

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ELEMENTOS FINITOS QUADRILATERAIS HERMITIANOS DE ALTA
REGULARIDADE GERADOS PELA PARTIÇÃO DE UNIDADE APLICADOS NA
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE E ELASTODINÂMICA

por

Rudimar Mazzochi

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, fevereiro de 2014

ELEMENTOS FINITOS QUADRILATERAIS HERMITIANOS DE ALTA
REGULARIDADE GERADOS PELA PARTIÇÃO DE UNIDADE APLICADOS NA
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE E ELASTODINÂMICA

por

Rudimar Mazzochi
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,
da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rossi - PROMEC/UFRGS

Aprovado por:

Prof. Dr. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara - DEMEC/UFRGS

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca - PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia de Suarez - DEM/UCS

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 19 de fevereiro de 2014

*A meus pais, Walmor (in memoriam) e Cecilia,
e a meu irmão Gilmar*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido a coragem e a persistência de seguir em frente.

A minha família, que sempre esteve presente e me apoiou ao longo de toda esta jornada.

Ao professor Rodrigo Rossi, pelo excelente convívio e pela orientação prestada ao longo deste trabalho.

Ao professor Oscar Suarez, da Universidade de Caxias do Sul, pelo tempo disponibilizado para a troca de ideias.

Ao PROMEC/UFRGS, pela oportunidade e pelo ensino de qualidade.

A empresa JOST Brasil, pela compreensão da minha ausência em certos dias ao longo desta empreitada.

RESUMO

Neste trabalho foram desenvolvidas as funções de interpolação com regularidades C^1 e C^2 , utilizando o Método da Partição de Unidade, referentes ao elemento quadrilateral de quatro nós. Estes elementos quadrilaterais Hermitianos de regularidade C^1 e C^2 foram implementados em uma plataforma própria de elementos finitos, considerando uma estratégia do tipo sub-paramétrica. De forma comparativa com os elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 e diferentes ordens polinomiais, os elementos de regularidade C^1 e C^2 foram aplicados na solução de: problemas clássicos de elasticidade plana infinitesimal isotrópica; aproximação das frequências naturais de vibração livre de barras e viga; propagação de onda elástica em barra devido à aplicação de força impulsiva. Os resultados obtidos mostraram que foi possível se obter um maior percentual de frequências naturais aproximadas do espectro discreto, dado um certo nível de erro máximo, com os elementos de regularidade C^1 e C^2 em comparação com os elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 de quatro, oito, dezesseis e vinte e cinco nós. Quanto ao problema de propagação de onda elástica devido à aplicação de força impulsiva, as soluções obtidas com os elementos de regularidade C^1 e C^2 também apresentaram-se satisfatórias em relação à solução analítica e às soluções aproximadas obtidas com os elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 de quatro e oito nós. Por outro lado, nas simulações dos problemas de elasticidade plana infinitesimal isotrópica, os elementos de regularidade C^1 e C^2 não apresentaram um comportamento satisfatório. Os erros relativos em normas L_2 e de energia da solução aproximada foram maiores do que aqueles obtidos com o elemento Lagrangeano de regularidade C^0 de oito nós, por exemplo, e as taxas de convergência em norma de energia obtidas com tais elementos foram inferiores às previstas pelo estimador de erro *a priori*.

Palavras-chave: MPU; elementos finitos quadrilaterais Hermitianos de alta regularidade; frequências naturais de vibração livre; propagação de onda elástica em meio sólido.

ABSTRACT

In this work the shape functions with regularity C^1 e C^2 were developed, by means of the Partition of Unity Method, concerning to the four-node quadrilateral element. These Hermitian quadrilateral elements with regularity C^1 e C^2 were implemented in an own platform of finite elements, considering the subparametric strategy. Comparatively with the C^0 regularity Lagrangian elements of different polynomial order, C^1 and C^2 regularity elements were applied in simulations of: classical isotropic infinitesimal plane elasticity problems; approximation of natural frequencies of free vibration for bars and beam; elastic wave propagation in bar caused by forced vibration with impulsive loading applied. The results obtained showed that was possible to get a major number of natural frequencies of free vibration for the discrete spectrum, given a certain level of error, for C^1 and C^2 regularity elements in comparison with C^0 regularity Lagrangian elements of four, eight, sixteen and twenty-five nodes. Regarding to the elastic wave propagation problem in bar due to the application of impulsive loading, the solution obtained with C^1 and C^2 regularity elements also presented satisfactory results with relation to the analytical solution and those obtained with C^0 regularity Lagrangian elements with four and eight nodes. On the other hand, for isotropic infinitesimal plane elasticity problems, C^1 and C^2 regularity elements did not present satisfactory results. Relative errors in L_2 and energy norms of approximate solution were greater than those computed for the C^0 Lagrangian element of eight nodes, for example, and convergence rates obtained with the C^1 and C^2 regularity elements were lower than those predicted by the a priori error estimator.

Keywords: PUM; high regularity quadrilateral Hermitian finite elements; natural frequencies of free vibration; elastic wave propagation in solid media.

ÍNDICE

1	Caracterização do trabalho	1
1.1	Introdução	1
1.2	Objetivos	3
1.2.1	Objetivo geral	3
1.2.2	Objetivos específicos	4
1.3	Justificativa	4
1.4	Notações adotadas e organização do trabalho	5
2	Referencial teórico	7
2.1	Formulação forte e formulação variacional	7
2.1.1	Definições gerais	7
2.1.2	Formulação forte e formulação variacional do problema de elastoestática linear	9
2.1.3	Formulação forte e formulação variacional do problema de elastodinâmica	11
2.2	Aproximação pelo método dos elementos finitos	12
2.2.1	Generalidades sobre o método de Galerkin	12
2.2.2	Construção da solução aproximada	14
2.2.3	Aproximação do problema de elastoestática linear	17
2.2.4	Aproximação do problema de elastodinâmica	20
2.2.5	Estimativa de erro e taxa de convergência da solução do MEF	22
2.3	Método dos elementos finitos da partição de unidade (MEFPU)	24
2.4	Dinâmica e vibrações mecânicas pelo método dos elementos finitos	28
2.4.1	Vibração livre não amortecida	28
2.4.2	Vibração forçada não amortecida	29
2.4.2.1	Solução pelo método da superposição modal	29
2.4.2.2	Solução pelo método de Newmark	31
2.4.2.3	Aspectos gerais sobre a aplicação de forças impulsivas	34
2.5	Problema de autovalores	36
2.5.1	Problema padrão de autovalores	36
2.5.2	Problema generalizado de autovalores	36
2.5.3	Transformação do problema generalizado de autovalores no problema padrão	38
2.5.4	Aspectos gerais sobre a solução numérica do problema de autovalores	39
2.5.5	Propriedades da solução aproximada do problema de autovalores pelo MEF	41

3	Desenvolvimento dos elementos finitos quadrilaterais de quatro nós C^1 e C^2 pelo MEFPU	44
3.1	Construção das funções de partição de unidade C^1 e C^2	44
3.2	Construção das funções de enriquecimento C^1 e C^2	46
3.3	Construção das funções de interpolação bidimensionais C^1 e C^2 a partir das funções de partição de unidade e de enriquecimento	47
3.3.1	Funções de interpolação bidimensionais com regularidade C^1	48
3.3.2	Funções de interpolação bidimensionais com regularidade C^2	49
3.4	Aspectos sobre a implementação dos elementos quadrilaterais com regularidade C^1 e C^2	51
3.4.1	Caracterização geral	51
3.4.2	Aspectos sobre os graus de liberdade do elemento	52
3.4.3	Condições sobre a malha e os elementos	54
4	Aplicação dos elementos quadrilaterais com regularidade C^1 e C^2 na solução de alguns problemas de Mecânica bidimensionais	55
4.1	Medidas de erro da solução aproximada	55
4.2	Comportamento dos elementos no <i>patch test</i>	57
4.2.1	<i>Patch test</i> simples	61
4.2.2	<i>Patch test</i> generalizado	63
4.3	Solução de alguns problemas clássicos de elasticidade plana	66
4.3.1	Viga em balanço	66
4.3.2	Placa infinita com furo central	70
4.3.3	Domínio <i>L-shaped</i>	75
4.4	Análise dos resultados	78
5	Aproximação das frequências naturais de vibração livre para certos problemas de Mecânica	81
5.1	Barra engastada-livre	81
5.1.1	Solução analítica	81
5.1.2	Simulação numérica e resultados	84
5.2	Barra engastada-engastada	87
5.2.1	Solução analítica	87
5.2.2	Simulação numérica e resultados	88
5.3	Viga biapoiada	91
5.3.1	Solução analítica	91
5.3.2	Simulação numérica e resultados	95
5.4	Análise dos resultados	99

6 Solução aproximada do problema de vibração forçada de uma barra submetida a força impulsiva	104
6.1 Definição do problema e solução analítica	104
6.2 Simulação numérica e resultados	105
6.3 Análise dos resultados	109
CONCLUSÕES	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
APÊNDICE A - Propriedades gerais de espaços de funções	118
APÊNDICE B - Construção das funções de partição de unidade com regularidade C^1 e C^2	123
APÊNDICE C - Construção das funções de enriquecimento com regularidade C^1 e C^2	125
APÊNDICE D - Funções de interpolação para os elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2	128
APÊNDICE E - Campos de tensão e de deslocamento referentes ao problema do <i>patch test generalizado</i>	131
APÊNDICE F - Resultados obtidos para o problema da viga em balanço com os elementos quadrilaterais C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2	135
APÊNDICE G - Resultados obtidos para o problema da placa infinita com furo central com os elementos quadrilaterais C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2	136
APÊNDICE H - Resultados obtidos para o problema do domínio <i>L-shaped</i> com os elementos quadrilaterais C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2	137

LISTA DE FIGURAS

1	Características geométricas de um problema genérico de Mecânica	7
2	Características gerais de um PVC de Mecânica	10
3	Malha típica de elementos finitos, destacando seus aspectos gerais	15
4	Elemento quadrilateral de quatro nós no domínio paramétrico	16
5	Funções de partição de unidade construídas pelo produto de dois polinômios distintos	28
6	(a) Representação esquemática de ondas elásticas da solução geral da equa- ção da onda para o caso unidimensional e (b) Propagação da onda elástica para diferentes instantes de tempo	35
7	Carregamento impulsivo tipo (a) Heaviside e (b) triangular	35
8	Espectro normalizado de frequências naturais de vibração para o problema da barra engastada-engastada	42
9	Comportamento das funções de partição de unidade unidimensionais com regularidade (a) C^1 e (b) C^2	46
10	Funções de enriquecimento unidimensionais com regularidade (a) C^1 e (b) C^2	47
11	Funções de interpolação do elemento quadrilateral de quatro nós com re- gularidade C^1 , referentes aos nós (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 4	49
12	Funções de interpolação do elemento quadrilateral de quatro nós com re- gularidade C^2 , referentes aos nós (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 4	50
13	Estrutura das derivadas associadas com os graus de liberdade de aproxi- mação nodais para elementos de regularidade C^k	52
14	Esquema de construção de um <i>patch test</i> simples	58
15	Esquema de construção de um <i>patch test</i> generalizado	58
16	Problema desenvolvido para execução do <i>patch test</i>	59
17	Malhas construídas para o problema do <i>patch test</i>	60
18	Comportamento das normas (a) L_2 e (b) de energia e do erro relativo em norma (c) L_2 e (d) de energia da solução aproximada do <i>patch test</i> simples em função da distorção da malha	63
19	Comportamento das normas (a) L_2 e (b) de energia e do erro relativo em norma (c) L_2 e (d) de energia da solução numérica do <i>patch test</i> generali- zado em função da distorção da malha	66
20	Problema da viga em balanço	67
21	Malhas dos modelos numéricos construídos para o problema da viga em balanço	67
22	Comportamento das componentes de deslocamento (a) u_2 e (b) u_1 da so- lução analítica na extremidade engastada da viga em balanço	68

23	Estratégia de aplicação da condição de contorno essencial para o modelo numérico do problema da viga em balanço	68
24	Resultados numéricos do problema da viga em balanço	69
25	Comportamento da componente u_2 do campo de deslocamento na altura central da viga em balanço para os elementos C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2 para as malhas (a) 1 e (b) 4	70
26	Problema da placa infinita com furo central	71
27	Construção do modelo numérico do problema da placa infinita com furo	72
28	Malhas construídas para o problema da placa infinita com furo central	72
29	Resultados numéricos do problema da placa infinita com furo central	73
30	Comportamento da componente de tensão T_{11} sobre a linha $x_1 = 0$ para os elementos C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2 para as malhas (a) 1 e (b) 4	74
31	Problema do domínio elástico <i>L-shaped</i>	75
32	Modelo numérico construído para o problema do domínio <i>L-shaped</i>	76
33	Malhas construídas para o problema do domínio <i>L-shaped</i>	76
34	Resultados numéricos para o problema do domínio <i>L-shaped</i>	77
35	(a) Características gerais da barra e (b) Condição de equilíbrio de uma porção da barra	82
36	Função normal da barra engastada-livre para os modos de vibração 1, 2 e 3	83
37	(a) Esquema geral das condições de contorno e dimensões do modelo numérico da barra engastada-livre e (b) Malha construída para o modelo numérico	84
38	(a) Exemplo de modo de vibração característico de barra (b) Exemplo de modo de vibração não característico de barra	84
39	Espectro normalizado de frequências naturais do problema da barra engastada-livre construída com base na solução aproximada e na solução analítica	85
40	Malhas construídas para avaliação de convergência da solução numérica do problema de autovalores (frequências naturais)	86
41	Resultados de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da barra engastada-livre para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3	86
42	Função normal da barra engastada-engastada para os modos de vibração 1, 2 e 3	88
43	Esquema geral das condições de contorno e dimensões do modelo numérico da barra engastada-engastada	89
44	Espectro normalizado de frequências naturais do problema da barra engastada-engastada construída com base na solução aproximada e na solução analítica	90
45	Resultados de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da barra engastada-engastada para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3	90

46	(a) Diagrama de corpo livre para vibração natural de uma viga biapoçada	
	(b) Esforços atuantes sobre uma porção da viga	91
47	Função normal da viga biapoçada para os modos de vibração 1, 2 e 3	94
48	Influência da correção aplicada no cálculo das frequências naturais de vibração da viga biapoçada	95
49	(a) Dimensões do modelo numérico para simulação das frequências naturais de vibração livre da viga biapoçada (b) Malha construída para o modelo numérico da viga biapoçada (c) Condições de contorno essenciais aplicadas ao modelo numérico da viga biapoçada	96
50	(a) Exemplo de modo de vibração característico de viga (b) Exemplo de modo de vibração não característico de viga	96
51	Espectro normalizado de frequências naturais do problema da viga biapoçada construída com base na solução aproximada e na solução analítica	97
52	Malhas construídas para avaliação de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da viga biapoçada	98
53	Resultados de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da viga biapoçada para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3	98
54	Comportamento da parcela que define o limite superior do estimador de erro <i>a priori</i> de autovalores pelo MEF para diferentes ordens do espaço de Hilbert, m , e diferentes ordens polinomiais do espaço de aproximação, p	100
55	(a) Configuração esquemática do problema da barra engastada-livre submetida a carregamento impulsivo (b) Carregamento impulsivo tipo Heaviside	104
56	(a) Características geométricas do problema da barra engastada-livre submetida a carga impulsiva (b) Comportamento da carga impulsiva aplicada	105
57	Malha e condições de contorno essenciais do modelo numérico do problema da barra engastada-livre submetida ao carregamento impulsivo	106
58	Pontos de verificação dos deslocamentos na barra engastada-livre submetida a carregamento impulsivo	106
59	Solução aproximada do deslocamento no nó B_1 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2	107
60	Solução aproximada do deslocamento no nó B_2 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2	108
61	Detalhe da solução aproximada para o deslocamento no nó B_1 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2	110
62	Detalhe da solução aproximada para o deslocamento no nó B_2 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2	110

LISTA DE TABELAS

1	Grau dos polinômios das funções de partição de unidade unidimensionais para os casos C^1 e C^2	44
2	Condições de contorno para determinação dos coeficientes dos polinômios das funções de enriquecimento	46
3	Prescrição dos graus de liberdade nodais do elemento em relação à aplicação das condições de contorno essenciais do problema	53
4	Equivalência de índices entre o tensor constitutivo de quarta ordem e o tensor na forma compacta	57
5	Coordenadas nodais das malhas construídas para o problema do <i>patch test</i>	60
6	Deslocamentos prescritos para o <i>patch test</i> simples	61
7	Solução exata para os deslocamentos do nó interno da malha do <i>patch test</i> simples	61
8	Erro relativo sobre os deslocamentos do nó interno da malha do <i>patch test</i> simples	62
9	Normas L_2 e de energia da solução aproximada do <i>patch test</i> simples . . .	62
10	Número de condicionamento da matriz de rigidez global para as malhas do <i>patch test</i> simples	63
11	Erro relativo para os deslocamentos nodais das malhas do <i>patch test</i> generalizado	64
12	Normas L_2 e de energia da solução aproximada para o <i>patch test</i> generalizado	65
13	Número de condicionamento da matriz de rigidez global para as malhas do <i>patch test</i> generalizado	65
14	Características das malhas construídas para o problema da viga em balanço	68
15	Inclinações de cada trecho das curvas de convergência do problema da viga em balanço	70
16	Características das malhas construídas para o problema da placa infinita com furo central	73
17	Inclinações de cada trecho das curvas de convergência do problema da placa infinita com furo central	74
18	Características das malhas construídas para o problema do domínio <i>L-shaped</i>	77
19	Inclinações de cada trecho das curvas de convergência para o problema do domínio <i>L-shaped</i>	78
20	Comparativo das taxas de convergência em norma de energia preditas pelo estimador <i>a priori</i> e calculadas com base nos resultados numéricos para os problemas da viga em balanço, placa com furo e domínio <i>L-shaped</i>	79
21	Modos de vibração característicos de barra obtidos nas simulações do problema da barra engastada-livre para cada tipo de elemento empregado . . .	85

22	Inclinação de cada trecho das curvas de convergência para os modos de vibração natural 1, 2 e 3 da barra engastada-livre	87
23	Modos de vibração característicos de barra obtidos nas simulações do problema da barra engastada-engastada para cada tipo de elemento empregado	89
24	Inclinação de cada trecho das curvas de convergência para os modos de vibração natural 1, 2 e 3 da barra engastada-engastada	91
25	Modos de vibração característicos de viga obtidos nas simulações do problema da viga biapoiada para cada tipo de elemento empregado	97
26	Inclinação de cada trecho das curvas de convergência para os modos de vibração natural 1, 2 e 3 da viga biapoiada	99
27	Percentuais das frequências naturais aproximadas que satisfazem a condição de erro máximo considerado, referentes ao problema da barra engastada-livre	101
28	Percentuais das frequências naturais aproximadas que satisfazem a condição de erro máximo considerado, referentes ao problema da barra engastada-engastada	102
29	Percentuais das frequências naturais aproximadas que satisfazem a condição de erro máximo considerado, referentes ao problema da viga biapoiada	102
30	Comparativo das taxas de convergência em norma de energia preditas pelo estimador de erro e calculadas a partir dos resultados numéricos, referentes à primeira frequência natural dos problemas da barra engastada-livre, barra engastada-engastada e viga biapoiada	103
31	Erro acumulado da solução aproximada dos deslocamentos nos nós B_1 e B_2	109

