o analista de recursos tem do depósito ou da mina (ex.: fator de diluição, para redução da influência de altos teores). O terceiro está associado ao ajuste da função extensão $g(\theta)$, ou simplesmente à junção dos pontos físicos;
- iii. um fator intrínseco adicional de representatividade das amostras. Por exemplo, quando a variável global for a tonelagem, será a densidade, que pode diferir mesmo para amostras que tenham o mesmo fator extrínseco.

Assim, podemos ter:

$$\omega_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{I_j} \alpha_k \beta_k \quad (3.13)$$

onde I_j é o número de amostras com valor θ_j , α_k e β_k são, respectivamente, o fator extrínseco e o fator intrínseco, e n é o número total de amostras.

Exemplos:

- i. Se temos uma malha regular num meio isotrópico, e se tomam áreas de influências iguais, teremos $\alpha_k = 1$ para todo k , o que significa termos a mesma extensão para todas as amostras. Se não houver nenhum fator intrínseco, então $\beta_k = 1$ e

$$\omega_j = \frac{1}{n} I_j \quad (3.14)$$

exatamente a frequência relativa. É o caso quando se utiliza como variável global a frequência acumulada: equivale a tomar o volume, quando as amostras são todas de mesmo tamanho, ou a tonelagem, quando as amostras são de mesmo tamanho e têm o mesmo peso. Assim, sempre que se estiver lidando com amostras de igual gravidade específica, tamanho e qualidade, em malha regular, no caso das classes naturais condicionais, trabalhar com frequência acumulada significa trabalhar com tonelagem ou volume.

- ii. Existindo um fator extrínseco não constante devido ao arranjo espacial, isso significa que as amostras podem ter extensões diferentes. O resultado

$$\omega_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{I_j} \alpha_k \quad (3.15)$$

não é mais proporcional à frequência das amostras, e é denominado por muitos autores como frequência corrigida em relação à original devido ao arranjo espacial das amostras. Também aqui, ao lidarmos com amostras de igual densidade, tamanho e qualidade, trabalhar com frequência acumulada corrigida significa trabalhar com tonelagem ou volume como variável global. Portanto,

se nossa variável global acumulada padronizada é o volume referente a amostras de igual tamanho ou a tonelagem com gravidade específica constante, então a função extensão g pode ser considerada como a frequência acumulada corrigida da distribuição associada à variável pontual θ , condicionada não apenas pelos valores associados às amostras, mas também pelas escolhas referentes aos limites mínimo e máximo da função extensão.

3.2.2.3 Caso particular da teoria FPG: geoestatística tradicional

Quando a função extensão escolhida é dada por $g(\theta) = \mathcal{L}(\theta)$, uma função linear de θ , então a variável acumulada padronizada global e a variável padronizada pontual são idênticas, e cai-se no caso particular da geoestatística tradicional. Podemos escrever:

$$g(\theta) = \frac{\theta - b}{a}, \quad a \neq 0 \quad (3.16)$$

e, como $g(\theta_i) = \tau_i$, temos

$$\theta_i = a\tau_i + b, \quad \theta_{min} = b \quad (3.17)$$

A variável pontual padronizada é dada por:

$$\zeta_i = \frac{(\theta_i - \theta_{min})}{(\theta_{max} - \theta_{min})} \quad (3.18)$$

Substituindo $\theta_i = a\tau_i + b$:

$$\zeta_i = \frac{a(\tau_i - \tau_{min})}{a(\tau_{max} - \tau_{min})} \quad (3.19)$$

Mas $\tau_{min} = 0$ e $\tau_{max} = 1$, portanto:

$$\zeta_i = \tau_i \quad q. e. d \quad (3.20)$$

Seja $\{z_i\}$ o conjunto de valores da variável pontual com $1 \leq i \leq N(d)$. Sendo z_j e z_{j+1} dois valores consecutivos e lembrando que $g(\tau_j) = \frac{z_j - b}{a}$, então:

$$\frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{z_{j+1} - z_j} = \frac{1}{a} \quad (3.21)$$

Mas, $z_{j+1} - z_j = d$ (precisão), portanto $\tau_{j+1} - \tau_j = d/a$, valor constante $\forall j \mid 1 \leq j \leq N(d) - 1$. Porém $\tau_{j+1} - \tau_j$ é a extensão padronizada atribuída ao valor z_{j+1} . Ao construir o semivariograma, é esta extensão que está sendo utilizada, pois $a(\tau_i - \tau_j)^2 = (z_i - z_j)^2$. Isso significa que na geoestatística há a premissa subjacente de que todos os valores têm extensões iguais – um caso particular da Geoestatística Paramétrica de Campo.

3.3 Transformação do teor em extensão

A extensão acumulada padronizada do teor (τ) é a nova variável escolhida, pois preenche os requisitos necessários a uma variável a ser modelada: utiliza toda a informação disponível (valores de teor e extensão), compreende as propriedades desejadas de continuidade e representatividade, e é uma variável discreta. Na teoria FPG, a função formada pelas extensões acumuladas padronizadas é chamada de função g , sendo uma função totalmente discreta por possuir um número finito de pontos.

O procedimento matemático pode ser simplificado pela descrição abaixo:

- i. Ordenar as amostras de acordo com o teor analisado, do menor para o maior;
- ii. Associar o peso de desagrupamento às amostras ordenadas, em caso de amostragem preferencial, criando um índice relativo à configuração espacial. Para amostras de mesmo teor e posições espaciais diferentes, somam-se os pesos de desagrupamento;
- iii. Associar aos teores um índice relativo à sua ocorrência no banco de dados (frequência absoluta). Por exemplo, se há cinco amostras de 2 ppm e uma amostra de 80 ppm, a amostra de teor mais baixo será considerada cinco vezes mais representativa do que a amostra de alto teor;
- iv. Multiplicar os índices calculados, criando a extensão simples dos teores, e criar a extensão cumulativa dos teores (do menor para o maior teor);
- v. Padronizar a extensão acumulada dos teores, com valores entre zero e um.

Ao trabalhar com tonelagens, em caso de densidade variável, devem-se multiplicar os pesos de desagrupamento pela densidade da amostra.

A nova variável reduz automaticamente a influência dos altos teores sem intervenção manual direta. Além disso, propicia o cálculo de semivariogramas bem comportados, os quais

calculados na variável original geravam semivariogramas ruidosos. Como pode ser visto na Figura 3.3 a e b, geradas a partir do banco de dados sintético cluster.dat (Deutsch e Journel, 1998), há uma grande diferença entre os semivariogramas calculados com a variável original e a variável extensão.

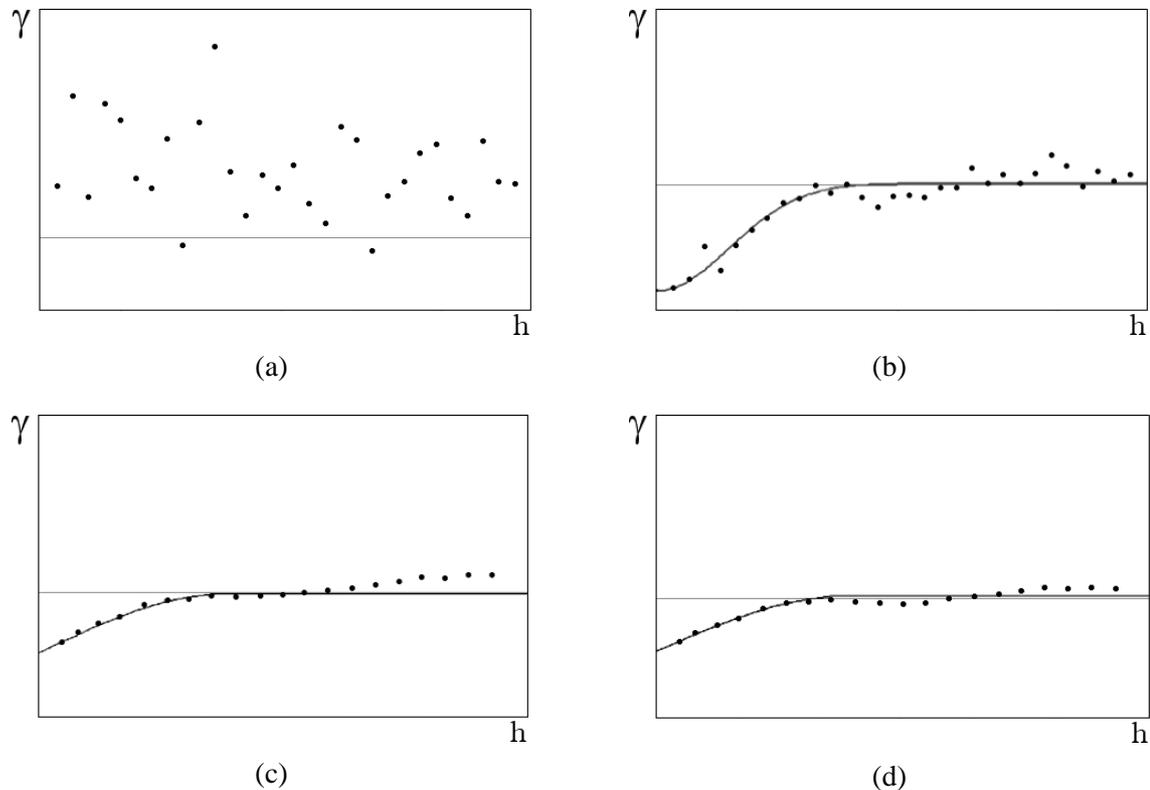


Figura 3.3 – Exemplos ilustrativos de semivariogramas calculados: (a) a partir das 140 amostras do banco de dados sintético apresentado em Deutsch e Journel (1998) , sem qualquer alteração dos valores; (b) 140 amostras do banco de dados sintético, após a transformação dos valores em extensões; (c) dados de espessura de uma camada de caulim de um depósito no estado do Amazonas, Brasil, sem qualquer alteração dos valores; (d) dados de espessura de uma camada de caulim de um depósito no estado do Amazonas, Brasil, após a transformação dos valores em extensões.

Quando a distribuição de teores é aproximadamente simétrica, os variogramas possuem o mesmo formato, como mostrado na Figura 3.3 c e d, conseqüentemente os resultados da krigagem nos dados originais e após a transformação são compatíveis.

3.3.1 O ponto de inflexão

A ocorrência de fenômenos físicos e químicos, além das características das rochas existentes na área de estudo, são fatores que determinam as zonas de mineralização e a distribuição de teores nestas zonas. Em muitos casos, o comportamento espacial dos teores

mais altos não é o mesmo comportamento dos teores mais baixos, o que leva à hipótese da existência de populações diferentes dentro da mesma área. Um exemplo simples onde duas populações diferentes podem ser detectadas é a mineralização em zonas fraturadas; há uma população de ouro disseminado na área e uma população de altos teores provenientes da agregação do elemento nas fraturas.

Em qualquer metodologia de processamento dos dados, seja estatística ou geoestatística, a existência de duas ou mais populações requer a sua separação, para que cada conjunto de dados seja tratado separadamente. Uma forma de detectar o ponto de separação entre populações é gerar o gráfico de frequência acumulada dos teores e buscar por um ponto de inflexão do gráfico, que pode ser considerado o ponto onde há um aumento significativo no ângulo da curva em relação ao eixo vertical.

Para a Geoestatística Paramétrica de Campo, a detecção do ponto de inflexão e posterior separação de duas populações são de extrema importância. O teor correspondente ao ponto de inflexão é tratado como um valor limitante da distribuição, o qual determina que somente para os valores acima deste teor limitante é que a técnica FPG deve ser aplicada, de forma a evitar a subestimativa de teores verificada em estudos anteriores realizados por Armony (2000).

3.3.2 Utilização da técnica FPG

São apresentadas aqui as diretrizes gerais para a sequência de aplicação da técnica FPG na estimativa de teores. Assumindo que a distribuição dos dados faz parte de uma população única:

- i. Análise exploratória dos dados;
- ii. Geração dos pesos de desagrupamento (se necessário);
- iii. Transformação FPG – criação da função extensão acumulada, linear por partes;
- iv. Variografia das extensões;
- v. Krigagem da variável transformada;
- vi. Retro-transformação dos resultados da krigagem para a variável original, através da interpolação linear dos valores na função extensão.

Assumindo a presença de duas populações no banco de dados:

- i. Análise exploratória dos dados;
- ii. Identificação do ponto de inflexão na curva de frequência acumulada, para separação das populações;
- iii. Para a população de baixos teores:
 - iii.i. variografia dos dados utilizando a variável original;
 - iii.ii. aplicação da krigagem para a variável original, em todo o domínio do depósito.
- iv. Para a população de altos teores:
 - iv.i. transformação FPG – criação da função extensão acumulada;
 - iv.ii. variografia das extensões;
 - iv.iii. krigagem da variável transformada, em todo o domínio do depósito;
 - iv.iv. retro-transformação dos resultados da krigagem para a variável original, através da interpolação linear dos valores na função extensão.
- v. Krigagem dos indicadores da população de altos teores, assumindo que os valores resultantes representam a contribuição das amostras de alto teor para cada bloco que será estimado;
- vi. Cálculo do teor final de cada bloco, obtido pela ponderação entre os resultados da krigagem das duas populações, utilizando como ponderador as proporções dadas pela krigagem dos indicadores.

3.4 Comentários finais

Neste capítulo, foi apresentada a formulação matemática e aspectos teóricos da Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG), identificando os itens principais para incorporação das informações de teor e representatividade. No Capítulo 4, serão apresentadas as aplicações da metodologia FPG às variáveis U e V do banco de dados Walker Lake, e à variável Au do banco de dados Amapari, seguindo os passos descritos neste capítulo.

Capítulo 4

Estudos de caso

Este capítulo trata sobre a aplicação da Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG) em algumas variáveis do banco de dados Walker Lake, presente em Isaaks e Srivastava (1989), e em um banco de dados de minério aurífero localizado em Amapari, na região norte do Brasil. São realizados estudos comparativos entre os resultados produzidos na aplicação do FPG e resultados obtidos com outras técnicas comumente usadas na estimativa de teores.

A Seção 4.1 trata dos estudos realizados para o banco de dados Walker Lake. É feita a apresentação do banco de dados amostral, o qual servirá de base para a aplicação das técnicas de estimativa e tratamento de valores extremos. Nesta seção, também é apresentado um banco de dados do mesmo local, mas com amostragem exaustiva, que servirá como referência de teores da área de estudo para verificação das estimativas feitas a partir do banco de dados amostral.

A Seção 4.2 apresenta o banco de dados de Amapari, referente a um domínio litológico presente no local. São realizadas comparações dos resultados entre as diferentes técnicas de estimativa aplicadas. Nesse caso, não há a disponibilidade de teores de referência para verificar a aderência das estimativas (reconciliação).

4.1 Banco de dados Walker Lake

4.1.1 Banco de dados exaustivo

O banco de dados é derivado de um modelo digital de elevação da área de Walker Lake, localizada em Nevada, no oeste dos Estados Unidos. Constitui-se de uma malha retangular de 260x300 m, com amostragem exaustiva em malha regular de 1x1m, totalizando 78000 dados.

