

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**CONSIDERAÇÃO DO ESMAGAMENTO DO CONCRETO
ATRAVÉS DO MODELO DE TRINCAS SOBREPOSTAS**

Tiago Becker Evangelho

Porto Alegre
2013

Tiago Becker Evangelho

**CONSIDERAÇÃO DO ESMAGAMENTO DO CONCRETO
ATRAVÉS DO MODELO DE TRINCAS SOBREPOSTAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM
ENGENHARIA.**

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Porto Alegre
2013

E923c Evangelho, Tiago Becker

Consideração do esmagamento do concreto através do modelo de trincas sobrepostas / Tiago Becker Evangelho. – 2013.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2013.

TIAGO BECKER EVANGELHO

**CONSIDERAÇÃO DO ESMAGAMENTO DO CONCRETO
ATRAVÉS DO MODELO DE TRINCAS SOBREPOSTAS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 30 de agosto de 2013.

Orientador: Prof. Eduardo Bittencourt
Dr. PPGEC/UFRGS

Prof. Ignacio Iturrioz
Dr. PPGEC/UFRGS

Prof. Ignacio Bengvenu Morsch
Dr. PPGEC/UFRGS

Profa. Virginia Maria Rosito d'Ávila Bessa
Dra. PPGEC/UFRGS

Dedico este trabalho a meus pais, Sinval e Cleusa.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar primeiro agradecendo a Deus por tudo o que me deu nesta vida, me ajudando a suportar as maiores dificuldades e sendo meu eterno guia.

A meus pais, Sinval e Cleusa, pois eles sempre estiveram ao meu lado, me motivando, dando forças em todos os momentos, compartilhando as minhas alegrias e me incentivando nos momentos de frustrações. Também a meus dois irmãos, André e Vinicius, e minha cunhada Marli, por sua valiosa amizade.

Ao professor Eduardo Bittencourt pela excelente orientação que me dispensou, sempre disposto e presente para me ajudar e tentar sanar as minhas maiores dúvidas.

Aos todos os professores que passaram na minha vida, sejam eles do ensino básico, da graduação na Universidade Federal de Santa Maria e também do Programa de Pós Graduação da UFRGS, todos estes me deixaram um legado de conhecimento, dignidade e confiança.

Aos funcionários do PPGEC e da Escola de Engenharia da UFRGS.

Aos colegas e amigos do mestrado, em especial a Jennefer Lavor Bentes e Raquel Naile Brinkhus.

À CAPES/CNPq pelo suporte financeiro dado.

Muito obrigado a todos.

As palavras calmas do sábio são mais bem ouvidas que os
gritos do líder entre os insensatos.

Eclesiastes.

RESUMO

EVANGELHO, T.B. **Consideração do esmagamento do concreto através do modelo de trincas sobrepostas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Neste trabalho é apresentada uma teoria para a consideração do esmagamento do concreto aplicada ao método elementos finitos, o Modelo de Trincas Sobrepostas. Neste caso, o esmagamento é considerado através da interpenetração dos elementos finitos. Em conjunto com o já conhecido Modelo de Trincas Coesivas, a abordagem é utilizada para simular o comportamento de vigas de concreto armado com alta taxa de armadura (concreto superarmado). Os experimentos empregados são vigas em flexão a três pontos (dois apoios e uma carga aplicada no centro do vão), onde as barras de aço são substituídas por uma camada de elementos finitos de altura equivalente. Aloca-se uma linha de elementos de interface coesiva verticalmente no centro das vigas no intuito de permitir o processo de dano, tanto em tração quanto em compressão. Na zona de interface entre os elementos de concreto e os de aço são colocados elementos de aderência. É verificada a influência nos modelos numéricos de diversos parâmetros, tais como altura da viga, armadura de compressão, armadura de cisalhamento e escala.

Palavras-chave: *mecânica da fratura; modelo de trincas sobrepostas; concreto armado; modelo de trincas coesivas; elementos finitos.*

ABSTRACT

EVANGELHO, T.B. **Consideration of the concrete crushing through the overlapping crack model.** 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

In this work is presented a theory to the consideration of the concrete crushing applied to the finite element method, the Overlapping Crack Model. In this case the crushing is considered through the interpenetration of finite elements. Together with the well-known Cohesive Crack Model, the approach is used to simulate the behavior of reinforced concrete beams with high volume fraction of reinforcement (under reinforced concrete). The used experiments are beams subjects to three-point bending, where the steel bars are replaced by an equivalent layer of finite elements. A central vertical line of interfaces is used in order to take into account the damage due to crushing and fracture. At the concrete-steel interface, friction elements are considered. The influence of some parameters, such as depth of the beam, compression and shear reinforcement, etc., is investigated.

Key-words: fracture mechanics; overlapping crack model; cohesive crack model; reinforced concrete; finite elements.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 GENERALIDADES.....	17
1.2 OBJETIVOS.....	18
1.3 CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS	18
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
2 FISSURAÇÃO E ESMAGAMENTO DO CONCRETO SIMPLES	20
2.1 MICROESTRUTURA DO CONCRETO SIMPLES	20
2.2 PROCESSO DE FRATURA DO CONCRETO	21
2.3 RUPTURA EM COMPRESSÃO VERSUS RUPTURA EM TRAÇÃO.....	23
2.2.1 Ruptura em tração uniaxial	23
2.2.2 Ruptura em compressão uniaxial	25
2.2.3 Ruptura em compressão multiaxial.....	27
2.4 MODELOS DISCRETOS PARA FISSURAÇÃO E ESMAGAMENTO DO CONCRETO	28
2.5 PROPRIEDADES DE FRATURA E ESMAGAMENTO DO CONCRETO	29
3 METODOLOGIA	31
3.1 ELEMENTOS DE INTERFACE.....	31
3.2 MODELO DE TRINCAS COESIVAS.....	32
3.2.1 Leis constitutivas pré-pico	32
3.2.2 Leis constitutivas pós-pico.....	32
3.2.3 Modo misto de fratura.....	35
3.3 MODELO DE TRINCAS SOBREPOSTAS	39
3.3.1 Leis constitutivas pré e pós-pico	40
3.3.2 Modo misto de fratura e esmagamento	41
3.4 LEI DE ADERÊNCIA ENTRE AÇO E CONCRETO.....	43
3.5 IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS.....	45
4 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA	46

4.1 ENSAIO DE COMPRESSÃO UNIAXIAL	46
4.1.1 Considerações para compressão uniaxial.....	46
4.1.2 Resultados numéricos para compressão uniaxial.....	49
4.2 ENSAIO DE FLEXÃO A TRÊS PONTOS DE CONCRETO ARMADO..	52
4.2.1 Resultados numéricos em flexão.....	55
4.2.1.1 Influência da altura da viga.....	57
4.2.1.2 Influência da armadura de compressão	60
4.2.1.4 Influência da armadura de cisalhamento.....	62
4.2.1.4 Influência da sobreposição crítica.....	64
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	65
5.1 CONCLUSÕES.....	65
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	66
REFERÊNCIAS	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquematização das três fases do concreto.....	20
Figura 2: Zona de processo de fratura.....	21
Figura 3: Mecanismos da zona de processo de fratura no concreto.....	22
Figura 4: Comportamento do concreto em tração uniaxial.....	24
Figura 5: Gráfico tensão versus deformação para o concreto em compressão uniaxial.....	26
Figura 6: Curvas tensão-deformação de amostras de concreto com resistência normal e diferentes valores de altura (h).....	27
Figura 7: Curvas tensão-deformação para estado plano de deformações.....	28
Figura 8: Esquematização de uma interface coesiva.....	31
Figura 9: Lei constitutiva pós-pico da superfície coesiva.....	33
Figura 10: Comportamento tensão coesiva tangencial τ versus deslizamento v em modo II puro.....	35
Figura 11: Superfície de ruptura inicial (modelo acoplado de Coulomb com aderência).....	36
Figura 12: Superfície de ruptura para modelo acoplado (F), potencial plástico (F^*) e direções dos deslocamentos inelásticos.....	38
Figura 13: Curvas pós-pico para o caso de dano em compressão.....	41
Figura 14: Novas superfícies de escoamento para a consideração do dano em compressão e os domínios por elas criados.....	42
Figura 15: Curva tensão versus deslizamento para os elementos de aderência entre aço e concreto....	44
Figura 16: Estágios subsequentes de uma amostra de concreto em compressão: (a) sem carregamento, (b) parte elástica, (c) início do processo de dano e (d) valor crítico de interpenetração.....	47
Figura 17: Respostas tensão-deslocamento: (a) amolecimento normal; (b) e (c) amolecimento catastrófico (<i>snap-back</i>).....	48
Figura 18: Curva energia de esmagamento versus resistência à compressão para o caso sem estribos	49
Figura 19: Exemplo de malha empregada para simulação numérica de ensaio de compressão uniaxial e no detalha a região onde estão localizadas as interfaces coesivas.....	50
Figura 20: Gráfico tensão versus deslocamento para diferentes valores de esbeltez em ensaio de compressão uniaxial (resistência à compressão $\sigma_c = 47,9$ MPa).....	51
Figura 21: Resultados experimentais de JANSEN e SHAH (1997).....	51
Figura 22: Modelo de uma viga de concreto armado.....	52
Figura 23: Gráfico tensão-deformação para o aço das vigas da série J.....	54

Figura 24: Comportamento de uma estrutura de concreto superarmado.....	55
Figura 25: Resultados experimentais e numéricos obtidos pelo modelo proposto neste trabalho (com e sem a consideração do esmagamento) e os de CARPINTERI et al. (2010) para a viga J1	56
Figura 26: Comportamento de vigas (J1, J10 e J4) com diferentes alturas.....	57
Figura 27: Distribuição de tensões σ_{xx} (em MPa) de acordo com a variação da altura para as vigas (a) J1, (b) J10 e (c) J4 no início do esmagamento	59
Figura 28: Estado de tensões σ_{xx} (em MPa) na ruptura da viga J10.....	60
Figura 29: Gráfico carga versus deflexão para diferentes valores de armadura de compressão.....	61
Figura 30: Distribuição de tensões σ_{xx} (em MPa) variando a armadura de compressão para as vigas (a) J1 e (b) J2.....	62
Figura 31: Gráfico carga versus deflexão para a condição de variação da taxa de estribos.....	63
Figura 32: Comportamento carga versus deslocamento da viga J1 para diferentes valores de sobreposição crítica.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Propriedades de aderência para os modelos numéricos de vigas de CA.....	44
Tabela 2: Dados geométricos e materiais das vigas da série J (Armadura de tração $A_s = 2 \text{ } \varnothing 25,4 \text{ mm}$ em todos os casos).....	53

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

A_s : área transversal da armadura longitudinal alocada na região de tração

A'_s : área transversal da armadura longitudinal alocada na região de compressão

CA: concreto armado

CG: centro de gravidade

E : módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young)

F : superfície de fratura

F^* : potencial plástico

G_C : energia específica de esmagamento

G_{IF} : energia específica de fratura no modo I puro

G_{IIF} : energia específica de fratura no modo II puro

K_n : rigidez elástica normal da interface coesiva

K_t : rigidez elástica tangencial da interface coesiva

L : vão livre entre os apoios nos ensaios de flexão

P : carga aplicada concentrada

b : base ou diâmetro do corpo de prova ou largura da viga

d : distância entre o CG da armadura de tração e a fibra mais comprimida em flexão

d' : distância entre o CG da armadura de compressão e a fibra mais comprimida em flexão

d_{max} : diâmetro máximo do agregado graúdo

f_c : resistência à compressão do concreto

f_{ck} : resistência característica à compressão do concreto

f_t : resistência à tração do concreto

f_{tm} : resistência média à tração do concreto

f_y : tensão de escoamento do aço

f_y^∞ : limite assintótico da tensão após o escoamento do aço

h : altura total da viga

h_{eq} : altura equivalente da camada de aço

k : coeficiente de ajuste de curva para a tensão do aço após o escoamento

ℓ : comprimento do corpo de prova no ensaio de compressão uniaxial

l_c : tamanho característico de malha

t : tempo

w : abertura ou sobreposição normal da interface coesiva

w_{cr}^c : valor crítico de sobreposição

w_e^c : sobreposição elástica normal máxima em compressão

w_i^t : sobreposição inelástica normal em compressão

w^t : abertura normal da interface coesiva em tração

w_e^t : abertura elástica normal máxima em tração

w_i^t : abertura inelástica normal em tração

u_i^{ef} : deslocamento inelástico efetivo

Λ : integração em relação ao tempo de $\dot{\lambda}$

α : constante que reduz os deslocamentos elásticos

β : fator de acoplamento entre os deslocamentos tangenciais e normais

δ : deslocamento da placa da prensa no ensaio de compressão uniaxial ou deflexão no centro da viga no ensaio de flexão

ε : deformação normal

ε_c : deformação máxima no regime elástico em compressão do concreto

ε_u : deformação última antes da ruptura do concreto

$\bar{\varepsilon}^{pl}$: deformação plástica

λ : esbeltez do corpo de prova

$\dot{\lambda}$: módulo das taxas de deslocamentos inelásticos

μ : módulo de elasticidade transversal

ν : deformação tangencial

ν^t : abertura tangencial da interface coesiva em tração

v_e^t : abertura elástica tangencial máxima em tração

v_i^t : abertura inelástica tangencial em tração

σ : tensão normal

σ^{el} : preditor elástico da tensão normal

σ_{max}^c : tensão máxima na interface coesiva em compressão

$\sigma_{max}^{c,0}$: tensão normal máxima de compressão (sem esmagamento)

σ_{max}^t : tensão máxima na interface coesiva em tração

$\sigma_{max}^{t,0}$: tensão normal máxima de tração (sem fissuração)

τ : tensão tangencial

τ^{el} : preditor elástico da tensão tangencial

τ_{max} : tensão tangencial máxima na interface coesiva

$\tau_{max}^{t,0}$: tensão tangencial máxima (sem fissuração)

ϕ : ângulo de atrito da fissura

\emptyset : símbolo que denota as barras de aço

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O concreto de cimento Portland é, sem sombra de dúvida, um dos materiais manufaturados mais consumidos no mundo, talvez perdendo apenas para a água tratada. Apesar de ser um material menos resistente que as ligas metálicas, tais como o aço, ele é bem mais amplamente empregado do que estes. Dentre os principais motivos pode-se citar a boa resistência à umidade, a agentes externos de corrosão, como, por exemplo, em lugares à beira mar, facilidade em se moldar às mais variadas formas e maior disponibilidade de material.

Na condição de elemento isolado (concreto simples), o concreto se mostra bastante resistente quando submetido a tensões de compressão, mas frágil sob tração. Por este motivo a quase totalidade das aplicações do concreto é realizada em conjunto com outros materiais que resistam à tração, na maioria das vezes o aço, sendo chamado o conjunto aço-concreto de concreto armado. Na condição de flexão o concreto simples rompe por fissuração, contudo não sofre nenhum dano significativo por esmagamento; já o concreto armado está sujeito à ruptura em compressão, dependendo da taxa de armadura da seção. Em muitos casos, a falha na estrutura de concreto armado se deve unicamente ao escoamento do aço, contudo, se a taxa de armadura passar a patamares mais elevados, o concreto começa a sofrer processo de dano em compressão, influenciando assim no comportamento global da estrutura.

A contribuição da tração, pelos motivos supracitados, é em geral desprezada quando da modelagem de elementos em flexão de concreto armado, ou então considerada como uma lei elástico-linear até que seja atingido o valor da resistência à tração. O maior responsável pela resposta global em tração a um dado carregamento é a armadura. Já em compressão, o processo se modifica, pois o concreto possui boa resistência quando submetido a este tipo de tensão. Em flexão, quando o valor da tensão de compressão ultrapassa em módulo a resistência, inicia-se o processo de dano irreversível (esmagamento). De acordo com CARPINTERI et al. (2010), a dissipação de energia em compressão, comum ao processo de dano irreversível, acontece sobre uma superfície ao invés de dentro de um volume, num movimento contrário ao de abertura de trincas, o que permite vislumbrar a utilização de uma abordagem baseada na interpenetração fictícia como modelo de esmagamento.

CARPINTERI et al. (2007) criaram um modelo coesivo análogo ao caso de ruptura em tração (proposto por HILLERBORG et al., 1976) a fim de simular o esmagamento do concreto. Para o caso em tração supõe-se uma abertura fictícia de trinca, enquanto que para o caso em compressão supõe-se uma interpenetração fictícia. Segundo CARPINTERI et al. (2010), estas metodologias tradicionais elatoplásticas baseadas em superfícies de escoamento bastante complexas (Ottosen, Willam-Warnke, etc.) não conseguem capturar de maneira adequada efeitos de escala. No intuito de procurar resolver este problema, estes autores propuseram um modelo misto de fissuração e interpenetração discretas, onde se permitia a dissipação de energia e o processo de dano tanto em tração quanto em compressão. Uma abordagem similar a esta foi seguida no presente trabalho.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral é apresentar um modelo para consideração do esmagamento do concreto, utilizando o método dos elementos finitos numa abordagem com interfaces coesivas, em complemento à abordagem desenvolvida por LENS (2009), a qual considerava apenas a ruptura em tração em modelos de concreto simples. Além disto, neste trabalho são adotadas leis de aderência entre concreto e aço sugeridas pelo Código Modelo 90 (CEB-FIP, 1994).

Neste contexto, este trabalho tem por objetivos específicos:

- a) consideração de ensaios de compressão uniaxial de concreto simples, verificando as variáveis que influenciam nos resultados e compará-los a dados obtidos de maneira experimental;
- b) consideração da flexão, na qual ocorre fratura em tração, combinada com o esmagamento;
- c) investigação das variáveis que influenciam no comportamento de vigas de concreto armado.

1.3 CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS

Com a implementação do esmagamento nos modelos de ruptura do concreto, em conjunto com os modelos já implementados de ruptura em tração, pretende-se ter uma ferramenta capaz de simular o comportamento em termos de mecânica da fratura do concreto armado, contemplando efeitos de escala. Neste contexto, pretende-se entender melhor a ruptura deste

tipo de estrutura e como diferentes variáveis geométricas e do material influenciam no comportamento estrutural.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos. O capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica sobre o processo de fissuração, modo I puro e modos mistos, e dos mecanismos de esmagamento do concreto simples e das propriedades materiais que afetam os processos de fissuração e de esmagamento.

No capítulo 3 é descrita a metodologia de cálculo. São introduzidos os fundamentos de Mecânica da Fratura utilizados. São revistas as abordagens para a consideração da fissuração discreta e proposta uma metodologia que leva em conta o esmagamento do concreto. Analisam-se os dois modelos: o de trincas coesivas (tração) e o de trincas sobrepostas (compressão).

O capítulo 4 mostra os resultados obtidos numericamente, em compressão uniaxial de concreto simples e flexão de vigas de concreto armado, que são comparados a dados experimentais e analisados qualitativamente, na intenção de observar os parâmetros que alteram o comportamento das estruturas analisadas e de que forma isto ocorre.

O capítulo 5 contém as considerações finais, conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 FISSURAÇÃO E ESMAGAMENTO DO CONCRETO SIMPLES

Neste capítulo são abordados os aspectos microscópicos e macroscópicos da fratura em tração e do esmagamento em compressão do concreto. Primeiro é feita uma breve descrição da microestrutura do concreto e, posteriormente, como a mesma se relaciona com as propriedades de fratura e esmagamento.

