

Wilson Simeoni Junior

*Estabilidade Não-Linear de um Feixe de
Partículas Carregadas Sujeito a um Campo
Magnético Focalizador*

Dissertação apresentada na Universidade Federal do Rio Grande do Sul para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:
Renato Pakter

INSTITUTO DE FÍSICA - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Porto Alegre, RS
Novembro de 2005

DEDICATÓRIA

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente a Deus por conceber tudo isso
- Ao meu amor Claudia pelo carinho, dedicação, e fé depositada na minha pessoa.
- Aos meus pais pela liberdade de expressão e pensamento que sempre me deram durante a vida.
- Aos meus amigos Fernando, Lucas e Cristian pela paciência.
- Ao Prof. Dr. Felipe Rizzato pela oportunidade de pesquisarmos juntos
- E principalmente ao Prof. Dr. Renato Pakter pela amizade, extraordinária orientação e oportunidade de fazer ciência.

Resumo

Uma análise da estabilidade não-linear de feixes com seção transversal circular considerando perturbações sem simetria axial é executada. Mostra-se que as oscilações simétricas inicialmente circulares de um feixe podem induzir oscilações não-lineares do tipo anti-simétrica(elípticas), com um conseqüente aumento do tamanho do feixe ao longo de uma direção preferencial. O mecanismo da instabilidade e sua relevância às perdas de partícula no feixe são discutidos.

PACS:41.85.Ja 05.45.-a 41.75.-i

Abstract

A nonlinear stability analysis of breathing beams considering nonaxysymmetric perturbations is performed. It is shown that the breathing oscillations of an initially round beam may nonlinearly induce quadrupole-like oscillations, with a consequent increase of the beam size along one direction. The instability mechanism and its relevance to beam particle losses are discussed.

PACS:41.85.Ja 05.45.-a 41.75.-i

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Uma Descrição Histórica	6
1.1.1	Características de um feixe de partículas	6
1.1.2	Aplicações	8
1.1.3	Linha Cronológica	10
1.2	O Problema	17
2	A Física de um Feixe de Partículas Carregadas	20
2.1	O Modelo de Vlasov-Maxwell	21
2.2	Configurações dos Campos Elétricos e Magnéticos	22
2.2.1	Configuração dos Campos Focalizadores	24
2.2.2	Campos Gerados pelo Próprio Feixe	24
2.3	Formalismo Hamiltoniano	26
3	Dedução da Função Distribuição e da Equação do Envelope	30
3.1	Equações de Movimento no Referencial do Laboratório	30
3.2	Equações de Movimento no Referencial de Larmor	34
3.3	A Função Distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij	36
3.4	A Equação do Envelope	45
4	Estabilidade Não-Linear de um Feixe Descasado Sujeito a um Campo Magnético Focalizador	48
4.1	Descrição Hamiltoniana	48

4.1.1	Equações Do Envelope e Soluções Casadas	49
4.1.2	Dedução da Hamiltoniana	50
4.2	O Modelo	53
4.2.1	Dinâmica Simétrica	53
4.2.2	Dinâmica Anti-simétrica	55
4.2.3	Mapeamento	57
4.3	Análise Numérica da Equação do Envelope	61
4.3.1	Seções de Poincaré	61
4.3.2	O Espaço de Parâmetros	74
5	Simulações Numéricas Auto-Consistentes	77
5.1	Descrição das Simulações Numéricas Auto-Consistentes	77
5.2	Procedimento Numérico Adotado	80
5.3	Resultados das Simulações Numéricas Auto-consistentes	82
5.3.1	Problemas com a Emitância	92
6	Conclusões	94
	Anexo A – A Equação de Vlasov	96
	Apêndice A – Resolução da Equação de Poisson em Coordenadas Elípticas	99
	Referências	108

1 *Introdução*

Feixes de partículas carregadas são amplamente usados em aparelhos científicos, industriais, e até mesmo domésticos. As propriedades físicas de tais feixes tem sido estudadas em diversos campos, em diferentes contextos. Apesar de possuírem uma variedade de aplicações, os feixes podem ter muitas características em comum. Caracterizar fisicamente um feixe através de suas aplicações é o caminho mais rico para se adquirir intuição física, a qual constrói blocos conceituais que possibilitam pensar sobre situações novas e compreender as limitações inerentes a cada modelo. Com isso em mente, iremos revisar a literatura seguindo uma sequência histórica para nos próximos capítulos contruirmos as ferramentas necessárias a resolução do problema proposto por essa dissertação.

1.1 Uma Descrição Histórica

Começaremos caracterizando, qualitativamente, um feixe de partículas carregadas, citaremos algumas de suas aplicações para, posteriormente, contextualizando a história da física de feixes de partículas carregadas, introduzirmos os conceitos necessários e relatarmos os seus modelos teóricos.

1.1.1 Características de um feixe de partículas

A dinâmica de feixes de partículas tem sido objeto de intensa investigação teórica, computacional e experimental. De particular importância, são os efeitos dos campos focalizadores, autocampos e aquecimento do feixe na determinação das propriedades detalhadas do equilíbrio, estabilidade e transporte do feixe.

Normalmente as partículas não são aceleradas isoladamente, mas na forma de aglomerados de partículas denominados feixes. Os feixes fundamentalmente são classificados em primários e secundários. Os feixes primários são formados por partículas estáveis, que são diretamente aceleradas pelos campos eletromagnéticos nos aceleradores. Quando

acelerado, um feixe primário é levado a colidir com um alvo fixo ou com um outro feixe que vem em sentido contrário. Nos grandes aceleradores atuais os feixes primários são constituídos de prótons, antiprótons, elétrons e pósitrons. Os feixes secundários, formados de partículas estáveis e instáveis, são gerados a partir das colisões de feixes primários com alvos fixos. Quando realizamos estes tipos de colisões a altas energias, várias partículas secundárias são criadas e emanadas da região de interação e, o fazem em geral, com grandes velocidades. Estas partículas, em forma de feixes, são direcionadas e levadas a colidirem com outros alvos fixos em posições convenientemente escolhidas. Nos principais aceleradores atuais os feixes secundários são normalmente constituídos das seguintes partículas : prótons, antiprótons, elétrons, pósitrons, nêutrons, pions, káons, muons, neutrinos, gamas, etc.

Um feixe possui, freqüentemente, o formato cilíndrico (contínuo na direção longitudinal) ou elipsoidal (pacotes), com seção transversal variando ao longo do comprimento. Consiste de partículas carregadas movendo-se numa direção sujeitas às forças competidoras, externas e internas. O movimento das partículas no feixe depende dos campos aplicados externamente e dos campos gerados pelas partículas. A interação entre as partículas ocorre de duas maneiras. O primeiro tipo, uma força basicamente gerada pela distribuição de cargas do feixe consiste numa superposição dos campos de um grande número de partículas formando um campo elétrico suave que somente varia em distâncias grandes comparadas com a distância entre as partículas. O segundo tipo de força é essencialmente de curto alcance e descreve colisões entre as partículas individuais do feixe.

Geralmente, a energia cinética do feixe de partículas excede a energia armazenada de todos os campos coletivos produzidos pelas partículas. Visto que, essas energias são proporcionais ao número de partículas e ao quadrado do número de partículas, respectivamente, pode ser esperado que a razão entre a energia armazenada nos campos elétricos e magnéticos e a energia cinética seja aumentada indefinidamente através do incremento do número de partículas no feixe. Entretanto, quando essa duas energias tornam-se comparáveis, os campos, em geral, tornam-se suficientes para gerarem partículas com velocidades transversais altas, sendo assim, o sistema melhor descrito por um plasma. O termo plasma é usado, diferentemente, por diferentes autores, e apresenta variações na sua definição. Uma definição seria que todo sistema de partículas carregadas no qual as interações coletivas mútuas não são pequenas comparadas com os efeitos dos campos externos, constitui um plasma. Uma definição oposta seria que um plasma denota um gás contendo partículas carregadas, mas exibindo neutralidade total de carga com dimensões características

grandes comparadas com o comprimento de blindagem de Debye [1]. Conclui-se então, que feixes intensos de partículas carregadas são plasmas não-neutros de um componente exibindo muitos fenômenos coletivos, tais como ondas de plasma e instabilidades.

Basicamente, a física de feixes é um problema de muitos corpos carregados. Sua compreensão é de fundamental importância no desenvolvimento de novos aceleradores e anéis de armazenamento capazes de lidar com intensidades de feixe acima das conseguidas atualmente, os quais têm relevância tanto em estudos básicos de física nuclear e de partículas, quanto em aplicações como fusão de íons pesados, produção de trítio, transmutação de lixo nuclear, fontes de nêutrons e lasers de grande potência. Nesses aparelhos, é necessário um grande controle sobre as partículas para que a perda de feixe e a conseqüente ativação das estruturas, principalmente do acelerador, sejam minimizadas.

1.1.2 Aplicações

Existe uma variedade de maneiras em que os feixes são atualmente utilizados na pesquisa científica, em processos industriais e nos instrumentos e outros dispositivos. Feixes em aceleradores de partículas e anéis de armazenamento têm contribuído, extremamente para a nossa compreensão do mundo físico, sendo necessárias altas energias para explorar profundamente a estrutura da matéria. Em energias menos extremas, o conhecimento e a compreensão da estrutura nuclear têm sido adquiridos, e em energias menores ainda, características detalhadas dos processos atômicos podem ser estudadas. Junto aos estudos nucleares e atômicos, mudanças químicas e estruturais nos materiais podem também ser investigadas. As partículas aceleradas não são sempre utilizadas diretamente; ao invés disso, elas podem criar outras partículas através de colisões. Nêutrons são produzidos dessa maneira de feixes de elétrons ou deutério. Elétrons produzem fótons (raio-X), e mésons podem ser produzidos por feixes de prótons suficientemente energizados.

Uma substancial contribuição para nossa compreensão da estrutura dos materiais, das superfícies e, das espécies biológicas, tem sido obtida com o microscópio eletrônico. Um recente desenvolvimento, empregando feixes finos de elétrons focalizados para o estudo da superfície dos materiais é a análise por microsonda eletrônica. Um feixe fino de elétrons com energia entre 10 – 30 Kev penetra a amostra numa profundidade da ordem de $1\mu m$, e os raios-X na ou próximo a superfície são analisados propiciando a identificação do material. Propriedades de superfícies podem ainda ser investigadas pelo espalhamento de feixes de íons de baixa energia. Na análise de retro-espalhamento (RBS) um feixe de prótons ou hélio é focalizado sobre o material de interesse; a constituição atômica

do material é então determinada, analisando a distribuição de energias das partículas retro-espalhadas.

Uma aplicação diferente dos feixes para a determinação da composição de pequenas quantidades de materiais é exemplificada pelo espectômetro de massa. Neste aparelho o material de interesse é ionizado e acelerado na forma de um feixe que então passa através de um campo de dipolo magnético disposto de tal de maneira, que as partículas com diferentes razões entre carga e massa sofrem diferentes deflexões.

Alguns instrumentos que utilizam diretamente os feixes foram descritos. Alguns desses tem aplicações industriais rotineiras, por exemplo, o espectômetro de massa, outros, práticas, como os feixes de elétrons que produzem os raios-X utilizados nas radiografias, no tratamento do câncer, e na esterilização de materiais[2, 3].

O mais comum uso de feixes de elétrons é certamente o aparelho de televisão. Aqui o feixe é usado para gerar luz, através de fosforescentes intermediárias de vários tipos. O projeto do focalizador óptico-eletrônico e dos sistemas defletores para os tubos de televisão é, agora, um campo altamente especializado. Tais tubos são usados nos osciloscópios de raio-catódico utilizados em instrumentação rotineira e pesquisa básica. Tais aparelhos têm contribuído de maneira significativa para o desenvolvimento da moderna tecnologia eletrônica.

Satélites artificiais têm sido impulsionados por motores de íons que ejetam um feixe de íons pesados e também, um número equivalente de elétrons para preservar a neutralidade de carga. Também os raios cósmicos podem constituir um feixe. É interessante notar que algumas das propriedades de feixes relativísticos de alta corrente foram primeiramente obtidas no artigo de Alfvén [4] de 1939 descrevendo fluxos de raios cósmicos.

No campo da física de plasmas, interações entre feixe-plasma e feixe-feixe tem sido estudadas sob uma variedade de condições na tentativa de compreender melhor as propriedades de tais interações. Nesta área de estudo o tema dos feixes de elétrons une-se com o que é convencionalmente conhecida por física de plasmas, onde ambos, feixes e plasmas estão envolvidos. Além disso, as técnicas para o tratamento com ondas e instabilidades em cada área, são muito similares. Este tipo de teoria tem relevância para os fenômenos astrofísicos tais como as explosões solares.

1.1.3 Linha Cronológica

Modelos teóricos e técnicas desenvolvidas na descrição de plasmas não-neutros são estendidas e aplicadas para descrever a dinâmica não-linear e os processos coletivos de feixes intensos de partículas carregadas. O início da pesquisa nesses dois sub-campos da física procederam de maneira independente, possuindo interessantes similaridades e diferenças. Ambos campos usam os termos plasmas ou plasmas não-neutro do léxico da física moderna. O termo plasma foi introduzido por Tonks e Langmuir [5] em 1929 para descrever oscilações coletivas de elétrons em gases ionizados.

O início da pesquisa em plasmas não-neutros de um componente e em feixes de partículas carregadas conduziram a um maior desenvolvimento dos fundamentos teóricos da moderna física de plasmas, somente a partir dos anos de 1960. Entretanto, avanços no conhecimento básico de tais fenômenos apareceram nos excelentes trabalhos paralelos de Vlasov [6], Landau [7] e Bogoliubov [8] durante os anos de 1940, estudando interações coletivas em sistemas de partículas carregadas. Para o caso de plasmas não-neutros de um componente, os primórdios da pesquisa caracterizou-se pelo uso e controle das ondas em feixes de elétrons não-neutros nos dispositivos geradores de microondas (tais como Klystrons e Magnetrons) e nos diodos de tubo a vácuo. Para o caso de feixes de partículas carregadas o início da pesquisa caracterizou-se por feixes de corrente e densidades de cargas baixas, processos coletivos relativamente fracos, sendo os modelos de partícula única mais adequados para descrever a dinâmica do feixe.

Na verdade, os artigos clássicos de Child [9], Langmuir [10], Brillouin [11], Pierce [12], Kyhl [13], Buneman [14] representam os primeiros esforços para investigar teoricamente e experimentalmente as propriedades de equilíbrio e estabilidade de fluxos de elétrons não-neutros em diodos planares e em geometrias com campos elétricos e magnéticos transversais. Por outro lado, estimulado pelos trabalhos clássicos de Courant e colaboradores [15], Courant e Snyder [16] e Christofilos [17], campos focalizadores periódicos de gradiente alternado tem sido usados para o transporte de feixes de partículas carregadas [2, 3, 18–27], desde o início de 1950, juntamente, com anéis de armazenamento e aceleradores circulares tais como o síncrotron [26, 28] utilizados em física nuclear e de altas energias, e redes focalizadoras quadrupolares usadas em aceleradores lineares com aplicações em fusão de íons pesados [29]. Vale à pena resaltar, que os grandes aceleradores foram construídos em laboratórios localizados em várias regiões de nosso planeta. Na América do Norte destacamos os Estados Unidos com os seguintes laboratórios : o FERMILAB localizado em Bátavia e o SLAC em Stanford na Califórnia. Na Europa temos : o CERN na fronteira

franco-suíça, com sede em Genebra, o DESY em Hamburgo na Alemanha. Na Ásia o KEK no Japão.

Agora, seguindo uma linha cronológica introduziremos as propriedades de um feixe e suas evoluções históricas. O primeiro conceito introduzido em 1959 foi a função distribuição de equilíbrio para feixes contínuos sujeitos a campos focalizadores incluindo efeitos de corrente e forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe. Esse trabalho original conduziu a investigações teóricas e experimentais de propriedades importantes de um feixe focalizado resultando na introdução do conceito de emitância *rms*; derivação das equações do envelope; análise da estabilidade do feixe; estudo do fenômeno do crescimento da emitância; exploração da formação de anéis e sua respectiva evolução, e exame das propriedades não-lineares do equilíbrio e envelope do feixe. Todos esses tópicos são descritos nos próximos parágrafos.

Em 1959, Kapchinskij-Vladimirskij [30] construíram a primeira função distribuição de equilíbrio para feixes contínuos em canais focalizadores periódicos incluindo os efeitos das forças eletromagnetoestáticas e corrente do próprio feixe. O trabalho pioneiro levou a investigações teóricas e experimentais de vários aspectos críticos de feixes intensos focalizados dentro de canais de transporte. Em 1970 Davidson e Krall [31], levando em consideração a rotação do feixe, encontraram um equilíbrio cinético para um feixe de partículas carregadas girando e propagando-se paralelo a um campo focalizador solenoidal uniforme. Já em 1997; Chen, Pakter e Davidson [32], mostraram que existe um equilíbrio cinético de rotor-rígido para um feixe de partículas carregadas propagando-se através de um campo focalizador solenoidal periódico que possui as outras distribuições como casos limites. O feixe é assumido ter densidade uniforme na direção radial, e uma velocidade de fluxo angular é adicionada a velocidade constante axial. Recentemente em 2004, Moraes, Pakter e Rizzato [33] derivaram uma distribuição de equilíbrio cinética para um feixe contínuo intenso propagando-se fora do eixo de simetria, através de um campo focalizador solenoidal periódico. Nos equilíbrios cinéticos assume-se, sempre, que o feixe é perfeitamente alinhado com o eixo de simetria do campo focalizador. Esse pressuposto é geralmente usado na análise de feixes porque o eixo é um ponto de equilíbrio para a centróide do feixe, sendo o equilíbrio estável se a aproximação de um feixe suave é utilizada [34].

Nos anos de 1970, Lapostolle [35] e Sacherer [36] introduziram o conceito de emitância

quadrática média (*rms*) definida por :

$$\epsilon_x^2 = \left[16 \langle x'^2 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2 \right], \quad (1.1a)$$

$$\epsilon_y^2 = \left[16 \langle y'^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle yy' \rangle^2 \right]. \quad (1.1b)$$

nas direções- x e y respectivamente, onde $\langle \rangle$ denota a média estatística sobre o espaço de fase do feixe.

A emitância está intimamente relacionada com as projeções do volume nos planos do espaço de fases ocupado pelas partículas que constituem o feixe. O feixe possui dois planos axialmente simétricos. Considerando um feixe simétrico sobre os planos (x, z) e (y, z) , podemos definir a emitância ϵ_x no plano- x , equivalente a $1/\pi$ da área do espaço de fases (x, x') , ocupada pelos pontos que representam as partículas do feixe num dado valor de z . Observe que $(')$ representa $(\frac{d}{dz})$. É claro, que essa definição é incompleta; na prática a densidade de pontos é não-uniforme e decresce gradualmente em direção às extremidades. Uma descrição mais rigorosa do feixe, requer não apenas a área ocupada no espaço de fases, mas também o formato da distribuição. A emitância, ainda, possui uma importante propriedade que pode ser deduzida do Teorema de Liouville. Se não há acoplamento no movimento entre as direções x e y , demonstra-se que a área de um determinado conjunto de pontos no espaço de fases (x, x') , e conseqüentemente a emitância, são quantidades invariantes [37,38]. É interessante observar que existe uma analogia física e formal entre a emitância e a entropia; sendo ambas medidas da desordem do sistema. Essa conexão começou a ser explorada por Lawson, Lapostolle e Gluckstern em 1973 [39]. Mais recentemente, a conexão entre aumento da emitância e aumento da entropia têm sido explorado por uma gama de autores [40–42].

Baseados no trabalho de 1959 de Kapchinskij-Vladimirskij [30], Lapostolle [35] e Sacherer [36] deduzem, também nos anos de 1970, a famosa equação do envelope do feixe *rms*. Tal equação é uma equação diferencial ordinária que governa a evolução do raio *rms* do feixe que, geralmente, obedece uma função distribuição-*KV* [18,30,43]. Na presença de forças lineares, as equações do envelope-*(KV)* somente são válidas para distribuições de partículas gerais quando as quantidades como o raio e a emitância, envolvidas na equação são representadas por médias *rms* [35,36].

Apartir de 1983 surgem na literatura científica, artigos analisando as propriedades de estabilidade linear do equilíbrio de Kapchinskij-Vladimirskij. Os trabalhos mais relevantes são de Hofmann e colaboradores [44], explorando a questão da estabilidade de um feixe

propagando-se, submetido a flutuações das forças do próprio feixe originadas de desvios da distribuição original. As propriedades da estabilidade possibilitaram a identificação de regiões estáveis no espaço de parâmetros. Outro estudo relevante nesta questão é o artigo de Struckmeier e Reiser [45] que explora o comportamento de feixes intensos de partículas carregadas descasados em canais de transporte periódicos do tipo quadrupolar e solenoidal. Para um feixe KV , casamento perfeito implica em que o raio médio do feixe mantenha-se constante e o envelope seja uma função periódica com o mesmo período da força focalizadora externa. Para feixes reais, tal casamento só é possível numa certa aproximação, pois possuem comprimento finito e a intensidade, geradas pelas forças não-lineares do próprio feixe, varia ao longo do seu comprimento. Neste caso, o raio rms constante só é possível na parte central mas, não na parte frontal e traseira do feixe, por isso, uma compreensão do comportamento do feixe descasado é de grande importância prática.

Mais recentemente em 1998, Hofmann [46] mostra a estabilidade de feixes anisotrópicos considerando os efeitos das forças eletromagnetoestáticas. Os feixes não-equiparticionais (feixes equiparticionais caracterizam-se pela equivalência da energia média de oscilação entre todos os graus de liberdade) com força eletromagnetoestática fraca são estáveis. No caso forte, os autocampos jogam uma regra similar aos desvios das forças focalizadoras externas, no acoplamento das ressonâncias que conduzem a uma troca de energia entre os diferentes graus de liberdade, diferenciando, significativamente dos feixes onde os graus de liberdade são tratados simetricamente (feixes isotrópicos). Mas em 2000, Kishek e colaboradores [47], examinando a possibilidade de equipartição e transferência de energia via interações coletivas para feixes inicialmente fora do equilíbrio, concluíram que as previsões da teoria da estabilidade da distribuição- (KV) de Hofmann não necessariamente serão aplicáveis para feixes fora do equilíbrio. Kishek sugere que a equipartição é um estado natural dos feixes reais, sugestão contrariada pelos trabalhos recentes de Hofmann e colaboradores [48–50].

No ano de 1985, o fenômeno do crescimento da emitância começa a ser estudado de maneira sistemática. As origens do crescimento da emitância podem ser agrupados em duas importantes categorias. A primeira contém mecanismos que causam mudanças abruptas na distribuição de partículas no espaço de fases resultando num aumento da área do espaço de fases ocupado pelo feixe. O mais comum exemplo de tais processos incluem erros de direção e gradientes durante a propagação do feixe. A segunda categoria contém mecanismos que continuamente, afetam a amplitude de oscilação das partículas, um exemplo clássico é o espalhamento entre as partículas [51].

Wangler e colaboradores [52], em 1985 investigaram a relação entre a energia do campo produzido pelas partículas do feixe e a emitância *rms* para feixes contínuos em canais focalizadores contínuos. O crescimento da emitância supostamente está associada com a conversão da energia do autocampo para a energia cinética média da partícula. Mas alterações na emitância *rms* ainda podem estar relacionadas com outros dois fatores : o tamanho *rms* do feixe e a perveância (quantidade adimensional relacionada com os autocompos do feixe, definida por : $K_b \equiv \frac{2N_b e_b}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2}$, onde $N_b = \int dx dy n_b(\mathbf{x}, t)$ é a densidade do feixe por comprimento, $n_b(\mathbf{x}, t) = \int dp^3 f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ é a densidade do feixe, e_b e m_b são a carga e a massa de repouso, respectivamente, do feixe de partículas, c é a velocidade da luz no vácuo, $\beta_b = V_b/c$ onde V_b é a velocidade axial média do feixe e γ_b é o fator de massa relativístico). Em 1987, Guy e colaboradores [53] demonstram que a densidade da distribuição no espaço de fases quadridimensional pode influenciar o crescimento da emitância. Considerando uma distribuição uniforme no espaço e descorrelacionada na distribuição de velocidades, o aumento da emitância causado pelas estruturas ressonantes [44] pode ser bastante amenizado dependendo do tipo de distribuição adotado para a velocidade das partículas. Logo em 1988, as predições de Wangler e colaboradores [52] são confirmadas experimentalmente e numericamente por Haber e colaboradores [54, 55].

Em 1991, Reiser [56] desenvolve um modelo teórico que estende e generaliza os trabalhos anteriores [52–55] das distribuições não-uniformes para incluir outros efeitos de feixes não-estacionários tais como raios *rms* descasados [57] e feixes com a centróide deslocada. Nesse novo modelo o raio *rms* não é mais assumido constante ao longo da propagação, e existe uma quantidade extra de energia do feixe não-estacionário representando energia livre que pode produzir aquecimento térmico (termalização) [58] e portanto crescimento da emitância. A energia livre disponível é, entretanto, não completamente termalizada. Parte da energia seria convertida para energia potencial devido à mudanças no raio do feixe e no perfil da densidade. Todo o aumento da emitância possível teoricamente ocorrerá dependendo da escala de tempo e dos detalhes dinâmicos dos efeitos não-lineares.

No ano de 1998, as investigações sobre o crescimento da emitância adquirem um novo formato. Bruce Carlsten [59] analisa o mecanismo de crescimento no regime do domínio da emitância para um feixe contínuo em canais com aceleração contínua e focalização por campos solenoidais. O trabalho de Carlsten considera a aceleração do feixe e a subsequente evolução da densidade não-uniforme na taxa de crescimento da emitância. Para isso ele propõe uma emitância geométrica (Eq.1 do artigo [59]) e deriva uma equação da força radial para o feixe de elétrons. O crescimento da emitância resulta da interação entre o comprimento de onda de betatron e a densidade não-uniforme. Variações na densidade

levam a diferenças nas fases de betatron ao longo do feixe. Diferenças entre as fases de betatron levam a flutuações periódicas na densidade que adicionam não-uniformidades no perfil da densidade. No mesmo ano, Carlsten [60] considera variações na energia cinética e na velocidade axial das partículas no feixe. Essas variações conduzem incrementos na emitância geométrica do feixe, mas não conduzem incrementos associados a entropia do feixe. O mais importante mecanismo resulta de perdas e ganhos na energia cinética da partícula, bem como compressões e expansões do feixe causando aumento e diminuição na sua energia potencial. A emitância geométrica é de natureza radial já que o feixe é contínuo.

Em 2002, Franchetti e Hofmann [61] começam a estudar o crescimento da emitância associado à formação de um anel de partículas em feixes anisotrópicos e mostram que o crescimento, causado pelo descasamento do feixe, é altamente anisotrópico. Também, Qiang e colaboradores [62] no ano de 2003 investigam simulações 3D para observar o crescimento da emitância em tais feixes. Em ambos os artigos, o descasamento gera oscilações no envelope do feixe e excitações dos seus respectivos auto-modos. Esses modos do envelope possuem energia livre adicional comparada com a distribuição estacionária. Partículas individuais com uma certa frequência de oscilação podem ressonar com os modos do envelope e atingir grandes amplitudes, formando o anel. Estas partículas do anel extraem energia dos modos do envelope e convertem a energia livre do descasamento em energia térmica, causando crescimento da emitância do feixe.

O estudo da formação de anéis nos feixes e sua conseqüente evolução dinâmica começa, 10 anos antes, no trabalho pioneiro de Jamenson [63] descrevendo interações coletivas das partículas individuais com o caroço do feixe, sendo as mudanças na densidade do caroço ou o movimento relativo entre a partícula e o caroço os maiores responsáveis pela formação do anel.

Em 1994, Gluckstern [64, 65] propõe um modelo analítico para a formação de anel. Considera um feixe circular com uma distribuição- KV para o caroço e explora o movimento dos íons individuais passando através dele. Já que a transferência de energia entre os íons e o caroço pode acontecer somente se o caroço tem um comportamento dependente do tempo, considera-se um mecanismo de oscilações do caroço tipo simétrico. Estuda a interação ressonante entre as oscilações simétricas do caroço e a oscilação dos íons, chegando a conclusão que a amplitude de oscilação dos íons é a maior responsável pela formação do anel. Já em 1997, Okamoto e Ikegami [66] estudam a formação de anel em feixes cilíndricos propagando-se num canal focalizador uniforme. Desenvolvem uma

simulação de multi-partículas dedicada a explorar as oscilações do caroço causadas por perturbações no tamanho inicial do feixe. Consideram também desvios da distribuição inicial do feixe. Ambos fatores seriam responsáveis pela formação do anel de partículas.

Infelizmente, nenhum desses modelos propostos foram validados inteiramente, pois ambos apresentam ruído numérico nas suas simulações, tornando a verificação direta da formação de anel extremamente difícil. Para contornar tal obstáculo, Chen e colaboradores, a partir de 1994 constroem um modelo de partícula teste para investigar a dinâmica de feixes contínuos no domínio de K_b propagando-se através do campo focalizador solenoidal [67] e magnético quadrupolar de gradiente alternado [68, 69]. Mostram que as não-linearidades dos autocampos induzem movimento caótico para as partículas e formação de anel para feixes com seção transversal circular ou elíptica, casados com o canal focalizador mas possuindo perfil transversal de densidade não-uniforme na direção de propagação.

Em 1998, Gluckstern e colaboradores [70] retornam à literatura considerando feixes descasados longitudinal e, ou transversalmente para explorar a formação de anéis em feixes de pacotes tridimensionais com simetria azimutal. Constroem, analítica e numericamente, novas classes de distribuições estacionárias no espaço de fases hexadimensional para feixes de pacotes em formato esferoidal. Consideram o fenômeno de redistribuição causado pelo processo de equi-partição como uma das causas da formação do anel. Com acoplamento entre o plano transversal e a parte longitudinal, os feixes descasados também, apresentam formação de anel, sendo o longitudinal o maior responsável pelo crescimento do transversal. Logo em 1999, Gluckstern e colaboradores [71] consideram distribuições não-estacionárias e estudam os anéis formados comparados com os obtidos usando distribuições estacionárias. Observação, a maioria dos estudos dos mecanismos responsáveis pela formação do anel considera apenas feixes contínuos, tais trabalhos de Gluckstern com feixes de pacotes são pioneiros nesses fenômenos.

Dentro de uma visão prática podemos mencionar o artigo de Pakter e Chen [72] mostrando formação de anel no domínio de K_b para feixes de elétrons com o envelope *rms* descasado em amplificadores de alta potência, tipo Klystron. Num artigo de 2000, Chen e Pakter [73] investigam a formação e o controle dos anéis em feixe de íons ou elétrons no domínio de K_b para o desenvolvimento de fontes de microondas de alta potência (HPM) e aceleradores lineares (LINAC) de íons e elétrons. A relevância desse trabalho é a descoberta de uma nova classe de equilíbrio para feixes elípticos tipo saca-rolha propagando-se por campos focalizadores solenoidal uniforme ou periódico e, ou campo focalizador qua-

drupolar magnético de gradiente alternado. Ainda, deduzem equações do envelope do feixe generalizadas para tal equilíbrio, e mostram casos limites para o equilíbrio elíptico tipo fluido frio.

No ano de 1994, Chen e Davidson [43, 74] examinam as propriedades não-lineares do equilíbrio- (KV) e da equação do envelope para um feixe intenso de partículas carregadas propagando-se através de um campo focalizador solenoidal periódico, incluindo os efeitos dos autocampos associados com a corrente e as força eletromagnetostática do feixe. Mostram que as oscilações do envelope fora do equilíbrio exibem ressonâncias não-lineares e comportamento caótico, tais efeitos amplificam as oscilações descasadas do envelope levando a formação de anel no feixe. Posteriormente em 1996, Qian e Davidson [75], investigam a evolução não-linear de um feixe elíptico KV com densidade uniforme, propagando-se através de um campo focalizador quadrupolar magnético periódico. O envelope exhibe instabilidade não-linear e comportamento caótico para oscilações de grande amplitude.

1.2 O Problema

Dada à alta intensidade do feixe, a densidade de carga e a força eletrostática entre as partículas são extremamente grandes, sendo necessária a utilização de campos eletromagnéticos intensos para confinar o feixe. Devido à grande amplitude das forças envolvidas no sistema e à periodicidade no forçamento imposto pelo campo focalizador, efeitos não-lineares passam a ser determinantes na dinâmica das partículas. Isto leva ao aparecimento de complicados fenômenos à medida que o feixe propaga-se. Um importante aspecto da propagação de feixes através de campos focalizantes é a existência de soluções de equilíbrio auto-consistentes, ou seja que levem em conta as forças internas de interação entre as partículas, e sua estabilidade. Em particular, para a configuração de focalização mais simples, usando apenas um campo magnético uniforme, já é bem conhecida [1, 76] a existência de uma grande variedade de soluções de equilíbrio com simetria azimutal.

Muitos estudos tem sido feitos desde 1980 em estabilidade linear de feixes focalizados uniformemente ou periodicamente [44, 45, 77–79]. Eles detectaram a ocorrência de diferentes modos de instabilidade que comprometem o transporte do feixe para certos regimes de parâmetros. De particular relevância para focalização solenoidal com simetria azimutal é o modo simétrico que induz incrementos na amplitude de oscilação do envelope do feixe em torno do valor casado(do equilíbrio); e o tipo anti-simétrico que induz oscilações elípticas

do feixe quebrando a simetria [45, 80]. Já a análise da estabilidade não-linear, também está sendo realizada, mas restringe-se a feixes com simetria azimutal [64, 74, 81–83]. Em particular, mostra-se que oscilações do modo simétrico de amplitude finita pode induzir caos na dinâmica do envelope e formação de anel no feixe.

Considerando campo focalizador uniforme, Gluckstern [64, 81] em 1994 mostrou que um feixe isotrópico submetido a consideráveis perturbações do modo simétrico induzidos pelo descasamento do raio de equilíbrio forma anéis para certos valores do *tune depression* ($\Gamma = \sqrt{\frac{\eta^2+4}{2}} - \frac{\eta}{2}$, onde $\eta = \frac{K_b}{\sigma_0 \epsilon}$ sendo K_b a perveância do feixe, ϵ a emitância do feixe e σ_0 o parâmetro associado ao campo focalizador). Já em 2001, Hofmann [48, 61] considera também um campo focalizador uniforme e introduz um parâmetro de anisotropia ($T = \frac{\nu_{x0}^2 a^2}{\nu_{y0}^2 b^2}$), onde a, b são as dimensões transversais do feixe e ν_{x0}, ν_{y0} são os *betatron tunes*, relacionando a energia de oscilação entre os eixos x, y . Tomando $a = b$ e $\frac{\nu_{x0}}{\nu_{y0}} \neq 1$, Hofmann descobre regiões no espaço de parâmetros ($\Gamma \ X \ \nu$) que apresentam anisotropia entre as direções x e y da ϵ causada pelas oscilações instáveis do modo simétrico e anti-simétrico. Mais tarde em 2004, Pakter e colaboradores [80] analisam perturbações não-axissimétricas sobre um feixe inicialmente circular submetido a um campo focalizador solenoidal e descobrem uma região do espaço de parâmetros ($\Gamma \ X \ \nu$), sendo o descasamento do feixe entre a oscilação do raio de equilíbrio e a oscilação do campo focalizador, onde as instabilidades do modo anti-simétrico estão presentes. Vale ressaltar que Ikegami [84, 85], em 1999, estudou baseado no modelo *Particle-Core* e nas simulações *Particle-in-Cell* o crescimento da emitância ϵ e a formação de anéis causados pela superposição dos modos simétricos e anti-simétricos.

O propósito dessa dissertação é analisar a estabilidade não-linear tomando em consideração efeitos não-axissimétricos. Em particular, investigarei o acoplamento não-linear entre o modo tipo simétrico e o modo tipo antissimétrico baseado nas equações do envelope [86]. Considerando um feixe descasado do seu raio de equilíbrio, mostrarei que as oscilações simétricas levam a oscilações instáveis do tipo anti-simétrica para um feixe inicialmente quase-circular. Neste caso, o feixe pode começar a desenvolver um formato elíptico com um conseqüente incremento no tamanho ao longo de uma direção preferencial, numa escala de tempo anterior ao crescimento da emitância e à formação de anéis. Um modelo simples será construído para clarificar o mecanismo básico que gera tal instabilidade e será testado numericamente em comparação com os resultados obtidos da integração numérica direta das equações do envelope. Simulações auto-consistentes serão ainda realizadas para verificar os achados. Espera-se encontrar tal acoplamento não-linear em dispositivos tipo Klystrons [72].

A dissertação é organizada da seguinte maneira : No Capítulo 2 introduzirei o tratamento teórico padrão dos fenômenos físicos presentes na dinâmica não-linear e nos processos coletivos, envolvidos num feixe intenso de partículas carregadas; no Capítulo 3 a descrição do movimento de partícula única, sujeita a campo focalizador solenoidal magnético e autocampos, elétricos e magnéticos, será analisada, construirei a função distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij(KV) para um feixe de partículas carregadas intenso propagando-se através de um campo magnético uniforme, e por fim, obterei a equação diferencial que governa a evolução do envelope do feixe; no Capítulo 4 resolverei o problema proposto para essa dissertação; no Capítulo 5 introduzirei o que são as simulações numéricas auto-consistentes e realizarei alguns tipos de simulações para comparar os resultados anteriormente obtidos e, finalmente, no Capítulo 6 expressarei a importância de tais estudos realizados, concluído o trabalho.

2 *A Física de um Feixe de Partículas Carregadas*

Com a caracterização histórica da física de um feixe de partículas carregadas, juntamente com a formalização do problema da estabilidade não-linear de um feixe intenso descasado, julga-se necessária a introdução do tratamento teórico padrão dos fenômenos físicos presentes na dinâmica não-linear e nos processos coletivos envolvidos num feixe intenso de partículas carregadas.