As variáveis contínuas, U e V, com unidade de medida em partes por milhão (ppm), serão utilizadas para o desenvolvimento deste estudo. A Figura 4.1 ilustra a distribuição espacial dos teores das variáveis.

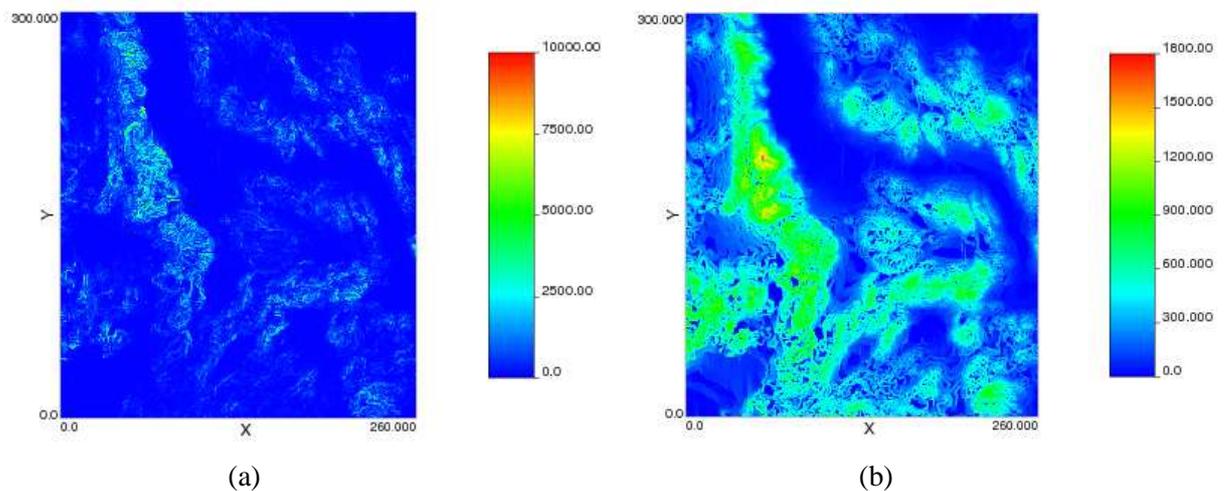


Figura 4.1 – Mapas gerados pela amostragem exaustiva: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com escala de cores (valores em ppm).

Verifica-se que, para ambas as variáveis, há a predominância de altos teores na porção oeste da área, sendo que para a variável V os altos teores ocorrem de forma mais abundante. Entretanto, mesmo em regiões de predominância de altos valores, há também a probabilidade de ocorrência de baixos valores entremeados. As distribuições de frequência e estatísticas são apresentadas na Figura 4.2.

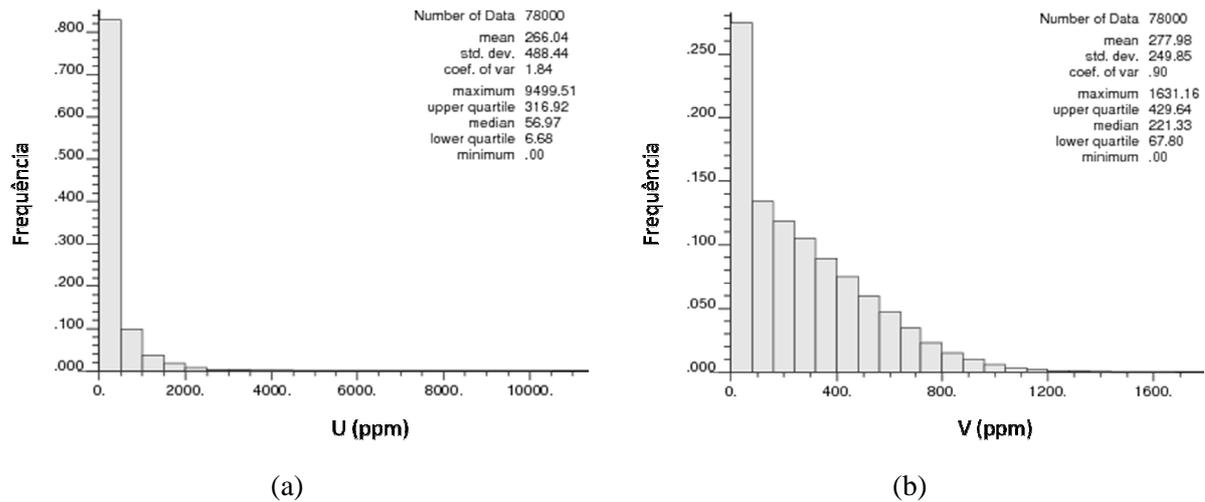


Figura 4.2 – Histograma dos dados gerados pela amostragem exaustiva: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com valores em ppm.

A distribuição de teores apresenta uma assimetria positiva para ambas as variáveis, sendo mais moderada para a variável V, o que pode ser verificado pelo coeficiente de variação ($CV=0,90$) e pela pouca diferença entre a média (278 ppm) e a mediana dos dados (221 ppm). Para a variável U, a forte assimetria positiva é confirmada pelo fato de que a média dos teores (266 ppm) é quase cinco vezes maior do que a mediana (57 ppm); além disso, o alto coeficiente de variação ($CV=1,84$) serve de alerta para a presença de altos valores erráticos na área.

Ao adotar o banco de dados exaustivo como referência dos teores reais da área, tornou-se necessária a mudança de suporte dos dados pontuais para blocos de 5x5m, dimensões que serão adotadas para os blocos durante as estimativas. Esta mudança de suporte possibilitará a comparação dos parâmetros estatísticos globais e das estimativas bloco a bloco. A Figura 4.3 mostra os histogramas gerados após a mudança de suporte do banco de dados exaustivo, bem como os seus parâmetros estatísticos calculados.

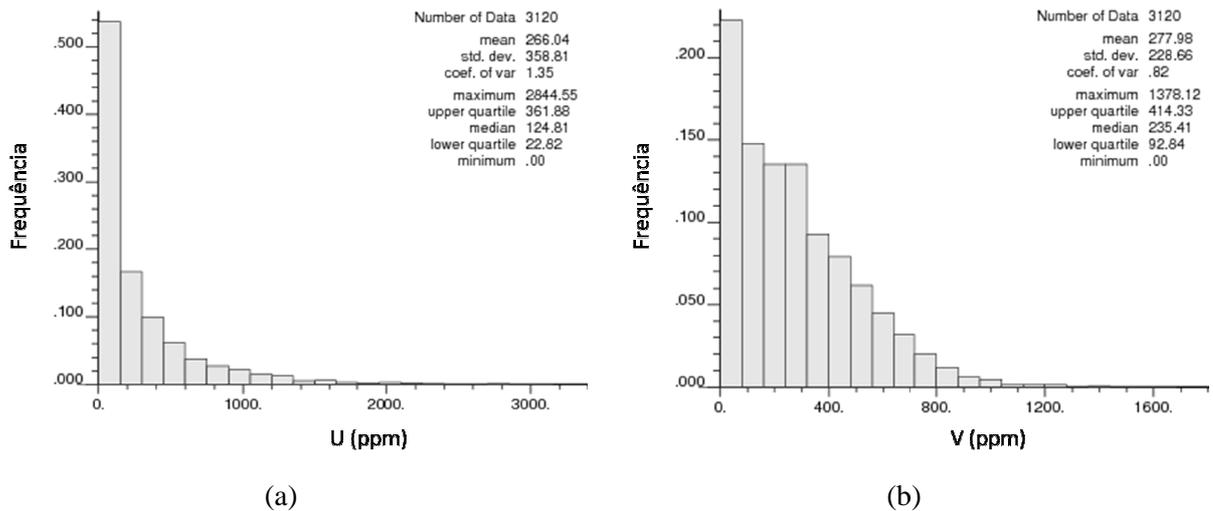


Figura 4.3 – Histograma dos dados gerados pela amostragem exaustiva, após a mudança de suporte amostral para 5x5m: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com valores em ppm.

Percebe-se que houve a diminuição da variabilidade dos dados para ambas as variáveis, o que pode ser verificado pela redução do coeficiente de variação de U (de 1,84 para 1,35) e de V (de 0,90 para 0,82). Observando o limite máximo das variáveis, a reblocagem causou a diluição de altos teores: o teor máximo da variável U passou de aproximadamente 9500 ppm para 2844 ppm, enquanto o teor máximo da variável V passou de 1631 ppm para 1378 ppm. Este é um efeito esperado, devido à combinação de altos teores erráticos com os teores mais baixos das amostras no seu entorno.

4.1.2 Banco de dados amostral

O banco de dados amostral teve origem através da seleção de amostras do banco de dados exaustivo, de forma a representar um típico banco de dados de depósitos minerais, quando uma amostragem preferencial costuma ser conduzida nas zonas de alto teor da variável de interesse.

De acordo com Isaaks e Srivastava (1989), a amostragem em Walker Lake foi conduzida em três estágios. Na primeira campanha de amostragem, foram coletadas 195 amostras com espaçamento de aproximadamente 20x20m, onde se obteve somente análises da variável V. Foi então realizada uma amostragem adicional, com adensamento cobrindo regiões com altos valores de V. Os locais onde a variável V apontava 500 ppm ou mais, foram circundados com oito amostras adicionais com espaçamento de aproximadamente 10x10 m, gerando 150 amostras adicionais ao banco de dados, com análises de V e de U. A terceira

campanha de amostragem foi feita para um melhor delineamento das zonas de alto teor, ao longo de linhas leste-oeste, gerando 125 amostras com análises de V e U, que somadas às campanhas anteriores totalizam as 470 amostras contidas no banco de dados.

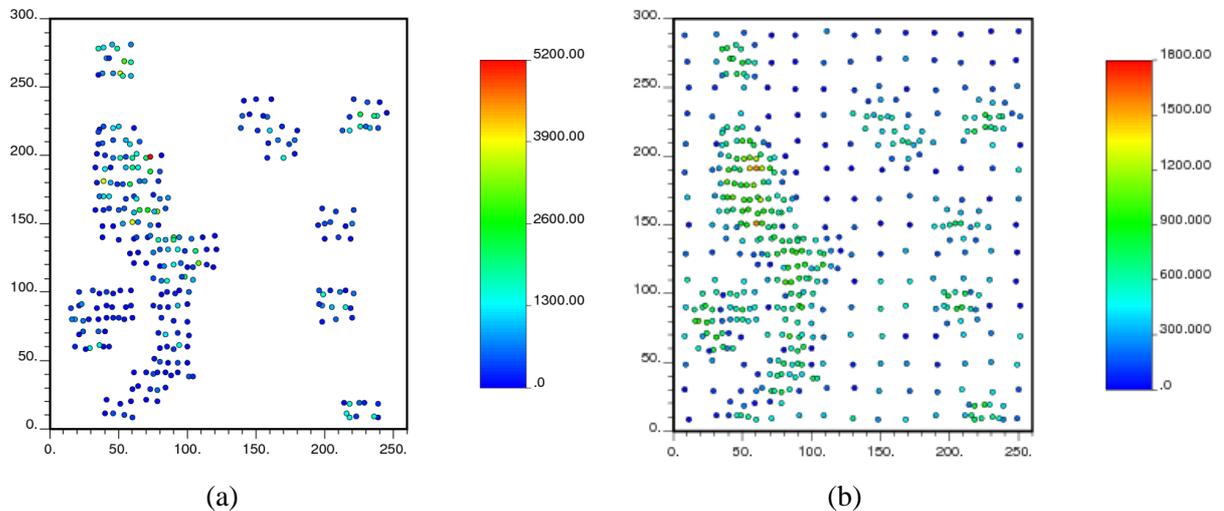


Figura 4.4 – Mapa de localização das amostras analisadas: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com escala de cores (valores em ppm).

A Figura 4.5 mostra os histogramas e os parâmetros estatísticos calculados, onde o método das células móveis (Isaaks e Srivastava, 1989) foi utilizado para a geração de pesos de desagrupamento.

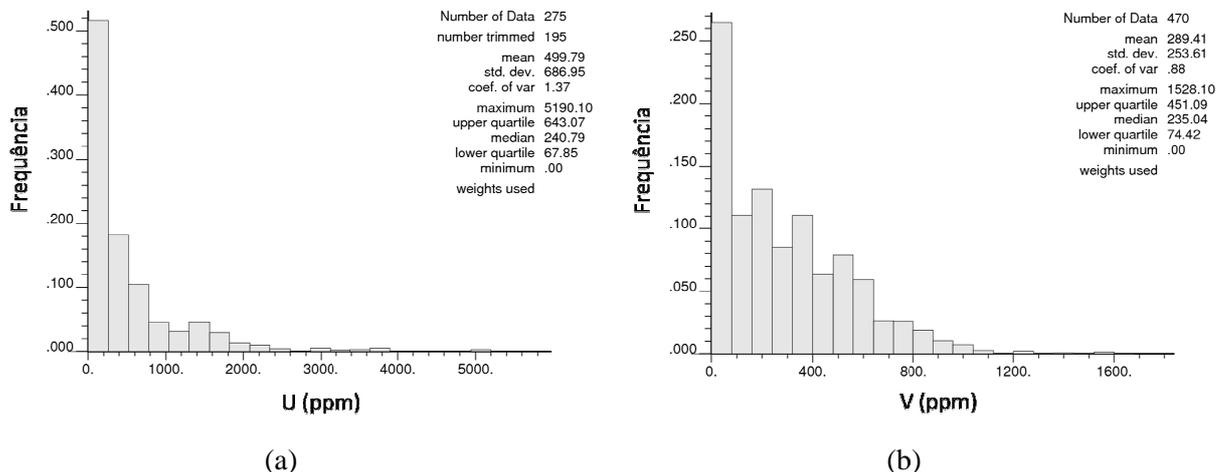


Figura 4.5 – Histograma das amostras ponderadas pelos pesos de desagrupamento: (a) para a variável U e (b) para a variável V (valores em ppm).

As médias calculadas para as amostras de U e V, 500 ppm e 289 ppm respectivamente, mesmo com a aplicação dos pesos de desagrupamento, possuem valores mais altos em comparação às médias obtidas com os dados exaustivos em suporte 5x5 m, que são de 266 ppm para U e 278 ppm para V. Para a variável U, seria impossível reproduzir a

média exaustiva, uma vez que as amostras coletadas não cobrem toda a área, mas somente a zona de alto teor. O coeficiente de variação das variáveis U e V (1,37 e 0,88 respectivamente) apresentam pouca diferença em relação aos mesmos coeficientes calculados para os dados exaustivos após a reblockagem (1,35 para U e 0,82 para V), demonstrando que as características gerais de variabilidade das distribuições no banco de dados amostral são semelhantes aos dados exaustivos em suporte 5x5m.