2.1 MICROESTRUTURA DO CONCRETO SIMPLES

A primeira consideração que se deve fazer ao concreto é quanto à sua complexidade em termos de microestrutura. O concreto consiste basicamente de uma mistura de agregados (miúdos e graúdos) embebidos em uma matriz aglutinante. No nível macroestrutural o concreto é visto como um composto bifásico, sendo as diferentes fases os agregados graúdos e a matriz cimentícia (pasta de cimento misturada a agregados miúdos, contendo ou não aditivos) (VAN MIER, 1997). Por outro lado, ao redor dos agregados graúdos forma-se uma camada extremamente delgada, uma zona de transição interfacial (ZTI) entre a matriz de cimento e os agregados graúdos, que determina as propriedades intrínsecas de fratura do concreto (LANDIS e BOLANDER, 2009). A ZTI está repleta de poros, trincas iniciais de retração e vazios intersticiais referentes ao calor liberado durante o processo de hidratação do cimento, sendo o elo frágil da matriz cimentícia do concreto e caminho preferencial para os processos de dano irreversível. A figura 1 mostra de maneira esquemática as três fases do concreto descritas.

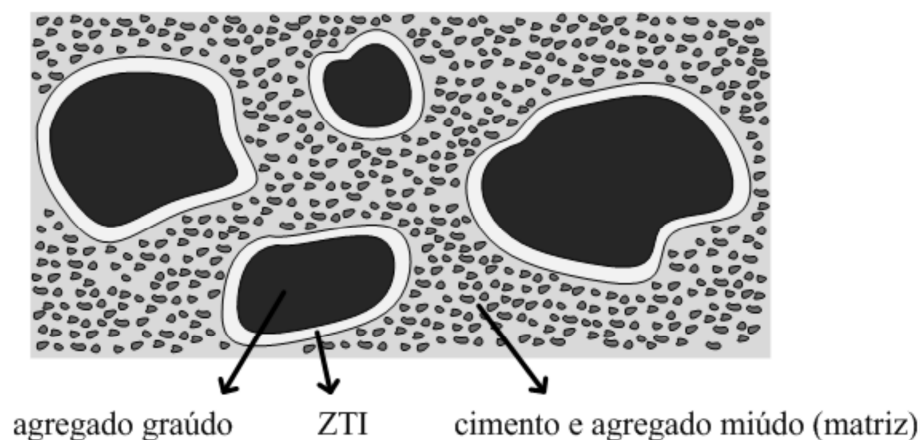


Figura 1: Esquematização das três fases do concreto (Baseado em ROSA, 2011)

2.2 PROCESSO DE FRATURA DO CONCRETO

Pode-se dividir o processo de fratura no concreto em três etapas distintas:

- a) formação, desenvolvimento e coalescência de vazios;
- b) formação de pontes entre as faces das fissuras pelos grãos de agregados;
- c) formação de uma microfissura, com possível engrenamento dos agregados.

A ZTI é o local predominante para a ocorrência dos processos descritos acima, por ser a região de menor resistência no concreto. Após se iniciarem na ZTI as microfissuras se interconectam através da matriz cimentícia, percorrendo um caminho de menor exigência de energia. Esta condição poderia ser modificada por um aumento da relação água/cimento ou pelo emprego de agregados leves e de menor resistência. Uma maior densidade de agregados afetaria de modo negativo a resistência do concreto, uma vez que diminui a porção da matriz de cimento, que é preenchida proporcionalmente pela ZTI.

A Zona de Processo de Fratura (ver Figura 2), que corresponde à região inelástica na frente da trinca, afeta o processo de fratura e impede a aplicação da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). A transmissão de esforços acontece nesta região e vai desaparecendo à medida que a trinca se abre, dando origem a um processo de amolecimento. Esta zona é local onde se consome a maior parte da energia provinda do carregamento aplicado à estrutura.

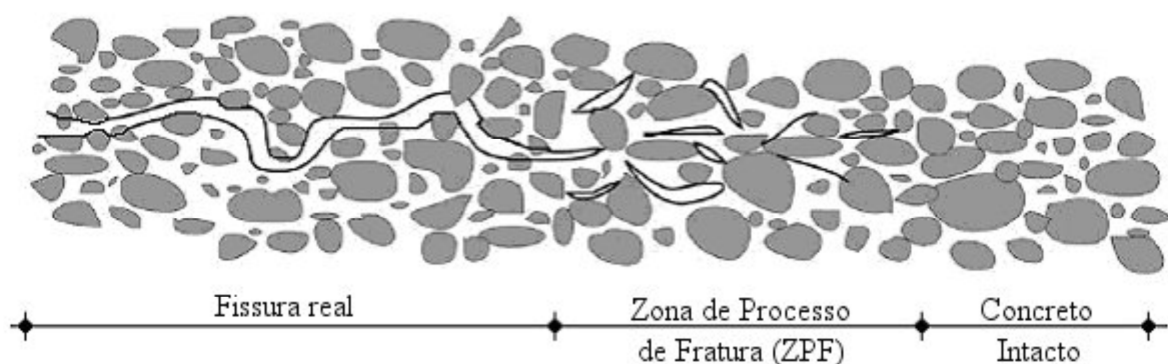


Figura 2: Zona de processo de fratura

Segundo SHAH et al. (1995) a Zona de Processo de Fratura é governada por mecanismos complexos, que são citados a seguir:

- a) microfissuras: são causadas por um estado de alta tensão próximo à ponta da trinca. Diminuem de densidade à medida que se afastam da ponta da fissura. Consomem parte da energia externa ocasionada pelo carregamento e são as responsáveis pelo início do comportamento não linear do concreto;
- b) mudança de direção da propagação de fissuras: ocorre quando a trinca encontra um agregado graúdo que possui resistência à fratura maior que a zona de interface;
- c) costuras: ocorrem quando a fissura avança na argamassa além dos agregados, que continuam a transmitir tensões através da trinca até a sua ruptura ou arrancamento. Esta transmissão de esforços é conhecida como engrenamento;
- d) atrito entre as faces da trinca: é causado pelas rugosidades criadas durante o processo de fratura, ocasionando mudança de direção da fissura e dificultando o deslocamento relativo das superfícies da trinca (modo II);
- e) presença de vazios: conduz ao alargamento na ponta da trinca e alívio das tensões da mesma, sendo necessária uma energia adicional para que a fissura prossiga com o seu processo de propagação;
- f) ramificação da trinca: a fissura pode se propagar em diversas direções devido às heterogeneidades do concreto. Há necessidade de uma maior quantidade de energia para os diversos ramos de propagação de trincas.

A figura 3 mostra os diversos mecanismos de fratura do concreto. Cada item da figura corresponde respectivamente ao item de mesma letra da citação acima.

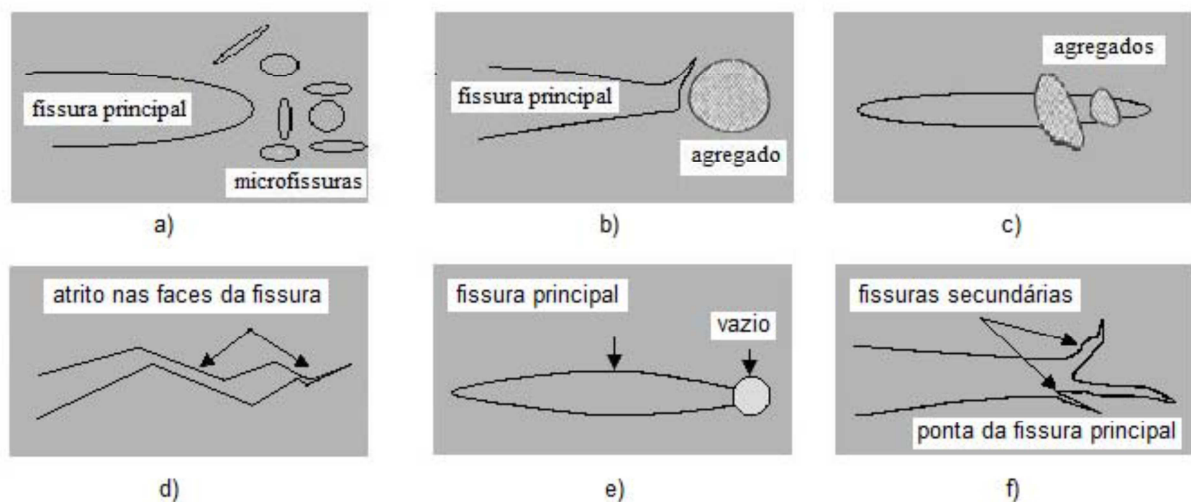


Figura 3: Mecanismos da zona de processo de fratura no concreto (Baseado em SHAH et al., 1995)

2.3 RUPTURA EM COMPRESSÃO VERSUS RUPTURA EM TRAÇÃO

De acordo com VAN MIER (2008), a ruptura em tração uniaxial e a ruptura em compressão uniaxial são bastante similares do ponto de vista da microestrutura. O fato que mais as diferencia é que sob tração a microfissura se forma perpendicularmente à direção da carga, enquanto que em compressão a falha ocorre ao longo de uma faixa inclinada. Isto para valores de deformação antes do início do processo de dano. Segundo CARPINTERI et al. (2007), em compressão uniaxial ocorre o fenômeno de localização de deformações no regime de amolecimento. Esta localização de deformações sugere que, no regime de amolecimento, a dissipação de energia acontece sobre uma superfície ao invés de dentro de um volume, em ampla analogia com o comportamento em tração. Para o caso de concreto armado, CARPINTERI et al. (2010) afirmaram que, na medida em que as vigas em flexão são afetadas, o processo de esmagamento do concreto pode levar tanto à expulsão do material para fibras superiores quanto à sua fragmentação. Isto resulta de uma forte localização de deformações, similar ao caso de compressão uniaxial, e a dissipação de energia também ocorrendo sobre uma superfície, o que justifica o uso de uma sobreposição fictícia de trincas nos modelos numéricos.

Como mencionado anteriormente, o concreto está repleto de vazios internos e trincas antes mesmo de sofrer a ação de qualquer tipo de carga. O comportamento mecânico deste material sujeito a diferentes condições de carregamento é governado pela iniciação e propagação destas trincas internas e falhas durante o carregamento (SHAH et al., 1995). Segundo MEHTA e MONTEIRO (1994), em compressão uniaxial a tensão aplicada no corpo de prova tende a impedir o processo de propagação de fissuras, sendo necessária uma grande quantidade de energia para o desenvolvimento da fratura, enquanto que em tração o mesmo não ocorre, razão pela qual a resistência à tração fica em torno de 10% da resistência à compressão. O comportamento em tração uniaxial e em compressão uniaxial é discutido com mais detalhes nos itens a seguir.

2.2.1 Ruptura em tração uniaxial

Para uma estrutura de concreto sujeita a tração, as trincas se propagam em uma direção perpendicular à carga aplicada (SHAH et al. 1995). De acordo com LANDIS e BOLANDER (2009), em tração uniaxial o estágio inicial de carregamento é marcado por uma quase total reversibilidade de deformações. Há muitas zonas frágeis, mas ainda pouca energia disponível

para que se comece uma propagação de fissuras. Entretanto, apenas um pequeno acréscimo na energia elástica é suficiente para dar início ao aumento das microfissuras, marcado por uma não linearidade na curva tensão versus deformação. Para uma alta carga (entre 75 e 80% da tensão máxima de tração, f_t) a razão de microfissuras aumenta drasticamente. A formação de uma microfissura crítica geralmente se manifesta quando a carga atinge seu valor de pico e sua propagação resulta em uma redução da área resistente, o que causa um grande aumento na compliância do corpo de prova e uma perda da capacidade de transferência de carga além da carga de pico. Enquanto o corpo de prova está submetido à microfissuração, seu comportamento é tido como um processo contínuo e, portanto, medidas da deformação média sobre o comprimento são apropriadas. Por outro lado, após o pico de carga a fratura se localiza no que é intrinsecamente um processo descontínuo. A figura 4 mostra os estágios descritos para tração uniaxial.

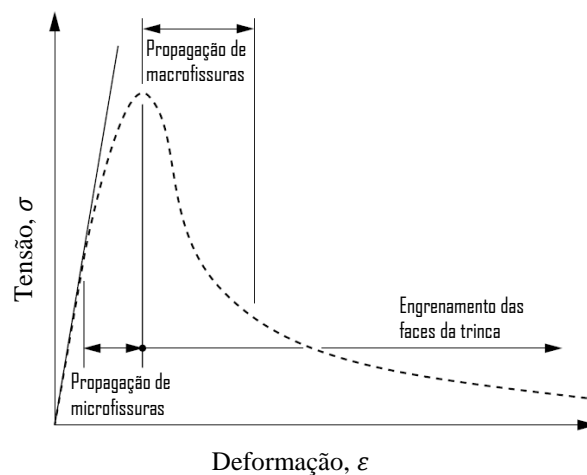


Figura 4: Comportamento do concreto em tração uniaxial (Adaptado de LANDIS e BOLANDER, 2009)

SHAH et al. (1995) baseados nos resultados de LI et al. (1993) descreveram com mais detalhes o comportamento microestrutural do concreto sujeito a tração uniaxial. Segundo estes autores, o concreto se comporta de maneira elástica até aproximadamente 30% da tensão máxima de tração. A iniciação de trincas é negligenciável até este ponto. A partir daí as trincas começam a se formar à medida que o carregamento aumenta. Entretanto, as fissuras internas são isoladas e mais ou menos distribuídas até que a tensão atinja valores em torno de 80% de f_t . Entre este ponto e o pico de carga, as trincas internas começam a se localizar em uma fissura maior que se propaga com o aumento da carga. Este fenômeno é conhecido como localização de deformações. Até a carga de pico a propagação de fissuras é estável. Após

atingir a tensão máxima de tração, as fissuras continuam a aumentar, mesmo diminuindo a tensão aplicada. As fissuras se propagam sempre de maneira perpendicular à carga aplicada.

2.2.2 Ruptura em compressão uniaxial

Do ponto de vista microestrutural, a ruptura em compressão uniaxial apresenta muitas semelhanças com a ruptura em tração uniaxial, conforme descrito acima. O concreto se comporta de maneira mais ou menos linear até cerca de 30% da resistência máxima de compressão (f_c) (MEHTA e MONTEIRO, 1994), sendo este valor de tensão conhecido como limite de proporcionalidade. A inclinação desta reta é chamada de módulo de elasticidade tangente ou inicial (E_t). Segundo MAJI e SHAH (1988), as trincas se iniciam na ligação entre matriz e agregado e levam a uma não linearidade no comportamento tensão-deformação. As trincas de ligação parecem se iniciar em lugares onde tensões de cisalhamento ocorrem. Num primeiro estágio, até 50% de f_c , inicia-se a fissuração da matriz cimentícia. Estas fissuras se originam próximas às partes superiores e inferiores dos agregados e se propagam quase verticalmente (mesma direção da carga). Após, até 80% de f_c , as trincas tomam direções diagonais, entre paralelas e perpendiculares, ao carregamento. As trincas de ligação se iniciam no modo cisalhante. Angularidade e resistência friccional do agregado são então mais relevantes neste estágio de carregamento (de 30 a 80% da carga de pico), depois que as trincas de ligação se iniciam e antes que as trincas na matriz predominem.

Ainda segundo MAJI e SHAH (1988), aparentemente a iniciação da fissuração na matriz é governada pelo fator de intensidade de tensões do modo I ao invés de uma interação dos modos I e II de fratura. Contudo, quando a tensão ultrapassa metade do valor máximo de compressão, o modo II (cisalhamento) ganha certa notoriedade.

De acordo com SHAH et al. (1995), baseados no trabalho de TORRENTI et al. (1991) e BASCOUL et al. (1993), quando a tensão ultrapassa 80% da resistência máxima à compressão tem início o processo de localização de deformações, que acelera o processo de ruptura do corpo de prova. Há muitas trincas grandes, resultantes da interligação de fissuras menores oriundas de estágios anteriores de carregamento, que se propagam de modo estável, até que uma delas alcança um valor crítico e o concreto atinge sua carga de pico. Após este ponto, o gráfico tensão versus deformação é marcado por um ramo de amolecimento. Os autores concluíram que, de modo similar à ruptura em tração, a ruptura em compressão do

concreto é caracterizada por uma localização de deformações evidenciada pela coalescência de uma ou mais microfissuras.

A figura 5 mostra o comportamento típico tensão-deformação de um corpo de prova de concreto submetido à compressão uniaxial.

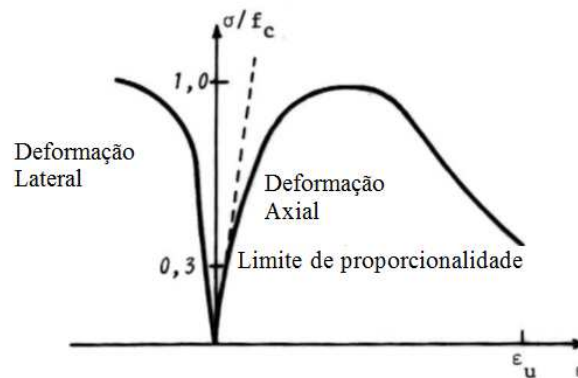


Figura 5: Gráfico tensão versus deformação para o concreto em compressão uniaxial (Baseado em CHEN, 1982)

Outros autores também evidenciaram o fenômeno da localização de deformações no ramo pós-pico em ensaios de compressão uniaxial, como VAN MIER (1983), JANSEN e SHAH (1997), entre outros. Antes disto, o comportamento sob compressão não era suficientemente entendido, pois, do modo de vista externo, o concreto rompe com inúmeras microfissuras resultantes do efeito Poisson.

VAN MIER (1986) implementou um modelo para compressão uniaxial baseado na localização de deformações. Seu modelo baseava-se em leis de tensão e deformação. Contudo, esta abordagem não conseguia simular adequadamente corpos de prova com esbeltez (razão entre a altura e o diâmetro de um corpo de prova cilíndrico) maior que 2,0. O autor não estava levando em consideração a escala da amostra nem o fato de que a esbeltez propicia perda de estabilidade no ensaio com deslocamento controlado (maiores detalhes são discutidos no item 4.1). Após, VAN VLIET e VAN MIER (1996) concluíram que o regime pós-pico do concreto em compressão poderia ser mais bem explicado em termos de deslocamentos ao invés de deformações. A figura 6 mostra resultados destes autores para corpos de prova de concreto onde foi variada a altura (h).

