Teorema de Birkhoff e Aplicações

da SILVA, Marcelo Santos[1]; BRANCO, Flávia Malta[2]
E-mail: marcelo.math@yahoo.com.br; fmbranco@mat.ufrgs.br

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo neste trabalho foi estudar um dos principais resultados da teoria ergódica, o teorema de Birkhoff, e algumas de suas consequências. Este teorema é uma versão mais forte do teorema da recorrência de Poincaré. Enquanto esse teorema último afirma, sobre determinadas condições, que para quase todo ponto x de um conjunto mensurável A a órbita de x "retorna" uma infinidade de vezes a este conjunto, o teorema de Birkhoff nos dá uma resposta mais precisa dizendo qual é a frequência com que este ponto retorna ao conjunto A.

DESENVOLVIMENTO

Teorema Ergódico de Birkhoff

Seja T: (X, $\mathcal{X}$) → (X, $\mathcal{X}$) uma transformação mensurável e seja μ uma medida T-invariante finita em X. Dada uma função μ - integrável φ: X → R, o limite

$$\varphi_T(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(T^k(x)\right)\right]$$

existe para quase todo ponto e temos

$$\int \varphi_T d\mu = \int \varphi d\mu$$

Definição

Dizemos que T: (X, $\mathcal{X}$, μ) → (X, $\mathcal{X}$, μ), uma transformação mensurável num espaço de probabilidade, é **ergódica** se, para qualquer função μ - integrável φ: X → R, para quase todo ponto de X, vale que as médias temporais são iguais as médias espaciais, ou seja, se para quase todo x $\in$ $\mathcal{X}$ tem-se:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(T^k(x)\right)\right] = \int \varphi d\mu$$

Como equivalências:

- Para todo conjunto invariante A $\in$ $\mathcal{X}$ ($T^{-1}(A)$ = A) tem-se que μ(A) = 0 ou μ(A) = 1.
- Se **f** : X→R é tal que **f** $\circ$ T = **f** para quase todo ponto, então **f** é constante fora um conjunto de medida nula.

Exemplos de Transformações Ergódicas:

- Seja T: [0,1] →[0,1] dada por T(x)=10x-[10x], Observe que se x = $0,b_0b_1\ldots$ $\in$ [0,1], então T(x) = $0,b_1b_2\ldots$ $\in$ [0,1]. A verificação da ergodicidade de T é uma consequência do teorema da derivação de Lebesgue.

- Seja R_α: [0,1] →[0,1] a aplicação rotação, dada por $R_\alpha(x)$ = x + α (mod 1), onde α é irracional. Verifiquemos que R_α é ergódica. Seja L_2 o espaço das funções complexas mensuráveis de quadrado integrável, φ: [0,1] → C. A família de funções $\varphi_k(x) = x^k$, com k inteiro, constitui uma base de L_2, ou seja, toda φ : [0,1] → C em L_2 se escreve de modo único como:

$$\varphi(z) = \sum_{k\epsilon Z} c_k z^k.$$

Pelas equivalências basta mostrar que toda função integrável φ invariante é constante fora de um conjunto de medida nula. Assim, se φ é invariante temos $\varphi \circ R_\alpha = \varphi$, logo expressando na base $\{\varphi_k\}$ resulta:

$$\sum_{k\epsilon Z} c_k e^{ki\alpha} z^k = \sum_{k\epsilon Z} c_k z^k$$

Pela unicidade dos coeficientes segue $c_k\left(e^{ki\alpha}-1\right)=0$. Por α ser irracional teremos que c_k = 0 para todo k não nulo, ou seja, $\varphi(x) = c_0$. Portanto R_α é ergódica.

Aplicações

Aplicação 1: Dizemos que um número real x é normal, ou balanceado, se a frequência de cada algarismo de sua expansão decimal é equidistribuida, ou seja, tem frequência um décimo.

Afirmação: Fora um conjunto de medida nula, todos os números reais são normais.

Prova:

Sejam T: [0,1] →[0,1], dada por T(x)=10x-[10x], e E_j = [j/10, (j+1)/10], para j = 0,...,9. Agora notemos que para x=$0,b_0b_1\ldots$ em [0,1] tem-se que b_n é j ⇔ $T^n(x) \in E_j$. Assim utilizando o fato que T é ergódica, i. e., podemos aplicar o teorema de Birkhoff a T, resulta que existe $H_j \subseteq$ [0,1] de medida total tal que para todo x em H_j tem-se:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{E_j}\left(T^k(x)\right)\right] = \mu(E_j) = \frac{1}{10}$$

Como podemos ver, teremos que $\mu(H_0 \cap H_1 \cap \ldots \cap H_9)=1$.

Aplicação 2: Seja $\alpha_n = 2^n$, para todo n natural. Agora definimos β_n como sendo o primeiro algarismo do número α_n. Seja k um algarismo entre 1 e 9 fixo. Vamos calcular a frequência de k na sequência β_n .

Notemos que se k for o primeiro algarismo da n-ésima potência de 2, então podemos escrever:

$$2^n = ka_{t-1}a_{t-2}\ldots a_1 = k10^{t-1} + a_{t-1}10^{t-2} + \ldots + a_1 10^0$$

$$n.log(2) = (t-1).log(10) + \; log\left(k + \frac{a_{t-1}}{10} + \cdots + \frac{a_1}{10^t}\right)$$

Observe que o primeiro dígito de 2^n é k se, e somente se,

$$log(k) \le \{n.log(2)\} < log(k+1)$$

onde { } representa a parte fracionária.

Como α = log(2) é irracional segue que a rotação R_α é ergódica, logo:

$$\frac{\{n|0\le n\le N-1, 1º\; digito\; de\; 2^n é\; k\}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\chi_{[\log(k),\log(k+1)]}\left(R_\alpha^n(0)\right)$$

$$\rightarrow \mu([\log(k),\log(k+1)]) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \text{ quando } N \rightarrow +\infty.$$

Portanto as frequências de 1, 2,..., 9 são respectivamente log(2/1), log(3/2),..., log(10/9), ou seja, contrariando a nossa intuição o número um é o que possui a maior frequência.

CONSIDERAÕES FINAIS

Como podemos ver o teorema de Birkhoff pode ser aplicado em contextos pouco esperados como na teoria de números. Isso pode ser visto como, por exemplo, no recente teorema de Green-Tao na qual afirma que a sequência de números primos contém progressões aritméticas arbitrariamente longas, este resultado provado inicialmente utilizando técnicas de análise harmônica ganhou uma segunda demonstração bem mais curta e "simples" apenas utilizando teoria ergódica.

Palavras-chave: Teorema Ergódico, Teorema de Birkhoff e Teoria de Números.

REFERÊNCIAS

[1] BARREIRA, LUÍS & VALLS, CLAUDIA. **Sistemas Dinâmicos: Uma Introdução**, IST Press, 2012.
[2] BRIN & STUCK. **Introduction to Dynamical System**, Cambrigde, 2004.
[3] EINSIEDLER & WARD, **Ergodic Theory with a View Towards Number Theory**, Springer, 2011.