

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Rodolfo Rodrigues Jaeger**

**VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOB ESTADO  
PLANO DE TENSÃO: PROGRAMA COMPUTACIONAL  
APLICANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Porto Alegre  
dezembro 2012

**RODOLFO RODRIGUES JAEGER**

**VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOB ESTADO  
PLANO DE TENSÃO: PROGRAMA COMPUTACIONAL  
APLICANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de  
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal  
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Engenheiro Civil

**Orientador: Américo Campos Filho**

Porto Alegre  
dezembro 2012

**RODOLFO RODRIGUES JAEGER**

**VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOB ESTADO  
PLANO DE TENSÃO: PROGRAMA COMPUTACIONAL  
APLICANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2012

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila Bessa (UFRGS)**  
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco (UFRGS)**  
Ph.D. pela Pennsylvania State University

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho aos meus pais, Roberto e Regina, que sempre me apoiaram e especialmente durante o período do meu Curso de Graduação estiveram ao meu lado.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Américo Campos Filho, orientador deste trabalho, pelo conhecimento, pelo tempo disponibilizado e pelas incontáveis vezes em que me auxiliou no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço à Profa. Carin Maria Schmitt pela dedicação e disponibilidade em responder todas as dúvidas que surgiram ao longo do trabalho.

Agradeço aos meus pais, Roberto Longaray Jaeger e Regina Lydia Rodrigues Jaeger, pelo apoio ao longo dessa caminhada.

Agradeço à empresa Projetak pela oportunidade de crescimento profissional e compreensão pelos momentos de ausência dedicados a este trabalho.

Agradeço também a todas as pessoas que de certa forma ajudaram no desenvolvimento desse trabalho, seja indireta como diretamente.

O método dos elementos finitos pode ser tanto uma arte como uma frustração, mas é sempre um grande desafio.

*Klaus-Jürgen Bathe*

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo a elaboração de um *software* que simule o comportamento de vigas de concreto armado sob carregamento. O modelo considera que as vigas estão sob estado plano de tensão e que há aderência perfeita entre concreto e armadura. São avaliados os efeitos elastoplásticos da estrutura através de uma análise pelo método dos elementos finitos e calculados deslocamentos devidos à carregamentos instantâneos. Para o concreto é utilizado um elemento finito de 8 nós, com dois graus de liberdade em cada nó, utilizando modelos constitutivos para representar a fissuração e o esmagamento para cada instante de tempo do dado carregamento. A presença da armadura é entendida como uma linha de maior rigidez dentro dos elementos finitos de concreto, atribuindo-se uma maior rigidez aos elementos que possuem barras de aço no seu interior, supondo, também, um modelo incorporado no qual ela resiste apenas a esforços axiais. O *software* foi desenvolvido com a linguagem de programação *Microsoft Visual Basic* que permite a elaboração de uma interface amigável ao usuário. Como resultados, são obtidos os deslocamentos da estrutura ao longo dos estádios I, II e III.

Palavras-chave: Programa computacional aplicando o método dos elementos finitos. Vigas sob estado plano de tensão. Vigas de concreto armado.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma das etapas de trabalho .....	18
Figura 2 – Exemplo de viga biapoiada .....	19
Figura 3 – Elemento finito isoparamétrico de oito nós .....	22
Figura 4 – Sistemas de coordenadas locais e naturais da barra .....	29
Figura 5 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido .....	37
Figura 6 – Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado .....	38
Figura 7 – Diagrama tensão-deformação para armadura passiva .....	41
Figura 8 – Fluxograma do programa .....	43
Figura 9 – Tela principal do programa .....	47
Figura 10 – Tela de entrada de dados gerais .....	47
Figura 11 – Mensagem de aviso para correção dos dados .....	48
Figura 12 – Tela de entrada de dados das coordenadas e conectividades .....	48
Figura 13 – Tela de entrada de dados da vinculação .....	49
Figura 14 – Tela de entrada de dados das propriedades do concreto .....	50
Figura 15 – Tela de entrada de dados das propriedades da armadura .....	51
Figura 16 – Tela de entrada de dados do carregamento .....	52
Figura 17 – Tela principal com o desenho atualizado .....	53
Figura 18 – Mensagem quando o processamento ocorre sem erros .....	53
Figura 19 – Tela de visualização dos resultados .....	54
Figura 20 – Exemplo do relatório do processamento.....	55
Figura 21 – Exemplo de gráfico que relaciona carga e deslocamento .....	56
Figura 22 – Tela da deformada da estrutura .....	57
Figura 23 – Estrutura analisada (medidas em cm) .....	58
Figura 24 – Seção transversal da estrutura analisada (medidas em cm) .....	59
Figura 25 – Discretização da estrutura em elementos finitos (medidas em cm) .....	59
Figura 26 – Deformada da estrutura .....	60
Figura 27 – Relatório do processamento .....	61
Figura 28 – Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento .....	62

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Constantes de Gauss-Legendre para grau de integração igual a três .....	27
--	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x$  – coordenada cartesiana

$y$  – coordenada cartesiana

$N_i$  – funções de forma calculadas com as coordenadas naturais do elemento

$x_i$  – coordenada cartesiana em nó do elemento

$y_i$  – coordenada cartesiana em nó do elemento

$q$  – número de nós do elemento

$u$  – deslocamento horizontal em um ponto qualquer

$v$  – deslocamento vertical em um ponto qualquer

$u_i$  – deslocamento horizontal em um nó do elemento

$v_i$  – deslocamento vertical em um nó do elemento

$\xi$  – coordenada natural de um ponto qualquer do elemento

$\xi_i$  – coordenada natural de um nó do elemento

$\eta$  – coordenada natural de um ponto qualquer do elemento

$\eta_i$  – coordenada natural de um nó do elemento

$\varepsilon$  – matriz de deformações

$\varepsilon_x$  – deformação na direção  $x$

$\varepsilon_y$  – deformação na direção  $y$

$\gamma_{xy}$  – deformação transversal

$J$  – matriz Jacobiana

$B$  – matriz de transformação deformação-deslocamento

$C$  – matriz constitutiva do elemento

$E$  – módulo de elasticidade do concreto

$\nu$  – coeficiente de Poisson do concreto

$K$  – matriz de rigidez do elemento

$V$  – volume do elemento

$t$  – espessura do elemento

$w_i$  – fator de peso da integração numérica

$w_j$  – fator de peso da integração numérica

$n_g$  – número de pontos da integração numérica

$\beta$  – ângulo de orientação tangente à barra

$s$  – coordenada cartesiana

$\chi$  – coordenada normalizada

$H_1$  – função de forma da barra

$H_2$  – função de forma da barra

$H_3$  – função de forma da barra

$B_s$  – matriz de transformação deformação-deslocamento da barra

$K_s$  – matriz de rigidez da barra

$E_s$  – módulo de elasticidade da barra

$A_s$  – área da seção transversal da barra de aço

$I_1$  – primeiro invariante do tensor desviador de tensões

$I_2$  – segundo invariante do tensor desviador de tensões

$J_3$  – terceiro invariante do tensor desviador de tensões

$\sigma_x$  – tensão normal na direção x

$\sigma_y$  – tensão normal na direção y

$\sigma_z$  – tensão normal na direção z

$\tau_{xy}$  – tensão de cisalhamento no plano xy

$\tau_{xz}$  – tensão de cisalhamento no plano xz

$\tau_{yz}$  – tensão de cisalhamento no plano yz

$\sigma_m$  – tensão média

$\theta$  – ângulo de similaridade

$\alpha$  – parâmetro função de k

$\lambda$  – parâmetro função de k

$\mu$  – parâmetro função de k

$f_{cm}$  – resistência média à compressão uniaxial

$c_1$  – parâmetro função de k

$c_2$  – parâmetro função de k

$f_{tm}$  – resistência média à tração uniaxial

k – relação entre  $f_{cm}$  e  $f_{tm}$

$\sigma_c$  – tensão normal do concreto

$\varepsilon_p$  – deformação elastoplástica

$\varepsilon_0$  – deformação de fissuração

$\alpha$  – parâmetro de amolecimento

$G_f$  – energia da fratura

$\varepsilon$  – deformação de tração nominal da zona fissurada

$l_c$  – comprimento característico para cada ponto de integração

$G_c$  – módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado

$\varepsilon_t$  – deformação normal à tração do concreto

$k_1$  – parâmetro a ser ajustado

$f_{yk}$  – resistência característica do aço

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>2 DIRETRIZES DA PESQUISA .....</b>	<b>16</b>
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA .....	16
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	16
<b>2.2.1 Objetivo principal .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2.1 Objetivos secundários .....</b>	<b>16</b>
2.3 PRESSUPOSTO .....	16
2.4 DELIMITAÇÕES .....	17
2.5 LIMITAÇÕES .....	17
2.6 DELINEAMENTO .....	17
<b>3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>19</b>
3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO .....	22
3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA .....	28
<b>4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS .....</b>	<b>33</b>
4.1 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO .....	33
<b>4.1.1 Modelo para o concreto comprimido .....</b>	<b>33</b>
<b>4.1.2 Modelo para o concreto tracionado .....</b>	<b>37</b>
4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA .....	40
<b>5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>42</b>
5.1 SUBROTINAS DE PROCESSAMENTO .....	42
5.2 ENTRADA DE DADOS .....	46
5.3 VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS .....	53
<b>6 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>58</b>
6.1 ESTRUTURA ANALISADA .....	58
6.2 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS .....	59
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>63</b>
REFERÊNCIAS .....	65



## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de vigas de concreto armado é alvo de muitas publicações no meio científico. Tanto por ser uma peça estrutural vital para qualquer projeto, quanto pelo concreto armado ser um material complexo devido a sua não-linearidade e a presença de dois materiais com características diferentes: concreto e aço. O conhecimento do comportamento de tais peças quando submetidas aos mais diversos carregamentos é essencial para realizar um dimensionamento racional. Por isso, usualmente, são propostos modelos numéricos para uma análise mais precisa dos esforços na peça, otimizando os resultados e, conseqüentemente, diminuindo custos.

O método dos elementos finitos é mundialmente reconhecido por sua capacidade de analisar estruturas muito complexas de uma maneira mais realista, simulando descontinuidades geométricas e condições de vinculação, cujo cálculo usual resultaria em extrapolações que poderiam acarretar sérios erros. Sua aplicação em análise de estruturas surge justamente quando os demais métodos que estão a disposição não poderiam ser aplicados. O método considera a discretização de uma estrutura em elementos finitos, cujos comportamentos são conhecidos. Além disto, a possibilidade de implantação de rotinas para análise não-linear do concreto e da armadura proporciona a resolução de uma ampla variedade de problemas. Ao longo dos anos, sua aplicação para concreto armado foi focada principalmente na análise da fissuração, fluência e retração.

Neste trabalho, foi desenvolvido um programa computacional que realiza a simulação de uma estrutura real de concreto armado, analisando as tensões atuantes devidas aos diversos carregamentos através dos estádios I, II e III. O trabalho tem como referência a dissertação de Machado (2002) que apresentou um modelo computacional para simulação numérica de estruturas de concreto armado e protendido, com ou sem aderência, sob estados planos de tensão, submetidas a cargas de curta e longa duração com o *software MatLab*.

O programa leva em consideração o comportamento elastoplástico do concreto e do aço com as equações constitutivas próprias de cada material, indicadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993). O modo aplicado para representar a estrutura consiste em desenvolver dois modelos separados para o concreto e para

a armadura, combinando-os em uma etapa posterior. As barras de aço são inseridas como linhas de um material com maior rigidez dentro dos elementos de concreto, sendo a matriz de rigidez total a soma das matrizes de rigidez do concreto e da armadura. Ainda, foi implementada uma análise das fissuras, distribuídas ao longo da peça, para as considerações do concreto fissurado. Nesses casos, assume-se a contribuição da rigidez do concreto apenas entre fissuras, devido a aderência perfeita entre concreto e armadura.

A rotina computacional foi desenvolvida utilizando a linguagem de programação *Visual Basic*, a qual possibilita a implementação do núcleo de processamento do modelo numérico e a criação de uma interface de entrada e visualização de dados amigável ao usuário. Dessa maneira, o programa pode ser facilmente empregado para fins de aprendizagem e de projeto.

No capítulo 2, apresenta-se o método de pesquisa, que inclui a questão de pesquisa, objetivos principal e secundários, pressuposto, delimitações, limitações e delineamento que direcionaram o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3, são apresentados os modelos de elementos finitos utilizados para o concreto e para a armadura. O capítulo 4, descreve os modelos constitutivos dos materiais, ou seja, como eles se comportam sob determinados níveis de tensão. No capítulo 5, é descrita a implementação do modelo computacional. No capítulo 6, é descrito o exemplo analisado e os resultados. Por fim, no capítulo 7, são realizadas as considerações finais.

## 2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

### 2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa do trabalho é: qual seria uma rotina computacional adequada para análise de vigas de concreto armado, sob estado plano de tensão, com a utilização do método dos elementos finitos?

### 2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e são descritos a seguir.

#### 2.2.1 Objetivo Principal

O objetivo principal do trabalho é a elaboração de um *software* que analise o comportamento elastoplástico de vigas de concreto armado, sob estado plano de tensão, aplicando o método dos elementos finitos, utilizando a linguagem de programação *Visual Basic*.