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EPD	Estado plano de deformações
EPT	Estado plano de tensões
MEF	Método dos elementos finitos
MEFPU	Método dos elementos finitos da partição de unidade
MPU	Método da partição de unidade
NURBS	<i>Non-uniform rational b-splines</i>
PUFEM	<i>Partition of Unity Finite Element Method</i>
PVC	Problema de valor de contorno
PVCI	Problema de valor de contorno inicial
Quad4	Elemento finito quadrilateral de quatro nós com regularidade C^0
Quad8	Elemento finito quadrilateral de oito nós com regularidade C^0
Quad16	Elemento finito quadrilateral de dezesseis nós com regularidade C^0
Quad25	Elemento finito quadrilateral de vinte e cinco nós com regularidade C^0
X-FEM	<i>Extended Finite Element Method</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\bar{d}_{j,tt}$	Vetor de acelerações nodais em coordenadas generalizadas modais
\bar{d}_j	Vetor de deslocamentos nodais em coordenadas generalizadas modais
$\bar{d}_{o_i,t}$	Vetor de velocidades nodais inicial em coordenadas generalizadas modais
\bar{d}_{o_i}	Vetor de deslocamentos nodais inicial em coordenadas generalizadas modais
\bar{e}	Erro da solução aproximada em relação à solução analítica
\bar{h}	Meia-altura da seção transversal (para barras, vigas, etc)
\bar{m}	Massa
\bar{r}	Raio de giração da área da seção transversal (vigas)
\bar{t}_i	Condição de contorno natural prescrita no contorno de Neumann (vetor tração superficial prescrita)
\bar{u}_i	Condição de contorno essencial prescrita no contorno de Dirichlet (vetor deslocamento prescrito)
\hat{d}	Coordenada generalizada modal
$\hat{d}_{,tt}$	Aceleração generalizada modal
\hat{r}	Força generalizada modal
b_i	Vetor força de corpo
c	Velocidade de propagação de onda elástica em um meio sólido
$c(K_{ij})$	Número de condicionamento da matriz de rigidez global K_{ij}
$d_{i,tt}$	Vetor de acelerações nodais global
$d_{i,tt}^{\{0\}}$	Vetor de acelerações nodais referente ao passo de tempo $t = 0$
$d_{i,tt}^{\{t+\Delta t\}}$	Vetor de acelerações nodais referente ao passo de tempo $t + \Delta t$
$d_{i,t}$	Vetor de velocidades nodais global
d_i	Vetor de deslocamentos nodais global
$d_i^{\{0\}}$	Vetor de deslocamentos nodais referente ao passo de tempo $t = 0$
$d_i^{\{t+\Delta t\}}$	Vetor de deslocamentos nodais referente ao passo de tempo $t + \Delta t$
d_i^{el}	Vetor que contém os graus de liberdade nodais de um dado elemento
$d_{j,t}^{\{0\}}$	Vetor de velocidades nodais referente ao passo de tempo $t = 0$
e	Espessura (para barras, vigas, etc)
e_i	Vetor unitário na direção i
f_i	Vetor de forças do elemento
h	Parâmetro associado com a malha de elementos finitos (tamanho máximo do elemento, número de elementos, etc)
k	Regularidade do espaço de funções

k_{ij}	Matriz de rigidez do elemento
m	Ordem do espaço de Hilbert
m_{ij}	Matriz de massa do elemento
n_i	Vetor unitário normal à superfície do contorno em cada ponto
n_{DE}	Número de dimensões do espaço
n_{ECN}	Número de elementos que constituem a fronteira natural (de Neumann) do domínio
n_{EL}	Número de elementos da malha
n_{EQ}	Número total de equações do problema matricial
n_{GLMC}	Número de graus de liberdade da malha por campo aproximado
n_{GLNC}	Número de graus de liberdade do nó por campo aproximado
n_{GL}	Número total de graus de liberdade do problema discretizado
n_M	Ordem de uma dada matriz
n_{NE}	Número de nós do elemento
n_{NM}	Número de nós da malha
n_{PI}	Número de pontos de integração da quadratura numérica
p	Grau polinomial das funções de interpolação do espaço de aproximação
q	Número de vetores de iteração iniciais do método da iteração de subespaço
t	Tempo (escalar)
$u_{0,i,t}$	Vetor velocidade inicial
$u_{0,i}$	Vetor deslocamento inicial
$u_{i,tt}$	Vetor aceleração
$u_{i,tt}^h$	Aproximação do vetor aceleração $u_{i,tt}$
$u_{i,t}$	Vetor velocidade
u_i	Vetor deslocamento
u_i^h	Aproximação do vetor deslocamento u_i
v_i	Vetor função variação
v_i^h	Aproximação do vetor das funções variações v_i
w_P	Peso do ponto de integração da quadratura numérica
x_i	Coordenada espacial
z	Número desejado de autovalores e autovetores a ser calculado pelo método da iteração de subespaço
\bar{J}	Jacobiano de transformação do domínio paramétrico do elemento para o domínio físico do problema
\bar{J}_{ij}	Matriz Jacobiana de transformação do domínio paramétrico do elemento para o domínio físico do problema

- \bar{M} Número aproximado de autovalores que atendem uma certa tolerância de erro relativo
- $\hat{F}_i^{\{t+\Delta t\}}$ Vetor de forças global efetivo referente ao passo de tempo $t + \Delta t$
- $\hat{U}^{(n)}(x_i)$ n -ésima função normal associada ao problema de vibração livre
- \tilde{K}_{ij} Matriz de rigidez de um problema padrão de autovalores (que fora previamente reduzido do problema generalizado)
- $\tilde{U}(t)$ Função dependente do tempo apenas e que compõe a solução de deslocamento dependente do tempo e do espaço no problema de vibração livre
- A Área da seção transversal (barras, vigas, etc)
- B_{ij} Matriz das derivadas das funções de interpolação do elemento
- $C^k, C^k(\Omega)$ Espaço de funções com regularidade k
- $C_0^k, C_0^k(\Omega)$ Espaço de funções com regularidade k e suporte compacto
- D_{ijrs} Tensor constitutivo de quarta ordem
- D_{ij} Matriz constitutiva escrita na forma compacta para estado plano
- E Módulo de elasticidade
- $E^{(\infty)}$ Subespaço de interesse do método da iteração de subespaço
- $E^{(r)}$ r -ésimo subespaço do método da iteração de subespaço
- F_i Vetor de forças global
- $F_i^{\{0\}}$ Vetor de forças global referente ao passo de tempo $t = 0$
- $F_i^{\{t+\Delta t\}}$ Vetor de forças global referente ao passo de tempo $t + \Delta t$
- G Módulo de cisalhamento transversal
- $H^m, H^m(\Omega)$ Espaço de Hilbert de ordem m
- I Momento de inércia de área da seção transversal (para vigas)
- K_{ij} Matriz de rigidez global
- $L_p, L_p(\Omega)$ Espaço de Lebesgue
- L_{EF} Comprimento efetivo do menor elemento da malha
- M Constante que controla a sobreposição das regiões que formam a cobertura aberta no MEFPU
- M_{ij} Matriz massa global
- N_{ij} Matriz das funções de interpolação do elemento
- T_{ij} Tensor de tensão de Cauchy
- T_{ij}^h Aproximação do tensor de tensão de Cauchy T_{ij}
- $W_p^m, W_p^m(\Omega)$ Espaço de Sobolev de ordem m, p
- X_{ij} Matriz dos vetores de iteração iniciais do método da iteração de subespaço
- α, δ Parâmetros associados ao método de Newmark
- $\bar{\kappa}$ Parâmetro de correção do cisalhamento transversal na teoria de vigas de Timoshenko

$\bar{\omega}^{(n)}$	Frequência natural de vibração corrigida para o caso da viga de Timoshenko
$\bar{\Omega}_I$	Domínio fechado do elemento I
β	Taxa de convergência da solução do MEF
χ	Funções suaves consideradas no cálculo da taxa de convergência da solução numérica
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ_{ij}	Tensor de deformação infinitesimal
ϵ_{ij}^h	Aproximação do tensor de deformações infinitesimal ϵ_{ij}
η_E	Erro relativo em norma de energia da solução aproximada
η_{L_2}	Erro relativo em norma L_2 da solução aproximada
γ	Parâmetro vinculado à suavidade da solução analítica, utilizado para o cálculo da taxa de convergência da solução numérica
Γ_D	Contorno de Dirichlet (essencial) de um domínio Ω
Γ_N	Contorno de Neumann (natural) de um domínio Ω
κ	Módulo volumétrico do material
λ	Autovalor
$\lambda^{(r)}$	r -ésimo autovalor
$\lambda^{h(r)}$	Aproximação do r -ésimo autovalor $\lambda^{(r)}$
Λ_{ij}	Matriz diagonal que contém os autovalores de um problema problema generalizado de autovalores
\mathcal{K}	Espaço das funções candidatas
\mathcal{K}^h	Aproximação do espaço das funções candidatas \mathcal{K}
\mathcal{K}^{th}	Aproximação do espaço das funções candidatas temporais \mathcal{K}^t
\mathcal{K}^t	Espaço das funções candidatas temporais
\mathcal{V}	Espaço das funções variações
\mathcal{V}^h	Aproximação do espaço das funções variação \mathcal{V}
μ	Parâmetro de translação usado pelo método da iteração de subespaço
ν	Coefficiente de Poisson
Ω	Domínio aberto e limitado de um problema
$\omega^{(n)}$	Frequência natural de vibração livre associada ao modo n
$\omega^{h(n)}$	Aproximação da n -ésima frequência natural de vibração livre
Ω_{EL}	Domínio paramétrico do elemento
Φ_J	Função de interpolação associada com o J -ésimo grau de liberdade do elemento
Ψ_{ij}	Matriz que contém em suas colunas os autovetores de um problema generalizado de autovalores
ψ_i	Autovetor

$\psi_i^{(r)}$	r -ésimo autovetor
ρ	Massa por unidade de volume (massa específica)
$\tilde{\Omega}$	Aproximação do domínio Ω gerado pela malha de elementos finitos
$\tilde{\omega}_I$	Suporte compacto da função de interpolação associada ao nó I
$\tilde{\psi}_i$	Autovetor de um problema padrão de autovalores (que fora previamente reduzido do problema generalizado)
$\tilde{\psi}_i^{(r)}$	r -ésimo autovetor de um problema padrão (que fora previamente reduzido do problema generalizado)
ϑ_L	L -ésima função de enriquecimento do elemento unidimensional
ξ, η	Coordenadas no domínio paramétrico do elemento
ξ_P, η_P	Coordenadas paramétricas dos pontos de integração da quadratura numérica
\mathbb{N}	Conjunto dos número naturais
$\mathbb{R}^{n_{DE}}$	Espaço Euclidiano n_{DE} -dimensional
\emptyset	Conjunto vazio
$\bullet_{(i,j)}$	Parte simétrica do gradiente do vetor \bullet_i
(a, b)	Produto interno entre a e b em um espaço linear
$(a, b)_{H^m(\Omega)}$	Produto interno entre a e b no espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$
$\ \bullet\ _E$	Norma em energia da quantidade \bullet
$\ \bullet\ _{L_2}$	Norma L_2 da quantidade \bullet
$\ \bullet\ $	Norma da grandeza \bullet em um espaço linear real
$\ \bullet\ _{H^m(\Omega)}$	Norma no espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$ da grandeza \bullet
$\ \bullet\ _{L_p(\Omega)}$	Norma no espaço de Lebesgue $L_p(\Omega)$ da grandeza \bullet
$\ \bullet\ _{W_p^m(\Omega)}$	Norma no espaço de Sobolev $W_p^m(\Omega)$ da grandeza \bullet
$\{\phi_I\}$	Partição de unidade (M, C_∞, C_G) subordinada à cobertura $\{\Omega_I\}$ gerada pelo MEFPU
$\mathcal{A}(\bullet)$	Operador bilinear de diferenciação parcial de ordem $2m$
$\mathbf{A}(\bullet)$	Operador de montagem de uma matriz global a partir de matrizes locais de elementos
$A : B \rightarrow C$	Mapeamento do espaço B para o espaço C executado pelo operador A
$D^{\alpha_i}(u)$	Operador de diferenciação fraca generalizado aplicado sobre a função u

1 CARACTERIZAÇÃO DO TRABALHO

1.1 Introdução

O elemento quadrilateral de Adini-Clough-Melosh, assim chamado devido aos trabalhos de Adini e Clough (1961) e Melosh (1963), foi um dos primeiros elementos quadrilaterais de quatro nós apresentados na literatura que possui mais de um grau de liberdade associado a cada nó, diferentemente dos tradicionais elementos Lagrangeanos que apresentam apenas um grau de liberdade por nó. Este elemento foi inicialmente desenvolvido para a simulação de flexão de placas pelo MEF, é caracterizado como um elemento não conforme e, pelo fato de não possuir um espaço de aproximação polinomial completo, possui regularidade C^0 (Ciarlet, 1991).

O trabalho de Bogner et al. (1966), por outro lado, é uma das primeiras publicações disponível na literatura que trata da formulação de elementos finitos com regularidade maior do que C^0 . Neste artigo, os autores abordam a construção das funções de interpolação com regularidade C^1 para elementos quadrilaterais de quatro nós utilizando o conceito de interpolação Hermitiana e destacam a capacidade deste elemento na aproximação da solução de problemas de Mecânica e a maior taxa de convergência para as primeiras frequências naturais de vibração livre de uma placa retangular simplesmente apoiada.

Uma abordagem matemática sobre os aspectos vinculados à teoria de aproximação de funções em $\mathbb{R}^{n_{DE}}$, empregando tanto o conceito de interpolação Lagrangeana quanto Hermitiana foi apresentada por Ciarlet e Raviart (1972). Neste trabalho, os autores enunciam e provam certos Teoremas associados com a aproximação de funções e descrevem alguns aspectos relacionados com a construção de subespaços de funções aplicáveis ao método dos elementos finitos.

El-Zafrany e Cookson (1986) apresentaram um método de construção de funções de interpolação Lagrangeanas para elementos quadrilaterais, o qual permitia o posicionamento arbitrário dos nós no contorno do elemento. O método podia ser desenvolvido por meio de duas estratégias distintas: combinação linear e superposição de efeitos. No caso da superposição de efeitos, os autores estenderam o método para incluir a condição de interpolação Hermitiana. Por fim, El-Zafrany e Cookson (1986) apresentaram um exemplo de construção das funções de interpolação para elementos quadrilaterais de quatro nós utilizando interpolação Hermitiana.

Na década de 1990 surgiram os chamados métodos sem malha, os quais não apresentavam uma malha de elementos finitos propriamente dita, mas sim uma nuvem de pontos de integração distribuídos ao longo do domínio do problema. Estes métodos receberam diferentes denominações, entre as quais destacam-se: método da aproximação

difusa (Nayroles et al., 1992), método de Galerkin livre de elementos (Belytschko et al., 1994) e método de nuvens-*hp* (Duarte e Oden, 1996), entre outros. Os métodos sem malha trabalhavam com coberturas do domínio que não eram suportes compactos das funções empregadas na aproximação, mas dentro das quais tinham maior peso. Em função de que alguns destes métodos eram baseados no conceito de aproximação ao invés de interpolação, havia-se dificuldade para prescrição das condições de contorno do problema.

Neste mesmo período, Melenk (1992) propôs a inserção de funções de interpolação no espaço de aproximação do MEF que permitissem reproduzir de alguma forma o comportamento local, *a priori* conhecido, da solução do problema em avaliação. Três anos mais tarde, Melenk (1995) publicou um outro trabalho no qual descreve o chamado método dos elementos finitos generalizado (MEFG). Tal método é caracterizado pela possibilidade de construção de espaços de aproximação que incluam o conhecimento prévio do comportamento da solução do problema em avaliação e que não sejam necessariamente formados apenas por funções polinomiais. Devido a estas características, o MEFG foi amplamente aplicado na solução de problemas que envolvem elevados gradientes de variação da solução de interesse ou em problemas que apresentem singularidade no domínio de solução.

Posteriormente, Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997) publicaram dois artigos nos quais abordam o Método da Partição de Unidade (MPU) e o Método dos Elementos Finitos da Partição de Unidade (MEFPU). O MPU descreve as regras matemáticas que devem ser satisfeitas por um conjunto de funções a fim de que gerem uma partição de unidade com determinada ordem de regularidade e que apresente certas propriedades sobre as normas das funções e dos gradientes das funções consideradas. O MEFPU, por sua vez, aborda a construção de um espaço de aproximação conforme de elementos finitos, o qual herda as características de regularidade das partições de unidade construídas pelo MPU. Desta forma, a aplicação dos conceitos do MPU e do MEFPU permite se construir elementos finitos com a ordem de regularidade desejada e com o emprego de funções de interpolação que não sejam necessariamente polinomiais.

Quanto ao problema de autovalores, o livro de Strang e Fix (1973) é uma das referências pioneiras na literatura que aborda a teoria de aproximação do problema de autovalores pelo MEF. Um dos principais pontos da formulação apresentada pelos autores diz respeito ao estimador de erro *a priori*. Tal estimador de erro correlaciona o limite superior de aproximação de um dado autovalor com parâmetros como: tamanho de malha, ordem do espaço de Hilbert e grau polinomial das funções de interpolação do elemento.

Recentemente, Hughes (2000) também apresentou tal estimador de erro *a priori* ao versar sobre o problema da aproximação de autovalores pelo MEF. Contudo, o autor direciona o enfoque da sua abordagem para os resultados numéricos obtidos para as frequências naturais (raiz quadrada dos autovalores) de vibração livre de barras e vigas. Os resultados incluem a construção de curvas dos espectros normalizados de frequências

naturais para alguns tipos de elementos considerados (elementos de regularidade C^0 , linear e quadrático, para barras e cúbico Hermitiano com regularidade C^1 para vigas) e os comportamentos de convergência das primeiras frequências naturais de vibração livre. No primeiro caso, os resultados permitem se constatar a degeneração progressiva da aproximação dos autovalores para modos de vibração de maior ordem. No segundo caso, é possível se verificar as taxas de convergência obtidas com o emprego de cada tipo de elemento.

As curvas dos espectros normalizados de frequências naturais apresentadas por Hughes (2000) foram novamente reproduzidas nos trabalhos de Cottrell et al. (2006), Cottrell et al. (2007), Hughes et al. (2008) e Cottrell et al. (2009). Nestas publicações, os autores comparam as curvas construídas com base nos resultados obtidos pelo MEF convencional, com elementos de regularidade C^0 para barras e de regularidade C^1 para vigas, e pelo método de análise isogeométrico, o qual utiliza funções de interpolação do tipo NURBS com diferentes ordens de regularidade. Os resultados apresentados nestas referências mostram um desempenho superior, em termos da capacidade de aproximação do espectro de frequências naturais, do método isogeométrico (funções de interpolação de maior regularidade) em comparação com o MEF convencional (funções de interpolação de menor regularidade e maior ordem polinomial).

Tendo em vista o contexto supracitado, o foco principal dessa investigação está voltado para a avaliação da capacidade de aproximação das frequências naturais de vibração livre de alguns problemas de Mecânica que possuem solução analítica, utilizando os elementos finitos quadrilaterais de quatro nós de regularidade C^1 e C^2 construídos com base no Método da Partição de Unidade. De forma complementar, tais elementos também são avaliados quanto a solução de problemas de elasticidade plana infinitesimal isotrópica e de vibração forçada não amortecida decorrente da aplicação de carregamento impulsivo. Para os problemas aqui simulados, sempre que possível, tomou-se a precaução de se construir as malhas de modo a manter as arestas dos elementos paralelas aos eixos globais do problema a fim de evitar a perda de regularidade das funções e, conseqüentemente, da acuracidade da solução aproximada (comportamento reportado na literatura, conforme Strang e Fix (1973), Carey e Oden (1983), Dhatt e Touzot (1984); para maiores detalhes, consultar a seção 3.4.3).

1.2 Objetivos

1.2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho consiste em avaliar o comportamento da solução aproximada obtida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) na resolução de proble-

mas de Mecânica, utilizando elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidades C^1 e C^2 , construídos com base no Método da Partição de Unidade (MPU), comparando os resultados com as soluções exata e aproximada fornecida pelo MEF com o emprego de elementos quadrilaterais Lagrangeanos (elementos com regularidade C^0 e diferentes ordens polinomiais). Embora o foco principal dessa investigação esteja voltado para a avaliação da capacidade de aproximação das frequências naturais de vibração livre utilizando os elementos supracitados, alguns problemas clássicos de elasticidade plana infinitesimal isotrópica que possuem solução analítica e um problema de vibração forçada causada pela aplicação de força impulsiva também são resolvidos com os elementos de regularidade C^0 , C^1 e C^2 .

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- a) desenvolver as funções de interpolação com regularidades C^1 e C^2 , para o caso bidimensional, mediante a aplicação do Método da Partição de Unidade e condições de interpolação Hermitiana;
- b) implementar os elementos finitos quadrilaterais de quatro nós com as funções de interpolação desenvolvidas em “a)” em uma plataforma própria de elementos finitos;
- c) verificar o comportamento dos elementos finitos quadrilaterais implementados em “b)” quanto a um *patch test*;
- d) avaliar o comportamento dos elementos finitos quadrilaterais implementados em “b)” na solução de alguns problemas clássicos de elasticidade plana infinitesimal;
- e) aplicar os elementos finitos implementados em “b)” para aproximação das frequências naturais de vibração livre de alguns problemas de Mecânica;
- f) aplicar os elementos implementados em “b)” na solução de um problema de vibração forçada não amortecida, simulando a propagação de onda elástica, gerada pela aplicação de uma força impulsiva na estrutura.