A ênfase do tratamento teórico são os processos coletivos não-lineares de um feixe de partículas carregadas. As propriedades de equilíbrio, estabilidade e transporte são analisadas para tempos de escala curtos em comparação com o tempo das colisões binárias [87]. Dois tipos de descrição teórica de sistemas de partículas carregadas, sem colisão são usuais em termos práticos. Uma primeira descrição tipo fluido onde o feixe de partículas é descrito por quantidades macroscópicas locais, tais como a densidade e a velocidade, obtidas a partir de médias sobre o espaço de momenta da função de distribuição cinética. As equações que relacionam as grandezas macroscópicas entre si são derivadas tomando-se momentos de ordens sucessivas da equação de evolução para a função distribuição. No caso de um feixe, tratando-o como um plasma não-neutro sem colisões, essa evolução é ditada pela equação de Vlasov juntamente com as equações de Maxwell para a determinação dos campos eletromagnéticos auto-consistentes. Para se obter uma descrição tipo fluido fechada, é necessário truncar a hierarquia de momentos utilizando algum tipo de suposição [18, 88, 89]. E a segunda descrição cinética baseada nas equações de Vlasov-Maxwell [1, 6], tal modelo cinético descreve a evolução auto-consistente da função distribuição do feixe $f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ no espaço de fase hexadimensional (\mathbf{x}, \mathbf{p}) bem como as partículas do feixe interagindo com os campos focalizadores aplicados e autocampos, médios, elétricos $\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t)$ e magnéticos $\mathbf{B}^s(\mathbf{x}, t)$. Os campos focalizadores, $\mathbf{E}_{\text{foc}}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}_{\text{foc}}(\mathbf{x}, t)$, são produzidos por fontes de cargas e correntes externas, e os autocampos, $\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}^s(\mathbf{x}, t)$, são produzidos auto-consistentemente pela densidade de carga do feixe $n_b(\mathbf{x}, t) = e_b \int dp^3 f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, e densidade de corrente $\mathbf{J}_b(\mathbf{x}, t) = e_b \int dp^3 \mathbf{v} f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, res-

pectivamente.

A determinação de soluções de equilíbrio auto-consistentes para as equações de Vlasov-Maxwell depende da existência de constantes de movimento de partícula única [1, 76], o que requer a existência de simetrias especiais que simplifiquem a dinâmica da partícula. Assim investigaremos as propriedades do movimento de partícula única sujeita a campos focalizadores, através do formalismo hamiltoniano.

2.1 O Modelo de Vlasov-Maxwell

Consideramos um sistema de partículas carregadas não-neutro em que cada partícula j tem carga e_j e massa de repouso m_j . Num tempo de escala curto em comparação com o tempo de colisão binária, as j -componentes da função distribuição de partícula única, $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ evoluem de acordo com a equação de Vlasov:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + e_j \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (2.1)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, a velocidade \mathbf{v} e o momentum \mathbf{p} estão relacionados por:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_j} = \frac{\frac{\mathbf{p}}{m_j}}{\left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_j^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.2)$$

quando a dinâmica da partícula é relativística. Acima, $\gamma \equiv \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_j^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ é o fator de massa relativístico. Como \mathbf{x} e \mathbf{p} são variáveis independentes, e $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ a Eq. (2.1) pode ser expressa na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_j) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[e_j \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) f_j \right] = 0. \quad (2.3)$$

A Eq. (2.3) tem a forma da equação da continuidade no espaço de fase hexadimensional (\mathbf{x}, \mathbf{p}) . Os campos elétricos e magnéticos nas Eq. (2.1) ou Eq. (2.3) são determinados auto-consistentemente através das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_j e_j \int dp^3 \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (2.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_j e_j \int dp^3 f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + 4\pi \rho_e, \quad (2.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4d)$$

As Eq. (2.4b) e Eq. (2.4c) permitem a possibilidade de fontes de carga $\rho_e(\mathbf{x}, t)$ e corrente $\mathbf{J}_e(\mathbf{x}, t)$ externas. Os campos elétricos $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e magnéticos $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ podem ser expressos por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{\text{foc}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t), \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_{\text{foc}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}^s(\mathbf{x}, t), \quad (2.5b)$$

onde $\mathbf{E}_{\text{foc}}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}_{\text{foc}}(\mathbf{x}, t)$ são campos de focalização aplicados externamente, $\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}^s(\mathbf{x}, t)$ são os autocampos produzidos pelo próprio feixe de partículas carregadas.

As Eq. (2.1) e Eq. (2.3) representam o teorema de Liouville para a evolução de $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ no espaço de fase hexadimensional (\mathbf{x}, \mathbf{p}) , a dedução completa da equação de Vlasov via teorema de Liouville está presente no Anexo A, desta dissertação.

Agora, considerando um feixe intenso de partículas não-neutro consistindo de cargas únicas ($j = b$), a equação de Vlasov Eq. (2.3) pode ser expressa por :

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + \left[\mathbf{F}_{\text{foc}} + e_j \left(\mathbf{E}^s + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^s}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.6)$$

Os autocampos, $\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}^s(\mathbf{x}, t)$, são determinados pelas suas respectivas equações de Maxwell. Assumindo campos focalizadores independentes do tempo, \mathbf{F}_{foc} é definido por:

$$\mathbf{F}_{\text{foc}} = e_b \left[\mathbf{E}_{\text{foc}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{foc}}(\mathbf{x}) \right]. \quad (2.7)$$

onde a forma funcional de $\mathbf{E}_{\text{foc}}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}_{\text{foc}}(\mathbf{x})$ dependem do tipo específico de campo focalizador aplicado.

A forma funcional dos autocampos e campos focalizadores serão soluções das equações de Maxwell, assunto da nossa próxima seção.

2.2 Configurações dos Campos Elétricos e Magnéticos

Considere um feixe intenso de partículas propagando-se na direção z com velocidade axial média $V_b = \beta_b c = \text{const}$, e energia cinética característica $(\gamma_b - 1)m_b c^2$ no referencial do laboratório, e_b e m_b são a carga e a massa de repouso, respectivamente, das partículas, c é a velocidade da luz no vácuo, $\gamma_b = \left(1 - \frac{V_b^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ é o fator de massa relativístico, e as paredes do cilindro condutor perfeito estão localizadas no raio $R = r_w$, onde $R = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ é a distância radial do eixo do feixe, $(x, y) = (0, 0)$.

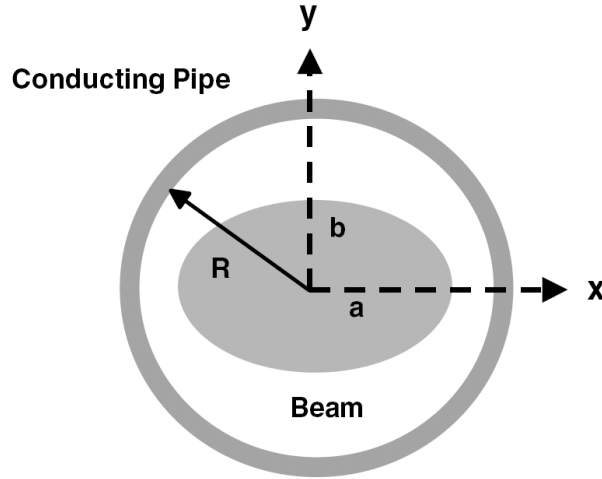


Figura 1: Feixe elíptico propagando-se dentro de um tubo cilíndrico condutor de raio $R = r_w$. (adaptado de [90])

O feixe é fino, ou seja :

$$a, b \ll S \quad (2.8)$$

onde S é a distância de aplicação do campo focalizador, a e b são as dimensões características x e y do feixe. O feixe é assumido ser contínuo na direção z com dimensão axial característica $2c \gg S$. A inequ沿海dade na Eq. (2.8) permitirá expandir em série de Taylor os campos focalizadores sobre o eixo do feixe $(x, y) = (0, 0)$. Consistente com (2.8), assumindo que o feixe tem momentum axial alto $p_b = \gamma_b m_b c$, usaremos a aproximação paraxial [1, 3, 20]:

$$p_x^2, p_y^2, (p_z - p_b)^2 \ll p_b^2 \quad (2.9)$$

$$\frac{2\nu_B}{\gamma_b^3 \beta_b^2} = \frac{2N_b e_b}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2} \equiv K_b \ll 1 \quad (2.10)$$

onde $\nu_B = \frac{N_b e_b^2}{m_b c^2}$ é o parâmetro de Budker [91], $N_b = \int dx dy n_b(\mathbf{x}, t)$ é a densidade do feixe por comprimento e $n_b(\mathbf{x}, t) = \int dp^3 f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ é a densidade do feixe. Da Eq. (2.9), $v_x^2, v_y^2, (v_z - V_b)^2 \ll V_b^2$, e o movimento da partícula no referencial do feixe é não-relativístico. A quantidade adimensional K_b definida na Eq. (2.10) é conhecida como perveância do autocampo [1].

Com os pressupostos estabelecidos acima, trataremos os campos focalizadores e autocampos, via equações de Maxwell, através da aproximação eletrostática e magnetoestática.

2.2.1 Configuração dos Campos Focalizadores

Assumindo condições de estado estacionárias ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) para os campos focalizadores e fontes de corrente externas, podemos determinar os campos no vácuo, via equações de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{B}_{foc} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B}_{foc} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E}_{foc} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{E}_{foc} = 0$. Para um feixe fino satisfazendo a desigualdade. (2.8), expandimos em série de Taylor os campos focalizadores para pequenos valores de x e y ($|x|, |y| \ll S$) próximos ao eixo do feixe $(x, y) = (0, 0)$, e posteriormente utilizamos as equações de Maxwell para encontrar formas funcionais aproximadas dos campos focalizadores.

Para o campo focalizador solenoidal magnético periódico $\mathbf{B}_{sol}(\mathbf{x}) = B_x^{sol} \hat{e}_x + B_y^{sol} \hat{e}_y + B_z^{sol} \hat{e}_z$, fazemos uso de $\nabla \times \mathbf{B}_{sol} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B}_{sol} = 0$ e expandimos em série de Taylor $\mathbf{B}_{sol}(\mathbf{x})$ próximo ao eixo do feixe, considerando um feixe fino com $a, b \ll S$, o que resulta até primeira ordem :

$$\mathbf{B}_{sol}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} B'_z(z) (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y) + B_z(z) \hat{e}_z \quad (2.11)$$

onde $B'_z(z) \equiv \left(\frac{\partial B_z^{sol}}{\partial z} \right)_{(x,y)=(0,0)}$. Aqui, $B_z(z) = B_z(z + S)$ é a componente axial do campo magnético solenoidal em $(x, y) = (0, 0)$. O potencial vetorial correspondente, $\mathbf{A}_{sol}(\mathbf{x}) = A_x^{sol}(\mathbf{x}) \hat{e}_x + A_y^{sol}(\mathbf{x}) \hat{e}_y$ para o qual, $\mathbf{B}_{sol}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}_{sol}(\mathbf{x})$ é:

$$\mathbf{A}_{sol}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} B_z(z) (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y) \quad (2.12)$$

2.2.2 Campos Gerados pelo Próprio Feixe

Os autocampos magnéticos e elétricos, gerados auto-consistentemente pela densidade de carga e, corrente do feixe podem ser representados por: $\mathbf{E}^s = -\nabla \phi^s - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^s}{\partial t}$ e $\mathbf{B}^s = \nabla \times \mathbf{A}^s$. A equação de Maxwell para, $\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t)$, é :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^s = 4\pi e_b \int dp^3 f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (2.13)$$

sabendo que $n_b = \int dp^3 f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ e usando o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}^s = 0$ nas Eqs. (2.14), teremos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^s = 4\pi e_b n_b, \quad (2.14a)$$

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi^s - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^s}{\partial t} \right) = 4\pi e_b n_b, \quad (2.14b)$$

$$-\nabla^2 \phi^s - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}^s = 4\pi e_b n_b, \quad (2.14c)$$

$$\nabla^2 \phi^s = -4\pi e_b n_b. \quad (2.14d)$$

onde, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

A equação de Maxwell para $\mathbf{B}^s(\mathbf{x}, t)$ é:

$$\nabla \times \mathbf{B}^s = \frac{4\pi}{c} e_b \int dp^3 \mathbf{v} f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^s \quad (2.15)$$

Conhecendo $\mathbf{B}^s = \nabla \times \mathbf{A}^s$ usando a relação abaixo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}^s = -\nabla^2 \mathbf{A}^s + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^s) \quad (2.16)$$

e aplicando o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}^s = 0$ obtemos :

$$-\nabla^2 \mathbf{A}^s = \frac{4\pi}{c} J_b + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^s \quad (2.17)$$

Aproximamos $A_x^s = A_y^s \simeq 0$, pois o feixe é contínuo na direção- z e possui, densidade de corrente J_b , praticamente, somente, na direção- z . Assim, obtemos $\mathbf{B}^s = \nabla \times (A_z^s \hat{e}_z)$ gerado pela corrente axial do feixe, $J_{bz} = e_b \int dp^3 v_z f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$. Consistente com a hipótese de muita pequena difusão na velocidade, $v_z = V_b = \beta_b c$, nós aproximamos $J_{bz}(\mathbf{x}, t) = e_b V_b n_b(\mathbf{x}, t)$, o que resulta para a componente z da equação (2.17) :

$$\nabla^2 A_z^s = -\frac{4\pi}{c} e_b V_b n_b + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi^s}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z^s}{\partial t} \right), \quad (2.18a)$$

$$\nabla^2 A_z^s = -4\pi e_b \beta_b n_b + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi^s}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z^s}{\partial t} \right), \quad (2.18b)$$

onde $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ e $n_b(\mathbf{x}, t)$ se relacionam pela Eq. (2.14d).

Fazendo uso da aproximação eletroestática e magnetostática, $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$ a Eq. (2.18b) pode ser aproximada para :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_z^s = -4\pi e_b \beta_b n_b(\mathbf{x}, t) \quad (2.19)$$

comparando com $\nabla^2 \phi^s = -4\pi e_b n_b$ obtemos :

$$\mathbf{A}_z^s(\mathbf{x}, t) = \beta_b \phi^s(\mathbf{x}, t) \quad (2.20)$$

Agora resolvendo $\mathbf{B}^s = \nabla A_z^s \times \hat{e}_z$ obtemos :

$$\mathbf{B}^s = \beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial y} \hat{e}_x - \beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial x} \hat{e}_y \quad (2.21)$$

logo :

$$B_x^s = \beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial y}, \quad (2.22a)$$

$$B_y^s = -\beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial x} \quad (2.22b)$$

Utilizando $\mathbf{E}^s = -\nabla \phi^s - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^s}{\partial t}$ resulta em :

$$E_x^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial x}, \quad (2.23a)$$

$$E_y^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial y}, \quad (2.23b)$$

$$E_z^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial z}. \quad (2.23c)$$

na aproximação eletroestática.

Especificando $n_b(\mathbf{x}, t)$, o potencial eletroestático $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ é determinado pela equação de Poisson, $\nabla^2 \phi^s = -4\pi e_b n_b$, e as componentes dos autocampos magnéticos e elétricos são calculadas pelas Eqs. (2.22), (2.23).

A solução da equação de Poisson será discutida no próximo capítulo para o caso de um perfil de densidade, $n_b(\mathbf{x}, t)$, uniforme com seção transversal elíptica; a resolução completa da equação de Poisson bidimensional, via coordenadas elípticas pode ser encontrada no Apêndice A dessa dissertação.

2.3 Formalismo Hamiltoniano

Como visto anteriormente os campos aplicados sobre o feixe e os autocampos gerados pela densidade de carga e corrente do feixe podem ser expressos por :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.24b)$$

onde

$$\phi = \phi^{foc} + \phi^s, \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{foc} + \mathbf{A}^s. \quad (2.25b)$$

Fazendo uso das Eqs. (2.7) , (2.25), a equação de Vlasov não-linear, (2.6) pode ser expressa de forma equivalente por:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + e_b \left(-\nabla \phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} \right) \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.26)$$

sendo $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ e $A_z^s(\mathbf{x}, t)$ determinados auto-consistentemente pelas Eqs. (2.14d) , (2.19), respectivamente. Introduzindo o momentum canônico $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e_b}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, o hamiltoniano de partícula única, $H = \gamma m_b c^2 + e_b \phi$, pode ser expresso por:

$$H = \left[m_b^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{1}{c} e_b \mathbf{A} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + e_b \phi \quad (2.27)$$

As equações de movimento de partícula única [92–95] :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad (2.28a)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.28b)$$

são :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{1}{\gamma m_b} \left(\mathbf{P} - \frac{e_b}{c} \mathbf{A} \right), \\ &= \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} = \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -e_b \nabla \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right), \\ &= e_b \left(-\nabla \phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} \right). \end{aligned} \quad (2.29b)$$

como esperado. Comparando as Eqs. (2.29a) e (2.29b) com os coeficientes $\frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}}$ e $\frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}}$ da Eq. (2.26), observa-se que os coeficientes da equação de Vlasov, (2.26), correspondem, as equações de movimento de partícula única, (2.29a) e (2.29b). Assim a Eq. (2.26) pode ser expressa por :

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30), então, pode ser escrita como :

$$\frac{df_b}{dt} = 0 \quad (2.31)$$

A determinação de soluções de equilíbrio auto-consistentes para a equação de Vlasov-Maxwell não-linear depende da existência de constantes de movimento de partícula única. Denotamos, as constantes de movimento por $C_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, $j = 1, 2, \dots$, onde $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ são

soluções das equações de órbita, (2.29). Aplicando a regra da cadeia, $\frac{dC_j}{dt} = 0$ pode ser expressa por :

$$\frac{dC_j}{dt} = \frac{\partial C_j}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\partial C_j}{\partial \mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial C_j}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.32)$$

quando, comparada com a Eq. (2.30), resulta que a função distribuição:

$$f_b^0 = f_b^0(C_1, C_2, \dots) \quad (2.33)$$

que depende de (\mathbf{x}, \mathbf{p}) e t , exclusivamente, através, das constantes de movimento, $C_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, $j = 1, 2, \dots$, é uma solução exata da equação de Vlasov não-linear, (2.26). Isto é :

$$\frac{d}{dt} f_b^0(C_1, C_2, \dots) = \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial f_b^0}{\partial C_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial f_b^0}{\partial C_2} + \dots = 0 \quad (2.34)$$

Para feixes intensos propagando-se através de campos focalizadores periódicos quadrupolares ou solenoidais é conveniente desenvolver uma formulação hamiltoniana alternativa [22, 76], da equação de Vlasov-Maxwell e das equações de movimento de partícula única. Transformamos as variáveis canônicas conjugadas $(x, P_x), (y, P_y)$ e (z, P_z) para $(x, P_x), (y, P_y)$ e $(t, -H)$. Em física de aceleradores [22], é praxis, denotar s a coordenada ao longo da principal direção de propagação, isto é :

$$s = z \quad (2.35)$$

Assumindo que todas as partículas estão se movendo na direção positiva de s , com $p_z = P_z - \frac{e_b}{c} A_z > 0$, e usando a Eq. (2.27) para introduzir um novo hamiltoniano $\Omega(x, P_x; y, P_y; t, -H; s)$ definido por:

$$\Omega(x, P_x; y, P_y; t, -H; s) = -P_z(x, P_x; y, P_y; t, -H; s) \quad (2.36)$$

Resolvendo a Eq. (2.27) para $\left(P_z - \frac{e_b A_z}{c}\right)^2$ e tomando a raiz quadrada positiva, obtêm-se:

$$\Omega = - \left[\left(\frac{H}{c} - \frac{e_b \phi}{c} \right)^2 - m_b^2 c^2 - \left(P_x - \frac{1}{c} e_b A_x \right)^2 - \left(P_y - \frac{1}{c} e_b A_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{e_b A_z}{c} \quad (2.37)$$

Aqui, $\phi = \phi_{foc} + \phi^s$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{foc} + A_z^s \hat{e}_z$, representa os potenciais escalares e vetoriais totais, Eq. (2.25). Em termos do novo hamiltoniano, Ω , as equações de movimento são

dadas por:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial \Omega}{\partial P_x}, \quad \frac{dP_x}{ds} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (2.38a)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \Omega}{\partial P_y}, \quad \frac{dP_y}{ds} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (2.38b)$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial \Omega}{\partial(-H)}, \quad \frac{d(-H)}{ds} = -\frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (2.38c)$$

A quantidade $\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dz}$ na Eq. (2.38c), será identificada como v_z^{-1} , onde v_z é a velocidade axial.

Tratando s como uma variável dinâmica da direção do movimento, a equação de Vlasov não-linear para a função distribuição, $f_b(x, P_x; y, P_y; t, -H; s)$, nas novas variáveis pode ser expresso por, $\frac{df_b}{ds} = 0$, ou de forma equivalente :

$$\frac{\partial f_b}{\partial s} + t' \frac{\partial f_b}{\partial t} + x' \frac{\partial f_b}{\partial x} + y' \frac{\partial f_b}{\partial y} + P_x' \frac{\partial f_b}{\partial P_x} + P_y' \frac{\partial f_b}{\partial P_y} + (-H') \frac{\partial f_b}{\partial(-H)} = 0 \quad (2.39)$$

onde, ($'$), denota, $\frac{d}{ds}$. Tratando, ϕ e \mathbf{A} , independentes do tempo, ($\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$), segue da Eq. (2.37) que Ω não depende explicitamente de t . Assim, $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$, e :

$$\frac{d(-H)}{ds} = 0 \quad (2.40)$$

resultado direto da Eq. (2.38c). Além disso, a função distribuição de equilíbrio, independente do tempo, $f_b^0(x, P_x; y, P_y; -H, s)$, satisfaz necessariamente $\frac{\partial f_b}{\partial t} = 0$ na Eq. (2.39). Tomando, $-H' = -\frac{dH}{ds} = 0$ e $\frac{\partial f_b}{\partial t} = 0$ na Eq. (2.39), teremos:

$$\frac{\partial f_b^0}{\partial s} + x' \frac{\partial f_b^0}{\partial x} + y' \frac{\partial f_b^0}{\partial y} + P_x' \frac{\partial f_b^0}{\partial P_x} + P_y' \frac{\partial f_b^0}{\partial P_y} = 0 \quad (2.41)$$

para a evolução de $f_b^0(x, P_x; y, P_y; -H, s)$. Os coeficientes x', y', P_x', P_y' da equação de Vlasov, Eq. (2.41), são determinados das Eqs. (2.38)

3 *Dedução da Função Distribuição e da Equação do Envelope*

Com o desenvolvimento da formulação hamiltoniana alternativa para feixes de partículas intensos sujeitos a campos focalizadores periódicos, quadrupolares ou solenoidais a descrição do movimento de partícula única, sujeita a campo focalizador solenoidal magnético e auto-campos, elétricos e magnéticos, poderá ser analisada. Todo o desenvolvimento considerará um campo focalizador solenoidal magnético uniforme, mas toda a lógica é válida, também, para um campo focalizador periódico solenoidal magnético. Expressaremos o hamiltoniano e as equações de movimento no referencial do laboratório e no referencial de Larmor. Posteriormente, construiremos a função distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij(KV) para um feixe de partículas carregadas intenso propagando-se através de um campo magnético solenoidal uniforme, e por fim, obteremos a equação diferencial que governa a evolução do envelope do feixe.

3.1 Equações de Movimento no Referencial do Laboratório

Consideramos um feixe de partículas carregadas intenso e contínuo propagando-se com velocidade axial média $\beta_b c \hat{e}_z$, através de um campo focalizador solenoidal magnético uniforme, expresso por:

$$\mathbf{B}_{foc}(\mathbf{x}) = B_z \hat{e}_z \quad (3.1)$$

na aproximação de um feixe fino. Utilizando, $s = z$, para a coordenada axial, o potencial vetorial para o campo magnético aplicado pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}_{foc}(x, y, s) = \frac{1}{2} B_z (-y \hat{e}_x + x \hat{e}_y) \quad (3.2)$$

sabendo que, $\mathbf{B}_{foc} = \nabla \times \mathbf{A}_{foc}$.

Na aproximação paraxial, o movimento transversal da partícula é assumido ser não-

relativístico, e o parâmetro de Budker é pequeno comparado com a unidade, isto é :

$$\nu_B = \frac{N_b e_b^2}{m_b c^2} \ll 1 \quad (3.3)$$

onde, $N_b = \int dx dy n_b(x, y, s)$ é a densidade do feixe por comprimento axial, e_b e m_b são a carga e massa de repouso do feixe, respectivamente. Assumindo os pressupostos relatados, acima, e utilizando as Eqs. (2.22) e (2.23) bidimensionais; para os auto-campos, elétricos e magnéticos, em equilíbrio, associados com o feixe de partículas carregadas, temos :

$$B_x^s = \beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial y}, \quad (3.4a)$$

$$B_y^s = -\beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial x} \quad (3.4b)$$

$$E_x^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial x}, \quad (3.4c)$$

$$E_y^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial y}. \quad (3.4d)$$

onde o potencial escalar para os autocampo elétrico, obedece a equação de Poisson :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \phi^s(x, y, s) = -4\pi e_b n_b(x, y, s) \quad (3.5)$$

Introduzindo o potencial do autocampo adimensional:

$$\psi(x, y, s) \equiv \frac{e_b \phi^s(x, y, s)}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2} \quad (3.6)$$

A equação de Poisson (3.5) pode ser expressa como :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi(x, y, s) = -\frac{2\pi K_b}{N_b} n_b(x, y, s). \quad (3.7)$$

onde $K_b \equiv \frac{2N_b e_b^2}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2}$ é a perveância do autocampo definida na Eq (2.10).

As equações de movimento no referencial do laboratório podem ser derivadas do hamiltoniano de partícula única definido abaixo, [43]:

$$\begin{aligned} H(x, y, s, P_x, P_y, P_z) &= \left[c^2 \left(P_x - \frac{e}{c} A_x^{foc} \right)^2 + c^2 \left(P_y - \frac{e}{c} A_y^{foc} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + c^2 \left(P_z - \frac{e}{c} A_z^s \right)^2 + m^2 c^4 \right]^{\frac{1}{2}} + e\phi^s \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde (s, P_z) é o par canônico conjugado, e o momentum canônico se relaciona com o momentum mecânico por $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \left(\frac{e}{c}\right) [\mathbf{A}^{foc} + \mathbf{A}^s]$. Relembrando a Eq. (2.29b) para a componente z , $\frac{dP_z}{dt} = -e_b \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right)$, considerando um feixe contínuo, axialmente

uniforme, ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$), com dimensões transversais muito pequenas, $a, b \ll S$, a variação na direção z de $\phi(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ pode ser tratada muito pequena e desprezível; neste caso P_z é uma constante aproximada do movimento. Assim, integrando a componente z da Eq. (2.29b), $\frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{\gamma m}$, sendo o momentum mecânico, aproximadamente, constante na aproximação paraxial e, equivalente a, $p_z = \gamma_b m \beta_b c$, teremos, $z = z_0 + \beta_b c t$, onde $\beta_b c$ é a velocidade axial média do feixe. Tomando $z_0 = 0$, ficaremos com $s = z = \beta_b c t$.

Aplicando a formulação hamiltoniana alternativa, utilizaremos o hamiltoniano (3.8) para introduzir um novo hamiltoniano $\Omega(x, P_x; y, P_y, -H; s)$, definido por:

$$\Omega(x, P_x; y, P_y, -H; s) = -P_z(x, P_x; y, P_y, -H; s) \quad (3.9)$$

Resolvendo o hamiltoniano (3.8) para $\left(P_z - \frac{e_b A_z^s}{c}\right)^2$ e tomando a raiz quadrada positiva, obtêm-se:

$$\Omega = - \left[\left(\frac{H}{c} - \frac{e_b \phi^s}{c} \right)^2 - m_b^2 c^2 - \left(P_x - \frac{1}{c} e_b A_x^{foc} \right)^2 - \left(P_y - \frac{1}{c} e_b A_y^{foc} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{e_b A_z^s}{c} \quad (3.10)$$

Como o movimento transversal é assumido ser não-relativístico na aproximação paraxial, o momento mecânico axial, $p_z = \gamma_b m \beta_b c$, pode ser tratado, aproximadamente, constante, assim, podemos definir o momento cinemático efetivo do feixe de partículas, $p_b(H)$, por

$$p_b(H) \equiv \left(\frac{H^2}{c^2} - m_b^2 c^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

e denotamos $p_b = \gamma_b(H) m_b \beta_b(H) c$, onde $\gamma_b(H) \equiv \frac{H}{m_b c^2}$ e $\beta_b^2 \equiv 1 - \frac{1}{\gamma_b^2(H)}$. Assim sendo, $p_b(H)$, $\gamma_b(H)$, $\beta_b(H)$, são funções conhecidas de H , assumindo que a função distribuição do feixe de partículas apresenta muita pequena difusão nos momenta e energia. Por conseguinte, expandiremos em série de Taylor o hamiltoniano (3.10), considerando $p_x^2, p_y^2 \ll p_b^2$ e $|e_b \phi| \ll H$. Tomando somente termos de ordem quadrática nos momentos transversais, e ordem linear para ϕ , mostramos, que o hamiltoniano (3.10) pode ser aproximado para :

$$\begin{aligned} \Omega &= -p_b(H) + \frac{1}{2p_b(H)} \left[\left(P_x - \frac{e_b A_x^{foc}}{c} \right)^2 + \left(P_y - \frac{e_b A_y^{foc}}{c} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{H e_b}{p_b(H) c^2} \phi - \frac{e_b A_z^s}{c} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Em circunstâncias, onde a função distribuição $f_b^0 = (x, P_x; y, P_y; -H, s)$ na Eq. (2.41) apresenta desprezível difusão nos momenta e energia sobre os valores $p_b = \gamma_b m_b \beta_b c = const.$, $\gamma_b(H) = \gamma_b = const.$ e $H = \gamma_b m c^2 = const.$, o hamiltoniano Ω em (3.12) pode ser

escrito como:

$$\begin{aligned} \Omega &= -\gamma_b m_b \beta_b c + \frac{1}{2\gamma_b m_b \beta_b c} \left[\left(P_x - \frac{e_b A_x^{foc}}{c} \right)^2 + \left(P_y - \frac{e_b A_y^{foc}}{c} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{e_b}{\beta_b c} \phi - \frac{e_b A_z^s}{c} \end{aligned} \quad (3.13)$$

utilizando a aproximação, $A_z^s = \beta_b \phi^s$, (ver cap.2, seção 2.2.2), os termos dos autocampos no hamiltoniano (3.13), combinados, resultam em:

$$\frac{e_b}{\beta_b c} \phi - \frac{e_b A_z^s}{c} = \frac{e_b \phi^s}{\gamma_b^2 \beta_b c} \quad (3.14)$$

onde $\frac{1}{\gamma_b^2} = 1 - \beta_b^2$. Utilizando a relação (3.6), a expressão (3.14) e normalizando o hamiltoniano (3.13) por $\frac{\Omega}{\gamma_b m_b \beta_b c}$, obtemos :

$$\frac{\Omega}{\gamma_b m_b \beta_b c} = -1 + \frac{1}{2\gamma_b^2 m_b^2 \beta_b^2 c^2} \left[\left(P_x - \frac{e_b A_x^{foc}}{c} \right)^2 + \left(P_y - \frac{e_b A_y^{foc}}{c} \right)^2 \right] + \psi \quad (3.15)$$

Substituindo a Eq. (3.2) no hamiltoniano normalizado (3.15), teremos :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{\gamma_b m_b \beta_b c} &= -1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{P_x}{\gamma_b m_b \beta_b c} + \frac{e_b B_z y}{2\gamma_b m_b \beta_b c^2} \right)^2 + \left(\frac{P_y}{\gamma_b m_b \beta_b c} - \frac{e_b B_z x}{2\gamma_b m_b \beta_b c^2} \right)^2 \right] \\ &+ \psi \end{aligned} \quad (3.16)$$

Introduzindo os momentum canônicos transversais normalizados, $\hat{P}_x = \frac{P_x}{\gamma_b m_b \beta_b c}$, $\hat{P}_y = \frac{P_y}{\gamma_b m_b \beta_b c}$, o hamiltoniano normalizado, $\hat{\Omega} = \frac{\Omega}{\gamma_b m_b \beta_b c}$ e o parâmetro focalizador normalizado, $\sigma_0 = \frac{e_b B_z}{2\gamma_b m_b \beta_b c^2}$ o hamiltoniano (3.16) pode ser escrito como:

$$\hat{\Omega}(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y, -H, s) = -1 + \frac{1}{2} \left[\left(\hat{P}_x + \sigma_0 y \right)^2 + \left(\hat{P}_y - \sigma_0 x \right)^2 \right] + \psi \quad (3.17)$$

Definindo o hamiltoniano transversal, $\Omega_{\perp} = \hat{\Omega} + 1$, obtemos :

$$\Omega_{\perp}(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y, s) = \frac{1}{2} \left[\left(\hat{P}_x + \sigma_0 y \right)^2 + \left(\hat{P}_y - \sigma_0 x \right)^2 \right] + \psi \quad (3.18)$$

Utilizando as Eqs. (2.38a) e (2.38b) encontramos as seguintes equações transversais do

movimento no referencial do laboratório :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial \hat{P}_x} = \hat{P}_x + \sigma_0 y, \quad (3.19a)$$

$$\frac{d\hat{P}_x}{ds} = -\frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial x} = \hat{P}_y \sigma_0 - \sigma_0^2 x - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.19b)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial \hat{P}_y} = \hat{P}_y - \sigma_0 x, \quad (3.19c)$$

$$\frac{d\hat{P}_y}{ds} = -\frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial y} = -\hat{P}_x \sigma_0 - \sigma_0^2 y - \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (3.19d)$$

Observe que o movimento na direção- x é acoplado com o movimento na direção- y .

3.2 Equações de Movimento no Referencial de Larmor

Agora, executaremos uma transformação canônica do referencial do laboratório para o referencial de Larmor, que rota em relação ao referencial do laboratório, com velocidade angular $\beta_b c \sigma_0 = \frac{e_b B_z}{2\gamma_b m c}$, como ilustrado na figura (2).

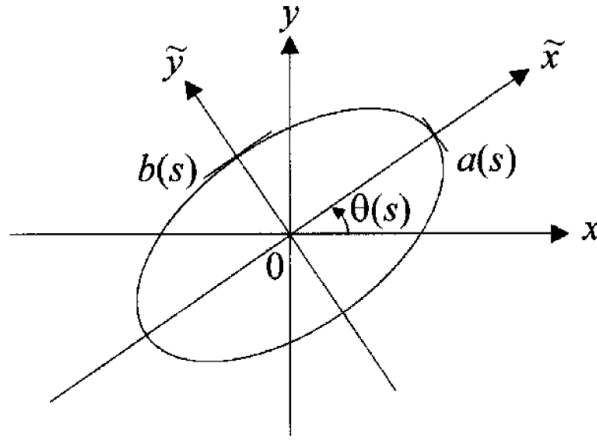


Figura 2: Referencial de Larmor. (adaptado de [96])

A função geratriz para tal transformação das variáveis $(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y)$ para $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$ pode ser expressa como :

$$F(x, y; \tilde{P}_x, \tilde{P}_y, s) = \{x \cos[\theta(s)] - y \sin[\theta(s)]\} \tilde{P}_x + \{x \sin[\theta(s)] + y \cos[\theta(s)]\} \tilde{P}_y \quad (3.20)$$

onde $\theta(s) \equiv \int_{s_0}^s ds \sigma_0$ é a fase de rotação angular. A função geratriz (3.20), define as

seguintes transformadas :

$$\tilde{x} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{P}_x} = x \cos[\theta(s)] - y \sin[\theta(s)], \quad (3.21a)$$

$$\tilde{y} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{P}_y} = x \sin[\theta(s)] + y \cos[\theta(s)], \quad (3.21b)$$

$$\hat{P}_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \tilde{P}_x \cos[\theta(s)] + \tilde{P}_y \sin[\theta(s)], \quad (3.21c)$$

$$\hat{P}_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -\tilde{P}_x \sin[\theta(s)] + \tilde{P}_y \cos[\theta(s)]. \quad (3.21d)$$

O novo hamiltoniano transversal é dado por $\Lambda_{\perp} = \Omega_{\perp} + \frac{\partial F}{\partial s}$, expresso nas variáveis do referencial de Larmor $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$. Da função geratriz (3.21), usando as Eqs. (3.21c) e (3.21d), e a relação $\frac{d\theta}{ds} = \sigma_0$, obtemos :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \sigma_0 [x\hat{P}_x - y\hat{P}_y] \quad (3.22)$$

Do hamiltoniano (3.18) e da Eq. (3.22), obtemos:

$$\Lambda_{\perp} = \frac{1}{2} (\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{\sigma_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \psi \quad (3.23)$$

onde ψ é o potencial escalar normalizado definido na Eq. (3.6). Fazendo uso das Eqs. (3.21) para expressar $x^2 + y^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ e $\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 = \tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2$, o novo hamiltoniano transversal Λ_{\perp} , expresso nas variáveis do referencial de Larmor $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$, é dado por :

$$\Lambda_{\perp}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y) = \frac{1}{2} (\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2) + \frac{\sigma_0^2}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s) \quad (3.24)$$

Consideramos um feixe de partículas axialmente contínuo, com densidade uniforme, $n_b(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = \hat{n}_b(s) = const.$, e secção transversal elíptica, $0 \leq \frac{\tilde{x}^2}{a^2(s)} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2(s)} < 1$, como observado na figura (2). Neste caso, $N_b = \int d\tilde{x}d\tilde{y}n_b(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = \hat{n}_b\pi ab = const.$. A equação de Poisson, (3.7), no referencial de Larmor pode ser expressa como :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right] \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = -\frac{2K_b}{ab}, \quad 0 \leq \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} < 1 \quad (3.25a)$$

$$= 0, \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} > 1 \quad (3.25b)$$

com $a, b \ll r_w$, onde r_w é o raio do cilindro condutor; a e b os semi-eixos maior e menor da elipse, respectivamente. A solução exata da Eq (3.25) é :

$$\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = -\frac{K_b}{a+b} \left[\frac{1}{a}\tilde{x}^2 + \frac{1}{b}\tilde{y}^2 \right] \quad (3.26)$$

no interior do feixe, $0 \leq \frac{\tilde{x}^2}{a^2(s)} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2(s)} < 1$. A solução completa da equação de Poisson bidimensional, em coordenadas elípticas, pode ser encontrada no Apêndice A dessa dissertação. Utilizando os parâmetros dos autocampos normalizados, $\kappa_{s\tilde{x}} = \frac{k_b}{[a(s)+b(s)]a(s)}$ e $\kappa_{s\tilde{y}} = \frac{k_b}{[a(s)+b(s)]b(s)}$, obtemos:

$$\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = - [\kappa_{sx}\tilde{x}^2 + \kappa_{sy}\tilde{y}^2] \quad (3.27)$$

Assim o hamiltoniano (3.24) pode ser escrito como :

$$\Lambda_{\perp} = \frac{1}{2} (\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2) + \frac{\sigma_0^2}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) - [\kappa_{sx}\tilde{x}^2 + \kappa_{sy}\tilde{y}^2] \quad (3.28)$$

Definindo $\alpha_{\tilde{x}}(s) = \sigma_0^2 - 2\kappa_{sx}$ e $\alpha_{\tilde{y}}(s) = \sigma_0^2 - 2\kappa_{sy}$, as equações do movimento no referencial de Larmor são :

$$\frac{d\tilde{x}}{ds} = \frac{\partial \Lambda_{\perp}}{\partial \tilde{P}_x} = \tilde{P}_x, \quad (3.29a)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = \frac{\partial \Lambda_{\perp}}{\partial \tilde{P}_y} = \tilde{P}_y, \quad (3.29b)$$

$$\frac{d\tilde{P}_x}{ds} = -\frac{\partial \Lambda_{\perp}}{\partial \tilde{x}} = -\alpha_{\tilde{x}}(s)\tilde{x}, \quad (3.29c)$$

$$\frac{d\tilde{P}_y}{ds} = -\frac{\partial \Lambda_{\perp}}{\partial \tilde{y}} = -\alpha_{\tilde{y}}(s)\tilde{y}. \quad (3.29d)$$

Combinando as Eqs. (3.29a) e (3.29c) e as Eqs. (3.29b) e (3.29d), obtemos :

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \alpha_{\tilde{x}}(s)\tilde{x} = 0, \quad (3.30a)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + \alpha_{\tilde{y}}(s)\tilde{y} = 0. \quad (3.30b)$$

As equações acima, são as conhecidas equações de Hill. Observe que os movimentos nas direções \tilde{x} e \tilde{y} se desacoplam no referencial de Larmor.