#### 2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários do trabalho são:

- a) verificação da distribuição das fissuras em vigas de concreto armado;
- b) elaboração de um roteiro de cálculo do método dos elementos finitos para análise não-linear.

### 2.3 PRESSUPOSTO

O trabalho tem por pressuposto a validade do método dos elementos finitos para análise de peças de concreto armado sob estado plano de tensão, assim como as considerações do

Código Modelo CEB-FIP 1990 (COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993) para os critérios de ruptura do concreto e da armadura, sendo ambos adequados para o estudo proposto, supondo que os materiais possuem aderência perfeita.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se ao desenvolvimento de um *software* que analise o comportamento de vigas de concreto armado sob estado plano de tensão.

## 2.5 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho:

- a) análise de carregamentos instantâneos;
- b) vigas estão sob estado plano de tensão;
- c) uso de uma única linguagem de programação, o *Visual Basic*.

## 2.6 DELINEAMENTO

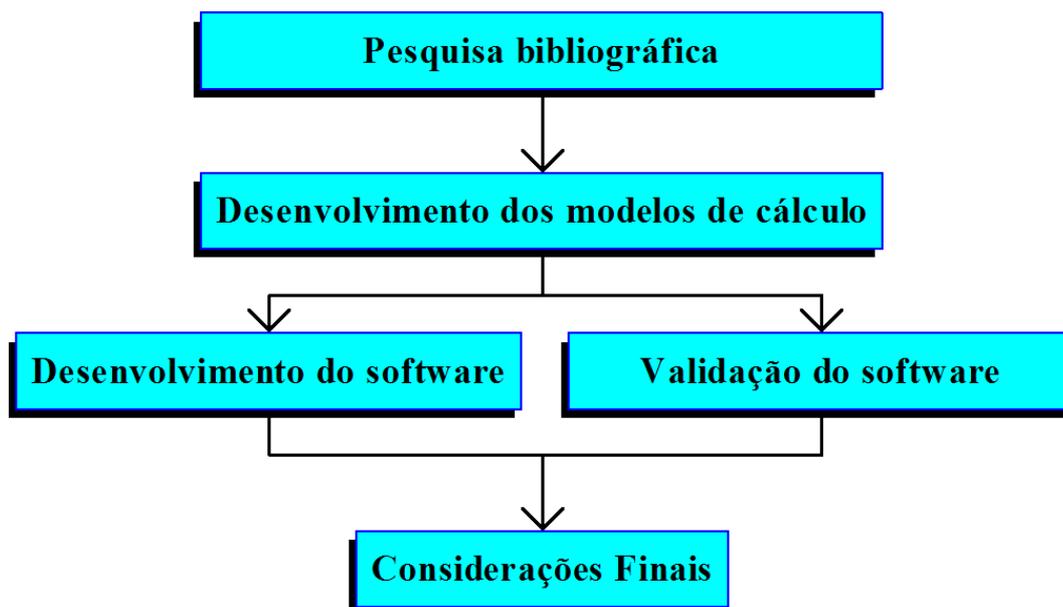
O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir que estão representadas na figura 1 e são descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) desenvolvimento dos modelos de cálculo;
- c) desenvolvimento do *software*;
- d) validação do *software*;
- e) considerações finais.

A **pesquisa bibliográfica** tem como objetivo reunir informações, métodos e modelos sobre o assunto. Foram estudados livros e artigos que tratam especificamente da aplicação do método dos elementos finitos em peças de concreto armado. É importante ressaltar que esta etapa proporciona um conhecimento geral de como as peças de concreto armado vêm sendo analisadas computacionalmente, o que é essencial para o próximo passo.

A etapa de **desenvolvimento dos modelos de cálculo** compreende a definição da maneira com a qual as vigas serão analisadas, ponderando sobre quais seriam os modelos que proporcionam melhores resultados, que são mais efetivos e de melhor implementação computacional. Essa etapa vem sendo assunto constante entre os trabalhos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, sendo a principal fonte de consulta deste trabalho a dissertação de Machado (2002).

Figura 1 – Fluxograma das etapas de trabalho



(fonte: elaborado pelo autor)

A etapa de **desenvolvimento do software** tem por função desenvolver na linguagem *Visual Basic* o estudo da etapa anterior, contando ainda com a concepção da entrada e saída de dados do programa. Foi realizada simultaneamente com a etapa de **validação do software**, já que a cada nova porção de código implementada, deve-se proceder uma verificação dos resultados com cálculos manuais ou com outro *software* de elementos finitos.

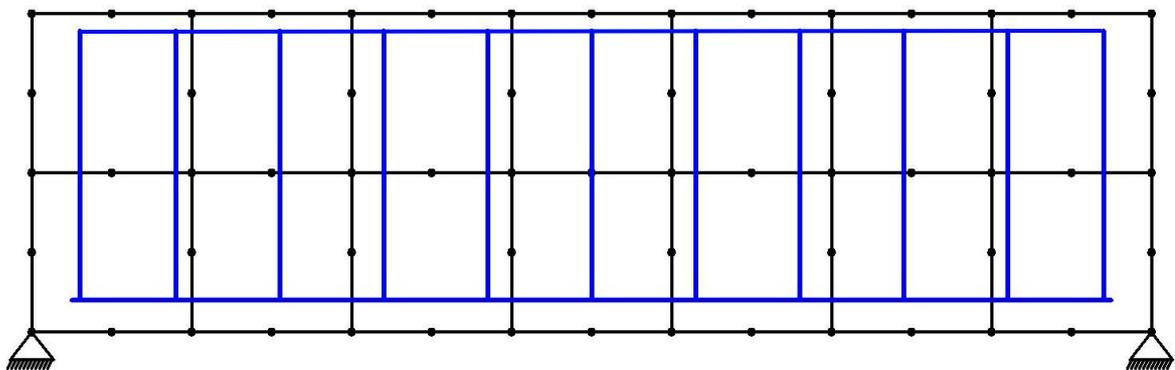
Por fim, foram realizadas **considerações finais** que consistem em um fechamento do trabalho, analisando a precisão do programa.

### 3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

No estudo de elementos estruturais de concreto armado, os modelos de elementos finitos empregados para a modelagem do concreto e da armadura são desenvolvidos separadamente. Para cada material é calculada a matriz de rigidez correspondente ao grau de liberdade dos nós da estrutura e, apenas no final, essas matrizes de rigidez são somadas para obter a matriz de rigidez total da estrutura. Sendo assim, a presença de armadura é entendida como um aumento da rigidez nos determinados pontos do concreto nos quais ela está localizada.

Pode-se visualizar, na figura 2, um modelo de viga biapoiada que pode ser analisado utilizando a formulação que é apresentada. Os pontos representam os nós dos elementos finitos, as linhas que interligam esses pontos são as que definem a geometria de cada elemento finito, enquanto que as linhas azuis, dispostas horizontal e verticalmente no meio dos elementos, mostram a posição da armadura dentro da estrutura.

Figura 2 – Exemplo de viga biapoiada



(fonte: elaborado pelo autor)

O problema é resolvido com um processo incremental através uma análise iterativa não-linear, dessa maneira recalculam-se os deslocamentos para cada *loop* do programa, utilizando os dados do estado de tensão anterior. Para cada novo *loop*, o programa incrementa as cargas até atingir o carregamento total, calculando uma nova matriz constitutiva para cada ponto, que depende dos critérios de ruptura do concreto e da armadura.

Segundo Darwin (1993, p. 213), para representar corretamente este comportamento não-linear, os incrementos de carga devem ser pequenos. Dessa maneira, a convergência a cada *loop* é obtida rapidamente, ou seja, um grande número de pequenos incrementos de carga produz um pequeno número de iterações para a obtenção da convergência. Além do que, se fossem utilizados grandes incrementos de carga, poderia ocorrer um comportamento não-linear em outras regiões do modelo.

Segundo Bathe e Wilson (1976, p. 82), os passos para cálculo de estruturas com método dos elementos finitos são:

- a) admitir dois deslocamentos desconhecidos em cada ponto nodal do elemento, sendo os deslocamentos em qualquer ponto do elemento aproximados por funções de forma;
- b) com a utilização do teorema do trabalho virtual, calcula-se a matriz de rigidez dos elementos que compõe a estrutura individualmente;
- c) realizar a montagem da matriz de rigidez da estrutura, somando as matrizes de rigidez de cada elemento aos seus lugares na matriz global. Após isso, impor as condições de contorno e resolver as equações de equilíbrio.

Assim são obtidos os deslocamentos nodais dos elementos finitos, com os quais pode-se calcular as deformações e tensões em toda a estrutura. Isso é possível utilizando novamente as funções de forma que aproximam o comportamento da estrutura nos pontos em que os seus deslocamentos são desconhecidos.

Bathe e Wilson (1976, p. 101) ainda mostram que para um elemento finito ser utilizado nessa análise, o mesmo precisa ser completo e compatível, caso contrário, a convergência não é atingida. Para o elemento finito ser completo, suas funções de forma devem ser capazes de representar os estados constantes de deformação e os deslocamentos de corpo rígido, como se o elemento fosse um corpo isolado. Enquanto que para o elemento finito ser compatível, os deslocamentos em elementos finitos adjacentes, através do contorno, devem ser contínuos, ou seja, não podem haver degraus entre os elementos.

Segundo Bathe e Wilson (1976, p. 75), a aplicação do método dos elementos finitos inicia com a discretização da estrutura em um conjunto de elementos individuais cujos comportamentos são conhecidos através das funções de forma. Para cada elemento, as matrizes de rigidez, correspondentes aos graus de liberdade globais da estrutura, são calculadas e a matriz de rigidez global é obtida com a adição das matrizes de rigidez de cada

elemento. Em seguida, calcula-se o vetor de forças da estrutura, que é uma correspondência nodal dos carregamentos de diversos tipos aplicados. Com a matriz de rigidez global e o vetor de forças calculados, é possível calcular os deslocamentos nodais da estrutura.

É importante ressaltar que a análise de elementos finitos é uma solução aproximada. Isso é devido ao fato de que uma peça contínua é aproximada por uma série de elementos finitos que são conectados a um número finito de pontos nodais. Os deslocamentos de cada elemento finito são calculados com funções de forma admitidas como padrões de deslocamentos, porém, estas funções podem apenas aproximar os deslocamentos exatos de um meio contínuo, pois tem um grau reduzido (BATHE; WILSON, 1976, p. 82-83).

Quando se tratam de elementos finitos isoparamétricos, as coordenadas e os deslocamentos em qualquer ponto do elemento relacionam-se diretamente às coordenadas e aos deslocamentos dos pontos nodais através do uso de funções de forma, que são definidas diferentemente para cada elemento finito utilizado. Dessa forma, considerando-se uma análise bidimensional, as coordenadas em qualquer ponto do elemento podem ser obtidas utilizando as equações 1 e 2 (BATHE; WILSON, 1976, p. 128):

$$x = \sum_{i=1}^q N_i x_i \quad (\text{equação 1})$$

$$y = \sum_{i=1}^q N_i y_i \quad (\text{equação 2})$$

Onde:

$x, y$  = coordenadas em qualquer ponto do elemento;

$N_i$  = funções de forma calculadas com as coordenadas naturais do elemento;

$x_i, y_i$  = coordenadas dos nós do elemento;

$q$  = número de nós do elemento.

De forma análoga, podem-se obter os deslocamentos em qualquer ponto do elemento, utilizando as equações 3 e 4 (BATHE; WILSON, 1976, p. 133):

$$u = \sum_{i=1}^q N_i u_i \quad (\text{equação 3})$$

$$v = \sum_{i=1}^q N_i v_i \quad (\text{equação 4})$$

Onde:

$u, v$  = deslocamentos em qualquer ponto do elemento;

$N_i$  = funções de forma calculadas com as coordenadas naturais do elemento;

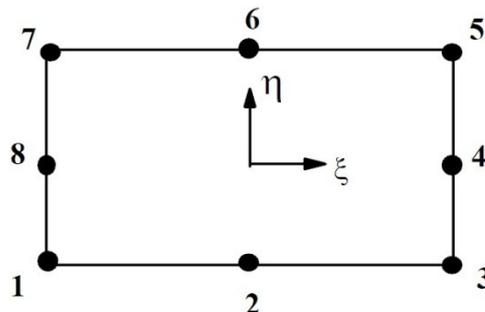
$u_i, v_i$  = deslocamentos dos nós do elemento;

$q$  = número de nós do elemento.

### 3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

Para a análise deste trabalho, é utilizado um elemento finito isoparamétrico de oito nós, como pode-se visualizar na figura 3. Este elemento possui dois graus de liberdade em cada nó, que correspondem às translações nas direções horizontal e vertical do sistema natural de coordenadas. Suas funções de forma são expressas nas equações 5 e 6.

Figura 3 – Elemento finito isoparamétrico quadrangular de oito nós



(fonte: MACHADO, 2002, p. 12)

Para os nós de canto ( $i = 1, 3, 5$  e  $7$ ) (MACHADO, 2002, p. 12):

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (\text{equação 5})$$

Para os nós de meio de lado ( $i = 2, 4, 6$  e  $8$ ) (MACHADO, 2002, p. 12):

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta_0)(1 - \xi^2) \quad (\text{equação 6})$$

Onde:

$N_i$  = funções de forma para cada ponto;

$\xi_0 = \xi \xi_i$ ;

$\eta_0 = \eta \eta_i$ ;

$\xi_i, \eta_i$  = coordenadas naturais do ponto em questão;

$\xi, \eta$  = coordenadas naturais de qualquer ponto dentro do elemento.