1.3 Justificativa

Frequentemente os engenheiros se deparam com problemas que envolvem o cálculo de autovalores e autovetores associados a um certo problema físico em avaliação. Devido à complexidade de tais problemas, no geral se recorre a um método numérico para obtenção de uma solução que satisfaça de forma aproximada as condições de contorno e as equações diferenciais do problema. Neste âmbito, o MEF tem sido um dos métodos numéricos mais empregado na solução de problemas de Engenharia, dada sua versatilidade

e robustez. Contudo, o emprego do MEF convencional (elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 e diferentes ordens polinomiais) possibilita se obter a aproximação de apenas um pequeno percentual do espectro de autovalores de um dado problema com um nível de erro aceitável. Além disso, este percentual se concentra na parte inicial do espectro, ou seja, está vinculado aos menores autovalores do problema (Strang e Fix, 1973).

Esta peculiaridade do MEF está associada com a sua limitação em aproximar modos mais complexos (autovalores de mais alta ordem) do problema tendo como base a discretização fixa e finita do domínio e o emprego de elementos clássicos C^0 que geram um espaço de aproximação de baixa regularidade, composto, no geral, por funções de interpolação de baixa ordem (Hughes, 2000). Desta forma, se o problema em análise envolver, por exemplo, o estudo da propagação de uma onda em um meio sólido elástico, gerada a partir da aplicação de uma força impulsiva em uma estrutura em um curto espaço de tempo, a solução de interesse será composta pelos infinitos modos e frequências naturais de vibração (Clough e Penzien, 2003). Neste caso, a degeneração da solução obtida pelo MEF para os autovalores de mais alta ordem será tal que poderá conduzir a uma solução do problema completamente inconsistente com o comportamento físico observado.

Assim, tendo em vista este contexto e os objetivos descritos anteriormente, a realização deste trabalho se justifica pelo fato de abordar um tópico de relevância dentro da Engenharia, explorado através da avaliação do comportamento da solução de problemas de Mecânica, incluindo elasticidade plana e vibrações não amortecidas livre e forçada, obtida através de espaços de aproximação de elementos finitos de maior regularidade (C^1 e C^2) em comparação com os espaços de regularidade C^0 tradicionalmente utilizados (por meio dos elementos Lagrangeanos).

1.4 Notações adotadas e organização do trabalho

Quanto às notações adotadas, salvo em exceções devidamente indicadas, este relatório está escrito em notação indicial. Neste caso, índices representados por letras minúsculas seguem as regras de tal notação. Por outro lado, se convencionou que índices designados por letras maiúsculas não remetem a notação indicial, mas estão vinculados a outras operações matemáticas, tais como somatórios, etc.

Quanto à organização do trabalho, o mesmo está dividido em 6 capítulos. O Capítulo 1 traz uma breve introdução ao assunto abordado, descreve os objetivos gerais e específicos e apresenta a justificativa de realização deste trabalho.

No Capítulo 2 é feita uma revisão teórica dos assuntos relacionados com o desenvolvimento deste trabalho. Resumidamente, ela inclui os seguintes tópicos: aspectos gerais da formulação forte e da formulação variacional de um problema; enunciados dos pro-

blemas de elastoestática linear e de elastodinâmica tanto para a formulação forte quanto para a formulação variacional; aproximação da solução pelo método dos elementos finitos; aspectos sobre o Método da Partição de Unidade; problemas padrão e generalizado de autovalores; aspectos sobre a solução do problema de autovalores pelo método dos elementos finitos, destacando o estimador de erro *a priori* que relaciona a aproximação com a regularidade do espaço de aproximação; problema de vibração livre não amortecida e vibração forçada não amortecida, entre outros.

O Capítulo 3 apresenta os aspectos vinculados à implementação dos elementos finitos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2 , apresentando a estratégia de construção das funções de interpolação pelo Método da Partição de Unidade e pelo conceito de interpolação Hermitiana, o significado físico dos graus de liberdade nodais e a lógica utilizada para aplicação das condições de contorno em relação à prescrição dos graus de liberdade nodais.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação dos elementos finitos de quatro nós com regularidade C^1 e C^2 na solução de alguns problemas clássicos de elasticidade plana infinitesimal isotrópica que apresentam solução analítica e na verificação quanto a *patch tests* dos tipos simples e generalizado.

O Capítulo 5 aborda a utilização dos elementos finitos de regularidade C^1 e C^2 na obtenção das frequências naturais de vibração livre de alguns problemas planos clássicos que apresentam solução analítica. Os resultados apresentados incluem o comportamento do espectro de frequências naturais aproximadas e as curvas de convergência para cada elemento em cada caso. A título de comparação, também são apresentados os resultados obtidos com os elementos finitos Lagrangeanos de regularidade C^0 e funções de interpolação de alta ordem polinomial.

O Capítulo 6 aborda a aproximação da propagação de onda elástica em um meio sólido contínuo, gerada pela aplicação de uma força impulsiva, comparando as soluções numéricas obtidas através dos elementos de regularidade C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2 com a solução analítica do problema.

Por fim, o relatório apresenta alguns Apêndices que trazem informações adicionais àquelas descritas ao longo do relatório. Ressalta-se aqui a existência do Apêndice A, o qual traz um breve resumo sobre funções e espaços de funções, incluindo aspectos como continuidade, regularidade e principais definições, propriedades e métricas relacionadas a espaços de funções.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Formulação forte e formulação variacional

2.1.1 DEFINIÇÕES GERAIS

Seja Ω um domínio Lipschitziano aberto e limitado pelo contorno Γ no espaço $\mathbb{R}^{n_{DE}}$, com $n_{DE} = 3$, por exemplo, conforme mostrado na Figura 1(a). O contorno Γ pode ser decomposto em duas partes, Γ_D e Γ_N , conforme indicado na Figura 1(b), satisfazendo as relações (1) e (2):

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma \quad (1)$$

$$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \quad (2)$$

no qual Γ_D é o contorno ou fronteira de Dirichlet, Γ_N é o contorno ou fronteira de Neumann e \emptyset é um conjunto vazio.

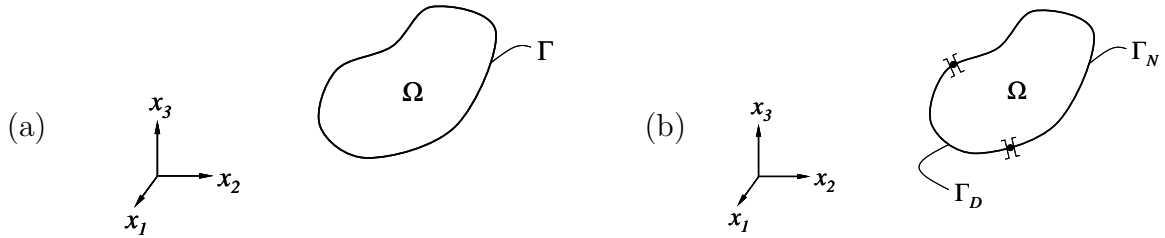


Figura 1: Características geométricas de um problema genérico de Mecânica
Adaptado de: Hughes (2000)

O contorno de Dirichlet, Γ_D , corresponde à porção da fronteira do domínio sobre a qual são prescritas as condições de contorno essenciais do problema. Por outro lado, sobre a fronteira de Neumann, Γ_N , são prescritas as condições de contorno naturais (Carey e Oden, 1983; Gilat e Subramaniam, 2008). Em problemas de Mecânica dos Sólidos, costuma-se indicar \bar{u}_i como a condição de contorno essencial prescrita e \bar{t}_i como a condição de contorno natural prescrita. Fisicamente, \bar{u}_i e \bar{t}_i representam, respectivamente, o deslocamento e a tração prescritos no contorno.

Definição 2.1.1.1. A equação diferencial que descreve o comportamento de um dado problema em um certo domínio Ω , juntamente com as condições de contorno apropriadamente prescritas, caracterizam o chamado problema de valor de contorno (PVC) e recebem a denominação de forma forte do problema (Carey e Oden, 1983; Fish e Belytschko, 2007; Gilat e Subramaniam, 2008).

A construção da forma fraca ou variacional de um PVC requer a definição de duas classes de funções e o emprego do Teorema de Green, conforme Definições 2.1.1.2 e 2.1.1.3 e Teorema 2.1.1.1.

Definição 2.1.1.2. As funções candidatas ou testes, u_i , são funções que satisfazem as propriedades (3) e (4) (Hughes, 2000; Carey e Oden, 1983):

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_D, \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (3)$$

$$u_i \in H^m(\Omega) \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (4)$$

e geram o chamado espaço das funções candidatas \mathcal{K} dado em (5):

$$\mathcal{K} = \{u_i \mid u_i \in H^m(\Omega), u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_D\} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (5)$$

Definição 2.1.1.3. As funções variações ou peso, v_i , são funções que satisfazem as propriedades (6) e (7) (Hughes, 2000; Carey e Oden, 1983):

$$v_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_D, \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (6)$$

$$v_i \in H^m(\Omega) \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (7)$$

e geram o chamado espaço das funções variações \mathcal{V} dado em (8):

$$\mathcal{V} = \{v_i \mid v_i \in H^m(\Omega), v_i = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (8)$$

Observação: a expressão (6) indica que a função variação deve satisfazer a parte homogênea da condição de contorno essencial.

Teorema 2.1.1.1 (Teorema de Green). Sendo f e g duas funções da classe $C^1(\bar{\Omega})$, tais que $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, então a identidade (9) é válida (Hughes, 2000).

$$\int_{\Omega} f_{,i} g \, d\Omega = - \int_{\Omega} f g_{,i} \, d\Omega + \int_{\Gamma} f g n_i \, d\Gamma \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (9)$$

no qual n_i corresponde a um vetor unitário normal à superfície do contorno em cada ponto, Ω é o domínio do problema e Γ é o contorno do problema.

Considerando um PVC genérico dado pela equação diferencial (10) e pela condição de contorno (11),

$$\mathcal{A}(u_i) = f_j \quad \text{em } \Omega, \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (10)$$

$$u_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_D, \quad 1 \leq i \leq n_{DE}, \quad (11)$$

sendo $\mathcal{A}(\bullet)$ um operador bilinear de diferenciação parcial de ordem $2m$, então a forma variacional deste PVC pode ser desenvolvida por meio das etapas descritas a seguir (Reddy, 1998; Carey e Oden, 1983):

- a) Definir a ordem do espaço das funções variações baseado nas informações disponíveis sobre a forma forte do problema, tal que $\mathcal{V} \subset H^{\hat{m}+m}(\Omega)$ e $f_j \in H^{\hat{m}}(\Omega)$;
- b) Multiplicar ambos os lados da equação diferencial (10) por uma função arbitrária $v_i \in \mathcal{V}$ e integrar ao longo do domínio Ω do problema;
- c) Aplicar o Teorema de Green (Teorema 2.1.1.1) à equação integral de b), pelo menos m vezes, de forma a reduzir o requisito de regularidade sobre a solução (função) de interesse u_i .

A fim de exemplificar os enunciados da formulação forte e da formulação variacional de um problema (construída pelo processo acima descrito), serão apresentados aqui os resultados finais de um exemplo unidimensional abordado por Hughes (2000). Supondo o PVC dado pela forma forte (12):

Dado $f_1 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e os valores prescritos \bar{u}_1 e \bar{t}_1 , encontrar $u_1 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que,

$$\begin{cases} u_{1,11} + f_1 = 0 & \text{em } \Omega \\ u_1(1) = \bar{u}_1 & \text{em } \Gamma_D \\ -u_{1,1}(0) = \bar{t}_1 & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (12)$$

sendo Ω o domínio do problema, tal que $\bar{\Omega} = [0, 1]$, Γ_D e Γ_N são os contornos de Dirichlet e de Neumann, respectivamente, e $f_1 \in L_2(\Omega)$.

A forma variacional correspondente a (12), sendo $m = 1$ e $\hat{m} = 0$, é dada por (13):

Dado f_1 , \bar{u}_1 e \bar{t}_1 como em (12). Encontrar $u_1 \in \mathcal{K}$ tal que para todo $v_1 \in \mathcal{V}$

$$\left\{ \int_0^1 v_{1,1} u_{1,1} dx_1 = \int_0^1 v_1 f_1 dx_1 + v_1(0) \bar{t}_1 \right. \quad (13)$$

com $\mathcal{V} = \{v_1 \mid v_1 \in H^1(\Omega), v_1 = 0 \text{ em } \Gamma_D\}$.

Reddy (1998), Carey e Oden (1983) e Hughes (2000) descrevem duas observações com relação às formas forte e variacional:

- a) Se u_i é uma solução da forma forte, então u_i também é uma solução da forma variacional;
- b) Tanto a forma forte quanto a forma variacional possuem soluções únicas.

2.1.2 FORMULAÇÃO FORTE E FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE ELASTOESTÁTICA LINEAR

Considerando um corpo de domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{DE}}$ e contorno Γ submetido a uma tração superficial \bar{t}_i , $1 \leq i \leq n_{DE}$, em Γ_N , uma força de corpo b_i , $1 \leq i \leq n_{DE}$, atuante sobre o domínio Ω e um certo deslocamento prescrito \bar{u}_i , $1 \leq i \leq n_{DE}$, em Γ_D , conforme mostrado na Figura 2 (nesta Figura foi considerado $n_{DE} = 3$).

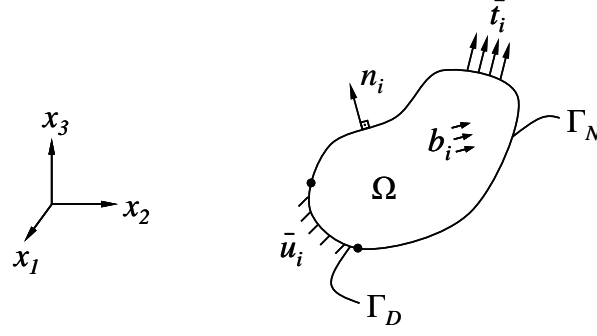


Figura 2: Características gerais de um PVC de Mecânica
Adaptado de: Fish e Belytschko (2007)

A configuração mostrada na Figura 2 corresponde ao PVC clássico de elastoestática, cuja forma forte é enunciada em (14) (Hughes, 2000):

Dado $b_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u}_i : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{t}_i : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{cases} T_{ij,j} + b_i = 0 & \text{em } \Omega, 1 \leq i, j \leq n_{DE} \\ u_i = \bar{u}_i & \text{em } \Gamma_D, 1 \leq i \leq n_{DE} \\ T_{ij}n_j = \bar{t}_i & \text{em } \Gamma_N, 1 \leq i, j \leq n_{DE} \end{cases} \quad (14)$$

no qual T_{ij} é o tensor de tensão de Cauchy, b_i é o vetor força de corpo atuante sobre o domínio Ω , u_i é o vetor deslocamento do corpo, \bar{u}_i é o valor prescrito de u_i em Γ_D , n_j é um vetor unitário normal a cada ponto da superfície do contorno e \bar{t}_i é a tração prescrita no contorno Γ_N .

Assumindo comportamento linear infinitesimal, o tensor de tensão de Cauchy T_{ij} pode ser escrito em termos do deslocamento u_i , conforme dado em (17), por meio das relações cinemática (15) e constitutiva (16):

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)} \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (15)$$

$$T_{ij} = D_{ijrs} \epsilon_{rs} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \quad (16)$$

$$T_{ij} = D_{ijrs} u_{(r,s)} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \quad (17)$$

no qual ϵ_{ij} é o tensor de deformação infinitesimal e D_{ijrs} é o tensor constitutivo de quarta ordem. O tensor de segunda ordem $u_{(i,j)}$, apresentado em (15), corresponde à parte simétrica do gradiente do vetor deslocamento u_i e é igual ao tensor de deformação infinitesimal ϵ_{ij} .

Considerando duas funções, $u_i \in \mathcal{K}$ e $v_i \in \mathcal{V}$, e assumindo a relação (17), então a forma variacional do PVC dado em (14) pode ser enunciada como indicado em (18) (Hughes, 2000):

Dado $b_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u}_i : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{t}_i : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u_i \in \mathcal{K}$ tal que, para todo $v_i \in \mathcal{V}$,

$$\left\{ \int_{\Omega} v_{(i,j)} D_{ijrs} u_{(r,s)} d\Omega = \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} v_i \bar{t}_i d\Gamma \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \right. \quad (18)$$

no qual v_i é uma função variação, $v_{(i,j)}$ corresponde à parte simétrica do gradiente do vetor v_i , e \mathcal{K} e \mathcal{V} são os espaços das funções candidatas e variações definidos em (5) e (8), respectivamente.

2.1.3 FORMULAÇÃO FORTE E FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE ELASTODINÂMICA

Diferentemente do problema de elastoestática, no problema de elastodinâmica considera-se que as variáveis assumem relação de dependência com o tempo t e o espaço x_i . Considerando novamente o corpo mostrado na Figura 2 e assumindo que as condições prescritas no volume e no contorno satisfazem agora as relações (19) a (21):

$$b_i : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (19)$$

$$\bar{u}_i : \Gamma_D \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (20)$$

$$\bar{t}_i : \Gamma_N \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (21)$$

Adicionalmente, considera-se que duas condições iniciais do problema são especificadas, a saber, deslocamento e velocidade, conforme (22) e (23):

$$u_{0_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (22)$$

$$u_{0_{i,t}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (23)$$

no qual u_{0_i} corresponde ao vetor deslocamento inicial e $u_{0_{i,t}}$ corresponde ao vetor velocidade inicial.

Mediante tais considerações, obtém-se o chamado problema de valor de contorno inicial (PVCII) de elastodinâmica, cuja forma forte é enunciada em (24) (Hughes, 2000):

Dado b_i , \bar{u}_i , \bar{t}_i , u_{0_i} e $u_{0_{i,t}}$ conforme (19) a (23), encontrar $u_i : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_{ij,j} + b_i = \rho u_{i,tt} & \text{em } \Omega \times]0, T[, \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \\ u_i = \bar{u}_i & \text{em } \Gamma_D \times]0, T[, \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \\ T_{ij} n_j = \bar{t}_i & \text{em } \Gamma_N \times]0, T[, \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \\ u_i(x_j, 0) = u_{0_i}(x_j) & x_j \in \Omega, \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \\ u_{i,t}(x_j, 0) = u_{0_{i,t}}(x_j) & x_j \in \Omega, \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \end{array} \right. \quad (24)$$

no qual ρ é a densidade do material, expressa como uma função do domínio, isto é, $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u_{i,tt}$ corresponde ao vetor aceleração e u_i é o vetor deslocamento, agora dependente da posição e do tempo, ou seja, $u_i(x_j, t)$, $1 \leq j \leq n_{DE}$.

A forma variacional correspondente do PPCI dado em (24) é enunciada em (25) (Hughes, 2000):

Dado b_i , \bar{u}_i , \bar{t}_i , u_{0_i} e $u_{0_i,t}$, encontrar $u_i(t) \in \mathcal{K}^t$, $t \in [0, T]$, tal que para todo $v_i \in \mathcal{V}$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v_i \rho u_{i,tt} d\Omega + \int_{\Omega} v_{(i,j)} D_{ijrs} u_{(r,s)} d\Omega = \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} v_i \bar{t}_i d\Gamma & 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \\ \int_{\Omega} v_i \rho u_i(x_j, 0) d\Omega = \int_{\Omega} v_i \rho u_{0_i} d\Omega & 1 \leq i, j \leq n_{DE} \\ \int_{\Omega} v_i \rho u_{i,t}(x_j, 0) d\Omega = \int_{\Omega} v_i \rho u_{0_i,t} d\Omega & 1 \leq i, j \leq n_{DE} \end{cases} \quad (25)$$

no qual $u_{i,t}$ corresponde ao vetor velocidade, $u_{i,tt}$ é o vetor aceleração, t é o escalar tempo e \mathcal{K}^t é o chamado espaço das funções candidatas temporais, definido em (26) (Hughes, 2000):

$$\mathcal{K}^t = \left\{ u_i(x_j, t) \mid u_i(x_j) \in H^1(\Omega), u_i(x_j, t) = \bar{u}_i(x_j, t) \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (26)$$

Observação: no enunciado (25) foi empregado o espaço das funções candidatas temporais, \mathcal{K}^t , pelo fato de a solução de interesse ter dependência do tempo t . Contudo, o espaço das funções variações considerado é o mesmo que fora definido em (8), ou seja, \mathcal{V} tem relação apenas com as variáveis espaciais, tal como no problema de elastoestática.

2.2 Aproximação pelo método dos elementos finitos

2.2.1 GENERALIDADES SOBRE O MÉTODO DE GALERKIN

O método de Galerkin possibilita a obtenção de uma solução aproximada para um PVC pela aplicação da ideia de discretização sobre a formulação variacional do problema, diferentemente do método das diferenças finitas, por exemplo, no qual a discretização é feita diretamente na equação diferencial do problema (forma forte).