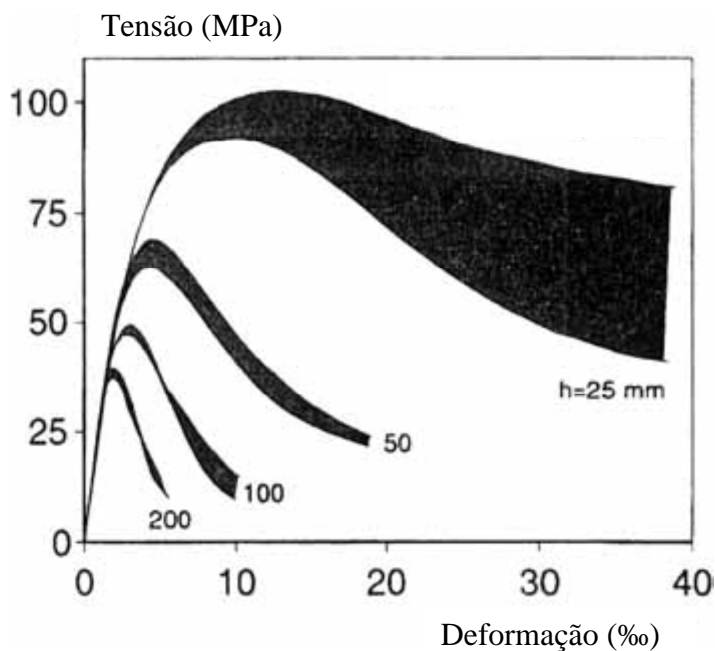


Figura 6: Curvas tensão-deformação de amostras de concreto com resistência normal e diferentes valores de altura (h) (Baseado em VAN MIER e VAN VLIET, 1995)

3.2.3 Ruptura em compressão multiaxial

Poucos trabalhos foram efetivados nesta direção. VAN MIER (1984) realizou uma série de experimentos com cubos de concreto simples submetidos às mais diferentes condições de carregamento. De maneira resumida, quando se aplica tensão de compressão em duas direções ou em uma e a outra é nula, aumenta-se o valor máximo atingido em compressão pela tensão variável em comparação com testes em compressão uniaxial. Por outro lado, nas mesmas condições, apenas mudando o sentido das duas primeiras tensões, a tensão máxima atingida em compressão diminui. Outro fato é que a ruptura ocorreu em uma zona bastante localizada.

A figura 7 mostra os resultados de VAN MIER (1986) onde uma das deformações (ε_2) é anulada e as tensões nas outras duas direções (σ_1 e σ_3) são variadas, sendo σ_3 uma função de σ_1 . A tensão na direção 2, σ_2 é resultado do carregamento externo.

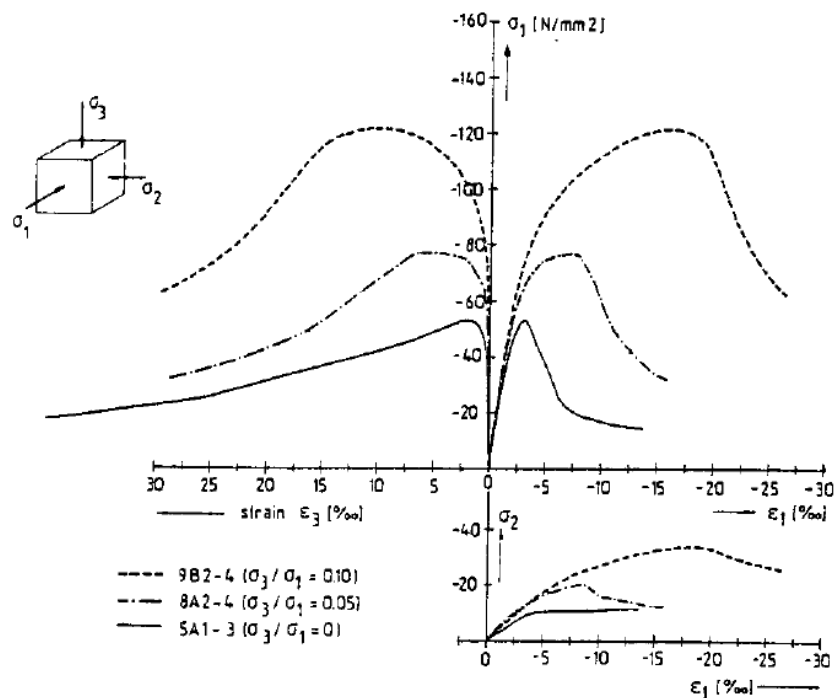


Figura 7: Curvas tensão-deformação para estado plano de deformações (Baseado em VAN MIER, 1985)

2.4 MODELOS DISCRETOS PARA FISSURAÇÃO E ESMAGAMENTO DO CONCRETO

Os modelos de fratura de concreto utilizados neste trabalho têm por base os estudos de DUGDALE (1960) e BARRENBLATT (1962), que propõem a existência de zonas coesivas na ponta da trinca. Tais modelos foram baseados exclusivamente em metais. Mais tarde, baseado nestes, HILLERBORG et al. (1976) desenvolveu uma abordagem para concreto, que criava a noção de trincas fictícias. Esta abordagem foi denominada posteriormente por CARPINTERI (1985) de Modelo de Trincas Coesivas. A vantagem desta forma de abordagem, conforme mencionado no item 2.2.2, é o fato da relação constitutiva estar colocada em termos de tensão versus deslocamento, o que torna a formulação menos sensível a problemas de escala.

Uma das primeiras aplicações de modelos discretos de fratura em elementos finitos foi proposta por NGO e SCORDELIS (1967), os quais, mesmo não fazendo nenhuma consideração energética, foram os pioneiros no uso desta metodologia. Segundo eles, os nós dos elementos finitos são definidos de forma independente, em que a compatibilidade é garantida por molas lineares entre os elementos.

Fazendo uma ligação entre as ideias de DUGDALE (1960), BARRENBLETT (1962) e NGO e SCORDELIS (1967), NEEDLEMAN (1987) introduziu a abordagem de interfaces coesivas, a qual pode ser aplicada a materiais dúcteis e frágeis.

ROTS (1988) aplicou o contexto das interfaces coesivas nas teorias do concreto, utilizando as leis coesivas da teoria de fissura fictícia de HILLERBORG et al. (1976).

TIJSSEN et al. (2000) relataram que o caminho percorrido pela fissura no concreto é determinado pelo trecho inicial da curva de amolecimento da tensão coesiva. Segundo ROTS (1988), uma descida mais íngreme da curva pós-pico é mais adequada.

Nos casos de fratura em modo misto, modelos de acoplamento elastoplásticos considerando o atrito foram propostos por ČERVENKA (1994), GALVEZ et al. (1998), GARCIA et al. (2000), BASCHE et al. (2007) e LENS et al. (2009). Tais trabalhos empregam uma Lei de Coulomb Modificada e a decomposição de deslocamentos elásticos e plásticos.

CARPINTERI et al. (2007) foram os primeiros a definir uma lei específica para o caso em compressão. Tal abordagem foi denominada de Modelo de Trincas Sobrepostas (*Overlapping Crack Model*), que possui uma estreita analogia com o modelo de trincas coesivas criado por HILLERBORG et al. (1976). Ao invés de ocorrer uma abertura fictícia de trinca, por este novo modelo acontece uma interpenetração fictícia. Criou-se o conceito de energia específica de esmagamento, em analogia com a energia específica de fratura.

Num estudo recente (CARPINTERI et al., 2009), aplicou-se o Modelo de Trincas Sobrepostas a simulações numéricas de ensaios de compressão uniaxial e excêntrica em concreto simples. Os pesquisadores concluíram que a resposta em termos das curvas tensão versus deslocamento não dependem exclusivamente da resistência à compressão, da esbeltez, do diâmetro ou largura da base e do tamanho crítico de sobreposição de trinca, mas sim de uma combinação envolvendo todos estes fatores.

2.5 PROPRIEDADES DE FRATURA E ESMAGAMENTO DO CONCRETO

Não existe um consenso entre os pesquisadores com relação ao efeito direto de cada propriedade do concreto sobre a energia específica de fratura, por causa da grande complexidade do material. Vários autores chegaram a conclusões com relação a algumas características do concreto: a tenacidade da matriz de cimento aumenta com a idade (NAUS e

LOTT, 1964), (PETERSON, 1980) e (SANTOS et al., 1998), a tenacidade do concreto aumenta com o diâmetro máximo do agregado (d_{max}) e diminui com o aumento da relação água/cimento (NAUS e LOTT, 1964), (PETERSON, 1980), (STRANGE e BRYANT, 1979) e (SANTOS et al., 1998), a tenacidade do concreto diminui com o aumento da relação água/cimento (PETERSON, 1980), a energia específica de fratura aumenta com o aumento do diâmetro máximo do agregado (d_{max}) (CHEN e LIU, 2004) e (ELICER e ROCCO, 2008).

Segundo NAUS e LOTT (1964), PETERSON (1980) e SANTOS et al. (1998) a tenacidade da matriz de cimento aumenta com a idade. De acordo com NAUS e LOTT (1964), PETERSON (1980), STRANGE e BRYANT (1979) e SANTOS et al. (1998) a tenacidade do concreto aumenta com o diâmetro máximo do agregado (d_{max}) e diminui com o aumento da relação água/cimento. PETERSON (1980) considera que também diminui com o aumento da relação água/cimento. CHEN e LIU (2004) e ELICES e ROCCO (2008) observaram uma relação da energia específica de fratura com o diâmetro máximo do agregado (d_{max}), a qual aumenta com o aumento de d_{max} .

Quanto à energia específica de esmagamento, não há um estudo que a relacione diretamente com as propriedades físicas do concreto, como o tamanho máximo e densidade dos agregados, relação água/cimento. SUZUKI et al. (2006) propuseram que a energia específica de esmagamento aumenta com a resistência à compressão (ver capítulo 4), que depende diretamente das propriedades materiais do concreto. CARPINTERI et al. (2009) sugeriram, com base nos estudos de JANSEN e SHAH (1997), que a interpenetração crítica para o caso do concreto simples estaria em torno de 1 mm. SUZUKI et al. (2006) também sugerem que esta energia aumente consideravelmente com o grau de confinamento do concreto, que se deve em geral à taxa de armadura de cisalhamento (estribos).

3 METODOLOGIA

O presente trabalho utiliza um modelo de fratura/esmagamento discreta aplicado ao contexto de elementos finitos a partir da abordagem de interfaces coesivo-sobrepostas. São empregados elementos volumétricos, cuja lei de tensão-deformação é assumida elástica linear, e elementos de interface, que representam de forma simplificada a matriz cimentícia ou a ZTI. Supõe-se que haja apenas uma faixa onde se desenvolve o processo de dano e amolecimento, seja ele por microfissuração ou por esmagamento. Para introduzir o esmagamento, modificações foram realizadas no modelo de LENS (2008). Finalmente, implementou-se um modelo de aderência para a interface concreto-armadura, conforme é descrito no item 3.4.

3.1 ELEMENTOS DE INTERFACE

Os elementos de interface são ligações virtuais entre as faces dos elementos finitos volumétricos e representam as tensões de coesão que atuam na ponta de uma trinca ou zona de esmagamento de concreto. A figura 8 ilustra uma representação da ligação por elementos de interface. Nesta figura, as direções n e t representam, respectivamente, as direções normal e tangencial.

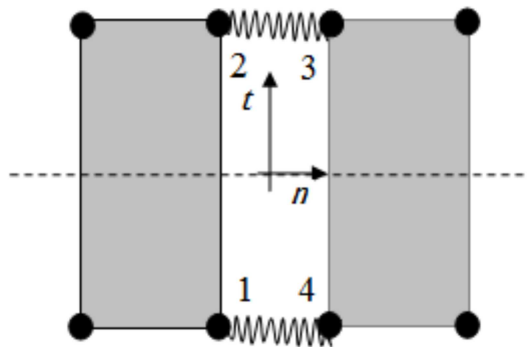


Figura 8: Esquematização de uma interface coesiva

Quando a estrutura não está carregada, os nós 1 e 4 possuem as mesmas coordenadas, assim como os nós 2 e 3.

Os elementos de interface são aqueles que sofrem abertura no caso de fissuração ou interpenetração no caso de esmagamento, o que é comum ao processo de amolecimento, descrito nos itens 3.2 (fissuração) e 3.3 (esmagamento).

3.2 MODELO DE TRINCAS COESIVAS

Quando a energia liberada na abertura de interface é maior que a energia de fratura, ocorre a propagação de fissuras. Este modelo pode ser dividido em duas partes, uma lei pré-pico e uma lei pós-pico.

3.2.1 Leis constitutivas pré-pico

No modelo de trincas coesivas certa abertura elástica de trinca é permitida até que seja atingida a tensão máxima em tração do concreto (f_t). Nesta parte do gráfico ainda não se iniciou o processo de dano e não há liberação de energia. O deslocamento de abertura de trinca varia de 0 a w_e^t , limite elástico de abertura. Na verdade, a porção elástica da curva tensão-deslocamento para tração é fictícia. No entanto, deve estar presente no modelo numérico a fim de regularizar o campo de tensões na zona coesiva. Além disto, a abertura elástica deve ser dependente do tamanho característico de malha, l_c .

LENS et al. (2009) propõe que a abertura elástica seja calculada pela seguinte equação:

$$w_e^t = \frac{\sigma_{max}^{t,0}}{\alpha E} l_c \quad (1)$$

Onde α é uma constante que reduz os deslocamentos elásticos, E é o módulo de Young e $\sigma_{max}^{t,0}$ é a tensão máxima no contínuo no ponto de pico.

3.2.2 Leis constitutivas pós-pico

Na figura 9, a lei linear proposta por HILLERBORG et al. (1976), a lei bilinear proposta no CEB-FIB (1993) e a lei exponencial proposta por XU (1999) são mostradas.

Existe uma relação intrínseca entre a forma da curva pós-pico e o desenvolvimento da zona de processo. A área abaixo da curva tensão-deslocamento corresponde à energia específica de fratura no modo I puro (G_{IF}) e a tensão máxima de tração ($\sigma_{max}^{t,0}$) estão relacionadas à resistência média à tração do concreto (f_{tm}). LENS (2009) propõe que a forma da curva pós-pico tem uma importância significativa nos resultados, não só na região de amolecimento, mas também na carga máxima alcançada.

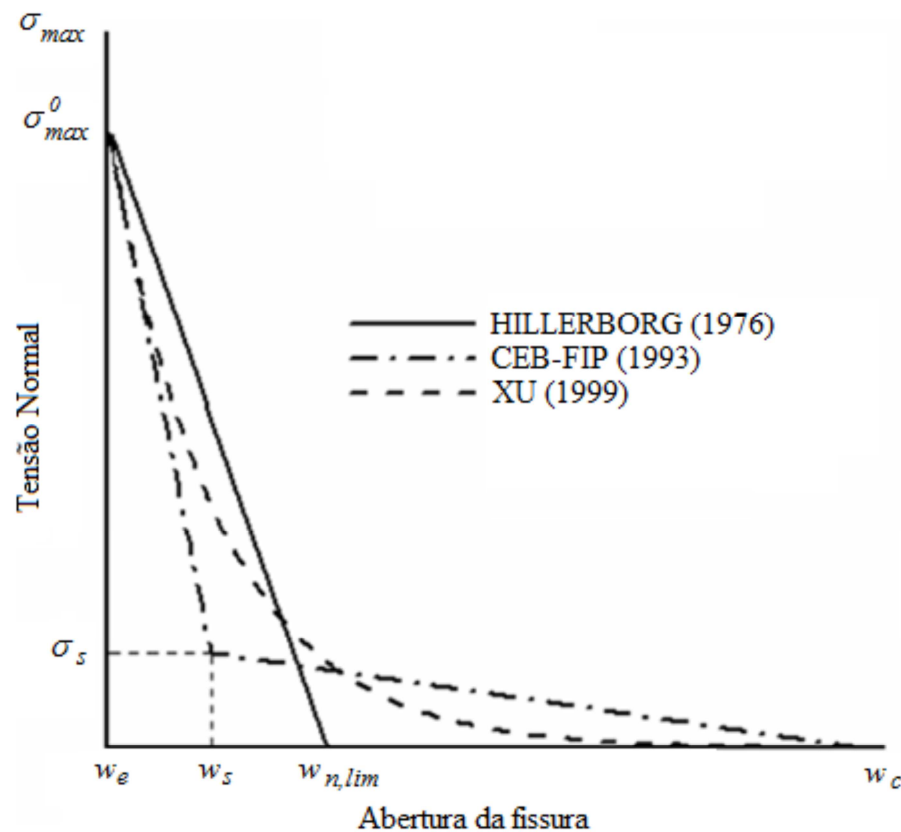


Figura 9: Lei constitutiva pós-pico da superfície coesiva (Baseado em LENS, 2009)

Ensaio práticos mostram que esta curva é mais íngreme para pequenas aberturas (intensa microfissuração) e muito menos inclinada para grandes aberturas (ver, por exemplo, ROTS, 1988 e TIJSSEN et al., 2000).

Segundo HILLERBORG et al. (1976), a tensão normal de tração na região pós-pico é dada pela equação 2:

$$\sigma_{max}^t = \frac{\sigma_{max}^{t,0}}{(w_{n,lim} - w_e^t)} (w_{cr}^t - w) \Rightarrow (w_e^t < w \leq w_{cr}^t) \quad (2)$$

Onde w é a abertura normal, w_e^t é a abertura elástica e w_{cr}^t a abertura final, correspondente à ruptura da interface, a qual é calculada pela equação 3:

$$w_{cr}^t = \left(\frac{2G_{IF}}{\sigma_{max}^{t,0}} + w_e^t \right) \quad (3)$$

Considerando o modelo CEB-FIP (1993), a relação pós-pico tensão-deslocamento é bilinear, ou seja, é linear por tramos, conforme as equações 4 e 5:

$$\sigma_{max}^t = \frac{0,85\sigma_{max}^{t,0}}{(w_s - w_e)}(w_s - w) + \sigma_s \Rightarrow (w_e^t < w \leq w_s) \quad (4)$$

$$\sigma_{max}^t = \frac{0,15\sigma_{max}^{t,0}}{(w_c - w_s)}(w_c - w) \Rightarrow (w_s < w \leq w_c) \quad (5)$$

Onde w_s e σ_s são valores intermediários mostrados na figura 6 e w_c é a abertura final. Estes valores são calculados a partir das equações 6 a 8:

$$w_c = \frac{7G_{IF}}{\sigma_{max}^{t,0}} \quad (6)$$

$$\sigma_s = 0,15\sigma_{max}^{t,0} \quad (7)$$

$$w_s = \frac{2G_{IF}}{\sigma_{max}^{t,0}} - 0,15w_c + w_e^t \quad (8)$$

Finalmente, a lei exponencial proposta por XU (1999) é apresentada na equação 9:

$$\sigma_{max}^t = \sigma_{max}^{t,0} \cdot \exp\left[-\eta\left(\frac{w^t - w_e^t}{w_c}\right)\right] \Rightarrow (w_e^t < w \leq w_c) \quad (9)$$

Onde:

$$\eta = \alpha_F[1 - \exp(-\alpha_F)] \quad (10)$$

$$\lambda = 10 - \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,7} \quad (11)$$

$$\alpha_F = \lambda - \frac{(d_{max})^{0,9}}{8} \quad (12)$$

$$w_c = \alpha_F \frac{G_{IF}}{\sigma_{max}^{t,0}} \quad (13)$$

Sendo f_{ck} a resistência característica à compressão (em MPa) do concreto e d_{max} o diâmetro máximo (em mm) dos agregados.

3.2.3 Modo misto de fratura

Para a consideração do modo misto devem-se definir as curvas do modo II de fratura e da tensão coesiva tangencial (τ) versus deslizamento (ν), uma vez que as fissuras têm de percorrer os contornos dos agregados e estes não coincidem com os planos principais de tensão. Estas curvas são muito difíceis de obter experimentalmente (BAŽANT e PFEIFFER, 1986). As propriedades do modo II são em geral indisponíveis, salvo em observações indiretas. Gálvez et al. (2002) afirmaram que a tensão tangencial máxima é maior que a tensão normal máxima ($\tau_{max} > \sigma_{max}^t$) e, segundo CARPINTERI (1989) e BAŽANT e PFEIFFER (1986), a energia específica de fratura do modo II é maior que a energia do modo I ($G_{IIF} > G_{IF}$). Pela falta de informações, LENS et al. (2009) assumiram relações τ versus ν iguais à da parte normal, conforme a figura 10. Estas relações são utilizadas neste trabalho.