4.1.3 Procedimentos

A primeira etapa do estudo consiste na realização das estimativas de teores, utilizando as seguintes técnicas:

- Krigagem ordinária das variáveis originais;
- Krigagem ordinária das variáveis originais, após a aplicação de corte (*capping*) nos altos teores;
- Krigagem dos indicadores pela mediana, assumindo como teor do bloco o E-type calculado no módulo de pós-processamento *postik* do GSLib (Deutsch e Journel, 1998), para uma extrapolação do quantil superior por uma função com parâmetros menos restritivos à probabilidade de ocorrência de altos teores;
- Krigagem dos indicadores pela mediana, assumindo como teor do bloco o E-type calculado no módulo de pós-processamento *postik* do GSLib (Deutsch e Journel, 1998), para uma extrapolação do quantil superior por uma função com parâmetros mais restritivos à probabilidade de ocorrência de altos teores;
- Krigagem ordinária das variáveis transformadas pela aplicação do FPG (extensões).

Após a realização das estimativas, na apresentação dos resultados é feita a comparação dos modelos estimados com os modelos de referência – V(Ref) e U(Ref) – através da verificação de parâmetros estatísticos globais e das estimativas bloco a bloco.

4.1.4 Análise das distribuições e medidas de continuidade espacial

4.1.4.1 Krigagem ordinária dos dados originais

A caracterização do comportamento espacial da distribuição de teores para as variáveis U e V foi feita através do cálculo de covariogramas. Foi calculado o covariograma omnidirecional para a obtenção do efeito pepita, seguido pelo cálculo dos covariogramas direcionais, os quais tiveram seus pontos experimentais ajustados por funções esféricas. As figuras que seguem (Figura 4.6 e Figura 4.7) retratam os modelos ajustados aos pontos experimentais, enquanto as tabelas (Tabela 4.1 e Tabela 4.2) mostram com detalhes os parâmetros que definem os modelos de ajuste.

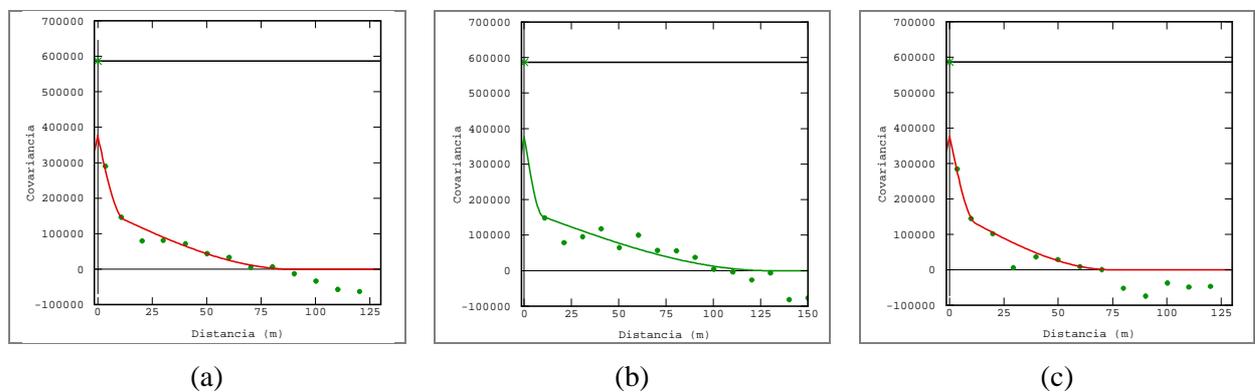


Figura 4.6 – Covariogramas experimentais da variável U, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.1 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável U.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	210000	-	-
Esférica 1	205000	10	12
Esférica 2	172000	130	75

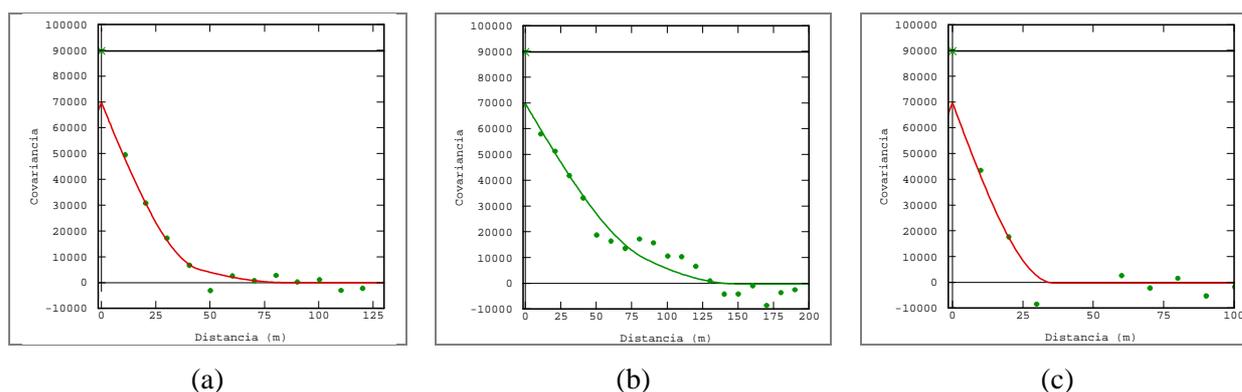


Figura 4.7 – Covariogramas experimentais da variável V, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.2 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável V.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	20000	-	-
Esférica 1	30000	85	36
Esférica 2	40000	150	36

As estimativas por krigagem ordinária dos dados originais para as variáveis U e V serão identificadas na descrição dos resultados pelas denominações U(OK) e V(OK), respectivamente.

4.1.4.2 Krigagem ordinária com corte (*capping*) nos valores extremos

A determinação do teor para corte (*capping*) dos altos valores das distribuições de teores de U e V foi baseada na análise de sensibilidade da média desagrupada. Nesta análise, foram efetuados cortes em determinados valores e verificadas as variações das médias desagrupadas resultantes. A redução percentual da média desagrupada dos dados após o corte, em relação à média desagrupada dos dados originais, não deveria ultrapassar o limite de 5%, previamente estipulado.

Os teores de corte escolhidos para os testes foram baseados nos quantis das distribuições de U e V, os quais são apresentados na Tabela 4.3.

A análise de sensibilidade teve início com o corte utilizando o teor correspondente ao quantil $Q_{95\%}$ das distribuições de teores para ambas as variáveis de estudo. De acordo com a

variação de média obtida, a análise se estendeu para os quantis superiores na variável U, e para os quantis inferiores na variável V, de forma que nem todos os trechos apresentados na Tabela 4.3 foram efetivamente testados. Os resultados obtidos para a análise de sensibilidade da variável U são apresentados na Tabela 4.4, já os resultados para a variável V constam na Tabela 4.5.

Tabela 4.3 – Quantis das distribuições de teores para as variáveis U e V, base para a análise de sensibilidade das médias após o *capping*.

	Q90%	Q91%	Q92%	Q93%	Q94%	Q95%	Q96%	Q97%	Q98%	Q99%
U (ppm)	1588,30	1676,33	1705,30	1842,08	1957,70	1990,83	2203,62	2397,42	3070,97	3678,21
V (ppm)	818,90	849,77	873,50	882,13	896,43	918,02	966,99	986,59	1070,58	1213,44

Tabela 4.4 – Resultados da análise de médias desagrupadas para a variável U.

	Média desagrupada (ppm)	Diferença relativa (%)
U	499,79	-
U (<i>capping</i> Q99)	494,98	0,96
U (<i>capping</i> Q98)	488,04	2,35
U (<i>capping</i> Q97)	476,25	4,70
U (<i>capping</i> Q96)	471,72	5,62
U (<i>capping</i> Q95)	465,12	6,94

Tabela 4.5 – Resultados da análise de médias desagrupadas para a variável V.

	Média desagrupada (ppm)	Diferença relativa (%)
V	289,41	-
V (<i>capping</i> Q95)	286,74	0,92
V (<i>capping</i> Q94)	286,33	1,06
V (<i>capping</i> Q93)	286,00	1,18
V (<i>capping</i> Q92)	285,79	1,25
V (<i>capping</i> Q91)	285,09	1,49
V (<i>capping</i> Q90)	284,10	1,83

Pode-se verificar que para a variável U, o limite de variação da média desagrupada de 5% é ultrapassado com o corte no quantil Q_{96%} da distribuição de teores. Desta forma, foi estabelecido que o teor para corte (*capping*) da variável U seria o valor correspondente ao quantil Q_{97%} da distribuição de teores original, o que equivale ao teor 2397,42 ppm. Tendo

em vista que para a variável V, as análises feitas até o quantil $Q_{90\%}$ da distribuição de teores não resultaram em nenhuma variação de média acima de 2%, estabeleceu-se como valor limite para corte (*capping*) o ao quantil $Q_{90\%}$ da distribuição de teores, equivalente ao teor 818,90 ppm.

Após o corte (*capping*) nos altos valores das distribuições de U e de V, prosseguiu-se com a análise de continuidade de teores por meio de covariogramas. Os pontos experimentais calculados, assim como os modelos esféricos de ajuste são ilustrados nas figuras a seguir (Figura 4.8 e Figura 4.9), e os parâmetros das funções de ajuste são apresentados nas tabelas que seguem (Tabela 4.6 e Tabela 4.7).

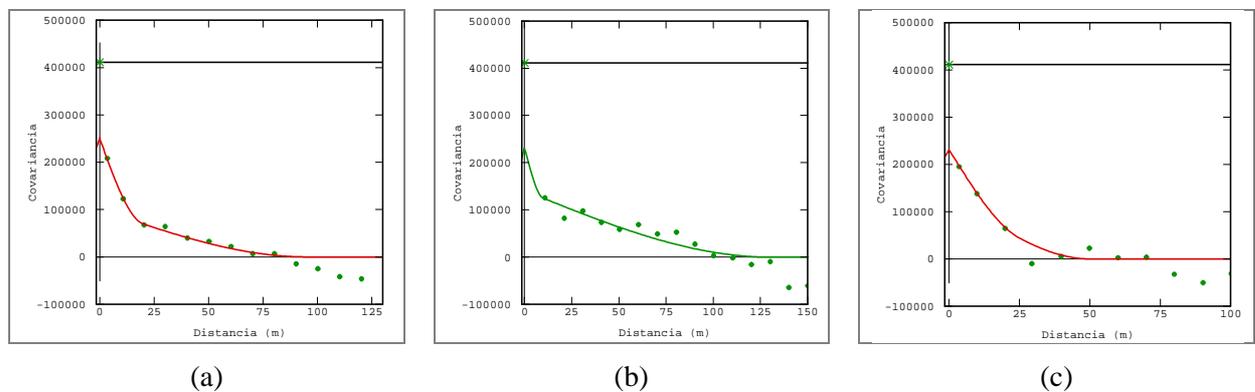


Figura 4.8 – Covariogramas experimentais da variável U, após corte (*capping*) nos altos teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável U, após corte (*capping*) nos altos teores.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	180000	-	-
Esférica 1	90000	10	25
Esférica 2	141000	130	50

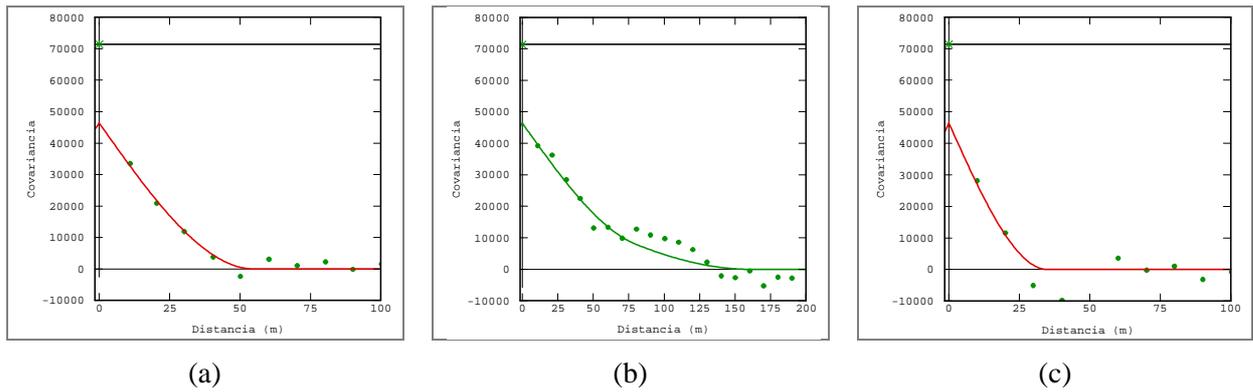


Figura 4.9 – Covariogramas experimentais da variável V, após corte (*capping*) nos altos teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.7 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para a variável V, após corte (*capping*) nos altos teores.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	25000	-	-
Esférica 1	21000	80	35
Esférica 2	25390	160	35

As estimativas por krigagem ordinária dos dados com aplicação de corte (*capping*) nos altos teores, para as variáveis U e V, serão identificadas na descrição dos resultados pelas denominações U(*capping* Q97) e V(*capping* Q90), respectivamente.

4.1.4.3 Krigagem dos indicadores pela mediana

A aplicação da krigagem de indicadores pela mediana necessita apenas do cálculo e ajuste de um único modelo de continuidade espacial, calculado para os dados transformados em indicadores, equivalente ao quantil $Q_{50\%}$ da distribuição de teores. As próximas figuras (Figura 4.10 e Figura 4.11) e tabelas (Tabela 4.8 e Tabela 4.9) mostram os covariogramas ajustados aos pontos experimentais, assim como os parâmetros numéricos das funções esféricas de ajuste.