O passo inicial da construção do método de Galerkin consiste em criar aproximações dimensionalmente finitas dos espaços das funções candidatas \mathcal{K} e das variações \mathcal{V} , definidos em (5) e (8), as quais são denotadas, respectivamente, por \mathcal{K}^h e \mathcal{V}^h . Esses espaços aproximados \mathcal{K}^h e \mathcal{V}^h podem ser vistos como subespaços de \mathcal{K} e \mathcal{V} , de tal forma que as relações (27) e (28) podem ser escritas (Hughes, 2000):

$$\mathcal{K}^h \subset \mathcal{K} \quad (27)$$

$$\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V} \quad (28)$$

As relações (27) e (28) implicam nas propriedades (29) e (30), respectivamente:

$$u_i^h(x_j) = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_D \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (29)$$

$$v_i^h(x_j) = 0 \text{ em } \Gamma_D \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (30)$$

ou seja, a aproximação u_i^h de u_i automaticamente está contida no espaço das funções candidatas \mathcal{K} , $u_i^h \in \mathcal{K}$, e deve satisfazer a condição de contorno essencial do problema. Por outro lado, a aproximação v_i^h de v_i está contida no espaço das variações \mathcal{V} , $v_i^h \in \mathcal{V}$, e deve satisfazer a parte homogênea da condição de contorno essencial.

Os subespaços \mathcal{K}^h e \mathcal{V}^h podem ser gerados através de bases compostas por N funções linearmente independentes, conforme dado em (31) e (32), respectivamente:

$$\{\phi_J\}_{J=1}^N = \text{span}(\mathcal{K}^h) \quad (31)$$

$$\{\varphi_J\}_{J=1}^N = \text{span}(\mathcal{V}^h) \quad (32)$$

nas quais $\phi_J = \phi_J(x_1, x_2, \dots, x_{n_{DE}})$ e $\varphi_J = \varphi_J(x_1, x_2, \dots, x_{n_{DE}})$ são funções de base que podem depender de qualquer coordenada espacial x_i , $1 \leq i \leq n_{DE}$.

Dessa forma, as aproximações $u_i^h \in \mathcal{K}^h$ e $v_i^h \in \mathcal{V}^h$ podem ser escritas como combinações lineares das funções que compõem as respectivas bases, conforme indicado nas expressões (33) e (34) (Oden e Reddy, 1976):

$$u_i^h = \sum_{J=1}^N d_{iJ} \phi_J \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (33)$$

$$v_i^h = \sum_{J=1}^N c_{iJ} \varphi_J \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (34)$$

sendo d_{iJ} e c_{iJ} N constantes a serem determinadas para cada campo i aproximado.

Finalmente, a aplicação das aproximações u_i^h e v_i^h , conforme expressões (33) e (34), na formulação variacional de um problema (por exemplo, em (18) ou (25)) conduz à chamada formulação de Galerkin do problema. Matematicamente, tal formulação resulta em um conjunto de N equações algébricas lineares a ser resolvido, para cada campo i aproximado, o qual fornece os valores das N incógnitas d_J que compõem a solução aproximada de interesse dada em (33) (Oden e Reddy, 1976).

Os detalhes relacionados com as manipulações algébricas das formulações de Galerkin que geram os respectivos problemas matriciais de elastoestática e elastodinâmica, bem como os aspectos vinculados à escolha ou construção das funções $\phi_J(x_1, x_2, \dots, x_{n_{DE}})$ e $\varphi_J(x_1, x_2, \dots, x_{n_{DE}})$ serão tratados nas seções subsequentes. É importante ressaltar aqui, contudo, que no método de Bubnov-Galerkin, frequentemente referido como método de Galerkin apenas, as funções de base ϕ_J e φ_J são idênticas, de tal forma que $\mathcal{K}^h = \mathcal{V}^h$.

Essa é a abordagem tradicionalmente empregada na construção das aproximações pelo MEF (Dhatt e Touzot, 1984; Dolbow, 1999).

2.2.2 CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO APROXIMADA

Matematicamente, o método dos elementos finitos promove um procedimento geral e sistemático para a construção das funções polinomiais ϕ_J , $1 \leq J \leq N$, que geram as bases dos subespaços dimensionalmente finitos obtidos pela aplicação do método de Galerkin (Oden e Reddy, 1976).

A construção da aproximação pelo MEF começa com a partição do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{DE}}$ em um número finito n_{EL} de subdomínios Ω_I , $1 \leq I \leq n_{EL}$, denominados elementos, satisfazendo as propriedades (35) e (36):

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{I=1}^{n_{EL}} \bar{\Omega}_I \quad , \quad \text{tal que } \tilde{\Omega} \simeq \bar{\Omega} \quad (35)$$

$$\Omega_I \cap \Omega_J = \emptyset \quad , \quad \text{para } I \neq J \quad (36)$$

no qual $\bar{\Omega}_I$ representa o domínio fechado do elemento I , $\bar{\Omega}$ corresponde ao domínio fechado do problema e $\tilde{\Omega}$ é o domínio fechado do problema resultante da discretização empregada¹.

A propriedade (35) indica que a união dos subdomínios gera uma aproximação para o domínio original. Já a relação (36) expressa a ideia de não sobreposição dos elementos da malha.

Do ponto de vista global, o passo seguinte do método consiste em construir um conjunto de n_{GLMC} funções de base $\phi_J(x_1, x_2, \dots, x_{n_{DE}})$ linearmente independentes, sendo n_{GLMC} o número de graus de liberdade da malha por campo, de tal forma que para cada vértice de união entre os subdomínios Ω_I , chamados nós, tem-se n_{GLNC} funções associadas. Cada uma dessas funções que aproximam um grau de liberdade associado a um determinado nó da malha é dita ter suporte compacto em $\tilde{\omega}_I$ ² (Dolbow, 1999). A Figura 3 apresenta o exemplo de um domínio bidimensional particionado em elementos quadrilaterais, com $n_{EL} = 16$ e $n_{NM} = 25$, sendo n_{NM} o número de nós da malha, no qual é destacado o suporte compacto $\tilde{\omega}_A$ da função de interpolação associada com o nó A da malha.

Dessa forma, as aproximações de u_i e v_i pelo MEF podem ser escritas conforme dado em (37) e (38), respectivamente (Oden e Reddy, 1976):

$$u_i^h(x_j) = \sum_{J=1}^{n_{GLMC}} d_{iJ} \phi_J(x_j) \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (37)$$

¹Na discretização do domínio pelo MEF, busca-se fazer com que $\tilde{\Omega}$ coincida ou seja muito próximo do domínio geométrico original do problema $\bar{\Omega}$ (Oden e Reddy, 1976).

²O suporte $\tilde{\omega}_I$ de uma função nodal ϕ_J é definido como a região do domínio delimitada pela união dos subdomínios que compartilham o nó I em consideração (Dolbow, 1999).

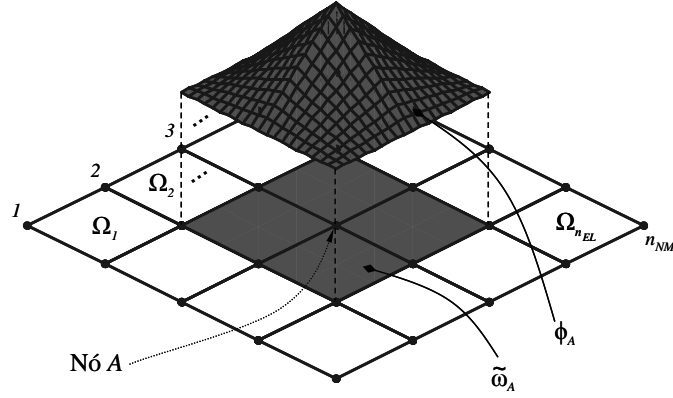


Figura 3: Malha típica de elementos finitos, destacando seus aspectos gerais

$$v_i^h(x_j) = \sum_{J=1}^{n_{GLMC}} c_{iJ} \phi_J(x_j) \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (38)$$

sendo n_{GLMC} o número de graus de liberdade da malha por campo, d_{iJ} , $1 \leq i \leq n_{DE}$ e $1 \leq J \leq n_{GLMC}$, são n_{GLMC} constantes, para cada campo i , a serem determinadas e que geram a solução de interesse $u_i^h(x_j)$, c_{iJ} , $1 \leq i \leq n_{DE}$ e $1 \leq J \leq n_{GLMC}$, são n_{GLMC} coeficientes para cada campo i , ditos arbitrários pois estão associados à construção da aproximação da função variação, e $\phi_J(x_j)$ são funções de interpolação que geram o subespaço da aproximação.

Dolbow (1999) descreve que, no caso do MEF com elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 , a aproximação dada na equação (37) apresenta as seguintes propriedades:

- a) a aproximação interpola nos valores d_{iJ} , ou seja, dado um ponto $P(x_1, \dots, x_{n_{DE}})$ que coincida com a posição de um nó da malha, então $u_i^h(P) = d_{iP}$, isto é, fisicamente cada constante d_{iJ} representa o deslocamento na direção i do J -ésimo nó da malha;
- b) a aproximação é contínua, ou seja, $u_i^h \in C^0(\bar{\Omega})$.

A substituição das aproximações u_i^h e v_i^h na expressão da forma variacional do problema (por exemplo, em (18)) resulta em um conjunto de equações algébricas, resolvido de forma matricial, o qual fornece os coeficientes d_{iJ} que compõem a solução aproximada de interesse.

Uma outra abordagem de construção das funções de base ϕ_J está associada com o conceito de suporte compacto destas funções. Com isso, as funções ϕ_J são construídas no chamado domínio paramétrico do elemento e são escritas em termos de coordenadas locais - ξ e η para o caso bidimensional, sendo frequentemente designadas como funções definidas por partes (Cook et al., 1989; Dhatt e Touzot, 1984). Desta forma, a estratégia de aproximação da solução pelo MEF passa a ser tratada sob o ponto de vista do elemento, e não mais sob o ponto de vista global do domínio.

Resumidamente, sob o ponto de vista do elemento tem-se as seguintes condições: considerando um elemento quadrilateral de quatro nós no domínio paramétrico bidimensional $\xi \times \eta$, conforme mostrado na Figura 4.

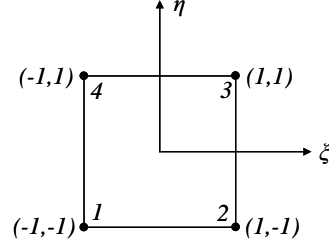


Figura 4: Elemento quadrilateral de quatro nós no domínio paramétrico

Para cada nó I do elemento se tem n_{GLNC} funções de base (também chamadas de funções de interpolação ou funções de forma do elemento) $\Phi_J(\xi, \eta)$ associadas, perfazendo um total de $n_{NE}n_{GLNC}$ funções por elemento para cada campo aproximado, sendo n_{NE} o número de nós do elemento. As funções $\Phi_J(\xi, \eta)$ são tais que satisfazem as propriedades dadas em (39) a (41).

$$\Phi_J(\xi, \eta) = 0 \quad \xi, \eta \notin [-1, 1], \quad 1 \leq J \leq n_{NE}n_{GLNC} \quad (39)$$

$$\sum_J \Phi_J(\xi, \eta) = 1 \quad J = 1, 1 + n_{GLNC}, 1 + 2n_{GLNC}, \dots, 1 + (n_{NE} - 1)n_{GLNC} \quad (40)$$

$$\Phi_J(\xi_I, \eta_I) = \delta_{JK} \quad K = (I - 1)n_{GLNC} + 1 \text{ e } 1 \leq J \leq n_{NE}n_{GLNC} \quad (41)$$

A propriedade (39) indica que as funções de interpolação do elemento têm suporte compacto, isto é, assumem valores nulos fora do domínio do elemento, enquanto que a propriedade (40) expressa o conceito de partição de unidade, ou seja, para cada ponto do domínio do elemento, o somatório de todas as funções de interpolação associadas com os graus de liberdade do campo primal deve ser igual à unidade (Dhatt e Touzot, 1984; Hughes, 2000; Cook et al., 1989). A propriedade (41), por sua vez, indica que no I -ésimo nó do elemento, todas as funções de interpolação assumem valores nulos, exceto a J -ésima função associada com o grau de liberdade do campo primal do referido nó.

O mapeamento das coordenadas locais do elemento no domínio paramétrico para as coordenadas globais do problema é feito por meio da relação dada em (42):

$$x_i = \sum_{J=1}^{n_{NE}} \Phi_J(\xi, \eta) x_{i,J} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (42)$$

no qual $x_i(\xi, \eta)$ é o vetor posição do ponto de interesse dado em termos do sistema de coordenadas globais, $\Phi_J(\xi, \eta)$ corresponde à função de interpolação associada ao J -ésimo nó do elemento, e $x_{i,J}$ são as coordenadas x_i do J -ésimo nó do elemento.

Com isso, as aproximações dadas em (37) e (38) podem ser reescritas segundo as relações (43) e (44), respectivamente:

$$u_i^h(\xi, \eta) = \sum_{J=1}^{n_{NE}n_{GLNC}} \phi_J(\xi, \eta) d_{i,J} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (43)$$

$$v_i^h(\xi, \eta) = \sum_{J=1}^{n_{NE}n_{GLNC}} \phi_J(\xi, \eta) c_{iJ} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (44)$$

sendo $\phi_J(\xi, \eta)$ as funções de interpolação associadas com cada grau de liberdade J do elemento, c_{iJ} são constantes arbitrárias, para cada campo i , associadas com o J -ésimo grau de liberdade do elemento, d_{iJ} são coeficientes a serem determinados, para cada campo i , que geram a solução aproximada de interesse.

2.2.3 APROXIMAÇÃO DO PROBLEMA DE ELASTOESTÁTICA LINEAR

A aplicação do método de Galerkin na formulação variacional do problema de elastoestática dado em (18) resulta no enunciado indicado em (45) (Hughes, 2000):

Dado $b_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u}_i : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{t}_i : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u_i^h \in \mathcal{K}^h$ tal que, para todo $v_i^h \in \mathcal{V}^h$

$$\left\{ \int_{\Omega} v_{(i,j)}^h D_{ijrs} u_{(r,s)}^h d\Omega = \int_{\Omega} v_i^h b_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} v_i^h \bar{t}_i d\Gamma \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \right. \quad (45)$$

no qual $v_{(i,j)}^h$ corresponde à parte simétrica do gradiente do vetor v_i^h , D_{ijrs} é o tensor constitutivo, $u_{(r,s)}^h$ é a parte simétrica do gradiente do vetor u_r^h , b_i é o vetor força de corpo, \bar{t}_i é a tração prescrita no contorno natural Γ_N e Ω é o domínio do problema.

Inserindo as aproximações $u_i^h(\xi, \eta)$ e $v_i^h(\xi, \eta)$, dadas em (43) e (44), respectivamente, no resultado (45), e valendo-se:

- a) da arbitrariedade dos coeficientes c_{iJ} ;
- b) do mapeamento de transformação do domínio paramétrico para o domínio global;
- c) da aproximação das integrais pelo procedimento de quadratura numérica,

se obtém o problema matricial equivalente à expressão (45), escrito conforme dado em (46) (Cook et al., 1989; Hughes, 2000; Zienkiewicz e Taylor, 2000) (as matrizes e vetores indicados a seguir se referem ao caso bidimensional, isto é, $n_{DE} = 2$):

$$K_{ij} d_j = F_i \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (46)$$

no qual K_{ij} é a matriz de rigidez global do problema, obtida pelo processo de montagem das matrizes de rigidez k_{ij} dos elementos, executada de acordo com a expressão (47), d_j é o vetor global que contém os coeficientes associados aos graus de liberdade nodais do problema discretizado (a organização dos graus de liberdade de um dado elemento, para os casos abordados neste trabalho, estão indicados nas expressões (177) a (179)), F_i é o vetor de forças global e n_{EQ} corresponde ao número total de equações do problema.

$$K_{ij} = \mathbf{A}_{I=1}^{n_{EL}} (k_{rs})_I \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \text{ e } 1 \leq r, s \leq (2n_{NE}n_{GLNC}) \quad (47)$$

sendo n_{EQ} o número total de equações do problema, n_{NE} o número de nós do elemento, n_{GLNC} o número de graus de liberdade do nó por campo, $A(\bullet)$ é o operador que executa a montagem da matriz global a partir das matrizes locais, no caso a matriz de rigidez global a partir das matrizes de rigidez dos elementos da malha, e k_{rs} é a matriz de rigidez do elemento, determinada por meio da expressão (48).

$$k_{rs} = \int_{\Omega_{EL}} B_{ir} D_{ij} B_{js} \bar{J} d\Omega_{EL} \cong \sum_{P=1}^{n_{PI}} \left\{ \left(B_{ir} D_{ij} B_{js} \bar{J} \right) \Big|_{\xi=\xi_P; \eta=\eta_P} w_P \right\} \quad 1 \leq i, j \leq 3 \text{ e } 1 \leq r, s \leq (2n_{NE}n_{GLNC}) \quad (48)$$

no qual \bar{J} é o Jacobiano de transformação do sistema de coordenadas paramétrico para o sistema cartesiano, dado por (49), B_{ij} é uma matriz que agrupa as derivadas das funções de interpolação do elemento, determinada através da relação (53), n_{PI} é o número de pontos de integração empregado na execução da quadratura numérica, (ξ_P, η_P) e w_P são, respectivamente, as coordenadas paramétricas e os pesos dos pontos de integração, e D_{ij} é a matriz constitutiva escrita na forma compacta³ considerando a condição de isotropia, conforme relações (51) ou (52), Ω_{EL} corresponde ao domínio paramétrico do elemento, n_{NE} é o número de nós do elemento e n_{GLNC} é o número de graus de liberdade do nó por campo.

$$\bar{J} = \det(\bar{J}_{ij}) \quad (49)$$

sendo \bar{J}_{ij} a matriz Jacobiana da transformação, dada por (50):

$$\bar{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{n_{NE}} (\Phi_{I,\xi} x_{1I}) & \sum_{I=1}^{n_{NE}} (\Phi_{I,\xi} x_{2I}) \\ \sum_{I=1}^{n_{NE}} (\Phi_{I,\eta} x_{1I}) & \sum_{I=1}^{n_{NE}} (\Phi_{I,\eta} x_{2I}) \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (50)$$

com n_{NE} o número de nós do elemento, $\Phi_{I,\xi}$ e $\Phi_{I,\eta}$ são as derivadas da I -ésima função de interpolação do elemento com relação às coordenadas paramétricas ξ e η , respectivamente, e x_{1I} e x_{2I} são as coordenadas x_1 e x_2 do I -ésimo nó do elemento.

$$D_{ij} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq 2 \text{ em EPT} \quad (51)$$

³De acordo com Cook et al. (1989), a escrita na forma compacta para o caso tridimensional geralmente é dada como: $\{T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{23}, T_{13}\}^T = [D]_{6 \times 6} \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{13}\}^T$. No caso de EPT ou EPD, Hughes (2000) descreve que a forma compacta pode ser escrita como: $\{T_{11}, T_{22}, T_{12}\}^T = [D]_{3 \times 3} \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}\}^T$.

$$D_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq 2 \text{ em EPD} \quad (52)$$

no qual E corresponde ao módulo de elasticidade do material e ν é o coeficiente de Poisson.

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{J}_{kl}^{-1}] & [0] \\ [0] & [\bar{J}_{kl}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1,\xi} & 0 & \cdots & \Phi_{n_{NE}n_{GLNC},\xi} & 0 \\ \Phi_{1,\eta} & 0 & \cdots & \Phi_{n_{NE}n_{GLNC},\eta} & 0 \\ 0 & \Phi_{1,\xi} & \cdots & 0 & \Phi_{n_{NE}n_{GLNC},\xi} \\ 0 & \Phi_{1,\eta} & \cdots & 0 & \Phi_{n_{NE}n_{GLNC},\eta} \end{bmatrix} \\ 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq (2n_{NE}n_{GLNC}), 1 \leq k, l \leq 2 \quad (53)$$

no qual $\Phi_{I,\xi}$ e $\Phi_{I,\eta}$ são as derivadas da I -ésima função de interpolação do elemento com relação às coordenadas paramétricas ξ e η , respectivamente, n_{NE} é o número de nós do elemento, n_{GLNC} é o número de graus de liberdade do nó por campo e \bar{J}_{kl}^{-1} é a matriz inversa da matriz Jacobiana dada em (50).