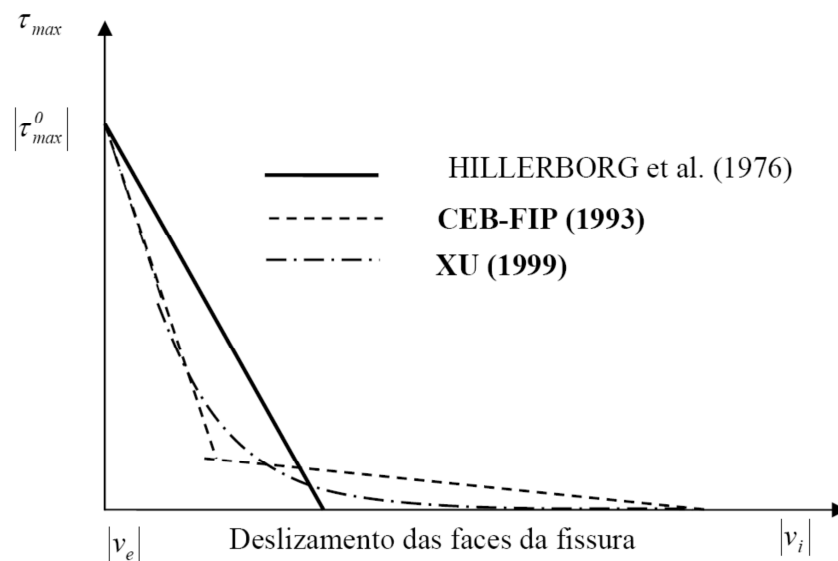


Figura 10: Comportamento tensão coesiva tangencial τ versus deslizamento ν em modo II puro

A abertura normal (w^t) e a abertura tangencial (ν^t) podem ser subdivididas em duas partes, uma elástica e reversível (w_e^t, ν_e^t) e uma inelástica e irreversível (w_i^t, ν_i^t), quando ocorre o processo de dano, conforme as equações 14 e 15.

$$w^t = w_e^t + w_i^t \quad (14)$$

$$v^t = v_e^t + v_i^t \quad (15)$$

A abertura normal elástica máxima é dada pela equação 1 e a correspondente tangencial pela equação 16 abaixo:

$$v_e^t = \frac{\tau_{max}^{t,0}}{\alpha\mu} l_c \quad (16)$$

Onde $\tau_{max}^{t,0}$ é a tensão tangencial máxima, α é o mesmo fator apresentado no modo I e μ é o módulo de elasticidade transversal.

LENS et al. (2009) propuseram um modelo acoplado dos modos I e II de fratura definido pela lei de Coulomb com aderência, onde a aderência inicial é $\sigma_{max}^{t,0}$. A superfície de ruptura é representada na figura 11. Iniciado o processo de dano, a superfície de fissuração se move para a esquerda. Na condição de ruptura total, a lei original de Coulomb é obtida, o que significa que a resistência ao cisalhamento é possível apenas em compressão. O ângulo de atrito ϕ permite a determinação de τ_{max}^t uma vez que σ_{max}^t é conhecido.

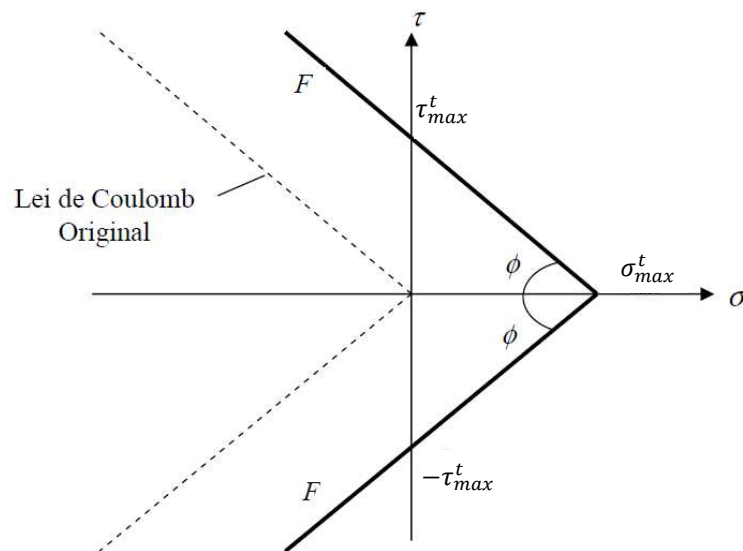


Figura 11: Superfície de ruptura inicial (modelo acoplado de Coulomb com aderência)

Em analogia com a plasticidade, a superfície de ruptura pode também ser considerada uma superfície de escoamento. A superfície de fissuração F pode ser definida a partir da equação 17:

$$F = |\tau| + (\sigma - \sigma_{max}^t) \tan \phi \quad (17)$$

Com σ_{max}^t inicialmente igual a $\sigma_{max}^{t,0}$. Faz-se a atualização de σ_{max}^t em função das relações de amolecimento apresentadas na figura 10, mas empregando o cálculo de um deslocamento inelástico efetivo (u_i^{ef}), conforme a equação 18:

$$u_i^{ef} = \sqrt{w^2 + \beta v^2} \quad (18)$$

Onde β é um fator de acoplamento entre os deslocamentos tangenciais e normais e varia entre 0 e 1. (Não há o superíndice t na expressão 18, pois esta serve também para a parte de compressão, onde é utilizado o superíndice c . Procede-se assim nos demais casos onde as expressões podem servir tanto para tração quanto para compressão).

Nos casos em que $F < 0$ as trações são elásticas e para $F = 0$ dano ou fissuração está ocorrendo. Para $F > 0$, as tensões devem retornar para a superfície. Então, faz-se necessário o uso de um corretor plástico, empregando-se um algoritmo do tipo preditor elástico/ corretor plástico, conforme a equação 19:

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{el} \\ \tau^{el} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ v \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Onde K_n e K_t são as rigidezes normal e tangencial, respectivamente, que são obtidas através das equações 20 e 21:

$$K_n = \frac{\alpha E}{l_c} \quad (20)$$

$$K_t = \frac{\alpha \mu}{l_c} \quad (21)$$

De maneira incremental, v e w podem também ser decompostos em uma parte elástica e uma parte inelástica, como mostra a equação 22, na qual o ponto acima das variáveis indica a derivada temporal:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_e \\ \dot{v}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} \quad (22)$$

O corretor plástico pode ser escrito de acordo com a equação 23:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^{el} \\ \tau^{el} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_n \\ K_t \end{Bmatrix} \int_{\Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} dt \quad (23)$$

Onde t é o tempo e Δt é o passo de tempo usado na integração.

Considera-se uma plasticidade não associada, implicando que os deslocamentos inelásticos não são normais à superfície de fissuração F , que são considerados normais a um potencial plástico F^* . Os deslocamentos inelásticos em tração são calculados de acordo com a equação 24:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w}_i^t \\ \dot{v}_i^t \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial \sigma \\ \partial F^* / \partial \tau \end{Bmatrix} \quad (24)$$

A superfície F comparada com F^* dividida em duas partes, uma em tração e outra em compressão, é mostrada na figura 12.

Onde $\dot{\lambda}$ é o módulo das taxas de deslocamentos inelásticos e $\partial F^* / \partial \sigma$ e $\partial F^* / \partial \tau$ definem as direções.

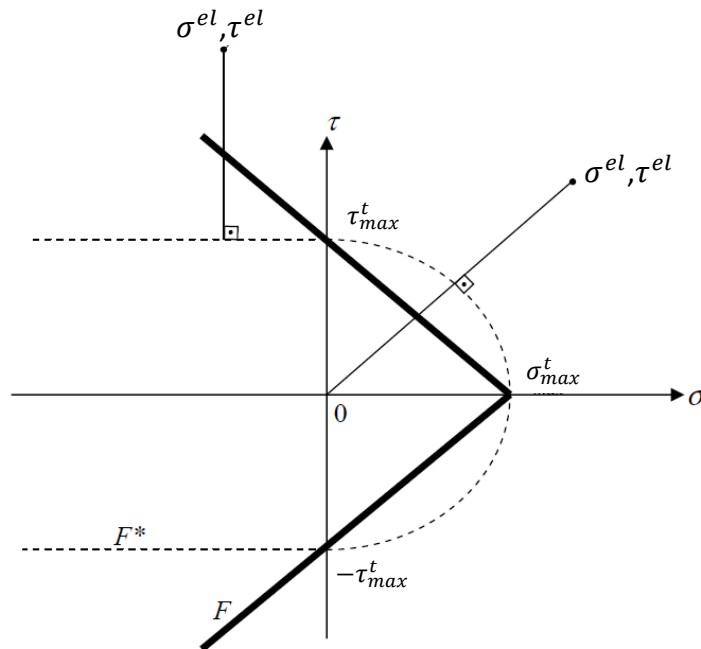


Figura 12: Superfície de ruptura para modelo acoplado (F), potencial plástico (F^*) e direções dos deslocamentos inelásticos

As direções dos deslocamentos inelásticos são consideradas constantes durante o processo de integração, assim as trações finais podem ser calculadas a partir da equação 25:

$$\begin{Bmatrix} \sigma^t \\ \tau^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^{t,el} \\ \tau^{t,el} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_n \\ K_t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial \sigma \\ \partial F^* / \partial \tau \end{Bmatrix} \Lambda \quad (25)$$

Λ : integração de $\dot{\lambda}$ em relação ao tempo, conforme a equação 26:

$$\Lambda = \int_{\Delta t} \dot{\lambda} dt \quad (26)$$

Assim, os deslocamentos inelásticos em tração podem ser calculados pela equação 27:

$$\begin{Bmatrix} w_i^t \\ v_i^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial \sigma \\ \partial F^* / \partial \tau \end{Bmatrix} \Lambda \quad (27)$$

É importante ressaltar que a energia específica de fratura no modo II não entra explicitamente na formulação, mas indiretamente através da variável β e do ângulo de atrito ϕ , pois $\tan \phi = \tau_{max}^t / \sigma_{max}^t$.

3.3 MODELO DE TRINCAS SOBREPOSTAS

Neste trabalho, dando prosseguimento ao que foi implementado por LENS (2009) na parte de tração, é feita a consideração do dano em compressão. A fim de modelar a ruptura por esmagamento, CARPINTERI et al. (2007) propuseram uma abordagem análoga ao Modelo de Trincas Coesivas, à qual denominaram Modelo de Trincas Sobrepostas (em inglês *Overlapping Crack Model*). Esta abordagem visa simular numericamente o esmagamento do concreto (processo de dano em compressão).

No processo de fratura ocorre uma abertura fictícia de trinca, um deslocamento positivo. Quando esta abertura fictícia atinge um valor crítico a trinca se propaga. Já no esmagamento ocorre uma interpenetração fictícia, deslocamento negativo. Esta interpenetração também atinge um valor crítico, que representa o colapso por esmagamento.

Como foi dito no capítulo anterior, o comportamento de uma amostra de concreto submetida a um ensaio de compressão uniaxial mostra nas curvas tensão versus deformação pós-pico uma forte localização de deformações (CARPINTERI et al., 2009), o que justifica a consideração da ruptura em compressão através do emprego de interfaces coesivas.

3.3.1 Leis constitutivas pré e pós-pico

Em analogia ao modelo de HILLERBORG et al. (1976), CARPINTERI et al. (2009) sugerem a adoção de uma lei elástica linear até que seja atingida a resistência à compressão do concreto (f_c). Neste trabalho adota-se uma lei em termos de sobreposição fictícia, enquanto que CARPINTERI et al. (2009) adotaram uma lei em termos de deformação. A zona de esmagamento se desenvolve quando a tensão máxima σ_{max}^c atinge a resistência à compressão do concreto. A partir de então começa o processo de dano e amolecimento. O cálculo do deslocamento máximo pré-pico é realizado segundo a equação 28.

$$w_e^c = \frac{\sigma_{max}^{c,0}}{\alpha E} l_c \quad (28)$$

Sendo $\sigma_{max}^{c,0}$ a resistência máxima à compressão.

Ainda segundo CARPINTERI et al. (2009), a zona de processo se desenvolve de forma perpendicular à tensão principal de compressão na região pós-pico. Os autores sugerem uma lei de amolecimento similar àquela adotada por HILLERBORG et al. (1976) para o caso em tração, conforme a equação 29, que é adotada para um caso de modelo misto de abertura e sobreposição de trincas (CARPINTERI et al., 2010):

$$\sigma_{max}^c = \sigma_{max}^{c,0} \left(1 - \frac{w_i^c}{w_{cr}^c} \right) \quad (29)$$

Onde w_i^c é a interpenetração total (parte inelástica do deslocamento) e w_{cr}^c é o valor crítico de interpenetração. A zona de esmagamento é então representada por uma sobreposição fictícia, análoga à trinca fictícia em tração. A interpenetração crítica é a diferença entre o módulo do encurtamento máximo total para o qual ocorre a ruptura do corpo de prova no ensaio de compressão uniaxial, e o encurtamento máximo elástico pré-pico (dado pela equação 28).

A fim de estabelecer uma lei tensão deformação mais próxima à dos resultados de laboratório, CARPINTERI et al. (2009) sugeriram também a seguinte relação cúbica (equação 30):

$$\frac{\sigma_{max}^c}{\sigma_{max}^{c,0}} = 2 \left(\frac{w_i^c}{w_{cr}^c} + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{w_i^c}{w_{cr}^c} \right)^2 \quad (30)$$

A figura 13 mostra os gráficos para as duas leis, linear e não linear. A área abaixo do gráfico é denominada energia específica de esmagamento, G_C ou G_{IC} , se for considerado apenas o modo I (o subíndice C vem do inglês *crushing*, esmagamento). A energia de esmagamento é análoga à energia de fratura.

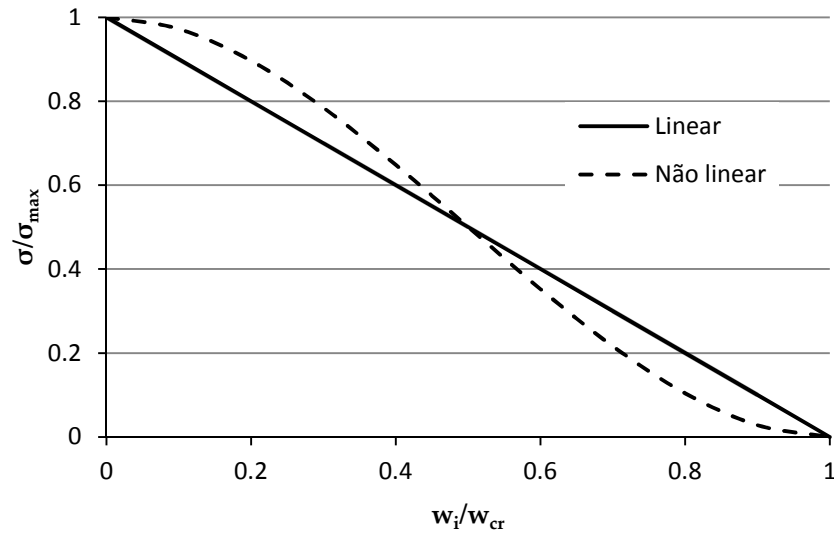


Figura 13: Curvas pós-pico para o caso de dano em compressão (Adaptado de CARPINTERI et al., 2009)

3.3.2 Modo misto de fratura e esmagamento

Neste trabalho, duas novas superfícies de ruptura são criadas no espaço $\sigma \times \tau$. A figura 14 ilustra os dois novos limites de elasticidade combinados com os já existentes para valores de tensão tangencial.

As equações 31 e 32 mostram os limites estabelecidos por estas duas novas superfícies, F_1 e F_2 , respectivamente:

$$F_1 = \sigma_{max}^{c,0} + \sigma \quad (31)$$

$$F_2 = \tan \phi (\sigma_{max}^{c,0} + \sigma_{max}^{t,0}) + \tau \quad (32)$$

Com as três superfícies de escoamento, o campo de tensões fica subdividido em quatro domínios, a saber:

- a) Domínio I: recai inteiramente sobre a parte elástica;

- b) Domínio II: zona de ruptura em tração ou compressão, ocorrendo um processo de retorno à superfície de ruptura, conforme descrito em LENS (2009);
- c) Domínios III e IV: zona de ruptura em esmagamento.

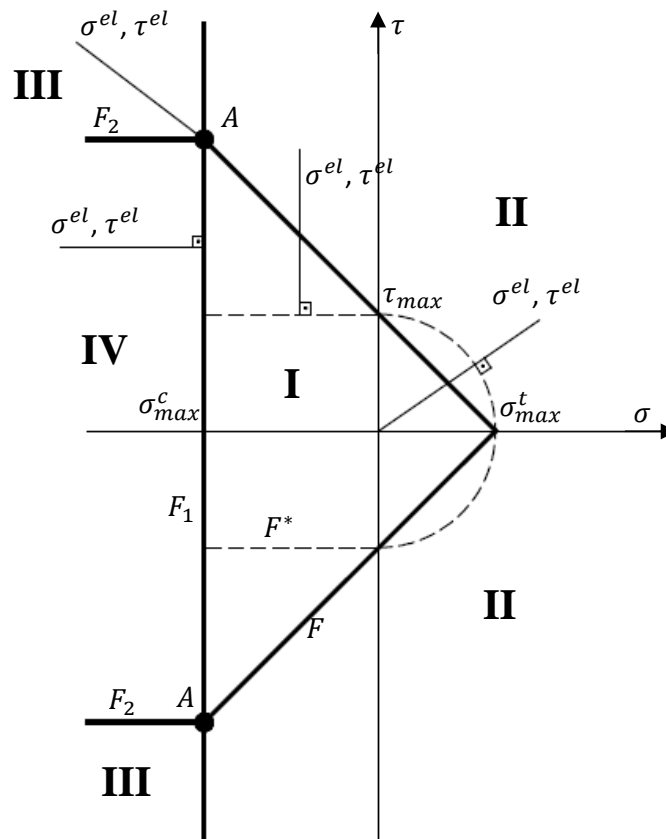


Figura 14: Novas superfícies de escoamento para a consideração do dano em compressão e os domínios por elas criados

Estados de tensão na região IV são proibidos, de modo que neste caso deve haver um retorno conforme a equação 23, considerando agora uma plasticidade associada. Desta forma os termos inelásticos são calculados conforme a equação 33.

$$\begin{Bmatrix} \dot{w}_i^c \\ \dot{v}_i^c \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \partial F_1 / \partial \sigma \\ \partial F_1 / \partial \tau \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Todas as demais etapas de cálculo seguem o item 3.2.3.

Estados de tensão na região III também são inadmissíveis. Neste caso, como há uma aresta na superfície de ruptura, a regra de Koiter é empregada, retornando o estado de tensões para a aresta.

3.4 LEI DE ADERÊNCIA ENTRE AÇO E CONCRETO

Uma das questões mais importantes na modelagem em elementos finitos de estruturas de concreto armado (CA) é a interface entre aço e concreto. Para o dimensionamento de estruturas, em geral, se considera aderência perfeita entre os dois materiais, ou seja, que não há deslocamento ou escorregamento entre os dois materiais. As estruturas de CA são projetadas para se recaia em um comportamento elástico do aço, de baixa fissuração do concreto e, se possível, sem qualquer dano em compressão deste último. Como é visto no próximo capítulo, a relação de aderência possui pequena influência no comportamento carga versus deflexão de vigas de CA na parte que antecede o escoamento do aço e o esmagamento do concreto, justificando a escolha dos projetistas.