Segundo Bathe e Wilson (1976, p. 130-131), o cálculo das matrizes para um elemento finito apenas atinge uma precisão máxima quando os pontos nodais do elemento forem distribuídos uniformemente, ou seja, a forma do elemento deve ser a mais próxima possível da retangular. Ainda, aconselham que os nós intermediários sejam localizados nos pontos intermediários entre os nós de canto. Pode-se concluir que o elemento finito isoparamétrico de oito nós utilizado neste trabalho está de acordo com esta afirmação.

Para calcular a matriz de rigidez do elemento, é preciso calcular a matriz de relações deformações-deslocamentos. Essa matriz relaciona diretamente os deslocamentos dos pontos nodais do elemento com suas deformações, ou seja, multiplicando-a pelo vetor de deslocamentos nodais, obtêm-se as deformações. Para uma peça sob estado plano de tensão, as deformações são calculadas com a equação 7, que é a base para obter a matriz de deformações-deslocamentos (BATHE; WILSON, 1976, p. 109):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 7})$$

Onde:

$\varepsilon$  = matriz de deformações;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  = deformações do elemento;

$u, v$  = deslocamentos nodais calculados.

Os deslocamentos  $u$  e  $v$  são função das coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  e as derivadas da equação 7 são em função das coordenadas locais  $x$  e  $y$ . Para conseguir calcular essas derivadas é preciso fazer uma transformação das coordenadas naturais para as locais, utilizando-se a regra da cadeia que é representada em forma matricial na equação 8 (BATHE; WILSON, 1976, p. 134):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 8})$$

Onde:

$x, y$  = coordenadas referentes ao sistema local;

$\xi, \eta$  = coordenadas referentes ao sistema natural;

$u, v$  = deslocamentos do elemento.

A matriz da equação 8, que relaciona coordenadas locais e coordenadas naturais, é chamada de matriz Jacobiana. Como o trabalho utiliza um elemento finito que possui como graus de liberdade somente as translações em  $x$  e em  $y$ , ou em  $\xi$  e em  $\eta$ , a matriz tem dimensão  $2 \times 2$  e é expressa pela equação 9 (BATHE; WILSON, 1976, p. 134):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 9})$$

Onde:

$x, y$  = coordenadas referentes ao sistema local;

$\xi, \eta$  = coordenadas referentes ao sistema natural;

$J$  = matriz Jacobiana.

Derivando as equações 3 e 4 em função de  $\xi$  e  $\eta$  e multiplicando pela inversa da Jacobiana, pode-se obter os termos que compõem a matriz de relações deformações-deslocamento,  $B$ , da equação 10, que é obtida a partir da equação 7 (BATHE; WILSON, 1976, p. 135):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 10})$$

Onde:

$B$  = matriz de transformação deformação-deslocamento;

$N_i$  = funções de forma de cada nó do elemento;

$x, y$  = coordenadas referentes ao sistema local.

O próximo passo é calcular a matriz constitutiva do elemento que, para peça sob estado plano de tensão, é dada através da equação 11 (BATHE; WILSON, 1976, p. 110):

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 11})$$

Onde:

C = matriz constitutiva do elemento;

E = módulo de elasticidade;

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

Por fim, se obtém a matriz de rigidez K, a partir do princípio dos trabalhos virtuais, através da equação 12 (BATHE; WILSON, 1976, p. 136):

$$K = \int_V B^T C B dV \quad (\text{equação 12})$$

Onde:

K = matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais;

B = matriz de transformação deformação-deslocamento;

C = matriz tensão-deformação ou matriz constitutiva;

V = volume do elemento.

Como trata-se de um estado plano de tensão, a integração é realizada apenas no plano bidimensional da peça, sendo que para a direção ortogonal a este plano, a peça possui espessura t. Dessa forma o diferencial de volume é calculado com a equação 13 (BATHE; WILSON, 1976, p. 136):

$$dV = t \det(J) d\xi d\eta \quad (\text{equação 13})$$

Onde:

V = volume do elemento;

J = matriz Jacobiana;

t = espessura do elemento;

$\xi, \eta$  = coordenadas referentes ao sistema natural.

A resolução dessa integral de forma analítica é bastante complicada e, às vezes, impossível. Portanto, recorre-se a métodos de integração numérica, como o de Gauss-Legendre. Para isso, o produto das matrizes da integral é realizado para cada ponto de integração e multiplicado por seu respectivo fator de peso. Os pontos de integração e os fatores de peso são definidos a partir da ordem da integração numérica, para o elemento finito utilizado é igual a três. Assim, a equação 12 é escrita em forma do somatório da equação 14 (MACHADO, 2002, p. 13):

$$K = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} B_{ij}^T C B_{ij} t w_i w_j \det(J) \quad (\text{equação 14})$$

Onde:

$B_{ij}$  = matriz B calculada para os pontos de integração numérica;

C = matriz constitutiva do elemento;

t = espessura do elemento;

$w_i, w_j$  = fatores de peso da integração numérica;

J = matriz Jacobiana;

ng = número de pontos da integração numérica.

Na tabela 1, pode-se visualizar as coordenadas naturais dos pontos de integração e seus respectivos fatores de peso para a integração de Gauss-Legendre de grau igual a três.

Tabela 1 – Constantes de Gauss-Legendre para grau de integração igual a três

Ponto de integração ( $r_i$ )	Fator de peso ( $w_i$ )
-0.77459 66692 41483	1
0	0.5555 5555 5556
+0.77459 66692 41483	1

(fonte: adaptado de BATHE; WILSON, 1976, p. 159)

### 3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

A armadura é considerada segundo o modelo incorporado proposto por Elwi e Hrudey<sup>1</sup> (1989 apud MACHADO, 2002, p. 14). Sua facilidade de execução está no fato de que a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do concreto e, dessa forma, podem ser somadas para a obtenção da matriz de rigidez total da estrutura. Os pressupostos do modelo são que a armadura resiste apenas a esforços axiais e que há compatibilidade de deslocamento entre concreto e armadura. Portanto, considera-se aderência perfeita entre concreto e armadura. As armaduras podem ser arbitrariamente posicionadas no interior da peça, sem a adição de novas incógnitas.

Em se tratando de armadura passiva, sabe-se que irão surgir tensões apenas quando houver deformações nas barras de aço. Para obter essas deformações, calculam-se os deslocamentos nos elementos de concreto localizados na mesma posição. Sabendo que a armadura e o concreto naquele ponto possuem o mesmo deslocamento, pode-se calcular a deformação na armadura e, posteriormente, a tensão.

As armaduras devem ser inseridas pelo usuário como um conjunto de pontos nodais interligados. Quando ela atravessa o contorno do concreto, automaticamente deve ser colocado um ponto nessa intersecção, para se garantir uma continuidade interelementar. As coordenadas que não são fornecidas pelo usuário são obtidas por interpolação.

No caso de barras curvas, há necessidade do cálculo do ângulo de orientação tangente à barra,  $\beta$ , cujo seno e cosseno são dados pelas equações 15 e 16 (MACHADO, 2002, p. 16):

$$\text{sen } \beta = \frac{dy/dx}{ds/dx} \quad (\text{equação 15})$$

---

<sup>1</sup> ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, Reston, v. 115, n. 4, p. 740-745, Apr. 1989.

$$\cos \beta = \frac{dx/d\chi}{ds/d\chi} \quad (\text{equação 16})$$

Onde:

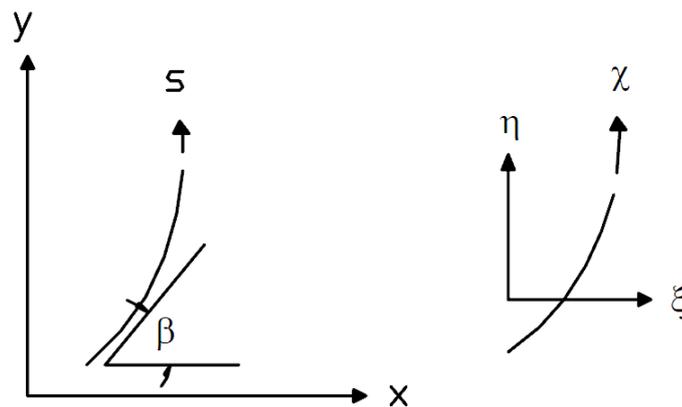
$\beta$  = ângulo de orientação tangente à barra;

$x, y$  e  $s$  = coordenadas locais;

$\chi$  = coordenada normalizada ou coordenada natural.

A relação  $ds/d\chi$  é chamada de fator de mapeamento isoparamétrico e é também utilizada para calcular a matriz de rigidez. Na figura 4, são ilustrados os sistemas locais (eixos  $x, y$  e  $s$ ) e naturais (eixos  $\xi, \eta$  e  $\chi$ ) da barra.

Figura 4 – Sistemas de coordenadas locais e naturais da barra



(fonte: MACHADO, 2002, p. 16)

As funções de forma, para elementos de três nós, são calculadas a partir de polinômios de Lagrange e são dadas pelas equações 17 a 19 (MACHADO, 2002, p. 20):

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2} \quad (\text{equação 17})$$

$$H_2(\chi) = 1 - \chi^2 \quad (\text{equação 18})$$

$$H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (\text{equação 19})$$

Onde:

$H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  = funções de forma da barra;

$\chi$  = coordenada normalizada da barra.

Da mesma forma que para os elementos finitos de concreto, deve-se calcular a matriz de relações deformações-deslocamentos, que, para o caso das barras, é um vetor dado pela equação 20 (MACHADO, 2002, p. 21):

$$\{B_s\} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta \left\{ \frac{dH_i}{dx} \right\} + \cos \beta \operatorname{sen} \beta \left\{ \frac{dH_i}{dy} \right\} \\ \cos \beta \operatorname{sen} \beta \left\{ \frac{dH_i}{dx} \right\} + \operatorname{sen}^2 \beta \left\{ \frac{dH_i}{dy} \right\} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 20})$$

Onde:

$B_s$  = matriz de relações deformações-deslocamentos da barra;

$x$  e  $y$  = coordenadas referentes ao sistema local;

$H_i$  = funções de forma da barra;

$\beta$  = ângulo de orientação tangente à barra.

A matriz de rigidez da barra de aço, então, é calculada com a equação 21 (MACHADO, 2002, p. 21):

$$K_s = \int_{\chi} B_s^T E_s B_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (\text{equação 21})$$

Onde:

$K_s$  = matriz de rigidez da barra;

$B_s$  = matriz de relações deformações-deslocamentos da barra;

$E_s$  = módulo de elasticidade do aço;

$ds/d\chi$  = fator de mapeamento isoparamétrico;

$A_s$  = área da seção transversal da barra de aço;

$\chi$  = coordenada normalizada da barra.

Assim como para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos finitos de concreto, a integração numérica de Gauss-Legendre também é aplicada para este caso, de acordo com a equação 22 (MACHADO, 2002, p. 21):

$$K_s = \sum_{i=1}^3 B_{si}^T E_s B_{si} \frac{ds}{d\chi} A_s w_i \quad (\text{equação 22})$$

Onde:

$K_s$  = matriz de rigidez da barra;

$B_{si}$  = matriz de relações deformações-deslocamentos;

$E_s$  = módulo de elasticidade da barra;

$ds/d\chi$  = fator de mapeamento isoparamétrico;

$A_s$  = área da seção transversal da barra de aço;

$w_i$  = fator de peso da integração numérica.

O número de pontos da integração numérica continua sendo igual a três. Esses pontos e o fator de peso de cada um são dados pela tabela 1, anteriormente apresentada.

Essa matriz de rigidez da barra calculada é relativa a um segmento de barra localizado dentro de um elemento finito de concreto. Dessa maneira, dentro do programa, as barras distribuídas,

dentro da estrutura, são divididas para cada elemento. Se um elemento possui uma barra em seu interior ele tem a sua matriz de rigidez somada linearmente à matriz de rigidez da barra, atribuindo uma rigidez adicional a esses elementos (MACHADO, 2002, p. 17).

## 4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

As vigas analisadas nesse trabalho possuem em sua composição concreto e armadura, que trabalham simultaneamente para suportar as cargas aplicadas. Porém, ao atingir determinados níveis de tensão, esses materiais passam do seu comportamento linear ao não-linear. Então, para realizar uma análise correta e mais precisa do comportamento do concreto e do aço, é importante utilizar modelos constitutivos que sejam capazes de representar essa não-linearidade dos materiais.

Segundo Machado (2002, p. 22), as causas da não linearidade do concreto são:

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não linearidade da relação tensão deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como, fluência e retração do concreto e relaxação do aço protendido, entre outros fatores como o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço [...]

Neste trabalho, serão abordados somente os efeitos de curto prazo devidos aos carregamentos instantâneos no concreto e no aço, sendo aqueles devidos ao longo prazo desprezados na análise.

### 4.1 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

O concreto possui um comportamento bastante diverso à compressão e à tração. Sua resistência quando aplicados esforços de compressão é muito maior do que aquela quando são aplicados esforços de tração. Devido a esse comportamento diferenciado são utilizados dois modelos de cálculo e dois critérios de ruptura.