O vetor de forças global, desconsiderando a existência de força de corpo aplicada ao longo do domínio, é obtido pelo processo de montagem indicado em (54):

$$F_i = \mathbf{A}_{I=1}^{n_{ECN}} (f_j)_I \quad 1 \leq i \leq n_{EQ} \text{ e } 1 \leq j \leq (2n_{NE}n_{GLNC}) \quad (54)$$

no qual n_{EQ} é o número total de equações do problema, n_{ECN} é o número de elementos que fazem parte do contorno de Neumann do problema e f_j é o vetor de forças associado ao elemento, obtido por meio da relação (55).

$$f_i = \int_{\Gamma_N} N_{ji} \bar{t}_j d\Gamma_N \cong \sum_{P=1}^{n_{PI}} \left\{ (N_{ji} \bar{t}_j \bar{J}) \Big|_{\xi=\xi_P \text{ ou } \eta=\eta_P} w_P \right\} \\ 1 \leq i \leq (2n_{NE}n_{GLNC}) \text{ e } 1 \leq j \leq 2 \quad (55)$$

sendo n_{NE} o número de nós do elemento, n_{GLNC} o número de graus de liberdade do nó por campo, Γ_N o contorno de Neumann do problema⁴, \bar{t}_j é o vetor tração aplicado no contorno, N_{ij} é uma matriz que contém as funções de interpolação estruturada conforme indicado em (56), n_{PI} é o número de pontos de integração utilizado para executar a quadratura numérica no contorno, ξ_P, η_P e w_P são as coordenadas e os pesos dos pontos de integração

⁴Para domínio bidimensional, o contorno corresponde a uma linha, ou seja, um elemento unidimensional. Desta forma, a quadratura deve ser executada ao longo do domínio local da aresta, ou seja, ξ ou η , dependendo de qual contorno do elemento está aplicado o carregamento. Com isso, as variáveis n_{PI} , ξ_P ou η_P , w_P e \bar{J} devem ser avaliadas no âmbito do elemento unidimensional correspondente.

considerados, respectivamente, e \bar{J} é o Jacobiano da transformação.

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \cdots & \Phi_{n_{NE}n_{GLNC}} & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \cdots & 0 & \Phi_{n_{NE}n_{GLNC}} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ e } 1 \leq j \leq 2n_{NE}n_{GLNC} \quad (56)$$

sendo n_{NE} o número de nós do elemento, n_{GLNC} o número de graus de liberdade do nó por campo e Φ_I a I -ésima função de interpolação do elemento.

O Jacobiano da transformação, para o caso da integração do carregamento no contorno de um elemento, é dado pela relação (57).

$$\bar{J} = \begin{cases} \sum_{I=1}^{n_{NE}} (\Phi_{I,\xi} x_{1I}) & \text{para contorno na direção de } \xi \\ \sum_{I=1}^{n_{NE}} (\Phi_{I,\eta} x_{2I}) & \text{para contorno na direção de } \eta \end{cases} \quad (57)$$

O número total de equações resultante da discretização do domínio em elementos pode ser calculado pela relação (58).

$$n_{EQ} = n_{NM}n_{DE}n_{GLNC} \quad (58)$$

no qual n_{NM} é o número de nós da malha, n_{DE} é o número de dimensões espaciais do problema, e n_{GLNC} é o número de graus de liberdade do nó por campo.

2.2.4 APROXIMAÇÃO DO PROBLEMA DE ELASTODINÂMICA

A aplicação do método de Galerkin na formulação variacional do problema de elastodinâmica dado em (25) resulta no enunciado dado em (59) (Hughes, 2000):

Dado b_i , \bar{u}_i , \bar{t}_i , u_{0i} e $u_{0i,t}$, encontrar $u_i^h(t) \in \mathcal{K}^{th}$, tal que para todo $v_i^h \in \mathcal{V}^h$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v_i^h \rho u_{i,tt}^h d\Omega + \int_{\Omega} v_{(i,j)}^h D_{ijrs} u_{(r,s)}^h d\Omega = \int_{\Omega} v_i^h b_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} v_i^h \bar{t}_i d\Gamma & 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \\ \int_{\Omega} v_i^h \rho u_i^h(x_j, 0) d\Omega = \int_{\Omega} v_i^h \rho u_{0i} d\Omega & 1 \leq i, j \leq n_{DE} \\ \int_{\Omega} v_i^h \rho u_{i,t}^h(x_j, 0) d\Omega = \int_{\Omega} v_i^h \rho u_{0i,t} d\Omega & 1 \leq i, j \leq n_{DE} \end{cases} \quad (59)$$

no qual b_i o vetor força de corpo, \bar{u}_i o vetor deslocamento prescrito no contorno essencial do corpo, \bar{t}_i o vetor tração prescrito no contorno natural do corpo, u_{0i} e $u_{0i,t}$ os vetores posição e velocidade iniciais do corpo, $u_i^h(t)$ é a solução aproximada de interesse, dependente do espaço e do tempo, dada em (60), $u_{i,tt}^h$ é a aproximação do vetor aceleração,

\mathcal{K}^h corresponde à aproximação do espaço das funções candidatas temporais \mathcal{K}^t , v_i^h é a aproximação da função variação, \mathcal{V}^h é o espaço aproximado das funções variação, ρ é a massa específica do material do corpo, $u_{(r,s)}^h$ e $v_{(i,j)}^h$ são os gradientes dos vetores u_r^h e v_i^h , respectivamente, D_{ijrs} é o tensor constitutivo de quarta ordem e Γ_N é o contorno natural ou de Neumann do problema.

$$u_i^h(t) = \sum_{J=1}^{n_{NE}n_{GLNC}} \phi_J(\xi, \eta) d_{i,J}(t) \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (60)$$

A forma apresentada em (59) é frequentemente referida como formulação semi-discreta de Galerkin, pois apenas a solução aproximada de interesse $u_i^h(t)$ é dependente da posição e do tempo, conforme dado em (60), enquanto que a aproximação da função variação v_i^h é dependente apenas da posição (Hughes, 2000).

Aplicando-se as aproximações $u_i^h(t)$ e v_i^h , dadas em (60) e (44), respectivamente, nas equações do enunciado (59) se obtém o problema matricial equivalente dado em (61):

Dado $F_i :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{n_{EQ}}$, encontrar $d_i(x_j, t) :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{n_{EQ}}$, tal que:

$$\begin{cases} M_{ij}d_{j,tt} + K_{ij}d_j = F_i & t \in]0, T[\quad \text{e} \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \\ d_i(x_j, 0) = d_{0i} & 1 \leq i \leq n_{EQ} \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n_{DE} \\ d_{i,t}(x_j, 0) = d_{0i,t} & 1 \leq i \leq n_{EQ} \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n_{DE} \end{cases} \quad (61)$$

no qual n_{EQ} é o número total de equações resultante da discretização do problema, n_{DE} é o número de dimensões espaciais do problema, t é o escalar tempo, T é tempo máximo considerado para o problema, F_i é o vetor de forças global dado em (54), K_{ij} é a matriz de rigidez global dada em (47), d_{0i} e $d_{0i,t}$ são os vetores que contêm os coeficientes associados aos graus de liberdade que definem a posição e a velocidade inicial dos nós da malha, d_j é o vetor que contêm os coeficientes associados aos graus de liberdade que definem os deslocamentos nodais e M_{ij} é a matriz massa global definida em (62).

$$M_{ij} = \mathbf{A}_{I=1}^{n_{EL}} (m_{rs})_I \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad \text{e} \quad 1 \leq r, s \leq (2n_{NE}n_{GLNC}) \quad (62)$$

sendo n_{EQ} o número total de equações do problema, n_{NE} o número de nós do elemento, n_{GLNC} o número de graus de liberdade do nó por campo, n_{EL} é o número de elementos da malha, $\mathbf{A}(\bullet)$ é o operador executa a montagem da matriz global a partir das matrizes locais, no caso a matriz massa global a partir das matrizes de massa dos elementos da malha, e m_{rs} é a matriz massa do elemento, determinada por meio da expressão (63).

$$m_{rs} = \int_{\Omega_{EL}} \rho N_{ri} N_{is} \bar{J} d\Omega_{EL} \cong \sum_{P=1}^{n_{PI}} \left\{ \left(\rho N_{ri} N_{is} \bar{J} \right) \Big|_{\xi=\xi_P; \eta=\eta_P} w_P \right\} \quad 1 \leq i \leq 2 \quad \text{e} \quad 1 \leq r, s \leq (2n_{NE}n_{GLNC}) \quad (63)$$

no qual \bar{J} é o Jacobiano de transformação do sistema de coordenadas paramétrico do elemento para o sistema cartesiano do problema dado em (49), N_{ij} é a matriz das funções de interpolação do elemento dada em (56), n_{PI} é o número de pontos de integração empregado na execução da quadratura numérica, (ξ_P, η_P) e w_P são, respectivamente, as coordenadas paramétricas e os pesos dos pontos de integração, Ω_{EL} corresponde ao domínio paramétrico do elemento, n_{NE} é o número de nós do elemento, n_{GLNC} é o número de graus de liberdade do nó por campo e ρ é a massa por unidade de volume.

De acordo com Hughes (2000), a primeira equação do enunciado (61) corresponde a um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A solução deste tipo de sistema pode ser feito mediante o emprego de técnicas numéricas, tal como o método da superposição modal ou o método de Newmark, os quais são abordados na seção 2.4.2.

2.2.5 ESTIMATIVA DE ERRO E TAXA DE CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO DO MEF

Um dos teoremas básicos da teoria de elementos finitos estabelece que dentre todas as funções contidas no espaço de aproximação \mathcal{K}^h , a solução u_i^h é a que apresenta a melhor aproximação da solução exata do problema, u_i , em norma de energia (Hughes, 2000). A qualidade da aproximação, de acordo com Carey e Oden (1983), depende basicamente de três fatores:

- a) regularidade ou suavidade da solução;
- b) maior ordem das derivadas contidas na definição do espaço de energia do problema;
- c) maior grau do polinômio completo contido no espaço de aproximação gerado pelas funções de interpolação.

No caso bidimensional, Szabó e Babuška (1991) descrevem que uma estimativa teórica (*a priori*) da norma em energia do erro, empregando-se a chamada extensão- h de elemento, para refinamentos de malha uniformes ou quase-uniformes, pode ser feita através da relação (64):

$$\|u - u^h\|_{E(\Omega)} \leq \frac{C}{n_{GL}^\beta} \quad (64)$$

no qual u e u^h são, respectivamente, as soluções exata e aproximada do problema, C e β são constantes positivas, tal que C independe do parâmetro de malha h , e n_{GL} é o número total de graus de liberdade do problema discretizado. A equação (64) é referida como uma estimativa de erro fundamental ou padrão.

A constante β representa a taxa de convergência da solução aproximada e é determinada por meio da relação (65):

$$\beta = \frac{1}{2} \min(p, \gamma) \quad (65)$$

sendo p o grau da completude polinomial das funções de interpolação do elemento e γ um parâmetro vinculado à suavidade da solução exata do problema.

No caso geral, desconsiderando-se qualquer estratégia de refino de malha, Oden e Reddy (1976) e Carey e Oden (1983) descrevem que a estimativa de erro *a priori* é escrita segundo a expressão (66):

$$\|u - u^h\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^\beta \|u\|_{H^s(\Omega)} \quad (66)$$

sendo u a solução exata do problema, u^h a solução aproximada do problema, $H^m(\Omega)$ o espaço de Hilbert de ordem m associado com a aproximação, C uma constante positiva independente de h , h um parâmetro associado à malha, $H^s(\Omega)$ o espaço de Hilbert de ordem s associado com a solução exata do problema, e β a taxa de convergência da solução aproximada, determinada conforme expressão (67) (nesta expressão, p representa o grau de completude polinomial das funções de interpolação do elemento).

$$\beta = \min(p + 1 - m, s - m) \quad (67)$$

De um modo geral, a maioria das soluções exatas de problemas bidimensionais pode ser escrita como uma soma de uma função suave com uma ou mais funções singulares em torno de um certo número finito de pontos do domínio (vértice, ponta de trinca, etc). Estas funções singulares podem ser escritas genericamente por meio da expressão (68) (Szabó e Babuška, 1991):

$$f(r, \theta) = \sum_{I=1}^N A_I r^{\gamma_I} \chi_I(\theta) \quad (68)$$

no qual r, θ são coordenadas polares centradas no ponto de singularidade, A_I é uma constante que depende do tipo de singularidade envolvida, $\chi_I(\theta)$ são funções suaves, e γ_I são constantes que, juntamente com $\chi_I(\theta)$ caracterizam a suavidade da solução exata na vizinhança do ponto de singularidade.

Desta forma, se a solução exata é uma função polinomial, então γ_I corresponde ao máximo grau do polinômio da solução. Por outro lado, se ela possui singularidades, considera-se que γ_I é o menor valor do expoente de r da equação (68) para o qual a amplitude é não-nula. Szabó e Babuška (1991) salientam que quando a solução exata é suave, isto é, o domínio ou o contorno do domínio de solução do problema não possui pontos de singularidade, ou quando $\gamma > p$, a taxa de convergência β é limitada pelo grau polinomial dos elementos.

2.3 Método dos elementos finitos da partição de unidade (MEFPU)

O método dos elementos finitos da partição de unidade (MEFPU) foi proposto por Melenk e Babuška (1996) e pode ser visto como uma generalização do método dos elementos finitos, haja visto que o MEFPU permite a construção de espaços de aproximação conformes de elementos finitos que apresentem a ordem de regularidade desejada e o emprego de funções de interpolação que não sejam necessariamente polinomiais (Babuška e Melenk, 1997).

Assim como no MEF, o MEFPU está baseado na partição do domínio Ω em regiões Ω_I , as quais formam uma cobertura aberta $\{\Omega_I\}$ do domínio e satisfazem a condição de sobreposição dada em (69):

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x_i \in \Omega \quad \text{tal que} \quad \text{card} \{J \mid x_i \in \Omega_J\} \leq M \quad (69)$$

sendo M uma constante que controla a sobreposição das regiões que formam a cobertura aberta do domínio⁵, ou seja, para cada ponto $x_i \in \Omega$ há no máximo M regiões que se sobrepõem (Melenk e Babuška, 1996).

Definição 2.3.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{DE}}$ um conjunto aberto e $\{\Omega_I\}$ uma cobertura aberta de Ω que satisfaz a condição de sobreposição dada em (69), então $\{\phi_I\}$ é dita ser uma partição de unidade (M, C_∞, C_G) subordinada à cobertura $\{\Omega_I\}$ se as relações (70) a (72) são satisfeitas (Babuška e Melenk, 1997):

$$\text{supp}(\phi_I) \subset \bar{\Omega}_I \quad \forall I \quad (70)$$

$$\sum_I \phi_I \equiv 1 \quad \text{em } \Omega \quad (71)$$

$$\|\phi_I\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n_{DE}})} \leq C_\infty \quad (72)$$

$$\|\nabla \phi_I\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n_{DE}})} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\Omega_I)} \quad (73)$$

no qual ϕ_I são as funções de base do espaço de aproximação, $\text{supp}(\phi_I)$ se refere ao suporte da função ϕ_I em questão, C_∞ e C_G são duas constantes, e $\text{diam}(\Omega_I)$ se refere ao diâmetro ou tamanho do subdomínio Ω_I que tem a função ϕ_I associada.

Observação 1: a partição de unidade $\{\phi_I\}$ dada pela Definição 2.3.1 é dita ter regularidade $k \in \mathbb{N}_0$ se $\{\phi_I\} \subset C^k(\mathbb{R}^{n_{DE}})$ (Babuška e Melenk, 1997).

Observação 2: as funções de interpolação do elemento quadrilateral bilinear clássico formam uma partição de unidade (M, C_∞, C_G) , na qual $M = 4$ e $C_\infty = 1$ (Melenk e Babuška, 1996).

⁵De acordo com Melenk e Babuška (1996), as regiões que formam o domínio devem se sobrepor em função de que as funções ϕ_I supostamente devem gerar uma partição de unidade suficientemente regular (Lipschitziana).

Definição 2.3.2. Seja $\{\Omega_I\}$ uma cobertura aberta de $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{DE}}$ e $\{\phi_I\}$ uma partição de unidade (M, C_∞, C_G) subordinada à cobertura $\{\Omega_I\}$, conforme Definição 2.3.1. O espaço V , dado por (74), com $V_I \subset H^r(\Omega_I \cap \Omega)$ e $r \geq 1$, é chamado de espaço do método da partição de unidade (MPU). O espaço V é dito ser de ordem $k \in \mathbb{N}$ se $V \subset C^k(\Omega)$. Além disso, os espaços V_I são referidos como espaços de aproximação locais (Babuška e Melenk, 1997).

$$V \stackrel{def}{=} \left\{ \sum_I \phi_I V_I \right\} \subset H^r(\Omega) \quad r \geq 1 \quad (74)$$

no qual V é o espaço de aproximação global e ϕ_I são as funções de base dos espaços de aproximação locais V_I .

Babuška e Melenk (1997) destacam que o espaço de aproximação global V , definido em (74), herda as propriedades de aproximação dos espaços locais V_I e adicionalmente herda a suavidade da partição de unidade $\{\phi_I\}$. Dessa forma, a construção do espaço de aproximação empregado na obtenção da solução aproximada de um problema pode ser feita levando-se em consideração o conhecimento *a priori* que se tem da solução. Além disso, espaços com qualquer ordem de regularidade e gerados por funções não-polinomiais podem ser construídos.

O MEFPU tem propriedades de aproximação similares às chamadas versões h e p do MEF convencional. Se os espaços de aproximação locais V_I são constituídos por polinômios de grau fixo p e a aproximação em V_I é alcançada por meio da redução do tamanho da região Ω_I , o MEFPU se comporta como a versão h do MEF. Por outro lado, se o tamanho das regiões Ω_I é mantido fixo e o grau dos polinômios de V_I é alterado (aumentado ou diminuído), o MEFPU se comporta como a versão p do MEF. Desta forma, o MEFPU pode ser caracterizado como uma generalização das versões h e p do MEF convencional (Melenk e Babuška, 1996).

A construção das funções de partição de unidade pode ser feita de diversos modos. Contudo, a literatura destaca que os dois métodos tradicionalmente mais empregados são:

- a) método dos mínimos quadrados móveis: considerando um domínio unidimensional $-1 \leq \xi \leq 1$ discretizado por um conjunto de N pontos (ou nós) regularmente espaçados. Assumindo que cada nó possui um parâmetro nodal u_I associado, $1 \leq I \leq N$, então a aproximação local de u_I pode ser escrita por meio da combinação linear de n funções de base g_J , com $1 \leq J \leq n$ e $n \leq N$, conforme dado na expressão (75) (Lancaster, 1979; Dolbow e Belytschko, 1998):

$$u_I^h(\xi) = \sum_{J=1}^n g_J(\xi) a_J(\xi_I) = \hat{g}_i \hat{a}_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (75)$$

no qual \hat{g}_i é um vetor que agrupa as funções de base, geralmente organizado segundo o padrão dado em (76), e \hat{a}_i é um vetor que agrupa os coeficientes associados às

funções de base, organizado conforme expressão (77).

$$\hat{g}_i = \left\{ 1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \dots \quad \xi^{n-1} \right\}^T \quad 1 \leq i \leq n \quad (76)$$

$$\hat{a}_i = \left\{ a_1(\xi) \quad a_2(\xi) \quad a_3(\xi) \quad \dots \quad a_{n-1}(\xi) \right\}^T \quad 1 \leq i \leq n \quad (77)$$

Aplicando a relação (75) no cálculo do método dos mínimos quadrados, utilizando uma função de ponderação $w(\xi, \xi_I)$, se obtém a expressão de erro dada em (78) (Lancaster, 1979; Dolbow e Belytschko, 1998),

$$\bar{E} = \sum_{I=1}^N \left\{ w(\xi - \xi_I) [u_I^h - u_I]^2 \right\} \quad (78)$$

cuja minimização conduz ao sistema de equações lineares dado em (79):

$$A_{ij}\hat{a}_j = G_{ik}\hat{u}_k \quad 1 \leq i, j \leq n \text{ e } 1 \leq k \leq N \quad (79)$$

no qual A_{ij} e G_{ik} são matrizes determinadas por meio das relações (80) e (81), respectivamente, \hat{u}_k é um vetor que agrupa os parâmetros nodais u_I , organizado conforme dado em (82), e \hat{a}_j é o vetor dado em (77).

$$A_{ij} = \sum_{I=1}^N w(\xi - \xi_I) \hat{g}_i(\xi_I) \hat{g}_j(\xi_I) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (80)$$

$$G_{ik} = \left[\begin{array}{cccc} w(\xi - \xi_1) \hat{g}_i(\xi_1) & w(\xi - \xi_2) \hat{g}_i(\xi_2) & \dots & w(\xi - \xi_N) \hat{g}_i(\xi_N) \end{array} \right] \quad 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq k \leq N \quad (81)$$

$$\hat{u}_k = \left\{ u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N \right\} \quad 1 \leq k \leq N \quad (82)$$

Desta forma, a aproximação u^h de u pode ser escrita segundo a expressão (83) (Lancaster, 1979; Dolbow e Belytschko, 1998):

$$u^h(\xi) = \sum_{I=1}^N \varphi_I(\xi) u_I \quad (83)$$

As funções de interpolação, $\varphi_I(\xi)$, dadas em (83) são calculadas por meio da relação (84) (Dolbow e Belytschko, 1998):

$$\varphi_I(\xi) = \hat{g}_i A_{ij}^{-1} G_{jk} \quad 1 \leq i, j \leq n \text{ e } k = I \quad (84)$$

Um caso especial da expressão (84) é obtido quando se considera uma única função de base, de tal forma que $n = 1$ e $\hat{g}_i = \{1\}$. Nesta condição se obtém o resultado

(85),

$$\varphi_I(\xi) = \frac{w(\xi - \xi_I)}{\sum_{I=1}^N w(\xi - \xi_I)} \quad (85)$$

o qual recai na expressão do chamado método de Shepard. Neste método, a ordem de regularidade das funções de interpolação é herdada da regularidade da função peso $w(\xi, \xi_I)$ considerada (Dolbow e Belytschko, 1998). Além disso, tal condição de construção caracteriza a geração de funções de interpolação racionais, as quais não satisfazem a propriedade do delta de Kronecker e, conseqüentemente, geram dificuldades para aplicação das condições de contorno essenciais do problema. Contudo, independentemente da função peso considerada, tal método de construção das funções de interpolação permite se reproduzir o comportamento de qualquer função que esteja contida na base \hat{g}_i dada em (76), dado que $n > 1$ (Oh et al., 2007; Melenk e Babuška, 1996).