Entretanto, para o comportamento após o escoamento da armadura e início de dano em compressão do concreto, a questão da aderência ganha importância. Implementa-se neste trabalho a relação tensão tangencial (τ) versus escorregamento (ν) proposta no Código Modelo 90 (CEB-FIP, 1993). Os elementos de interface entre o aço e o concreto são modelados como interfaces coesivas, conforme descrito anteriormente. Os módulos de elasticidade, tanto o longitudinal quanto o transversal, são iguais às médias dos módulos dos dois materiais (aço e concreto). As relações constitutivas são descritas nas equações 34 a 37.

$$\tau = \tau_{max}(\nu/\nu_1)^\alpha, \text{ para } \nu \leq \nu_1 \quad (34)$$

$$\tau = \tau_{max}, \text{ para } \nu_1 < \nu \leq \nu_2 \quad (35)$$

$$\tau = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f)(\nu - \nu_2)/(\nu_3 - \nu_2), \text{ para } \nu_2 < \nu \leq \nu_3 \quad (36)$$

$$\tau = \tau_f, \text{ para } \nu > \nu_3 \quad (37)$$

As vigas de CA modeladas neste trabalho são consideradas em estado de confinamento por causa dos estribos.

Para este caso, as constantes ν_1 , ν_2 , α , τ_{max} e τ_f são mostradas na Tabela 1.

O valor de v_3 é descrito como espaçamento entre as nervuras da barra de armadura longitudinal. Uma vez que este dado não é normalmente fornecido nos trabalhos referentes a ensaios de laboratório, emprega-se aqui 0,5 vezes o diâmetro da armadura, baseado na NBR 7480 (ABNT, 2007), que recomenda valores entre 0,5 e 0,8 do diâmetro das barras de aço.

Tabela 1: Propriedades de aderência para os modelos numéricos de vigas de CA

Constante	Valor
v_1	1,0 mm
v_2	3,0 mm
α	0,4
τ_{max}	$1,25\sqrt{f_{ck}}$
τ_f	$0,4\tau_{max}$

A figura 15 mostra a curva tensão versus deslocamento sugerida pelo CEB-FIP (1993).

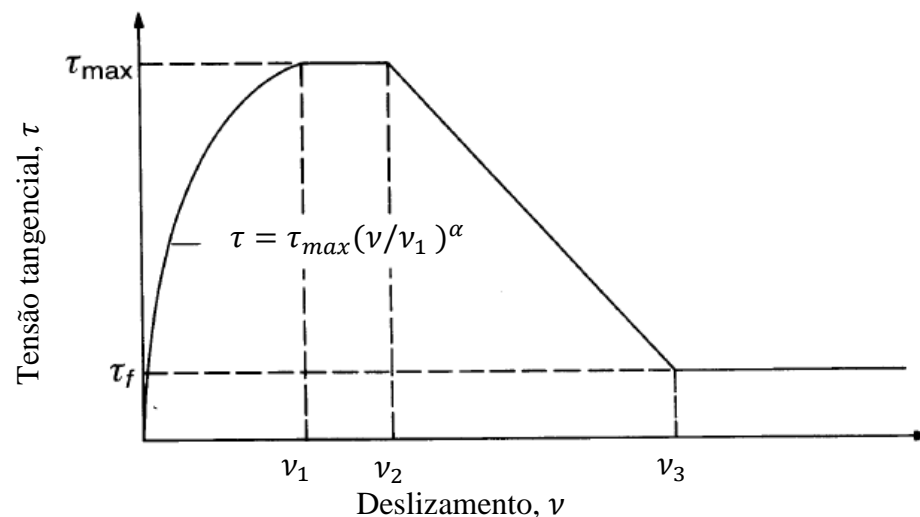


Figura 15: Curva tensão versus deslizamento para os elementos de aderência entre aço e concreto (Baseado em CEB-FIP, 1993)

Já para o deslocamento normal é adotado um esquema semelhante ao de contato e atrito, onde se tenta fazer com que este deslocamento seja o menor possível, tanto no sentido de abertura da interface quanto de sobreposição desta.

3.5 IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

O concreto é assumido como material elástico linear e segue as leis de Hooke. Pode ocorrer fratura apenas pela separação das interfaces e esmagamento pela sobreposição das mesmas. A taxa de tensões objetivas de Jaumann $\begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \sigma \end{bmatrix}$, que é empregada para a consideração de grandes deformações, se relaciona com a equação constitutiva segundo a equação 38:

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \sigma \end{bmatrix} = [\Psi][D_e] \quad (38)$$

Onde $[\Psi]$ é o tensor de Hooke e $[D_e]$ é a taxa de deformação. O Princípio dos Trabalhos Virtuais, incluindo as tensões coesivas e desconsiderando as tensões de corpo, é expresso pela equação 39:

$$\int [\sigma]: \left[\frac{\partial \delta U}{\partial X} \right] dV - \int_{\Gamma_t} \{F\} \{\delta U\} dS + \int_{\Gamma_f} \{T\} \{\delta \Delta\} dS = 0 \quad (39)$$

Onde $\{U\}$ são os deslocamentos nodais, $\{F\}$ são os vetores de tensão prescritos no contorno de Γ_t e $\{T\}$ as tensões coesivas na superfície de fratura, esmagamento e interface concreto-armadura, aqui genericamente representadas por Γ_f . A expressão 39 é integrada no volume Ω em cada elemento finito utilizando quatro pontos de Gauss. A rotação das tensões normais σ e tangenciais τ dos eixos locais para os eixos globais é realizada para a obtenção das tensões coesivas $\{T\}$.

4 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas as aplicações numéricas do presente trabalho, com aplicações em compressão uniaxial e modelos de viga em flexão. Resultados das simulações numéricas são comparados com resultados experimentais, contidos na bibliografia, analisando as contribuições das propriedades geométricas e do material no comportamento do concreto.

4.1 ENSAIO DE COMPRESSÃO UNIAXIAL

Este talvez seja o ensaio mais realizado em laboratórios de materiais, por ser bastante simples do ponto de vista de execução e onde se objetiva quase que tão somente mensurar a resistência máxima à compressão do concreto.

4.1.1 Considerações para compressão uniaxial

CARPINTERI et al. (2009) dividiram a simulação do ensaio de compressão uniaxial em três estágios simplificados.

No primeiro estágio o corpo de prova se comporta de maneira elástica. O encurtamento w_e^c é calculado conforme a equação 40:

$$w^c = w_e^c = \frac{\sigma}{E} \ell \quad (40)$$

Onde ℓ é o comprimento do corpo de prova e E é o módulo de elasticidade longitudinal tangente, que é a inclinação da reta que passa pela origem e pelo ponto de máximo no gráfico tensão-deformação. Aqui são desprezadas todas as não linearidades do ramo pré-pico.

O segundo estágio é marcado pelo início do processo de dano. Depois de alcançada a resistência última $\sigma_{max}^{c,0}$ a deformação começa a se localizar em uma faixa de esmagamento aproximadamente na altura média do corpo de prova, quando ocorre o processo de amolecimento. O encurtamento é descrito pela equação 41 como a soma da parte elástica mais uma parte devida ao dano irreversível (w_i^c):

$$w^c = \frac{\sigma}{E} \ell + w_i^c \quad (41)$$

Enquanto a zona de esmagamento se sobrepõe, a zona elástica sofre um processo de expansão com a diminuição progressiva da tensão. A condição de estabilidade se dá caso o processo de carregamento seja por deslocamento controlado. Contudo, esta condição é somente necessária e não suficiente para garantir a estabilidade, conforme é discutido mais adiante.

A tensão máxima admissível diminui à medida que ocorre o processo de amolecimento e aumenta o valor da interpenetração. No último estágio, quando o encurtamento é maior ou igual à sobreposição crítica (w_{cr}^c), o concreto da zona de esmagamento está completamente danificado, sendo incapaz de transmitir tensões. A zona elástica retorna ao seu comprimento inicial, as tensões compressivas caem a zero, a condição de interpenetração se completa e o valor do encurtamento é igual ao da sobreposição das interfaces coesivas.

Um esquema com os supracitados estágios de deformação de um corpo de prova de concreto em compressão é ilustrado na figura 16.

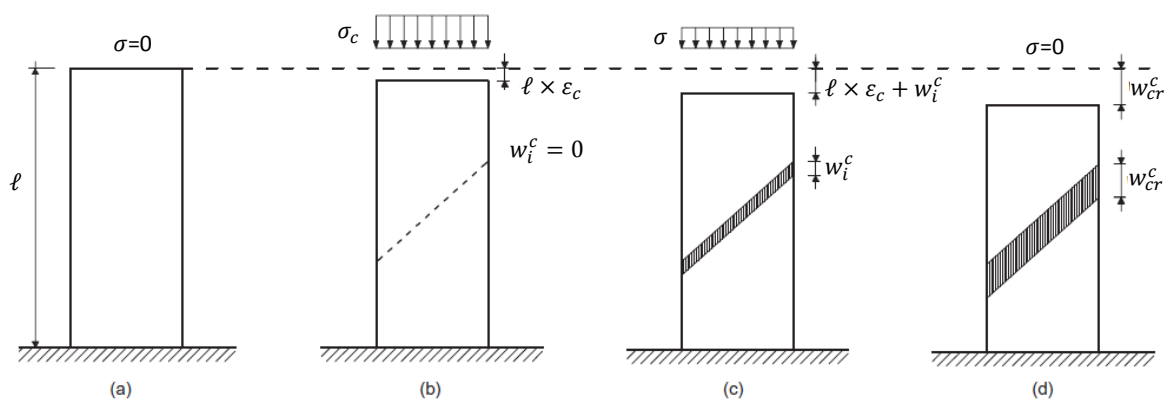


Figura 16: Estágios subsequentes de uma amostra de concreto em compressão: (a) sem carregamento, (b) parte elástica, (c) início do processo de dano e (d) valor crítico de interpenetração (Adaptado de CARPINTERI et al., 2009)

Para valores de interpenetração crítica maiores que o alongamento elástico, ou seja, $w_{cr}^c > \varepsilon_c \ell$, o processo de amolecimento é estável no caso de deslocamento controlado (figura 17a). Quando $w_{cr}^c \leq \varepsilon_c \ell$ há perda de estabilidade (*snap-back*), a inclinação da curva tensão versus deslocamento pós-pico torna-se positiva e o processo de amolecimento é dito catastrófico (figuras 17b e c) (CARPINTERI et al., 2009).

O amolecimento pode ser instável também na abertura/sobreposição de trincas, conforme descrito por CARPINTERI (1989) e CARPINTERI et al. (2003). Neste caso, o regime de

dano (estável ou catastrófico) depende do valor da abertura/sobreposição elástica em relação à abertura/sobreposição de ruptura da interface coesiva. Quando $w_e > w_{cr}$ o amolecimento é instável.

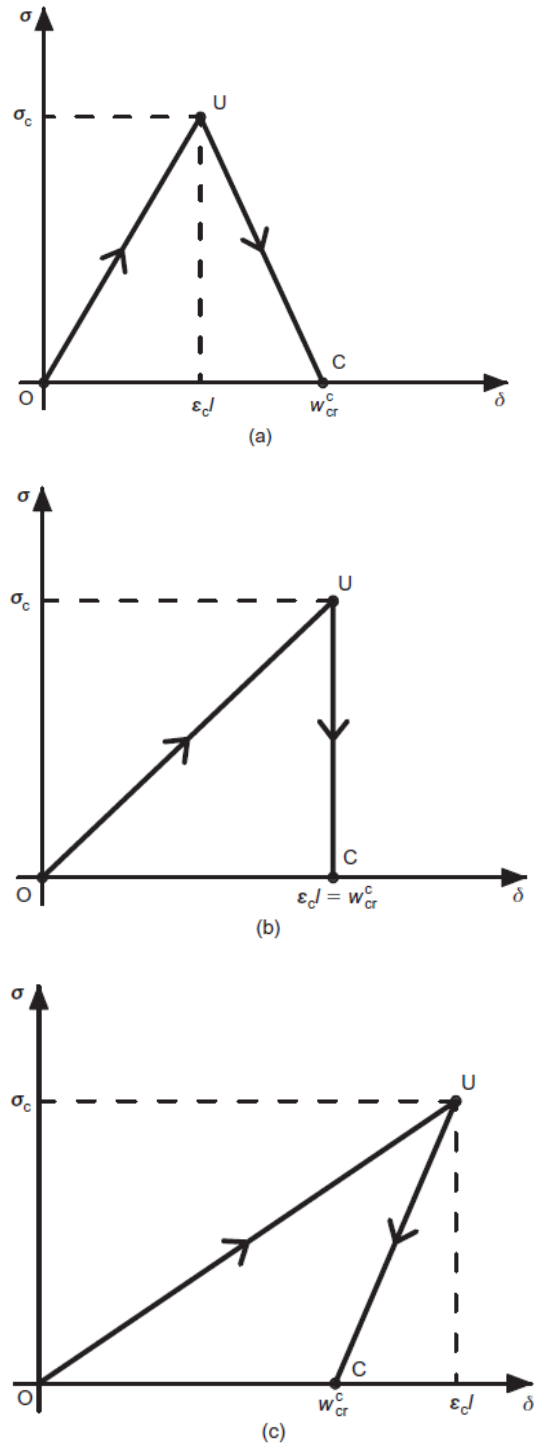


Figura 17: Respostas tensão-deslocamento: (a) amolecimento normal; (b) e (c) amolecimento catastrófico (*snap-back*) (Baseado em CARPINTERI et al., 2009)

Segundo SUZUKI et al. (2006), a energia específica de esmagamento pode ser obtida a partir da resistência à compressão (f_c) em N/mm^2 , como mostra a equação empírica 42 para o caso onde não há a inclusão de estribos ou armaduras de compressão e $f_c > 40 \text{ N/mm}^2$:

$$G_C = 80 - \frac{2000}{f_c} \quad (42)$$

Para $f_c \leq 40 \text{ N/mm}^2$, $G_C = 30 \text{ N/mm}$. A figura 18 mostra o gráfico com a energia específica de esmagamento em função da resistência à compressão. No caso da inclusão de estribos, G_C é consideravelmente maior, podendo chegar a valores de até 500 N/mm (SUZUKI et al., 2006). Quanto maior a densidade de estribos maior é o valor de G_C .

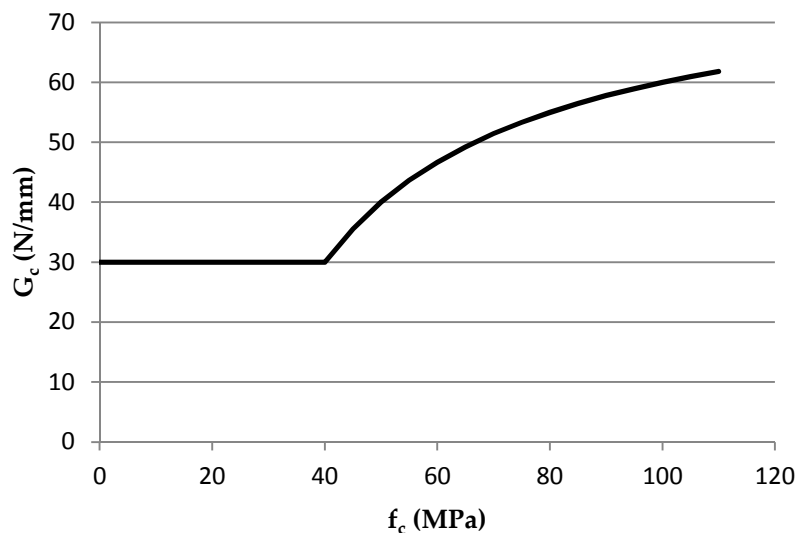


Figura 18: Curva energia de esmagamento versus resistência à compressão para o caso sem estribos

4.1.2 Resultados numéricos para compressão uniaxial

Considera-se aqui um corpo de prova sujeito a um processo de compressão uniaxial através de um ensaio com deslocamento controlado. Para fins de exemplificação, a figura 19 mostra uma malha de elementos finitos quadrangulares empregada para simular o comportamento em compressão uniaxial. O deslocamento prescrito é aplicado na direção x . No detalhe é mostrada a região onde se aloca as interfaces coesivas.

Estabelecem-se elementos de interface no comprimento médio do corpo de prova, ou seja, em $\ell/2$. O valor do deslocamento prescrito é igual à sobreposição crítica de trinca w_{cr}^c .

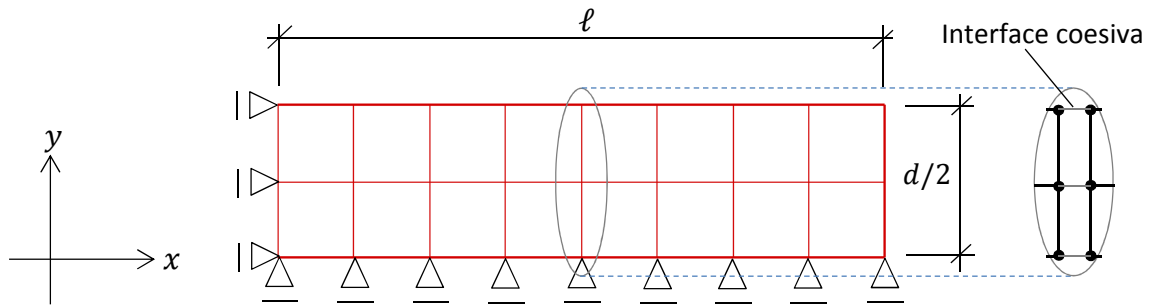


Figura 19: Exemplo de malha empregada para simulação numérica de ensaio de compressão uniaxial e no detalha a região onde estão localizadas as interfaces coesivas

Empregam-se diferentes valores de esbeltez ($\lambda = \ell/d$), variando de 2,0 a 5,5. Os dados geométricos e materiais são: sobreposição crítica (w_{cr}^c) 1,35 mm; resistência à compressão (f_c) 47,9 MPa; módulo de elasticidade (E) 28 GPa e diâmetro do corpo de prova (d) 90 mm.

Os resultados numéricos são mostrados na figura 20. Para o ramo pré-pico utiliza-se a lei elástica linear segundo a equação 28 e para o pós-pico a lei não linear proposta por CARPINTERI et al. (2009) (equação 30). Na figura 21 são ilustrados os resultados experimentais obtidos em ensaios realizados por JANSEN e SHAH (1997), onde δ é o valor do deslocamento.

Como pode ser visto, o modelo se mostrou eficiente em mostrar a resposta em tensão ao deslocamento imposto. O deslocamento é aplicado de forma monótona crescente, o que não permite capturar o ramo de instabilidade (*snap-back*) como no caso em que a esbeltez vale 5,5. Além disto, o resultado numérico se difere um pouco no ramo pré-pico, pois considera uma lei elástica linear e emprega o módulo de elasticidade secante, desprezando assim as não linearidades presentes antes mesmo que o corpo de prova de concreto atinja a tensão máxima de compressão. Na parte pós-pico do modelo numérico é desprezada a tensão residual, ou seja, a tensão cai a zero quando o corpo de prova rompe. Isto não se verifica em ensaios de laboratório, onde a tensão final fica em torno de 20% da tensão máxima de compressão.