#### 4.1.1 Modelo para o concreto comprimido

É proposto um modelo elastoplástico para o concreto comprimido. Nesse modelo, são avaliados os invariantes do tensor desviador de tensões, que substituem as tensões principais

no cálculo. Esse procedimento é proposto por Chen e Han<sup>2</sup> (1988 apud MACHADO, 2002, p. 23) através das equações 23 a 27:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (\text{equação 23})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (\text{equação 24})$$

$$J_3 = (\sigma_x - \sigma_m) \left[ (\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{xy}^2 \right] + \tau_{xy} \left[ \tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz} \right] + \tau_{xz} \left[ \tau_{xy}\tau_{xz} - (\sigma_y - \sigma_m)\tau_{xz} \right] \quad (\text{equação 25})$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (\text{equação 26})$$

$$\text{sen } 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (\text{equação 27})$$

Onde:

$I_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  = primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões, respectivamente;

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  = tensões totais;

$\sigma_m$  = tensão média;

$\theta$  = ângulo de similaridade.

O modelo para concreto comprimido é dado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, 1993, p. 37). O critério de ruptura proposto é dado pela equação 28:

<sup>2</sup> CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Varlag, 1988.

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \mu \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (\text{equação 28})$$

Onde:

$\alpha, \lambda, \mu$  = parâmetros do modelo;

$I_1, J_2, J_3$  = primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões, respectivamente;

$f_{cm}$  = resistência média à compressão uniaxial.

Os parâmetros a serem calculados para a utilização da equação 28 são mostrados da equação 29 a 32 (COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, 1993, p. 37-38):

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1.4}} \quad (\text{equação 29})$$

$$\mu = \frac{1}{3,7k^{1.1}} \quad (\text{equação 30})$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1}(c_2 \cos 3\theta) \right], \text{ para } \sin 3\theta \leq 0 \quad (\text{equação 31})$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(-c_2 \cos 3\theta) \right], \text{ para } \sin 3\theta > 0 \quad (\text{equação 32})$$

Onde:

$c_1, c_2$  = parâmetros do modelo;

$k$  = relação entre  $f_{cm}$  e  $f_{tm}$ ;

E para as equações 31 e 32 são necessários dois parâmetros mostrados nas equações 33 e 34 (COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, 1993, p. 38):

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}} \quad (\text{equação 33})$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2 \quad (\text{equação 34})$$

Onde:

k = relação entre  $f_{cm}$  e  $f_{tm}$ ;

Para o cálculo da relação k, utiliza-se a resistência média à tração uniaxial, dada pela equação 35, e, posteriormente, pode-se calcular esta relação com a equação 36 (COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, 1993, p. 38):

$$f_{tm} = 0,14 (f_{cm})^{2/3} \quad (\text{equação 35})$$

$$k = \frac{f_{cm}}{f_{tm}} \quad (\text{equação 36})$$

Onde:

$f_{tm}$  = resistência média a tração uniaxial;

$f_{cm}$  = resistência média a compressão uniaxial;

k = relação entre  $f_{cm}$  e  $f_{tm}$ .

Por fim, utiliza-se a curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993, p. 40), apresentada na figura 5 e na equação 37.

$$\sigma_c = \frac{-\frac{E}{f_{cm}} \varepsilon_p - \left(\frac{\varepsilon_p}{-0,0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}} 0,0022 - 2\right) \frac{\varepsilon_p}{-0,0022}} f_{cm} \quad (\text{equação 37})$$

Onde:

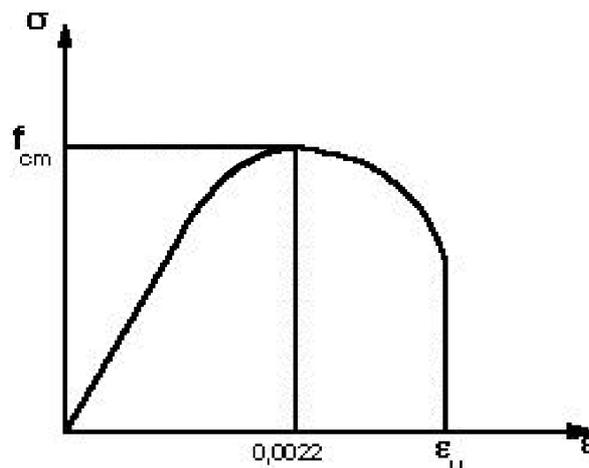
$\sigma_c$  = tensão de compressão no concreto;

$E$  = módulo de elasticidade secante;

$\varepsilon_p$  = deformação elastoplástica;

$f_{cm}$  = resistência média à compressão uniaxial.

Figura 5 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido



(fonte: MACHADO, 2002, p. 27)

#### 4.1.2 Modelo para o concreto tracionado

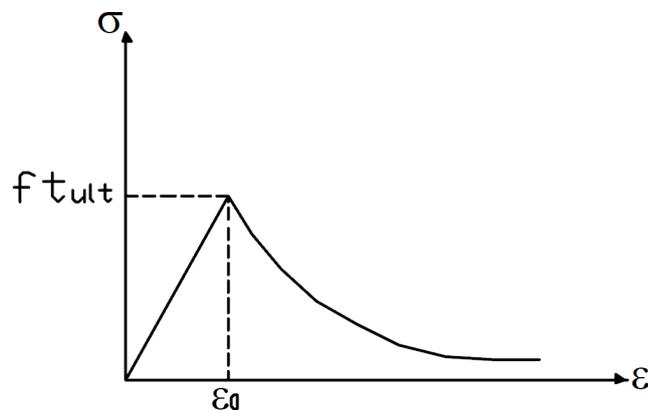
A principal característica do concreto submetido à tração é sua baixa resistência. A ocorrência de fissuras para baixos níveis de tensão, mesmo que muito pequenas, é um fato que, em alguns casos, possui grande importância, como em reservatórios ou silos. Por essa razão, deve ser realizada a análise da distribuição das fissuras em peças de concreto armado.

Neste trabalho, foi implantado o modelo de fissuras distribuídas, para o qual é necessário atualizar a relação tensão-deformação após a fissura ter ocorrido. O concreto é modelado como um material elástico com amolecimento (*strain-softening*), sendo que o critério de

ruptura utilizado é o proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993, p. 87-91).

Segundo Darwin (1993, p. 204), a presença do aço modifica o comportamento do concreto de forma que os dois materiais não poderiam ser tratados separadamente. Em função disso surgiu a técnica do enrijecimento à tração (*tension stiffening*), na qual modifica-se o modelo constitutivo do concreto fissurado para este continuar suportando tensões de tração, ao contrário do concreto simples que perde sua capacidade de suportar tração rapidamente após o surgimento da primeira fissura. A fissura é formada na direção ortogonal a  $\sigma_1$  e o concreto passa a ter um comportamento ortotrópico. Tratando-se de estado plano de tensões, uma única fissura é permitida para cada ponto, na ocorrência de duas, aquele ponto passa a não colaborar para a rigidez. Esse conceito de enrijecimento à tração é inserido no modelo através do digrama tensão-deformação proposto por Hinton<sup>3</sup> (1988 apud MACHADO, 2002, p. 31) na figura 6.

Figura 6 – Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado



(fonte: MACHADO, 2002, p. 31)

Essa curva pode ser descrita pela equação 38:

$$\sigma_c = E \varepsilon_0 \left( e^{\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\alpha}} \right) \quad (\text{equação 38})$$

<sup>3</sup> HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988.

Onde:

$\sigma_c$  = tensão de tração no concreto;

E = módulo de elasticidade longitudinal;

$\varepsilon_0$  = deformação de fissuração;

$\alpha$  = parâmetro de amolecimento;

$\varepsilon$  = deformação de tração nominal da zona fissurada.

O parâmetro de amolecimento é dado pela equação 39:

$$\alpha = \frac{\left(G_f - \frac{1}{2E\varepsilon_0 l_c}\right)}{E\varepsilon_0 l_c} > 0 \quad (\text{equação 39})$$

Onde:

$\alpha$  = parâmetro de amolecimento;

$G_f$  = energia de fratura;

E = módulo de elasticidade longitudinal;

$\varepsilon_0$  = deformação de fissuração;

$l_c$  = comprimento característico para cada ponto de integração.

A energia da fratura é aquela necessária para separar as duas superfícies da fissura, ou seja, é a energia necessária para a formação efetiva da fissura. É calculada com a equação 40:

$$G_f = 3 \cdot 10^{-4} (f_{cm})^{0,7} \quad (\text{equação 40})$$

Onde:

$G_f$  = energia de fratura;

$f_{cm}$  = resistência média à compressão uniaxial, em  $\text{kN/cm}^2$ .

E, por fim, o comprimento característico para cada ponto de integração é fornecido pela equação 41:

$$l_c = (dV)^{1/3} \quad (\text{equação 41})$$

Onde:

$l_c$  = comprimento característico para cada ponto de integração;

$dV$  = volume associado a um ponto de integração.

Para a rigidez transversal do concreto fissurado, Cervenka<sup>4</sup> (1985 apud MACHADO, 2002, p. 32) sugerem utilizar uma redução do módulo de elasticidade longitudinal, na equação 42:

$$G_c = \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_1} \right] G \quad (\text{equação 42})$$

Onde:

$G_c$  = módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado;

$\varepsilon_t$  = deformação normal à tração do concreto;

$k_1$  = parâmetro a ser ajustado;

$G$  = módulo de elasticidade transversal do concreto.

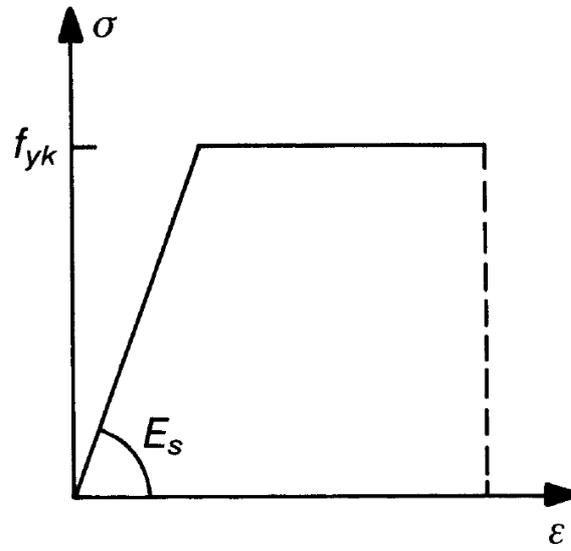
## 4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA

Para as barras de aço é utilizado apenas um modelo uniaxial para descrever seu comportamento, proposto pelo Código Modelo CEB-FIP (COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993, p. 73-74). Este modelo considera o aço como um material elastoplástico perfeito. O diagrama tensão-deformação da armadura passiva é ilustrado na figura 7. O material segue um comportamento elástico-linear, proporcional ao módulo de elasticidade, até atingir o valor do escoamento do aço. Nesse ponto, inicia o patamar de escoamento, quando, para qualquer nova deformação aplicada, a tensão continua a mesma até o ponto de ruptura.

---

<sup>4</sup> CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. **Journal of the American Concrete Institute**, Farmington Hills, v. 82, n. 6, p. 877-882, Nov. 1985.

Figura 7 – Diagrama tensão-deformação para a armadura passiva



(fonte: COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, 1993, p. 74)

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional é composta pelas subrotinas que foram utilizadas para a formulação do programa. Elas são divididas em subrotinas de pré-processamento, de processamento e de pós-processamento. O programa foi desenvolvido em *Visual Basic*, utilizando as técnicas de programação de Halvorson (2010) para essa linguagem, já que além do código escrito, deve-se também desenvolver uma interface com a distribuição de botões e caixas de texto. Neste capítulo, são descritas as subrotinas de processamento e é apresentada a inserção de dados do programa, assim como a visualização dos dados de saída.

### 5.1 SUBROTINAS DE PROCESSAMENTO

O programa é composto, em sua maior parte, pelo núcleo de processamento de dados do programa. Com o fornecimento correto dos dados de entrada, ele é capaz de interpretá-los e calcular os dados de saída que serão analisados. Dessa maneira, deve existir uma coerência nos dados de entrada, ou seja, eles devem seguir um padrão de armazenamento, pré-definido no programa, e um padrão de unidades, a ser definido pelo usuário.