- b) funções polinomiais: neste caso faz-se uso dos chamados polinômios interpoladores de Lagrange, para partições de unidade com regularidade C^0 , ou dos polinômios interpoladores de Hermite, para partições de unidade com regularidade C^{k-1} , $k \geq 1$. Além disso, é possível se empregar uma técnica de construção das funções de partição de unidade com regularidade C^{k-1} , $k \geq 1$, mediante o produto de dois polinômios distintos. Nesta técnica, as funções de partição de unidade, para o caso unidimensional, por exemplo, são dadas por meio da expressão (86) (Oh et al., 2007):

$$\phi_I(\xi) = \begin{cases} (1 - \xi)^k g(-\xi) & \xi \in [0, 1]; I = 1 \\ (1 + \xi)^k g(\xi) & \xi \in [-1, 0]; I = 2 \\ 0 & |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (86)$$

no qual ϕ_I é a I -ésima função de partição de unidade e $g(\xi)$ é um polinômio construído com base na expressão (87) (Oh et al., 2007):

$$g(\xi) = a_0 + a_1 [-\xi]^1 + a_2 [-\xi]^2 + \cdots + a_J [-\xi]^J \quad 0 \leq J \leq k - 1 \quad (87)$$

sendo que os coeficientes a_J são determinados por meio de (88) (Oh et al., 2007):

$$a_J = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \binom{k+J-1}{J} a_{J-1} & 1 \leq J \leq k - 1 \end{cases} \quad (88)$$

A Figura 5 apresenta o aspecto geral das funções ϕ_I obtidas por meio da expressão (86).

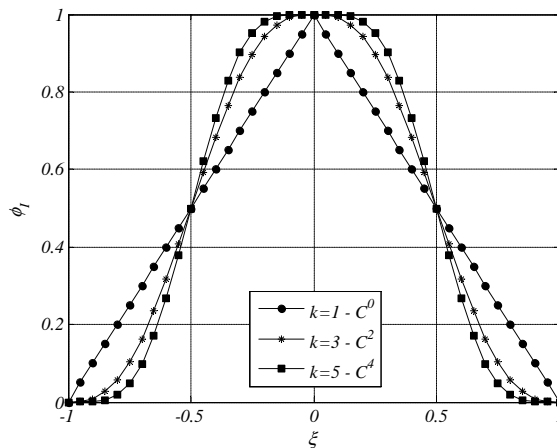


Figura 5: Funções de partição de unidade construídas pelo produto de dois polinômios distintos

Adaptado de: Oh et al. (2007)

2.4 Dinâmica e vibrações mecânicas pelo método dos elementos finitos

2.4.1 VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA

Se uma perturbação é aplicada a uma estrutura elástica de maneira apropriada em um instante de tempo inicial $t = 0$, então tal estrutura pode assumir um estado de oscilação harmônica, o qual é uma propriedade característica da estrutura. Este movimento oscilatório depende basicamente da distribuição de massa e rigidez na estrutura e, não havendo amortecimento, o movimento perdura indefinidamente com amplitude dependente da perturbação inicialmente imposta. As oscilações da estrutura ocorrem em certas frequências, as quais são denominadas frequências naturais ou valores característicos, e com certos padrões de deslocamentos, os quais são denominados modos de vibração ou modos característicos da estrutura (Rao, 2004).

Na ausência de amortecimento e sem a aplicação de forças externas, a estrutura é submetida a um movimento harmônico que pode ser descrito por meio dos deslocamentos e acelerações nodais indicados em (89) e (90), respectivamente (Cook et al., 1989; Rao, 2004).

$$d_i = \bar{A}_i \text{sen}(\omega t) \quad 1 \leq i \leq n_{EQ} \quad (89)$$

$$d_{i,tt} = -\omega^2 \bar{A}_i \text{sen}(\omega t) \quad 1 \leq i \leq n_{EQ} \quad (90)$$

sendo ω a frequência natural de vibração, t o escalar tempo, d_i e $d_{i,tt}$ são os vetores de deslocamentos e acelerações nodais, respectivamente, \bar{A}_i são as amplitudes de vibração dos graus de liberdade nodais e n_{EQ} é o número total de equações do problema discretizado.

Substituindo as expressões (89) e (90) na primeira equação de (61), e assumindo que o vetor de forças F_i é nulo, uma vez que o movimento oscilatório é provocado por uma perturbação instantânea, se obtém o problema generalizado de autovalores dado em (91).

$$\left(K_{ij} - \lambda^{(n)} M_{ij}\right) \bar{A}_j^{(n)} = 0 \quad 1 \leq i, j, n \leq n_{EQ} \quad (91)$$

no qual K_{ij} e M_{ij} são as matrizes de rigidez global e massa global, respectivamente, resultantes da discretização do domínio empregada, $\bar{A}_i^{(n)}$ corresponde ao n -ésimo autovetor, o qual apresenta o n -ésimo autovalor $\lambda^{(n)}$ associado, e n_{EQ} é o número total de equações do problema discretizado. A relação entre $\lambda^{(n)}$ e $\omega^{(n)}$ é dada em (92).

$$\lambda^{(n)} = \left(\omega^{(n)}\right)^2 \quad (92)$$

Uma vez que se está interessado em soluções não triviais para a expressão (91), deve-se resolver o problema generalizado de autovalores de tal forma que os valores de λ satisfaçam a relação (93) (Cook et al., 1989; Rao, 2004).

$$\det(K_{ij} - \lambda M_{ij}) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (93)$$

Rao (2004) descreve que caso as matrizes K_{ij} e M_{ij} tenham sido montadas sem se eliminar os graus de liberdade de corpo rígido da estrutura, algumas frequências naturais obtidas na solução do problema generalizado de autovalores serão nulas. Caso contrário, se ambas matrizes forem positivas definidas, então todos os autovalores serão não-nulos e maiores que zero. As demais propriedades vinculadas ao problema generalizado de autovalores serão abordadas na próxima seção. Para finalizar, cabe destacar que o menor valor não-nulo de $\omega^{(n)}$ é chamado de frequência de vibração fundamental (Cook et al., 1989).

2.4.2 VIBRAÇÃO FORÇADA NÃO AMORTECIDA

2.4.2.1 Solução pelo método da superposição modal

De acordo com Bathe (1996), o método da superposição modal envolve uma mudança de base, transformando-se as coordenadas do espaço euclidiano nas chamadas coordenadas generalizadas modais. Esta transformação é feita pela relação (94):

$$d_i(t) = \Psi_{ij} \bar{d}_j(t) \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (94)$$

no qual $d_i(t)$ é o vetor de deslocamentos nodais em coordenadas euclidianas, $\bar{d}_i(t)$ é o

vetor de deslocamentos nodais em coordenadas generalizadas modais e Ψ_{ij} é a matriz quadrada de ordem n_{EQ} que possui em suas colunas os autovetores provenientes do problema generalizado de autovalores dado em (91), já ortonormalizados com relação à matriz massa global.

A equação de equilíbrio (61), da mesma forma, é transformada para o espaço modal resultando na expressão (95) (Bathe, 1996):

$$\Psi_{ki}M_{kl}\Psi_{lj}\bar{d}_{j,tt}(t) + \Psi_{ki}K_{kl}\Psi_{lj}\bar{d}_j(t) = \Psi_{ji}F_j(t) \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n_{EQ} \quad (95)$$

sendo Ψ_{ij} a matriz dos autovetores, M_{ij} a matriz massa global, K_{ij} a matriz de rigidez global, $F_i(t)$ o vetor de forças global, $\bar{d}_{j,tt}(t)$ o vetor de acelerações nodais expresso em coordenadas generalizadas modais e $\bar{d}_j(t)$ o vetor de deslocamentos nodais expresso em coordenadas generalizadas modais.

As condições iniciais do problema, escritas em coordenadas generalizadas modais, são dadas pelas expressões (96) e (97) (Bathe, 1996):

$$\bar{d}_{o_i} = \Psi_{ji}M_{jk}d_{o_k} \quad 1 \leq i, j, k \leq n_{EQ} \quad (96)$$

$$\bar{d}_{o_{i,t}} = \Psi_{ji}M_{jk}d_{o_{k,t}} \quad 1 \leq i, j, k \leq n_{EQ} \quad (97)$$

no qual \bar{d}_{o_i} e $\bar{d}_{o_{i,t}}$ são os vetores de deslocamentos e velocidades nodais iniciais em coordenadas generalizadas modais.

Ao se fazer a transformação de coordenadas indicada em (95), se obtém n_{EQ} equações diferenciais não homogêneas desacopladas, dadas em termos das coordenadas generalizadas modais \hat{d} , conforme expressão (98) (Bathe, 1996):

$$\hat{d}_{,tt}^{(I)}(t) + [\omega^{(I)}]^2 \hat{d}^{(I)}(t) = \hat{r}^{(I)}(t) \quad 1 \leq I \leq n_{EQ} \quad (98)$$

sendo \hat{d} a coordenada generalizada modal, I a I -ésima equação diferencial desacoplada, $\omega^{(I)}$ a I -ésima frequência natural de vibração livre obtida pela solução do problema generalizado de autovalores (91) e \hat{r} a força generalizada modal determinada por meio da expressão (99).

$$\hat{r}^{(I)}(t) = \psi_i^{(I)} F_i \quad 1 \leq I, i \leq n_{EQ} \quad (99)$$

com $\psi_i^{(I)}$ o I -ésimo autovetor do problema generalizado de autovalores e F_i o vetor de forças global.

As condições iniciais da equação diferencial (98) são dadas nas expressões (100) e (101):

$$\hat{d}^{(I)}(0) = \psi_i^{(I)} M_{ij} d_{o_j} \quad 1 \leq I, i, j \leq n_{EQ} \quad (100)$$

$$\hat{d}_{,t}^{(I)}(0) = \psi_i^{(I)} M_{ij} d_{o_{j,t}} \quad 1 \leq I, i, j \leq n_{EQ} \quad (101)$$

no qual $\hat{d}^{(I)}(0)$ é o valor inicial da coordenada generalizada modal associada com cada equação diferencial I , $\hat{d}_{,t}^{(I)}(0)$ é o valor inicial da velocidade em coordenadas modais associada com cada equação diferencial I , $\psi_i^{(I)}$ é o I -ésimo autovetor do problema generalizado de autovalores (91), M_{ij} é a matriz massa global, d_{o_j} é o vetor de deslocamentos nodais inicial e $d_{o_{j,t}}$ é o vetor de velocidades nodais inicial.

Bathe (1996) descreve que a solução da equação (98) é calculada por meio da integral de Duhamel, conforme expressão (102):

$$\hat{d}^{(I)}(t) = \frac{1}{\omega^{(I)}} \int_0^t \hat{r}^{(I)}(\tau) \text{sen}(\omega^{(I)}(t - \tau)) d\tau + \hat{A}^{(I)} \text{sen}(\omega^{(I)}t) + \hat{B}^{(I)} \text{cos}(\omega^{(I)}t) \quad 1 \leq I \leq n_{EQ} \quad (102)$$

sendo $\omega^{(I)}$ a I -ésima frequência natural de vibração livre, $\hat{r}^{(I)}$ a I -ésima força generalizada, dada em (99), $\hat{A}^{(I)}$ e $\hat{B}^{(I)}$ são constantes a serem determinadas com base nas condições iniciais (100) e (101) para cada equação I .

Desta forma, o vetor de deslocamentos nodais é calculado através da superposição dos n_{EQ} modos de vibração, conforme expressão (103) (Bathe, 1996):

$$d_i(t) = \sum_{I=1}^{n_{EQ}} \psi_i^{(I)} \hat{d}^{(I)}(t) \quad 1 \leq i \leq n_{EQ} \quad (103)$$

sendo d_i o vetor de deslocamentos nodais, $\psi_i^{(I)}$ o I -ésimo autovetor do problema generalizado de autovalores e $\hat{d}^{(I)}$ a I -ésima coordenada generalizada.

2.4.2.2 Solução pelo método de Newmark

A equação matricial que descreve o movimento, obtida pelo processo de semi-discretização apresentada em (60), é dada por (61) e está rerepresentada em (104) para facilitar os desenvolvimentos subsequentes nesta seção.

$$M_{ij} d_{j,tt} + K_{ij} d_j = F_i \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (104)$$

no qual M_{ij} e K_{ij} são as matrizes de massa e rigidez global, $d_{j,tt}(t)$ é o vetor aceleração associado aos graus de liberdade nodais, $d_j(t)$ é o vetor de deslocamentos nodais e $F_i(t)$ é o vetor global de forças nodais.

Adicionalmente, o problema de valor inicial (104) deve satisfazer as condições iniciais dadas em (105) e (106):

$$d_j(x_i, 0) = d_{o_j} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \text{ e } 1 \leq j \leq n_{EQ} \quad (105)$$

$$d_{j,t}(x_i, 0) = d_{o_{j,t}} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \text{ e } 1 \leq j \leq n_{EQ} \quad (106)$$

sendo d_{o_j} e $d_{o_{j,t}}$ os vetores deslocamento nodal inicial e velocidade nodal inicial, respectivamente.

A resolução do problema (104) por um método dito de integração direta, tal como o método de Newmark, por exemplo, é feita por meio de um procedimento numérico executado por passos. Basicamente, duas considerações são utilizadas neste tipo de procedimento. A primeira consideração diz respeito ao fato de que a equação (104) não é satisfeita ao longo de todo o intervalo de tempo $(0, T]$, mas apenas em intervalos discretos de tempo Δt . O resultado desta consideração é que se observam estados de equilíbrio, os quais incluem as forças de inércia, para cada ponto discreto de tempo $0 < t \leq T$. A segunda consideração, por sua vez, trata da forma como a variação das grandezas deslocamento, velocidade e aceleração são calculadas em cada intervalo de tempo Δt da resolução (Bathe, 1996).

Tendo em vista as características supracitadas, a equação do movimento escrita de forma incremental em t , para $t = (0, T)$, conforme dado em (107), e as condições de contorno (105) e (106) reescritas em termos da abordagem incremental como dado em (108) e (109), respectivamente, o algoritmo do método de Newmark pode ser descrito conforme indicado nas alíneas a) a c) seguintes (Bathe, 1996; Hughes, 2000; Rao, 2000).

$$M_{ij}d_{j,tt}^{\{t+\Delta t\}} + K_{ij}d_j^{\{t+\Delta t\}} = F_i^{\{t+\Delta t\}} \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (107)$$

$$d_j^{\{0\}} = d_j(0) = d_{o_j} \quad 1 \leq j \leq n_{EQ} \quad (108)$$

$$d_{j,t}^{\{0\}} = d_{j,t}(0) = d_{o_{j,t}} \quad 1 \leq j \leq n_{EQ} \quad (109)$$

no qual $d_{j,tt}^{\{t+\Delta t\}}$ é o vetor de acelerações nodais calculado no instante de tempo $t + \Delta t$, $d_j^{\{t+\Delta t\}}$ é o vetor de deslocamentos nodais calculado no instante de tempo $t + \Delta t$, $F_i^{\{t+\Delta t\}}$ é o vetor de forças nodais calculado no instante de tempo $t + \Delta t$, $d_j^{\{0\}}$ e $d_{j,t}^{\{0\}}$ são, respectivamente, os vetores de deslocamentos e velocidades nodais referentes ao instante de tempo $t = 0$, isto é, são as condições iniciais do PNCI (107).

- a) selecionar o incremento de tempo desejado Δt e os valores dos parâmetros α e δ , de tal forma que as relações (110) e (111) sejam satisfeitas;

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad (110)$$

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2 \quad (111)$$

- b) para o passo inicial de tempo, isto é, $t = 0$, calcular a aceleração correspondente, $d_{j,tt}^{\{0\}}$, por meio da expressão (112);

$$M_{ij}d_{j,tt}^{\{0\}} = F_i^{\{0\}} - K_{ij}d_j^{\{0\}} \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (112)$$

c) para cada passo de tempo Δt , com $0 < t \leq T - \Delta t$, após o passo inicial:

c.1) calcular o vetor de forças efetivo para o passo $\{t + \Delta t\}$, $\hat{F}_i^{\{t+\Delta t\}}$, por meio da relação (113);

$$\hat{F}_i^{\{t+\Delta t\}} = F_i^{\{t+\Delta t\}} + M_{ij} \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} d_j^{\{t\}} + \frac{1}{\alpha \Delta t} d_{j,t}^{\{t\}} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) d_{j,tt}^{\{t\}} \right] \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (113)$$

c.2) resolver a equação (114) para o vetor de deslocamentos no passo $\{t + \Delta t\}$, $d_j^{\{t+\Delta t\}}$;

$$\left(K_{ij} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M_{ij} \right) d_j^{\{t+\Delta t\}} = \hat{F}_i^{\{t+\Delta t\}} \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (114)$$

c.3) calcular os vetores aceleração e velocidade no passo $\{t + \Delta t\}$, $d_{j,tt}^{\{t+\Delta t\}}$ e $d_{j,t}^{\{t+\Delta t\}}$, respectivamente, conforme equações (115) e (116).

$$d_{j,tt}^{\{t+\Delta t\}} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(d_j^{\{t+\Delta t\}} - d_j^{\{t\}} \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} d_{j,t}^{\{t\}} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) d_{j,tt}^{\{t\}} \quad 1 \leq j \leq n_{EQ} \quad (115)$$

$$d_{j,t}^{\{t+\Delta t\}} = d_{j,t}^{\{t\}} + (1 - \delta) \Delta t d_{j,tt}^{\{t\}} + \delta \Delta t d_{j,tt}^{\{t+\Delta t\}} \quad 1 \leq j \leq n_{EQ} \quad (116)$$

De acordo com Bathe (1996) e Rao (2000), as constantes α e δ empregadas no método de Newmark, conforme dado na alínea “a)” acima, determinam a forma como os deslocamentos, velocidades e acelerações são calculados em cada passo de tempo da solução. Os autores destacam que para $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{6}$, o método de Newmark considera uma variação linear da aceleração entre os passos de tempo $\{t\}$ e $\{t + \Delta t\}$. Por outro lado, com $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{4}$, o método considera que a aceleração é constante entre os passos de tempo $\{t\}$ e $\{t + \Delta t\}$.