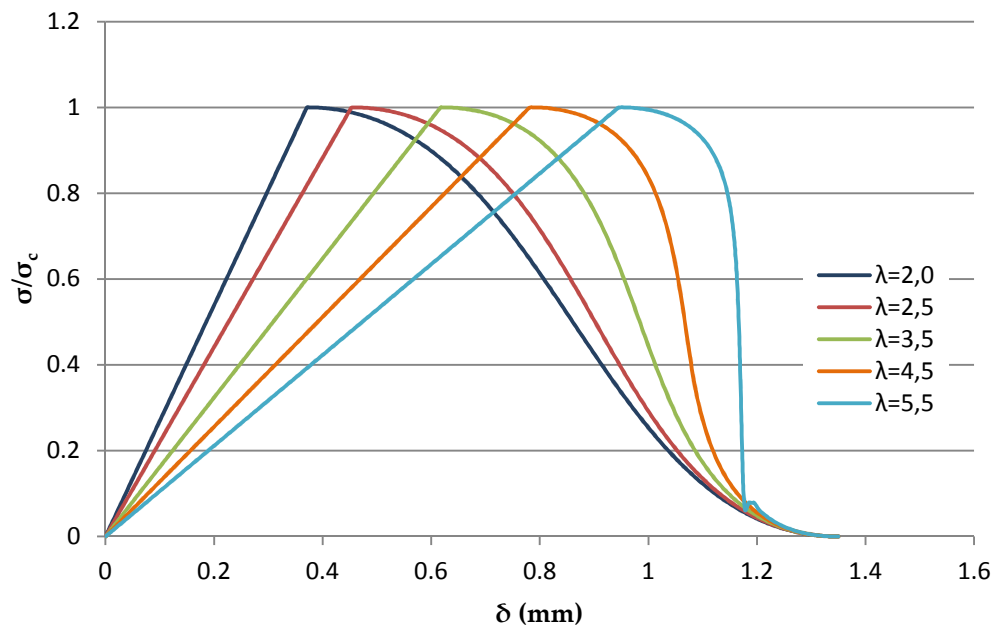


Figura 20: Gráfico tensão versus deslocamento para diferentes valores de esbeltez em ensaio de compressão uniaxial (resistência à compressão $\sigma_c = 47,9$ MPa)

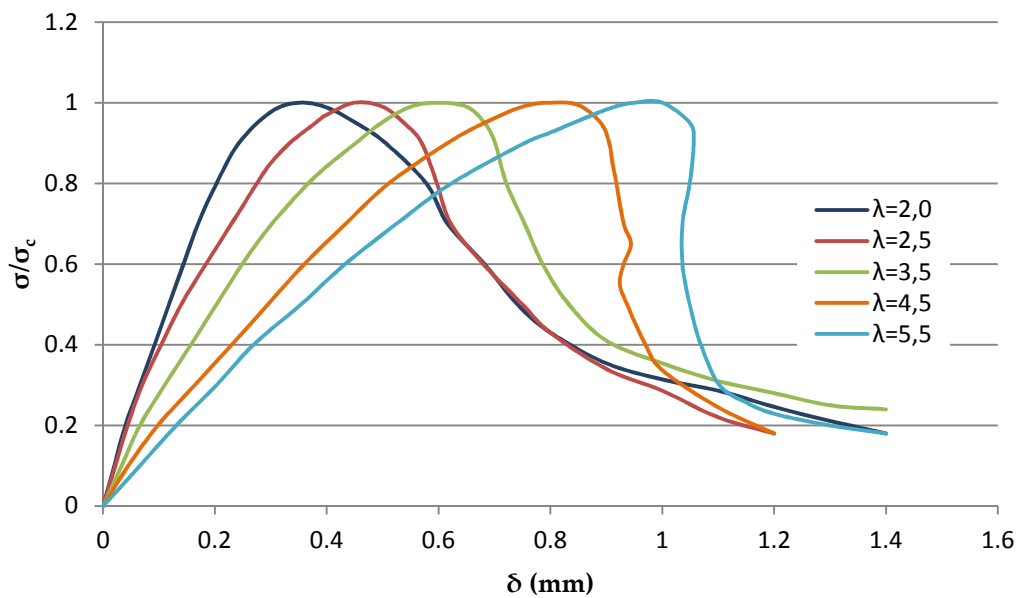


Figura 21: Resultados experimentais de JANSEN e SHAH (1997)

4.2 ENSAIO DE FLEXÃO A TRÊS PONTOS DE CONCRETO ARMADO

A fim de se aplicar o Modelo de Trincas Sobrepostas a outros casos, em conjunto com o Modelo de Trincas Coesivas, simulam-se vigas de concreto armado em flexão no modo clássico de três pontos, dois apoios e um ponto de aplicação de carga no centro da borda superior da estrutura, como exemplifica a figura 22. São escolhidas aqui estruturas de concreto com alta taxa de armadura (concreto superarmado) a fim de se garantir a ocorrência de dano em compressão. Na modelagem numérica, as barras de armadura são substituídas por uma camada de altura equivalente (h_{eq}) de aço, obtida dividindo a área da seção transversal da armadura (A_s), alocada na região tracionada de concreto, pela largura da viga (b) (expressão 43), tendo esta camada retangular a mesma área transversal das barras circulares. O mesmo se faz quando há armadura na região comprimida de concreto (A'_s). O centro de gravidade (CG) da camada de altura equivalente de aço coincide com o CG da armadura.

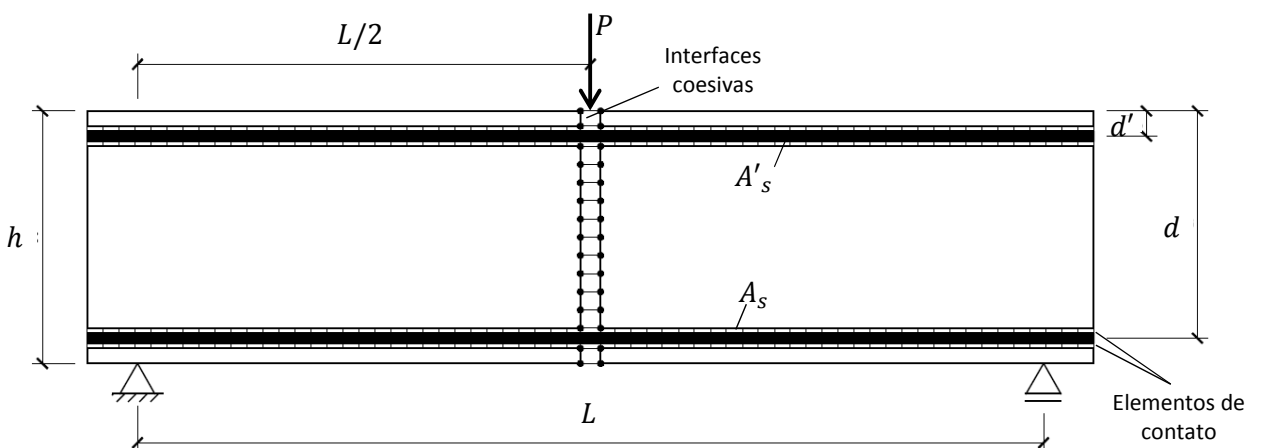


Figura 22: Modelo de uma viga de concreto armado

Na figura 22, h é a altura total da viga, d (altura útil) é a distância entre a fibra mais comprimida e o centro de gravidade (CG) da armadura da região de tração, d' é a distância entre a fibra mais comprimida e o CG da armadura da região de compressão, L é o vão livre (distância entre os apoios).

$$h_{eq} = \frac{A_s}{b} \quad (43)$$

Simulações numéricas são realizadas a partir das vigas ensaiadas experimentalmente por BURNS e SIESS (1966). Os elementos finitos volumétricos empregados nesta análise são quadriláteros bilineares de quatro nós. O processo de dano em tração e/ou compressão é

considerado através de uma única fissura ou região de esmagamento, ou seja, são colocados elementos de interface apenas no centro da viga ao longo de sua altura. Admite-se neste trabalho o comportamento de aderência proposto no Código Modelo 90 (CEB-FIP,1993), conforme descrito anteriormente. As vigas ensaiadas por BURNS e SIESS (1966) não possuíam nenhum entalhe inicial, o que é considerado também neste trabalho.

Os casos analisados nas próximas seções deste trabalho foram ensaiados experimentalmente por BURNS e SIESS (1966) e são mostrados na Tabela 2. Os casos J1, J4 e J10 possuem apenas armadura de tração, enquanto que J2 também possui armadura de compressão. Para as vigas J1, J2, J4 e J10 há estribos retangulares fechados com diâmetro 9,5 mm e espaçados a cada 15 cm, enquanto que para a viga J19 estribos \emptyset 6,3 mm cada 15 cm. O valor da energia específica de fratura segue as recomendações do Código Modelo 90 (CEB-FIP, 1993).

Tabela 2: Dados geométricos e materiais das vigas da série J (Armadura de tração $A_s = 2 \emptyset 25,4$ mm em todos os casos)

Viga	$\sigma_{max}^{c,0}$ (MPa)	E_c (MPa)	A'_s	f_y (MPa)	h (mm)	d (mm)	G_F (N/mm)	w_{cr}^c (mm)
J1	34,0	14000	-	330	305	255	0,075	18,0
J2	28,0	14000	2 \emptyset 19,0	330	305	255	0,060	18,0
J10	25,0	10000	-	310	405	355	0,060	22,0
J4	33,0	15000	-	310	508	458	0,075	22,0
J19	25,0	15000	-	310	508	355	0,060	13,75

(O símbolo \emptyset denota as barras de aço, o número à esquerda a quantidade de barras e o número à direita o diâmetro destas barras em milímetros; f_y é a tensão de escoamento do aço. Para o módulo de elasticidade do aço adota-se o valor constante de 205 GPa. A armadura de tração é a mesma para todas as vigas, $A_s = 2 \emptyset 25,4$ mm.)

Todos os exemplos simulados numericamente possuem vão livre (L) de 3650 mm e comprimento total de 3950 mm, a distância entre o CG das barras de aço da região comprimida e a fibra superior (d') de 50 mm e largura (b) de 200 mm. Os demais dados geométricos e materiais são dados na Tabela 2.

Com relação ao comportamento coesivo, em tração é empregada a lei sugerida por HILLERBORG (1976) (equação 2) e em compressão adota-se a lei pós-pico sugerida por CARPINTERI et al. (2009) através da equação 29.

A resistência máxima à tração ($\sigma_{max}^{t,0}$) é obtida utilizando-se a expressão 44, conforme a NBR 6118 (2007).

$$\sigma_{max}^{t,0} = 0,3 \cdot (\sigma_{max}^{c,0})^{2/3} \quad (44)$$

Para os ramos pré-pico de tração e compressão utilizam-se as equações 1 e 28, respectivamente. Já para o aço, emprega-se uma plasticidade associada de von Mises com endurecimento não linear. No presente trabalho a relação entre tensão equivalente ($\bar{\sigma}_s$) com a deformação plástica equivalente ($\bar{\varepsilon}^{pl}$) é utilizada, conforme a equação 45.

$$\bar{\sigma}_s = f_y + (f_y^\infty - f_y) \left(1 - e^{-k\bar{\varepsilon}^{pl}}\right) \quad (45)$$

A figura 23 mostra o comportamento típico tensão-deformação para o aço das vigas da série J sugerido por BURNS e SIESS (1966).

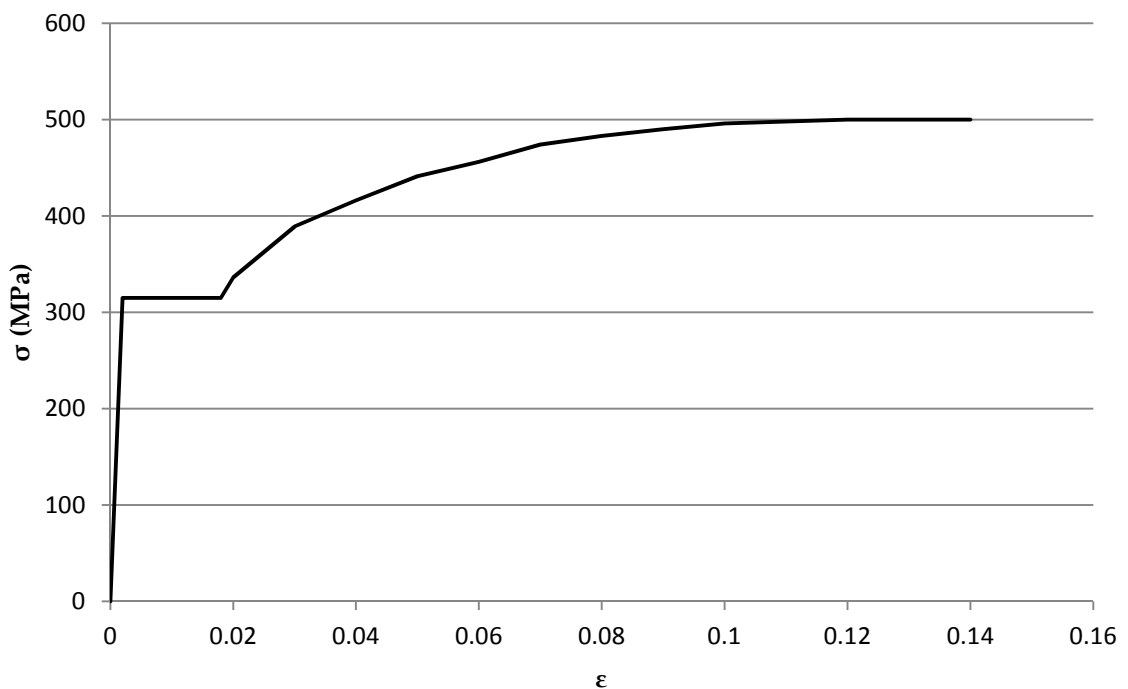


Figura 23: Gráfico tensão-deformação para o aço das vigas da série J (Adaptado de BURNS e SIESS, 1966)

Onde f_y^∞ é o limite assintótico da tensão após o escoamento, e k é um parâmetro a ser ajustado conforme se queira que a tensão se aproxime da assíntota horizontal com menor ou

maior valor de deformação. Para todos os casos deste trabalho adota-se $f_y^\infty = 500\text{N/mm}^2$ e $k = 2,5$. O valor de f_y é dado na Tabela 2, variando para cada caso.

4.2.1 Resultados numéricos em flexão

Com base em resultados experimentais, BURNS e SIESS (1966) sugerem que o comportamento da estrutura de concreto armado com alto valor de área de seção transversal de aço (seção superarmada) seja conforme a figura 24. Na primeira parte o material é elástico linear, mas para valores muito pequenos de carga. A seguir inicia-se o processo de fissuração, o que condiz com o senso comum de que o concreto armado sob carregamento em geral trabalha com algum nível de fissuração. Há um ramo ascendente até atingir a tensão de escoamento do aço. Existe depois um ramo aproximadamente horizontal, que corresponde ao esmagamento do concreto. E, por fim, uma parte descendente, que representa a capacidade de carga última da viga.

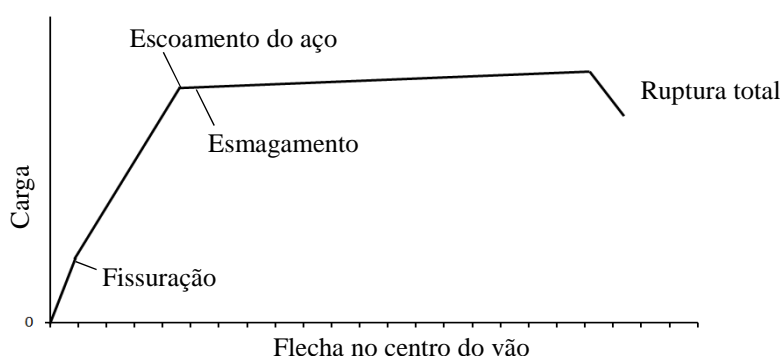


Figura 24: Comportamento de uma estrutura de concreto superarmado (baseado em BURNS e SIESS, 1966)

A figura 25 mostra os resultados carga (P) versus deflexão no centro da viga (δ) obtidos numericamente através dos métodos descritos neste trabalho e comparados com os resultados apresentados por CARPINTERI et al. (2010) (que adotaram uma lei elastoplástica perfeita para o comportamento do aço) e os obtidos experimentalmente por BURNS e SIESS (1966) para a viga J1.

Como pode ser visto, o modelo aqui proposto confere uma boa concordância com os dados experimentais. Devido ao uso de estribos neste caso, a equação 42 perde a validade, sendo G_C muito maior. Para este caso, um bom ajuste experimental foi obtido para $G_C = 306\text{ N/mm}$ ou $w_{cr}^c = 18\text{ mm}$.

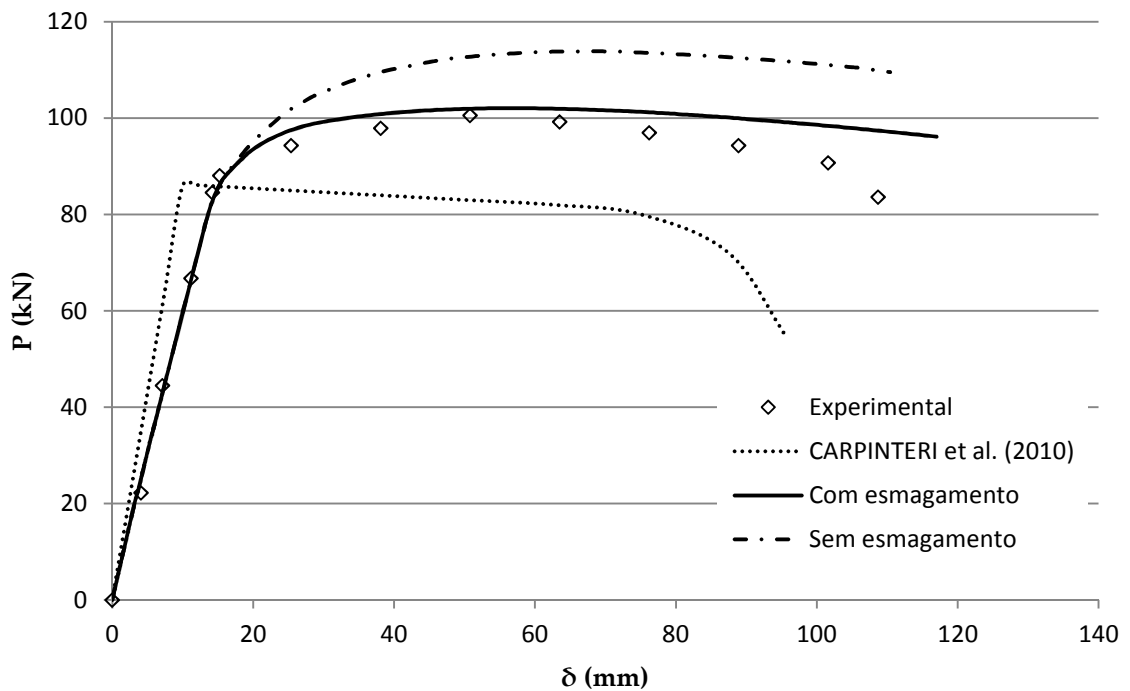


Figura 25: Resultados experimentais (BURNS e SIESS, 1966) e numéricos obtidos pelo modelo proposto neste trabalho (com e sem a consideração do esmagamento) e os de CARPINTERI et al. (2010) para a viga J1

O ramo ascendente retilíneo do gráfico da figura 24 representa o carregamento para o qual o concreto está fissurado e o aço encontra-se no regime elástico; é pouco significativa a parte em que o concreto está sem nenhum tipo de dano por fratura. No final deste ramo, o gráfico mostra um forte aumento da não linearidade, que representa o início do escoamento da armadura, mas sem dano em compressão. Logo em seguida aparecem as primeiras regiões de dano por esmagamento, representada pela parte mais horizontal da curva. O modelo numérico consegue capturar todas estas fases mostradas na figura 25, mas não o ramo retilíneo descendente, que representa o estágio último de ruptura por esmagamento e do escoamento final da armadura.