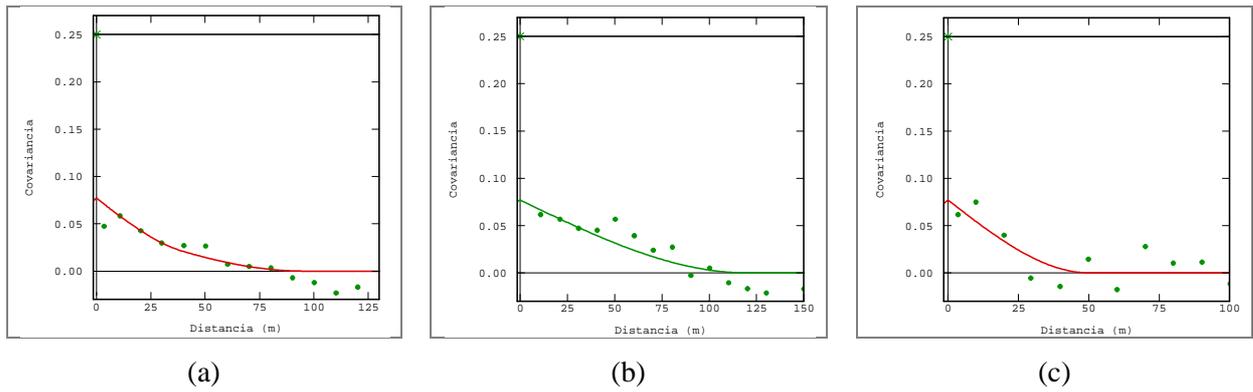


Figura 4.10 – Covariogramas experimentais dos indicadores para a mediana da variável U, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.8 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma dos indicadores para a mediana da variável U.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	0,173	-	-
Esférica 1	0,077	120	50

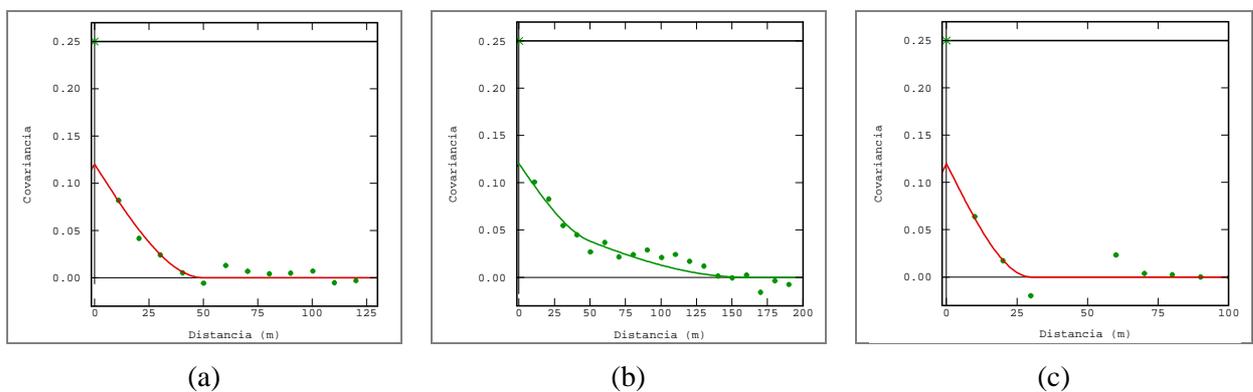


Figura 4.11 – Covariogramas experimentais dos indicadores para a mediana da variável V, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.9 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma dos indicadores para a mediana da variável V.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	0,13	-	-
Esférica 1	0,05	50	30
Esférica 2	0,07	160	30

A determinação dos trechos para a krigagem de indicadores baseou-se nos teores

correspondentes aos nove decis das distribuições de U e de V, valores os quais são apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Nove decis das distribuições de teores de U e V, base para os trechos da krigagem de indicadores.

	Q10	Q20	Q30	Q40	Q50	Q60	Q70	Q80	Q90
U (ppm)	10,80	61,15	110,20	194,20	319,30	474,00	674,60	1018,00	1588,30
V (ppm)	31,10	143,35	233,80	330,90	424,00	518,75	602,50	692,81	818,90

Após a krigagem de indicadores das variáveis U e V para todos os trechos, o teor de cada bloco foi definido através do cálculo do E-type na etapa de pós-processamento. Foram produzidos dois tipos de distribuição de teores para cada variável, através da modificação dos parâmetros da função de extrapolação além do quantil superior até um valor máximo escolhido. Foram utilizadas funções hiperbólicas de parâmetros $\omega=1,5$ e $\omega=3,0$ que, nesta ordem, condicionam uma maior e uma menor probabilidade de ocorrência de altos teores nas distribuições formadas pela interpolação e extrapolação das probabilidades entre os *thresholds* estimados.

Assim, os resultados das estimativas por krigagem dos indicadores serão identificados de acordo com a variável e o parâmetro de extrapolação aplicado. Para a variável U, são atribuídas as denominações U(E-type 1,5) e U(E-type 3,0); para a variável V, são atribuídas as denominações V(E-type 1,5) e V(E-type 3,0).

4.1.4.4 Geoestatística Paramétrica de Campo – FPG

A verificação da existência ou não de múltiplas populações foi realizada a partir da análise de gráficos de frequência acumulada, apresentados na Figura 4.12.

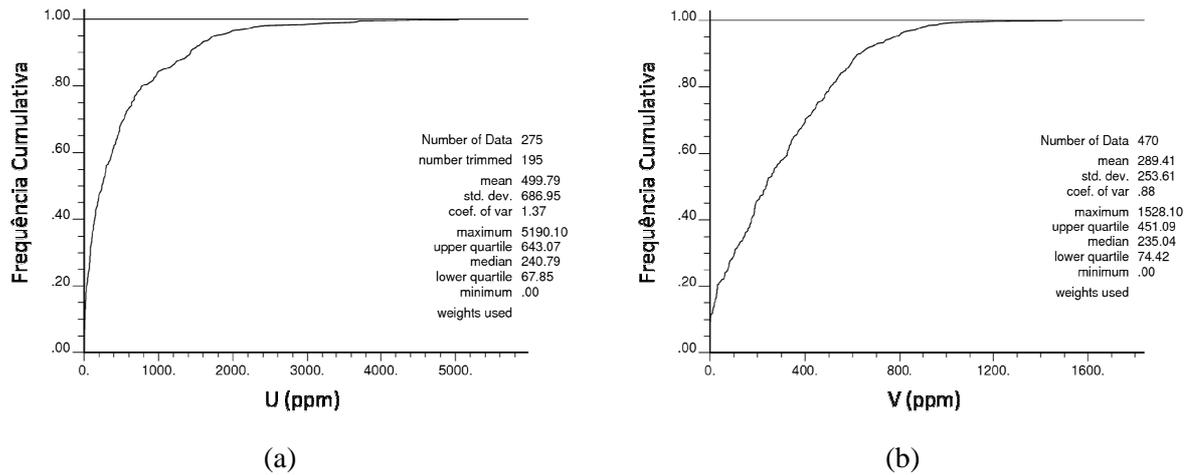


Figura 4.12 – Gráficos de frequência acumulada, ponderada pelos pesos de desagrupamento: (a) para a variável U e (b) para a variável V, com escala de cores (valores em ppm).

Observando as distribuições de frequência acumulada, não foram identificadas populações distintas na variável V. A variável U apresenta uma mudança de curvatura mais acentuada, o que indicaria a existência de um ponto de inflexão para separação dos dados; porém esta separação geraria uma população de altos teores com poucos dados, o que resultaria em análises estatísticas e de continuidade pouco confiáveis. Desta forma, foi decidido manter o tratamento completo do banco de dados para as variáveis U e V, assumindo a presença de uma única população de teores para cada variável.

As transformações dos teores de U e V em extensões acumuladas padronizadas foram realizadas no programa de geoestatística *FPG Auxiliar Software* (Armony, 2012), mas ressalta-se que o cálculo das extensões pode ser efetuado em uma planilha de cálculo, sem a necessidade de utilização de um programa específico. As análises de continuidade espacial seguem o mesmo padrão adotado para a variável original, com o cálculo dos pontos experimentais e ajuste de modelos esféricos aos covariogramas, apresentados nas figuras (Figura 4.13 e Figura 4.14) e tabelas (Tabela 4.11 e Tabela 4.12).

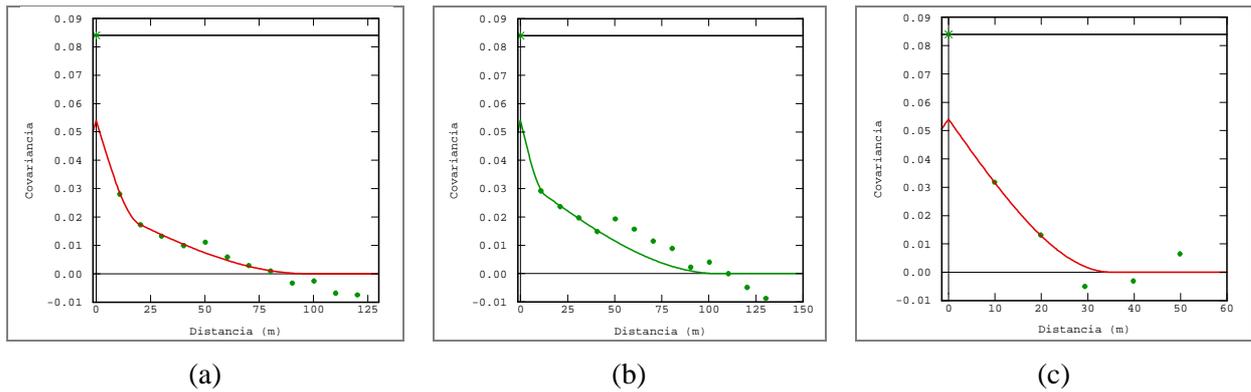


Figura 4.13 – Covariogramas experimentais para as extensões da variável U, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.11 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para as extensões da variável U.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	0,03	-	-
Esférica 1	0,02	13	35
Esférica 2	0,034	105	35

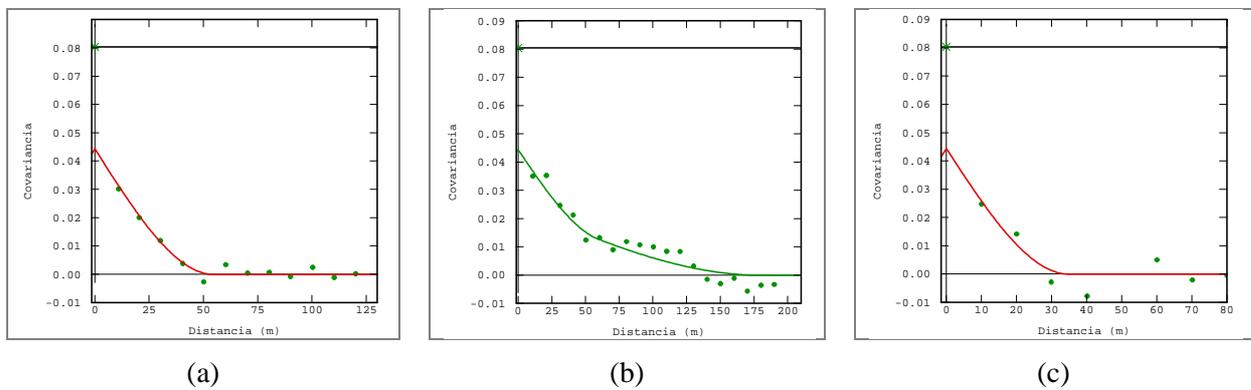


Figura 4.14 – Covariogramas experimentais para as extensões da variável V, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) omnidirecional; (b) direção N14°W, de maior continuidade; e (c) direção N76°E, de menor continuidade.

Tabela 4.12 – Parâmetros do modelo ajustado ao covariograma para as extensões da variável V.

	Contribuição das estruturas	N14°W Alcance (m)	N76°E Alcance (m)
Efeito pepita	0,036	-	-
Esférica 1	0,02	60	35
Esférica 2	0,0244	180	35

Assim, as estimativas de teores para as variáveis U e V pela técnica FPG serão

identificadas na descrição dos resultados pelas denominações U(FPG) e V(FPG), respectivamente.

4.1.5 Resultados

As estimativas foram realizadas em um modelo de blocos gerado na área de estudo, com dimensões gerais de 260x300m e tamanho de blocos de 5x5m. Houve a padronização dos parâmetros de busca de amostras, definindo os parâmetros mais adequados após a realização de validação cruzada, para que as distinções entre os valores resultantes para os modelos estimados sejam atribuídas somente às diferenças entre as abordagens metodológicas.

Foi adotada a krigagem de blocos admitindo a discretização de 25 pontos de estimativa em cada bloco, distribuídos no padrão 5x5x1, onde o cálculo da média destes pontos fornece o teor do respectivo bloco. O mínimo de amostras para realizar a estimativa foi estabelecido em 4 amostras e o máximo de 16 amostras, sem delimitação de amostras por octantes. A elipse de busca adotada possui dimensões de 150 m na direção de maior continuidade (N14°W) e 50 m na direção de menor continuidade (N76°E).

Os parâmetros estatísticos das distribuições de teores estimados são expostos nas tabelas (Tabela 4.13 e Tabela 4.14), bem como os parâmetros estatísticos dos teores no modelo de blocos adotado como referência.

Tabela 4.13 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável U.

	Nº blocos	Mínimo (ppm)	Máximo (ppm)	Média (ppm)	Desvio padrão (ppm)
U (Ref)	3120	0,00	2844,55	266,04	358,81
U (OK)	3120	43,28	2507,18	522,33	309,12
U (<i>capping</i> Q97)	3120	44,93	1599,05	477,00	262,60
U (E-type 1,5)	3120	7,20	3009,23	244,86	298,31
U (E-type 3,0)	3120	7,20	2308,19	221,25	253,62
U (FPG)	3120	4,84	1590,44	255,22	225,40

Para a variável U, a média global dos teores estimados por krigagem ordinária (U(OK)) e por krigagem ordinária com corte nos altos teores (U(*capping* Q97)) mostraram-se bem mais altas do que a média dos valores de referência, 96% e 79% maiores do que U(Ref) respectivamente. Isto demonstra que a aplicação de corte (*capping*) nos valores extremos

reduziu a influência destes no teor final dos blocos, mas neste caso a redução não foi significativa a ponto de aproximar a média global das estimativas de U à média real do depósito para esta variável. A aplicação de um quantil mais baixo para o *capping* poderia fornecer resultados melhores; porém, em casos onde não há informação sobre a média real do depósito, a utilização de um teor de corte muito baixo pode ser considerada extremamente conservadora.

Os métodos de krigagem de indicadores pela mediana apresentaram média global dos teores estimados abaixo da média global dos dados de referência: as médias globais são 8% e 17% menores do que U(Ref) para U(E-type 1,5) e U(E-type 3,0) respectivamente. A média global das estimativas realizadas utilizando a metodologia FPG foi a que mais se aproximou da média global de U(Ref), com média apenas 4% menor do que a média dos dados de referência. Neste caso pode-se dizer que a metodologia FPG controlou de forma efetiva o efeito dos valores extremos na estimativa de teores, mas resultados semelhantes puderam ser obtidos com a estimativa por krigagem de indicadores da mediana.

Tabela 4.14 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável V.

	Nº blocos	Mínimo (ppm)	Máximo (ppm)	Média (ppm)	Desvio padrão (ppm)
V (Ref)	3120	0,00	1378,12	277,98	228,66
V (OK)	3120	0,00	1203,21	292,17	192,19
V (<i>capping</i> Q90)	3120	0,00	815,51	289,43	170,94
V (E-type 1,5)	3120	24,40	1258,49	323,17	194,47
V (E-type 3,0)	3120	24,40	111,06	317,80	182,19
V (FPG)	3120	2,26	922,68	261,84	181,45

Para a variável V, a média global calculada a partir dos modelos estimados é maior do que a média global do modelo de referência, exceto pelos resultados obtidos pela técnica FPG, cujos teores estimados possuem média global mais baixa do que o modelo de referência.

Observou-se a baixa diferença da média global para os métodos de krigagem ordinária (V(OK)), krigagem ordinária com corte nos altos teores (V(*capping* Q90)) e krigagem pela metodologia FPG (V(FPG)); estas diferenças variam entre 4% e 6%, o que possibilita considerar os seus resultados globais bastante semelhantes entre si. Devido a pouca assimetria apresentada pelo histograma de teores amostrais de V e baixo coeficiente de variação (C.V.= 0,88), pode-se dizer que esta semelhança entre os resultados era esperada

As diferenças entre a média global de V(Ref) e as médias das estimativas por krigagem de indicadores pela mediana são maiores, apresentando médias globais 16% e 14% mais altas para V(E-type 1,5) e V(E-type 3,0), nesta ordem. Verifica-se, para esta variável, que a aplicação da krigagem de indicadores da mediana para distribuições com pouca assimetria não apresenta qualquer vantagem em relação a outras técnicas, menos laboriosas e que oferecem melhores resultados.