3.3 A Função Distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij

A distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij KV [30], é um equilíbrio de Vlasov auto-consistente ($\frac{\partial}{\partial s} = 0$), para um feixe intenso de partículas carregadas sujeito a um campo focalizador linear incluindo efeitos dos autocampos. Tais campos focalizadores podem ser do tipo magnético quadrupolar de gradiente alternado, magnético solenoidal periódico no referencial de Larmor, magnético uniforme ou elétrico uniforme.

Para construir a função distribuição-KV de equilíbrio para um feixe intenso de partí-

culas carregadas propagando-se através de um campo magnético solenoidal uniforme no referencial de Larmor, adaptaremos o procedimento de Courant e Snyder [16] do síncrotron de gradiente alternado.

É usual expressar as órbitas para \tilde{x} (3.30a) e \tilde{y} (3.30b), respectivamente, como :

$$\tilde{x}(s) = A_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}(s) \cos[\psi_{\tilde{x}}(s) + \phi_{\tilde{x}0}], \quad (3.31a)$$

$$\tilde{y}(s) = A_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}(s) \sin[\psi_{\tilde{y}}(s) + \phi_{\tilde{y}0}]. \quad (3.31b)$$

onde $\psi_{\tilde{x}}(s)$ e $\psi_{\tilde{y}}(s)$ são as chamadas funções de fase de betatron das órbitas \tilde{x} e \tilde{y} , respectivamente; $\omega_{\tilde{x}}(s)$ e $\omega_{\tilde{y}}(s)$ são as funções de envelope; $A_{\tilde{x}}$ e $A_{\tilde{y}}$ são as amplitudes das respectivas órbitas e, $\phi_{\tilde{x}0}$ e $\phi_{\tilde{y}0}$ são as fases das órbitas- \tilde{x} e \tilde{y} . $A_{\tilde{x}}$, $A_{\tilde{y}}$, $\phi_{\tilde{x}0}$ e $\phi_{\tilde{y}0}$ são constantes que podem ser determinadas das condições iniciais $\tilde{x}(s_0)$, $\tilde{y}(s_0)$, $\tilde{P}_x(s_0) = \tilde{x}'(s_0)$ e $\tilde{P}_y(s_0) = \tilde{y}'(s_0)$ onde, ($'$), denota, $(\frac{d}{ds})$. Das Eqs. (3.31a) e (3.31b) obtemos:

$$\frac{d\tilde{x}(s)}{ds} = A_{\tilde{x}}\omega'_{\tilde{x}} \cos[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}] - A_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}} \sin[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}], \quad (3.32a)$$

$$\frac{d\tilde{y}(s)}{ds} = A_{\tilde{y}}\omega'_{\tilde{y}} \sin[\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}] + A_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}\psi'_{\tilde{y}} \cos[\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}]. \quad (3.32b)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{x}(s)}{ds^2} &= A_{\tilde{x}} \left[\omega''_{\tilde{x}} - \omega_{\tilde{x}} (\psi'_{\tilde{x}})^2 \right] \cos[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}] \\ &\quad - A_{\tilde{x}} \left[\omega'_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}} + (\omega_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}})' \right] \sin[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}], \end{aligned} \quad (3.33a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{y}(s)}{ds^2} &= A_{\tilde{y}} \left[\omega''_{\tilde{y}} - \omega_{\tilde{y}} (\psi'_{\tilde{y}})^2 \right] \sin[\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}] \\ &\quad + A_{\tilde{y}} \left[\omega'_{\tilde{y}}\psi'_{\tilde{y}} + (\omega_{\tilde{y}}\psi'_{\tilde{y}})' \right] \cos[\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}]. \end{aligned} \quad (3.33b)$$

Substituindo as Eqs. (3.31a) e (3.33a) em (3.30a) obtemos :

$$A_{\tilde{x}} \left[\omega''_{\tilde{x}} - \omega_{\tilde{x}} (\psi'_{\tilde{x}})^2 + \alpha_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}} \right] \cos[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}] - A_{\tilde{x}} \left[\omega'_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}} + (\omega_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}})' \right] \sin[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}] = 0 \quad (3.34)$$

Como $\psi_{\tilde{x}}$ é função de s a eq. (3.34) só é satisfeita se os coeficientes do cos e sin se anulam. Então, tomando o coeficiente de $\sin[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}]$ igual a zero, obtemos, $\omega'_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}} + (\omega_{\tilde{x}}\psi'_{\tilde{x}})' = 0$, o que resulta em :

$$\psi_{\tilde{x}} = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\omega_{\tilde{x}}^2(s)} \quad (3.35)$$

com $\psi_{\tilde{x}}(s_0) = 0$. Agora, tomando o coeficiente de $\cos[\psi_{\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}0}]$ igual a zero na Eq. (3.34),

obtemos, $\omega_{\tilde{x}}'' - \omega_{\tilde{x}} (\psi_{\tilde{x}}')^2 + \alpha_{\tilde{x}} \omega_{\tilde{x}} = 0$, usando $\frac{d\psi_{\tilde{x}}}{ds} = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}^2}$ resulta que :

$$\frac{d^2}{ds^2} \omega_{\tilde{x}} + \alpha_{\tilde{x}}(s) \omega_{\tilde{x}} = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}^3} \quad (3.36)$$

Exceto pelo fator constante $A_{\tilde{x}}$ e na Eq. (3.31a), observe que a Eq. (3.36) é uma equação fechada para a função envelope $\omega_{\tilde{x}}(s)$ da órbita- \tilde{x} . Assim a expressão (3.31a) resolve a equação de Hill (3.30a) desde que, encontrada a solução $\omega_{\tilde{x}}(s)$ da Eq. (3.36).

Agora, substituindo as Eqs. (3.31b) e (3.33b) em (3.30b) obtemos :

$$A_{\tilde{y}} \left[\omega_{\tilde{y}}'' - \omega_{\tilde{y}} (\psi_{\tilde{y}}')^2 + \alpha_{\tilde{y}} \omega_{\tilde{y}} \right] \sin [\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}] + A_{\tilde{y}} \left[\omega_{\tilde{y}}' \psi_{\tilde{y}}' + (\omega_{\tilde{y}} \psi_{\tilde{y}}')' \right] \cos [\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}] = 0 \quad (3.37)$$

tomando o coeficiente de $\cos [\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}]$ igual a zero, obtemos, $\omega_{\tilde{y}}' \psi_{\tilde{y}}' + (\omega_{\tilde{y}} \psi_{\tilde{y}}')' = 0$, o que resulta em :

$$\psi_{\tilde{y}} = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\omega_{\tilde{y}}^2(s)} \quad (3.38)$$

com $\psi_{\tilde{y}}(s_0) = 0$. Agora, tomando o coeficiente de $\sin [\psi_{\tilde{y}} + \phi_{\tilde{y}0}]$ igual a zero na Eq. (3.37), obtemos, $\omega_{\tilde{y}}'' - \omega_{\tilde{y}} (\psi_{\tilde{y}}')^2 + \alpha_{\tilde{y}} \omega_{\tilde{y}} = 0$, usando $\frac{d\psi_{\tilde{y}}}{ds} = \frac{1}{\omega_{\tilde{y}}^2}$ resulta que :

$$\frac{d^2}{ds^2} \omega_{\tilde{y}} + \alpha_{\tilde{y}}(s) \omega_{\tilde{y}}(s) = \frac{1}{\omega_{\tilde{y}}^3} \quad (3.39)$$

Também, exceto pelo fator constante $A_{\tilde{y}}$ na Eq. (3.31b), observe que a Eq. (3.39) é uma equação fechada para a função envelope $\omega_{\tilde{y}}(s)$ da órbita- \tilde{y} . Assim a expressão (3.31b) resolve a equação de Hill (3.30b) desde que, encontrada a solução $\omega_{\tilde{y}}(s)$ da Eq. (3.39).

As amplitudes $A_{\tilde{x}}$ e $A_{\tilde{y}}$ nas Eqs. (3.31) são consideradas constantes do movimento para as órbitas- \tilde{x} e \tilde{y} , respectivamente. Observe a figura abaixo :

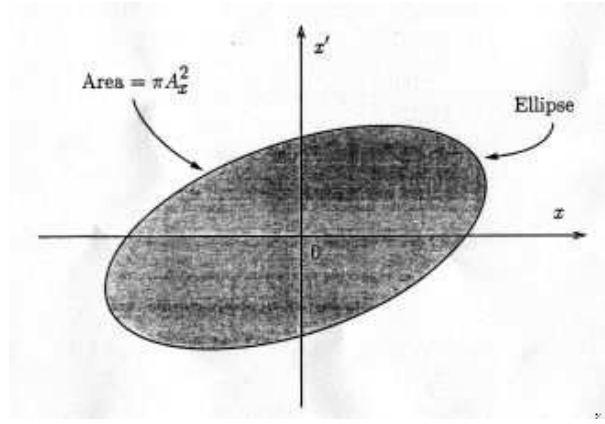


Figura 3: Espaço de fase (\tilde{x}, \tilde{x}') . (adaptado de [18])

Considerando as Eqs. (3.31a) e (3.32a) podemos expressar :

$$A_{\tilde{x}}^2 = \frac{\tilde{x}^2}{\omega_{\tilde{x}}^2} + \left(\omega_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{ds} - \frac{d\omega_{\tilde{x}}}{ds} \tilde{x} \right)^2. \quad (3.40)$$

Como ilustrado na fig. (3), a Eq. (3.40) representa uma elipse no espaço de fase (\tilde{x}, \tilde{x}') . Quando $\omega'_{\tilde{x}} \neq 0$, o eixo maior da elipse é rotado em relação ao eixo x . O tamanho, orientação e excentricidade da elipse são determinados por $A_{\tilde{x}}$ e os valores de $\omega_{\tilde{x}}$ e $\omega'_{\tilde{x}}$ (dadas as condições iniciais $s = s_0$). Quando s varia, $\omega_{\tilde{x}}$ e $\omega'_{\tilde{x}}$ variam também e, conseqüentemente, a superfície e orientação da elipse mudam de acordo. Para um valor específico de $A_{\tilde{x}}$ a área da elipse mantém-se constante e equivale a $\pi A_{\tilde{x}}^2$.

Analise, agora, o espaço de fase (\tilde{y}, \tilde{y}') idêntico à figura (3). Considerando, também, as Eqs. (3.31b) e (3.32b) podemos expressar :

$$A_{\tilde{y}}^2 = \frac{\tilde{y}^2}{\omega_{\tilde{y}}^2} + \left(\omega_{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{ds} - \frac{d\omega_{\tilde{y}}}{ds} \tilde{y} \right)^2. \quad (3.41)$$

Como ilustrado na fig. (3), a Eq. (3.41), também representa uma elipse no espaço de fase (\tilde{y}, \tilde{y}') . Quando $\omega'_{\tilde{y}} \neq 0$, o eixo maior da elipse é rotado em relação ao eixo y . O tamanho, orientação e excentricidade da elipse são determinados por $A_{\tilde{y}}$ e os valores de $\omega_{\tilde{y}}$ e $\omega'_{\tilde{y}}$ (dadas as condições iniciais $s = s_0$). Quando s varia, $\omega_{\tilde{y}}$ e $\omega'_{\tilde{y}}$ variam também e, conseqüentemente, a superfície e orientação da elipse mudam de acordo. Para um valor específico de $A_{\tilde{y}}$ a área da elipse, também, mantém-se constante e equivale a $\pi A_{\tilde{y}}^2$.

A conservação de $A_{\tilde{x}}^2$ e $A_{\tilde{y}}^2$ sugere que as variáveis do espaço de fase naturais no presente problema são do tipo $\frac{\tilde{x}}{\omega_{\tilde{x}}}, \omega_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{ds} - \frac{d\omega_{\tilde{x}}}{ds} \tilde{x}, \frac{\tilde{y}}{\omega_{\tilde{y}}}, \omega_{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{ds} - \frac{d\omega_{\tilde{y}}}{ds} \tilde{y}$. Com isso em mente,

introduziremos a função geratriz $F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, P_X, P_Y)$ definida por :

$$F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, P_X, P_Y) = \frac{\tilde{x}}{\omega_{\tilde{x}}(s)} \left[P_X + \frac{1}{2} \tilde{x} \frac{d\omega_{\tilde{x}}(s)}{ds} \right] + \frac{\tilde{y}}{\omega_{\tilde{y}}(s)} \left[P_Y + \frac{1}{2} \tilde{y} \frac{d\omega_{\tilde{y}}(s)}{ds} \right] \quad (3.42)$$

onde $\omega_{\tilde{x}}$ e $\omega_{\tilde{y}}$ resolvem as Eqs. (3.36) e (3.39), respectivamente. A função geratriz (3.42), define as seguintes transformadas canônicas das variáveis $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$ para as novas variáveis (X, Y, P_X, P_Y) :

$$X = \frac{\partial F_1}{\partial P_X} = \frac{\tilde{x}}{\omega_{\tilde{x}}}, \quad (3.43a)$$

$$Y = \frac{\partial F_1}{\partial P_Y} = \frac{\tilde{y}}{\omega_{\tilde{y}}}, \quad (3.43b)$$

$$\tilde{P}_x = \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}} \left[P_X + \tilde{x} \frac{d\omega_{\tilde{x}}(s)}{ds} \right], \quad (3.43c)$$

$$\tilde{P}_y = \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\omega_{\tilde{y}}} \left[P_Y + \tilde{y} \frac{d\omega_{\tilde{y}}(s)}{ds} \right]. \quad (3.43d)$$

O novo hamiltoniano é dado por $\Delta_{\perp} = \Lambda_{\perp} + \frac{\partial F_1}{\partial s}$, expresso nas variáveis (X, Y, P_X, P_Y) .

Da função geratriz (3.42), obtemos :

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = -\frac{\tilde{x} P_X \omega'_{\tilde{x}}}{\omega_{\tilde{x}}^2} + \frac{\tilde{x}^2}{2} \left[\frac{\omega''_{\tilde{x}}}{\omega_{\tilde{x}}} - \frac{\omega'^2_{\tilde{x}}}{\omega_{\tilde{x}}^2} \right] - \frac{\tilde{y} P_Y \omega'_{\tilde{y}}}{\omega_{\tilde{y}}^2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} \left[\frac{\omega''_{\tilde{y}}}{\omega_{\tilde{y}}} - \frac{\omega'^2_{\tilde{y}}}{\omega_{\tilde{y}}^2} \right] \quad (3.44)$$

Usando as Eqs. (3.36) e (3.39), teremos :

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{\tilde{x}^2}{2\omega_{\tilde{x}}^4} - \frac{\tilde{x}\omega'_{\tilde{x}}}{\omega_{\tilde{x}}^2} \left[P_X + \frac{\tilde{x}^2}{2}\omega'_{\tilde{x}} \right] - \frac{\alpha_{\tilde{x}}\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2\omega_{\tilde{y}}^4} - \frac{\tilde{y}\omega'_{\tilde{y}}}{\omega_{\tilde{y}}^2} \left[P_Y + \frac{\tilde{y}^2}{2}\omega'_{\tilde{y}} \right] - \frac{\alpha_{\tilde{y}}\tilde{y}^2}{2} \quad (3.45)$$

Sabendo que $\alpha_{\tilde{x}} = \sigma_0^2 - 2\kappa_{s\tilde{x}}$ e $\alpha_{\tilde{y}} = \sigma_0^2 - 2\kappa_{s\tilde{y}}$, podemos expressar o hamiltoniano (3.28) como :

$$\Lambda_{\perp} = \frac{1}{2} \left(\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2 \right) + \frac{\alpha_{\tilde{x}}}{2} \tilde{x}^2 + \frac{\alpha_{\tilde{y}}}{2} \tilde{y}^2 \quad (3.46)$$

Fazendo uso das Eqs. (3.43a) e (3.43b) para expressar $\tilde{x} = \omega_{\tilde{x}} X$ e $\tilde{y} = \omega_{\tilde{y}} Y$, usando as Eqs. (3.43c), (3.43d), (3.45) e (3.46) o novo hamiltoniano, $\Delta_{\perp} = \Lambda_{\perp} + \frac{\partial F_1}{\partial s}$, nas variáveis (X, Y, P_X, P_Y) , é expresso por :

$$\Delta_{\perp}(X, Y, P_X, P_Y) = \frac{1}{2\omega_{\tilde{x}}^2} [P_X^2 + X^2] + \frac{1}{2\omega_{\tilde{y}}^2} [P_Y^2 + Y^2] \quad (3.47)$$

Em termos das novas variáveis, as equações do movimento para $X(s)$, $P_X(s)$, $Y(s)$ e

$P_Y(s)$ calculadas do hamiltoniano (3.47) são :

$$\frac{dX}{ds} = \frac{\partial \Delta_{\perp}}{\partial P_X} = \frac{P_X}{\omega_{\tilde{x}}^2}, \quad (3.48a)$$

$$\frac{dY}{ds} = \frac{\partial \Delta_{\perp}}{\partial P_Y} = \frac{P_Y}{\omega_{\tilde{y}}^2}, \quad (3.48b)$$

$$\frac{dP_X}{ds} = -\frac{\partial \Delta_{\perp}}{\partial X} = -\frac{X}{\omega_{\tilde{x}}^2}, \quad (3.48c)$$

$$\frac{dP_Y}{ds} = -\frac{\partial \Delta_{\perp}}{\partial Y} = -\frac{Y}{\omega_{\tilde{y}}^2}. \quad (3.48d)$$

onde as funções envelope $\omega_{\tilde{x}}$ e $\omega_{\tilde{y}}$ resolvem as Eqs. (3.36) e (3.39).

Fazendo uso da Eqs. (3.43c) e (3.43d) para expressar $P_X = \omega_{\tilde{x}} \tilde{P}_x - \tilde{x} \frac{d\omega_{\tilde{x}}(s)}{ds}$ e $P_Y = \omega_{\tilde{y}} \tilde{P}_y - \tilde{y} \frac{d\omega_{\tilde{y}}(s)}{ds}$, usando as Eqs. (3.43a) e (3.43b) e sabendo que $\frac{d\tilde{x}}{ds} = \tilde{P}_x$, $\frac{d\tilde{y}}{ds} = \tilde{P}_y$ as constantes $A_{\tilde{x}}^2$ e $A_{\tilde{y}}^2$ podem ser escritas nas novas variáveis como:

$$A_{\tilde{x}}^2 = \frac{\tilde{x}^2}{\omega_{\tilde{x}}^2} + \left(\omega_{\tilde{x}} \tilde{P}_x - \frac{d\omega_{\tilde{x}}}{ds} \tilde{x} \right)^2 = X^2 + P_X^2, \quad (3.49a)$$

$$A_{\tilde{y}}^2 = \frac{\tilde{y}^2}{\omega_{\tilde{y}}^2} + \left(\omega_{\tilde{y}} \tilde{P}_y - \frac{d\omega_{\tilde{y}}}{ds} \tilde{y} \right)^2 = Y^2 + P_Y^2. \quad (3.49b)$$

Consistente com o pressuposto que as forças dos autocampos são linearmente proporcionais a $\tilde{x}(s)$ e $\tilde{y}(s)$ e a densidade do feixe é uniforme e igual a $\hat{n}_b(s) = \frac{N_b}{\pi a(s)b(s)}$ dentro da seção transversal da elipse $0 \leq \frac{\tilde{x}^2}{a^2(s)} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2(s)} < 1$, o equilíbrio de Vlasov auto-consistente, incluindo efeitos dos auto-campos, pode ser construído das constantes do movimento, $X^2 + P_X^2$ e $Y^2 + P_Y^2$ definidas nas Eqs. (3.49). Em particular, dada a função distribuição :

$$f_b = f_b(A_{\tilde{x}}^2, A_{\tilde{y}}^2) \quad (3.50)$$

que depende de s e das variáveis do espaço de fase $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$, exclusivamente, através das constantes do movimento, $A_{\tilde{x}}^2$ e $A_{\tilde{y}}^2$, é uma solução exata da Eq. (2.41), escrita no referencial de Larmor. Relembrando as Eqs. (2.31), (2.33), (2.34), temos que demonstrar a seguinte relação :

$$\frac{d}{ds} f_b(A_{\tilde{x}}^2, A_{\tilde{y}}^2) = \frac{dA_{\tilde{x}}^2}{ds} \frac{\partial f_b}{\partial A_{\tilde{x}}^2} + \frac{dA_{\tilde{y}}^2}{ds} \frac{\partial f_b}{\partial A_{\tilde{y}}^2} = 0 \quad (3.51)$$

para comprovar que $f_b(A_{\tilde{x}}^2, A_{\tilde{y}}^2)$ é uma solução exata da equação de Vlasov (2.41), no referencial de Larmor. Escolhemos a função distribuição :

$$f_b(A_{\tilde{x}}^2, A_{\tilde{y}}^2) = C \delta \left(\frac{A_{\tilde{x}}^2}{\epsilon_{\tilde{x}}} + \frac{A_{\tilde{y}}^2}{\epsilon_{\tilde{y}}} - 1 \right) \quad (3.52)$$

onde C é uma constante de normalização que será calculada posteriormente, $\epsilon_{\tilde{x}}$ e $\epsilon_{\tilde{y}}$ são

as emitâncias transversais do feixe, assumidas constantes e $\delta \left(\frac{A_x^2}{\epsilon_x} + \frac{A_y^2}{\epsilon_y} \right)$ é a função delta de Dirac. A expressão (3.52) é conhecida como distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij (KV).

Definindo :

$$\frac{d}{ds} \equiv \frac{\partial}{\partial s} + \tilde{x}' \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{y}' \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tilde{P}_x' \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_x} + \tilde{P}_y' \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_y} \quad (3.53)$$

Utilizando as Eqs. (3.29) podemos escrever a definição (3.53) como :

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} + \tilde{P}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{P}_y \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} - \alpha_{\tilde{x}} \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_x} + \alpha_{\tilde{y}} \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_y} \quad (3.54)$$

Assim teremos :

$$\begin{aligned} \frac{dA_x^2}{ds} &= -\frac{2\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'}{\omega_{\tilde{x}}^3} + 2\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}'\tilde{P}_x^2 - 2\tilde{P}_x\tilde{x}\omega_{\tilde{x}}'^2 - 2\tilde{P}_x\tilde{x}\omega_{\tilde{x}}'' + 2\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'\omega_{\tilde{x}}'' \\ &+ \frac{2\tilde{x}\tilde{P}_x}{\omega_{\tilde{x}}^2} - 2\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}'\tilde{P}_x^2 + 2\tilde{P}_x\tilde{x}\omega_{\tilde{x}}'^2 - 2\alpha_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}^2\tilde{P}_x\tilde{x} + 2\alpha_{\tilde{x}}\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'\omega_{\tilde{x}}', \end{aligned} \quad (3.55a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_y^2}{ds} &= -\frac{2\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'}{\omega_{\tilde{y}}^3} + 2\omega_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}'\tilde{P}_y^2 - 2\tilde{P}_y\tilde{y}\omega_{\tilde{y}}'^2 - 2\tilde{P}_y\tilde{y}\omega_{\tilde{y}}'' + 2\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'\omega_{\tilde{y}}'' \\ &+ \frac{2\tilde{y}\tilde{P}_y}{\omega_{\tilde{y}}^2} - 2\omega_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}'\tilde{P}_y^2 + 2\tilde{P}_y\tilde{y}\omega_{\tilde{y}}'^2 - 2\alpha_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}^2\tilde{P}_y\tilde{y} + 2\alpha_{\tilde{y}}\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'\omega_{\tilde{y}}'. \end{aligned} \quad (3.55b)$$

Sabendo que $\omega_{\tilde{x}}'' = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}^3} - \alpha_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}$ e $\omega_{\tilde{y}}'' = \frac{1}{\omega_{\tilde{y}}^3} - \alpha_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}$, teremos :

$$\begin{aligned} \frac{dA_x^2}{ds} &= -\frac{2\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'^3}{\omega_{\tilde{x}}} - \frac{2\tilde{x}\tilde{P}_x}{\omega_{\tilde{x}}^2} + 2\alpha_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}^2\tilde{P}_x\tilde{x} + \frac{2\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'^3}{\omega_{\tilde{x}}} - 2\alpha_{\tilde{x}}\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'\omega_{\tilde{x}}' \\ &+ \frac{2\tilde{x}\tilde{P}_x}{\omega_{\tilde{x}}^2} - 2\alpha_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}^2\tilde{P}_x\tilde{x} + 2\alpha_{\tilde{x}}\tilde{x}^2\omega_{\tilde{x}}'\omega_{\tilde{x}}', \end{aligned} \quad (3.56a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_y^2}{ds} &= -\frac{2\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'^3}{\omega_{\tilde{y}}} - \frac{2\tilde{y}\tilde{P}_y}{\omega_{\tilde{y}}^2} + 2\alpha_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}^2\tilde{P}_y\tilde{y} + \frac{2\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'^3}{\omega_{\tilde{y}}} - 2\alpha_{\tilde{y}}\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'\omega_{\tilde{y}}' \\ &+ \frac{2\tilde{y}\tilde{P}_y}{\omega_{\tilde{y}}^2} - 2\alpha_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}}^2\tilde{P}_y\tilde{y} + 2\alpha_{\tilde{y}}\tilde{y}^2\omega_{\tilde{y}}'\omega_{\tilde{y}}'. \end{aligned} \quad (3.56b)$$

Cancelando os termos obtemos :

$$\frac{dA_x^2}{ds} = 0, \quad (3.57a)$$

$$\frac{dA_y^2}{ds} = 0. \quad (3.57b)$$

assim, demonstrando a relação (3.51). Logo, a distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij (3.52), é uma solução exata da equação de Vlasov (2.41), no referencial de Larmor.

Agora, iremos calcular a constante de normalização C da expressão (3.52). Das trans-

formadas de coordenadas (3.43) podemos obter:

$$d\tilde{x}d\tilde{y} = (\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}}) dXdY, \quad (3.58a)$$

$$d\tilde{P}_x d\tilde{P}_y = (\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}})^{-1} dP_X dP_Y. \quad (3.58b)$$

para (\tilde{x}, \tilde{y}) fixados. Usando a relação (3.49) na Eq. (3.52) podemos escrever a distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij como :

$$f_b = C \delta \left(\frac{1}{\epsilon_{\tilde{x}}} (X^2 + P_X^2) + \frac{1}{\epsilon_{\tilde{y}}} (Y^2 + P_Y^2) - 1 \right) \quad (3.59)$$

Primeiramente, iremos calcular o número de partículas por unidade de comprimento axial N_b definida por :

$$N_b = \int d\tilde{x}d\tilde{y} n_b(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = \omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}} \int dXdY n_b(X, Y, s) \quad (3.60)$$

Definindo $\hat{X} = \frac{X}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $\hat{P}_X = \frac{P_X}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $\hat{Y} = \frac{Y}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$ e $\hat{P}_Y = \frac{P_Y}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$; usando as expressões (3.58), obtemos $d\hat{X} = \frac{\omega_{\tilde{x}}dX}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $d\hat{P}_X = \frac{dP_X}{\omega_{\tilde{x}}\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $d\hat{Y} = \frac{\omega_{\tilde{y}}dY}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$ e $d\hat{P}_Y = \frac{dP_Y}{\omega_{\tilde{y}}\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$. Sabendo que $n_b = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}}} \int dP_X dP_Y f_b$, podemos escrever a Eq. (3.60) como :

$$N_b = \epsilon_{\tilde{x}}\epsilon_{\tilde{y}} C \int d\hat{X}d\hat{Y}d\hat{P}_Xd\hat{P}_Y \delta \left(\hat{X}^2 + \hat{P}_X^2 + \hat{Y}^2 + \hat{P}_Y^2 - 1 \right) \quad (3.61)$$

Em coordenadas cilíndricas $\hat{P}_X = P \cos \theta$, $\hat{P}_Y = P \sin \theta$, $\hat{X} = R \cos \varphi$ e $\hat{Y} = R \sin \varphi$ teremos :

$$N_b = \epsilon_{\tilde{x}}\epsilon_{\tilde{y}} C \int PdP \int d\theta \int RdR \int d\varphi \delta (R^2 + P^2 - 1) \quad (3.62)$$

Identificando $PdP = \frac{dP^2}{2}$ e $RdR = \frac{dR^2}{2}$, e definindo $\xi = P^2$ e $\eta = R^2$ obtemos :

$$N_b = \frac{\epsilon_{\tilde{x}}\epsilon_{\tilde{y}}}{4} C \int d\xi \int d\theta \int d\eta \int d\varphi \delta (\eta + \xi - 1) \quad (3.63)$$

Assim :

$$N_b = \pi^2 \epsilon_{\tilde{x}}\epsilon_{\tilde{y}} C, \quad (3.64a)$$

$$C = \frac{N_b}{\pi^2 \epsilon_{\tilde{x}}\epsilon_{\tilde{y}}}. \quad (3.64b)$$

Consequentemente, a distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij (3.59), pode ser escrita como :

$$f_b = \frac{N_b}{\pi^2 \epsilon_{\tilde{x}}\epsilon_{\tilde{y}}} \delta \left(\frac{1}{\epsilon_{\tilde{x}}} (X^2 + P_X^2) + \frac{1}{\epsilon_{\tilde{y}}} (Y^2 + P_Y^2) - 1 \right) \quad (3.65)$$

Agora, iremos determinar uma propriedade de equilíbrio da KV (3.65), o perfil de

densidade do feixe $n_b = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}}} \int dP_X dP_Y f_b$:

$$n_b = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}}} \frac{N_b}{\pi^2 \epsilon_{\tilde{x}} \epsilon_{\tilde{y}}} \int dP_X dP_Y \delta \left(\frac{1}{\epsilon_{\tilde{x}}} (X^2 + P_X^2) + \frac{1}{\epsilon_{\tilde{y}}} (Y^2 + P_Y^2) - 1 \right) \quad (3.66)$$

Usando, novamente, as definições $\hat{P}_X = \frac{P_X}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $\hat{P}_Y = \frac{P_Y}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$, e as relações $d\hat{P}_X = \frac{dP_X}{\omega_{\tilde{x}}\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $d\hat{P}_Y = \frac{dP_Y}{\omega_{\tilde{y}}\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$, em coordenadas cilíndricas $\hat{P}_X = P \cos \theta$, $\hat{P}_Y = P \sin \theta$ ficamos com :

$$n_b = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}}} \frac{N_b}{\pi^2 \epsilon_{\tilde{x}} \epsilon_{\tilde{y}}} \sqrt{\epsilon_{\tilde{x}} \epsilon_{\tilde{y}}} \int P dP \int d\theta \delta \left(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2 + P^2 - 1 \right) \quad (3.67)$$

Identificando, novamente, $P dP = \frac{dP^2}{2}$ e definindo $\xi = P^2$, teremos :

$$n_b = \frac{1}{\omega_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{y}}} \frac{N_b}{\pi \epsilon_{\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\tilde{y}}^{\frac{1}{2}}} \int d\xi \delta \left(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2 + \xi - 1 \right) \quad (3.68)$$

resultando em :

$$n_b = \frac{N_b}{\pi \epsilon_{\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\tilde{y}}^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq \hat{X}^2 + \hat{Y}^2 < 1 \quad (3.69a)$$

$$= 0, \quad \hat{X}^2 + \hat{Y}^2 > 1 \quad (3.69b)$$

Usando $\hat{X} = \frac{X}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, $\hat{Y} = \frac{Y}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$ e as Eqs. (3.43a) e (3.43b) teremos :

$$n_b = \frac{N_b}{\pi \omega_{\tilde{x}} \epsilon_{\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \omega_{\tilde{y}} \epsilon_{\tilde{y}}^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq \frac{\tilde{x}^2}{\epsilon_{\tilde{x}} \omega_{\tilde{x}}^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\epsilon_{\tilde{y}} \omega_{\tilde{y}}^2} < 1 \quad (3.70a)$$

$$= 0, \quad \frac{\tilde{x}^2}{\epsilon_{\tilde{x}} \omega_{\tilde{x}}^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\epsilon_{\tilde{y}} \omega_{\tilde{y}}^2} > 1 \quad (3.70b)$$

Identificando $a(s) = \epsilon_{\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \omega_{\tilde{x}}$ e $b(s) = \epsilon_{\tilde{y}}^{\frac{1}{2}} \omega_{\tilde{y}}$ ficamos com a densidade do feixe igual a:

$$n_b = \frac{N_b}{\pi a(s) b(s)}, \quad 0 \leq \frac{\tilde{x}^2}{a^2(s)} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2(s)} < 1 \quad (3.71a)$$

$$= 0, \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2(s)} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2(s)} > 1 \quad (3.71b)$$

Correspondente a um perfil de densidade uniforme na seção transversal elíptica do feixe, consistente com o tipo de distribuição KV (3.65) assumida a priori, demonstrando a auto-consistência do sistema.

3.4 A Equação do Envelope

O envelope do feixe é definido por : $\frac{\tilde{x}^2}{a^2(s)} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2(s)} = 1$. A excursão máxima da partícula carregada na direção- \tilde{x} , corresponde a $\tilde{x} = a(s)$ que pode ocorrer quando $\psi_{\tilde{x}}(s) + \phi_{\tilde{x}0} = 0$ e $\psi_{\tilde{y}}(s) + \phi_{\tilde{y}0} = 0$. Das Eqs. (3.31) teremos :

$$\tilde{x}(s) = A_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}(s) \cos(0) = A_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}} \quad (3.72a)$$

$$\tilde{y}(s) = A_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}} \sin(0) = 0 \quad (3.72b)$$

Assim, $A_{\tilde{x}}$ assume um valor máximo $A_{\tilde{x}} = A_{\tilde{x}}^{max}$. Como visto a área do espaço de fase $(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{ds})$ é :

$$\pi (A_{\tilde{x}}^{max})^2 = \pi \epsilon_{\tilde{x}} \quad (3.73)$$

onde $\epsilon_{\tilde{x}}$ denota a emitância do feixe não-normalizada na direção- \tilde{x} . Então, sabendo que $A_{\tilde{x}}^{max} = \sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}$ e $\tilde{x} = a(s)$, substituimos na Eq. (3.72a) e obtemos $\omega_{\tilde{x}} = \frac{a(s)}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$. Das definições $\alpha_{\tilde{x}}(s) = \sigma_0^2 - 2\kappa_{s\tilde{x}}$ e $\kappa_{s\tilde{x}}(s) = \frac{k_b}{[a(s)+b(s)]a(s)}$, e da expressão $\omega_{\tilde{x}} = \frac{a(s)}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{x}}}}$, substituindo-as na Eq. (3.36) depois de alguma álgebra, obtemos :

$$\frac{d^2a(s)}{ds^2} + \sigma_0^2 a(s) - \frac{2K_b}{[a(s) + b(s)]} - \frac{\epsilon_{\tilde{x}}^2}{a^3(s)} = 0 \quad (3.74)$$

que descreve a evolução do semi-eixo maior $a(s)$ da elipse.