Finalmente, a figura 25 também mostra a importância da consideração do dano à compressão. Em comparação com o modelo que não concebe tal dano, este tem uma maior carga máxima atingida e a sua ruptura final se deve inteiramente ao escoamento da armadura.

4.2.1.1 Influência da altura da viga

São consideradas as vigas J1, J10 e J4, que possuem altura de 305, 405 e 508 mm, respectivamente, para a verificação da influência da altura das vigas para um mesmo vão livre. O valor da sobreposição crítica (w_{cr}^c) é de 18 mm para a viga J1, conforme mencionado no item anterior, e de 22 mm para as vigas J10 e J4. Os resultados numéricos comparados aos experimentais são mostrados na Figura 26.

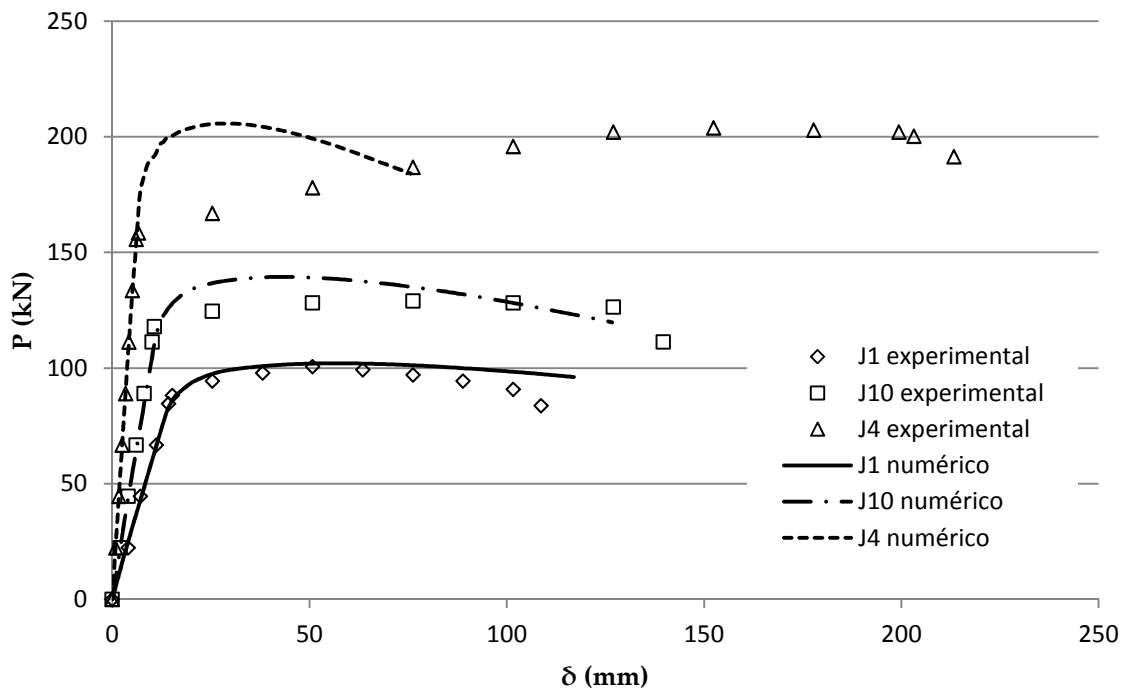


Figura 26: Comportamento de vigas (J1, J10 e J4) com diferentes alturas (dados experimentais de BURNS e SIESS, 1966)

A sequência na qual ocorrem os eventos (fissuração, escoamento da armadura, esmagamento e ruptura total) continua a mesma, independentemente da altura da viga.

Segundo BURNS e SIESS (1966), a carga para a qual ocorre o escoamento do aço aumenta com o incremento na altura da viga, enquanto que a deflexão é menor. Este é um efeito fragilizador das estruturas de concreto, pois a ruptura generalizada pode se dar antes do escoamento do aço, conforme mostrado por CARPINTERI et al. (2010). Já o valor de deflexão na qual ocorre o esmagamento permanece a mesma. Tais efeitos são aqui capturados.

Analisando os resultados numéricos consegue-se perceber quase todos os aspectos descritos por BURNS e SIESS (1966), menos o aumento na deflexão máxima atingida pela estrutura, o que pode se dever ao fato da consideração de uma única fissura.

Há uma convergência no comportamento da análise numérica da viga J10 em relação aos resultados experimentais, porém com um valor de carga máxima um pouco maior do que os dados obtidos em laboratório. Isto pode ser em decorrência novamente da consideração da abertura de uma única fissura, enquanto que em um modelo ensaiado em laboratório se verifica a abertura de várias fissuras, dissipando mais facilmente a energia. Já para a viga J4 não se consegue verificar um acompanhamento no comportamento da estrutura modelada numericamente em relação à ensaiada em laboratório, o que se supõe ser por causa do ganho em importância da abertura de mais fissuras. Outro fator a ser considerado, é que com o aumento da altura aumenta-se a área de concreto e diminui-se a taxa de armadura, o que pode significar que J4 não seja mais classificada como superarmada.

Observa-se um acréscimo no valor da carga máxima suportada em virtude do aumento da altura da viga, efeito capturado pelo modelo numérico.

A figura 27 mostra as tensões σ_{xx} no momento do início do esmagamento. O esquema também mostra um alívio de tensões na fibra superior na região de interpenetração das interfaces coesivas das três vigas ocasionado pelo amolecimento em compressão do concreto.

A tensão máxima em tração fica em torno de 3 MPa nos três casos analisados neste item. Contudo, nota-se nas fibras inferiores dos três casos que a tensão de tração ultrapassa este patamar de tensão no concreto, indicando a ocorrência de mais fissuras (microfissuração) além da trinca central. Já para a tensão de compressão, a tensão para a qual se inicia o esmagamento do concreto não é ultrapassada em nenhum dos casos. Há uma clara concentração das tensões de compressão na parte central das fibras superiores nas três vigas. Portanto, o modelo com uma única interface parece representar bem o esmagamento, mas não a fissuração. A representação deste último efeito parece requerer o uso de múltiplas interfaces coesivas na zona de tração. Além disto, conforme discutido em CARPINTERI et al. (2010), a declividade da curva $P \times \delta$, logo no início do escoamento da armadura, depende fortemente da microfissuração. A discrepância encontrada nesta região no caso J4 então pode estar relacionada ao modelo de uma única interface.

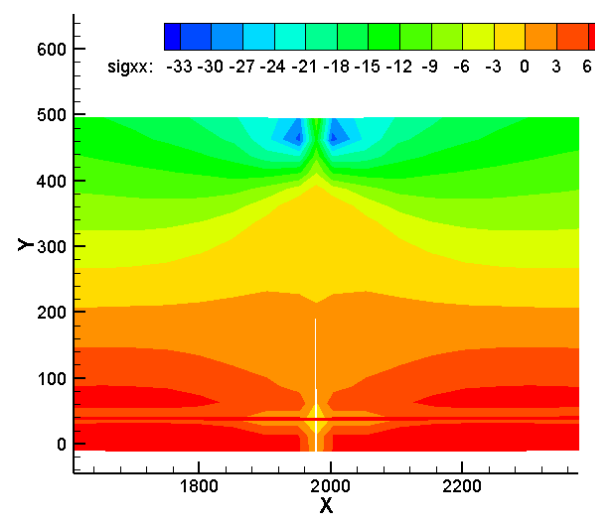
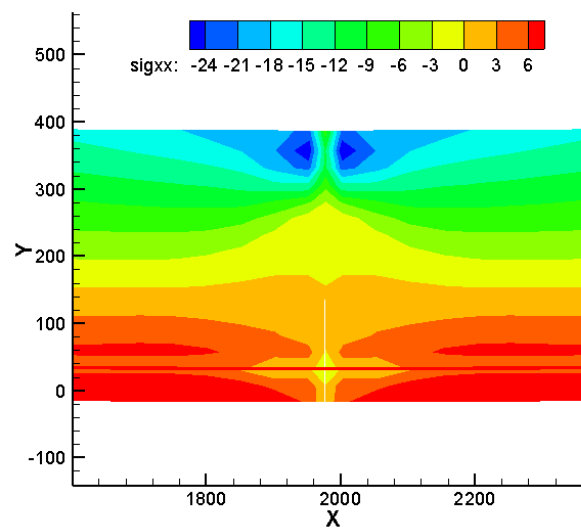
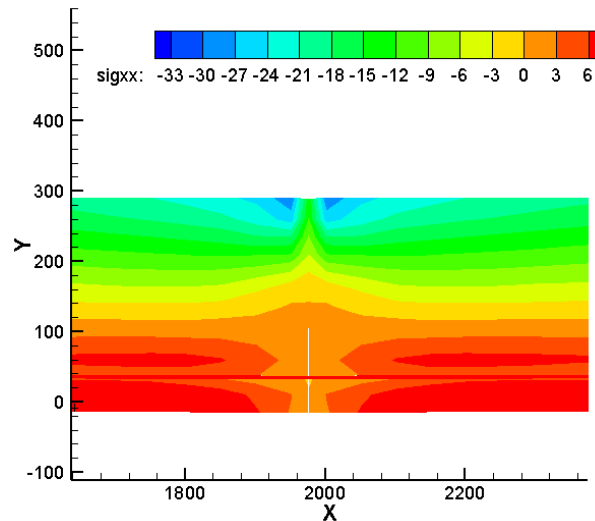


Figura 27: Distribuição de tensões σ_{xx} (em MPa) de acordo com a variação da altura para as vigas (a) J1, (b) J10 e (c) J4 no início do esmagamento

A figura 28 mostra o estado de tensões σ_{xx} para o carregamento último, onde ocorre a ruptura frágil da estrutura.

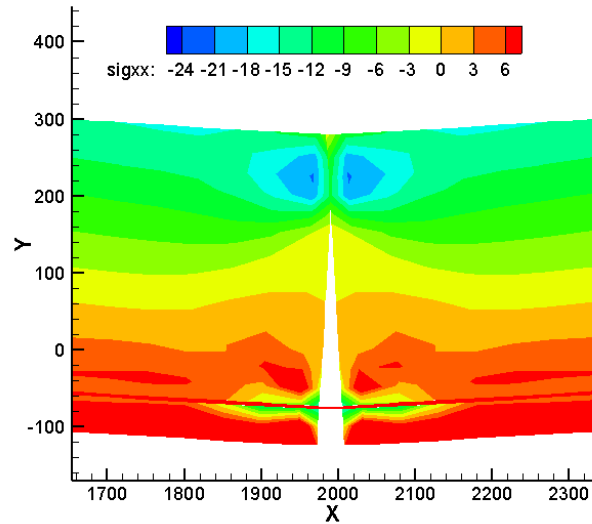


Figura 28: Estado de tensões σ_{xx} (em MPa) na ruptura da viga J10

4.2.1.2 Influência da armadura de compressão

Nos casos discutidos acima não é considerada a armadura de compressão. Neste item são modeladas numericamente as vigas J1 e J2. Para ambos os casos é empregado um valor de sobreposição crítica de 18 mm. A viga J2, conforme visto na tabela 2, possui armadura de compressão. Os resultados numéricos são mostrados na figura 29 e a distribuição de tensões σ_{xx} na figura 30.

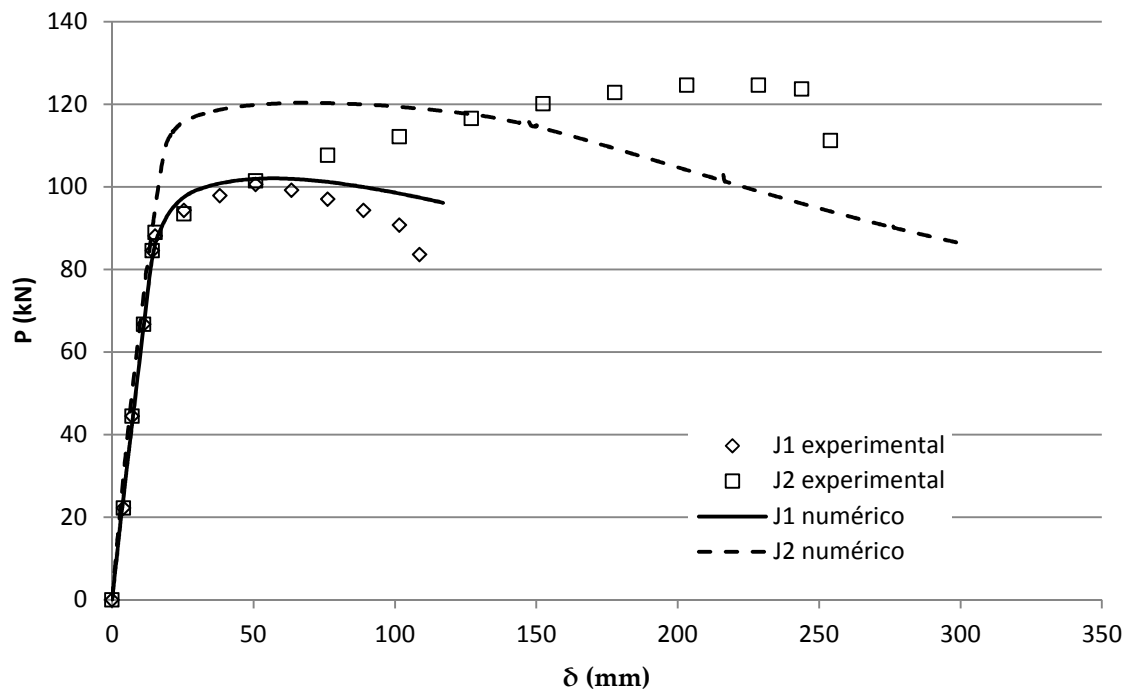


Figura 29: Gráfico carga versus deflexão para diferentes valores de armadura de compressão (dados experimentais de BURNS e SIESS, 1966)

De acordo com CARPINTERI et al. (2010), há um considerável aumento da deformação última com a incorporação da armadura de compressão, caso capturado neste trabalho, conforme se nota da figura 29, onde a deformação da viga J2 é três vezes maior que a da viga J1. Ainda segundo estes autores, a fissuração tem pouca influência no comportamento último das vigas. Conforme já comentado anteriormente, a fissuração tem influência no início do patamar da curva força versus deflexão, justamente onde o presente algoritmo apresenta mais uma vez aqui menor precisão. Isto mais uma vez parece indicar a necessidade de um melhor modelamento da fissuração na simulação numérica utilizada.

Quanto à distribuição de tensões σ_{xx} (figura 30), nota-se que há um menor nível na zona de compressão causada pela inserção da armadura nesta região. Como acontecia com a armadura de tração, a armadura de compressão absorve mais tensão por seu elevado módulo de elasticidade em relação ao concreto. Há também uma maior abertura de trinca no caso sem armadura de compressão, o que se explica pelo fato de a armadura negativa absorver boa parte da deformação gerada pelo carregamento externo.

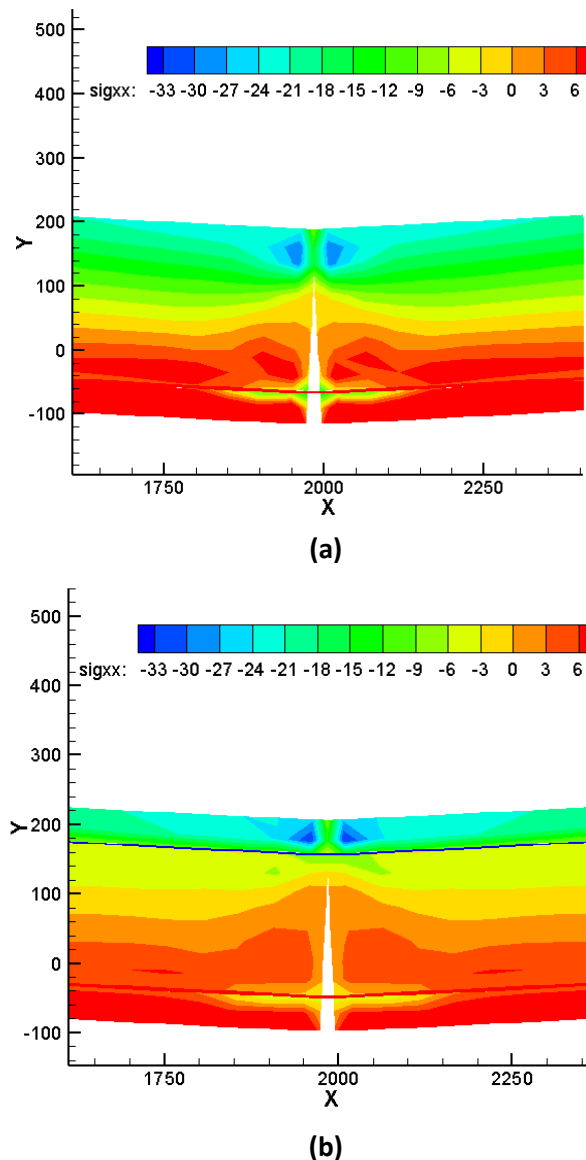


Figura 30: Distribuição de tensões σ_{xx} (em MPa) variando a armadura de compressão para as vigas (a) J1 e (b) J2

4.2.1.4 Influência da armadura de cisalhamento

A fim de estudar a importância da armadura transversal (estribos) em vigas de concreto armado são modeladas neste item as vigas J10 e J19. Estas possuem as mesmas propriedades materiais e geométricas, se diferenciando apenas no diâmetro dos estribos, 9,5 mm e 6,3 mm para J10 e J19 respectivamente, possuindo o mesmo espaçamento para os dois casos, 15 cm. A figura 31 mostra uma comparação de resultados numéricos e experimentais para estes casos. Os dados experimentais são de BURNS e SIESS (1966).

Para resistir aos esforços de cisalhamento, em vigas de concreto armado, concebe-se a colocação de armaduras transversais, os estribos. Estes são dimensionados de acordo com o

esforço cortante oriundo dos carregamentos externos e do peso próprio da estrutura. Em geral possuem formato retangular fechado e são colocados de maneira perpendicular às barras de flexão. Segundo CARPINTERI et al. (2010), o aumento da taxa de armadura transversal incorre em um aumento da sobreposição crítica (w_{cr}^c). Buscou-se neste item estabelecer-se uma proporcionalidade com os valores de sobreposição crítica sugeridos por CARPINTERI et al. (2010), sendo estes iguais a 22 mm e 13,75 mm para J10 e J19 respectivamente.