Para analisar o nível de aderência das estimativas dos blocos e os teores de referência, foi calculado o coeficiente de correlação de Pearson, tradicionalmente utilizado para verificar a interdependência linear entre os teores das variáveis, e o coeficiente de Spearman, que mede a existência de uma relação monotônica entre a ordenação (*rank*) das variáveis. Foram calculados os dois coeficientes para verificar a influência de pares erráticos no nível de correlação entre os teores estimados e os teores de referência, que se reflete em uma diferença significativa entre os coeficientes, já que o coeficiente de Spearman não é tão fortemente influenciado por pares extremos como o coeficiente de Pearson.

Na Tabela 4.15, são apresentados os coeficientes de correlação de Pearson e de Spearman para as variáveis U. Os mesmos coeficientes foram calculados para a variável V, sendo apresentados na Tabela 4.16.

Tabela 4.15 – Coeficientes de correlação entre os valores estimados para a variável U e os valores do banco de dados exaustivo, utilizado como referência.

	Correlação Pearson (ρ)	Correlação Spearman (ρ_r)
U (OK) x U (Ref)	0,42	0,16
U (capping Q97) x U (Ref)	0,47	0,19
U (E-type 1.5) x U (Ref)	0,63	0,30
U (E-type 3.0) x U (Ref)	0,64	0,32
U (FPG) x U (Ref)	0,51	0,33

A variável U exibe uma correlação linear moderada para todos os modelos estimados em relação a U(Ref). O coeficiente de correlação de Pearson apresentou valores mais altos na comparação entre o modelo de referência e os resultados obtidos com o E-type da krigagem dos indicadores pela mediana; o mesmo coeficiente ficou um pouco abaixo destes para os resultados obtidos com a técnica FPG.

O coeficiente de correlação de Spearman entre teores estimados por FPG com os teores de referência é o maior dentre os métodos de estimativa; ainda assim é bastante similar aos coeficientes calculados na comparação dos teores de referência com U(E-type 1,5) e U(E-type 3,0). Em todos os casos, para a variável U, o coeficiente de correlação de Spearman é bem menor do que o coeficiente de correlação de Pearson, mostrando que a correlação linear observada é bastante influenciada por pares extremos.

Tabela 4.16 – Coeficientes de correlação entre os valores estimados para a variável V e os valores do banco de dados exaustivo, utilizado como referência.

	Correlação Pearson (ρ)	Correlação Spearman (ρ_r)
V (OK) x V(Ref)	0,85	0,80
V (<i>capping</i> Q90) x V(Ref)	0,83	0,79
V (E-type 1.5) x V(Ref)	0,83	0,78
V (E-type 3.0) x V(Ref)	0,83	0,78
V (FPG) x V(Ref)	0,87	0,84

A variável V exibe alta correlação para todas as comparações entre os teores estimados e os teores de V(Ref), o que denota certa similaridade entre os resultados das diferentes metodologias aplicadas. Foi verificada pouca diferença entre os coeficientes de correlação de Pearson e de Spearman, indicando que as medidas de correlação efetuadas não são afetadas por pares extremos. Para ambos os coeficientes calculados, os teores estimados pela metodologia FPG apresentaram uma maior correlação com os teores do modelo de referência.

Para verificar a influência dos métodos de estimativa nos recursos do depósito de acordo com o teor de corte, foram elaboradas curvas de parametrização que mostram a relação entre o teor de corte utilizado e a quantidade de blocos de minério na área. Esta adaptação das curvas tonelagem *versus* teor tornou-se necessária pela ausência de informações relativas à densidade do material. A Figura 4.15 e a Figura 4.16 retratam as curvas de parametrização adaptadas para as variáveis U e V, respectivamente.

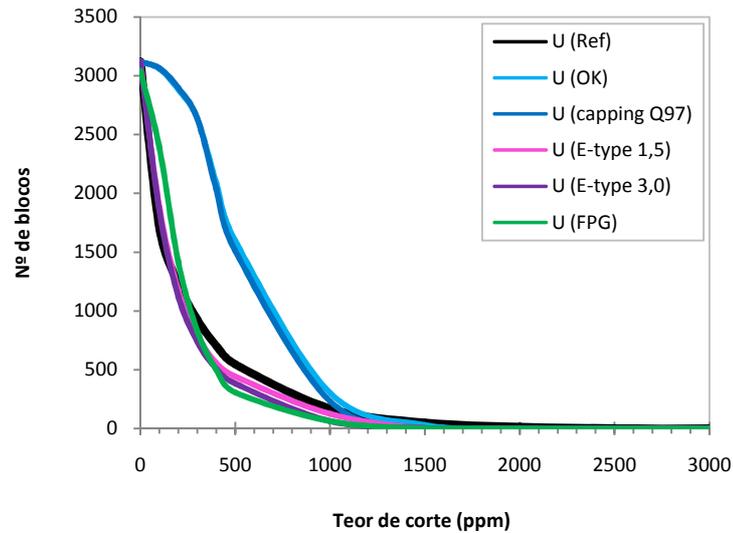


Figura 4.15 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável U.

Na Figura 4.15, as estimativas por krigagem ordinária dos teores originais ($U(\text{OK})$) e por krigagem ordinária com corte nos altos teores ($U(\text{capping Q97})$) apresentam curvas semelhantes, porém estes resultados são discrepantes em relação à curva do modelo de referência, superestimando o volume de minério em relação ao modelo considerado representativo da área. Por exemplo, as curvas de $U(\text{OK})$ e $U(\text{capping Q97})$ indicam a presença de cerca de 1500 blocos com teor acima de 500 ppm, mas a curva do modelo real indicam pouco mais de 500 blocos acima do teor de corte de 500 ppm.

As demais estimativas realizadas para a variável U, de krigagem de indicadores pela mediana ($U(\text{E-type 1,5})$ e $U(\text{E-type 3,0})$) e a metodologia FPG ($U(\text{FPG})$), proporcionam curvas que mais se aproximam da curva de $U(\text{Ref})$. Entretanto, para teores de corte acima de 200 ppm, estes métodos indicam uma quantidade menor de blocos de minério do que é indicado pelo modelo de referência.

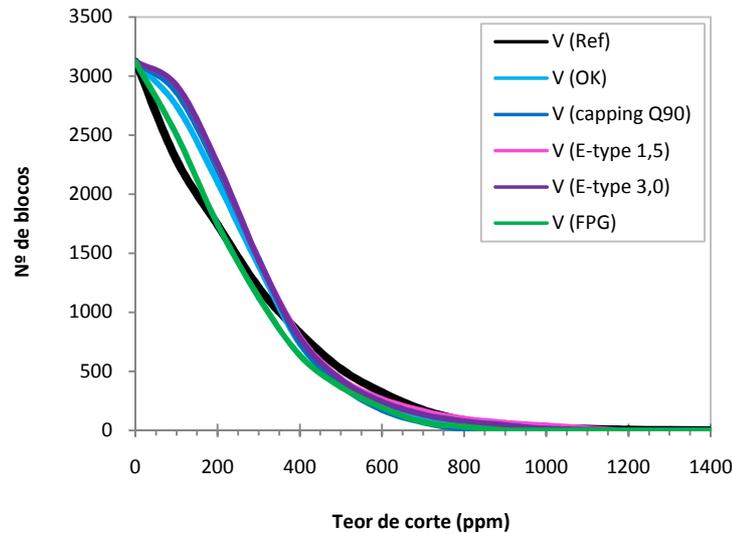


Figura 4.16 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável V.

Na Figura 4.16, para teores de V abaixo de 400 ppm, observa-se que a curva calculada para as estimativas de V(FPG) apresenta maior aderência ao modelo de referência do que os demais métodos de estimativa utilizados. Entretanto, as curvas de parametrização para estimativas da variável V não apresentam grandes discrepâncias em relação à curva de V(Ref), tal como foi verificado no gráfico anterior para a variável U.

Em uma visão geral, analisando os resultados para média global, coeficientes de correlação e curvas de parametrização, as estimativas da variável U geradas pela técnica FPG apresentaram maior aderência aos teores de referência. Observando a distribuição de teores mais errática da variável U, é possível atribuir esta maior aderência ao controle mais efetivo dos valores extremos na estimativa, proporcionado pela transformação do teor em extensões acumuladas.

Para as estimativas da variável V os resultados para média global, coeficientes de correlação e curvas de parametrização demonstram que não há grandes diferenças entre a aplicação da metodologia FPG e a utilização das demais técnicas de krigagem estudadas. Este efeito já era esperado devido a trabalhos anteriores realizados por Armony (2000), que atestam a semelhança entre as estimativas por FPG e krigagem ordinária para teores com distribuições aproximadamente simétricas ou com baixa assimetria positiva.

4.2 Banco de dados Amapari

4.2.1 Apresentação do banco de dados

A área de Amapari está localizada no estado do Amapá, região norte do Brasil, cujo banco de dados selecionado para este estudo compreende apenas as amostras coletadas na litologia de colúvio mineralizado. A Figura 4.17 demonstra a distribuição de frequência apresentada pelo conjunto amostral, enquanto a Tabela 4.17 mostra os parâmetros estatísticos calculados para os teores de ouro.

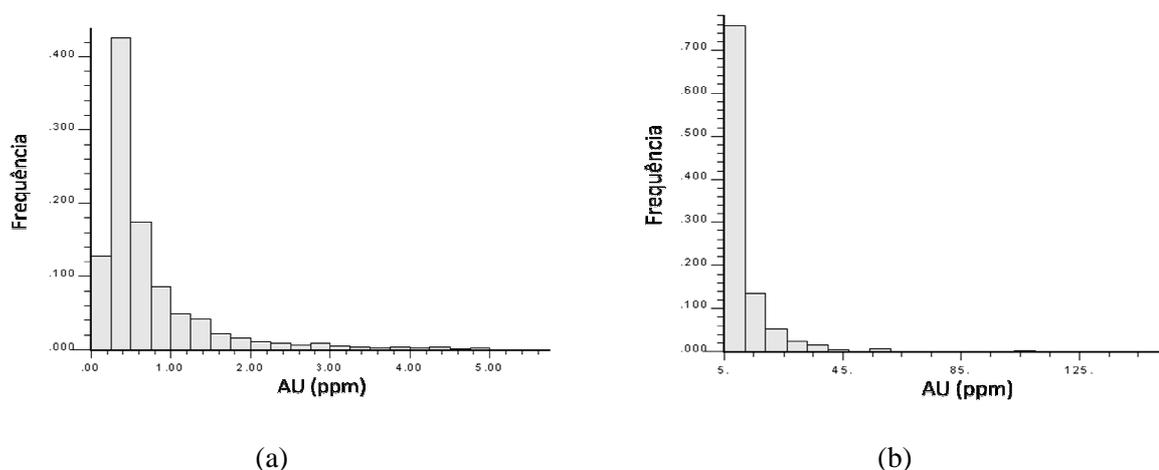


Figura 4.17 – Histograma das amostras analisadas para a variável Au, ponderadas pelos pesos de desagrupamento: (a) teores menores que 5 ppm e (b) teores maiores ou iguais a 5 ppm.

Tabela 4.17 – Parâmetros estatísticos calculados para os teores da variável Au.

	Nº dados	Mínimo (ppm)	Máximo (ppm)	Média (ppm)	Desvio padrão (ppm)	Coef. de Variação
AU	5857	0,00	145,30	0,95	2,34	2,47
AU < 5 ppm	4903	0,00	4,99	0,70	0,72	1,03
AU ≥ 5 ppm	954	5,00	145,30	10,79	10,08	0,93

Os histogramas comprovam a característica de forte assimetria positiva na distribuição de teores, comumente encontrada em depósitos de minério aurífero. Os parâmetros estatísticos calculados também servem como evidência desta característica: a média de 0,95 ppm dos teores é cerca de duas vezes maior do que a mediana (0,46 ppm), e há uma grande diferença entre o quartil superior (0,83 ppm) e o valor máximo analisado (145,30 ppm). Além disso, o conjunto de teores apresenta um coeficiente de variação alto (C.V.= 2,47), indicando uma maior dificuldade para realização das estimativas de teores locais com alto grau de confiabilidade.

A pesquisa geológica foi realizada através de sondagem com malha de aproximadamente 25x25m e amostragem a cada metro perfurado, totalizando 5857 amostras analisadas. Os mapas da Figura 4.18 retratam a localização das amostras de sondagem. Foi escolhida a escala de cores de 0 ppm até 5 ppm para melhor visualização da distribuição espacial dos altos teores, devido à forte assimetria positiva apresentada pelos dados.

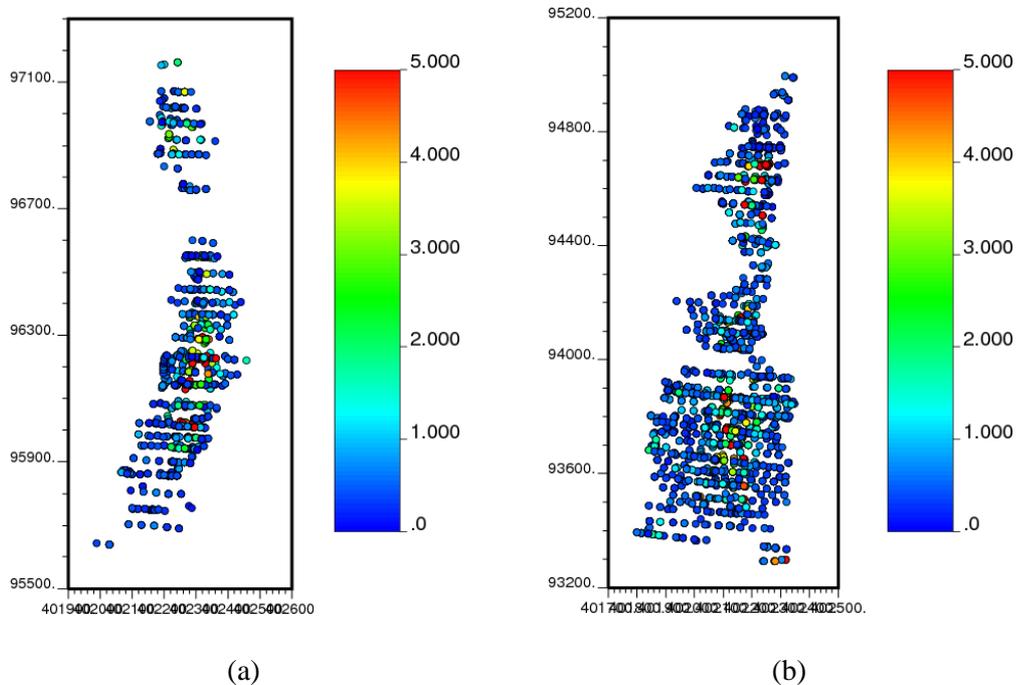


Figura 4.18 – Mapa de localização das amostras analisadas para a variável Au: (a) porção norte do domínio e (b) porção sul do domínio, com escala de cores (valores em ppm).