Já a excursão máxima da partícula carregada na direção- \tilde{y} , corresponde a $\tilde{y} = b(s)$ que pode ocorrer quando $\psi_{\tilde{x}}(s) + \phi_{\tilde{x}0} = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_{\tilde{y}}(s) + \phi_{\tilde{y}0} = \frac{\pi}{2}$. Das Eqs. (3.31) teremos :

$$\tilde{x}(s) = A_{\tilde{x}}\omega_{\tilde{x}}(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.75a)$$

$$\tilde{y}(s) = A_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A_{\tilde{y}}\omega_{\tilde{y}} \quad (3.75b)$$

Resultando em $A_{\tilde{y}}$ assumir um valor máximo $A_{\tilde{y}} = A_{\tilde{y}}^{max}$. Como visto, na Introdução e, na seção anterior dessa dissertação, a área do espaço de fase $(\tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{ds})$ é :

$$\pi (A_{\tilde{y}}^{max})^2 = \pi \epsilon_{\tilde{y}} \quad (3.76)$$

Onde $\epsilon_{\tilde{y}}$ denota a emitância do feixe não-normalizada na direção- \tilde{y} . Então, $A_{\tilde{y}}^{max} = \sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}$ e $\tilde{y} = b(s)$, como visto anteriormente; substituimos na Eq. (3.75b) para obtermos $\omega_{\tilde{y}} = \frac{b(s)}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$. Das definições $\alpha_{\tilde{y}}(s) = \sigma_0^2 - 2\kappa_{s\tilde{y}}$ e $\kappa_{s\tilde{y}}(s) = \frac{k_b}{[a(s)+b(s)]b(s)}$, e da expressão $\omega_{\tilde{y}} = \frac{b(s)}{\sqrt{\epsilon_{\tilde{y}}}}$, substituindo-as na Eq. (3.39) depois de executarmos certa álgebra, obtemos :

$$\frac{d^2b(s)}{ds^2} + \sigma_0^2 b(s) - \frac{2K_b}{[a(s) + b(s)]} - \frac{\epsilon_{\tilde{y}}^2}{b^3(s)} = 0 \quad (3.77)$$

que descreve a evolução do semi-eixo menor $b(s)$ da elipse.

As Eqs. (3.74) e (3.77) são as equações do envelope para $a(s)$ e $b(s)$, respectivamente. Costuma-se, na literatura, referir-se as Eqs. (3.74) e (3.77) como as equações do tipo Kapchinskij-Vladimirskij. Observe que o envelope do feixe é descrito por duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas.

Via equações de médias estatísticas, podemos encontrar uma expressão fechada para a emitância do feixe, considerando o seguinte procedimento. Para um feixe elíptico com densidade uniforme, o envelope $a(s)$ e $b(s)$, está relacionado com os momentos estatísticos da distribuição por:

$$a(s) = 2\sqrt{\langle \tilde{x}^2 \rangle_{\perp}} \quad (3.78a)$$

$$b(s) = 2\sqrt{\langle \tilde{y}^2 \rangle_{\perp}} \quad (3.78b)$$

onde $\langle \chi \rangle_{\perp}$ denota a média estatística sobre o espaço de fase transversal do feixe, definido por :

$$\langle \chi \rangle_{\perp} \equiv \frac{\int d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{P}_{\tilde{x}}d\tilde{P}_{\tilde{y}}\chi f_b}{\int d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{P}_{\tilde{x}}d\tilde{P}_{\tilde{y}}f_b} \quad (3.79)$$

Diferenciando as Eqs. (3.78a) e (3.78b) em relação a s , obtemos :

$$a''(s) = \frac{2 \left[\langle \tilde{x}^2 \rangle (\langle \tilde{x}'^2 \rangle + \langle \tilde{x}\tilde{x}'' \rangle) - \langle \tilde{x}\tilde{x}' \rangle^2 \right]}{\langle \tilde{x}^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (3.80a)$$

$$b''(s) = \frac{2 \left[\langle \tilde{y}^2 \rangle (\langle \tilde{y}'^2 \rangle + \langle \tilde{y}\tilde{y}'' \rangle) - \langle \tilde{y}\tilde{y}' \rangle^2 \right]}{\langle \tilde{y}^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (3.80b)$$

Das definições $\alpha_{\tilde{x}}(s) = \sigma_0^2 - 2\kappa_{s\tilde{x}}$ e $\kappa_{s\tilde{x}}(s) = \frac{k_b}{[a(s)+b(s)]a(s)}$ podemos expressar a Eq. (3.30a) como :

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \sigma_0^2\tilde{x} - \frac{2k_b}{[a(s)+b(s)]a(s)}\tilde{x} = 0 \quad (3.81)$$

Multiplicando a Eq. (3.81) por \tilde{x} e tomando a média, obtemos :

$$\langle \tilde{x}\tilde{x}'' \rangle + \sigma_0^2 \langle \tilde{x}^2 \rangle - \frac{2k_b}{[a(s)+b(s)]a(s)} \langle \tilde{x}^2 \rangle = 0 \quad (3.82)$$

Da relação (3.80a), podemos expressar :

$$\langle \tilde{x}\tilde{x}'' \rangle = \frac{a'' \langle \tilde{x}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{2} - \langle \tilde{x}'^2 \rangle + \frac{\langle \tilde{x}\tilde{x}' \rangle^2}{\langle \tilde{x}^2 \rangle} \quad (3.83)$$

Substituindo a relação (3.83) na Eq. (3.82), utilizando a expressão (3.78a) e executando

certa álgebra, obtemos a seguinte equação do envelope para $a(s)$:

$$\frac{d^2a(s)}{ds^2} + \sigma_0^2 a(s) - \frac{2K_b}{[a(s) + b(s)]} - \frac{[16 \langle \tilde{x}'^2 \rangle \langle \tilde{x}^2 \rangle - \langle \tilde{x}\tilde{x}' \rangle^2]}{a^3(s)} = 0 \quad (3.84)$$

Comparando a Eq. (3.84) com a Eq. (3.74) podemos definir :

$$\epsilon_{\tilde{x}}^2 = \left[16 \langle \tilde{x}'^2 \rangle \langle \tilde{x}^2 \rangle - \langle \tilde{x}\tilde{x}' \rangle^2 \right] \quad (3.85)$$

que é a emitância não-normalizada do feixe na direção- \tilde{x} , no referencial de Larmor.

Agora, das definições $\alpha_{\tilde{y}}(s) = \sigma_0^2 - 2\kappa_{s\tilde{y}}$ e $\kappa_{s\tilde{y}}(s) = \frac{k_b}{[a(s)+b(s)]b(s)}$ podemos expressar a Eq. (3.30b) como :

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + \sigma_0^2 \tilde{y} - \frac{2k_b}{[a(s) + b(s)]b(s)} \tilde{y} = 0 \quad (3.86)$$

Multiplicando a Eq. (3.86) por \tilde{y} e tomando a média, obtemos :

$$\langle \tilde{y}\tilde{y}'' \rangle + \sigma_0^2 \langle \tilde{y}^2 \rangle - \frac{2k_b}{[a(s) + b(s)]b(s)} \langle \tilde{y}^2 \rangle = 0 \quad (3.87)$$

Da relação (3.80b), podemos expressar :

$$\langle \tilde{y}\tilde{y}'' \rangle = \frac{b'' \langle \tilde{y}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{2} - \langle \tilde{y}'^2 \rangle + \frac{\langle \tilde{y}\tilde{y}' \rangle^2}{\langle \tilde{y}^2 \rangle} \quad (3.88)$$

Substituindo a relação (3.88) na Eq. (3.87), utilizando a expressão (3.78b) e executando certa álgebra, obtemos a seguinte equação do envelope para $b(s)$:

$$\frac{d^2b(s)}{ds^2} + \sigma_0^2 b(s) - \frac{2K_b}{[a(s) + b(s)]} - \frac{[16 \langle \tilde{y}'^2 \rangle \langle \tilde{y}^2 \rangle - \langle \tilde{y}\tilde{y}' \rangle^2]}{b^3(s)} = 0 \quad (3.89)$$

Comparando a Eq. (3.89) com a Eq. (3.77) podemos definir :

$$\epsilon_{\tilde{y}}^2 = \left[16 \langle \tilde{y}'^2 \rangle \langle \tilde{y}^2 \rangle - \langle \tilde{y}\tilde{y}' \rangle^2 \right] \quad (3.90)$$

que é a emitância não-normalizada do feixe na direção- \tilde{y} , no referencial de Larmor.

A expressões (3.85) e (3.90) são as emitâncias *rms* as quais fornecem medidas estatísticas da área do espaço de fases do feixe projetadas nos planos (\tilde{x}, \tilde{x}') e (\tilde{y}, \tilde{y}') onde $(')$ denota $(\frac{d}{ds})$, como discutido na Introdução desta dissertação.

4 *Estabilidade Não-Linear de um Feixe Descasado Sujeito a um Campo Magnético Focalizador*

Com a dedução das equações do envelope (3.74) e (3.77) podemos tratar o problema proposto por essa dissertação. O propósito é analisar a estabilidade não-linear tomando em consideração efeitos sem simetria axial. Investigaremos o acoplamento não-linear entre o modo tipo simétrico e o modo tipo anti-simétrico baseado nas equações do envelope executando uma transformação canônica conveniente. Considerando um feixe descasado do seu raio de equilíbrio, mostraremos que as oscilações do modo tipo simétrico de amplitude finita levam a oscilações instáveis do modo tipo anti-simétrico para um feixe inicialmente quase-circular. Neste caso, o feixe desenvolve um formato elíptico com um conseqüente incremento no tamanho ao longo de uma direção preferencial. Um modelo simples é elaborado para clarificar o mecanismo básico que gera tal instabilidade e é testado numericamente em comparação com os resultados obtidos da integração numérica direta das equações do envelope.

4.1 *Descrição Hamiltoniana*

Como a formalização hamiltoniana [92,93] apresenta consistência lógica e estrutural na descrição dos sistemas físicos sendo possível a dedução das equações de movimento via equações de Hamilton e, simetrias envolvidas analisando a hamiltoniana de um sistema físico genérico, adotaremos a descrição hamiltoniana para analisar a dinâmica do envelope do feixe e seus respectivos modos simétrico e anti-simétrico sujeitos a certos regimes de parâmetros.

4.1.1 Equações Do Envelope e Soluções Casadas

Consideramos um feixe fino e contínuo propagando-se com velocidade axial média $\beta_b c \hat{\mathbf{e}}_z$ ao longo de um campo focalizador magnético solenoidal uniforme $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ onde c é a velocidade da luz no vácuo. Embora restrinjamos nossa análise à focalização uniforme, esperamos que os resultados sejam válidos, também, para focalização periódico, quando a aproximação de um feixe suave é satisfeita [18]. Desde que estamos usando um campo focalizador solenoidal, é conveniente descrever o sistema no referencial de Larmor que gira em relação ao referencial do laboratório com velocidade angular $\Omega_L = e_b B_z / 2\gamma_b m c$, onde e_b , m e $\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-1/2}$ são, respectivamente, a carga, massa e fator relativístico do feixe. A seção transversal do feixe é assumida ser uma elipse centrada em $\tilde{x} = 0 = \tilde{y}$ que gira com velocidade angular Ω_L tais que seus semi-eixos são sempre paralelos aos eixos \tilde{x} e \tilde{y} do referencial de Larmor. Como mostrado no Cap.3 as equações que governam a evolução do envelope do feixe são :

$$\frac{d^2 a}{ds^2} + \sigma_0^2 a - \frac{2K_b}{a+b} - \frac{\epsilon^2}{a^3} = 0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{d^2 b}{ds^2} + \sigma_0^2 b - \frac{2K_b}{a+b} - \frac{\epsilon^2}{b^3} = 0. \quad (4.1b)$$

onde $s = z$ é a distância de propagação, a e b são os semi-eixos da elipse, $\sigma_0 = e_b B_z / 2\gamma_b \beta_b m c^2$ é um parâmetro que mede a força do campo focalizador, $K_b = 2e_b^2 N_b / \gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2$ é a perveância do feixe, N_b é o número de partículas por comprimento axial, $\epsilon_{\tilde{x}} = \epsilon_{\tilde{y}} = \epsilon$ é a emitância não normalizada do feixe.

É fácil verificar que há uma solução particular das equações do envelope (4.1a) e (4.1b) quando $a(s) = b(s) = r_{b0} = \text{const.}$ Isto corresponde à chamada solução casada para a qual um feixe circular de raio r_{b0} preserva seu formato durante sua propagação submetido a um campo focalizador. O raio casado obtido pela equação $\sigma_0^2 r_{b0} - K_b/r_{b0} - \epsilon^2/r_{b0}^3 = 0$ é :

$$r_{b0} = \left[\frac{K_b + (K_b^2 + 4\sigma_0^2 \epsilon^2)^{1/2}}{2\sigma_0^2} \right]^{1/2}. \quad (4.2)$$

A análise da estabilidade linear mostra que as oscilações de pequena amplitude em torno da solução casada são sempre estáveis [86]. Nosso propósito é investigar o que acontece quando as oscilações de amplitude finita são levadas em consideração.

4.1.2 Dedução da Hamiltoniana

Para analisar as oscilações de amplitude finita, primeiramente, observamos que as equações (4.1a) e (4.1b) podem se expressas como:

$$\frac{da}{ds} = p_a, \quad (4.3a)$$

$$\frac{dp_a}{ds} = -\sigma_0^2 a + \frac{2K_b}{a+b} + \frac{\epsilon^2}{a^3}, \quad (4.3b)$$

$$\frac{db}{ds} = p_b, \quad (4.3c)$$

$$\frac{dp_b}{ds} = -\sigma_0^2 b + \frac{2K_b}{a+b} + \frac{\epsilon^2}{b^3}. \quad (4.3d)$$

onde definimos os momenta p_a e p_b .

Usando as equações de Hamilton :

$$\frac{da}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad (4.4a)$$

$$\frac{dp_a}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial a}, \quad (4.4b)$$

$$\frac{db}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_b}, \quad (4.4c)$$

$$\frac{dp_b}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial b}. \quad (4.4d)$$

podemos escrever a hamiltoniana :

$$H(a, p_a; b, p_b) = H_a(a, p_a) + H_b(b, p_b) + H_c(a, b) \quad (4.5)$$

onde

$$H_a = \frac{p_a^2}{2} + \frac{\sigma_0^2 a^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2a^2}, \quad (4.6a)$$

$$H_b = \frac{p_b^2}{2} + \frac{\sigma_0^2 b^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2b^2}, \quad (4.6b)$$

$$H_c = -2K_b \ln(a+b). \quad (4.6c)$$

Fica claro do hamiltoniano (4.5) que quando as forças eletromagnetoestáticas são desprezíveis, $K_b \rightarrow 0$, a dinâmica de a e b torna-se desacoplada e a instabilidade não-linear está ausente. Neste caso, H_a e H_b são hamiltonianos autônomos de um grau de liberdade e portanto são completamente integráveis [97], produzindo trajetórias periódicas regulares para $a(s)$ e $b(s)$. Essas trajetórias são visualizadas pelas curvas de níveis de $H_a(a, p_a)$ na figura (4), equivalentes para H_b . Analisando a figura observa-se que existe a solução de equilíbrio correspondente a $a(s) = r_{b0}$, $p_a = 0$.

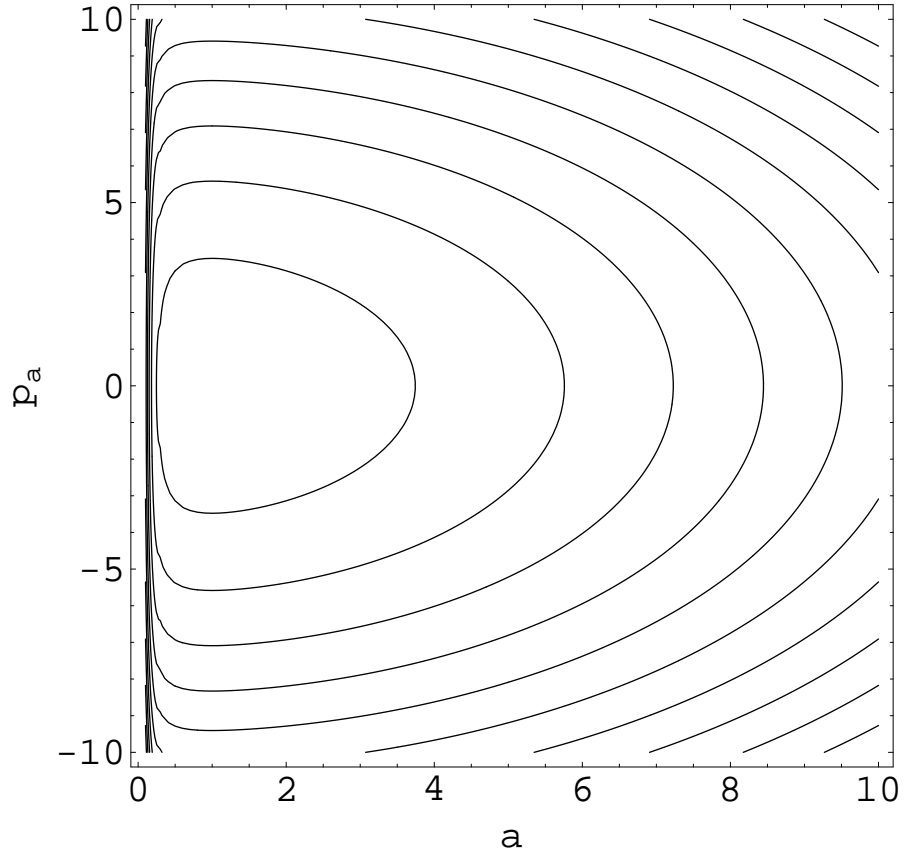


Figura 4: Curvas de nível do hamiltoniano H_a .

Como discutido, estamos interessados em investigar a estabilidade de feixes axialmente simétricos com $a(s) \approx b(s)$ submetidos a oscilações simétricas de amplitude finita ao redor de r_{b0} . Por causa disso, é conveniente introduzir novas variáveis canônicas obtidas a partir da função geratriz :

$$\mathcal{F}(a, b; P_S, P_A) = \frac{(a + b)P_S + (a - b)P_A}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

que define as seguintes transformadas :

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = \frac{P_S + P_A}{\sqrt{2}}, \quad (4.8a)$$

$$p_b = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b} = \frac{P_S - P_A}{\sqrt{2}}, \quad (4.8b)$$

$$X_S = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_S} = \frac{a + b}{\sqrt{2}}, \quad (4.8c)$$

$$X_A = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_A} = \frac{a - b}{\sqrt{2}}. \quad (4.8d)$$

Observe que X_S e P_S são sensíveis às oscilações simétricas onde $a(s)$ e $b(s)$ oscilam em

fase, e X_A e P_A são sensíveis às oscilações anti-simétricas onde $a(s)$ e $b(s)$ oscilam em oposição.

O novo hamiltoniano é dado por $\hat{H} = H + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}$, expresso nas variáveis (X_S, X_A, P_S, P_A) . Da função geratriz (4.7) obtemos $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = 0$. Fazendo uso das Eqs. (4.8c) e (4.8d) para expressar $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_S + X_A)$ e $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_S - X_A)$ o novo hamiltoniano \hat{H} , é dado por :

$$\hat{H}(X_S, P_S; X_A, P_A) = \hat{H}_S(X_S, P_S) + \hat{H}_A(X_A, P_A) + \hat{H}_C(X_S, X_A), \quad (4.9)$$

onde

$$\hat{H}_S = \frac{P_S^2}{2} + \frac{\sigma_0^2 X_S^2}{2} - K_b \ln X_S^2, \quad (4.10a)$$

$$\hat{H}_A = \frac{P_A^2}{2} + \frac{\sigma_0^2 X_A^2}{2}, \quad (4.10b)$$

$$\hat{H}_C = 2\epsilon^2 \frac{X_S^2 + X_A^2}{(X_S^2 - X_A^2)^2}. \quad (4.10c)$$

Observe que para feixes em que os efeitos da emitância forem desprezíveis, $\epsilon \rightarrow 0$, o acoplamento no hamiltoniano \hat{H} desaparece. Neste caso, as oscilações simétricas e anti-simétricas tornam-se desacopladas e as instabilidades estão ausentes. Assim, notamos que em ambos os casos limites; quando os efeitos da emitância são desprezíveis ou quando os efeitos das forças eletromagnetoestáticas são insignificantes a instabilidade desaparece.

Do hamiltoniano (4.9) usando as equações de Hamilton encontramos as seguintes equações para X_S , P_S , X_A e P_A , respectivamente :

$$\frac{dX_S}{ds} = P_S, \quad (4.11a)$$

$$\frac{dP_S}{ds} = -\sigma_0^2 X_S + \frac{2K_b}{X_S} + 2\epsilon^2 \left[\frac{2X_S^3 + 6X_S X_A^2}{(X_S^2 - X_A^2)^3} \right], \quad (4.11b)$$

$$\frac{dX_A}{ds} = P_A, \quad (4.11c)$$

$$\frac{dP_A}{ds} = -\sigma_0^2 X_A - 2\epsilon^2 \left[\frac{2X_A^3 + 6X_A X_S^2}{(X_S^2 - X_A^2)^3} \right]. \quad (4.11d)$$

Nas novas variáveis a solução casada obtida tomando $\frac{dP_S}{ds} = 0$ e $\frac{dP_A}{ds} = 0$ é :

$$X_S(s) = X_{S0} \equiv \left[\frac{K + (K^2 + 4\sigma_0^2 \epsilon^2)^{1/2}}{\sigma_0^2} \right]^{1/2} \quad (4.12)$$

com $X_A(s) = P_A(s) = P_S(s) = 0$. Este ponto corresponde ao mínimo de energia de \hat{H} , obtido impondo que as derivadas do hamiltoniano com respeito a todas as variáveis

canônicas anulam-se. Assim, as oscilações descasadas são energia adicional dada ao sistema. Em geral, a energia em excesso pode aparecer como oscilações em ambos graus de liberdade simétrico e anti-simétrico, e o acoplamento não-linear dado por \hat{H}_c pode induzir a troca da energia entre os dois modos vibratórios. Portanto, um feixe inicialmente redondo sujeito a oscilações simétricas pode, em princípio, começar a desenvolver a instabilidade tipo anti-simétrica tornando-se elíptico. Um modelo simples será construído para investigar tal possibilidade.

4.2 O Modelo

Consideramos um feixe quase-circular com $X_A, P_A \approx 0$ expandindo em série de Taylor o hamiltoniano (4.9) em torno da solução casada (4.12) até a primeira ordem para X_A e P_A , obtemos as seguintes dinâmicas para as oscilações simétricas e anti-simétricas, respectivamente :

$$\mathcal{H}_S(X_S, P_S) = \frac{P_S^2}{2} + \frac{\sigma_0^2 X_S^2}{2} - 2K_b \ln X_S + \frac{2\epsilon^2}{X_S^2}, \quad (4.13a)$$

$$\mathcal{H}_A(X_A, P_A, s) = \frac{P_A^2}{2} + \frac{\sigma_0^2 X_A^2}{2} + \frac{6 \epsilon^2 X_A^2}{X_S^4} \quad (4.13b)$$

Definindo $\omega^2(s) \equiv \sigma_0^2 + \frac{12\epsilon^2}{X_S^4(s)}$, podemos expressar o hamiltoniano (4.13b) como :

$$\mathcal{H}_A(X_A, P_A, s) = \frac{P_A^2}{2} + \frac{\omega^2(s) X_A^2}{2} \quad (4.14)$$

No hamiltoniano (4.13b), $X_S(s)$ é uma solução particular obtida do hamiltoniano (4.13a). Entretanto, observe que a dinâmica de $X_S(s)$ e $P_S(s)$ é totalmente independente da dinâmica de $X_A(s)$ e $P_A(s)$ nessa aproximação.

4.2.1 Dinâmica Simétrica

Vamos, primeiramente, examinar as oscilações simétricas determinadas pelo hamiltoniano (4.13a). \mathcal{H}_S é um hamiltoniano autônomo de um grau de liberdade que é, portanto, completamente integrável [97], produzindo trajetórias periódicas regulares para $X_S(s)$. Essas trajetórias podem ser visualizadas pelas curvas de níveis de $\mathcal{H}_S(X_S, P_S)$ da figura (5) :

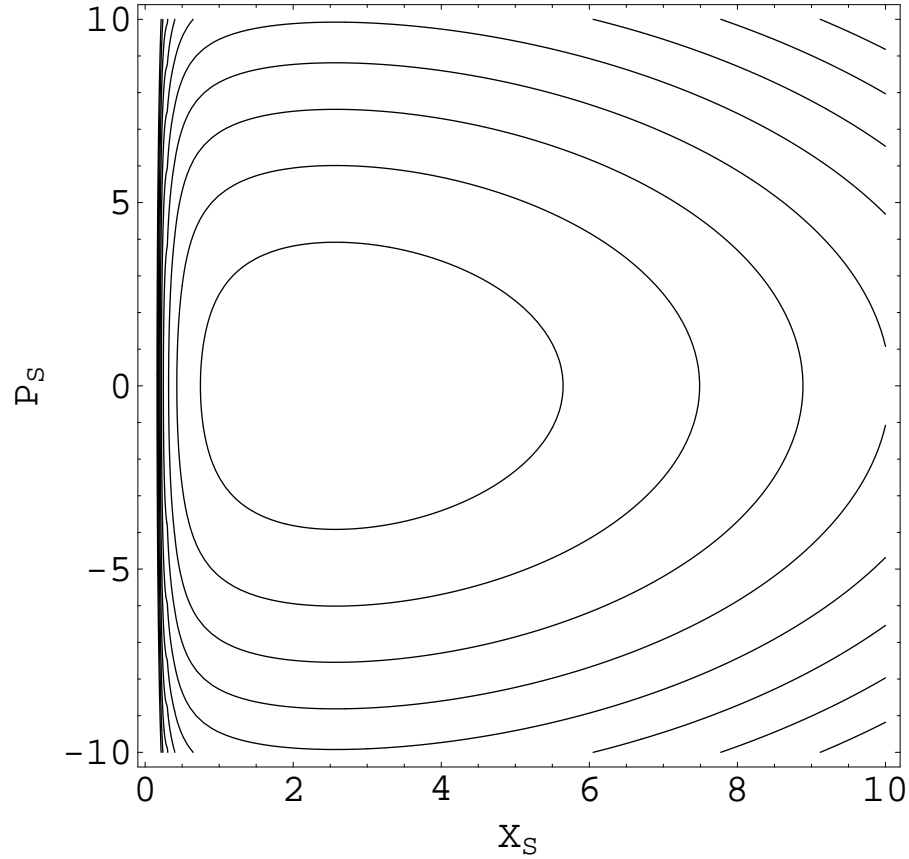


Figura 5: Gráfico de \mathcal{H}_S .

Analisando o gráfico (5), observa-se que existe uma solução de equilíbrio correspondente à solução casada $X_S = X_{S0}$, $P_S = 0$. Nas vizinhanças desse equilíbrio encontramos trajetórias correspondentes a soluções descasadas onde X_S oscila entre um valor máximo X_{Smax} e um mínimo X_{Smin} com uma dada periodicidade. Para qualificar diferentes soluções decasadas nós definimos o parâmetro amplitude de descasamento como $\nu \equiv X_{Smax}/X_{S0} \geq 1$. Embora, não possamos escrever uma expressão analítica geral para $X_S(s)$ algumas importantes características do movimento são conhecidas [78]. Podemos determinar um número de onda $k_S(\nu)$ que mede a periodicidade de cada órbita variando de um valor mínimo $k_{Smin} = k_S(\nu = 1) = 2\pi/\lambda = [K_b^2 + 4\sigma_0^2\epsilon^2 - K_b(K_b^2 + 4\sigma_0^2\epsilon^2)^{1/2}]^{1/2}/\epsilon$, para oscilações lineares pequenas em torno da solução casada a um valor máximo $k_{Smax} = k_S(\nu \rightarrow \infty) = 2\sigma_0$ quando órbitas de alta amplitude de descasamento são consideradas [77]; λ é o comprimento de onda. Esta última classe de órbitas é de relevância particular aqui e pode aproximadamente ser descrita como as trajetórias de um oscilador harmônico bloqueado em $X_S \approx 0$ [98]. Isto é assim

porque quando X_S é grande o termo focalizador no hamiltoniano (4.13a) (proporcional a σ_0^2) domina sobre o termo da força eletromagnetoestática e da emitância (proporcionais a K_b e ϵ^2 , respectivamente) e X_S move-se harmonicamente; para X_S pequeno os termos de K_b e ϵ tornam-se dominantes, agindo como forças centrífugas que refletem rapidamente em X_S .

4.2.2 Dinâmica Anti-simétrica

Para as oscilações anti-simétricas, o hamiltoniano \mathcal{H}_A descreve um sistema tipo oscilador harmônico com a frequência $\omega^2(s)$ variando no *tempo*. Como por sua definição $\omega^2(s)$ é sempre positiva independente da solução particular $X_S(s)$ tomada em consideração, a força agindo sobre X_A é sempre restauradora. Conseqüentemente, espera-se que a dinâmica de $X_A(s)$ seja estável quando podemos encontrar uma frequência efetiva $\omega_{eff}^2 = \overline{\omega^2(s)} > 0$, onde a barra significa média sobre s . Esse é exatamente o caso para oscilações de pequena amplitude em torno da solução casada ($\nu \rightarrow 1$) onde $\omega_{eff}^2 \approx \sigma_0^2 + 12\epsilon^2/X_{S0}^4$. Entretanto, se considerarmos agora grandes amplitudes o cenário muda significativamente. $X_S(s)$ assume trajetórias tipo oscilador harmônico bloqueado discutido previamente. Quando X_S é grande e movendo-se harmonicamente, sua dinâmica não afeta X_A pois $12\epsilon^2/X_S^4(s) \ll \sigma_0^2$ e $\omega^2 \approx \sigma_0^2$. Por outro lado, quando X_S está próximo de 0 $12\epsilon^2/X_S^4(s)$ torna-se muito grande e uma interação abrupta entre as oscilações simétricas e anti-simétricas ocorre. Assim, em vez de osciladores harmônicos com uma frequência eficaz $\omega_{eff}^2 = \overline{\omega^2(s)}$ encontrada para amplitudes pequenas, a dinâmica de X_A é melhor descrita por um oscilador harmônico livre que é afetado periodicamente por um impulso rápido devido à dinâmica de X_S .

Podemos visualizar essas situações, construindo um gráfico de (ω^2 vs s).

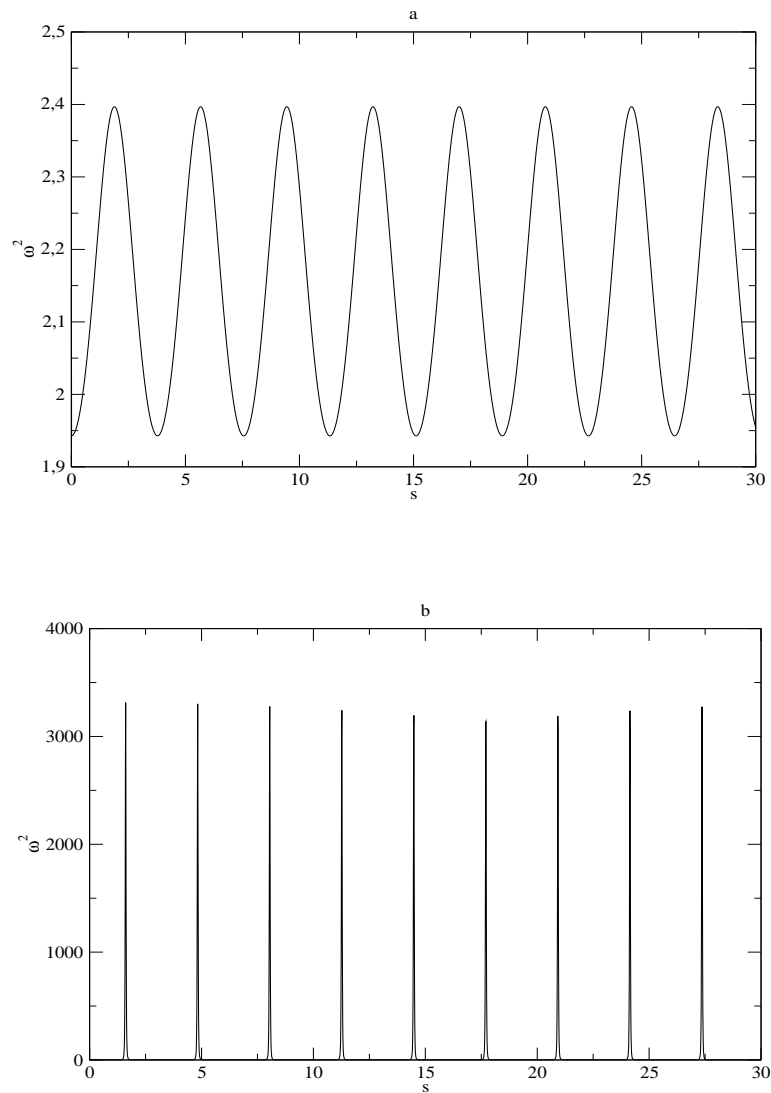


Figura 6: Gráficos de $(\omega^2 \text{ vs } s)$. (a) Para oscilações de pequena amplitude de X_S em torno da solução casada, $\nu \ll 1$. (b) Para oscilações de grande amplitude de X_S em torno da solução casada, $\nu \gg 1$.

Na figura (6) gráfico superior, $\omega^2(s)$ possui uma forma senoidal oscilando em torno de um valor constante $\omega_{eff}^2 = \overline{\omega^2(s)} \approx 2.125$. Na figura (6) gráfico inferior, $\omega^2(s)$ permanece igual a unidade sofrendo bruscas variações em *tempos* periódicos bem definidos. Tais variações são de grande amplitude num curto intervalo de *tempo* podendo ser modeladas pelas funções delta de Dirac.

4.2.3 Mapeamento

Apesar de nossa falta de conhecimento da forma exata de $X_S(s)$, nós podemos estimar como sua dinâmica afeta X_A para grandes amplitudes de descasamento examinando um modelo simples. Da análise dos gráficos (6), podemos modelar os impulsos de X_S na dinâmica de X_A por funções delta de Dirac, isto é, nós supomos no modelo que a frequência no hamiltoniano (4.14) é :

$$\omega^2(s) = \sigma_0^2 + h \sum_{n=1}^{\infty} \delta(s - nS), \quad (4.15)$$

onde $S = 2\pi/k_S(\nu)$ é o período da órbita descasada $X_S(s)$ e

$$h = 12\epsilon^2 \int_s^{s+S} ds/X_S^4 \quad (4.16)$$

é a amplitude efetiva de cada impulso.

Com exceção do intervalo de ação dos impulsos, o movimento anti-simétrico é descrito por um oscilador harmônico com $\omega^2(s) = \sigma_0^2$ sendo conveniente introduzir as variáveis canônicas ângulo-ação (J, θ) expressas como:

$$X_A = \sqrt{\frac{2J}{\sigma_0}} \cos \theta, \quad (4.17a)$$

$$P_A = -\sqrt{2\sigma_0 J} \sin \theta \quad (4.17b)$$

tais que J é constante e $d\theta/ds = \sigma_0$ [97]. Em cada impulso, J e θ sofrem uma variação descontínua que pode ser calculada da dinâmica gerada pelo hamiltoniano (4.14) usando as relações (4.17). Um mapeamento simplético [97] baseado em aplicações sucessivas de transformações canônicas apropriadas pode assim ser construído dando origem às variáveis ângulo-ação (J_{n+1}, θ_{n+1}) depois de $(n+1)^{\text{th}}$ impulsos em função de seus valores (J_n, θ_n) depois que n^{th} impulsos agirem sobre o sistema.

Primeiramente, vamos estudar como o oscilador harmônico evolui entre duas deltas consecutivas. Entre ambas podemos definir uma função geratriz :

$$G(J^*, \theta) = (\theta + \sigma_0 S) J^* \quad (4.18)$$

que define as seguintes transformadas :

$$\theta^* = \frac{\partial G}{\partial J^*} = \theta + \sigma_0 S, \quad J = \frac{\partial G}{\partial \theta} = J^* \quad (4.19)$$

Na perturbação causada pela delta transformamos as coordenadas (J^*, θ^*) para (P_A^*, X_A^*)

com $X_A^* = \sqrt{\frac{2J}{\sigma_0}} \cos(\theta + \sigma_0 S)$ e $P_A^* = -\sqrt{2\sigma_0 J} \sin(\theta + \sigma_0 S)$ e utilizamos a seguinte função geratriz :

$$W(X_A^*, P_A) = \left(P_A - \frac{hX_A^*}{2} \right) X_A^* \quad (4.20)$$

Assim um impulso transforma o sistema da seguinte maneira :

$$X_A = \frac{\partial W}{\partial P_A} = X_A^*, \quad P_A^* = \frac{\partial W}{\partial X_A^*} = P_A - hX_A^* = P_A - hX_A \quad (4.21)$$

que equivale dizer que o impulso é tão rápido que a “posição” não muda, apenas o momento sofre uma descontinuidade.