A partir dos resultados numéricos e experimentais pode-se concluir que o aumento na taxa de armadura transversal implica em um aumento na deflexão última, contudo, sem aumentar de modo significativo o valor da carga máxima suportada pela viga. Isto se deve ao fato de que a presença de estribos influencia na ductilidade, uma vez que aumenta o confinamento do concreto, com um conseqüente aumento na resistência à compressão e deformação última (CARPINTERI et al., 2010). Este efeito é capturado no presente modelo através do aumento do valor da sobreposição crítica.

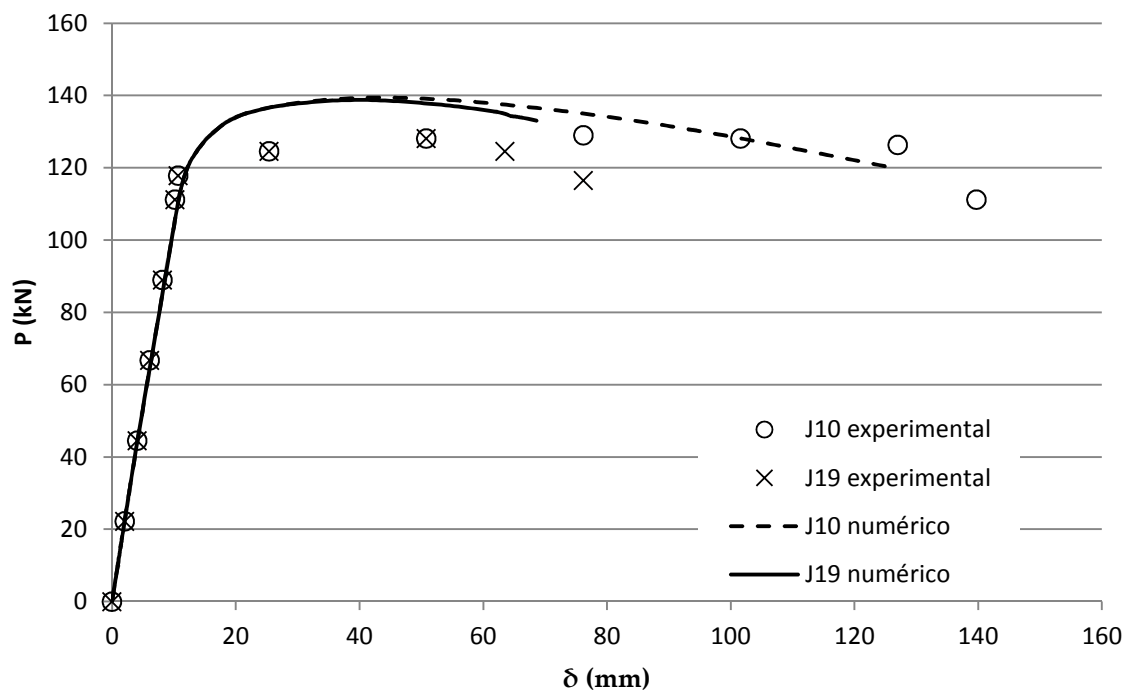


Figura 31: Gráfico carga versus deflexão para a condição de variação da taxa de estribos (dados experimentais de BURNS e SIESS, 1966)

Uma boa convergência com os resultados experimentais é alcançada para ambas as vigas, tanto para a carga máxima quanto para a deflexão de ruptura.

4.2.1.4 Influência da sobreposição crítica

Um dos principais fatores que foram incluídos por CARPINTERI et al. (2007) na análise de elementos de concreto submetidos à compressão foi a noção de energia específica de esmagamento (G_C). Conforme mencionado anteriormente, esta propriedade não entra diretamente no modelo numérico, mas através da resistência máxima à compressão do concreto ($\sigma_{max}^{c,0}$) e da sobreposição crítica (w_{cr}^c). O valor de $\sigma_{max}^{c,0}$ não varia por causa da inclusão da armadura de compressão nem da armadura de cisalhamento, enquanto que w_{cr}^c é afetado por estas condições. Para se realizar um exame da influência da sobreposição crítica propõe-se neste item tomar a viga J1 e variar-se apenas o valor de w_{cr}^c (demais dados seguem a Tabela 2). A figura 32 mostra os resultados numéricos em termos de carga e deslocamento obtidos, mantendo-se a comparação com os dados colhidos em laboratório por BURNS e SIESS (1966).

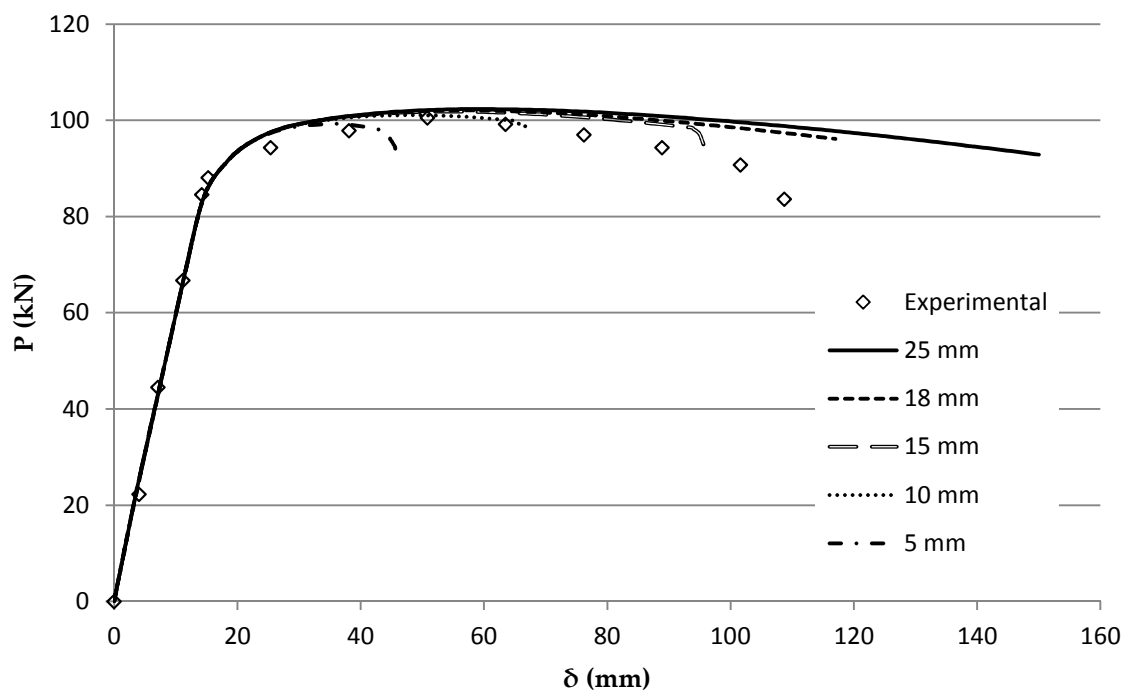


Figura 32: Comportamento carga versus deslocamento da viga J1 para diferentes valores de sobreposição crítica (dados experimentais de BURNS e SIESS, 1966)

O comportamento após o início do processo de esmagamento é bastante similar, variando apenas o valor da deflexão última, que aumenta com o acréscimo da sobreposição crítica. Isto mostra que um aumento de w_{cr}^c implica em uma maior ductilidade da estrutura, conforme já mencionado.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho é utilizada a abordagem para a consideração do processo de dano em compressão do concreto, em conjunto com o modelo já existente de trincas coesivas, que prevê a fissuração. A metodologia empregada para a consideração do dano em compressão é o Modelo de Trincas Sobrepostas (*Overlapping Crack Model*), criado por CARPINTERI et al. (2009), enquanto que o amolecimento em tração é o já bem conhecido Modelo de Trincas Coesivas. Duas novas superfícies de ruptura são criadas neste trabalho em vista à consideração do esmagamento e dano em compressão. São analisados dois tipos de estruturas através do método dos elementos finitos: corpos de prova de concreto simples sujeitos a compressão uniaxial e vigas de concreto armado biapoiadas com carga concentrada no centro do vão. As estruturas são modeladas em duas dimensões e adotadas malhas de quadriláteros bilineares. São colocadas apenas na parte central dos dois tipos de estrutura, entre elementos volumétricos de concreto, elementos de interface coesiva. Não é analisada aqui a influência da microestrutura no comportamento dos modelos numéricos. O trabalho apresentado teve apenas um caráter exploratório, de se investigar a viabilidade de o modelo de trincas sobrepostas conseguir capturar efetivamente o dano em compressão.

5.1 CONCLUSÕES

Fazendo uma análise dos resultados numéricos obtidos para compressão uniaxial, pode-se inferir que:

- A abordagem consegue capturar o comportamento tensão versus deslocamento dos ensaios de laboratório, para várias esbeltezas de corpo de prova, capturando assim o efeito de escala;
- O modelo numérico segue o comportamento descrito por CARPINTERI et al. (2009) (item 4.1, Figura 17), sendo o valor do encurtamento final igual ao da sobreposição de ruptura das interfaces coesivas e o comprimento final dos elementos volumétricos igual ao inicial (estrutura sem carregamento);
- Não é possível, no algoritmo empregado neste trabalho, prever os ramos de instabilidade no ensaio de deslocamento controlado (*snap-back*), condição que depende da combinação entre a esbeltez, a resistência característica à compressão e do tamanho de escala do corpo de prova.

Quanto aos resultados das vigas em flexão com carga central:

- O modelo se mostra capaz de prever parte do comportamento tensão versus deformação para o ensaio a três pontos (dois apoios e uma carga concentrada na metade do vão), principalmente para vigas de menor altura;
- A abordagem também consegue capturar o dano em compressão do concreto, isto é, o amolecimento por esmagamento, e a sua influência no comportamento global da estrutura;
- A variação dos parâmetros de esmagamento (sobreposição crítica, resistência à compressão e também quantidade de estribos, uma vez que aumenta o confinamento do concreto) tem um papel preponderante no comportamento global da estrutura juntamente com a armadura, tanto de compressão quanto de tração;
- Neste trabalho, a consideração de uma única linha central com interfaces coesivas permite que apenas uma fissura se abra, deixando a estrutura um tanto mais rígida, enquanto que se verificam em estruturas reais (vigas ensaiadas em laboratório) muitas fissuras na parte inferior próximo ao centro da viga; esta consideração aumentou os valores de carga quando a armadura se encontra em regime de escoamento no modelo numérico principalmente no início do escoamento;
- A consideração de uma única interface mostrou-se adequada para a previsão do esmagamento.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir da abordagem apresentada nesta dissertação surgem possibilidades de investigações a serem realizadas para uma melhor compreensão da fissuração e esmagamento em estruturas de concreto armado e concreto simples sujeito a compressão uniaxial.

Neste contexto, ficam como sugestões para trabalhos futuros:

- Consideração de uma maior variedade de casos, como em CARPINTERI et al. (2010);
- Inclusão de um maior número de interfaces coesivas, tanto em tração quanto em compressão, e investigação de seu efeito;

- Inclusão e estudo do efeito da aleatoriedade de malha;
- Maior investigação da interação entre as fissuras e as barras de armadura;
- Consideração do efeito dinâmico de carga e descarga.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7480: Barras e fios de aço de aço para armaduras de concreto**. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- BASCHE, H.D.; RHEE, I.; WILLAM, K.J. e SHING, P.B. Analysis of shear capacity of lightweight concrete beams. **Engineering Fracture Mechanics**, v.74, p.179-193, 2007.
- BASCOUL, A.; BENAIJA, E. H.; BERTHAUD, Y.; TORRENTI, J. M.; ZIZI, Z. Analysis of localization in concrete through stereophotogrammetry. **Cement and concrete research**, v. 23, p. 1340-1350, 1993.
- BARRENBLOT, G.I. The mathematical theory of equilibrium of crack in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v.7, p.55-129, 1962.
- BAŽANT, Z.P.; OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures**, RILEM, v.16, p.155-177, 1983.
- BAŽANT, Z.P.; PFEIFFER, P.A. Shear fracture test of concrete. **Materials and Structures** RILEM, v. 110, n. 19, p. 111-121, 1986.
- BURNS, N.H., SIESS, C.P. Plastic hinging in reinforced concrete. **Journal of Structural Division**, ASCE, n. 92, p. 45-61, 1966.
- CARPINTERI, A. Interpretation of the Griffith instability as a bifurcation of the global equilibrium. In: Shah S.P. (ed.) **Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites**. Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, 1985.
- CARPINTERI, A. Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: two different explanations based on fracture mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v.25, p.407-429, 1989.
- CARPINTERI A., CORRADO M., PAGGI M. An integrated cohesive/overlapping crack model for the analysis of flexural cracking and crushing in RC beams. **International Journal of Fracture**, Springer Science e Business Media, v. 161, p. 161-173, 2010.
- CARPINTERI A., CORRADO M., PAGGI M., MANCINI G. Cohesive versus Overlapping Crack Model for a size effect analysis of RC elements in bending. In: CARPINTERI A.,
- CARPINTERI, A.; CORRADO, M.; MANCINI, G., PAGGI, M. The overlapping crack model for uniaxial and eccentric compression tests. **Magazine of Concrete Research**, v. 9, p. 745-757, 2009.

CARPINTERI, A.; FERRO G.; ELKATIEB, M. Scale effects and transitional failure phenomena of reinforced concrete beams in flexure. *European Structural Integrity Society*, v. 24, p. 1–30, 1999.

CELA, J.J.L. Material Identification Procedure for elastoplastic Drucker-Prager Model. *ASCE Journal Engineering Mechanics*, n. 128, p. 586-591, 2002.

ČERVENKA J. **Discrete crack modeling in concrete structures**. PhD Thesis, University of Colorado, 1994.

CHEN, W. F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos, 1982.

CHEN, B.; LIU, J. Effect of Aggregate on the Fracture Behavior of High Strength Concrete. *Construction and Building Materials*, v18, p.585-590, 2004.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Bulletin d'Information, Lausanne, n. 213/214, mar. 1993.

DUGDALE, D.S. Strain Softening of Concrete under Multiaxial Compression. *Journal of Mechanics and Physics of Soils*, v. 8, p. 100-104, 1960.

ELICES, M.; ROCCO, C.G. Effect of Aggregate size on the Fracture and Mechanical Properties of a Simple Concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v75, p.3839-3851, 2008.

GÁLVEZ, J.C.; ELICES, M.; GUINEA, G.V.; PLANAS, J. Mixed mode fracture of concrete under proportional and non-proportional loading. *International Journal Fracture*, v. 94, p. 267-284, 1998.

GÁLVEZ, J.C.; CENDÓN, D.A.; PLANAS, J. Influence of shear parameters on mixed-mode fracture of concrete. *International Journal Fracture*, v.118, p. 163-189, 2002.

GAMBAROVA P., FERRO G., PLIZZARI G. (Eds.) **Fracture mechanics of concrete structures**, v. 2, p. 655–663. Taylor e Francis, Londres, Reino Unido, 2007.

GARCÍA, V. O.; GETTU, R.; CAROL, I. Numerical analysis of mixed mode fracture in concrete using interface elements. **European Congress on Computational methods in applied sciences and Engineering**, Barcelona, Spain, 2000.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, v. 6, p. 773-782, 1976.

JANSEN DC, SHAH SP (1997) Effect of length on compressive strain softening of concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 123, 1997: 25–35.

LANDIS, E.N.; BOLANDER, J.E. Explicit Representation of Physical Processes in Concrete Fracture. **Journal of Physics D: Applied Physics**, 42, 214002, 17 pages, 2009.

LENS, L.N. **Modelos para Análise de Fratura do Concreto Simples Empregando Interfaces Coesivas**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2009.

LENS, L.N.; BITTENCOURT, E.; d'ÁVILA, V.M.R. Constitutive models for cohesive zones in mixed mode fracture of plain concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 76, p. 2281-2297, 2009.

LI, Z.; KULKARNI, S. M.; SHAH, S. P. New test method for obtaining softening response of unnotched concrete specimen under uniaxial tension. **Experimental mechanics**, v. 33, n.º. 3, p. 181-188, 1993.

MAJI, A. K.; SHAH, S. P. Application of acoustic emission and laser holography to study microfracture in concrete, em **Non-destructive testing**, ACI SP-112, p. 83-109, editado por LEW, H. S., American Concrete Institute, Detroit, Estados Unidos, 1988.

METHA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. **Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais**. Editora Pini, São Paulo, 1994.

NAUS, D.J.; LOTT, J.L. Fracture Toughness of Portland Cement Concrete. **T. & A.M. Report n.º 648**, Univ. of Illinois, 1964.

NEEDLEMAN, A. Continuum Model for Void Nucleation by inclusion debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v.54, p.525-531, 1987.

NGO, D.; SCORDELIS, A.C. Finite Elements Analysis of Reinforced Concrete Beams. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v.64,n.3,p.152-163,apr. 1967.

PETERSSON, P.E. Fracture energy of concrete: Practical performance and experimental results. **Cement and Concrete Research**, v.10, p.91-101, 1980.

ROSA, C. M. **Um Modelo Macro – Mesoscópico para a Simulação de Fratura em Concreto Simples**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2011.

ROTS, J.G. **Computational modeling of concrete fracture**. PhD Thesis, Delft University, 1988.

SANTOS, A.C.; SOUSA, J.L.A.O.; BITTENCOURT, T.N. Determinação experimental da Tenacidade ao Fraturamento do Concreto com Corpos de prova do Tipo “Short-Rod”. **Boletim Técnico Bt Pef 9807**, São Paulo, v.1, p. 1-20, 1998.

SHAH, S.P., SWARTZ, S.E., OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rocks and Others Quasi-Brittle Materials**. Wiley, New York, 1995.

STRANGE, P.C.; BRYANT, A.H. Experimental tests on concrete fracture. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v.105, p. 337-342, 1979.

SUZUKI M., AKIYAMA M., MATSUZAKI H., DANG T.H. Concentric loading test of RC columns with normal- and highstrength materials and averaged stress–strain model for confined concrete considering compressive fracture energy. In: **Proceedings of the 2nd Fédération Internationale du Béton Congress**, Nápoles, Itália, CD-ROM ID 3–13, 2006.

TIJSSENS, M.G.A.; SLUYS, B.L.J.; Van Der GIESSEN, E. **Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surface**. *European Journal of Mechanics A/Solids*, v. 19, p.761-779, 2000.

TORRENTI, J. M.; DESRUES, J.; BENAIJA, E. H.; BOULAY, C. Stereophotogrammetry and localization in concrete under compression. **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, v. 117, n. 7, p. 1455-1465, 1991.

VAN MIER, J.G.M. Multiaxial strain-softening of concrete, Part I: Fracture. **Material and structures**, v. 19, n. 111, p. 179-190, 1986.

VAN MIER, J.G.M. **Strain-Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions**. PhD Thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Holanda, 1984.

VAN MIER, J.G.M. **Fracture Process of Concrete: Assessment of Material Parameters for Fracture Models**. *New Directions in Civil Engineering*. USA, 1997.

VAN MIER, J.G.M. **Framework for a generalized four-stage fracture model of cement-based materials**. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, p. 5072-5086, 2008.

VAN VLIET, M. R. A.; VAN MIER, J. G. M. Experimental investigation of concrete fracture under uniaxial compression. **Mechanics of Cohesive-frictional Material**, v.1, p. 115-127, 1996.

XU, X.P. Determination of parameters in the bilinear, Reinhardt's non-linear and exponentially non-linear softening curves and their physical meanings. **Werkstoffe und Werkstoffprüfung im Bauwesen**, Hamburg, Libri BOD, p. 410-424, 1999.