4.2.2 Procedimentos

A primeira etapa realizada consistiu nas estimativas de teores, utilizando as seguintes técnicas:

- Krigagem ordinária das variáveis originais;
- Krigagem ordinária das variáveis originais, após a aplicação de corte (*capping*) nos altos teores;
- Krigagem dos indicadores pela mediana, assumindo como teor do bloco o E-type calculado no módulo de pós-processamento *postik* do GSLib (Deutsch e Journel, 1998), para uma extrapolação do quantil superior por uma função com parâmetros menos restritivos à probabilidade de ocorrência de altos teores;

- Krigagem dos indicadores pela mediana, assumindo como teor do bloco o E-type calculado no módulo de pós-processamento *postik* do GSLib (Deutsch e Journel, 1998), para uma extrapolação do quantil superior por uma função com parâmetros mais restritivos à probabilidade de ocorrência de altos teores;
- Krigagem ordinária das variáveis transformadas pela aplicação do FPG (extensões).

Após a realização das estimativas, foram comparados os resultados gerados pelo método FPG com os demais modelos estimados.

4.2.3 Análise das distribuições e medidas de continuidade espacial

4.2.3.1 Krigagem ordinária dos dados originais

A caracterização do comportamento espacial da distribuição de teores de ouro foi feita através do cálculo de correlogramas direcionais. Foi calculado o correlograma vertical ao longo dos furos de sondagem, de onde foi obtido o efeito pepita do depósito; após isto foram calculados os correlogramas no plano xy. Após foi feita análise de mergulho nas direções principais e não resultou em qualquer inclinação dos eixos de continuidade.

Os correlogramas tiveram seus pontos experimentais ajustados por funções esféricas, que são retratados na Figura 4.19, enquanto a Tabela 4.18 mostra com detalhes os parâmetros que definem o modelo de ajuste.

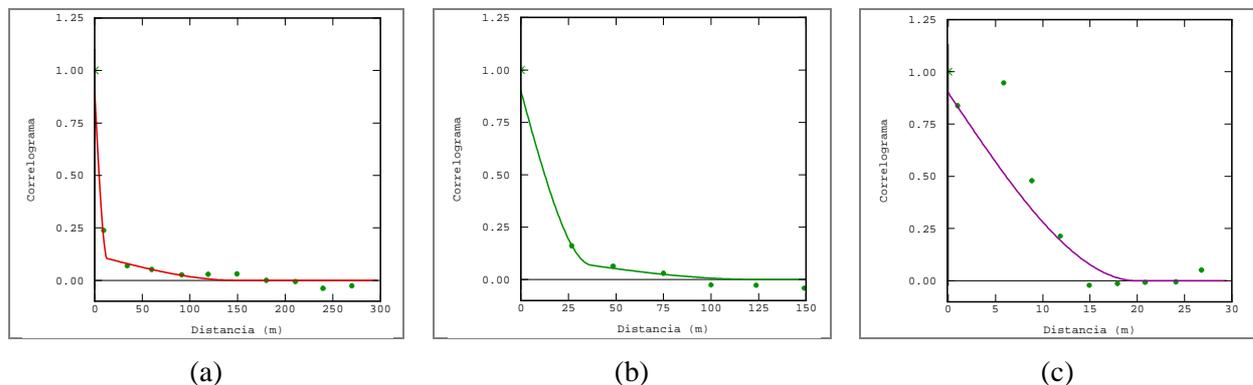


Figura 4.19 – Correlogramas experimentais para a variável Au, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.18. Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma para a variável Au.

	Contribuição das estruturas	Nº Alcance (m)	N90ºE Alcance (m)	NºD90º Alcance (m)
Efeito pepita	0,10	-	-	-
Esférica 1	0,78	13	37	20
Esférica 2	0,12	150	125	20

As estimativas por krigagem ordinária dos dados originais serão identificadas na descrição dos resultados pela denominação AU(OK).

4.2.3.2 Krigagem ordinária com corte (*capping*) nos valores extremos

A determinação do teor para corte (*capping*) dos altos valores da distribuição de teores de Au foi baseada na análise de sensibilidade da média desagrupada. Nesta análise, foram efetuados cortes em determinados trechos e verificadas as variações das médias desagrupadas resultantes. A redução percentual da média desagrupada dos dados após o corte, em relação à média desagrupada dos dados originais, não deveria ultrapassar o limite previamente estipulado de 10%. Este limite é mais flexível do que o limite estipulado para as variáveis U e V, devido à maior assimetria da distribuição de probabilidade dos teores.

Os teores de corte escolhidos para os testes foram baseados nos quantis da distribuição de Au, os quais são apresentados na Tabela 4.19.

Tabela 4.19 – Quantis das distribuições de teores para a variável Au, base para a análise de sensibilidade das médias após o *capping*.

	Q95%	Q96%	Q97%	Q98%	Q99%
Au (ppm)	5,03	5,85	7,16	9,23	14,27

A análise de sensibilidade teve início com o quantil Q_{95%} e, de acordo com a variação de média obtida, a análise se estendeu para os quantis superiores. Os resultados obtidos para a análise de sensibilidade da variável Au são apresentados na Tabela 4.20.

Tabela 4.20 – Resultados da análise de médias desagrupadas para a variável Au.

	Média desagrupada (ppm)	Diferença relativa (%)
AU	0,95	-
AU (<i>capping</i> Q99)	0,90	5,26
AU (<i>capping</i> Q98)	0,87	8,42
AU (<i>capping</i> Q97)	0,84	11,58
AU (<i>capping</i> Q96)	0,82	13,68
AU (<i>capping</i> Q95)	0,80	15,79

Pode-se verificar que para a variável Au, o limite de variação da média desagrupada de 10% é ultrapassado com o corte no quantil $Q_{97\%}$ da distribuição de teores. Desta forma, foi estabelecido que o teor para corte (*capping*) desta variável seria o valor correspondente ao quantil $Q_{98\%}$ da distribuição de teores original, o que equivale ao teor 9,23 ppm. Foi decidido testar também a aplicação do *capping* utilizando o quantil $Q_{95\%}$, correspondente ao teor de 5,03 ppm, para verificar o efeito da escolha de um corte maior nos teores altos.

Após o corte (*capping*) nos altos valores da distribuição de Au, prosseguiu-se com a análise de continuidade de teores por meio de correlogramas. Os pontos experimentais calculados, assim como os modelos esféricos de ajuste são ilustrados nas figuras a seguir (Figura 4.20 e Figura 4.21), e os parâmetros das funções de ajuste são apresentados nas tabelas que seguem (Tabela 4.21 e Tabela 4.22).

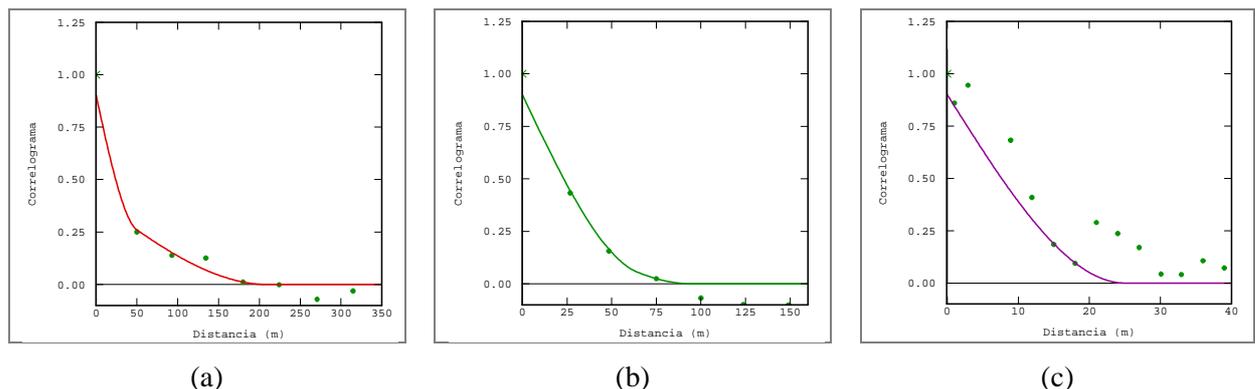


Figura 4.20 – Correlogramas experimentais para a variável Au, após corte (*capping*) no quantil Q_{98} da distribuição de teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção $N0^\circ$, de maior continuidade; (b) direção $N90^\circ E$, de continuidade intermediária; e (c) direção $N0^\circ D90^\circ$ (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.21 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma para a variável Au, após corte (*capping*) no quantil Q98 da distribuição de teores.

	Contribuição das estruturas	N0° Alcance (m)	N90°E Alcance (m)	N0°D90° Alcance (m)
Efeito pepita	0,10	-	-	-
Esférica 1	0,50	50	65	25
Esférica 2	0,40	210	95	25

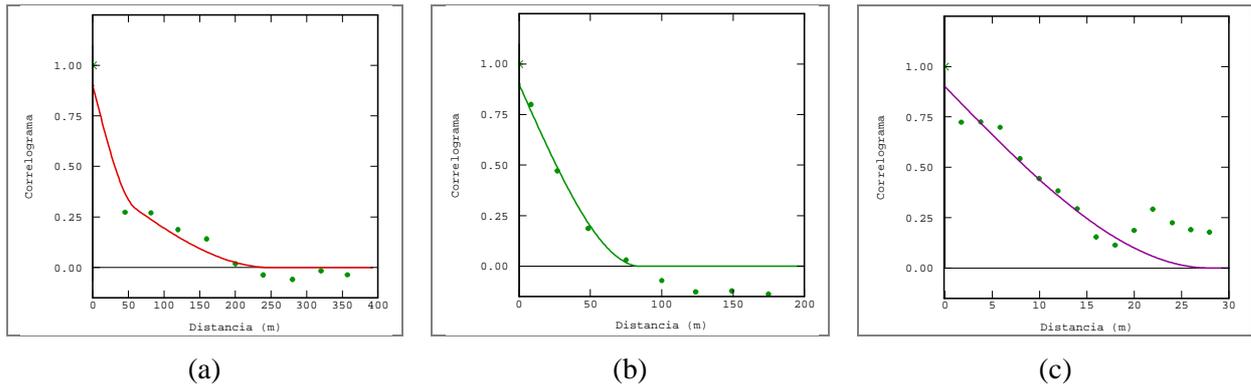


Figura 4.21 – Correlogramas experimentais para a variável Au, após corte (*capping*) no quantil Q95 da distribuição de teores, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.22 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma para a variável Au, após corte (*capping*) no quantil Q95 da distribuição de teores.

	Contribuição das estruturas	N0° Alcance (m)	N90°E Alcance (m)	N0°D90° Alcance (m)
Efeito pepita	0,10	-	-	-
Esférica 1	0,45	60	85	28
Esférica 2	0,45	250	85	28

As estimativas por krigagem ordinária dos dados com aplicação de corte (*capping*) nos valores extremos serão identificadas na descrição dos resultados pelas denominações AU(*capping* Q98) e AU(*capping* Q95).

4.2.3.3 Krigagem dos indicadores pela mediana

A aplicação da krigagem de indicadores pela mediana necessita apenas do cálculo e ajuste de um único modelo de continuidade espacial, calculado para os dados transformados

em indicadores do trecho equivalente ao quantil $Q_{50\%}$ da distribuição de teores. A Figura 4.22 e a Tabela 4.23 mostram os correlogramas ajustados aos pontos experimentais, assim como os parâmetros numéricos das funções esféricas de ajuste.

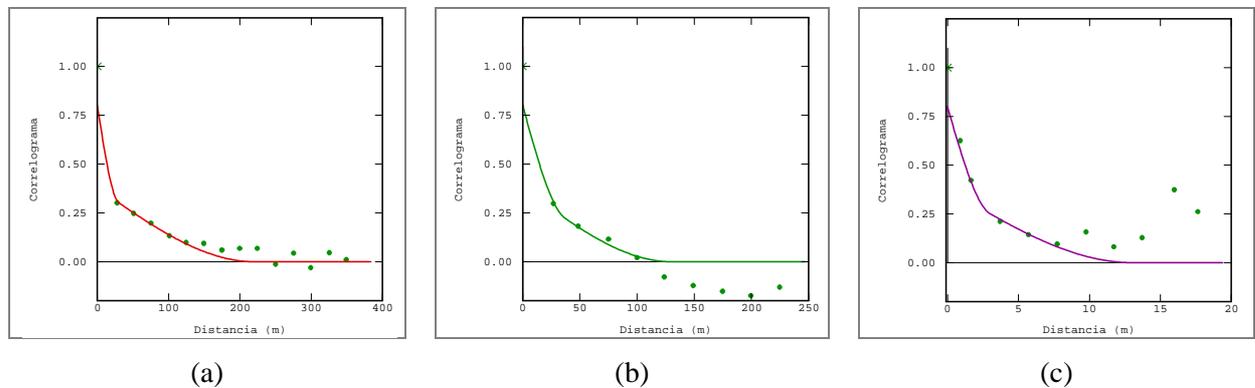


Figura 4.22 – Correlogramas experimentais dos indicadores para a mediana da variável Au, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção $N0^\circ$, de maior continuidade; (b) direção $N90^\circ E$, de continuidade intermediária; e (c) direção $N0^\circ D90^\circ$ (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.23 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma dos indicadores para a mediana da variável Au.

	Contribuição das estruturas	$N0^\circ$ Alcance (m)	$N90^\circ E$ Alcance (m)	$N0^\circ D90^\circ$ Alcance (m)
Efeito pepita	0,20	-	-	-
Esférica 1	0,42	30	37	3
Esférica 2	0,38	220	130	13

A determinação dos trechos para a krigagem de indicadores baseou-se nos teores correspondentes aos nove decis da distribuição de teores de ouro, valores os quais são apresentados na Tabela 4.24.

Tabela 4.24 – Nove decis da distribuição de teores de Au, base para os trechos da krigagem de indicadores.

	Q10	Q20	Q30	Q40	Q50	Q60	Q70	Q80	Q90
AU (ppm)	0,25	0,32	0,40	0,50	0,63	0,82	1,14	1,65	2,95

Após a krigagem de indicadores da variável Au para todos os trechos, o teor de cada bloco foi definido através do cálculo do E-type na etapa de pós-processamento. Foram produzidos dois tipos de distribuição de teores para a variável, através da modificação dos parâmetros da função de extrapolação do quantil superior. Foram utilizadas funções hiperbólicas de parâmetros $\omega=1,5$ e $\omega=4,0$ que, nesta ordem, condicionam uma maior e uma

menor probabilidade de ocorrência de altos teores nas distribuições formadas pelos trechos estimados.

Assim, os resultados das estimativas por krigagem dos indicadores serão identificados de acordo com o parâmetro de extrapolação aplicado, ou seja, são atribuídas as denominações AU(E-type 1,5) e AU(E-type 4,0).

4.2.3.4 Geoestatística Paramétrica de Campo – FPG

A verificação da existência ou não de múltiplas populações foi realizada a partir da análise do gráfico de frequência acumulada para a variável Au, apresentado na Figura 4.23. Foi verificada uma mudança de inclinação bastante acentuada no gráfico, cujo ponto de inflexão da curva corresponde ao teor de aproximadamente 5 ppm.