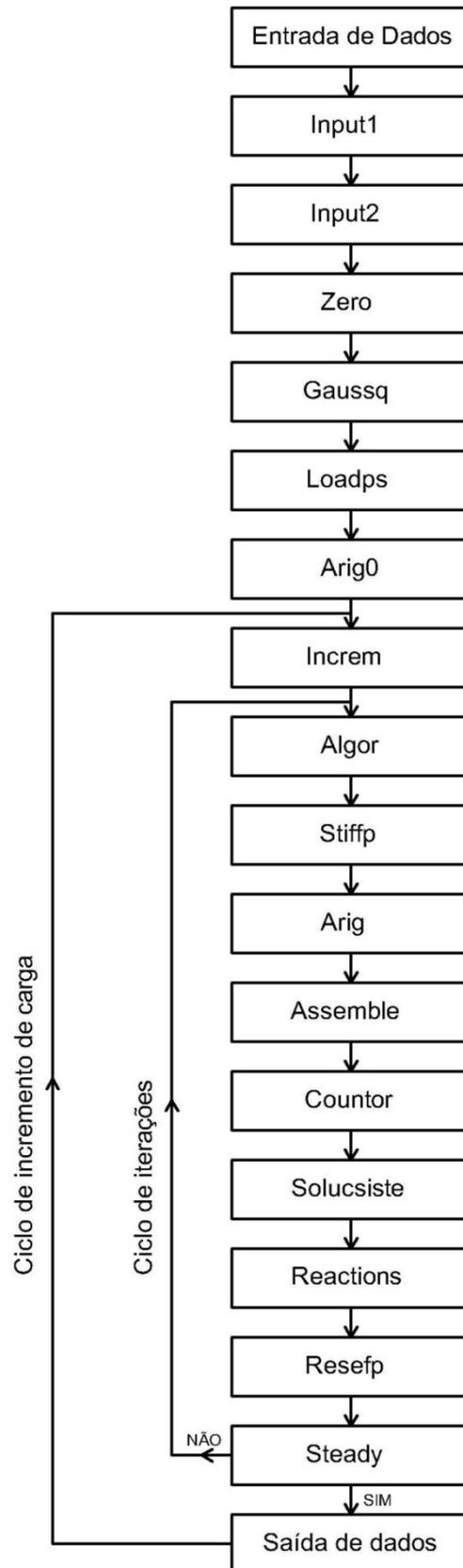
O trabalho segue a filosofia de programação proposta por Owen e Hinton (1980, p. 215-269) que define um padrão de armazenamento de dados e o fluxograma de processamento. A figura 8 exemplifica essa organização e apresenta os nomes das subrotinas do núcleo de processamento.

Na fase de pré-processamento, foram utilizadas subrotinas de entrada de dados, nas quais o usuário os insere a partir das telas específicas e são gerados arquivos de texto (*.txt*) formatados de forma que as subrotinas de processamento consigam ler esses dados e realizar o processamento, o que é explicitado na próxima seção.

Como se pode visualizar na figura 8, as primeiras rotinas da fase de processamento são a INPUT1 e a INPUT2. Na primeira, o programa lê os dados básicos da estrutura. São eles:

- a) número total de pontos que definem os elementos finitos de concreto (NPOIN);
- b) número total de pontos que definem as barras de aço (NPAIN);

Figura 8 – Fluxograma do programa



(fonte: elaborado pelo autor)

- c) número de elementos finitos de concreto (NELEM);
- d) número de barras de aço (NBAR);
- e) número de nós com vinculação externa (NVFIX);
- f) número de tipos de materiais para o concreto (NMATS);
- g) número de tipos de materiais para a armadura (NMATA);
- h) número de nós com carregamento externo (NNOF).

Esses dados definem o modo com que as novas telas irão aparecer ao usuário, nas quais serão inseridos o restante dos dados e lidos pela segunda subrotina de inserção de dados, são eles:

- a) coordenadas dos nós dos elementos finitos e das barras de aço;
- b) conectividades dos elementos finitos e das armaduras;
- c) propriedades do concreto e da armadura;
- d) definição dos nós vinculados e seus respectivos graus de liberdade impedidos;
- e) definição dos nós carregados e suas respectivas cargas nodais.

A partir das rotinas INPUT1 e a INPUT2, o programa faz uma checagem se todos os dados foram inseridos corretamente e se eles se encontram dentro dos limites máximos fixados no programa. Esses limites são fixados com o objetivo de limitar a quantidade de dados a ser processada, para não ocorrer problemas com ciclos muito extensos e não aumentar significativamente o tempo de processamento.

Em um segundo momento, são acionadas as subrotinas ZERO, GAUSSQ e LOADPS. A primeira iguala a zero os termos das matrizes que são utilizadas para acumulação dados ao longo do processo incremental e iterativo do programa. A segunda define os pontos da integração numérica de Gauss-Legendre e seus respectivos pesos. O grau da integração numérica é fixado em três, o que simplifica a entrada de dados e fornece bons resultados. Por último, a rotina LOADPS monta o vetor de cargas consistente para cada elemento.

A subrotina ARIG0 tem como principal objetivo o cálculo da matriz de relações deformações-deslocamentos para cada ponto de integração das barras de aço, conforme a equação 20. Dentro dela existem processos que identificam a posição das barras dentro dos elementos finitos, segmentando-as e atribuindo uma rigidez relativa aos nós do elemento finito. Tem como resultante um arquivo de texto (.txt) no qual essas matrizes são gravadas e, em subrotinas posteriores, novamente resgatadas para o cálculo da matriz de rigidez da barra.

Na subrotina INCREM é iniciado o ciclo de incrementos de carga. O usuário define o número de incrementos de carga com o qual deseja aplicar o carregamento total e essa subrotina calcula os incrementos a cada novo ciclo, definindo um novo vetor de cargas consistente para cada elemento.

Quando se inicia o ciclo das iterações, a primeira subrotina é a ALGOR que faz uma verificação da necessidade de reformulação da matriz de rigidez dos elementos e, conseqüentemente, solução completa do sistema de equações. Isso é importante para diminuir o tempo de processamento, evitando refazer todos os processos a cada novo ciclo de iteração.

A subrotina STIFFP calcula a matriz de rigidez de cada elemento finito e armazena em arquivo de texto para posterior recuperação. Da mesma forma, a subrotina ARIG calcula a matriz de rigidez das barras de aço contidas em cada elemento finito, resultando uma matriz de rigidez de barra de mesma dimensão que a matriz de rigidez do concreto.

Em seguida, parte-se para as subrotinas que processam essas matrizes de rigidez, são elas: ASSEMBLE, COUNTOR, SOLUCSISTE e REACTIONS. A primeira monta a matriz de rigidez total da estrutura e o vetor de cargas total a partir das matrizes de rigidez de cada elemento finito e dos vetores de carga de cada elemento processados anteriormente. A segunda aplica as condições de contorno do problema, através da entrada de dados, nos quais o usuário forneceu os graus de liberdade fixados de cada ponto. A terceira soluciona o sistema de equações com o método da eliminação gaussiana, obtendo os deslocamentos nodais. A quarta, e última, calcula as reações da estrutura nos graus de liberdade fixados. Essas quatro subrotinas, realizam toda a solução do sistema de equações e fornecem os dados de deslocamentos nodais que serão utilizados nos próximos passos.

A rotina RESEFP verifica a situação da estrutura quanto à ocorrência de fissuração ou esmagamento, no caso do concreto, ou escoamento, no caso da armadura. Ela percorre cada ponto de integração calculando tensões e deformações e aplicando os critérios de ruptura. Se em algum ponto ocorre algum dos fenômenos citados acima, a subrotina calcula a carga nodal equivalente que deve ser aplicada em cada elemento para simular esses efeitos e, conseqüentemente, equilibrar o sistema.

Para a verificação da convergência, é chamada a subrotina STEADY. Ela monitora a convergência do processo iterativo da solução não-linear (OWEN; HINTON, 1980, .p. 214).

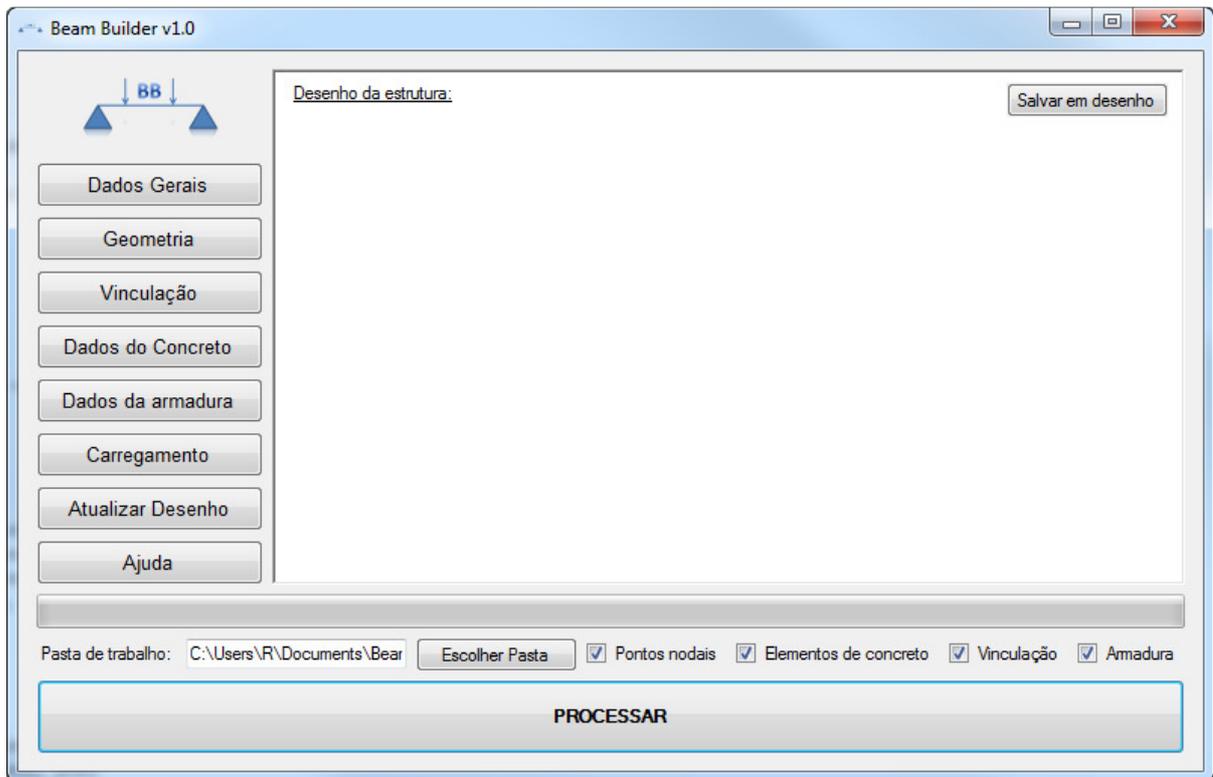
O ciclo de iterações mostrado na figura 8 se repete até a convergência ser obtida ou até um número máximo de iterações definido pelo programa. A partir do momento que houver convergência, o programa grava os dados atuais e é reiniciado novamente o ciclo de incremento de carga. Após a convergência e aplicação de todos os incrementos de carga o programa gera o relatório de saída de dados através das subrotinas específicas.

## 5.2 ENTRADA DE DADOS

Na figura 9, pode-se visualizar a tela principal do programa. É a primeira que aparece quando da execução do mesmo. Ela é composta por botões para inserção dos dados, botão de processamento e uma área onde a estrutura pode ser desenhada. Nesta tela, o usuário sempre pode clicar no botão <Ajuda> para ser redirecionado à uma explicação de como deve proceder ao inserir os dados da análise no programa.

O primeiro passo é escolher a pasta de trabalho, no canto inferior esquerdo da figura 9, nessa pasta serão armazenados os arquivos de entrada de dados e de processamento. A definição da estrutura inicia ao clicar no botão <Dados Gerais> para definir os dados iniciais da análise. A tela da figura 10 aparece e o usuário deve inserir os dados solicitados apenas com números inteiros e apertar no botão <Confirmar>. Durante toda a inserção desses parâmetros de análise, o programa verifica a integridade de todos os dados inseridos e retorna uma mensagem quando houver algum erro, como mostra a figura 11.

Figura 9 – Tela principal do programa

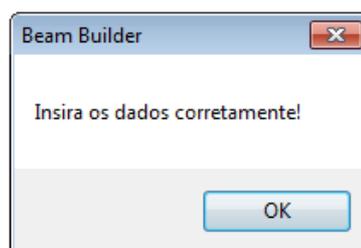


(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 10 – Tela de entrada de dados gerais

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 11 – Mensagem de aviso para correção dos dados



(fonte: elaborado pelo autor)

O segundo passo é clicar no botão <Geometria> para o usuário ser redirecionado para a tela da figura 12. Nesta janela, serão inseridas as coordenadas dos nós, as conectividades dos elementos finitos de concreto e as conectividades das barras de aço. Existe um espaço para os dados de cada um deles. O primeiro espaço, relativo às coordenadas dos nós, devem ser inseridas as coordenadas x e y de cada ponto em cada linha, separadas por ponto e vírgula. Para o segundo espaço, relativo às conectividades dos elementos de concreto, colocam-se o número dos oito pontos que definem o elemento finito de oito nós para cada elemento em cada linha, separando os pontos por ponto e vírgula. Esses números dos nós devem ser inseridos sequencialmente conforme definido pela figura 3, apresentada anteriormente. Por último, são inseridas as conectividades de cada barra de aço, procedendo da mesma forma que para os elementos finitos de concreto, porém são necessários apenas dois pontos para definir a barra de aço. É muito importante manter o ordenamento dos dados, sendo o número da linha correspondente ao número do nó, do elemento ou da barra de aço.