Como a ação J equivale a $\mathcal{H}_A = \sigma_0 J$ teremos $J^{antes} = \left[\frac{P_A^2 + \sigma_0^2 X_A^2}{2\sigma_0} \right]^{antes}$ antes do impulso e $J^{depois} = \left[\frac{P_A^{*2} + \sigma_0^2 X_A^{*2}}{2\sigma_0} \right]^{depois}$ depois, usando as relações (4.21) obtemos :

$$J^{depois} = J^{antes} - h \frac{X_A P_A}{\sigma_0} + \frac{h^2 X_A^2}{2\sigma_0} \quad (4.22)$$

Usando as equações (4.17) na relação (4.22) teremos :

$$J^{depois} = J^{antes} + \frac{2hJ^{antes}}{\sigma_0} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{h^2 J^{antes}}{\sigma_0^2} \cos^2(\theta) \quad (4.23)$$

Agora considerando a translação entre as duas deltas consecutivas usaremos as equações (4.19) obtendo:

$$J^{depois} = J^{antes} + \frac{2hJ^{antes}}{\sigma_0} \cos(\theta + \sigma_0 S) \sin(\theta + \sigma_0 S) + \frac{h^2 J^{antes}}{\sigma_0^2} \cos^2(\theta + \sigma_0 S) \quad (4.24)$$

Generalizando para $(n+1)^{th}$ impulsos e observando que no intervalo entre a direita da n^{th} delta e a esquerda da $(n+1)^{th}$ delta não há impulsos agindo sobre o sistema e a energia se conserva podemos expressar o seguinte mapeamento :

$$J_{n+1} = J_n + \frac{2hJ_n}{\sigma_0} \cos(\theta_n + \sigma_0 S) \sin(\theta_n + \sigma_0 S) + \frac{h^2 J_n}{\sigma_0^2} \cos^2(\theta_n + \sigma_0 S) \quad (4.25)$$

Usando a relação trigonométrica $\cos x \sin x = 1/2 \sin 2x$ e fatorando termos a equação (4.25) é escrita como :

$$J_{n+1} = J_n \left\{ 1 + \frac{h^2 \cos^2(\theta_n + \sigma_0 S) + h\sigma_0 \sin[2(\theta_n + \sigma_0 S)]}{\sigma_0^2} \right\}, \quad (4.26)$$

A variável θ pode ser escrita, levando em consideração as equações (4.17), como

$\tan \theta = -\frac{1}{\sigma_0} \frac{P_A}{X_A}$. Depois da perturbação causada pelo impulso teremos :

$$\tan \theta^{depois} = -\frac{1}{\sigma_0} \frac{P_A^*}{X_A^*} \quad (4.27)$$

Usando as relações (4.21) obtemos :

$$\tan \theta^{depois} = -\frac{1}{\sigma_0} \frac{P_A}{X_A} + \frac{h}{\sigma_0} \quad (4.28)$$

Das equações (4.17) resulta a seguinte relação entre θ posterior a delta, e θ anterior

$$\tan \theta^{depois} = \tan \theta^{antes} + \frac{h}{\sigma_0} \quad (4.29)$$

Considerando a translação entre as duas deltas consecutivas e usando as equações (4.19) obtemos:

$$\tan \theta^{depois} = \tan(\theta^{antes} + \sigma_0 S) + \frac{h}{\sigma_0} \quad (4.30)$$

onde h é a amplitude efetiva do impulso como já definida.

Generalizando para $(n+1)^{\text{th}}$ impulsos e observando que no intervalo entre a direita da n^{th} delta e a esquerda da $(n+1)^{\text{th}}$ delta não há impulsos agindo sobre o sistema podemos expressar o seguinte mapeamento :

$$\theta_{n+1} = \tan^{-1} \left[\tan(\theta_n + \sigma_0 S) + \frac{h}{\sigma_0} \right]. \quad (4.31)$$

A equação (4.26) mostra que dependendo do valor particular da fase θ_n , a variação da ação, $J_{n+1} - J_n$, devido ao impulso pode ser positiva ou negativa. Ou seja, durante cada interação rápida de X_A e X_S , a amplitude da oscilação anti-simétrica pode aumentar ou diminuir dependendo da fase relativa de seus movimentos. Se a fase vagar de 0 a 2π enquanto o feixe propaga, esperamos que nenhuma energia em excesso seja transferida para o grau de liberdade anti-simétrico, sendo as oscilações descasadas estáveis. Se ocorrer uma interação coerente entre X_A e X_S com θ_n indo em direção a um valor fixo, um crescimento instável de oscilações anti-simétricas pode ocorrer. Uma análise das equações (4.26) e (4.31) conduz à conclusão que existe pelo menos um ponto fixo de atração para θ_n que corresponde a um aumento de J_n exatamente quando a amplitude eficaz h excede um limiar.

Para encontrar esse ponto fixo de atração partimos da condição de ponto fixo :

$$\tan \theta_{n+1} = \tan \theta_n \quad (4.32)$$

Usando a propriedade trigonométrica $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ no mapeamento (4.31)

teremos a seguinte equação para a condição de ponto fixo (4.32):

$$\tan(\sigma_0 S) \tan^2 \theta_n - \frac{h}{\sigma_0} \tan(\sigma_0 S) \tan \theta_n + \tan(\sigma_0 S) + \frac{h}{\sigma_0} = 0, \quad (4.33)$$

Sendo a solução igual a :

$$\tan \theta_n = \frac{\tan(\sigma_0 S) h / \sigma_0 \pm \sqrt{\tan^2(\sigma_0 S) h^2 / \sigma_0^2 - 4 \tan^2(\sigma_0 S) - 4 \tan(\sigma_0 S) h / \sigma_0}}{2 \tan(\sigma_0 S)}, \quad (4.34)$$

Para analisar a condição de estabilidade teremos que expressar (4.34) como:

$$\tan \theta_n = \frac{\tan(\sigma_0 S) h / \sigma_0 + \sqrt{\tan^2(\sigma_0 S) h^2 / \sigma_0^2 - 4 \tan^2(\sigma_0 S) - 4 \tan(\sigma_0 S) h / \sigma_0}}{2 \tan(\sigma_0 S)}, \quad (4.35)$$

E analisar a condição :

$$\tan^2(\sigma_0 S) h^2 / \sigma_0^2 - 4 \tan^2(\sigma_0 S) - 4 \tan(\sigma_0 S) h / \sigma_0 > 0 \quad (4.36)$$

Da inequälidade (4.36) obtemos :

$$h > \sigma_0 \left[\frac{4 + 4 \sec(\sigma_0 S)}{2 \tan(\sigma_0 S)} \right] \quad (4.37)$$

Usando a seguinte relação trigonométrica $\tan x/2 = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ e efetuando certa álgebra teremos a seguinte condição de instabilidade :

$$h > -2\sigma_0 \tan(\sigma_0 S/2) \quad (4.38)$$

Portanto quando a amplitude eficaz h exceder o limiar :

$$h^* = -2\sigma_0 \tan(\sigma_0 S/2) \quad (4.39)$$

as oscilações simétricas X_S levam a oscilações instáveis do tipo anti-simétrico X_A para um feixe inicialmente quase-circular. Neste caso, o feixe começa a desenvolver um formato elíptico com um conseqüente incremento no tamanho ao longo de uma direção preferencial que será mostrado na próxima seção pela integração numérica das equações (4.11) e comprovado através de simulações numéricas auto-consistentes no capítulo 5.

Na derivação de Eq. (4.39) foi usado o fato que o conjunto dos parâmetros está contido no intervalo de $\pi < \sigma_0 S < \sqrt{2}\pi$, inferido dos valores limites k_{Smax} e k_{Smin} . Posteriormente, a condição da instabilidade $h > h^*$ será testada numericamente, mas é já possível verificar os dois casos limites discutidos brevemente. Em uma direção, quando os efeitos da emitância são desprezíveis as equações do envelope são estáveis porque as oscilações simétricas e anti-simétricas são desacopladas; o modelo concorda com isso porque $h \rightarrow 0$

para $\epsilon \rightarrow 0$ da definição de h (4.16). Na outra direção quando os efeitos da força eletromagnetoestática são insignificantes as equações do envelope são estáveis porque $a(s)$ e $b(s)$ são desacoplados; o modelo concorda outra vez porque como $K \rightarrow 0$, todas as órbitas descasadas oscilam ao redor X_{S0} com período π/σ_0 (isto pode ser verificado dos valores de k_{Smax} e k_{Smin}) e $h^* \rightarrow \infty$.

4.3 Análise Numérica da Equação do Envelope

Nesta seção [99] investigaremos os resultados obtidos pela integração direta das equações do envelope (4.11). A análise é simplificada se nós normalizarmos as quantidades de acordo com

$$\sigma_0 s \rightarrow s, (\sigma_0/\epsilon)^{1/2} X_{S,A} \rightarrow X_{S,A}. \quad (4.40)$$

Depois de uma certa álgebra ficamos com somente um parâmetro nas equações igual a :

$$\eta \equiv \frac{K_b}{\sigma_0 \epsilon} \quad (4.41)$$

Sendo as equações (4.11) expressas como :

$$\frac{dX_S}{ds} = P_S, \quad (4.42a)$$

$$\frac{dP_S}{ds} = -X_S + \frac{2\eta}{X_S} + 2 \left[\frac{2X_S^3 + 6X_S X_A^2}{(X_S^2 - X_A^2)^3} \right] \quad (4.42b)$$

$$\frac{dX_A}{ds} = P_A, \quad (4.42c)$$

$$\frac{dP_A}{ds} = -X_A - 2 \left[\frac{2X_A^3 + 6X_A X_S^2}{(X_S^2 - X_A^2)^3} \right] \quad (4.42d)$$

O parâmetro η mede a força relativa entre a força eletromagnetoestática e os efeitos da emitância. Quando $\eta \ll 1$ o feixe encontra-se no domínio da emitância mas quando $\eta \gg 1$, está no domínio da força eletromagnetoestática. Como discutido, sabemos que nos limites $\eta \rightarrow 0$ e $\eta \rightarrow \infty$ as equações são integráveis e estáveis.

4.3.1 Seções de Poincaré

Começamos nossa investigação analisando o espaço de fases $(X_S, P_S; X_A, P_A)$. Como este é um sistema de dois graus de liberdade, é prático construir uma seção de Poincaré [97]. Escolhemos plotar (X_A, P_A) toda vez que X_S é um máximo, isto é, $P_S = 0$ com $dP_S/ds < 0$, condição suficiente para assegurar a unicidade das trajetórias em nossas seções de

Poincaré. As condições iniciais para um único plote têm que ser escolhidas tais que todas conduzem ao mesmo valor do hamiltoniano \hat{H} da equação (4.9). Conseqüentemente, primeiro consideramos a solução de simetria axial com amplitude descasada ν e computamos o valor correspondente do hamiltoniano $\hat{H}(\nu)$. Então, procuramos por outras órbitas com o mesmo $\hat{H}(\nu)$. Como mencionado, a solução casada corresponde ao mínimo de energia do hamiltoniano, isto é, todas as órbitas descasadas terão $\hat{H}(\nu > 1) > \hat{H}(\nu = 1)$, e terão energia adicional que permitirá o acoplamento entre as oscilações simétricas e anti-simétricas.

Nas figuras abaixo apresentamos as seções de Poincaré obtidos para $\eta = 1.5$ e $\eta = 3.0$ incrementando os valores da amplitude de descasamento ν . Em todas as seções a solução com simetria axial corresponde ao ponto fixo na origem $X_A = 0 = P_A$. Cada seção de Poincaré está acompanhada de dois gráficos, um correspondendo ao semi-eixos a, b em função de s e o outro para X_S, X_A em função de s .

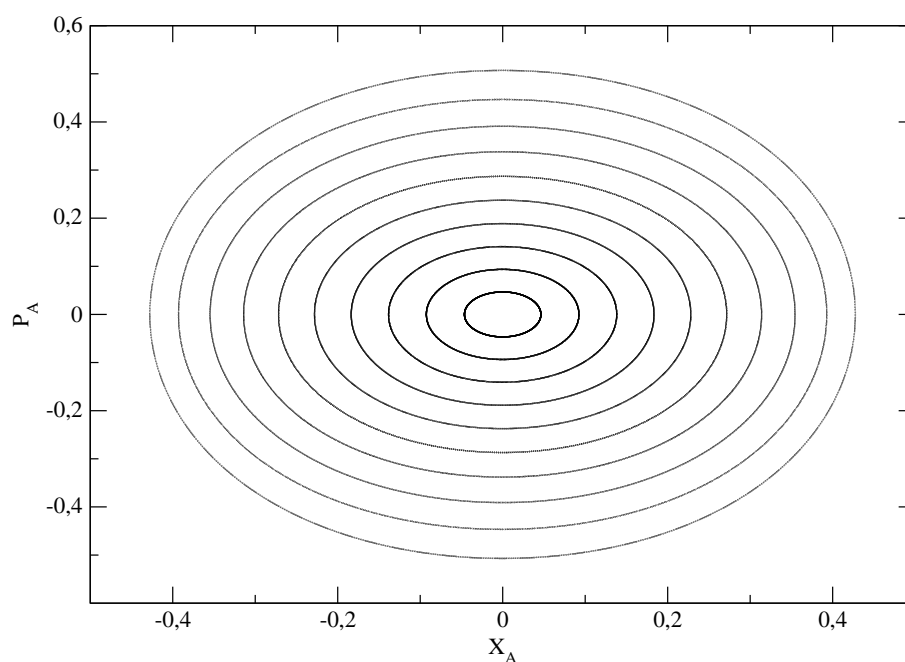


Figura 7: Seção de Poincaré para $\eta = 1.5$ e $\nu = 1.2$

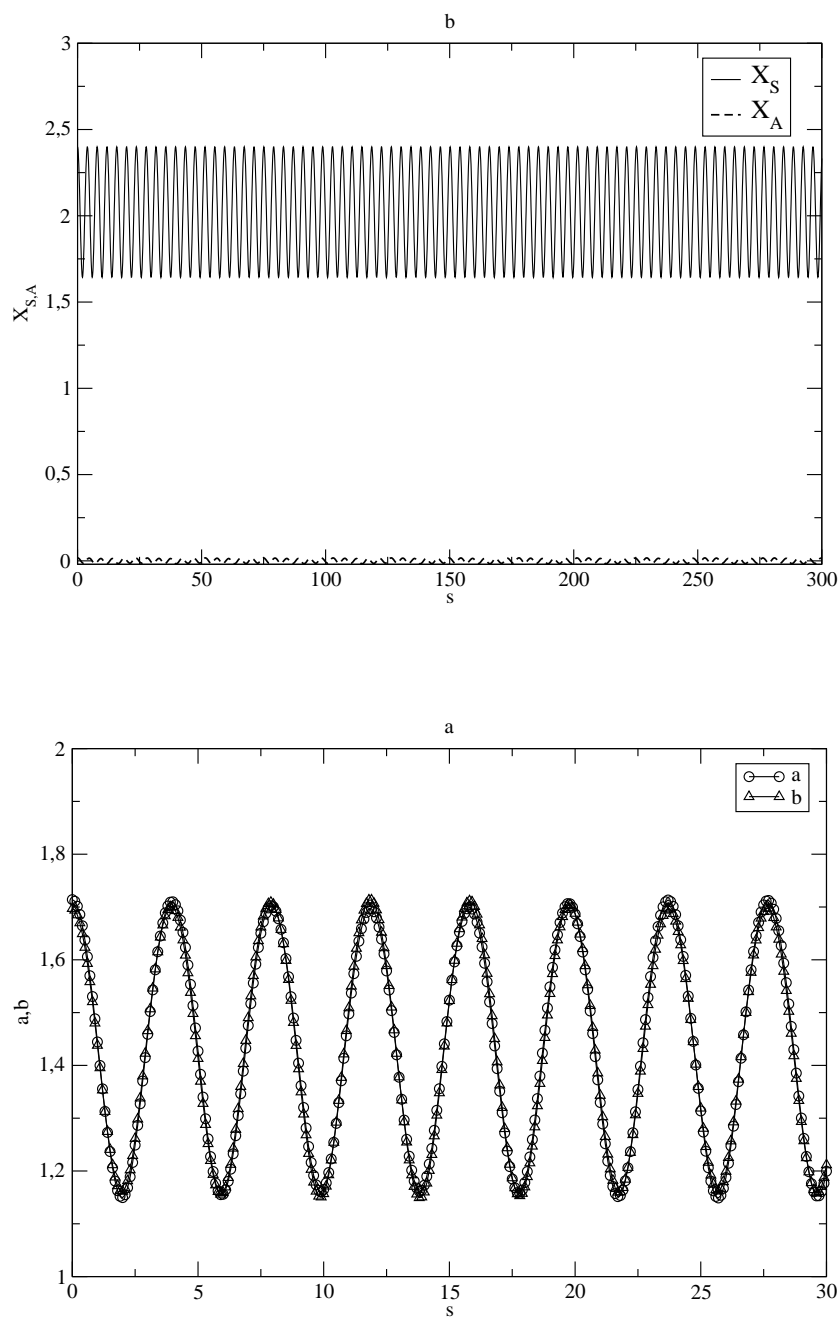


Figura 8: Modos oscilatórios e o envelope em função do *tempo* para $\eta = 1.5$ e $\nu = 1.2$. (a) X_S, X_A em função de s . (b) a, b em função de s .

Na figura (7) para $\eta = 1.5$ e $\nu = 1.2$ o ponto de equilíbrio $X_A = 0 = P_A$ permanece estável, conseqüentemente o envelope permanece circular, gráfico (8b), sem troca de energia entre os modos oscilatórios simétricos X_S e anti-simétricos X_A como ilustrado na figura (8a).

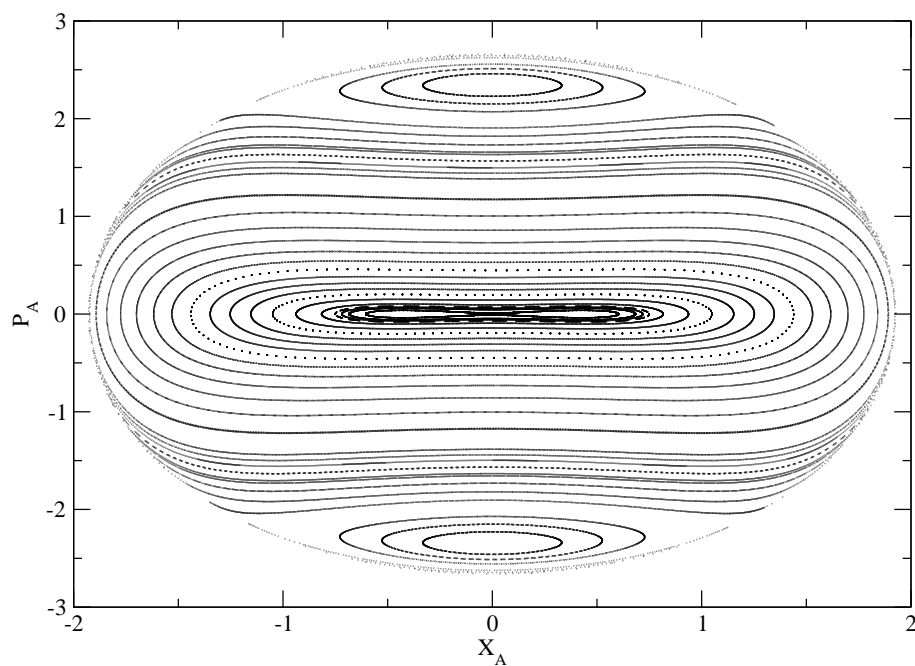


Figura 9: Seção de Poincaré para $\eta = 1.5$ e $\nu = 2.0$

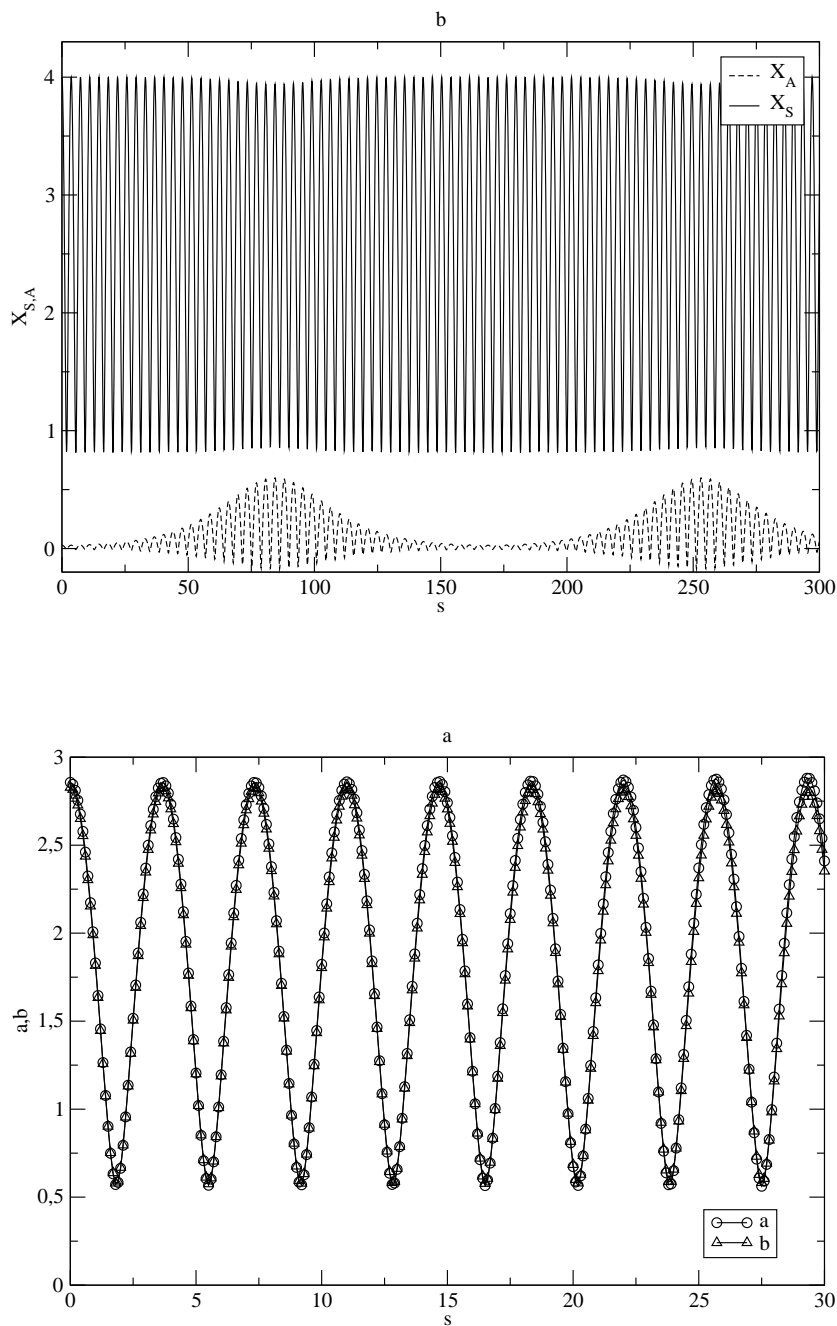


Figura 10: Modos oscilatórios e o envelope em função do *tempo* para $\eta = 1.5$ e $\nu = 2.0$.
 (a) X_S, X_A em função de s . (b) a, b em função de s .

No gráfico (9) ainda para $\eta = 1.5$, porém aumentando o descasamento para $\nu = 2.0$ o ponto de equilíbrio $X_A = 0 = P_A$ tornou-se instável. Aparecem duas ilhas de ressonância com seus respectivos pontos de equilíbrio estáveis, no topo e abaixo da seção. O envelope permanece quase-circular até $s = 30$ ilustrado no gráfico (10b), mas o modo oscilatório simétrico X_S começa a trocar um mínimo de energia com o anti-simétrico X_A , mostrado no gráfico (10a).

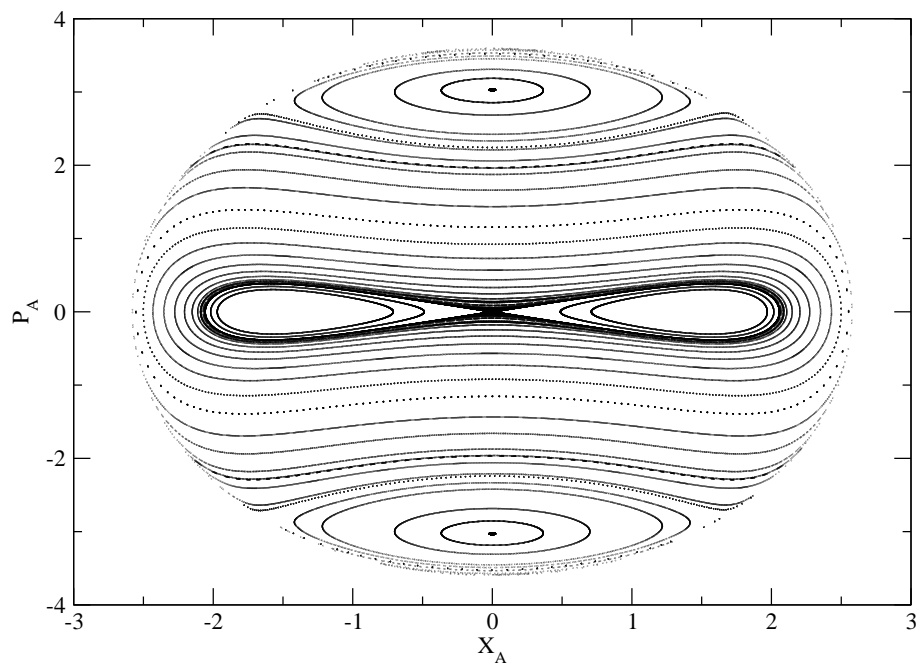


Figura 11: Seção de Poincaré para $\eta = 1.5$ e $\nu = 2.4$

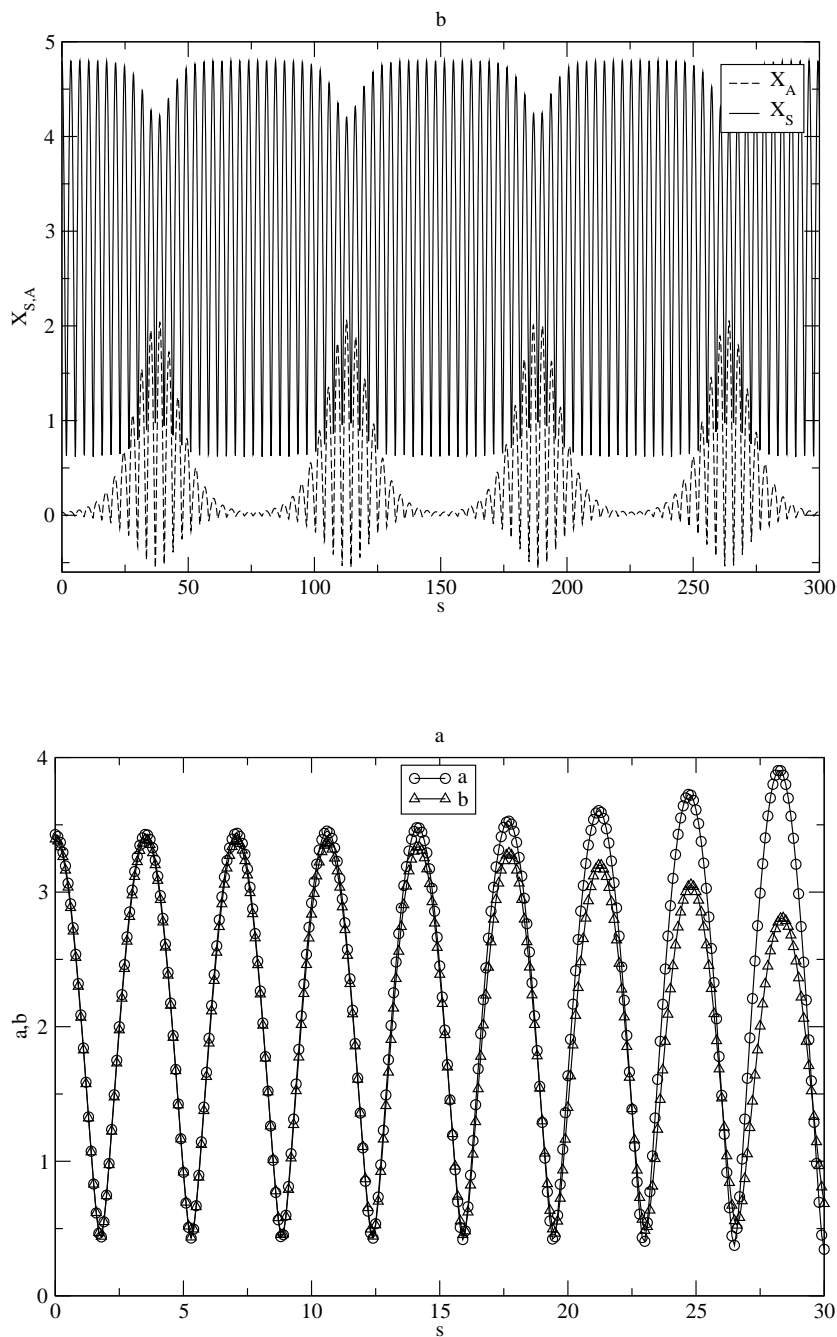


Figura 12: Modos oscilatórios e o envelope em função do *tempo* para $\eta = 1.5$ e $\nu = 2.4$.
 (a) X_S, X_A em função de s . (b) a, b em função de s .

Na seção de Poincaré (11) ainda para $\eta = 1.5$, porém aumentando mais o descasamento para $\nu = 2.4$ observamos que o ponto de equilíbrio $X_A = 0 = P_A$ permanece instável mas sofre uma bifurcação tipo duplicação do período apresentando uma região caótica muito próxima a ele não perceptível na seção. Surgem dois novos pontos de equilíbrio estáveis, a direita e esquerda de $X_A = 0 = P_A$. As ilhas de ressonância no topo e abaixo da seção, em comparação com a seção (9), continuam visíveis. O envelope começa a ficar elíptico a partir $s = 23$, ver gráfico (12b), consequência de uma interação entre os modos simétricos X_S e anti-simétricos X_A observados no gráfico (12a). Para descasamento ν ainda maiores sempre encontramos instabilidade.

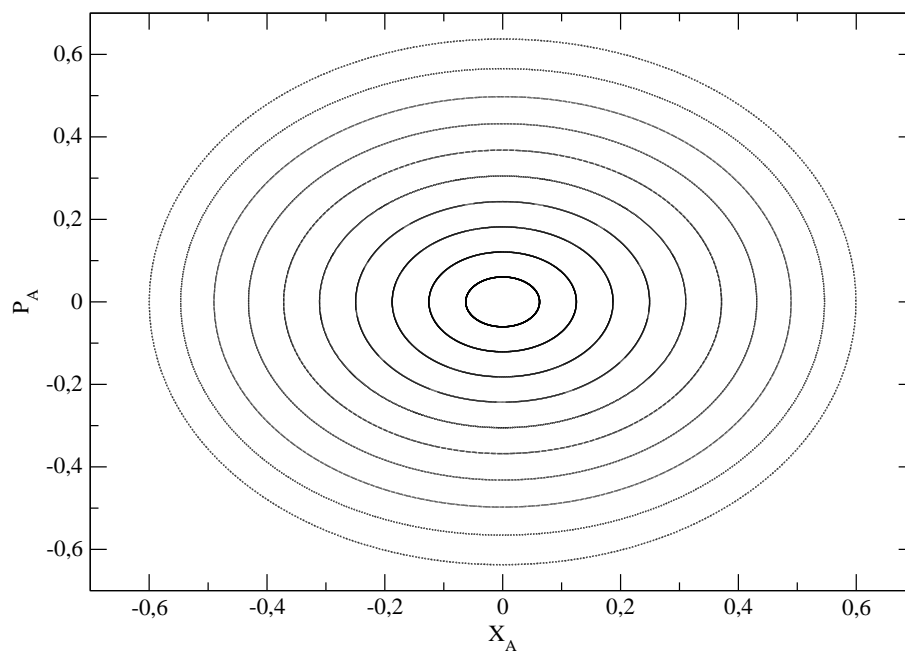


Figura 13: Seção de Poincaré para $\eta = 3.0$ e $\nu = 1.2$

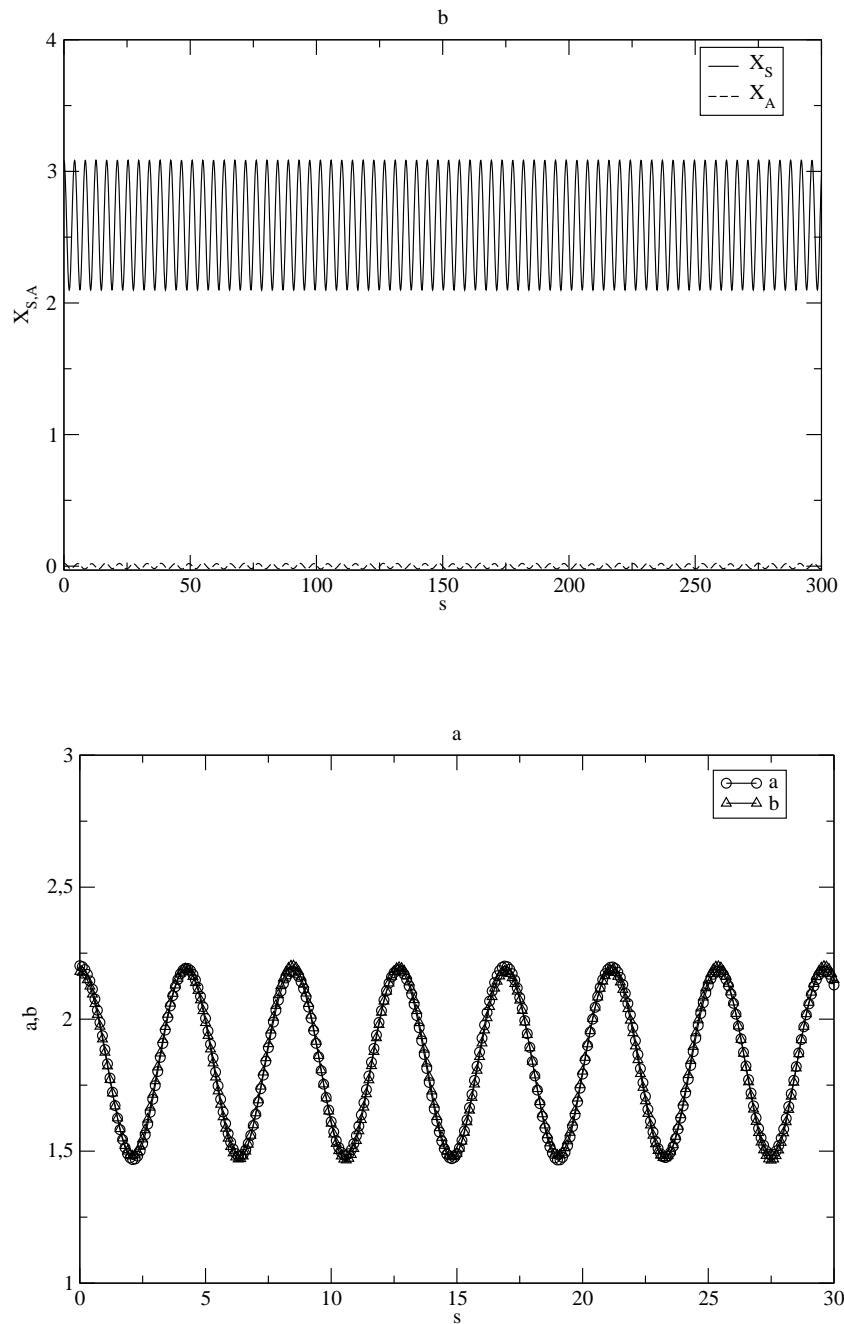


Figura 14: Modos oscilatórios e o envelope em função do *tempo* para $\eta = 3.0$ e $\nu = 1.2$.
(a) X_S, X_A em função de s . (b) a, b em função de s .

Agora aumentando η para $\eta = 3.0$ e considerando novamente o descasamento igual a $\nu = 1.2$ temos o ponto de equilíbrio $X_A = 0 = P_A$ estável como ilustrado no gráfico (13). O envelope permanece redondo, gráfico (14b), sem interação entre os modos oscilatórios, gráfico (14a).