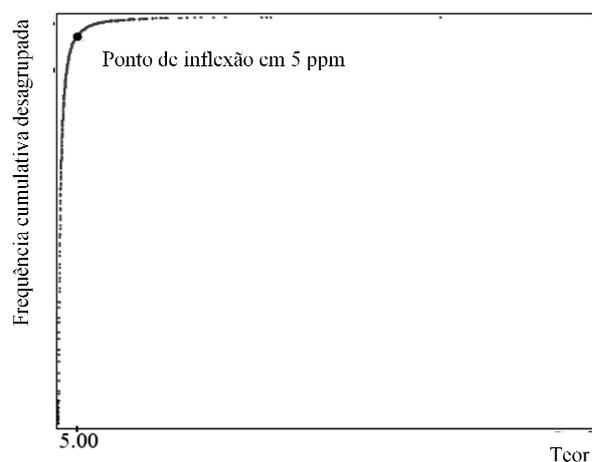


Figura 4.23 – Gráfico de frequência acumulada para a variável Au, ponderada pelos pesos de desagrupamento, onde destaca-se o ponto de inflexão da curva em 5 ppm.

Assumindo a existência de duas populações, o banco de dados foi dividido entre amostras com teor menor ou igual a 5 ppm e amostras com teor acima de 5 ppm. As amostras com teor acima de 5 ppm são estimadas pela metodologia FPG, já as amostras com teor menor ou igual a 5 ppm são estimadas por krigagem ordinária.

Com a divisão do banco de dados entre altos e baixos teores, torna-se necessário estabelecer qual a parcela de contribuição de cada população de teores no metal contido em cada bloco. Para isto, foi feita a krigagem de indicadores da população de baixo teor, onde o resultado é considerado a fração de influência desta população de teores na composição do

metal contido no bloco. O cálculo do teor final de cada bloco será dado pela combinação entre as estimativas por FPG dos altos teores e por krigagem ordinária dos baixos teores, com as contribuições de cada população estabelecidas pela krigagem de indicadores.

Por exemplo, em um bloco do onde se quer prever o teor de ouro, se o valor estimado por krigagem dos baixos teores é de 0,50 ppm, o valor estimado por FPG a partir dos altos teores é de 6,00 ppm, e a krigagem dos indicadores da população de baixo teor forneceu o valor 0,80. O teor final do bloco é calculado da seguinte forma:

$$Au_{(ppm)} = [(0,80) * (0,50)] + [(1 - 0,80) * (6,00)] = 1,6 \text{ ppm}$$

O cálculo e ajuste de correlogramas foram realizados separadamente para cada população. A Figura 4.24 e a Tabela 4.25 retratam o modelo de continuidade espacial adotado para a população de altos teores.

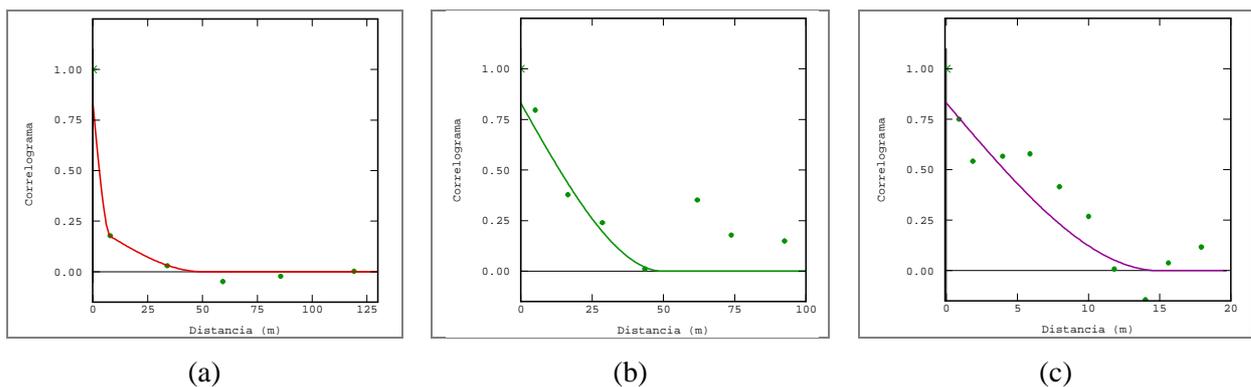


Figura 4.24 – Correlogramas experimentais para as extensões dos altos teores da variável Au (acima de 5 ppm), com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.25 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma das extensões dos altos teores para a variável Au.

	Contribuição das estruturas	N0° Alcance (m)	N90°E Alcance (m)	N0°D90° Alcance (m)
Efeito pepita	0,17	-	-	-
Esférica 1	0,60	8	50	15
Esférica 2	0,23	50	50	15

Para as amostras com teor de Au menor ou igual a 5 ppm, foram calculados os correlogramas direcionais para os teores e para os indicadores. Os modelos ajustados aos correlogramas experimentais, bem como seus parâmetros, para os teores de ouro e para os indicadores do trecho menor ou igual a 5 ppm, são exibidos nas figuras (Figura 4.25 e Figura

4.26) e tabelas (Tabela 4.26 e Tabela 4.27) que seguem.

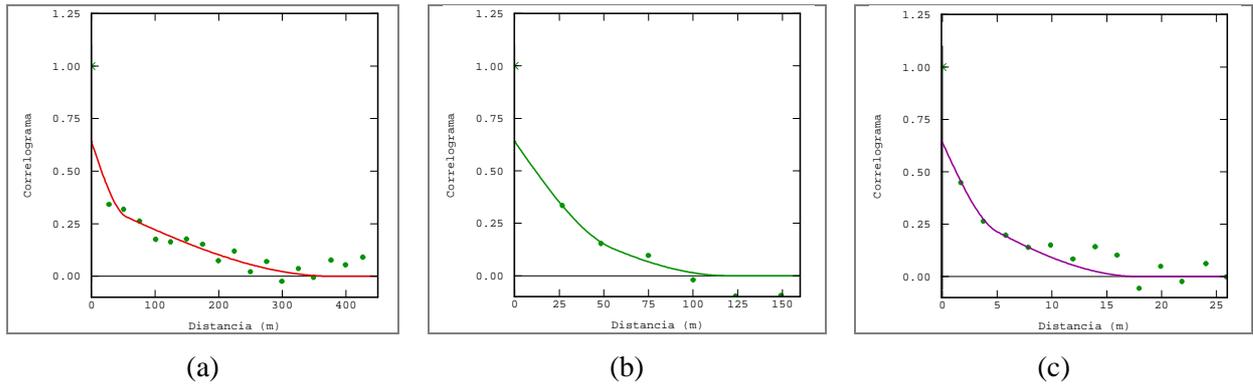


Figura 4.25 – Correlogramas experimentais para os teores da variável Au menores ou iguais a 5 ppm, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.26 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma dos teores para a variável Au, menores ou iguais a 5 ppm.

	Contribuição das estruturas	N0° Alcance (m)	N90°E Alcance (m)	N0°D90° Alcance (m)
Efeito pepita	0,36	-	-	-
Esférica 1	0,28	55	55	5
Esférica 2	0,36	380	120	18

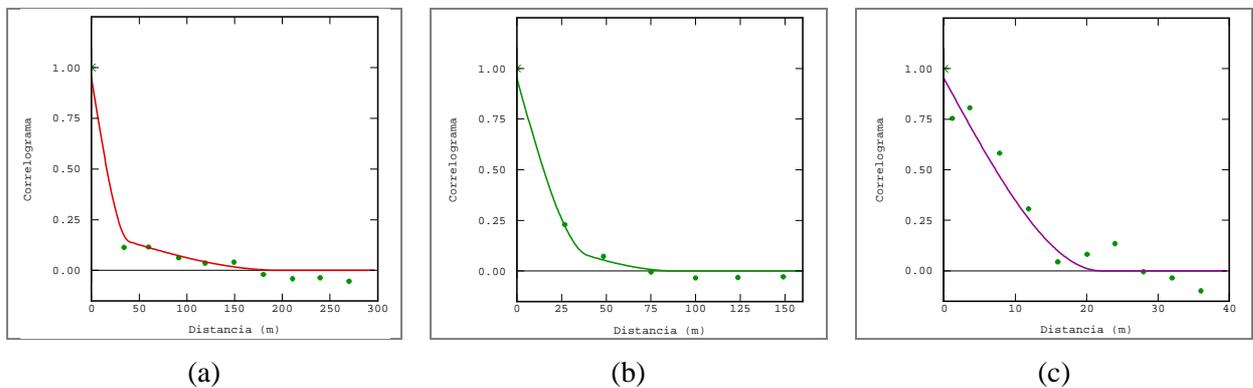


Figura 4.26 – Correlogramas experimentais dos indicadores para a variável Au, para o trecho de teores menores ou iguais a 5 ppm, com os modelos ajustados aos pontos experimentais: (a) direção N0°, de maior continuidade; (b) direção N90°E, de continuidade intermediária; e (c) direção N0°D90° (vertical), de menor continuidade.

Tabela 4.27 – Parâmetros do modelo ajustado ao correlograma dos indicadores para a variável Au, para o trecho de teores menores ou iguais a 5 ppm.

	Contribuição das estruturas	N0° Alcance (m)	N90°E Alcance (m)	N0°D90° Alcance (m)
Efeito pepita	0,05	-	-	-
Esférica 1	0,75	40	40	22
Esférica 2	0,20	200	90	22

Assim, as estimativas pela técnica FPG serão identificadas na descrição dos resultados pela denominação AU(FPG).

4.2.4 Resultados

As estimativas foram realizadas em dois modelos de blocos gerados na área de estudo, que compreendem as porções norte e sul da área, com tamanho de blocos de 10x10x1m, sem haver subdivisão do banco de dados durante as estimativas. Houve a padronização dos parâmetros de busca de amostras, definindo os parâmetros mais adequados após a realização de validação cruzada, para que as distinções entre os valores resultantes para os modelos estimados sejam atribuídas somente às diferenças entre as abordagens metodológicas.

Foi adotada a krigagem de blocos admitindo a discretização de 25 pontos de estimativa em cada bloco, distribuídos no padrão 5x5x1, onde o cálculo da média destes pontos fornece o teor do respectivo bloco. O mínimo de amostras para realizar a estimativa foi estabelecido em 3 amostras e o máximo de 16 amostras, com delimitação de 2 amostras por octante. O elipsóide de busca adotado possui dimensões de 350 m na direção de maior continuidade (N0°), 150 m na direção de continuidade intermediária (N90°E), e 30 m na direção de menor continuidade (N0°D90°, vertical).

Os parâmetros estatísticos das estimativas são expostos nas tabelas seguintes, separados de acordo com o modelo de blocos correspondentes à área norte (Tabela 4.28) e à área sul do depósito (Tabela 4.29), bem como as estatísticas das amostras separadas por área.

Tabela 4.28 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável Au na porção norte.

	Dados Norte Nº blocos	Mínimo (ppm)	Máximo (ppm)	Média (ppm)	Desvio padrão (ppm)
AU	1730	0,00	24,04	0,85	1,37
AU (OK)	155488	0,08	13,35	0,68	0,55
AU (<i>capping</i> Q98)	155488	0,00	8,04	0,65	0,52
AU (<i>capping</i> Q95)	155488	0,00	5,00	0,63	0,45
AU (E-type 1,5)	155488	0,16	7,81	0,75	0,69
AU (E-type 4,0)	155488	0,16	4,10	0,66	0,44
AU (FPG)	155488	0,08	6,61	0,59	0,45

Na porção norte do depósito, as estimativas por krigagem ordinária (AU(OK)), krigagem ordinária com aplicação de corte (*capping*) nos valores extremos (AU(*capping* Q98) e AU(*capping* Q95)) e krigagem dos indicadores com maior restrição aos altos teores no cálculo do E-type (AU(E-type 4,0)) proporcionaram valores de média global bastante semelhantes. Dentre estes métodos, a maior redução de variabilidade nos teores estimados ocorreu nos resultados obtidos com maior restrição aos valores extremos do banco de dados, que são AU(*capping* Q95) e AU(E-type 4,0). A estimativa por krigagem de indicadores com menor restrição aos valores extremos (AU(E-type 1,5)) forneceu valores mais altos de média e desvio padrão, de forma oposta ao FPG (AU(FPG)), que dentre as metodologias aplicadas forneceu um valor menor para a média global para a distribuição de teores, com redução de 30% no teor médio do depósito em relação à média fornecida pelos dados desagregados.

Tabela 4.29 – Parâmetros estatísticos dos teores estimados para a variável Au na porção sul.

	Dados Sul Nº blocos	Mínimo (ppm)	Máximo (ppm)	Média (ppm)	Desvio padrão (ppm)
AU	4127	0,00	145,30	1,01	2,82
AU (OK)	226619	0,04	67,39	0,88	1,51
AU (<i>capping</i> Q98)	226619	0,00	9,12	0,77	0,82
AU (<i>capping</i> Q95)	226619	0,00	5,00	0,71	0,58
AU (E-type 1,5)	226619	0,16	9,81	0,86	1,00
AU (E-type 4,0)	226619	0,16	4,10	0,70	0,49
AU (FPG)	226619	0,07	8,65	0,62	0,56

As amostras presentes na porção sul do depósito possuem valores extremos e média de teores mais altos do que a porção norte, consequentemente a média das estimativas é mais alta, como pode ser verificado pelos parâmetros estatísticos apresentados na Tabela 4.29. A

média global de teores de ouro na área sul do depósito, obtida pela metodologia FPG (AU(FPG)), é mais conservadora em relação às demais técnicas, exibindo uma média estimada para a variável Au 36% menor do que a média desagrupada das amostras.

No caso de Amapari, não há a disponibilidade de um modelo de referência para verificação do nível de aderência dos resultados obtidos por FPG. Entretanto, o fato de as médias estimadas por FPG para as porções norte e sul do depósito ser 30% e 36% menores do que as médias dos teores desagrupados são vistos como resultados positivos. Por exemplo, para o estudo de caso de Walker Lake, observou-se que a diferença entre

Para verificar a influência dos métodos de estimativa nas dimensões do depósito de acordo com o teor de corte, foram elaboradas curvas de parametrização que mostram a relação entre o teor de corte utilizado e a proporção de blocos de minério na área. Esta adaptação das curvas tonelagem *versus* teor tornou-se necessária pela ausência de informações relativas à densidade do material.

A Figura 4.27 e a Figura 4.28 retratam as curvas de parametrização para as áreas norte e sul, respectivamente. A título de comparação visual, também foi acrescentada a curva de proporções da quantidade de amostras presentes em cada região do depósito em função do teor de corte escolhido.