Figura 12 – Tela de entrada de dados das coordenadas e conectividades

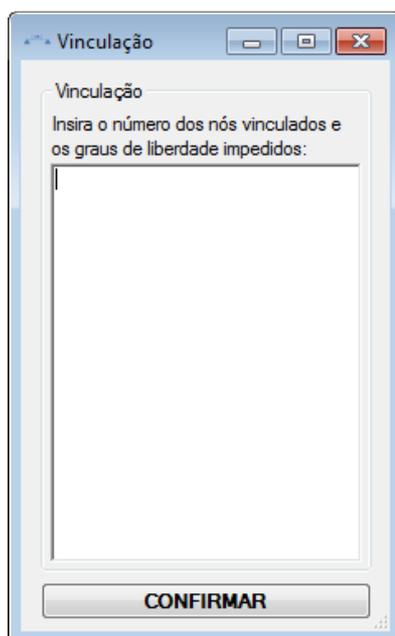
(fonte: elaborado pelo autor)

Em seguida são inseridos os dados de vinculação, para isso deve-se clicar no botão <Vinculação>. A janela da figura 13 aparecerá e devem ser inseridos três valores separados por ponto e vírgula. O primeiro refere-se ao número do nó impedido, o segundo e o terceiro aos graus de liberdade livres ou impedidos, colocando-se 0 para os impedidos e 1 para os livres.

Para as propriedades do concreto, deve-se clicar no botão <Dados do Concreto> para inserir as propriedades de cada elemento finito. Na janela da figura 14 podem ser visualizados dois espaços para inserção de dados. No primeiro espaço, cada tipo de material corresponde uma linha, na qual devem ser inseridas as seguintes propriedades sequencialmente e separadas por ponto e vírgula:

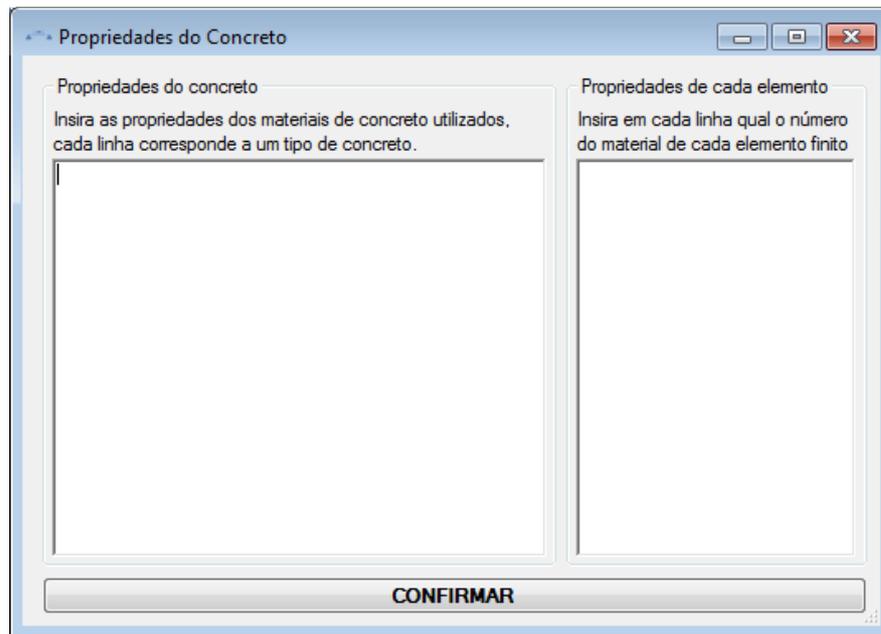
- a) módulo de elasticidade do concreto (E);
- b) coeficiente de Poisson ( $\nu$ );
- c) espessura do elemento (t);
- d) resistência média à compressão uniaxial ( $f_{cm}$ );
- e) resistência média à tração uniaxial ( $f_{tm}$ ).

Figura 13 – Tela de entrada de dados da vinculação



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 14 – Tela de entrada de dados das propriedades do concreto



(fonte: elaborado pelo autor)

No segundo espaço, cada linha corresponde a um elemento e deve ser inserido o número do material a ser utilizado naquele elemento. Dessa maneira, pode-se utilizar diferentes espessuras ou resistências para compor uma seção.

As propriedades da armadura são definidas através do botão <Dados da Armadura> que abre a tela da figura 15. A estrutura de inserção de dados é análoga à do concreto, porém, no primeiro espaço são inseridas as seguintes propriedades em cada linha separadas por “;”:

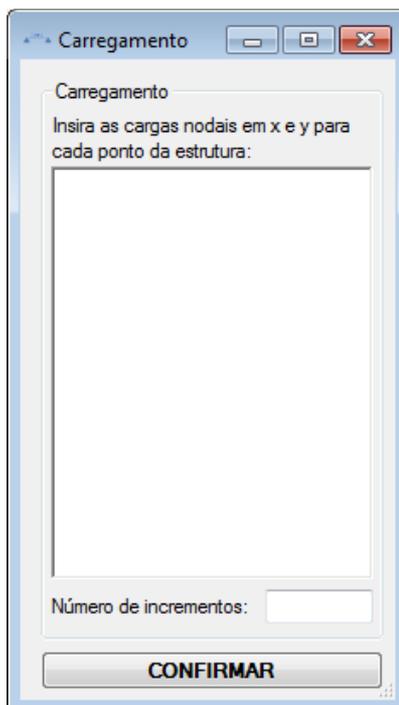
- a) número de barras de aço;
- b) módulo de elasticidade da barra de aço ( $E_s$ );
- c) bitola das barras;
- d) resistência característica do aço ( $f_{yk}$ ).

Figura 15 – Tela de entrada de dados das propriedades da armadura

(fonte: elaborado pelo autor)

O carregamento da estrutura é realizado através dos seus pontos nodais, devem-se ser especificadas as forças nas direções  $x$  e  $y$  que agem em cada ponto. Isso é realizado através do botão <Carregamento>, que abre a janela da figura 16. No primeiro espaço, cada linha corresponde ao um ponto e as cargas em  $x$  e  $y$  devem ser, respectivamente, inseridas e separadas por ponto e vírgula, existe ainda um espaço para a inserção do número de incrementos. Cargas distribuídas, como o peso próprio dos materiais, não são consideradas, devendo ser inseridas como carregamentos nodais. O carregamento será dividido em partes iguais que serão aplicadas tantas vezes quanto o número de incrementos. Quanto maior for a quantidade de incrementos, menor a quantidade de iterações para cada ciclo de incrementos, mas maior a quantidade de resultados, os quais são fornecidos para cada um desses incrementos de carga. Em casos nos quais se deseja visualizar e acompanhar o desenvolvimento dos deslocamento ao longo da aplicação de cada carga é aconselhável um maior número de incrementos.

Figura 16 – Tela de entrada de dados do carregamento

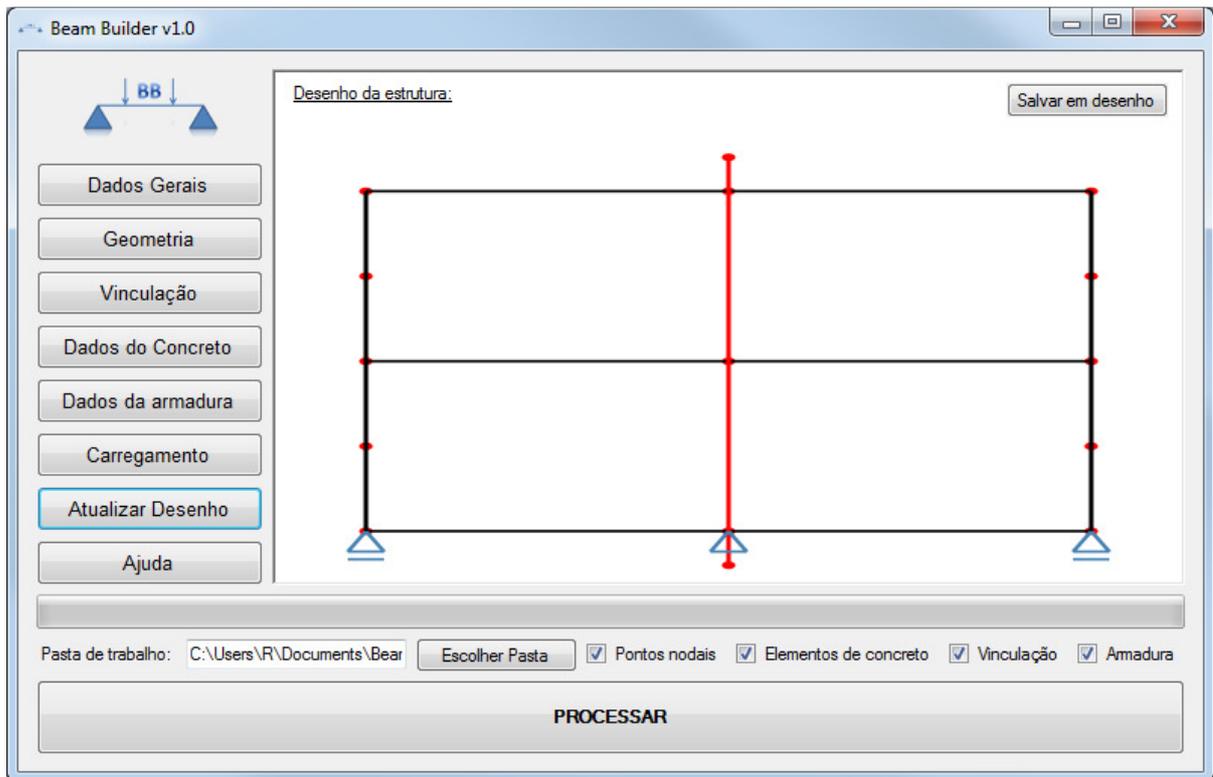


(fonte: elaborado pelo autor)

Ao clicar em <Atualizar Desenho> o programa irá utilizar todos os dados inseridos para fazer o desenho da estrutura, mostrando a posição dos nós, dos elementos finitos, dos nós vinculados e das barras de aço, como pode-se visualizar na figura 17. Esse passo não é obrigatório, mas com ele o usuário pode verificar a integridade dos dados inseridos e conferir se o programa os está interpretando corretamente. Clicando ainda nas caixas <Pontos nodais> <Elementos de concreto>, <Vinculação> ou <Armadura>, o usuário pode ativar ou desativar a visualização desses itens dentro do desenho da estrutura. Existe a possibilidade de o desenho ser exportado para um arquivo (.jpeg) ao clicar em <Salvar em desenho> o qual é salvo automaticamente na pasta de trabalho.

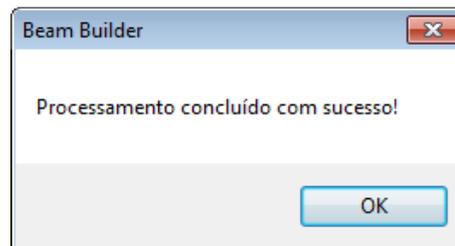
Finalizada a inserção de dados, clica-se no botão <Processar> e o programa iniciará a fazer a análise da estrutura seguindo o fluxograma apresentado na figura 8. O usuário pode acompanhar a execução do programa através da barra de progresso que se localiza em cima do botão de processamento. Se o processamento for concluído com sucesso, aparecerá a mensagem da figura 18. Em caso de erros durante o processamento, aparecerá a mesma tela, porém com mensagens informando o tipo de erro ocorrido.

Figura 17 – Tela principal com o desenho atualizado



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 18 – Mensagem quando o processamento ocorre sem erros



(fonte: elaborado pelo autor)

### 5.3 VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS

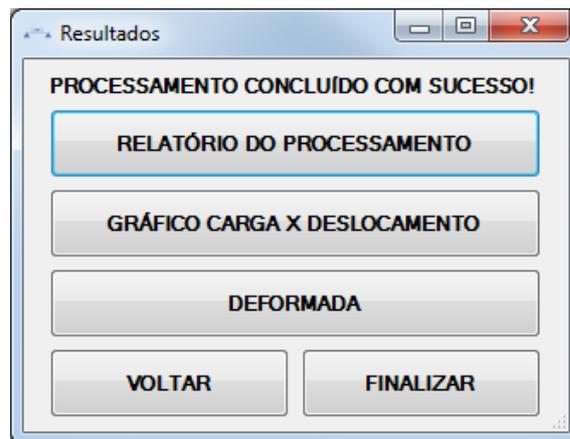
Caso o processamento ocorra com êxito, a tela da figura 19 irá aparecer, fornecendo ao usuário três opções para visualizar os resultados:

- a) relatório do processamento;
- b) gráfico carga x deslocamento;

c) deformada da estrutura.

Existe ainda a possibilidade de clicar no botão <Voltar> para retornar à tela principal, ajustar os dados e reprocessar. Para fechar o programa e terminar a análise, clica-se em <Finalizar>, a análise pode ser retomada escolhendo a mesma pasta de trabalho, sem a necessidade de reinsserir dos dados de entrada.