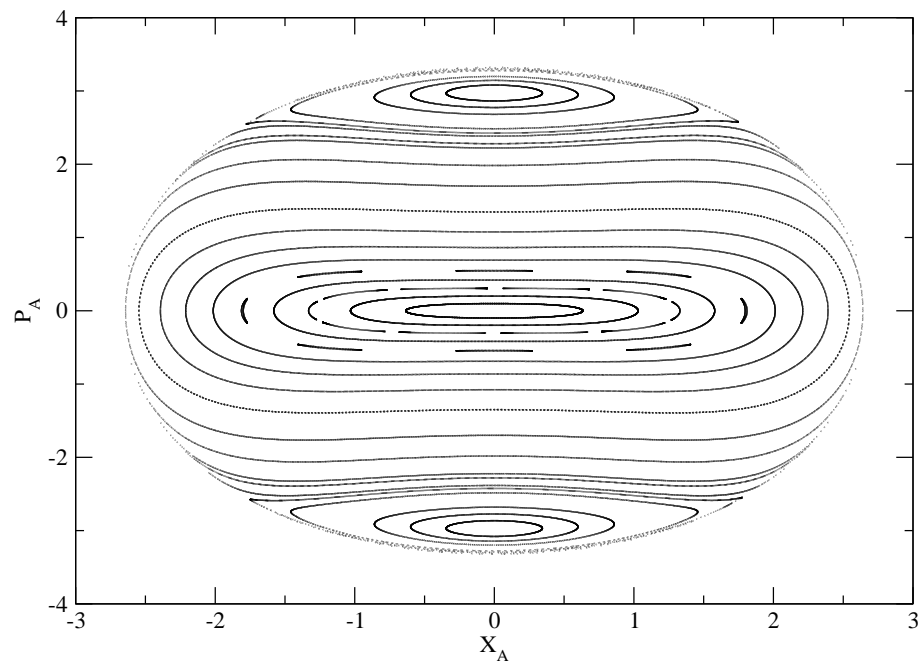


Figura 15: Seção de Poincaré para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.0$

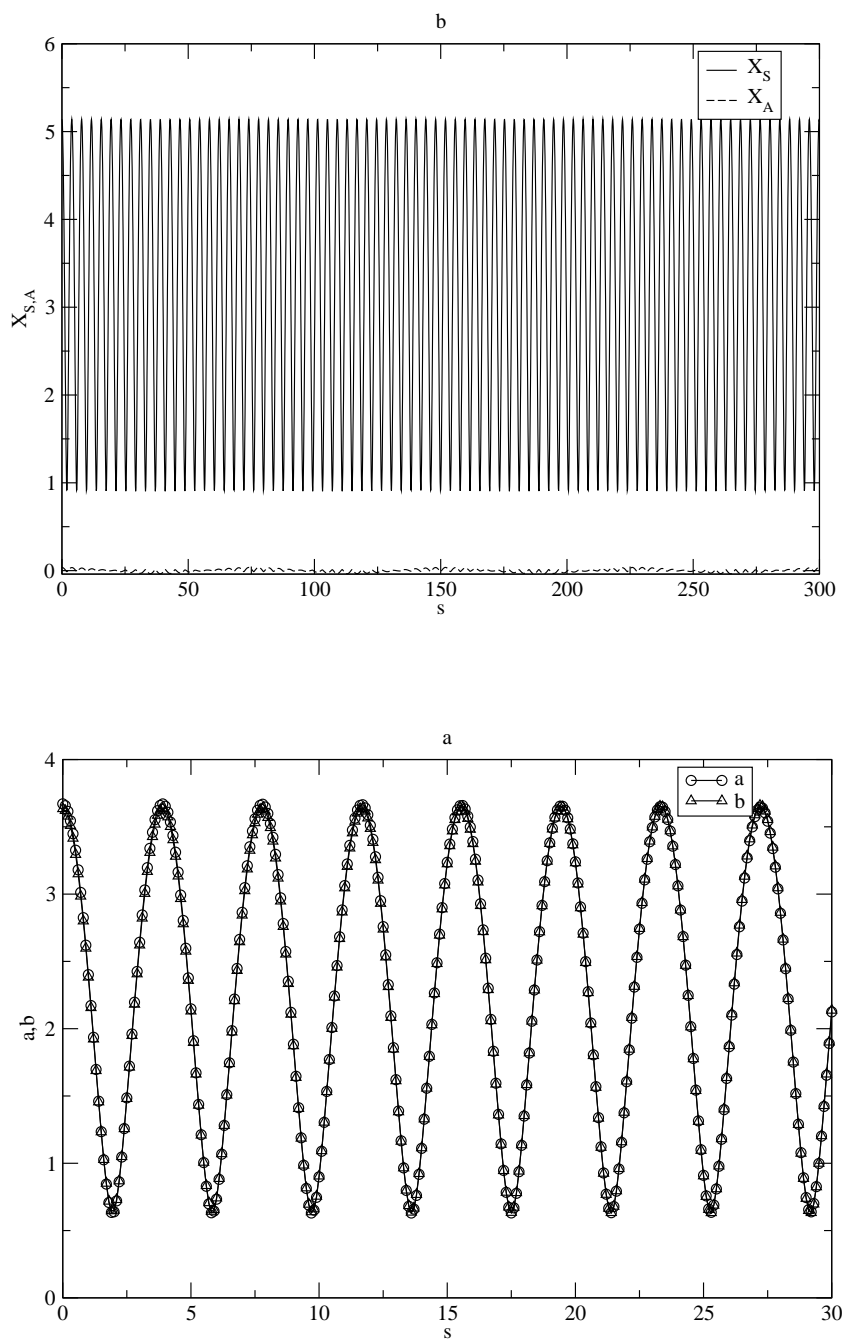


Figura 16: Modos oscilatórios e o envelope em função do *tempo* para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.0$.
(a) X_S, X_A em função de s . (b) a, b em função de s .

Observando a seção de Poincaré (15) ainda para $\eta = 3.0$ porém aumentando o des-casamento para $\nu = 2.0$ notamos que o ponto de equilíbrio $X_A = 0 = P_A$ é estável em comparação com a seção (9). As ilhas de ressonâncias, no topo e abaixo de seção, com seus respectivos pontos de equilíbrio estáveis permanecem. O envelope é quase-circular como ilustrado no gráfico (16b), conseqüentemente sem trocas de energia entre os modos oscilatórios simétrico X_S e anti-simétricos X_A mostrado no gráfico (16a).

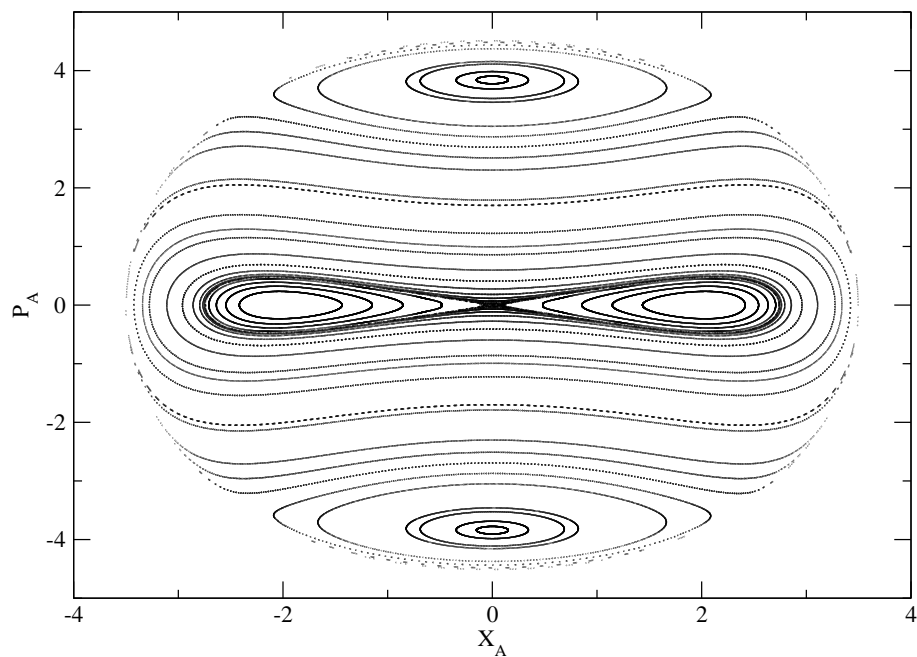


Figura 17: Seção de Poincaré para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.4$

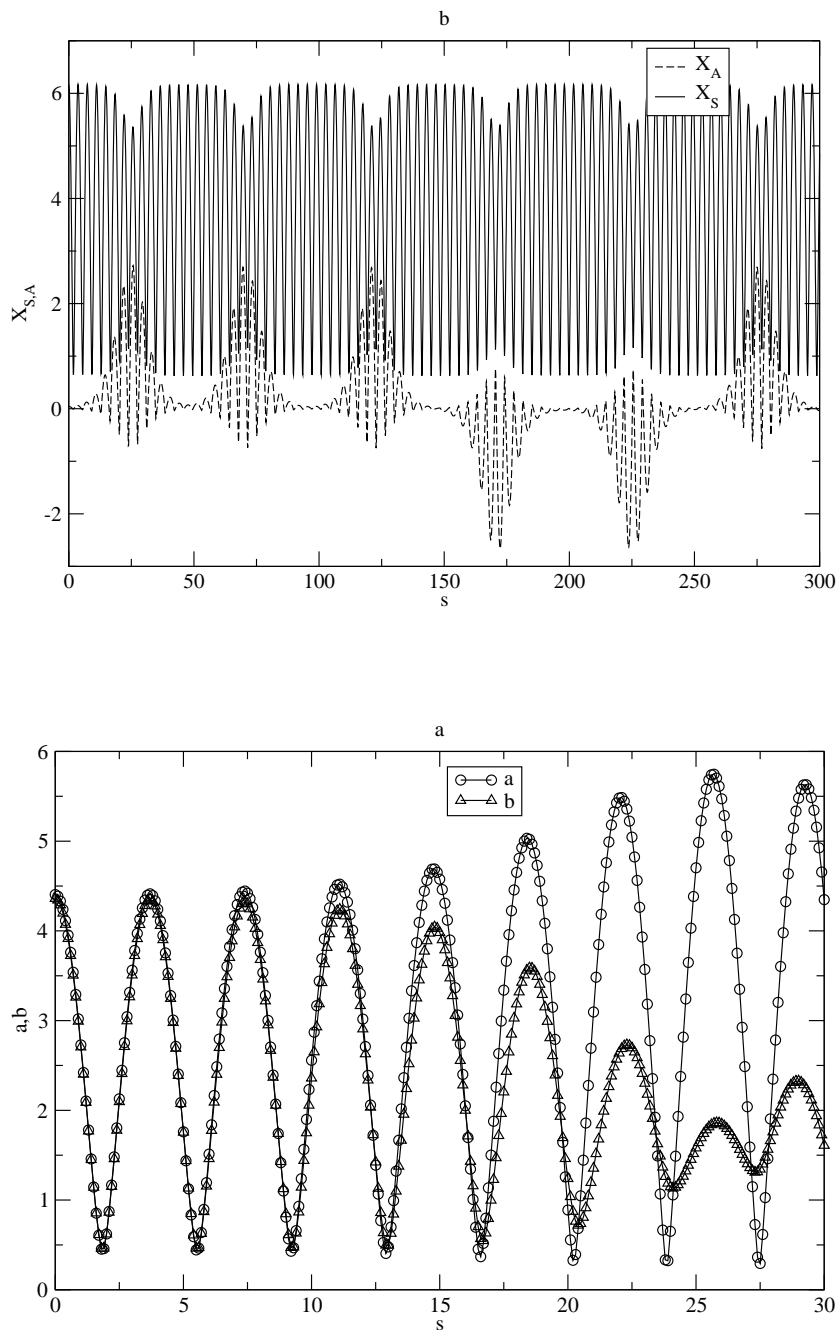


Figura 18: Modos oscilatórios e o envelope em função do *tempo* para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.4$. (a) X_S, X_A em função de s . (b) a, b em função de s .

Na seção de Poincaré (17) permanecendo com $\eta = 3.0$, mas aumentando o desca-

samento para $\nu = 2.4$ observamos que o ponto de equilíbrio $X_A = 0 = P_A$ sofreu uma bifurcação tipo duplicação do período tornando-se instável. Surgem dois novos pontos de equilíbrio estáveis, a direita e esquerda de $X_A = 0 = P_A$. As ilhas de ressonância no topo e abaixo da seção continuam presentes como na seção (15). A seção apresenta não-linearidades tipo ilhas de ressonância e caos próximo ao ponto de equilíbrio não perceptíveis na seção. Da instabilidade do ponto de equilíbrio observamos que o envelope torna-se elíptico, a partir da distância de propagação $s = 16.0$ ilustrado no gráfico (18b). Há uma forte interação entre os modos oscilatórios simétrico X_S e anti-simétrico X_A . As oscilações anti-simétricas apresentam inversão na amplitude de oscilação visualizado no gráfico (18a) devido ao caos do sistema. Novamente para descasamentos ν maiores sempre encontramos instabilidade.

Depois dessa análise adquirimos intuição física suficiente para o nosso próximo passo, construir o espaço de parâmetros que irá determinar em qual regime de parâmetros a instabilidade das oscilações anti-simétricas torna-se relevante.

4.3.2 O Espaço de Parâmetros

Em concordância com o modelo discutido na seção 4.2, a análise das seções de Poincaré mostra que as oscilações anti-simétricas tornam-se instáveis acima de uma dada amplitude de descasamento das oscilações simétricas e essa instabilidade gera o fenômeno do feixe começar a desenvolver um formato elíptico com um conseqüente incremento no tamanho ao longo de uma direção preferencial. O último teste de tal fenômeno será através de simulações numéricas auto-consistentes, assunto do próximo capítulo. Agora construiremos o espaço de parâmetros ν vs η que nos fornecerá toda a informação necessária sobre em que regime de parâmetros as oscilações anti-simétricas tornam-se instáveis.

Analisando as seções de Poincaré nota-se que há uma amplitude de descasamento ν_{th} acima da qual a instabilidade mencionada ocorre. Para determinar com mais exatidão ν_{th} e como varia com η , adotamos o seguinte procedimento. Para um dado η , nós integramos numericamente sobre um longo período de propagação s_f , as equações do envelope acopladas para condições iniciais $X_S(0) = \nu X_{S0}$ e $J(0) = [X_A^2(0) + P_A^2(0)]/2 = J_0 \ll 1$. Se durante a integração $J(s) = [X_A^2(s) + P_A^2(s)]/2$ excede J_0 por um fator grande λ , isto é, $J(s) > \lambda J_0$, nós consideramos a solução ser instável; se não, a solução é considerada estável. Assim determinamos o valor mínimo de $\nu_{th}(\eta)$ acima do qual a solução é instável. Baseado no mapeamento (4.26) e (4.31) e no limiar (4.39) do modelo aproximado tomamos $s_f = 100$, $J_0 = 10^{-3}$, e $\lambda = 100$. Os resultados são mostrados na figura (19) :

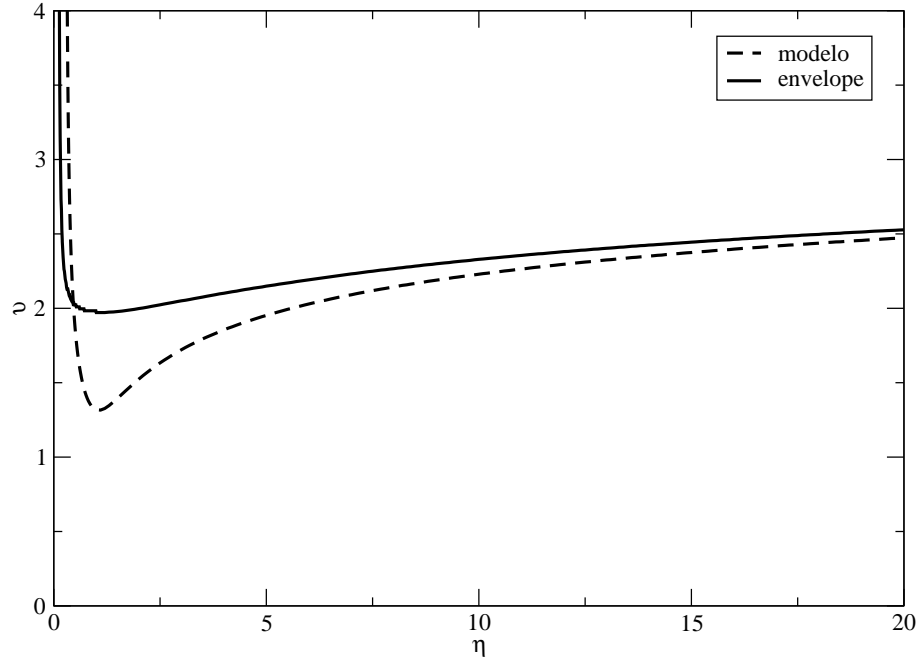


Figura 19: ν vs η pela integração direta das equações do envelope e pelo modelo por deltas.

Vemos que ν_{th} cresce nos limites $\eta \rightarrow 0$ e $\eta \rightarrow \infty$, como esperado, apresentando um mínimo $\nu_{th} \approx 1,96$ perto de $\eta = 1$. Para $\eta < 1$, ocorre um rápido crescimento de ν_{th} sendo que quando a instabilidade das oscilações anti-simétricas estiver presente espera-se, ter fraco efeito sobre o feixe. Por outro lado, ν_{th} aumenta muito mais devagar para $\eta > 1$. De fato, cresce mais ou menos 30% de seu valor mínimo quando nos movemos para feixes muito intensos com $\eta = 20.0$. Conseqüentemente, os dispositivos que operam com feixes no regime de K_b submetidos a oscilações descasadas de amplitude finita são mais suscetíveis de apresentarem essa instabilidade.

A fim de verificar a validade do mecanismo descrito na seção 4.2 para o surgimento da instabilidade tipo anti-simétrica nós determinamos $\nu_{th}(\eta)$ a partir do modelo desenvolvido lá. Para tanto aplicamos um procedimento numérico similar ao empregado anteriormente, mas ao invés de integrar as equações acopladas do envelope do hamiltoniano (4.5) sobre um período longo da propagação, agora integramos simplesmente a dinâmica simétrica ditada pelo hamiltoniano (4.13a) sobre um período S e computamos numericamente a amplitude

efetiva h . ν_{th} é determinado então pela condição $h = h^*$. Os resultados são representados pela curva tracejada no figura (19), mostrando um bom acordo com a análise da equação acoplada do envelope. Como visto na figura, o modelo é particularmente exato para η grande, predizendo também o crescimento rápido de ν_{th} para $\eta < 1$. No valor mínimo de ν_{th} próximo a $\eta = 1$ é que o modelo concorda mais fracamente. Isso é justificado pelo fato de que sendo menor a amplitude descasada, mais distante a órbita é da solução tipo oscilador bloqueado, e pior é a representação de $1/X_S^4(s)$ pelo impulso tipo função delta.

Com a construção do espaço de parâmetros temos, enfim, condições para realizar o último teste para nossa solução do problema proposto por essa dissertação. Agora analisando o espaço de parâmetros iremos escolher dois valores de ν e η um, para o caso sem a presença da instabilidade tipo anti-simétrica e conseqüentemente sem o feixe desenvolver um formato elíptico ; e o outro valor para o caso da instabilidade estar presente e o feixe desenvolver um formato elíptico com um conseqüente incremento no tamanho ao longo de uma direção preferencial, enfim realizaremos as simulações numéricas auto-consistentes.

5 *Simulações Numéricas Auto-Consistentes*

O ponto inicial das simulações numéricas é um modelo matemático para o fenômeno físico de interesse. As equações do modelo são transformadas em formas algébricas discretas acessíveis às soluções numéricas. As equações algébricas descrevem o modelo simulado que quando expresso numa seqüência de instruções computacionais estabelece um programa de simulação. A simulação permite investigar a evolução do sistema físico em questão. Neste capítulo as simulações numéricas auto-consistentes são usadas para investigar a propagação de feixes intensos de partículas carregadas submetidos a campos focalizadores. Analisa-se a evolução de quantidades *rms* do feixe, bem como a distribuição de partículas no espaço de fases.

5.1 *Descrição das Simulações Numéricas Auto-Consistentes*

Consideramos um feixe fino, contínuo, intenso de partículas carregadas propagando-se com velocidade axial média $\beta_b c \hat{e}_z$ por um canal focalizador linear, com simetria axial submetido, por exemplo, a um campo solenoidal magnético periódico

$$\mathbf{B}_{sol}(\mathbf{x}) = B_z(s) \hat{e}_z - \frac{1}{2} B'_z(s) (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y)$$

onde $s = z = \beta_b c t$ é a coordenada axial, $B_z(s + S) = B_z(s)$ é a componente axial do campo magnético aplicado, S é a distância de aplicação do campo focalizador, e (\prime) denota derivada em relação a s .

Num modelo bidimensional auto-consistente a densidade do feixe é dada por

$$n(x, y, s) = \frac{N}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \delta[x - x_i(s)] \delta[y - y_i(s)], \quad (5.1)$$

onde $N = \int dx dy n(x, y, s) = \text{const.}$ e N_p é o número de micropartículas e macropartículas por comprimento axial do feixe, respectivamente, (x_i, y_i) é a posição transversal da i -ésima macropartícula e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Como analisado no capítulo 3, na aproximação paraxial, os autocampos elétricos e magnéticos associados com o *space charge* e a corrente do feixe são expressos como :

$$\mathbf{E}^s(x, y, s) = - \left[\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} \right] \phi^s(x, y, s),$$

$$\mathbf{B}^s(x, y, s) = \left[\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial x} \right] A_z^s(x, y, s).$$

onde o potencial escalar para os autocampos elétricos obedece a equação de Poisson :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \phi^s(x, y, s) = -4\pi e_b n_b(x, y, s)$$

e o potencial vetorial para o autocampo magnético é definido por :

$$\mathbf{A}^s(x, y, s) = \beta_b \phi^s(x, y, s) \hat{\mathbf{e}}_z$$

Assim as N_p macropartículas do feixe interagem através da combinação dos autocampos e campo focalizador, $\mathbf{B}_{sol} + \mathbf{B}^s$ e \mathbf{E}^s . Podemos expressar as equações transversais do movimento para as i -ésima macropartícula do feixe no referencial de Larmor como :

$$\frac{d^2 \tilde{x}_i}{ds^2} + \kappa_z(s) \tilde{x}_i = - \frac{e_b}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \phi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) \quad (5.2a)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}_i}{ds^2} + \kappa_z(s) \tilde{y}_i = - \frac{e_b}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_i} \phi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) \quad (5.2b)$$

onde $i = 1, 2, \dots, N_p$, γ_b é o fator de massa relativístico, m e e_b são a massa de repouso e a carga da partícula respectivamente, $\kappa_z(s) = [e_b B_z(s) / 2\gamma_b \beta_b m c^2]^2$ é uma medida da força do campo focalizador e

$$\phi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) = \frac{e_b N}{4\pi N_p} \sum_{j=1(j \neq i)}^{N_p} \ln[(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2] \quad (5.3)$$

é o potencial escalar experimentado pelas i -ésima macropartícula e obtido pela equação de Poisson com a densidade (5.1) via o método das funções de Green bidimensionais [100]. Considerando um cilindro condutor de comprimento infinito as funções de Green definem o potencial eletrostático dentro da região de interação devido as cargas pontuais e cargas de superfície induzidas. As funções de Green tridimensionais satisfazem as equações de

Laplace com fontes de cargas pontuais periódicas [101]:

$$\nabla^2 G_{3D} = -\frac{4\pi}{r} \delta(r-r') \delta(\theta-\theta') \delta(z-z') \quad (5.4)$$

onde

$$\delta_L(z-z') = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(z-z'-nL) \quad (5.5)$$

L é o espaçamento entre as fontes pontuais e z' denota a localização das cargas pontuais. As condições de contorno de Dirichlet e, periódicas para as simetrias translacionais e rotacionais requerem que:

$$G_{3D}(r, \theta, z+L; x') = G_{3D}(r, \theta, z; x'), \quad (5.6a)$$

$$G_{3D}(r, \theta+2\pi, z; x') = G_{3D}(r, \theta, z; x'), \quad (5.6b)$$

$$G_{3D}(r_w, \theta, z; x') = 0 \quad (5.6c)$$

onde r_w é o raio do cilindro. A solução da equação (5.4) pode ser construída expandindo em termos das auto-funções da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, obtendo a seguinte solução :

$$G_{3D}(x; x') = \frac{2}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{in(\varepsilon-\varepsilon')} e^{i(\theta-\theta')} \frac{I_l(n\delta_{<})}{I_l(n\alpha)} [I_l(n\alpha)K_l(n\delta_{>}) - I_l(n\delta_{>})K_l(n\alpha)] \quad (5.7)$$

onde

$$\delta = \frac{2\pi r}{L}, \quad \delta' = \frac{2\pi r'}{L}, \quad \varepsilon = \frac{2\pi z}{L}, \quad \varepsilon' = \frac{2\pi z'}{L}, \quad \alpha = \frac{2\pi r_w}{L} \quad (5.8)$$

I_l e K_l são as funções de Bessel modificadas e os símbolos $>$ ($<$) denotam maior(menor) de δ e δ' . Separando os $n=0$ termos dos $n>0$ G_{3D} se transforma em :

$$\begin{aligned} G_{3D}(x; x') &= \frac{1}{L} G_{2D} + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(\varepsilon-\varepsilon')] \frac{I_0(n\delta_{<})}{I_0(n\alpha)} [I_0(n\alpha)K_0(n\delta_{>}) - I_0(n\delta_{>})K_0(n\alpha)] \\ &+ \frac{8}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cos[n(\varepsilon-\varepsilon')] \cos[l(\theta-\theta')] \frac{I_l(n\delta_{<})}{I_l(n\alpha)} [I_l(n\alpha)K_l(n\delta_{>}) \\ &- I_l(n\delta_{>})K_l(n\alpha)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde G_{2D} é a função de Green bidimensional definida por :

$$G_{2D} = \ln \left[\frac{\alpha^2 + (\delta_{>}\delta_{<}/\alpha)^2 - 2\delta_{>}\delta_{<}\cos(\theta-\theta')}{\delta_{>}^2 + \delta_{<}^2 - 2\delta_{>}\delta_{<}\cos(\theta-\theta')} \right] \quad (5.10)$$

Quando nós tomamos o limite $L \rightarrow 0$ em (5.9) recuperamos a função de Green (5.10)

$$G_{2D} = \lim_{L \rightarrow 0} L G_{3D} \quad (5.11)$$

pois o segundo e terceiro termos da equação (5.9) anulam-se para $L \rightarrow 0$. Pakter e colaboradores [100] encontraram um exato acordo numérico entre os resultados conhecidos e os computados de G_{3D} quando incluídos os primeiros 15000 termos da somatória.

As simulações numéricas auto-consistentes para um feixe de partículas carregadas descritas pelas equações (5.2-5.3) envolvem $2N_p$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que podem ser integradas numericamente.

5.2 Procedimento Numérico Adotado

Para investigar melhor o início da instabilidade tipo oscilações anti-simétricas para um feixe descasado submetido a um campo focalizador uniforme, executaremos simulações numéricas auto-consistentes com macropartículas de tamanho finito. Nas simulações $N_p = 25000$ macropartículas estão submetidas a interações coulombianas via potenciais estáticos gerados pelo método das funções de Green [78]. As partículas são lançadas de acordo com a distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij [30] com um raio descasado correspondendo a $X_S(0) \approx \nu X_{S0}$ e transportadas ao longo do campo focalizador. Enquanto o feixe propaga, nós computamos os envelopes do feixe KV obtidos auto-consistentemente por :

$$a = 2 \langle x^2 \rangle^{1/2}, \quad b = 2 \langle y^2 \rangle^{1/2}, \quad (5.12)$$

e as emitâncias transversais

$$\epsilon_\zeta \equiv \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle \langle \zeta'^2 \rangle - \langle \zeta \zeta' \rangle^2}, \quad \zeta \equiv x, y \quad (5.13)$$

onde

$$\langle Q \rangle \equiv \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \quad (5.14)$$

representa média sobre todas as macropartículas. Também computamos de instante em instante a distribuição do feixe no plano $x - y$ e no espaço de fases.

Na simulação numérica auto-consistente integramos numericamente $2N_p$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem de partícula (5.2) considerando um campo focalizador magnético constante e normalizado, ou seja, $\kappa_z(s) = \sigma_0^2 = 1$, e o potencial elétrico

normalizado $\psi(x, y, s) \equiv \frac{e_b \phi^s(x, y, s)}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2}$ obtendo as seguintes equações :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}_i}{ds^2} + \tilde{x}_i &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \psi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) \\ \frac{d^2 \tilde{y}_i}{ds^2} + \tilde{y}_i &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_i} \psi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) \end{aligned}$$

Usando a definição da perveância $K_b = \frac{2e_b^2 N_b}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m_b c^2}$ e o potencial elétrico (5.3) normalizado obtemos :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \psi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) = \frac{K_b}{\pi N_p} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)}{[(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2]} \quad (5.16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_i} \psi^s(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, s) = \frac{K_b}{\pi N_p} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)}{[(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2]} \quad (5.16b)$$

Note que a expressão acima é exatamente as forças coulombianas agindo sobre as partículas do feixe. Assim integraremos as seguintes equações :

$$\frac{d^2 \tilde{x}_i}{ds^2} + \tilde{x}_i = -\frac{K_b}{\pi N_p} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)}{[(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2]} \quad (5.17a)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}_i}{ds^2} + \tilde{y}_i = -\frac{K_b}{\pi N_p} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)}{[(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2]} \quad (5.17b)$$

Fisicamente as partículas do feixe são pontuais sem dimensão espacial, mas computacionalmente estabelecemos um tamanho finito para elas, pois analisando a equação (5.17) notamos que quando $\tilde{x}_i - \tilde{x}_j = 0$ e $\tilde{y}_i - \tilde{y}_j = 0$ a equação apresenta uma indeterminação. Para contornar esse obstáculo no cálculo numérico das forças eletrostáticas, estabelecemos um tamanho pequeno para as partículas e quando estão muito próximas computamos um valor diferente para a força eletrostática como mostrado no gráfico (20) :

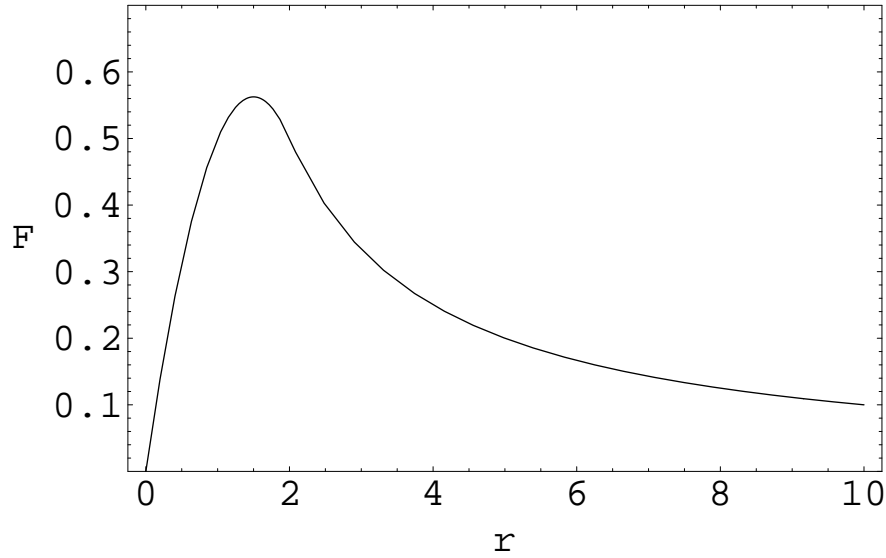


Figura 20: Gráfico da força eletrostática para partículas de tamanho finito $r = r_p$.

No gráfico (20) $F(r) = F_1(r) = \frac{3r - r^2/r_p}{4r_p^2}$ para $r < 2r_p$, onde r_p é o raio da partícula discreta neste caso igual a unidade; a força possui esse formato exatamente quando as partículas estão muito próximas $r < 2r_p$ e sobrepostas. Para $r > 2r_p$ $F(r) = F_2(r) = 1/r$ que é a força eletrostática característica de partículas pontuais. No ponto de transição $r = 2r_p$ as funções satisfazem a condição de continuidade $F_1(r_p) = F_2(r_p)$ e $\left. \frac{dF_1(r)}{dr} \right|_{r=r_p} = \left. \frac{dF_2(r)}{dr} \right|_{r=r_p}$.

5.3 Resultados das Simulações Numéricas Auto-consistentes

No início da propagação, consideramos o feixe praticamente sem oscilações anti-simétricas, isto é $X_A \approx 0$, conseqüentemente da equação (4.8d) ele terá uma pequena diferença entre seus tamanhos ao longo do eixo- x e y ; especificamente, $a \approx 1.01b$.

Analisaremos primeiramente o caso instável com $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.4$, que são os mesmos parâmetros da figura (17). Os símbolos na figura abaixo representam os resultados para os envelopes a (círculos) e b (triângulos) obtidos da simulação auto-consistente.

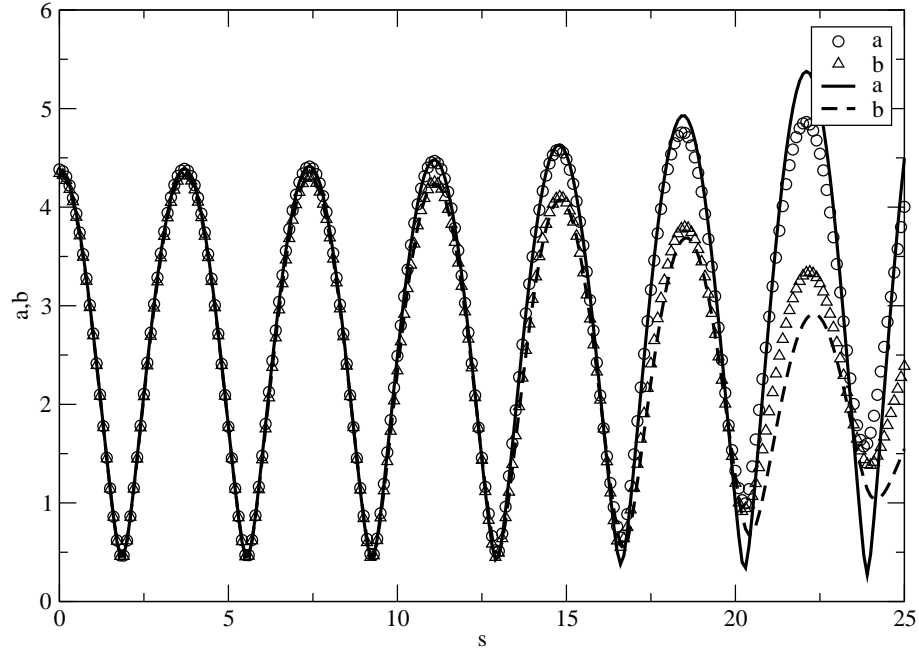


Figura 21: Envelope do feixe para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.4$ obtidos da integração numérica das equações do envelope e pela simulação auto-consistente.

Observa-se, claramente que a instabilidade tipo quadrupólo está se formando pois a relação a/b cresce rapidamente de 1.01 inicial a 1.5 após 6 oscilações descasadas do feixe. A figura (21) mostra, também, a e b (curvas contínuas e tracejadas, respectivamente), obtidas pela integração direta das equações do envelope que estão num ótimo acordo com os resultados das simulações auto-consistentes até $s = 22$. Posteriormente a integração numérica diverge um pouco da simulação auto-consistente devido ao crescimento da emitância causado pelos efeitos de partícula discreta.

O crescimento da instabilidade tipo anti-simétrica é também observada nos gráficos da distribuição de partículas mostrado nas figuras (22) para $s = 0.0$, $s = 3.7$, $s = 7.4$, $s = 11.1$, $s = 14.8$, $s = 18.4$, e $s = 22.2$ correspondendo aos pontos próximos aos máximos de a . Alguma formação de anel devido ao número finito de partículas na simulação, assunto da nossa próxima seção, é observada na figura.

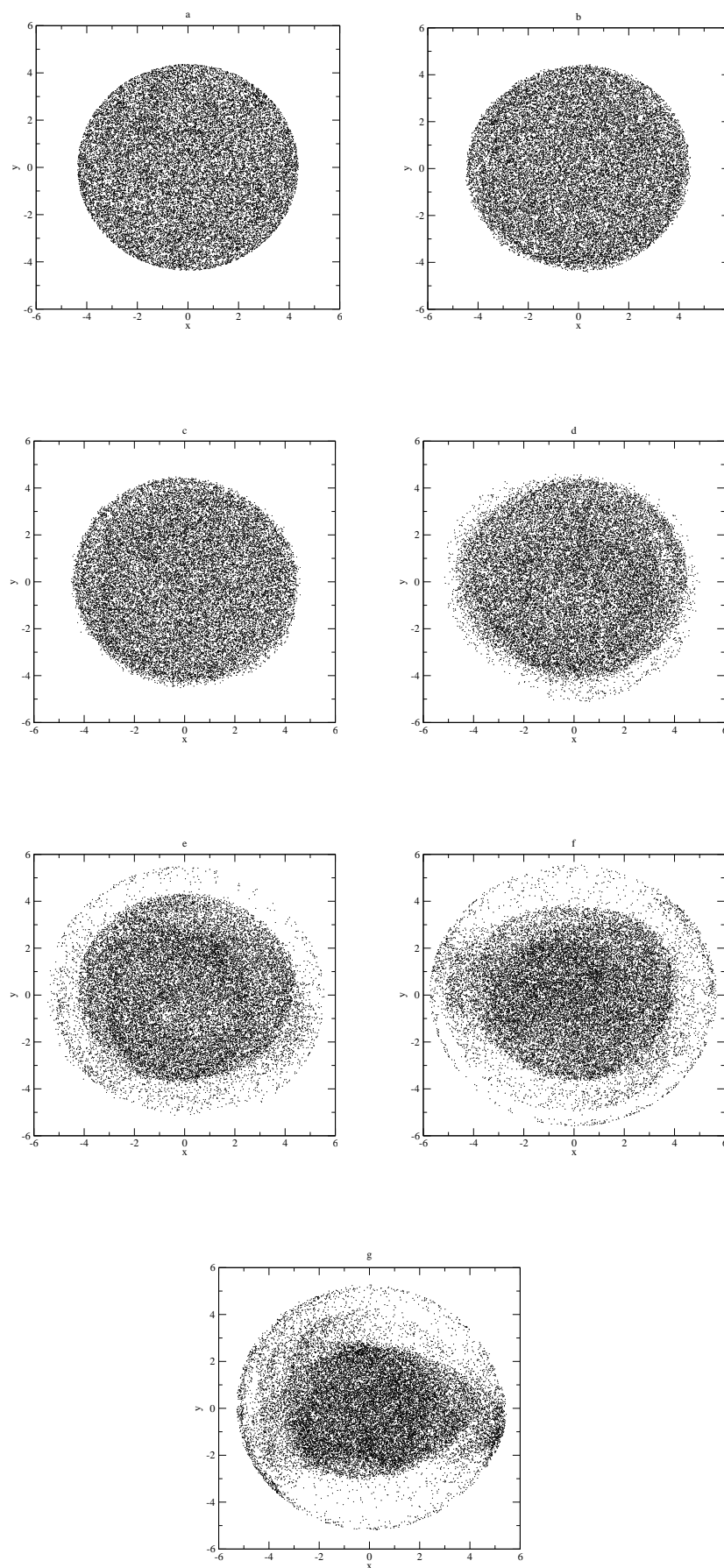


Figura 22: Distribuição de partículas no plano \tilde{y} - \tilde{x} . (a) $s = 0$. (b) $s = 3.7$. (c) $s = 7.4$. (d) $s = 11.1$. (e) $s = 14.8$. (f) $s = 18.4$. (g) $s = 22.2$.