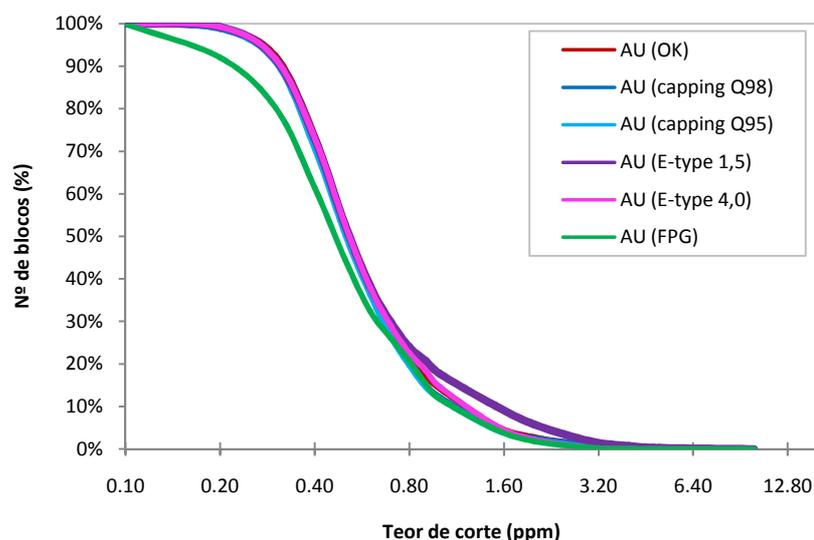


Figura 4.27 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável Au, realizadas na porção norte da área.

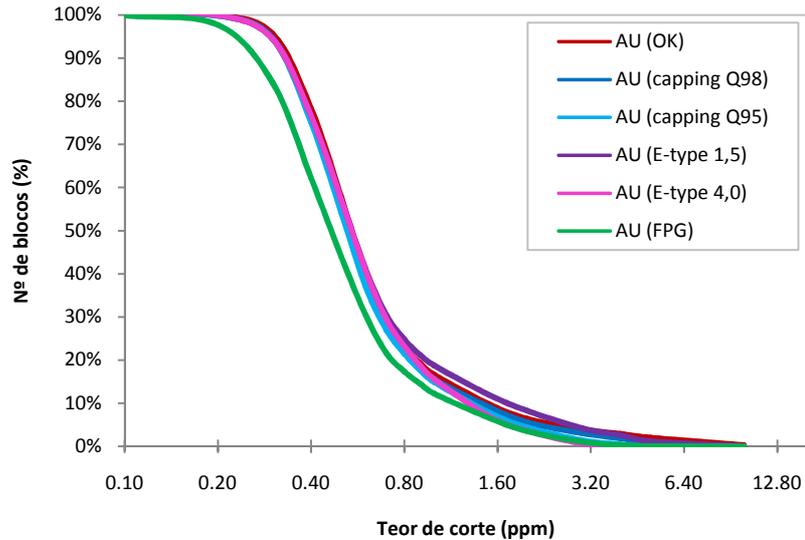


Figura 4.28 – Curvas de parametrização para as estimativas da variável Au, realizadas na porção sul da área.

Nas regiões norte e sul do depósito, as estimativas por técnicas tradicionais apresentam curvas de parametrização bastante semelhantes entre si. Por outro lado, a curva obtida pelas estimativas por FPG (cor verde) indica uma quantidade menor de blocos de minério para teores de corte abaixo de 0,50 ppm, o que pode ser atribuído ao melhor controle do efeito dos *outliers* na estimativa de teores utilizando a técnica FPG.

As características semelhantes entre as curvas de parametrização (à exceção da curva FPG) demonstram que as medidas de controle tomadas para reduzir o efeito de valores altos erráticos na estimativa não surtiram o efeito esperado. Ou seja, mesmo com as análises de médias desagrupadas para escolha do melhor teor para corte dos valores extremos, ou com a krigagem de indicadores para compor a curva de probabilidades em cada bloco e cálculo da média destas distribuições, o resultado final não apresenta melhorias em relação à variografia e krigagem ordinária dos dados.

Ao observar os resultados gerados para média global e curvas de parametrização da variável Au, a estimativa de teores pela técnica FPG forneceu resultados mais conservadores em relação às demais técnicas estudadas. Mesmo com um alto coeficiente de variação apresentado pelos dados de Amapari (C.V.= 2,47), a transformação dos teores de Au em extensões acumuladas permitiu a redução de altos teores estimados, além de previsões mais conservadoras para as curvas de parametrização do depósito.

4.3 Comentários finais

Neste capítulo, foram apresentados os resultados obtidos para a estimativa de distribuições de teores com forte assimetria positiva. Foram efetuadas comparações entre os teores estimados pela Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG) e demais técnicas aplicadas nos bancos de dados de Amapari e Walker Lake, sendo as estimativas para as variáveis U e V do banco de dados Walker Lake comparadas também com o modelo de referência. No Capítulo 5, serão apresentadas as conclusões tiradas a partir destes trabalhos, e algumas recomendações para futuros estudos.

Capítulo 5

Conclusões e recomendações

Este capítulo apresenta as conclusões decorrentes do trabalho realizado e dos resultados apresentados nesta dissertação.

A Seção 5.1 trata das conclusões propriamente ditas, fundamentadas nos resultados expostos e discutidos anteriormente. A Seção 5.2 apresenta algumas sugestões para trabalhos futuros, que possam complementar os estudos da Geoestatística Paramétrica de Campo.

5.1 Conclusões

Através da análise dos resultados para os estudos de caso Walker Lake e Amapari, se pode concluir que a Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG) fornece resultados robustos para a estimativa de teores na presença de valores extremos. Esta afirmação foi baseada nas seguintes evidências:

- Para o banco de dados Walker Lake, as estimativas da variável U pela aplicação da Geoestatística Paramétrica de Campo produziram o teor médio que mais se aproximou da média dos dados de referência para esta variável. Com apenas 4% de diferença em relação à média proveniente dos dados exaustivos, a estimativa por FPG destacou-se dos demais métodos utilizados, os quais apresentaram diferenças relativas acima de 8% para a krigagem de indicadores, até 96% para a krigagem ordinária dos dados originais. Além disso, a curva de parametrização de recursos de U gerada com as estimativas por FPG foi bem próxima à curva de parametrização produzida a partir dos dados de referência;
- A estimativa de teores de Au na área de Amapari pela Geoestatística Paramétrica de Campo proporcionou médias globais menores do que as demais

estimativas produzidas, nas porções norte e sul da área, o que comprova o controle mais efetivo dos valores extremos ao utilizar a técnica. As curvas de parametrização dos blocos estimados por FPG evidenciam a menor quantidade de blocos de minério para diversos teores de corte, mostrando que os resultados são mais conservadores quanto à previsão dos recursos auríferos existentes na área de Amapari.

Para os dados cuja distribuição de frequências apresenta pouca ou nenhuma assimetria, tais como a variável V da área de Walker Lake, conclui-se que os resultados globais e locais fornecidos pela Geoestatística Paramétrica de Campo podem ser obtidos de forma semelhante pela aplicação da krigagem ordinária dos dados originais, com ou sem corte (*capping*) dos altos valores. Acredita-se, que quanto mais a distribuição de probabilidade dos teores aproximar-se de uma distribuição normal de frequências, mais próximos serão os resultados da Geoestatística Paramétrica de Campo aos resultados da krigagem ordinária.

Os demais métodos utilizados na estimativa de teores de Amapari, mesmo com as restrições aplicadas aos valores extremos, possuem curvas de recurso muito semelhantes à curva da krigagem ordinária dos dados originais, onde não há qualquer tratamento prévio em relação aos *outliers*. Nestes casos, torna-se necessária uma restrição maior dos teores antes da estimativa de recursos, o que novamente traz à tona a questão da subjetividade na escolha de parâmetros de restrição, ou a aplicação de fatores de correção de teores, de acordo com a disponibilidade de dados para reconciliação.

De forma geral, a Geoestatística Paramétrica de Campo (FPG) mostrou-se uma alternativa viável para a estimativa de teores cuja distribuição de frequências apresenta forte assimetria positiva, tais como os teores de minérios auríferos, sem a subjetividade inerente à escolha de teores de corte para valores extremos.

5.2 Trabalhos futuros

A Geoestatística Paramétrica de Campo merece ser estudada em futuros trabalhos, de forma que a aplicação em diversos estudos de caso possa viabilizar a sua utilização de forma rotineira na estimativa de recursos. São sugeridos os seguintes tópicos:

- Pesquisa e aplicação de outras ferramentas para estimativa de teores na presença de valores extremos, para comparação dos resultados obtidos com a

aplicação do FPG;

- Estudo de caso com a aplicação do FPG em banco de dados de um depósito real, efetuando a comparação dos resultados com um modelo de blocos de referência gerado por simulação geoestatística;
- Estudo de caso em banco de dados de um depósito real, com informações disponíveis acerca da reconciliação de massas e teores, de forma a verificar o nível de aderência atingido pela estimativa por FPG em relação ao modelo de referência (reconciliado);
- Verificação do impacto da Geoestatística Paramétrica de Campo na quantificação de recursos e reservas minerais, em relação a outros métodos de estimativa de teores, e consequente análise do impacto econômico;
- Verificar a adequação da metodologia FPG para estimativa de variáveis onde a distribuição de frequências possua assimetria negativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARIK, A. 1992. *Outlier restricted kriging: a new kriging algorithm for handling of outlier high grade data in ore reserve estimation*. In: Kim, Y. C. (ed.), Proceedings of 23rd APCOM Symposium, Tucson, Arizona, pp. 181-187.
- ARMONY, M. 2000. *Geoestatística Paramétrica de Campo*. Tese de Doutorado, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- ARMONY, M. 2001. *Field Parametric Geostatistics*. International Journal of Surface Mining, vol. 15(2), pp. 100-122.
- ARMONY, M. 2005. *Logical basis for Field Parametric Geostatistics*. International Journal of Surface Mining, vol. 19(2), pp.144-157.
- ARMONY, M. 2012. *FPG Auxiliar Software*. v.2.2. Rio de Janeiro, Brasil, MAIM Ltda. (CD-ROM)
- BARNETT, V. & LEWIS, T. 1984. *Outliers in Statistical Data*. 2nd ed. Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 365p.
- CLARK, I. 1999. *A case study in the application of geostatistics to lognormal and quasi-lognormal problems*. In: Dagdelen, K. (ed.), Proceedings of 28th APCOM Symposium, Golden, Colorado, pp. 407-416.
- COSTA, J. F. C. L. 1997. *Developments in recoverable reserves estimation and ore body modelling*. PhD Thesis, Department of Earth Sciences, University of Queensland, Brisbane, 333p.
- COSTA, J. F. C. L. 2003. *Reducing the impact of outliers in ore reserves estimation*. Mathematical Geology, vol. 35(3), pp. 323-345.
- CRESSIE, N. & HAWKINS, D. M. 1980. *Robust estimation of the variogram*. Mathematical Geology, vol. 12(2), pp. 115-125.
- DAVID, M. 1988. *Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation*.

- Amsterdam, Netherlands, Elsevier, 216p.
- DEUTSCH, C. V. & JOURNEL, A. G. 1998. *GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide*. 2nd ed, New York (New York), Oxford University Press, 369p.
- GLACKEN, I. M. & BLACKNEY, P. A. 1998. *A practitioners implementation of Indicator Kriging*. In: Vann, J. (ed.), *Proceedings of a one day symposium: Beyond Ordinary Kriging - Non-Linear Geostatistical Methods in Practice*, Perth, Western Australia, pp. 26-39.
- GOOD, I. J. 1983. *The philosophy of exploratory data analysis*. *Philosophy of Science*, vol. 50(2), pp. 283-295.
- GOOVAERTS, P. 1997. *Geostatistics for natural resources evaluation*. New York (New York), Oxford University Press, 483p.
- ISAAKS, E. H. & SRIVASTAVA, R. M. 1989. *Applied Geostatistics*. New York (New York), Oxford University Press, 547p.
- JOURNEL, A. G. 1982. *The indicator approach to estimation of spatial distributions*. In: Johnson, T. B. and Barnes, R. J. (eds.), *Proceedings of 17th APCOM Symposium*, Golden, Colorado, pp. 793-806.
- JOURNEL, A. G. 1983. *Non parametric estimation of spatial distributions*. *Mathematical Geology*, vol. 15(3), pp. 445-468.
- JOURNEL, A. G. & HUIJBREGTS, C. J. 1978. *Mining geostatistics*. New York, Academic Press, 599p.
- KING, H. F., McMAHON, D. W. & BUJTOR, G. J. 1982. *A guide to understanding of ore reserve estimation*. Victoria, Australia, AUSIMM, 21p.
- KRIGE, D. G. 1951. *A statistical approach to some mine valuations problems at the Witwatersrand*. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, vol. 52, pp. 119-138.
- MACHADO, R. S., ARMONY, M., COSTA, J. F. C. L. & KOPPE, J. C. 2011a. *FPG — Geostatistical rigorous solutions for highly-skewed distributions*. In: Beniscelli, J., Kuyvenhoven, R. and Hoal, K. O. (eds.), *Proceedings of 2nd GEOMIN*, Antofagasta,

Chile, 9p. (CD-ROM)

- MACHADO, R. S., ARMONY, M., COSTA, J. F. C. L. & KOPPE, J. C. 2011b. *Field Parametric Geostatistics: geostatistical rigorous solutions dealing with extreme grades during resource estimation*. In: Baffi, E. Y. (ed.), Proceedings of 35th APCOM Symposium, Wollongong, Western Australia, pp. 191-202.
- MACHADO, R. S., ARMONY, M. & COSTA, J. F. C. L. 2012. *Field Parametric Geostatistics – a rigorous theory to solve problems of highly skewed distributions*. In: Abrahamsen, P., Hauge, R. and Kolbjørnsen (eds.), Proceedings of 9th International Geostatistics Congress, Oslo, Norway, pp. 383-396.
- MATHERON, G. F. 1963. *Principles of Geostatistics*. Economic Geology, vol. 58(8), pp. 1246-1266.
- McKINSTRY, H. E. 1948. *Mining Geology*. New York, Prentice-Hall Inc., 680p.
- NOBLE, A. C. 1992. *Ore reserve/resource estimation*. In: Hartman, H. L. (ed.), SME Mining Engineering Handbook. 2nd ed., vol. 1, Littleton, Colorado, pp. 344-359.
- OLEA, R. 1991. *Geostatistical glossary and multilingual dictionary*. New York, Oxford University Press, 177p.
- SINCLAIR, A. J. & BLACKWELL, G. H. 2004. *Applied Mineral Inventory Estimation*. Cambridge, , Cambridge University Press, 381p.
- SRIVASTAVA, R. M. 2001. *Outliers - A guide for data analysts and interpreters on how to evaluate unexpected high values*. Contaminated Sites Statistical Applications Guidance Document n° 12-8, British Columbia, Canada, 4p. Available at http://wlapwww.gov.br.ca/epd/epdpa/contam_sites/guidance/technical/12.html
- VANN, J. & GUIBAL, D. 1998. *Beyond Ordinary Kriging: Non-linear geostatistical methods in practice*. In: Vann, J. (ed.), Proceedings of a one day symposium: Beyond Ordinary Kriging - Non-Linear Geostatistical Methods in Practice, Perth, Western Australia, pp. 6-25.
- VERLY, G. 1983. *The multigaussian approach and its applications to the estimation of local reserves*. Mathematical Geology, vol. 15(2), pp. 259-286.