Figura 19 – Tela de visualização dos resultados

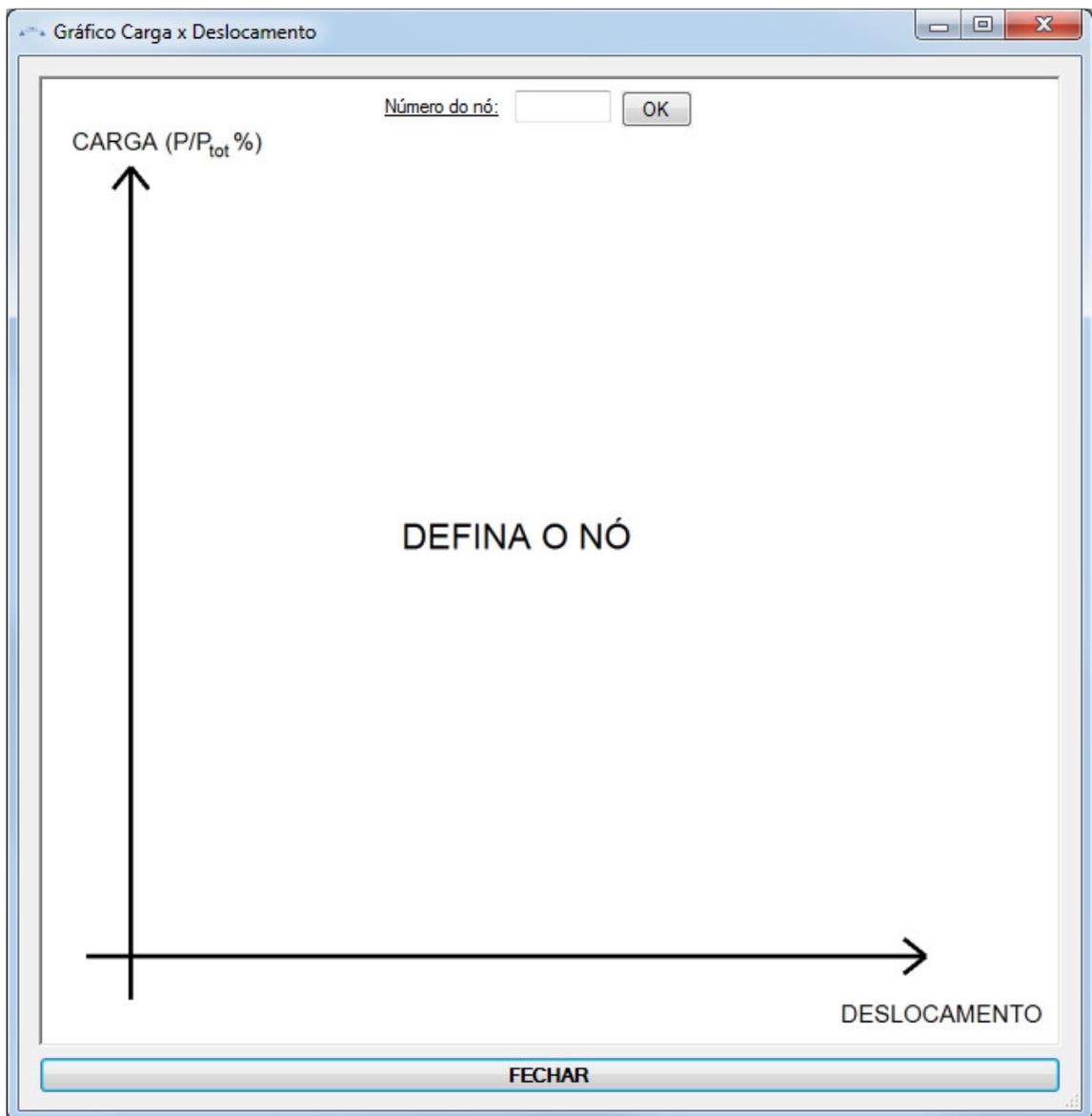


(fonte: elaborado pelo autor)

Clicando em <Relatório do processamento> é possível obter uma descrição de todos os deslocamentos calculados e as reações de cada vínculo para cada incremento de carga do programa. Na figura 20, é possível visualizar essa janela que mostra um arquivo de texto com essas informações, esse arquivo é salvo na pasta de trabalho para consulta.



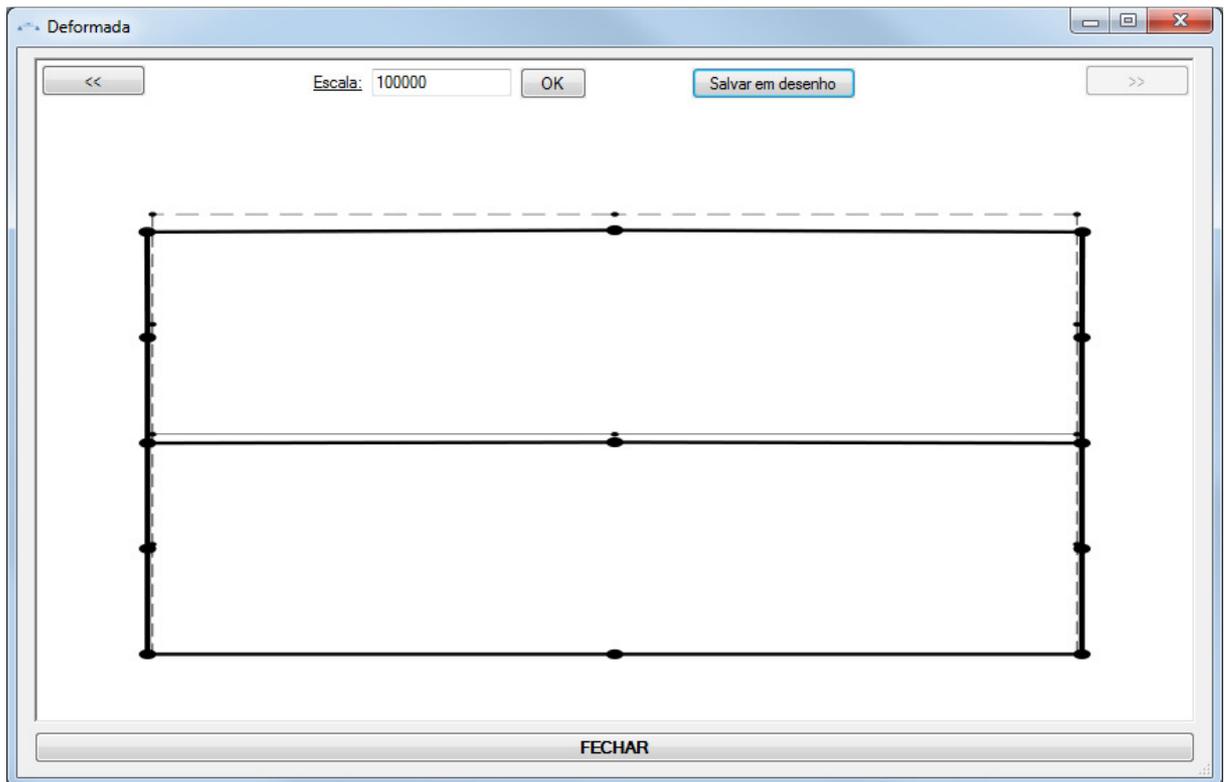
Figura 21 – Tela do gráfico que relaciona carga e deslocamento



(fonte: elaborado pelo autor)

Ao clicar em <Deformada>, se visualiza a deformada da estrutura. É um desenho que mostra o comportamento da estrutura como um todo e não são mostrados valores neste caso. Na figura 22, é possível ver um exemplo que mostra em linhas pontilhadas a estrutura indeformada e em linhas contínuas a estrutura deformada. Para aumentar ou diminuir a amplitude dos deslocamentos é possível trocar a escala do desenho e depois clicar em <OK> para atualizar. Da mesma forma que para o desenho da estrutura na tela principal, ao clicar em <Salvar em desenho> a estrutura deformada é salva em arquivo (.jpeg) na pasta de trabalho.

Figura 22 – Tela da deformada da estrutura



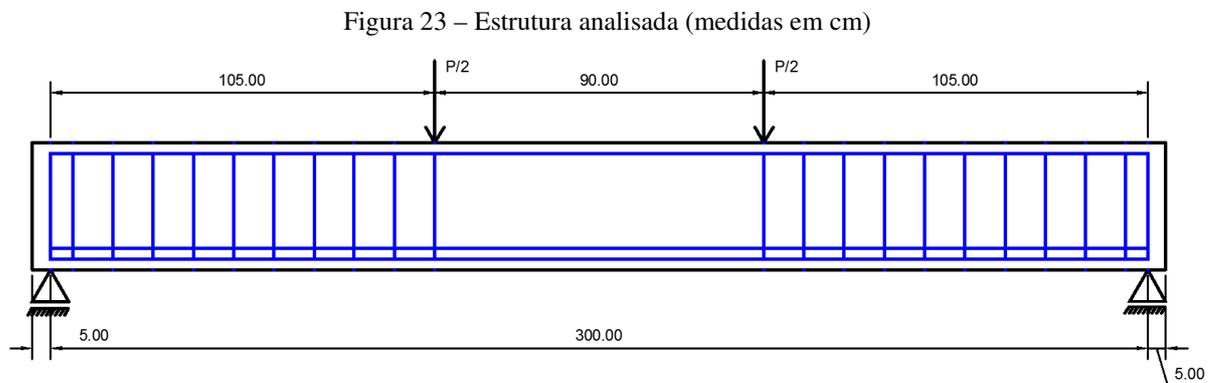
(fonte: elaborado pelo autor)

## 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo é apresentada a estrutura analisada neste trabalho e apresentados os resultados obtidos após o processamento no programa.

### 6.1 ESTRUTURA ANALISADA

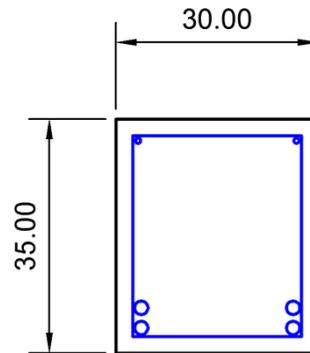
Por conveniência e facilidade de análise dos resultados, foi escolhida uma viga simples, biapoiada nos extremos e com duas cargas concentradas que possui a mesma configuração das vigas analisadas por Leonhardt e Walther (1962) e Machado (2002). Utiliza-se armadura longitudinal dupla e estribos apenas onde existe esforço cortante. Como não se trata de um projeto, mas sim de uma análise estrutural, os cobrimentos, os comprimentos de ancoragem e as armaduras mínimas não precisam necessariamente atender as normas de estruturas de concreto armado. Na figura 23, pode-se visualizar a estrutura e a distribuição das barras de aço em seu interior e a figura 24 mostra uma seção transversal típica com posicionamento das barras de aço longitudinais.



(fonte: elaborado pelo autor)

A estrutura é composta por uma seção de 35 cm de altura e 30 cm de largura e concreto com resistência à compressão igual a 24,2 MPa. Para a armadura inferior são utilizadas quatro barras de aço com diâmetro igual 20 mm com tensão de escoamento igual a 428 MPa, enquanto que para a armadura superior são utilizadas duas barras de aço com diâmetro igual a 8 mm com tensão de escoamento igual a 465 MPa. Por fim, os estribos são colocados onde o esforço cortante é constante e tem diâmetro igual a 6 mm e tensão de escoamento igual a 320 MPa.

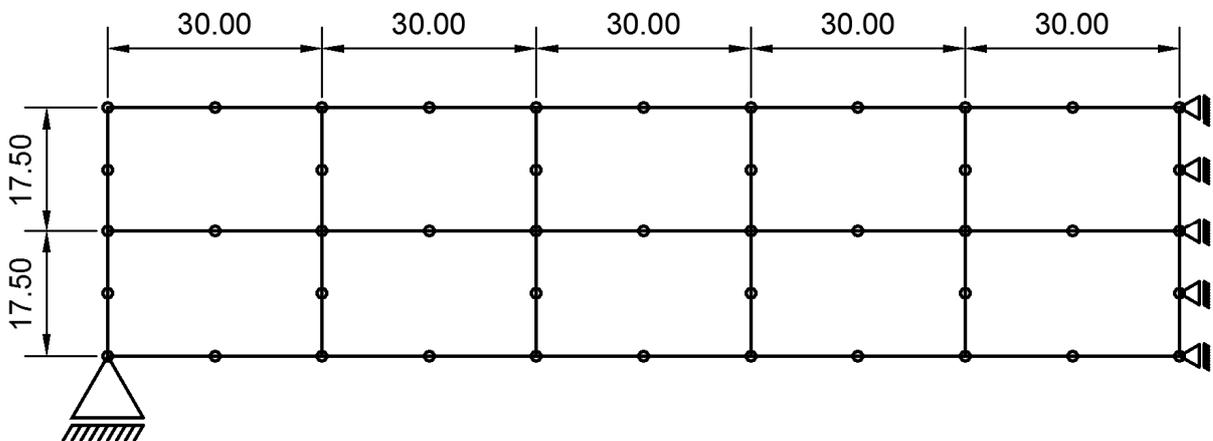
Figura 24 – Seção transversal da estrutura analisada (medidas em cm)



(fonte: elaborado pelo autor)

Na figura 25, pode-se visualizar a discretização em elementos finitos isoparamétricos de 8 nós da viga analisada. Tratando-se de uma estrutura simétrica, é possível analisar somente um lado da mesma, porém devem-se adicionar condições de contorno no eixo de simetria que simulem o comportamento real da estrutura. Dessa forma, foram impedidos os deslocamentos na direção horizontal em todos os nós desse eixo.