Dos resultados da simulação auto-consistente podemos concluir que considerando um feixe descasado do seu raio de equilíbrio as oscilações simétricas levam a oscilações instáveis do tipo anti-simétrico para um feixe inicialmente quase-circular. Neste caso, o feixe começa a desenvolver um formato elíptico.

Como relatado na Introdução um feixe descasado do seu raio de equilíbrio geralmente apresenta crescimento da emitância [56, 57, 61, 62] com uma conseqüente deformação do espaço de fases da distribuição de partículas levando a formação de anel [43, 64, 65, 72, 74]. Analisamos, primeiramente o gráfico (23) :

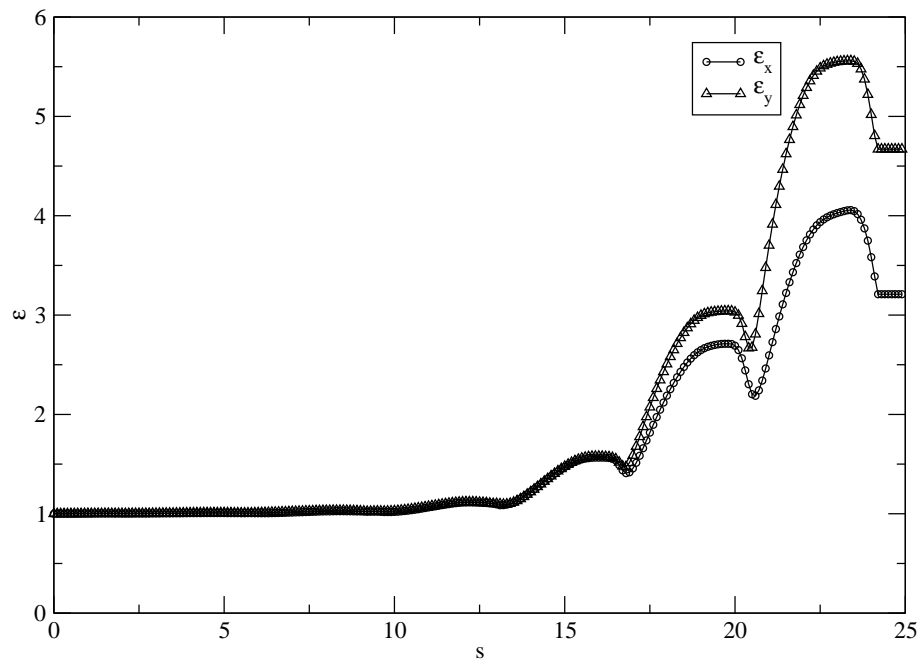


Figura 23: Gráfico da emitância $\epsilon_{\bar{x}}$ e $\epsilon_{\bar{y}}$ em função de s .

Como visto no gráfico (23) há um crescimento da emitância a partir de $s = 13.0$ que deve estar associado com o número finito de partículas e a efeitos de ruído numérico discutidos na próxima seção. Para analisar melhor os fatos observamos o espaço de fases da distribuição de partículas mostrados nas figuras (24) para $s = 0.0$, $s = 3.7$, $s = 7.4$, $s = 11.1$, $s = 14.8$, $s = 18.4$, e $s = 22.2$.

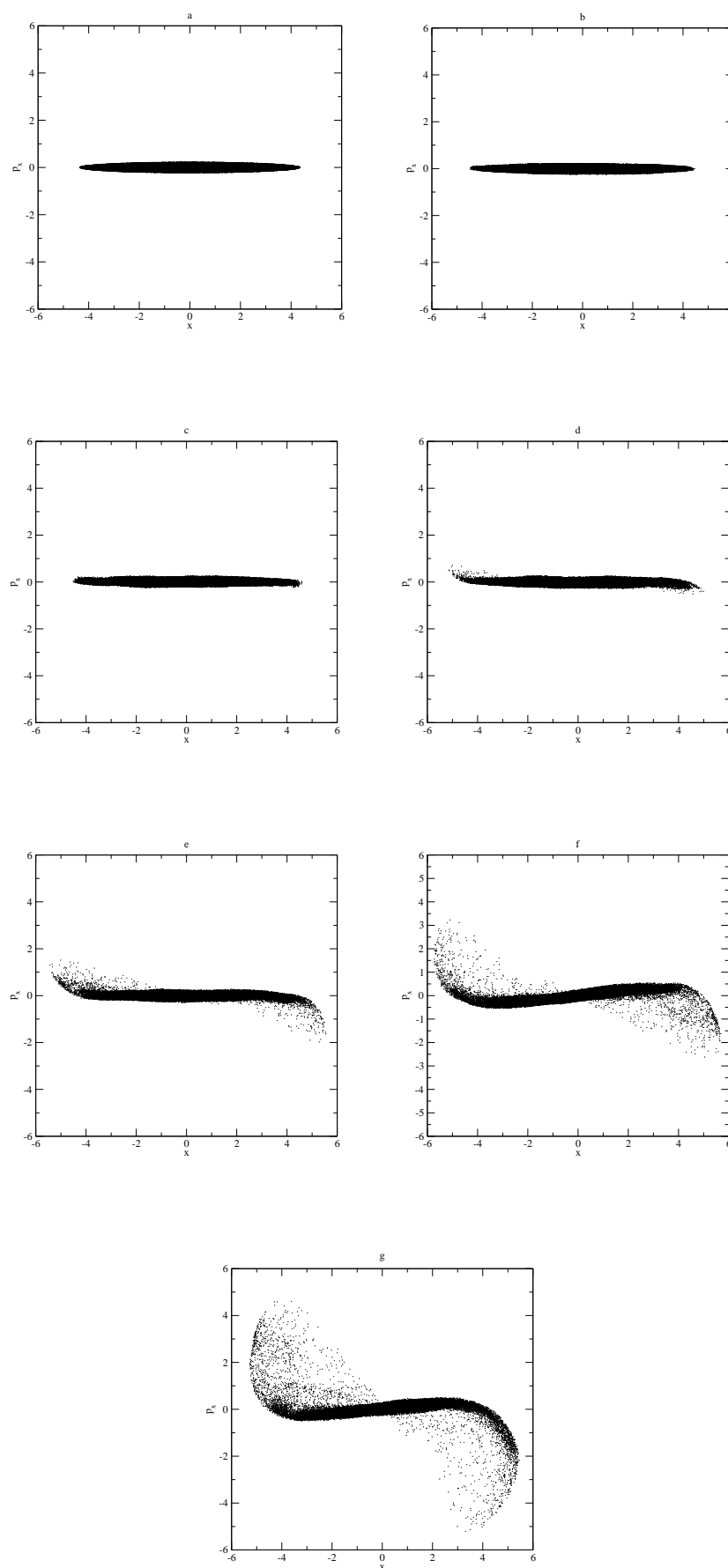


Figura 24: Espaço de fases $(\tilde{x}, p_{\tilde{x}})$. (a) $s = 0$. (b) $s = 3.7$. (c) $s = 7.4$. (d) $s = 11.1$. (e) $s = 14.8$. (f) $s = 18.4$. (g) $s = 22.2$.

Observa-se uma deformação do espaço de fases em forma de "S" que pode estar relacionada com a formação de anel no feixe [43, 64, 65, 72, 74] ou a efeitos de partícula discreta.

Para adquirirmos uma melhor visão dos resultados, simulamos o caso estável com $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.0$, correspondendo aos parâmetros da figura (15). Os envelopes obtidos da simulação auto-consistente (símbolos) e das equações do envelope (curvas) são mostrados na figura (25) :

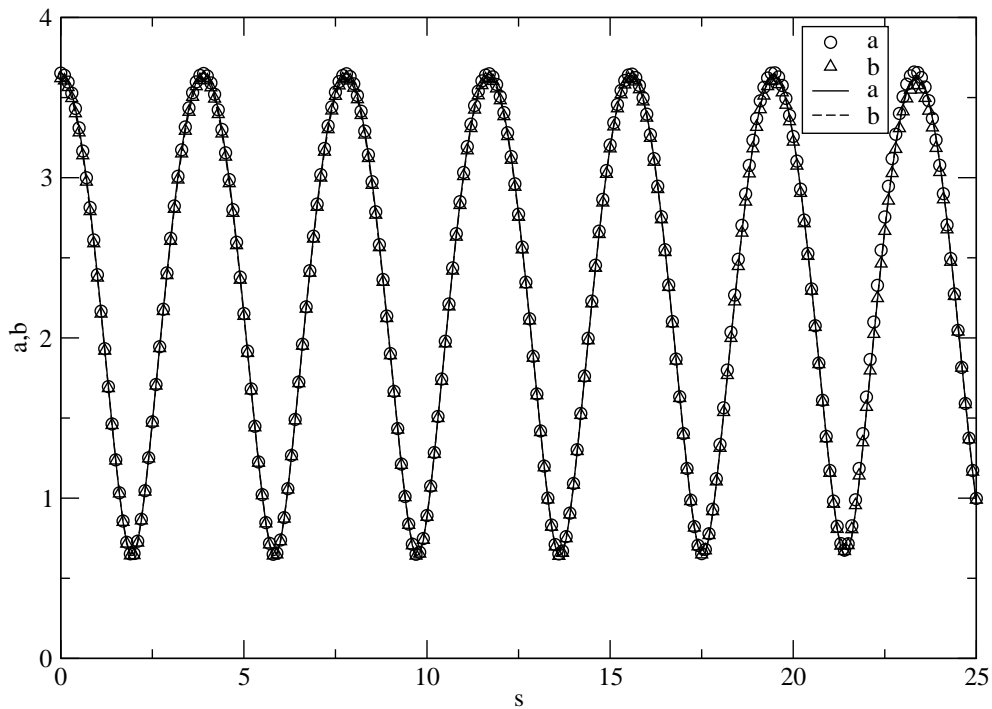


Figura 25: Envelope do feixe para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.0$ obtidos da integração numérica das equações do envelope e pela simulação auto-consistente.

Há um bom acordo entre a simulação auto-consistente e as equações do envelope e observa-se que a instabilidade tipo quadrupólo não está presente como esperado. De fato, os resultados da simulação mostram uma pequena diminuição na diferença inicial entre a e b durante a propagações do feixe não perceptíveis na figura. Os gráficos da distribuição de partículas para $s = 0.0$, $s = 3.9$, $s = 7.8$, $s = 11.7$, $s = 15.6$, $s = 19.5$, e $s = 23.4$, correspondendo aos pontos próximos aos máximos de a , mostrados nas figuras (26)

confirmam a inexistência da instabilidade.

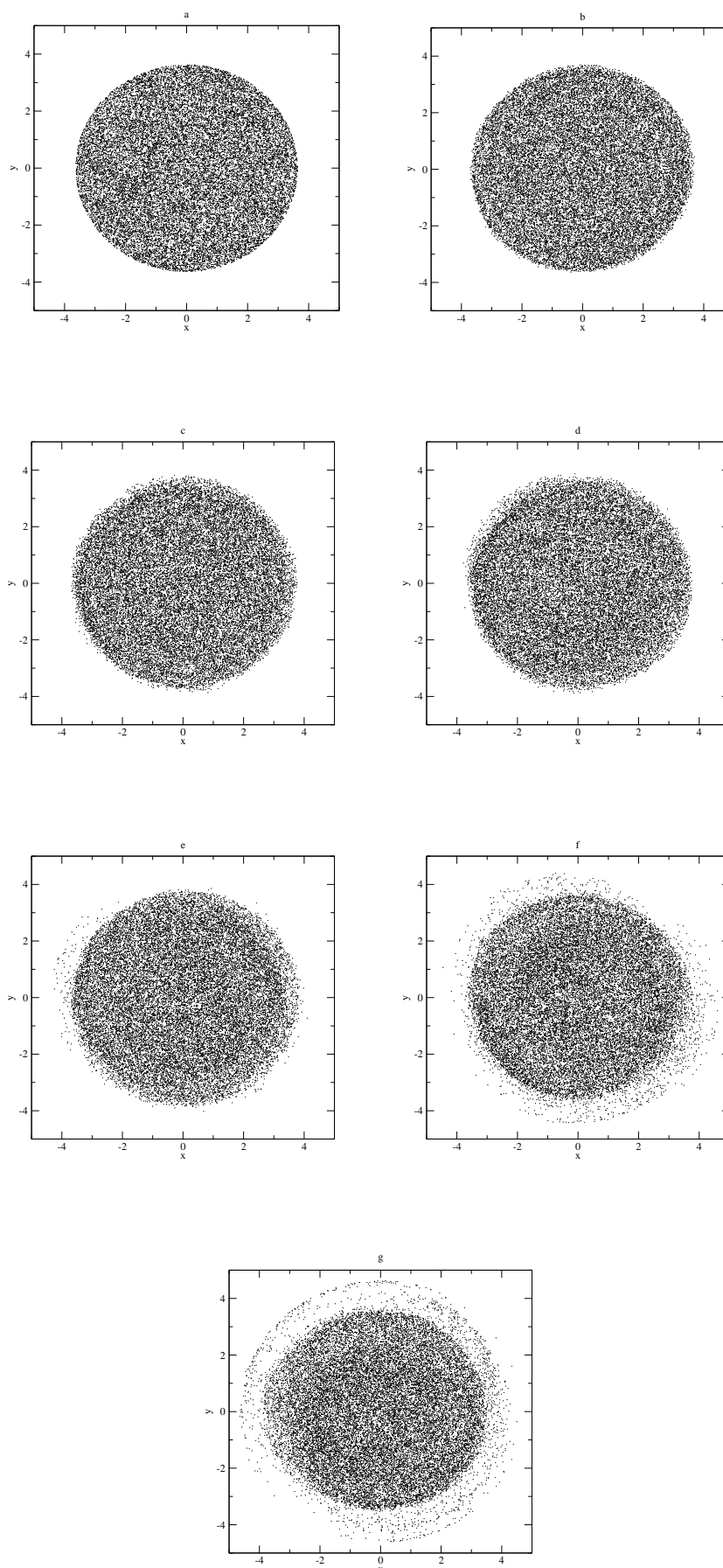


Figura 26: Distribuição de partículas no plano \tilde{y} - \tilde{x} . (a) $s = 0$. (b) $s = 3.9$. (c) $s = 7.8$. (d) $s = 11.7$. (e) $s = 15.6$. (f) $s = 19.5$. (g) $s = 23.4$.

Analisamos a emitância a partir do gráfico (27) :

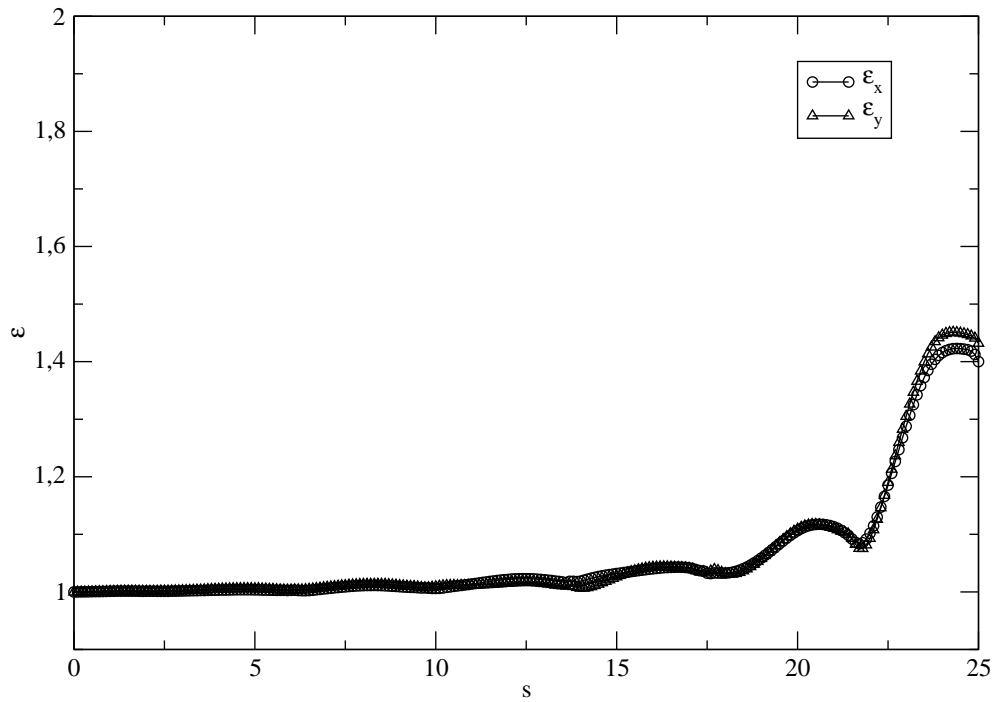


Figura 27: Gráfico da emitância $\epsilon_{\tilde{x}}$ e $\epsilon_{\tilde{y}}$ em função de s .

Observamos um crescimento a partir de $s = 17,0$ que deve estar associado ao número finito de partículas e a erros numéricos. Para tirarmos uma conclusão analisaremos uma seção $(\tilde{x}, p_{\tilde{x}})$ do espaço de fases para $s = 0,0$, $s = 3,9$, $s = 7,8$, $s = 11,7$, $s = 15,6$, $s = 19,5$, e $s = 23,4$ mostrado nas figuras (28).

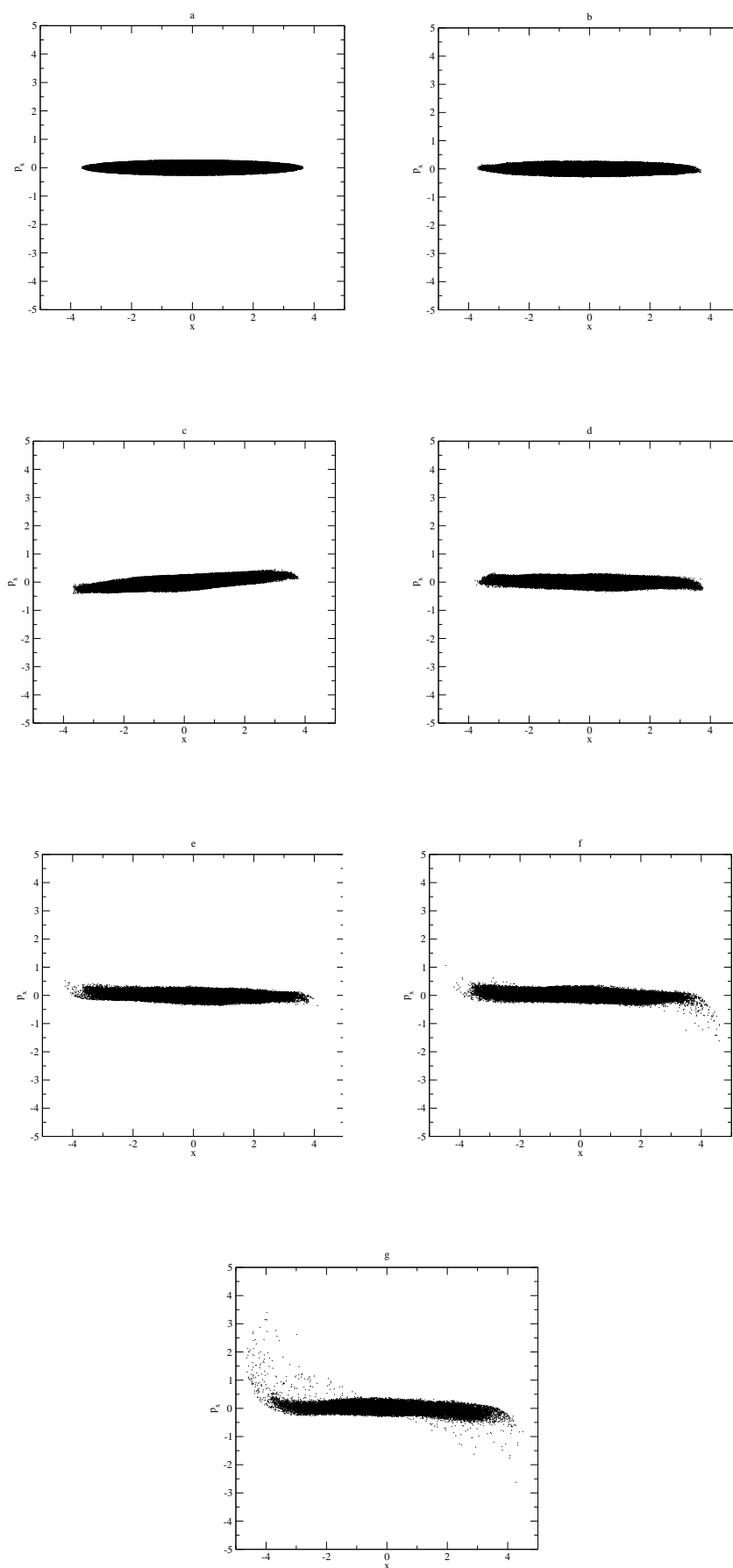


Figura 28: Espaço de fases $(\tilde{x}, p_{\tilde{x}})$. (a) $s = 0$. (b) $s = 3.9$. (c) $s = 7.8$. (d) $s = 11.7$. (e) $s = 15.6$. (f) $s = 19.5$. (g) $s = 23.4$.

Que mostram uma pequena deformação do espaço de fases e conseqüentemente um crescimento da emitância que devem estar relacionados a erros numéricos.

Da análise dos resultados das simulações numéricas auto-consistentes considerando um feixe descasado do seu raio de equilíbrio, mostra-se que as oscilações simétricas levam a oscilações instáveis do tipo anti-simétrico para um feixe inicialmente quase-circular. Assim o feixe começa a desenvolver um formato elíptico dentro de certo regime de parâmetros.

5.3.1 Problemas com a Emitância

Muito dos fenômenos de crescimento da emitância e formação de anel nas simulações numéricas auto-consistentes estão associado a ruído numérico e efeitos de partícula discreta [67–69]. Nos feixes *KV* a emitância é constante pois os autocampos são lineares e caso haja crescimento deve estar associado a erros numéricos. Como visto nos resultados da simulação auto-consistentes nota-se a presença de crescimento da emitância nos gráficos (23 e 27) e formação de anel (figuras: 22 e 26). Os argumentos a favor dessa explicação se baseiam em dois trabalhos que relatam deformação do espaço de fases por ruído numérico [102] e crescimento da emitância causado por efeitos de partícula discreta [103].

No caso da deformação do espaço de fases por ruído numérico, Batygin [102] constrói um modelo analítico para estabelecer uma medida quantitativa dos erros randômicos no cálculo das forças eletrostáticas entre as partículas do feixe. Encontra uma expressão que relaciona explicitamente o crescimento da emitância e, conseqüentemente, deformação do espaço de fases com o passo de integração e erros numéricos no cálculo do potencial eletrostático. Batygin conclui que o crescimento da emitância presente nas simulações numéricas não viola o teorema de Liouville pois há somente um aumento da área efetiva do espaço de fases ocupado pelo feixe. Sendo o integrador numérico simplético a área do espaço de fases microscópica do feixe se conserva (consultar referência [97] pág.172). A emitância efetiva do feixe pode aumentar mas a emitância microscópica se conserva (ver por exemplo, referência [20], Fig. 4.8 pág.198).

Já no caso do crescimento da emitância induzido por efeitos de partículas discreta, Pakter e Chen [103] derivam uma lei de escala que governa os processos de crescimento da emitância nas simulações auto-consistentes de feixes *KV*. Em termos práticos o crescimento da emitância estaria associado ao número total de macropartículas da simulação numérica, mais precisamente $\epsilon(s)$ aumentaria proporcionalmente a $1/N_p$. Dessa propor-

cionalidade concluimos que para um número infinito de macropartículas a emitância não cresceria, exatamente o resultado esperado para feixes KV . Como não dispomos de um número infinito de macropartículas em nossa simulação auto-consistente iremos graficar ϵ para mostrar seu crescimento em função da distância de propagação s dependente de N_p . Utilizamos em nossas simulações $N_p = 500, 2000, 8000, 16000$, para $\eta = 3.0$ e $\nu = 2.4$ ilustrados nas figuras (29).

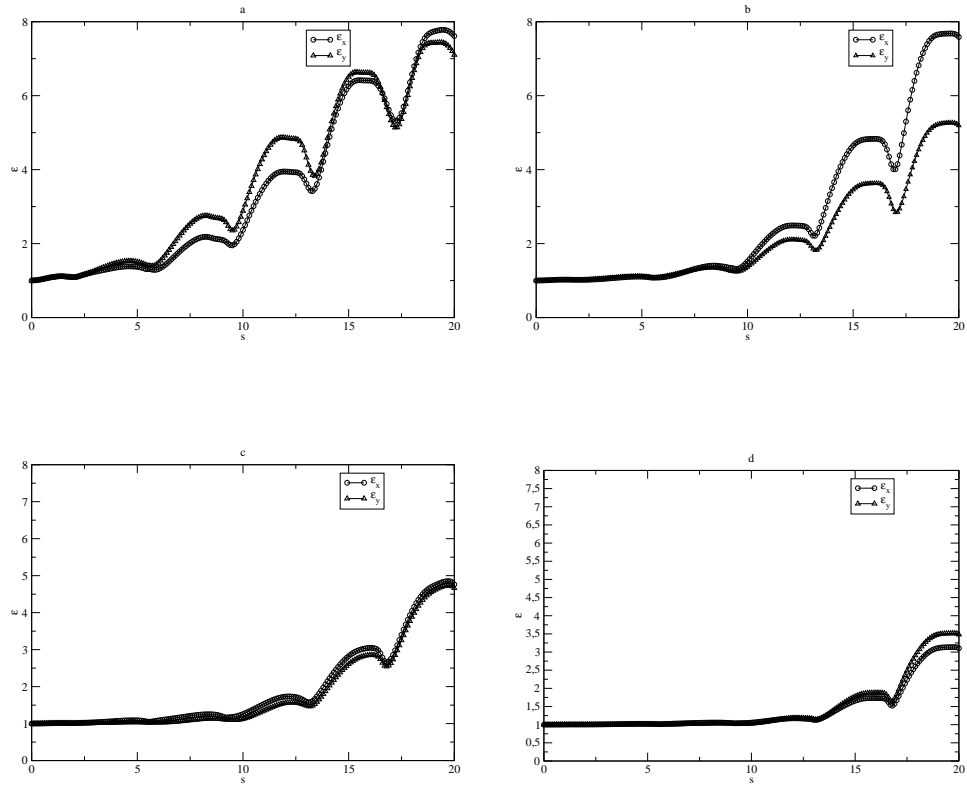


Figura 29: ϵ nos eixos \tilde{x} e \tilde{y} em função de s . (a) $N_p = 500$. (b) $N_p = 2000$. (c) $N_p = 8000$ (d) $N_p = 16000$

Observe que realmente a emitância começa a crescer para s maiores sendo o crescimento total visivelmente menor com o aumento do número de macropartículas. Nossas simulações se restringem a um número baixo de partículas devido ao tempo de computação e limites físicos computacionais.

6 *Conclusões*

A ciência dos feixes é muito importante porque envolve dois conceitos científicos fundamentais, a saber energia e informação. A energia, conceito pilar da física, é gerada pela aceleração das partículas, sendo estudada através da física dos aceleradores cujo sinônimo é a física de feixes. A informação, multiplicidade da era moderna, produzida utilizando-se energia do feixe de uma forma organizada, transportada a taxas elevadas nos dias atuais é o aspecto prático mais relevante da ciência da informação.

Nessa dissertação, introduzimos um tratamento teórico padrão dos fenômenos físicos presentes na dinâmica não-linear e nos processos coletivos, envolvidos no transporte de um feixe intenso de partículas carregadas. A ênfase foi em processos cujas propriedades de equilíbrio, estabilidade e transporte são sempre analisadas para tempos de escala curtos em comparação com o tempo das colisões binárias. Com o desenvolvimento da formulação hamiltoniana alternativa a descrição do movimento de partícula única, sujeita a campo focalizador solenoidal magnético e auto-campos, elétricos e magnéticos, foi analisada. Expressamos o hamiltoniano e as equações de movimento no referencial do laboratório e no referencial de Larmor. Posteriormente, construímos a função distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij(KV) para um feixe de partículas carregadas intenso propagando-se através de um campo magnético solenoidal uniforme, e por fim, obtivemos a equação diferencial que governa a evolução do envelope do feixe.

Com a dedução das equações do envelope (3.74) e (3.77) analisamos a estabilidade não-linear tomando em consideração efeitos sem simetria axial. Investigamos o acoplamento não-linear entre o modo simétrico e o modo anti-simétrico baseado nas equações do envelope depois de executada uma transformação canônica apropriada. Considerando um feixe descasado do seu raio de equilíbrio, mostramos que as oscilações do modo simétrico de amplitude finita levam a oscilações instáveis do modo anti-simétrico para um feixe inicialmente quase-circular, dentro de um regime de parâmetros específico. Neste caso, o feixe desenvolve um formato elíptico com um conseqüente incremento no tamanho ao longo de uma direção preferencial. Um modelo simples foi elaborado clarificando o

mecanismo básico que gera tal instabilidade e foi testado numericamente em comparação com os resultados obtidos da integração numérica direta das equações do envelope [99].

Para investigar melhor o início da instabilidade tipo anti-simétrica executamos simulações numéricas auto-consistentes com macropartículas de tamanho finito. Dos resultados da simulação auto-consistente concluímos que considerando um feixe descasado do seu raio de equilíbrio as oscilações simétricas, realmente, levam a oscilações instáveis do tipo anti-simétrico para um feixe inicialmente quase-redondo. Assim, o feixe começa a desenvolver um formato elíptico. Tal acoplamento dos modos simétricos e anti-simétricos ocorre em dispositivos tipo Klystrons [72, 73] quando a corrente do feixe é perturbada. Tal perturbação gera forças não-lineares devido a perveância $K_b = \frac{I}{\gamma_b^3 \beta_b^2}$ onde I é a corrente do feixe, que conduzem a possíveis ressonâncias acopladas entre o modo simétrico e anti-simétrico [48, 49].

Ao longo dessa dissertação, um programa de pesquisa emerge para ser estudado num futuro próximo. O primeiro passo será caracterizar a dinâmica de um feixe de partículas carregadas analisando a evolução da própria função distribuição do feixe, estabelecendo as simetrias e a dinâmica das partículas individuais sujeitas a campos focalizadores. O segundo, analisar a estabilidade do sistema através da evolução da centróide e da dinâmica do envelope. Por fim, fazer as primeiras aproximações das instabilidades envolvidas no transporte de um dado feixe de partículas, pela evolução das suas respectivas variáveis macroscópicas (densidade, velocidade média, momentum médio, tensor pressão, tensor quantidade de calor...).

ANEXO A - A Equação de Vlasov

Iremos deduzir a Equação de Vlasov de uma forma menos rigorosa, encontrada no livro de Edwards e Syphers [22]. A dedução completa da equação de Vlasov pode ser encontrada no próprio livro de Vlasov [104] ou no livro de Klimontovich [105, 106].

Considere uma pequena região do espaço de fases, como mostrado na figura abaixo :

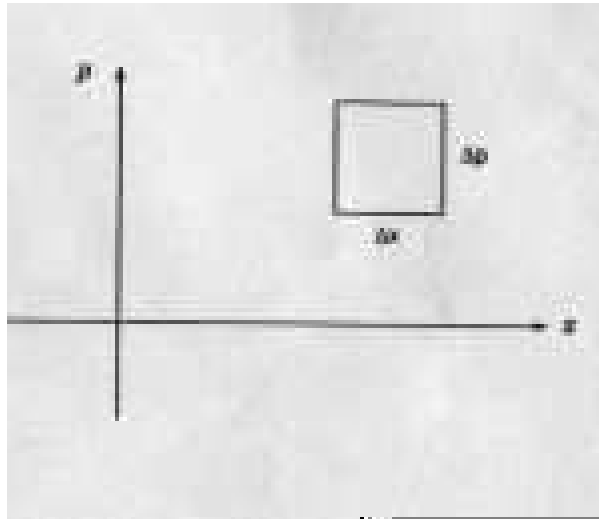


Figura 30: Área infinitesimal do espaço de fases. (adaptado de [22])

Seja o número de partículas nesta região, n , expresso em termos da função densidade de partículas ψ :

$$n = \psi(x, p_x, t) \Delta x \Delta p_x \quad (\text{A.1})$$

Cada partícula no espaço de fases evolui de acordo com as equações canônicas de movimento do sistema. Depois de um intervalo de tempo infinitesimal Δt , o número de partículas presente na região torna-se :

$$n(t + \Delta t) = n(t) + \text{fluxo de entrada} - \text{fluxo de saída} \quad (\text{A.2})$$

Considerando um fluido incompressível e primeiramente, tratando somente o fluxo na direção x , o número de partículas entrando na caixa pela esquerda é :

$$\psi(x, p_x, t) \Delta p_x \dot{x}(x, p_x, t) \Delta t \quad (\text{A.3})$$

Enquanto que o número saindo da caixa pela direita é :

$$\psi(x + \Delta x, p_x, t) \Delta p_x \dot{x}(x + \Delta x, p_x, t) \Delta t \quad (\text{A.4})$$

Portanto a taxa de variação de partículas na região é dada por :

$$\begin{aligned} \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} &= \psi(x, p_x, t) \Delta p_x \dot{x}(x, p_x, t) \Delta t \\ &- \psi(x + \Delta x, p_x, t) \Delta p_x \dot{x}(x + \Delta x, p_x, t) \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

$$\begin{aligned} &= \psi(x, p_x, t) \Delta p_x \dot{x}(x, p_x, t) \Delta t - \psi(x, p_x, t) \Delta p_x \dot{x}(x, p_x, t) \Delta t \\ &- \frac{\partial \psi(x, p_x, t)}{\partial x} \Delta x \Delta p_x \dot{x} - \frac{\partial \dot{x}(x, p_x, t)}{\partial x} \Delta x \Delta p_x \psi \end{aligned} \quad (\text{A.5b})$$

$$= - \frac{\partial \psi(x, p_x, t)}{\partial x} \Delta x \Delta p_x \dot{x} - \frac{\partial \dot{x}(x, p_x, t)}{\partial x} \Delta x \Delta p_x \psi \quad (\text{A.5c})$$

ou

$$\frac{\psi(x, p_x, t + \Delta t) - \psi(x, p_x, t)}{\Delta t} \Delta x \Delta p_x = - \frac{\partial \psi(x, p_x, t)}{\partial x} \Delta x \Delta p_x \dot{x} - \frac{\partial \dot{x}(x, p_x, t)}{\partial x} \Delta x \Delta p_x \psi \quad (\text{A.6})$$

resultando em :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Agora, desenvolverei o mesmo argumento para p_x . Considerando, somente o fluxo na direção- p_x , o número de partículas entrando na caixa por baixo é :

$$\psi(x, p_x, t) \Delta x \dot{p}_x(x, p_x, t) \Delta t \quad (\text{A.8})$$

Enquanto que o número saindo da caixa por cima é :

$$\psi(x, p_x + \Delta p_x, t) \Delta x \dot{p}_x(x, p_x + \Delta p_x, t) \Delta t \quad (\text{A.9})$$

Portanto a taxa de variação de partículas na região é dada por :

$$\begin{aligned} \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} &= \psi(x, p_x, t) \Delta x \dot{p}_x(x, p_x, t) \Delta t \\ &- \psi(x, p_x + \Delta p_x, t) \Delta x \dot{p}_x(x, p_x + \Delta p_x, t) \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A.10a})$$

$$\begin{aligned} &= \psi(x, p_x, t) \Delta x \dot{p}_x(x, p_x, t) \Delta t - \psi(x, p_x, t) \Delta x \dot{p}_x(x, p_x, t) \Delta t \\ &- \frac{\partial \psi(x, p_x, t)}{\partial p_x} \Delta x \Delta p_x \dot{p}_x - \frac{\partial \dot{p}_x(x, p_x, t)}{\partial p_x} \Delta x \Delta p_x \psi \end{aligned} \quad (\text{A.10b})$$

$$= - \frac{\partial \psi(x, p_x, t)}{\partial p_x} \Delta x \Delta p_x \dot{p}_x - \frac{\partial \dot{p}_x(x, p_x, t)}{\partial p_x} \Delta x \Delta p_x \psi \quad (\text{A.10c})$$

ou

$$\frac{\psi(x, p_x, t + \Delta t) - \psi(x, p_x, t)}{\Delta t} \Delta x \Delta p_x = - \frac{\partial \psi(x, p_x, t)}{\partial p_x} \Delta x \Delta p_x \dot{p}_x - \frac{\partial \dot{p}_x(x, p_x, t)}{\partial p_x} \Delta x \Delta p_x \psi \quad (\text{A.11})$$

resultando em :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \dot{p}_x \frac{\partial \psi}{\partial p_x} + \psi \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Das Eqs. (A.7 e A.12), obtemos a equação de Vlasov :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \dot{p}_x \frac{\partial \psi}{\partial p_x} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Considerando um espaço de fases quadridimensional e utilizando os mesmos argumentos para y e p_y , obtemos a seguinte equação de Vlasov :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \dot{p}_x \frac{\partial \psi}{\partial p_x} + \dot{p}_y \frac{\partial \psi}{\partial p_y} = 0 \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE A – Resolução da Equação de Poisson em Coordenadas Elípticas

Considere a equação de Poisson bidimensional definida por :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right] \phi^s(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = -4\pi e_b n_b(\tilde{x}, \tilde{y}, s) \quad (\text{A.1})$$

Sabendo que o feixe possui seção transversal elíptica com distribuição de partículas uniforme, as soluções da eq.(A.1) são melhores obtidas adotando um sistema de coordenadas cujas superfícies de níveis coincidam com os contornos da distribuição, por isso adotaremos o sistema de coordenadas elíptico

Definindo um sistema de coordenadas curvilíneas pelas equações [107]:

$$\tilde{x} = f(q_1, q_2, q_3), \quad \tilde{y} = g(q_1, q_2, q_3), \quad \tilde{z} = h(q_1, q_2, q_3) \quad (\text{A.2})$$

Admitindo que as funções $f(q_1, q_2, q_3)$, $g(q_1, q_2, q_3)$, $h(q_1, q_2, q_3)$ são continuamente diferenciáveis e são soluções para q_1, q_2, q_3 podemos encontrar o comprimento de arco (ds) de uma dada curva, diferenciando \tilde{x} , \tilde{y} e \tilde{z} :

$$d\tilde{x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{A.3a})$$

$$d\tilde{y} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{A.3b})$$

$$d\tilde{z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{A.3c})$$

Assim :

$$ds^2 = Q_1 dq_1^2 + Q_2 dq_2^2 + Q_3 dq_3^2 + 2Q_{23} dq_2 dq_3 + 2Q_{31} dq_3 dq_1 + 2Q_{12} dq_1 dq_2 \quad (\text{A.4})$$

onde

$$Q_i = \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial q_i} \right)^2 \quad (\text{A.5a})$$

$$Q_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial q_i \partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial q_i \partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial q_i \partial q_j} \right) \quad (\text{A.5b})$$

para $i, j = 1, 2, 3$. Temos ainda

$$ds_1 = \sqrt{Q_1} dq_1, \quad ds_2 = \sqrt{Q_2} dq_2, \quad ds_3 = \sqrt{Q_3} dq_3 \quad (\text{A.6})$$

Executando certo cálculo diferencial e um pouco de álgebra podemos expressar o gradiente em coordenadas curvilíneas como:

$$\nabla U = \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \frac{\partial U}{\partial q_1} \hat{e}_{q_1} + \frac{1}{\sqrt{Q_2}} \frac{\partial U}{\partial q_2} \hat{e}_{q_2} + \frac{1}{\sqrt{Q_3}} \frac{\partial U}{\partial q_3} \hat{e}_{q_3} \quad (\text{A.7})$$

Onde U é uma função escalar genérica. O divergente pode ser expresso como :

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}} \left[+ \frac{\partial}{\partial q_1} \sqrt{Q_2 Q_3} W_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \sqrt{Q_3 Q_1} W_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} \sqrt{Q_1 Q_2} W_3 \right] \quad (\text{A.8})$$

onde \mathbf{W} denota um campo vetorial. E por fim o laplaciano de U , em coordenadas curvilíneas pode ser escrito como :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U &= \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{Q_3 Q_1}{Q_2}} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{Q_3}} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

No plano teremos :

$$\nabla_{\perp}^2 U = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

com

$$Q_i = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 \quad (\text{A.11})$$

onde $i = 1, 2$.