Bathe (1996) argumenta que se os parâmetros α e δ escolhidos satisfizerem as relações (110) e (111), então o método de Newmark é incondicionalmente estável, ou seja, para qualquer incremento de tempo Δt considerado o método convergirá. Todavia, o autor destaca que a estabilidade do método não assegura a precisão da solução obtida para um Δt qualquer. Desta forma, Bathe (1996) descreve algumas recomendações sobre a escolha de Δt :

a) para simulações de dinâmica estrutural, considerando que a máxima frequência presente no carregamento externo é ω_{max} , então deve-se utilizar um incremento de tempo que satisfaça a relação (117);

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{40\omega_{max}} \quad (117)$$

b) para simulações de propagação de onda, o incremento deve satisfazer a relação (118).

$$\Delta t \leq \frac{L_{EF}}{c} \quad (118)$$

sendo L_{EF} o comprimento efetivo do menor elemento da malha e c é a velocidade de propagação da onda no meio contínuo, a qual depende do tipo de problema considerado.

De acordo com Bathe (1996), a relação (118) é conhecida como condição de CFL (devido a R. Courant, K. Friedrichs e H. Levy) e resulta na melhor precisão da solução quando se assume a igualdade em tal expressão.

2.4.2.3 Aspectos gerais sobre a aplicação de forças impulsivas

De acordo com Timoshenko e Goodier (1951), Cook et al. (1989) e Clough e Penzien (2003), a aplicação de forças impulsivas em um certo corpo, isto é, forças repentinamente aplicadas, caracterizam o chamado problema de propagação de ondas elásticas. Como este assunto não é objeto de estudo principal deste trabalho, apenas alguns tópicos gerais relacionados ao tema são apresentados nesta seção, os quais têm a finalidade de promover um embasamento teórico para a simulação do problema de vibração forçada de uma barra submetida a um carregamento impulsivo que será tratado no Capítulo 6.

Timoshenko e Goodier (1951) descrevem que ao se aplicar uma força impulsiva em um corpo, as suas porções remotas, em relação ao ponto de aplicação da carga, inicialmente permanecem sem qualquer perturbação. As deformações produzidas por esta força externa, contudo, posteriormente se propagam pelo corpo na forma de ondas elásticas, com velocidade de propagação igual a c . Desta forma, a magnitude de c e as dimensões do corpo determinam o tempo necessário para que uma onda atravesse completamente o corpo. Neste caso, assim como evidenciado em ondas sonoras, as ondas elásticas também apresentam o fenômeno da reflexão, o qual deve ser levado em consideração quando uma onda elástica atinge alguma extremidade do corpo na qual se propaga (Kolsky, 1963).

Kolsky (1963) descreve que para o caso unidimensional a equação da onda é escrita como dado em (119):

$$u_{1,tt} = c^2 u_{1,11} \quad (119)$$

sendo u_1 o deslocamento na direção e_1 .

A solução geral da equação (119), segundo Kolsky (1963), pode ser escrita conforme dado na expressão (120):

$$u_1 = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct) \quad (120)$$

sendo t a variável tempo, c a velocidade de propagação da onda no corpo e f e g são duas funções arbitrárias que dependem das condições iniciais do problema.

Kolsky (1963) e Clough e Penzien (2003) comentam que a função f indicada na expressão (120) descreve a propagação de uma onda plana na direção x_1 , enquanto que a função g corresponde a uma onda plana que se propaga na direção $-x_1$, conforme mostrado esquematicamente na Figura 6(a). Além disso, os autores ressaltam que a forma da onda não se altera para diferentes instantes de tempo, isto é, a onda viaja ao longo do corpo com velocidade c , assumindo diferentes posições para cada instante de tempo t , porém sem sofrer alteração da sua forma (ver Figura 6(b)).

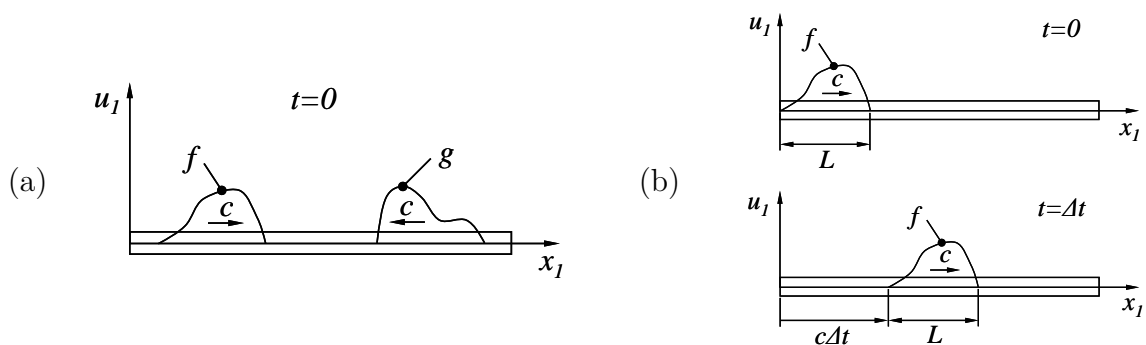


Figura 6: (a) Representação esquemática de ondas elásticas da solução geral da equação da onda para o caso unidimensional e (b) Propagação da onda elástica para diferentes instantes de tempo

Adaptado de: Clough e Penzien (2003)

De um modo geral, Cook et al. (1989) e Clough e Penzien (2003) comentam que os problemas dinâmicos que envolvem a aplicação de cargas impulsivas são caracterizados pela excitação de um grande número de frequências naturais do corpo. Em decorrência disso, a solução da resposta estrutural, como dado genericamente em (120), tem a participação inclusive de termos associados às altas frequências de vibração.

Do ponto de vista matemático, os tipos de carregamentos impulsivos comumente mais empregados no estudo de vibrações mecânicas são o Heaviside e o triangular, conforme mostrado nas Figuras 7(a) e 7(b), respectivamente.

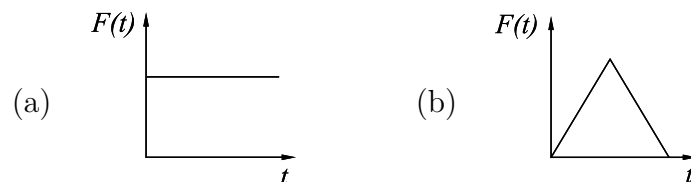


Figura 7: Carregamento impulsivo tipo (a) Heaviside e (b) triangular

Adaptado de: Clough e Penzien (2003)

2.5 Problema de autovalores

2.5.1 PROBLEMA PADRÃO DE AUTOVALORES

Segundo Cook et al. (1989), o problema padrão de autovalores é dado pela expressão (121):

$$(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \psi_j = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n_M \quad (121)$$

no qual A_{ij} corresponde à matriz do problema de interesse, ψ_j é um autovetor do problema, λ é o autovalor associado ao autovetor ψ_j , δ_{ij} é a matriz identidade e n_M corresponde à ordem da matriz A_{ij} .

Cook et al. (1989) destacam que as principais propriedades vinculadas ao problema (121) são:

- a) Se A_{ij} é real e simétrica, então todos os autovalores $\lambda^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_M$, são reais;
- b) Se A_{ij} é real, simétrica e positiva semi-definida⁶, então não há autovalores negativos⁷;
- c) Se A_{ij} é real, simétrica e positiva definida, então todos os autovalores $\lambda^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_M$, são positivos;
- d) Se todos os autovalores $\lambda^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_M$, são distintos, então todos os autovetores $\psi_j^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_M$, são distintos e linearmente independentes.

2.5.2 PROBLEMA GENERALIZADO DE AUTOVALORES

De acordo com Bathe (1996), o problema generalizado de autovalores pode ser escrito segundo a expressão (122):

$$(K_{ij} - \lambda M_{ij}) \psi_j = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (122)$$

no qual, considerando uma abordagem voltada para a Mecânica dos Sólidos, K_{ij} corresponde à matriz de rigidez global, M_{ij} é a matriz massa global, ψ_j é um autovetor do problema, λ é o autovalor associado ao autovetor ψ_j e n_{EQ} corresponde ao número total de equações do problema, o qual está relacionado com a discretização do domínio empregada.

⁶De acordo com Cook et al. (1989), se A_{ij} é uma matriz quadrada real e x_i é um vetor real de mesma ordem, então, considerando um escalar $F = x_i A_{ij} x_j$, tem-se as seguintes denominações:

- a) A_{ij} é positiva definida se $F > 0$ para todo x_i ;
- b) A_{ij} é positiva semi-definida se $F \geq 0$ para todo x_i ;
- c) A_{ij} é negativa semi-definida se $F \leq 0$ para todo x_i ;
- d) A_{ij} é negativa definida se $F < 0$ para todo x_i .

⁷Segundo Cook et al. (1989), o número de autovalores negativos é igual ao posto da matriz A_{ij} .

Como as ordens das matrizes K_{ij} e M_{ij} são iguais a n_{EQ} , então a solução do problema (122) fornece n_{EQ} pares de autovalores e autovetores, $\{\lambda^{(r)}, \psi_j^{(r)}\}$, com $1 \leq r \leq n_{EQ}$, tais que a equação (123) é sempre satisfeita (Bathe, 1996):

$$(K_{ij} - \lambda^{(r)} M_{ij}) \psi_j^{(r)} = 0 \quad 1 \leq i, j, r \leq n_{EQ} \quad (123)$$

As principais propriedades relacionadas com os autovalores e autovetores do problema generalizado (122) são dadas pelas expressões (125) a (127) (Dhatt e Touzot, 1984; Bathe, 1996):

- a) Um autovetor $\psi_i^{(r)}$ é sempre ortogonal à matriz massa M_{ij} . Caso seja empregada uma estratégia de normalização como condição suplementar na resolução do problema generalizado, como aquela apresentada em (124), então os autovetores assumem a propriedade de ortonormalidade com relação à matriz massa M_{ij} , resultando na expressão (125):

$$\psi_i^{(r)} M_{ij} \psi_j^{(r)} = 1 \quad 1 \leq i, j, r \leq n_{EQ} \quad (124)$$

$$\psi_i^{(r)} M_{ij} \psi_j^{(s)} = \delta_{rs} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{EQ} \quad (125)$$

- b) Um autovetor $\psi_i^{(r)}$ é sempre ortogonal à matriz de rigidez K_{ij} , tal que a equação (126) é satisfeita:

$$\psi_i^{(r)} K_{ij} \psi_j^{(s)} = \lambda^{(r)} \delta_{rs} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{EQ} \quad (126)$$

- c) O conjunto formado por todos os autovetores do problema generalizado (122), $\{\psi_i^{(r)}\}_{r=1}^{n_{EQ}}$, constitui uma base para o espaço $\mathbb{R}^{n_{EQ}}$, uma vez que os autovetores $\psi_i^{(r)}$, para $1 \leq r \leq n_{EQ}$, são linearmente independentes entre si. Matematicamente tem-se a relação (127):

$$\{\psi_i^{(r)}\}_{r=1}^{n_{EQ}} = \text{span}(\mathbb{R}^{n_{EQ}}) \quad (127)$$

Observação: O espaço gerado por $\{\psi_i^{(r)}\}_{r=1}^{n_{EQ}}$ é comumente chamado de espaço modal.

Hughes (2000) comenta que, de um modo geral, a matriz K_{ij} é simétrica e positiva semi-definida, enquanto que a matriz M_{ij} é simétrica e positiva definida. Em função disso, os autovalores $\lambda^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_{EQ}$, são tais que obedecem a relação (128):

$$0 \leq \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n_{EQ})} \quad (128)$$

Por outro lado, se a matriz K_{ij} é simétrica e positiva definida, então a expressão (128) pode ser reescrita na forma dada em (129) (Hughes, 2000; Cook et al., 1989):

$$0 < \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n_{EQ})} \quad (129)$$

A equação (129) implica que se K_{ij} e M_{ij} são matrizes positivas definidas, então todos os autovalores associados ao problema generalizado dado em (122) são positivos e não nulos⁸.

2.5.3 TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA GENERALIZADO DE AUTOVALORES NO PROBLEMA PADRÃO

Bathe (1996) descreve que o problema generalizado de autovalores (122) pode ser transformado no problema padrão (121) mediante a execução de algumas operações algébricas básicas. Considerando que a matriz M_{ij} presente na expressão (122) é positiva definida, então tal matriz é passível da decomposição expressa em (130):

$$M_{ij} = S_{ir}S_{jr} \quad 1 \leq i, j, r \leq n_{EQ} \quad (130)$$

sendo S_{ij} uma matriz não singular qualquer⁹.

Substituindo M_{ij} dada em (130) no problema generalizado de autovalores (122) obtém-se (131):

$$(K_{ij} - \lambda S_{ir}S_{jr}) \psi_j \quad 1 \leq i, j, r \leq n_{EQ} \quad (131)$$

Pré-multiplicando a expressão (131) por S_{ij}^{-1} e definindo um vetor $\tilde{\psi}_i$ dado por (132):

$$\tilde{\psi}_i = S_{ji}\psi_j \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (132)$$

obtém-se o resultado (133):

$$(\tilde{K}_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \tilde{\psi}_j \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (133)$$

no qual a matriz \tilde{K}_{ij} é calculada por (134):

$$\tilde{K}_{ij} = S_{ir}^{-1}K_{rs}S_{js}^{-1} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{EQ} \quad (134)$$

Portanto, a expressão (133) tem a forma do problema padrão de autovalores apresentado em (121). Os autovalores $\lambda^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_{EQ}$, provenientes da solução do problema

⁸Segundo Bathe (1996), o número de autovalores nulos do problema (122) corresponde ao número de modos de corpo rígido do sistema.

⁹Bathe (1996) comenta que a matriz S_{ij} pode ser obtida por meio da fatoração de Cholesky ou pelo procedimento de decomposição espectral. Ainda, segundo o autor, entre estes dois métodos, a fatoração de Cholesky é o que apresenta maior eficiência computacional pois requer menos operações.

(133) são idênticos aos autovalores do problema generalizado (122). Por outro lado, os autovetores $\tilde{\psi}_i^{(r)}$, $1 \leq r \leq n_{EQ}$, devem ser transformados para os correspondentes $\psi_i^{(r)}$, relativos ao problema generalizado (122), de acordo com a equação (135) (Bathe, 1996):

$$\psi_i^{(r)} = S_{ji}^{-1} \tilde{\psi}_j^{(r)} \quad 1 \leq i, j, r \leq n_{EQ} \quad (135)$$

2.5.4 ASPECTOS GERAIS SOBRE A SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

De acordo com Bathe (1996) e Kreyszig (2011), há diversos métodos que podem ser aplicados para a solução do problema de autovalores, tanto para o caso padrão (121) quanto para o caso generalizado (122). Entre os principais métodos estão:

- a) Problema padrão: método de Jacobi, método de Givens, método de Householder-QR;
- b) Problema generalizado: método de Jacobi generalizado, método da iteração de subespaço, método de Lanczos.

Como o objetivo deste trabalho não consiste em avaliar os métodos de resolução do problema de autovalores em si, mas sim os resultados obtidos com o uso deles para lidar com as matrizes K_{ij} e M_{ij} provenientes do método de aproximação empregado (MEF, MEFPU), nesta seção serão apresentados apenas os tópicos relevantes do método da iteração de subespaço. A escolha por esse método se deu em função da disponibilidade do algoritmo implementado¹⁰ de forma compatível com a plataforma do MEF construída no decorrer do trabalho - linguagem Fortran e estratégia de armazenamento de dados do tipo *skyline* para matrizes simétricas.

Bathe (1996) descreve que o objetivo do método da iteração de subespaço consiste em resolver os z menores autovalores e autovetores do problema generalizado (122), satisfazendo a relação (136):

$$K_{ij} \Psi_{js} = M_{ij} \Psi_{jr} \Lambda_{rs} \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad 1 \leq r, s \leq z \quad (136)$$

no qual Λ_{ij} é uma matriz diagonal que contém os autovalores, ou seja, $\Lambda_{ij} = \text{diag}(\lambda^{(r)})$, $1 \leq i, j, r \leq z$, e Ψ_{ij} , $1 \leq i \leq n_{EQ}$ e $1 \leq j \leq z$, é uma matriz que contém em cada coluna os autovetores correspondentes, isto é, $\Psi_{iz} = [\psi_{i1}, \dots, \psi_{iz}]$.

O método da iteração de subespaço consiste de três etapas (Bathe, 1996):

- a) Estabelecer q vetores de iteração iniciais, com $q > z$, sendo z o número de autovalores e autovetores a ser calculado;

¹⁰Sub-rotina “sspace”, conforme referência (Bathe, 1996).

- b) Usar simultaneamente um procedimento de iteração inversa sobre os q vetores e análise de Ritz para se obter as aproximações dos autovalores e autovetores a partir dos q vetores de iteração;
- c) Tendo-se alcançado a convergência nas iterações, usar a propriedade da sequência de Sturm para verificar se os autovalores e autovetores foram efetivamente calculados.

Com relação à etapa “a)”, Bathe (1996) expõe que os q vetores de iteração iniciais devem ser construídos de tal forma a excitar os graus de liberdade que estejam associados com os maiores valores de massa e os menores valores de rigidez da discretização efetuada. Os vetores iniciais são armazenados nas colunas de uma matriz X_{ij} , $1 \leq i \leq n_M$ e $z < j \leq q$, sendo $q = \min \{2z, z + 8\}$, tal que: a primeira coluna é formada simplesmente pela diagonal de M_{ij} ; as demais colunas, exceto a última, são formadas por vetores unitários com entradas +1 nos graus de liberdade com as menores razões $\frac{k_{ii}}{m_{ii}}$; e a última coluna é formada por um vetor aleatório qualquer.

Sobre a etapa “b)”, Bathe (1996) descreve que os passos da iteração têm a finalidade de conduzir o subespaço inicial, denominado $E^{(1)}$ e gerado pelos vetores da matriz X_{ij} , até o subespaço de interesse, denominado $E^{(\infty)}$, o qual corresponde a um subespaço menos dominante de K_{ij} e M_{ij} , de dimensão z , e que é gerado pelos autovetores de (136). Bathe (1996) comenta ainda que na execução das iterações empregando uma estratégia numérica computacional, para cada iteração r , os vetores de X_{ij}^r perdem gradativamente a ortogonalidade entre si, levando à construção de uma base para o subespaço $E^{(r)}$ cada vez mais pobre. Assim, visando contornar este problema, dentro de cada iteração está embutida uma operação que assegura a preservação da estabilidade numérica, a qual é realizada pelo processo de ortogonalização dos vetores de iteração com as projeções de K_{ij} e M_{ij} em $E^{(r+1)}$. Uma vez que as iterações são executadas em um subespaço, é requerido do método apenas a convergência do subespaço, e não a convergência individual de cada vetor de iteração para um dado autovetor, tornando assim o método mais efetivo.

Por fim, na etapa “c)”, Bathe (1996) argumenta que a propriedade da sequência de Sturm para os polinômios característicos de $K_{ij}\psi_j = \lambda M_{ij}\psi_j$ e $K_{ij}^{(r)}\psi_j^{(r)} = \lambda^{(r)} M_{ij}^{(r)}\psi_j^{(r)}$ é aplicada com uma translação μ , no qual μ está ligeiramente à direita do valor calculado de $\lambda^{(z)}$. A propriedade da sequência de Sturm estabelece que na fatoração de Gauss de $K_{ij} - \mu M_{ij}$ em $L_{ir}H_{rs}L_{sj}$, sendo H_{ij} uma matriz diagonal, o número de elementos negativos em H_{ij} é igual ao número de autovalores menores do que μ . Neste caso, é esperado que se tenha z valores negativos em H_{ij} (Bathe, 1996).

Para maiores detalhes sobre o método e consulta ao algoritmo de solução e seus detalhes de implementação, o leitor deve consultar a referência (Bathe, 1996).

2.5.5 PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA DE AUTOVALORES PELO MEF

De acordo com Strang e Fix (1973), Carey e Oden (1983) e Hughes (2000), uma estimativa de erro padrão para a aproximação do problema de autovalores pelo MEF é dada pelo Teorema 2.5.5.1.

Teorema 2.5.5.1. Considerando um espaço de elementos finitos de ordem polinomial p , então existe uma constante C tal que a aproximação dos autovalores apresenta limites, para pequenos valores de h , conforme dado na relação (137):

$$\lambda^{(r)} \leq \lambda^{h(r)} \leq \lambda^{(r)} + Ch^{2(p+1-m)} \left(\lambda^{(r)} \right)^{(p+1)/m} \quad (137)$$

no qual $\lambda^{(r)}$ é o r -ésimo autovalor exato, $\lambda^{h(r)}$ é a aproximação obtida pelo MEF para o r -ésimo autovalor, C é uma constante independente de h e $\lambda^{(r)}$, h é um parâmetro associado à malha (geralmente representa o tamanho do maior elemento da malha), p é a ordem polinomial do espaço de aproximação do MEF e m é a ordem do espaço de Hilbert H^m associado com a aproximação.