Figura 25 – Discretização da estrutura em elementos finitos (medidas em cm)



(fonte: elaborado pelo autor)

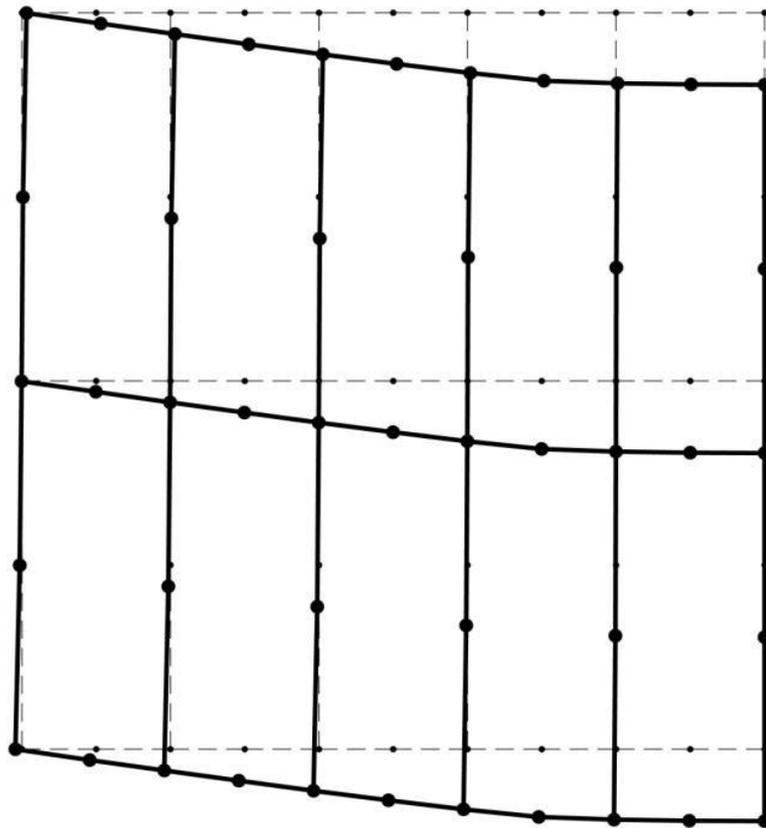
## 6.2 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Como apresentado no capítulo 5, os dados de entrada foram inseridos no programa e, então, obtidos os resultados através dos dados de saída. Como pode-se esperar, houveram alguns erros que tiveram que ser corrigidos nesse processo, desde erros de programação à erros de inserção de dados, que foram detectados quando os resultados obtidos não foram os esperados. Esses resultados finais são apresentados e comentados a seguir.

A figura 27 mostra o relatório do processamento obtido na análise, mostrando os valores correspondentes aos resultados finais, contendo os deslocamento nodais e reações do último incremento de carga.

Na figura 26, é colocada a deformada da estrutura, na qual pode-se visualizar o seu comportamento global. Essa deformada é típica da viga biapoiada analisada sendo que os maiores deslocamentos ocorrem no meio no vão da estrutura. Se fossem comparadas com ensaios experimentais, pode-se perceber esse mesmo comportamento descrito. As escalas na direção horizontal e vertical não são as mesmas já que o programa transforma as coordenadas dos pontos em pixels e executa o desenho conforme essas novas coordenadas.

Figura 26 – Deformada da estrutura



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 27 – Relatório do processamento

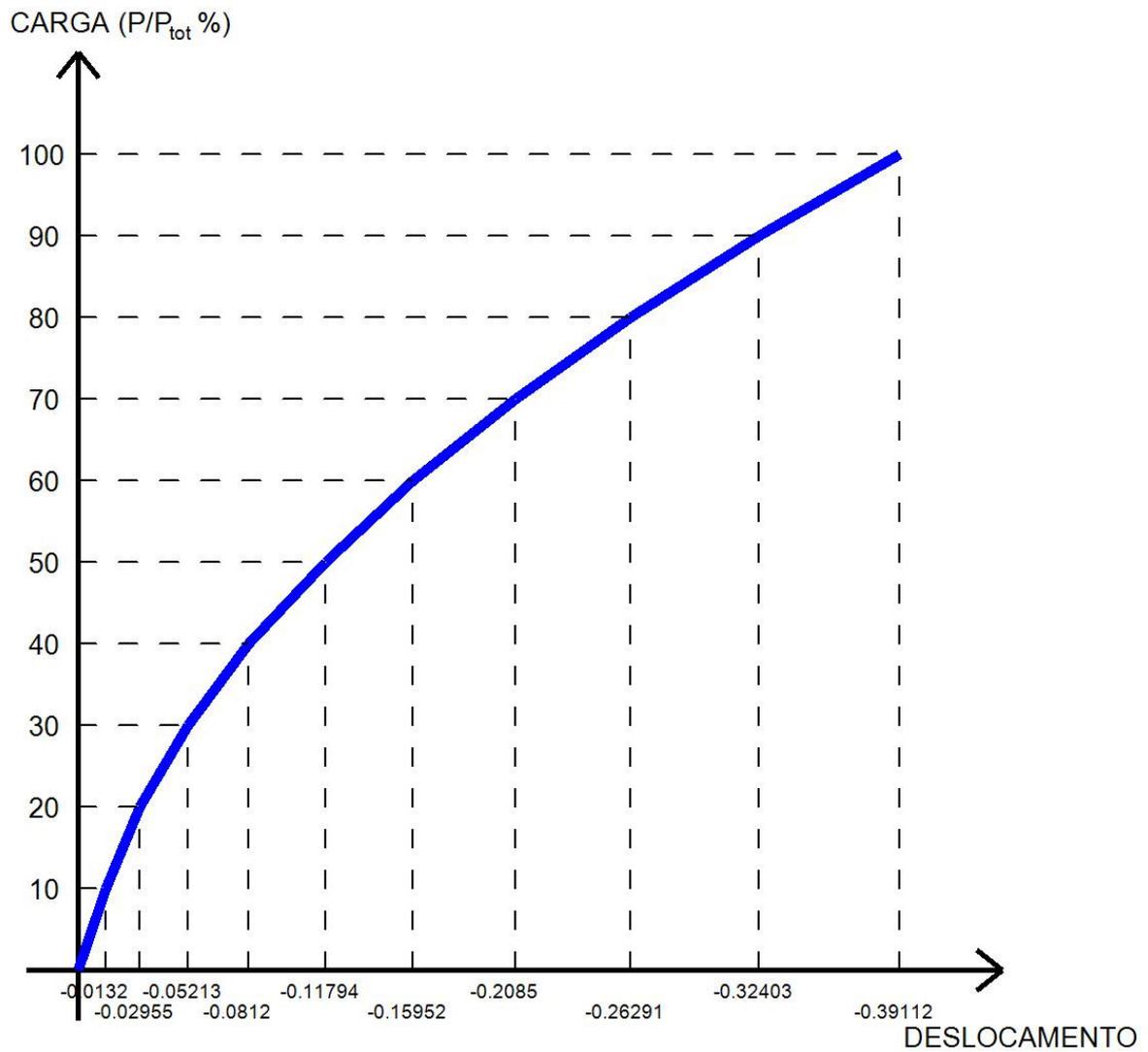
----- INCREMENTO 10 -----		
Deslocamentos Nodais		
Nó	Delta X	Delta Y
1	-0,0163019827359467	0
2	-0,0161012990352997	-0,0570240328367672
3	-0,0158101214067502	-0,11316391243808
4	-0,0150539686404632	-0,169034416716788
5	-0,0141232140582776	-0,22408418225129
6	-0,0125071661304293	-0,278117518544558
7	-0,0107001161423359	-0,330778957140173
8	-0,00805998699934145	-0,376157482362113
9	-0,00531750421905846	-0,38689124322847
10	-0,00265614712252192	-0,389992752077828
11	0	-0,39103809753132
12	-0,000952485019354293	-0,00028876196136086
13	-0,000879096186961417	-0,113252430443796
14	-0,000713693203251086	-0,22422015878345
15	-0,000506886860133435	-0,330995472771019
16	-0,000289396265257374	-0,387158866192618
17	0	-0,391302724373597
18	-0,000103165013156094	-0,000536228762391854
19	-8,59210939491928E-05	-0,056963736971288
20	-0,000104119568391283	-0,113299114346282
21	-0,000112361938497629	-0,169108682102096
22	-0,000127979155361215	-0,224219675231663
23	-0,000119411209261801	-0,278276747590339
24	-0,000125410872766141	-0,330972759099336
25	-7,08906614237257E-05	-0,376442607436384
26	-2,589640653477E-05	-0,387127724919283
27	-1,67090759215403E-05	-0,390237763660921
28	0	-0,391278328704958
29	0,000333612410456073	-0,000641730837908358
30	0,000316177719803289	-0,113309039113698
31	0,000251967810100562	-0,22423393895296
32	0,00016264902361141	-0,330975750636056
33	0,00015684890985921	-0,387134894205362
34	0	-0,391302949189056
35	0,0136193813912972	-0,000703010676822586
36	0,013407767897777	-0,0569207543423043
37	0,0130337340761699	-0,11328334073053
38	0,0122706217962511	-0,16904799958532
39	0,0113508815177576	-0,22414218745982
40	0,00993690762747233	-0,27818367967482
41	0,00835593936694684	-0,330818014086756
42	0,00640572816775998	-0,376454954729934
43	0,00438295666004479	-0,386948834072951
44	0,00219142688511696	-0,390095696281516
45	0	-0,391122988527631
Reações Nodais		
Nó	Reação X	Reação Y
1	--	9,9999999989647
11	16,1776587574266	--
17	30,0939341026746	--
28	-2,85011564141882	--
34	-29,2922060571415	--
45	-14,1292711615515	--

**FECHAR**

(fonte: elaborado pelo autor)

Para visualizar o desenvolvimento dos deslocamentos, foram escolhidos um ponto representativo da estrutura, no qual pode-se fazer uma avaliação mais precisa. Na figura 28, é possível visualizar o gráfico carga *versus* deslocamento que corresponde ao centro do vão no eixo da viga. Claramente é possível observar um comportamento não linear logo a partir do primeiro incremento de carga.

Figura 28 – Gráfico carga *versus* deslocamento



(fonte: elaborado pelo autor)

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo tem por objetivo a realização de uma análise final da ferramenta desenvolvida e do trabalho de diplomação. Ainda, serão feitas as considerações finais com comentários críticos.

O objetivo principal do trabalho de elaborar um programa para análise de vigas de concreto armado com o método dos elementos finitos foi atingido. Com a utilização dele é possível obter os deslocamentos e as reações de cada incremento de carga sendo um auxílio importante para verificar flechas excessivas considerando os efeitos plásticos do concreto e da armadura. As subrotinas que tratam do esmagamento e da fissuração do concreto funcionaram, atualizando o estado de tensões quando da ocorrência desses fenômenos. Da mesma forma, a subrotina de plastificação da armadura também funcionou.

A linguagem de programação utilizada, *Visual Basic*, foi bastante útil para elaborar a entrada e saída de dados amigável ao usuário. Porém, a entrada de dados ainda não ficou de uma maneira fácil e intuitiva, pois os dados devem ser inseridos conforme um formato pré-definido, podendo causar dificuldades. Neste aspecto, é importante que se saiba o que está fazendo, sendo o capítulo 5 uma boa fonte de consulta. Como não existem valores pré-fixados de resistência, bitolas ou módulos de elasticidade, existe uma grande liberdade de se analisar a estrutura com uma ampla gama de características. A saída de dados, ao contrário da entrada, está bem clara e simples, facilmente o usuário pode obter os resultados de cada incremento de carga, visualizando-os de forma gráfica. O gráfico carga deslocamento ficou bem claro e com ele é possível acompanhar a evolução das fissuras na viga observando a mudança de inclinação da reta a cada incremento de carga.

As subrotinas de processamento exigiram profundo conhecimento da teoria dos elementos finitos, pois, no caso do concreto armado, é preciso integrar na mesma estrutura elementos bidimensionais e unidimensionais, caso dos elementos de concreto e barras de aço. Além disso, para a armadura existe um modelo constitutivo e para o concreto existem dois, um para tração e outro para compressão, o que aumenta ainda mais a complexidade. Ainda, o processo iterativo necessário para atingir a convergência é bastante extenso, já que existem muitas variáveis sendo calculadas e deve-se tentar prever o resultado para conseguir acompanhar o ciclo das iterações.

Os resultados obtidos ainda não estão corretos, pois os deslocamentos calculados pelo programa foram maiores do que o esperado. É necessário realizar ainda alguns ajustes nos modelos não-lineares para aumentar a precisão e devido ao curto espaço de tempo esses ajustes não foram possíveis. Durante os testes, a viga foi também processada considerando apenas o seu comportamento linear, ou seja, funcionando sem critérios de ruptura. Nesse processamento os resultados foram muito bons.

De maneira geral, o trabalho atingiu os objetivos, pois mesmo não fornecendo os resultados corretamente, os conceitos teóricos de elaboração de uma rotina computacional para analisar os efeitos elastoplásticos em vigas de concreto armado foram absorvidos, assim como as técnicas de programação em *Visual Basic*.

## REFERÊNCIAS

BATHE, K. J.; WILSON, E. L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993.

DARWIN, D. Reinforced Concrete. In: INTERNACIONAL WORKSHOP ON FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES, 2., 1991, New York. **Proceedings...** New York: ASCE, 1993. p. 203-232.

HALVORSON, M. **Microsoft Visual Basic 2010: Step by Step**. Microsoft: Redmond, 2010.

LEONHARDT, F; WALTHER, R;. Beiträge zur behandlung der schubprobleme im stahlbetonbau. **Beton und Stahlbeton**, Berlin, v. 57, n. 7, p. 161-173, Jul. 1962.

MACHADO, M. A. S. **Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão**. 2002. 150 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. Swansea: Pineridge, 1980.