Consideramos uma elipse com semi-eixos maiores e menores a e b , respectivamente, e com foco em $\pm c$ onde $c^2 = a^2 - b^2$. Adotaremos as coordenadas elípticas u e v que estão relacionadas com as coordenadas cartesianas por :

$$\tilde{x} = c \cosh(u) \cos(v) \quad \text{e} \quad \tilde{y} = c \sinh(u) \sin(v) \quad (\text{A.12})$$

As superfícies de nível com u e v constantes são famílias de elipses e hipérbolas com o mesmo foco. Observe que u varia de $0 \leq u < \infty$ e v , de $0 \leq v \leq 2\pi$.

Temos $q_1 = u$ e $q_2 = v$. Da expressão (A.11) obtemos :

$$Q_1 = c^2 \sinh^2(u) \cos^2(v) + c^2 \cosh^2(u) \sin^2(v) \quad (\text{A.13a})$$

$$Q_2 = c^2 \cosh^2(u) \sin^2(v) + c^2 \sinh^2(u) \cos^2(v) \quad (\text{A.13b})$$

Substituindo as relações (A.13) na expressão (A.10), associando $U = \phi$ e usando as relações trigonométricas $\cos^2(v) = 1 - \sin^2(v)$ e $\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$ obtemos:

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = \frac{1}{c^2[\sinh^2(u) + \sin^2(v)]} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] \quad (\text{A.14})$$

Assim a equação de Poisson (A.1) se transforma em :

$$\frac{1}{c^2[\sinh^2(u) + \sin^2(v)]} \left[\frac{\partial^2 \phi(u, v, s)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi(u, v, s)}{\partial v^2} \right] = -4\pi e_b \hat{n}_b(u, v, s) \quad (\text{A.15})$$

Onde e_b é carga de cada partícula do feixe e \hat{n}_b é a densidade uniforme do feixe. Usando as seguintes relações trigonométricas $\sin^2(v) = (1 - \cos(2v))/2$ e $\sinh^2(u) = (\cosh(2u) - 1)/2$ podemos escrever a equação (A.15) como :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = -4\pi e_b \hat{n}_b c^2 \left[\frac{\cosh(2u) - \cos(2v)}{2} \right] \quad (\text{A.16})$$

Podemos escrever a solução da equação (A.16) como [108] :

$$\phi = \xi(u, v) + \eta_1(u) + \eta_2(v) \quad (\text{A.17})$$

Conseqüentemente :

$$\nabla_{\perp}^2 \xi = 0 \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{d^2 \eta_1}{du^2} = -2\pi e_b \hat{n}_b c^2 \cosh(2u) \quad (\text{A.18b})$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{dv^2} = -2\pi e_b \hat{n}_b c^2 \cos(2v) \quad (\text{A.18c})$$

Cuja as soluções das equações (A.18b) e (A.18c) são respectivamente :

$$\eta_1(u) = -\frac{\pi}{2} e_b \hat{n}_b c^2 \cosh(2u) - Mu + N \quad (\text{A.19a})$$

$$\eta_2(v) = -\frac{\pi}{2} e_b \hat{n}_b c^2 \cos(2v) + Pv + Q \quad (\text{A.19b})$$

Onde M, N, P e Q são constantes. Assim a solução da equação (A.16) será :

$$\phi(u, v) = \xi(u, v) - \frac{\pi}{2} e_b \hat{n}_b c^2 [\cosh(2u) + \cos(2v)] - Mu + Pv + Z \quad (\text{A.20})$$

Note que $P = 0$ pois qualquer função da variável v deve ser periódica. A forma funcional de ξ obtêm-se pela equação :

$$\nabla_{\perp}^2 \xi = 0 \quad (\text{A.21a})$$

$$\frac{1}{c^2 [\sinh^2(u) + \sin^2(v)]} \left[\frac{\partial^2 \xi(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi(u, v)}{\partial v^2} \right] = 0 \quad (\text{A.21b})$$

ξ pode ser expresso como o produto das funções $U(u)$ e $V(v)$ [109] :

$$\xi(u, v) = U(u)V(v) \quad (\text{A.22})$$

Assim :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = V \frac{d^2 U}{du^2} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = U \frac{d^2 V}{dv^2} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo as equações acima na equação (A.21b) dividindo por (UV) e separando os termos independentes pela constante n^2 , obtemos :

$$\frac{d^2 U}{du^2} - n^2 U = 0 \quad (\text{A.24a})$$

$$\frac{d^2 V}{dv^2} + n^2 V = 0 \quad (\text{A.24b})$$

Cuja solução para a equação (A.24a) é :

$$U(u) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cosh(nu) + B_n \sinh(nu)] + (Cu + D)_{n=0} \quad (\text{A.25})$$

E, para a equação (A.24b) :

$$V(v) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \cos(nv) + D_n \sin(nv)] + (C_1 v + D_1)_{n=0} \quad (\text{A.26})$$

Então a solução geral para a equação (A.21) será:

$$\begin{aligned} \xi(x, v) &= \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cosh(nu) + F_n \sinh(nu)] \cos(nv) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [G_n \cosh(nu) + H_n \sinh(nu)] \sin(nv) + Iu + Jv + L \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Onde $E_n, F_n, G_n, H_n, I, J, L$ são constantes a determinar. Podemos tomar $L = 0$, pois o potencial é definido a menos de uma constante e como qualquer função da variável v

deve ser periódica, teremos $J = 0$.

Assim o potencial interno a elipse será expresso por :

$$\begin{aligned} \phi_{in}(u.v) &= -\frac{\pi}{2}e_b\hat{n}_bc^2 [\cosh(2u) + \cos(2v)] + \sum_{n=0}^{\infty} [M_n \cosh(nu) + N_n \sinh(nu)] \cos(nv) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [O_n \cosh(nu) + P_n \sinh(nu)] \sin(nv) + Ku \end{aligned} \quad (A.28)$$

Já para expressar o potencial externo temos que considerar soluções a grandes distâncias da elipse análogas a $\ln(r)$ em coordenadas polares [110]. Para isso tomamos $\phi_{ext}(u \rightarrow \infty)$, conseqüentemente $\sinh(u) \rightarrow \cosh(u)$, sabendo que $r^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ teremos $r \approx \frac{c}{2}e^u$ que implica em $u \approx \ln(2r/c) \rightarrow \ln(r/c)$. Assim, analisando a expressão (A.27) obtemos $E_n = -F_n \equiv S_n$ e $G_n = -H_n \equiv T_n$ sendo o potencial expresso por :

$$\begin{aligned} \phi_{ext}(u.v) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n [\cosh(nu) - \sinh(nu)] \cos(nv) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} T_n [\cosh(nu) - \sinh(nu)] \sin(nv) + I_2u \end{aligned} \quad (A.29)$$

Resultando em I_2u quando $u \rightarrow \infty$.

A primeira condição para determinar as constantes ($M_n, N_n, O_n, P_n, S_n, T_n, K, I_2$) é a não divergência do campo elétrico no interior da elipse. O campo elétrico é determinado por :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c[\sinh^2(u) + \sin^2(v)]} \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \hat{e}_u + \frac{\partial \phi}{\partial v} \hat{e}_v \right] \quad (A.30)$$

Observe que para $u = 0 \Rightarrow \sinh u = 0$ e $v = n\pi$ para qualquer n natural, implica em $\sin(nv) = 0$ conseqüentemente :

$$\frac{1}{c[\sinh^2(u) + \sin^2(v)]} \Big|_{\substack{v=n\pi \\ u=0}} = \infty \quad (A.31)$$

Para contornar essa divergência tomamos :

$$\frac{\partial \phi_{in}}{\partial u} \Big|_{\substack{v \rightarrow n\pi \\ u \rightarrow 0}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_{in}}{\partial v} \Big|_{\substack{v \rightarrow n\pi \\ u \rightarrow 0}} = 0 \quad (A.32)$$

Assim da expressão (A.28) obtemos :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial u} \Big|_{\substack{v \rightarrow n\pi \\ u \rightarrow 0}} &= -\pi e_b \hat{n}_b c^2 \sinh(2u) + \sum_{n=0}^{\infty} n [M_n \sinh(nu) + N_n \cosh(nu)] \cos(nv) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} n [O_n \sinh(nu) + P_n \cosh(nu)] \sin(nv) + K = 0 \end{aligned} \quad (A.33)$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial v} \right|_{\substack{v \rightarrow n\pi \\ u \rightarrow 0}} &= \pi e_b \hat{n}_b c^2 \sin(2v) - \sum_{n=0}^{\infty} n [M_n \cosh(nu) + N_n \sinh(nu)] \sin(nv) \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} n [O_n \cosh(nu) + P_n \sinh(nu)] \cos(nv) = 0
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Das condições acima obtemos $N_n = 0$, $K = 0$ e $O_n = 0$, o que resulta no potencial interno igual a :

$$\begin{aligned}
 \phi_{in}(u.v) &= -\frac{\pi}{2} e_b \hat{n}_b c^2 [\cosh(2u) + \cos(2v)] + \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cosh(nu) \cos(nv) \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sinh(nu) \sin(nv)
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

A segunda condição a ser satisfeita é a continuidade do campo elétrico (A.30) na borda da elipse expressa por :

$$\left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial u} \right|_{u=u_b} = \left. \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial u} \right|_{u=u_b} \tag{A.36a}$$

$$\left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial v} \right|_{u=u_b} = \left. \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial v} \right|_{u=u_b} \tag{A.36b}$$

onde u_b é o contorno da elipse.

Usando as expressões (A.35) e (A.29) na condição (A.36a) obtemos:

$$\begin{aligned}
 -\pi e_b \hat{n}_b c^2 \sinh(2u_b) + \sum_{n=0}^{\infty} n M_n \sinh(nu_b) \cos(nv) + \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \cosh(nu_b) \sin(nv) = \\
 \sum_{n=0}^{\infty} n S_n [\sinh(nu_b) - \cosh(nu_b)] \cos(nv) + \sum_{n=0}^{\infty} n T_n [\sinh(nu_b) - \cosh(nu_b)] \sin(nv) \\
 + I_2
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

Agora, usando as expressões (A.35) e (A.29) na condição (A.36b) obtemos:

$$\begin{aligned}
 -\pi e_b \hat{n}_b c^2 \sin(2v) - \sum_{n=0}^{\infty} n M_n \cosh(nu_b) \sin(nv) \\
 + \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \sinh(nu_b) \cos(nv) = - \sum_{n=0}^{\infty} n S_n [\cosh(nu_b) - \sinh(nu_b)] \sin(nv) \\
 + \sum_{n=0}^{\infty} n T_n [\cosh(nu_b) - \sinh(nu_b)] \cos(nv)
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

Da equação (A.37) obtemos :

$$I_2 = -\pi e_b \hat{n}_b c^2 \sinh(2u_b) \quad (\text{A.39})$$

Comparando os coeficientes do $\cos(nv)$ e $\sin(nv)$ nas equações (A.37) e (A.38) obtemos as seguintes igualdades para $n \neq 2$, depois de uma certa álgebra:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \sinh(nu_b) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n [\sinh(nu_b) - \cosh(nu_b)] \quad (\text{A.40a})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \cosh(nu_b) = -\sum_{n=0}^{\infty} S_n [\sinh(nu_b) - \cosh(nu_b)] \quad (\text{A.40b})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \sinh(nu_b) = -\sum_{n=0}^{\infty} T_n [\sinh(nu_b) - \cosh(nu_b)] \quad (\text{A.40c})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \cosh(nu_b) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n [\sinh(nu_b) - \cosh(nu_b)] \quad (\text{A.40d})$$

Tais igualdades serão satisfeitas somente se $u_b \rightarrow -\infty$, mas como u está contido no intervalo de $0 \leq u < \infty$ teremos que tomar $M_n = 0$, $S_n = 0$, $P_n = 0$ e $T_n = 0$.

Agora, comparando os coeficientes do $\cos(nv)$ e $\sin(nv)$ nas equações (A.37) e (A.38) obtemos as seguintes igualdades para $n = 2$, depois de uma certa álgebra:

$$2M_2 \sinh(2u_b) = 2S_2 [\sinh(2u_b) - \cosh(2u_b)] \quad (\text{A.41a})$$

$$\pi e_b \hat{n}_b c^2 - 2M_2 \cosh(2u_b) = -2S_2 [\cosh(2u_b) - \sinh(2u_b)] \quad (\text{A.41b})$$

$$2P_2 \sinh(2u_b) = -2T_2 [\sinh(2u_b) - \cosh(2u_b)] \quad (\text{A.41c})$$

$$2P_2 \cosh(2u_b) = 2T_2 [\sinh(2u_b) - \cosh(2u_b)] \quad (\text{A.41d})$$

Analisando as igualdades (A.41c) e (A.41d) observamos que serão satisfeitas somente se $u_b \rightarrow -\infty$, mas como u está contido no intervalo de $0 \leq u < \infty$ teremos que tomar $P_2 = 0$ e $T_2 = 0$.

Da igualdade (A.41a) obtemos :

$$M_2 = S_2 [1 - \coth(2u_b)] \quad (\text{A.42})$$

Substituindo (A.42) em (A.41b) resulta em :

$$S_2 = -\frac{\pi}{2} e_b \hat{n}_b c^2 \sinh(2u_b) \quad (\text{A.43})$$

Assim

$$M_2 = -\frac{\pi}{2} e_b \hat{n}_b c^2 [\sinh(2u_b) - \cosh(2ub)] \quad (\text{A.44})$$

Conseqüentemente o potencial interno (A.35) e externo (A.29) podem ser escritos como :

$$\begin{aligned}\phi_{in}(u, v) &= -\frac{\pi}{2}e_b\hat{n}_bc^2 [\cosh(2u) + \cos(2v)] \\ &\quad - \frac{\pi}{2}e_b\hat{n}_bc^2 [\sinh(2u_b) - \cosh(2u_b)] \cosh(2u) \cos(2v)\end{aligned}\quad (\text{A.45a})$$

$$\begin{aligned}\phi_{ext}(u, v) &= -\frac{\pi}{2}e_b\hat{n}_bc^2 \sinh(2u_b) [\cosh(2u) - \sinh(2u)] \cos(2v) \\ &\quad - \pi 2e_b\hat{n}_bc^2 \sinh(2u_b)u\end{aligned}\quad (\text{A.45b})$$

Para expressar o potencial interno (A.45a) em coordenadas retangulares faremos algumas considerações. Sabendo que $\sinh(u_b) = b/c$ e $\cosh(u_b) = a/c$ e usando as relações $\sinh(2u) = 2 \sinh(u) \cosh(u)$ e $\cosh(2u) = \sinh^2(u) + \cosh^2(u)$ obtemos:

$$c^2 \sinh(2u_b) = 2ab \quad (\text{A.46a})$$

$$c^2 \cosh(2u_b) = a^2 + b^2 \quad (\text{A.46b})$$

Agora sabendo que $\cosh^2(u) = \frac{1}{2} [\cosh(2u) + 1]$, $\sinh^2(u) = \frac{1}{2} [\cosh(2u) - 1]$, $\cos^2(v) = \frac{1}{2} [\cos(2v) + 1]$ e $\sin^2(v) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2v)]$, lembrando as equações (A.12) obtemos :

$$\frac{\tilde{x}^2}{c^2} = \frac{1}{4} [\cosh(2u) + 1] [\cos(2v) + 1] \quad (\text{A.47a})$$

$$\frac{\tilde{y}^2}{c^2} = -\frac{1}{4} [\cosh(2u) - 1] [\cos(2v) - 1] \quad (\text{A.47b})$$

$$(\text{A.47c})$$

Assim

$$\frac{\tilde{x}^2}{c^2} + \frac{\tilde{y}^2}{c^2} = \frac{1}{2} [\cosh(2u) + \cos(2v)] \quad (\text{A.48a})$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{c^2} - \frac{\tilde{y}^2}{c^2} = \frac{1}{2} [1 + \cosh(2u) \cos(2v)] \quad (\text{A.48b})$$

Substituindo (A.46) e (A.48) na equação (A.45a) resulta em :

$$\phi_{in}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\pi e_b \hat{n}_b c^2 \left[\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{c^2} \right] - \pi e_b \hat{n}_b c^2 \left[\frac{2ab}{c^2} - \frac{a^2 + b^2}{c^2} \right] \left[\frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}{c^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{A.49})$$

Depois de uma certa álgebra teremos :

$$\phi_{in} = -2\pi e_b \hat{n}_n \left[\frac{b\tilde{x}^2}{a+b} + \frac{a\tilde{y}^2}{a+b} \right] - \frac{\pi e_b \hat{n}_b}{2} (a-b)^2 \quad (\text{A.50})$$

Sabendo que $N_b = \int d\tilde{x}d\tilde{y}n_b(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = \hat{n}_b\pi ab$ e utilizando o potencial adimensional

$\psi(x, y, s) \equiv \frac{e_b \phi^s(x, y, s)}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2}$, enfim teremos :

$$\psi_{in} = -K_b \left[\frac{\tilde{x}^2}{a(a+b)} + \frac{\tilde{y}^2}{b(a+b)} \right] \quad (\text{A.51})$$

a menos de uma constante, K_b é a perveância do autocampo. Da equação (A.51) notamos que os equipotenciais do problema são elipses de semi-eixos $a(a+b)$ e $b(a+b)$. Portanto, o contorno do feixe não coincide com uma equipotencial. Observe que a equação (A.51) é idêntica a expressão (3.26).

Referências

- 1 DAVIDSON R., C. *Physics of Nonneutral Plasmas*. Massachussets: Addison-Wesley Publishing Co, 1990.
- 2 MILLER R., B. *Intense Charged Particle Beams*. New York: Plenum, 1982.
- 3 REISER, M. *Theory and Design of Charged Particle Beams*. New York: John Wiley-Sons Inc, 1994.
- 4 ALFVEN, H. On the motion of cosmic rays in interstellar space. *Physical Review*, v. 55, p. 425, 1939.
- 5 TONKS , L.; LANGMUIR, I. Oscillations in ionized gases. *Physical Review*, v. 33, p. 195, 1929.
- 6 VLASOV A., A. On the kinetic theory of an assembly of particle with collective interaction. *J.Phys.*, v. 09, p. 25, 1945.
- 7 LANDAU L., D. On the vibrations of the electronic plasma. *J.Phys.*, v. 10, p. 25, 1946.
- 8 BOGOLIUBOV N., N. *Problems of a Dynamical Theory in Statistical Physics*. Moscow: State Technical Press, 1946.
- 9 CHILD C. , D. Discharge from hot calcium oxide. *Physical Review*, v. 32, p. 492, 1911.
- 10 LANGMUIR , I. The effect of space charge and initial velocities on the potencial distribution and thermionic current between parallel plane electrodes. *Physical Review*, v. 21, p. 419, 1923.
- 11 BRILLOUIN , L. A theorem of larmor and its importance for electrons in magnetic fields. *Physical Review*, v. 67, p. 260, 1945.
- 12 PIERCE J. , R. Instability of hollow beams. *IRE Trans. Electron Devices*, v. 3, p. 183, 1956.
- 13 KYHL R. , L.; WEBSTER, H. F. Breakup of hollow cyindrical electron beams. *IRE Trans. Electron Devices*, v. 3, p. 172, 1956.
- 14 BUNEMAN , O. Ribbon beams. *J. Electron. Control*, v. 3, p. 507, 1957.
- 15 COURANT E. , D.; LIVINGSTONE, M. S.; SNYDER, H. The strong focusing synchrotron- a new high energy accelerator. *Physical Review*, v. 88, p. 1190, 1952.
- 16 COURANT E. , D.; SNYDER, H. Theory of the alternating-gradient synchrotron. *Annals of Physics*, v. 3, p. 1, 1958.

- 17 CHRISTOFILOS N., C. Focusing systems for ions and electrons. United States Patent 1956.
- 18 DAVIDSON R., C.; QIN, H. *Physics of Intense Charged Particle Beams in High Energy Accelerators*. Singapore: World Scientific, 2001. 583 p.
- 19 CHAO A., W. *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*. New York: John Wiley-Sons Inc, 1993.
- 20 LAWSON J., D. *The Physics of Charged Particle Beams*. New York: Oxford Science Publications, 1988.
- 21 WANGLER T., P. *Principles of RF Linear Accelerators*. New York: John Wiley-Sons Inc, 1998.
- 22 EDWARDS D., A.; SYPHERS, M. J. *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators*. New York: John Wiley Sons Inc, 1993.
- 23 DIKANSKY, N.; PESTRIKOV, D. *The Physics of Intense Beams and Storage Rings*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- 24 WIEDEMANN, H. *Particle Accelerator Physics I : Basic Principles and Linear Beam Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- 25 WIEDEMANN, H. *Particle Accelerator Physics II : Nonlinear and Higher-Order Beam Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- 26 BRYANT P., J.; JOHNSEN, K. *Principles of Circular Accelerators and Storage Rings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- 27 HUMPHRIES S., J. *Principles Of Charged Particle Acceleration*. New York: John Wiley Sons Inc, 1986.
- 28 LIVINGOOD J., J. *Principles of Cyclic Particle Accelerators*. New York: Van Nostrand, 1961.
- 29 LEE E. , P.; HOVINGH, J. Heavy ion induction linac drivers for inertial confinement fusion. *Fusion Technology*, v. 15, p. 369, 1989.
- 30 KAPCHINSKIJ I., M.; VLADIMIRSKIJ, V. V. Limitations of proton beam current in a strong-focusing linear accelerator associated with the beam space charge. *Proceedings of the International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation*, Geneva, p. 274, 1959.
- 31 DAVIDSON R., C.; KRALL, N. A. Vlasov equilibria and stability of an electron gas. *Phys. Fluids.*, v. 13, p. 1543, 1970.
- 32 CHEN , C.; PAKTER, R.; DAVIDSON, R. Rigid-rotor equilibrium for an intense charged-particle beam propagating through a periodic solenoidal magnetic field. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 2, p. 225, July 1997.
- 33 MORAES J., S.; PAKTER, R.; RIZZATO, F. B. Equilibrium and stability of off-axis periodically focused particle beams. *Phys. Rev. Lett.*, v. 93, p. 244801, December 2004.

- 34 HESS, M.; CHEN, C. Beam confinement in periodic permanent magnet focusing klystrons. *Physics Letters A*, v. 295, p. 305, April 2002.
- 35 LAPOSTOLLE P., M. Possible emittance increase through filamentation due to space charge in continuous beams. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. 18, p. 1101, 1971.
- 36 SACHERER F., J. Rms envelope equations with space charge. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. 18, p. 1105, 1971.
- 37 NERI , F.; RANGARAJAN, G. Kinematic moment invariants for linear hamilton systems. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 10, p. 1073, March 1990.
- 38 DRAGT A. , J.; NERI, F.; RANGARAJAN, G. General moment invariants for linear hamiltonian systems. *Physical Review A*, v. 45, n. 4, p. 2572, February 1992.
- 39 LAWSON J., D.; LAPOSTOLLE, P.; GLUCKSTERN, R. Emittance, entropy and information. *Particle Accel.*, v. 5, p. 61, 1973.
- 40 O'SHEA P., G. Reversible and irreversible emittance growth. *Physical Review E*, v. 57, n. 1, p. 1081, January 1998.
- 41 STRUCKMEIER, J. Concept os entropy in the realm of charged particle beams. *Physical Review E*, v. 54, n. 1, p. 830, July 1996.
- 42 QIU, X.; BATCHELOR, K.; BEN-ZVI, I.; WANG, X.-J. Demonstration of emittance compensation through measurement of thr slice emittance of a 10-ps electron bunch. *Physical Review Letters*, v. 576, n. 20, p. 3723, May 1996.
- 43 CHEN , C.; DAVIDSON, R. Nonlinear properties of the kapchinskij-vladimirskij equilibrium and envelope equation for an intense charged-particle beam in a periodic focusing field. *Physical Review E*, v. 49, n. 6, p. 5679, June 1994.
- 44 HOFMANN , I.; LASLETT, L. J.; SMITH, L.; HABER, I. Stability of the kapchinskij-vladimirskij(k-v) distribution in long periodic transport systems. *Particle Acceleration*, v. 13, p. 145, 1983.
- 45 STRUCKMEIER , J.; REISER, M. Theoretical studies of envelope oscillations and instabilities of mismatched intense charged-particle beams in periodic focusing channels. *Particle Acceleration*, v. 14, p. 227, 1984.
- 46 HOFMANN , I. Stability of anisotropic beams with space charge. *Physical Review E*, v. 57, n. 4, p. 4713, April 1998.
- 47 KISHEK R. , A.; O'SHEA, P.; REISER, M. Energy transfer in nonequilibrium space-charge-dominated beams. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 21, p. 4514, November 2000.
- 48 HOFMANN , I.; BOINE-FRANKENHEIM, O. Ressonant emittance transfer driven by space charge. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 3, p. 034802–1, July 2001.
- 49 HOFMANN , I.; QIANG, J.; RYNE, R. Collective ressonant model of energy exchange in 3d nonequipartitioned beams. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 11, p. 2313, March 2001.

- 50 HOFMANN , I.; FRANCHETTI, G.; BOINE-FRANKENHEIM, O. Space charge resonances in two and three dimensional anisotropic beams. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, v. 6, p. 024202–1, 2003.
- 51 BOHN C. , L. Transverse phase-space dynamics of mismatched charged-particle beams. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 7, p. 932, February 1993.
- 52 WANGLER T., P.; CRANDALL, K. P.; MILLS, R.; REISER, M. Relation between field energy and rms emittance in intense particle beams. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. 32, n. 5, p. 2196, 1985.
- 53 GUY F., W.; LAPOSTOLLE, P. M.; WANGLER, T. P. The influence of density distribution on the stability of beams. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. 34, p. 1149, 1987.
- 54 REISER , M.; CHANG, C.; KEHNE, D.; LOW, K.; SHEA, T. Emittance growth and image formation in a nonuniform space-charged-dominated electron beam. *Physical Review Letters*, v. 61, n. 26, p. 2933, December 1988.
- 55 HABER , I.; REISER, M.; KEHNE, D.; RUDD, H. Experimental, theoretical, and numerical investigations of the homogenization of density nonuniformities in the periodic transport of a space-charge dominated beam. *Physical Review A*, v. 44, n. 8, p. 5194, October 1991.
- 56 REISER , M. Free energy and emittance growth in nonstationary charged particle beams. *J. Appl. Phys.*, v. 70, n. 4, p. 1919, August 1991.
- 57 CUCCHETTI., A.; REISER, M.; WANGLER, T. Simulation studies of emittance growth in rms mismatched beams. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, 1991.
- 58 LUND S., M.; BARNARD, J. J.; LEE, E. P. Emittance growth the thermalization of space-charge nonuniformities. *Proceedings of the XX International Linac Conference*, 2000.
- 59 CARLSTERN B. , E. Emittance growth due to radial density variations of an emittance-dominated electron beam in a channel with continuous acceleration and focusing. *Physics of Plasmas*, v. 5, n. 4, p. 1148, 1998.
- 60 CARLSTERN B. , E. Growth rate of nonthermodynamic emittance of intense electron beams. *Physical Review E*, v. 58, n. 2, p. 2489, August 1998.
- 61 FRANCHETTI , G.; HOFMANN, I. Anisotropic free-energy limit of halos in high-intensity accelerators. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 25, p. 254802–1, June 2002.
- 62 QIANG, J.; RYNE, R.; HOFMANN, I. Space-charge driven emittance growth in a 3d mismatched anisotropic beam. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, Chicago, 2003.
- 63 JAMESON, R. A. Design for low beam loss in accelerators for intense neutron source applications. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, Piscataway,NJ, p. 3926, 1993.

- 64 GLUCKSTERN R., L. Analytic model for halo formation in high current ion linacs. *Physical Review Letters*, v. 73, n. 9, p. 1247, August 1994.
- 65 GLUCKSTERN R. LAND CHENG, W.; KURENNOY, S.; YE, H. Stability and halo formation of a breathing axisymmetric uniform-density beam. *Physical Review E*, v. 54, n. 6, p. 6788, December 1996.
- 66 OKAMOTO H. AND IKEGAMI, M. Simulation study of halo formation in breathing round beams. *Physical Review E*, v. 55, n. 4, p. 4694, April 1997.
- 67 FINK Y. AND CHEN, C.; MARABLE, W. Halo formation and chaos in root-mean-square matched beams propagating through a periodic solenoidal focusing channel. *Physical Review E*, v. 55, n. 6, p. 7557, June 1997.
- 68 QIAN Q. AND DAVIDSON, R.; CHEN, C. Halo formation induced by density nonuniformities in intense ion beams. *Physical Review E*, v. 51, n. 6, p. R5216, June 1995.
- 69 QIAN Q. AND DAVIDSON, R.; CHEN, C. Chaotic particle motion and halo formation induced by charge nonuniformities in an intense ion beam propagating through a periodic quadrupole focusing field. *Phys. Plasmas*, v. 2, n. 7, p. 2675, July 1995.
- 70 GLUCKSTERN R. LAND FEDOTOV, A.; KURENNOY, S.; RYNE, R. Halo formation in three-dimensional bunches. *Physical Review E*, v. 58, n. 4, p. 4977, October 1998.
- 71 FEDOTOV A. V. AND GLUCKSTERN, R.; KURENNOY, S.; RYNE, R. Halo formation in three-dimensional bunches with various phase space distribution. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, v. 2, p. 014201-1, 1999.
- 72 PAKTER., R.; CHEN, C. Electron beam halo formation in high-power periodic permanent magnet focusing klystron amplifiers. *IEEE Transactions on Plasmas Science*, v. 28, n. 3, p. 502, June 2000.
- 73 CHEN, C.; PAKTER, R. Mechanisms and control of beam halo formation in intense microwave sources and accelerators. *Physics of Plasmas*, v. 7, n. 5, p. 2203, May 2000.
- 74 CHEN, C.; DAVIDSON, R. Nonlinear resonances and chaotic behavior in a periodically focused intense charged-particle beam. *Physical Review Letters*, v. 72, n. 14, p. 2195, April 1994.
- 75 QIAN, Q.; DAVIDSON, R. Nonlinear dynamics of intense ion beam envelopes. *Physical Review E*, v. 53, n. 5, p. 5349, May 1996.
- 76 DAVIDSON R., C.; CHEN, C. Kinetic description of intense nonneutral beam propagation through a periodic solenoidal focusing field on the nonlinear vlasov-maxwell equations. *Particle Acceleration*, v. 59, p. 175, 1998.
- 77 PAKTER., R.; RIZZATO, F. B. Stability of periodically focused intense particle beams. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, n. 4, p. 044801-1, July 2001.
- 78 PAKTER., R.; RIZZATO, F. B. Nonlinear dynamics of periodically focused intense particle beams. *Physical Review E*, v. 65, p. 056503, 2002.

- 79 MORAES J., S.; RIZZATO, F. B.; PAKTER, R. The role of the focusing field profile on the stability of periodically focused particle beams. *Physics of Plasmas*, v. 10, n. 12, p. 4811, December 2003.
- 80 MORAES J., S.; RIZZATO, F. B.; PAKTER, R.; C., C. Gap bifurcations and stability properties in periodically focused beams. *Physica Scripta*, T107, p. 145, 2004.
- 81 GLUCKSTERN R. L. AND CHENG, W.; YE, H. Stability of a uniform-density beam with circular cross section. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 15, p. 2835, October 1995.
- 82 LEE , S.; RIABKO, A. Envelope hamiltonian of an intense charged-particle beam in periodic solenoidal fields. *Physical Review E*, v. 51, n. 2, p. 1609, February 1995.
- 83 RIABKO , A.; ELLISON, M.; KANG, X.; LEE, S.; LI, D.; PEI, X.; WANG, L. Hamiltonian formalism for space charge dominated beams in a uniform focusing channel. *Physical Review E*, v. 51, n. 4, p. 3529, April 1995.
- 84 IKEGAMI , M. Particle-core analysis of beam halo formation in anisotropic beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, v. 435, p. 284, May 1999.
- 85 IKEGAMI , M. Particle-in-cell simulation study on halo formation in anisotropic beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, v. 454, p. 289, April 2000.
- 86 LUND S., L.; BUKH, B. Stability properties of the tranverse envelope equations describing intense ion beam transport. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, v. 7, p. 024801, 2004.
- 87 BALESCU, R. *Transport Process in Plasmas*. Amsterdam: North Holland, 1988. Vol.1 e 2.
- 88 DAVIDSON R., C.; LUND, S. Warm-fluid description of intense beams equilibrium and electrostatic stability properties. *Phys. Plasmas.*, v. 05, p. 3028, 1998.
- 89 DAVIDSON R., C.; STRASBURG, S. Warm-fluid stability properties of intense nonneutral charged particle beams with pressure anisotropy. *Phys. Plasmas.*, v. 07, p. 2657, 2000.
- 90 QIAN B. , L.; ZHOU, J.; CHEN, C. Image-charge effects on the envelope dynamics of an unbunched intense charged-particle beam. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, v. 6, p. 014201, 2003.
- 91 BUDKER G., J. *Proceedings of the Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics*, Geneva, 1956.
- 92 GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. New York: Addison-Wesley, 1980.
- 93 ARNOLD V., I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- 94 LANDAU L., D.; LIFSHITZ, E. M. *Classical Mechanics*. New York: Pergamon, 1991.

- 95 LANDAU L., D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory Fields*. Oxford: Pergamon Press, 1975.
- 96 PAKTER R. AND CHEN, C. Cold-fluid equilibrium for a corkscrewing elliptic beam in a variably focusing channel. *Physical Review E*, v. 62, n. 2, p. 2789, August 2000.
- 97 LICHTENBERG A., J.; LIEBERMAN, M. *Regular and Stochastic Motion*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- 98 RIZZATO F., B.; PAKTER, R. Gap bifurcations in nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 89, n. 18, p. 184102-1, October 2002.
- 99 SIMEONI JR., W.; RIZZATO, F. B.; PAKTER, R. Nonlinear stability of intense mismatched beams in magnetic focusing fields. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference, Tennessee*, May 2005.
- 100 HESS., M.; PAKTER, R.; CHEN, C. Greens's functions description of space-charge in intense charged-particle beams. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference, Piscataway, New York*, p. 2752, May 1999.
- 101 JACKSON J., D. *Classical Electrodynamics*. New Jersey: John Willey Sons, 1999.
- 102 BATYGIN Y., K. Effect of numerical noise on beam emittance growth in pic code. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference, Chicago*, p. 3090, 2001.
- 103 PAKTER, R.; CHEN, C. Emittance growth and particle diffusion induced by discrete-particle effects in intense beams. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference, Vancouver, B.C.*, p. 1938, 1997.
- 104 VLASOV A., A. *Many-Particle Theory and its Application to Plasma*. New York: Gordon and Breach, 1961.
- 105 KLIMOMTOVICH YU., L. *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. Oxford: Pergamon Press, 1967.
- 106 KLIMOMTOVICH YU., L. *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasma*. Oxford: Pergamon Press, 1981.
- 107 MORSE P., M. *Methods of Theoretical Physics-I*. New York: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1953.
- 108 MOON , P.; SPENCER, D. *Field Theory for Engineers*. New Jersey: D. VAN NOSTRAND COMPANY, 1961.
- 109 MORSE P., M. *Methods of Theoretical Physics-II*. New York: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1953.
- 110 KOSCIELNIAK, S. Longitudinal space-charge geometric factor for an elliptical beam. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference, Chicago*, 2001.