Strang e Fix (1973) destacam que, caso se deseje levar em consideração a ordem de regularidade do espaço de aproximação C^k ao se empregar a relação dada em (137), deve-se utilizar o Teorema de imersão de Sobolev, enunciado no Teorema A.5.1, que correlaciona o conjunto C^k com o espaço de Hilbert H^m .

A estimativa de erro *a priori* dada em (137) apresenta as implicações indicadas nas alíneas a) a c):

- a) o limite inferior da aproximação do r -ésimo autovalor corresponde ao próprio autovalor exato, enquanto que o limite superior da aproximação é função de h , p , m e do próprio autovalor exato $\lambda^{(r)}$ (Strang e Fix, 1973; Hughes, 2000);
- b) o último termo da relação (137) indica que os autovalores associados com os modos mais elevados são progressivamente mais difíceis de serem computados, isto é, há uma perda progressiva na precisão dos valores obtidos para as aproximações dos autovalores associados com os modos de mais alta ordem de um dado problema (Strang e Fix, 1973; Hughes, 2000);
- c) a taxa de convergência da aproximação depende de p e m , sendo da ordem de $2(p+1-m)$ (Hughes, 2000).

Visando comparar as aproximações das frequências naturais de vibração livre para o problema de uma barra engastada-engastada obtidas pelo MEF convencional e pelo método de análise isogeométrica com o emprego de funções de base do tipo NURBS, Cottrell et al. (2006), Cottrell et al. (2007) e Hughes et al. (2008) apresentaram os resultados obtidos por meio de um gráfico que mostra o comportamento das frequências

naturais aproximadas (raízes quadradas dos autovalores), normalizadas com relação à solução analítica, *versus* o número do modo de vibração associado, normalizado com relação ao número total de modos aproximados. Tal gráfico é apresentado na Figura 8 e reflete claramente a observação da alínea “b)” acima. Nessa Figura, $\omega^{h(n)}$ representa a aproximação da n -ésima frequência natural, $\omega^{(n)}$ é o valor exato da n -ésima frequência natural, n é o n -ésimo modo de vibração e N é o número total de modos de vibração aproximados.

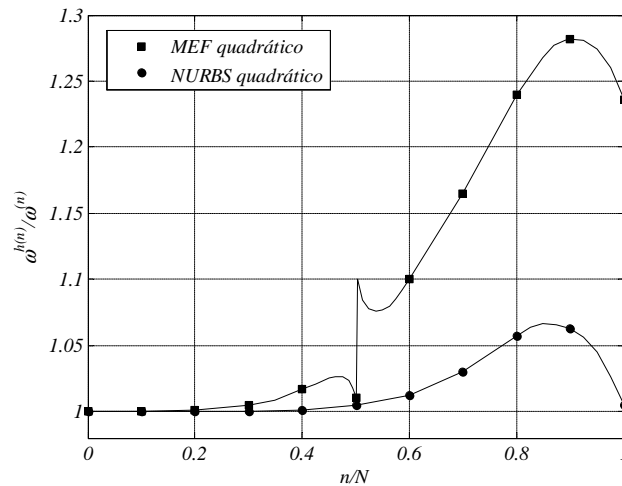


Figura 8: Espectro normalizado de frequências naturais de vibração para o problema da barra engastada-engastada

Adaptado de: Cottrell et al. (2006)

Observação: na Figura 8, o MEF quadrático corresponde ao elemento de barra Lagrangeano quadrático de três nós, enquanto que o NURBS quadrático refere-se ao elemento de barra construído através do método isogeométrico.

Cottrell et al. (2006) e Cottrell et al. (2007) descrevem as seguintes observações com relação aos resultados indicados na Figura 8 (e em outros gráficos disponíveis em seus trabalhos, os quais não foram reproduzidos aqui):

- o espectro obtido pelo MEF com elementos quadráticos consiste de uma parte dita acústica, associada com os menores modos, e uma parte dita ótica, associada com os modos de mais alta ordem;
- no caso do MEF com regularidade C^0 , na medida em que se aumenta o grau polinomial p o erro relacionado com a parte ótica do espectro aumenta, ou seja, os erros para as altas frequências aumentam na medida em que o grau polinomial p aumenta;
- em análises numéricas, tanto pelo MEF como pelo método isogeométrico proposto por Cottrell et al. (2006), as frequências vinculadas à parte ótica são tratadas como de baixa acuracidade e, em aplicações de análise transiente, por exemplo, elas podem dificultar os cálculos por requererem um pequeno incremento de tempo para se assegurar a estabilidade do método utilizado.

Givoli (2008) apresenta uma regra empírica, conforme equação (138), que permite correlacionar o número total de graus de liberdade do problema discretizado com o número aproximado de autovalores que atendem uma certa tolerância de precisão de interesse. Contudo, tal regra foi derivada com base em uma série de simplificações matemáticas, o que torna sua aplicação muito restrita ou apenas como um parâmetro de cunho meramente orientativo.

$$\bar{M} = A_1 \bar{\varepsilon}^{\left(\frac{n_{DE}}{2p}\right)} n_{GL} \quad (138)$$

no qual \bar{M} representa o número aproximado de autovalores que atendem uma certa tolerância de erro relativo $\bar{\varepsilon}$ desejada, n_{DE} é o número de dimensões espaciais, p é a ordem polinomial do espaço de aproximação, n_{GL} é o número de graus de liberdade do problema discretizado e A_1 é uma constante a ser determinada com base nas características do problema a ser resolvido.

3 DESENVOLVIMENTO DOS ELEMENTOS FINITOS QUADRILATERAIS DE QUATRO NÓS C^1 E C^2 PELO MEFPU

Neste Capítulo são desenvolvidos os tópicos referentes à implementação dos elementos finitos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2 , gerados mediante a técnica do MPU. Os tópicos em questão compreendem a construção das funções de partição de unidade unidimensionais, as funções de enriquecimento unidimensionais e as funções de interpolação bidimensionais mediante produto tensorial das funções unidimensionais. Por fim, alguns tópicos relacionados com a implementação computacional destes elementos são abordados.

3.1 Construção das funções de partição de unidade C^1 e C^2

A estratégia de desenvolvimento das funções de interpolação que geram os espaços de aproximação com a ordem de regularidade desejada por meio do MPU requer inicialmente a seleção ou a construção das chamadas funções de partição de unidade (PU) que satisfaçam as propriedades (70) a (73). Assim, admitindo que as funções de partição de unidade, ϕ_I , sejam polinomiais, então, de acordo com Strang e Fix (1973), o grau polinomial p requerido para que as mesmas pertençam à classe $C^k(\bar{\Omega})$ deve ser tal que a relação (139) seja satisfeita:

$$p = 2^{n_{DE}}k + 1 \quad (139)$$

no qual p é o grau polinomial da função ϕ_I , n_{DE} é a dimensão do espaço do problema ($\mathbb{R}^{n_{DE}}$) e k é a ordem de regularidade do espaço de aproximação construído.

Considere um elemento formado por dois nós no domínio paramétrico unidimensional ξ , $-1 \leq \xi \leq 1$. Os graus polinomiais das funções de partição de unidade, expressas neste domínio paramétrico, para os casos de regularidade C^1 e C^2 , calculados por meio da relação (139), com $n_{DE} = 1$, estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1: Grau dos polinômios das funções de partição de unidade unidimensionais para os casos C^1 e C^2

Regularidade desejada (k)	Grau polinomial (p)
C^1	3
C^2	5

Uma vez definido o grau polinomial p , conforme indicado na Tabela 1, as funções de partição de unidade ϕ_I , $I = 1, \dots, n_{NE}$, podem ser construídas a partir da expressão

geral de um polinômio com o referido grau, conforme relação (140) (Gilat e Subramaniam, 2008):

$$\phi_I(\xi) = a_p \xi^p + a_{p-1} \xi^{p-1} + \cdots + a_1 \xi + a_0 \quad I = 1, \dots, n_{NE} \quad (\text{sem soma em } p) \quad (140)$$

no qual o índice I se refere aos nós do elemento, e neste caso $I = 1, 2$, e $\{a_j\}_{j=0}^{J=p}$ são coeficientes a serem determinados mediante a aplicação de condições de contorno específicas que assegurem a ordem de regularidade desejada da partição de unidade e que satisfaçam a propriedade (71). Para este fim, é possível se adotar o procedimento utilizado na chamada interpolação Hermitiana, no qual são estabelecidos requisitos de continuidade interelemento sobre as funções e suas derivadas (Dhatt e Touzot, 1984). Tais requisitos são dados pela relação (141):

$$\left. \frac{d^j \phi_I}{d\xi^j} \right|_{\xi=\xi_J} = \begin{cases} 1 & , j = 0 \\ 0 & , 0 < j \leq k \end{cases} \quad I = J \\ \begin{cases} 0 & , j = 0 \\ 0 & , 0 < j \leq k \end{cases} \quad I \neq J \quad 1 \leq I, J \leq 2 \text{ e } 0 \leq j \leq k \quad (141)$$

no qual I, J referem-se aos nós do elemento, j , $0 \leq j \leq k$, é a ordem da derivada da função ϕ_I com relação a ξ , sendo que a derivada de ordem zero corresponde à própria função ϕ_I , k é a regularidade do espaço considerado (C^k), $\cdot|_{\xi=\xi_I}$ indica que a derivada deve ser avaliada nos pontos nodais do elemento, isto é, $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 1$.

Desta forma, considerando as expressões (140) e (141) e as informações da Tabela 1, as funções de partição de unidade com regularidade C^1 e C^2 obtidas são dadas pelas expressões (142)-(143) e (144)-(145), respectivamente. As manipulações algébricas para determinação dos coeficientes destas funções polinomiais estão disponíveis no Apêndice B deste relatório.

a) Funções de partição de unidade com regularidade C^1 :

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{4} (\xi - 1)^2 (2 + \xi) \quad (142)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{4} (\xi + 1)^2 (2 - \xi) \quad (143)$$

b) Funções de partição de unidade com regularidade C^2 :

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{16} (1 - \xi)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) \quad (144)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{16} (1 + \xi)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) \quad (145)$$

As Figuras 9(a) e 9(b) mostram o comportamento das funções de partição de unidade C^1 e C^2 dadas pelas equações (142)-(143) e (144)-(145), respectivamente. A

título de referência e comparação, as funções de partição de unidade referentes ao elemento unidimensional de dois nós com regularidade C^0 também são mostradas nestas figuras.

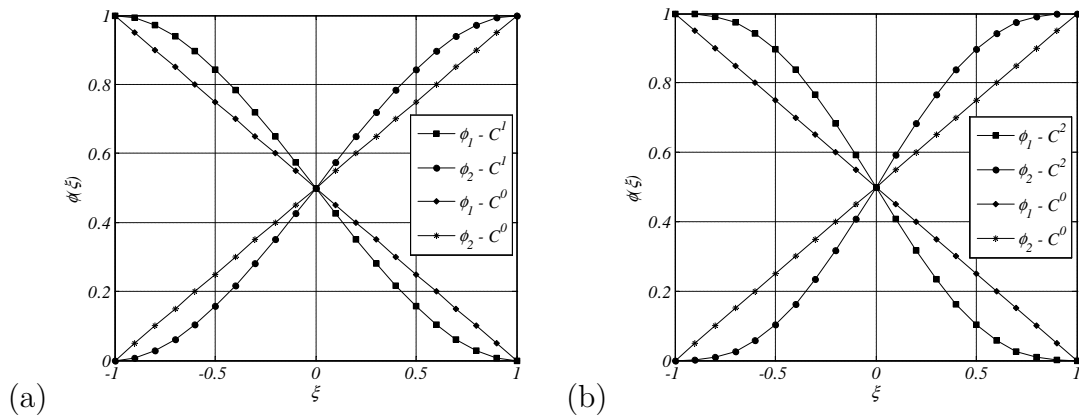


Figura 9: Comportamento das funções de partição de unidade unidimensionais com regularidade (a) C^1 e (b) C^2

3.2 Construção das funções de enriquecimento C^1 e C^2

As funções de enriquecimento são utilizadas como um complemento às funções de partição de unidade na geração do espaço de aproximação com a ordem de regularidade desejada. Assumindo que as funções de enriquecimento ϑ_L , $L = 1, \dots, 2k$, também sejam polinomiais, e que o grau polinomial das mesmas satisfaça igualmente a relação (139), então o polinômio geral neste caso pode ser escrito segundo a expressão (146):

$$\vartheta_L(\xi) = a_p \xi^p + a_{p-1} \xi^{p-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 \quad L = 1, \dots, 2k \quad (\text{sem soma em } p) \quad (146)$$

na qual o índice L está vinculado à L -ésima função de enriquecimento do elemento e os coeficientes $\{a_J\}_{J=0}^{J=p}$ são determinados pela aplicação das condições de contorno de interpolação Hermitiana dadas na Tabela 2.

Tabela 2: Condições de contorno para determinação dos coeficientes dos polinômios das funções de enriquecimento

Função L	$\vartheta_L(-1)$	$\vartheta_L(1)$	$\frac{d\vartheta_L(-1)}{d\xi}$	$\frac{d\vartheta_L(1)}{d\xi}$...	$\frac{d^k \vartheta_L(-1)}{d\xi^k}$	$\frac{d^k \vartheta_L(1)}{d\xi^k}$
1	0	0	1	0	...	0	0
2	0	0	0	1	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$2k-1$	0	0	0	0	...	1	0
$2k$	0	0	0	0	...	0	1

Aplicando as condições de contorno da Tabela 2 na equação (146) e levando-se em consideração as informações da Tabela 1, obtêm-se as funções de enriquecimento C^1 e C^2

dadas por (147)-(148) e (149)-(152), respectivamente. As manipulações algébricas para determinação dos coeficientes destas funções polinomiais estão disponíveis no Apêndice C deste relatório.

a) Funções de enriquecimento com regularidade C^1 :

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\xi - 1)^2 \quad (147)$$

$$\vartheta_2(\xi) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\xi + 1)^2 \quad (148)$$

b) Funções de enriquecimento com regularidade C^2 :

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 + 7\xi - 5) \quad (149)$$

$$\vartheta_2(\xi) = -\frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 - 7\xi - 5) \quad (150)$$

$$\vartheta_3(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 + \xi - 1) \quad (151)$$

$$\vartheta_4(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 - \xi - 1) \quad (152)$$

As Figuras 10(a) e 10(b) mostram o comportamento das funções de enriquecimento C^1 e C^2 dadas pelas equações (147)-(148) e (149)-(152), respectivamente.

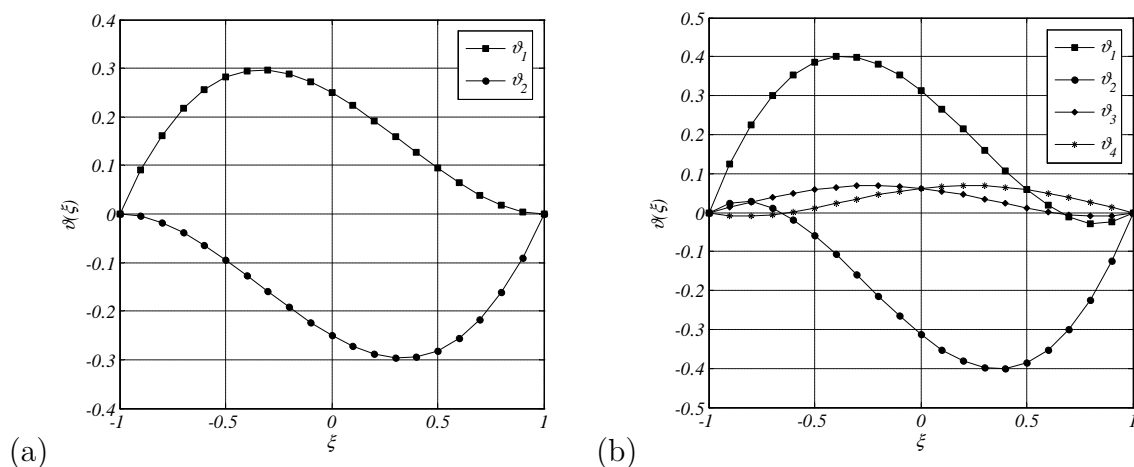


Figura 10: Funções de enriquecimento unidimensionais com regularidade (a) C^1 e (b) C^2

3.3 Construção das funções de interpolação bidimensionais C^1 e C^2 a partir das funções de partição de unidade e de enriquecimento

A construção das funções de interpolação para o domínio paramétrico bidimensional $\xi \times \eta$, $-1 \leq \xi \leq 1$ e $-1 \leq \eta \leq 1$, referentes ao elemento quadrilateral de quatro nós indicado na Figura 4, é feita mediante o chamado produto tensorial das funções associadas aos domínios unidimensionais ξ e η . Este produto tensorial pode ser operado segundo a equação (153) (Carey e Oden, 1983):

$$G_{ij}(\xi, \eta) = g_i(\xi) g_j(\eta) e_i \otimes e_j \quad 1 \leq i, j \leq 2k + 2 \quad (153)$$

no qual k é a ordem de regularidade do espaço de aproximação construído, $g_i(\xi)$ e $g_j(\eta)$ são vetores construídos a partir das funções de partição de unidade (PU) e de enriquecimento seguindo-se a convenção dada em (154) e $G_{ij}(\xi, \eta)$ é uma matriz quadrada, de ordem $2(k+1)$ com $4(k+1)^2$ termos, que contém todas as funções de interpolação do elemento quadrilateral.

$$g_i(\cdot) = \left[\underbrace{\phi_1(\cdot)}_{\text{PU}} \underbrace{\vartheta_1(\cdot) \vartheta_3(\cdot) \cdots \vartheta_{2k-1}(\cdot)}_{\text{Enriquecimento}} \underbrace{\phi_2(\cdot)}_{\text{PU}} \underbrace{\vartheta_2(\cdot) \vartheta_4(\cdot) \cdots \vartheta_{2k}(\cdot)}_{\text{Enriquecimento}} \right]^T \quad 1 \leq i \leq 2k + 2 \quad (154)$$

A matriz G_{ij} resultante do produto tensorial dado por (153) pode ser vista como uma matriz formada por quatro blocos, conforme indicado na expressão (155), de tal forma que cada bloco contém apenas as funções de interpolação associadas aos graus de liberdade do nó cuja numeração, dada na Figura 4, coincide com a numeração do bloco de G_{ij} . Desta forma, o número de termos contido em cada bloco e, portanto, o número de graus de liberdade associado com a aproximação de cada componente do campo de deslocamentos em cada nó do elemento é igual a $(k+1)^2$.

$$G_{ij}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} [1] & [4] \\ [2] & [3] \end{bmatrix} \quad (155)$$

3.3.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAIS COM REGULARIDADE C^1

Os vetores $g_i(\cdot)$ neste caso são dados por (156) e (157):

$$g_i(\xi) = [\phi_1(\xi) \vartheta_1(\xi) \phi_2(\xi) \vartheta_2(\xi)]^T \quad (156)$$

$$g_j(\eta) = [\phi_1(\eta) \vartheta_1(\eta) \phi_2(\eta) \vartheta_2(\eta)]^T \quad (157)$$

com $\phi_I(\xi)$, $\phi_I(\eta)$, $\vartheta_I(\xi)$ e $\vartheta_I(\eta)$ conforme dado em (142)-(143) e (147)-(148).

Operando o produto tensorial dado pela expressão (153) se obtém a matriz $G_{ij}(\xi, \eta)$ correspondente. Organizando os termos desta matriz, levando-se em consideração a lógica indicada na expressão (155), obtêm-se as funções de interpolação Φ_I do elemento, $1 \leq I \leq n_{NE}n_{GLNC}$, sendo n_{NE} o número de nós do elemento e n_{GLNC} o número de graus de liberdade do nó por campo. Em função de que este elemento com regularidade C^1 apresenta um total de 16 funções de interpolação, são apresentadas em (158) a (161)

apenas as funções associadas com o nó 1 do elemento. O conjunto de todas as funções de interpolação estão disponíveis no Apêndice E deste relatório.

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{16}(\xi - 1)^2(\eta - 1)^2(2 + \xi)(2 + \eta) \quad (158)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{16}(\xi - 1)^2(\eta - 1)^2(1 + \xi)(2 + \eta) \quad (159)$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{16}(\xi - 1)^2(\eta - 1)^2(2 + \xi)(1 + \eta) \quad (160)$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{16}(\xi - 1)^2(\eta - 1)^2(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (161)$$

As Figuras 11(a)-(d) mostram o comportamento das funções de interpolação associadas com os nós 1-4 do elemento, respectivamente.

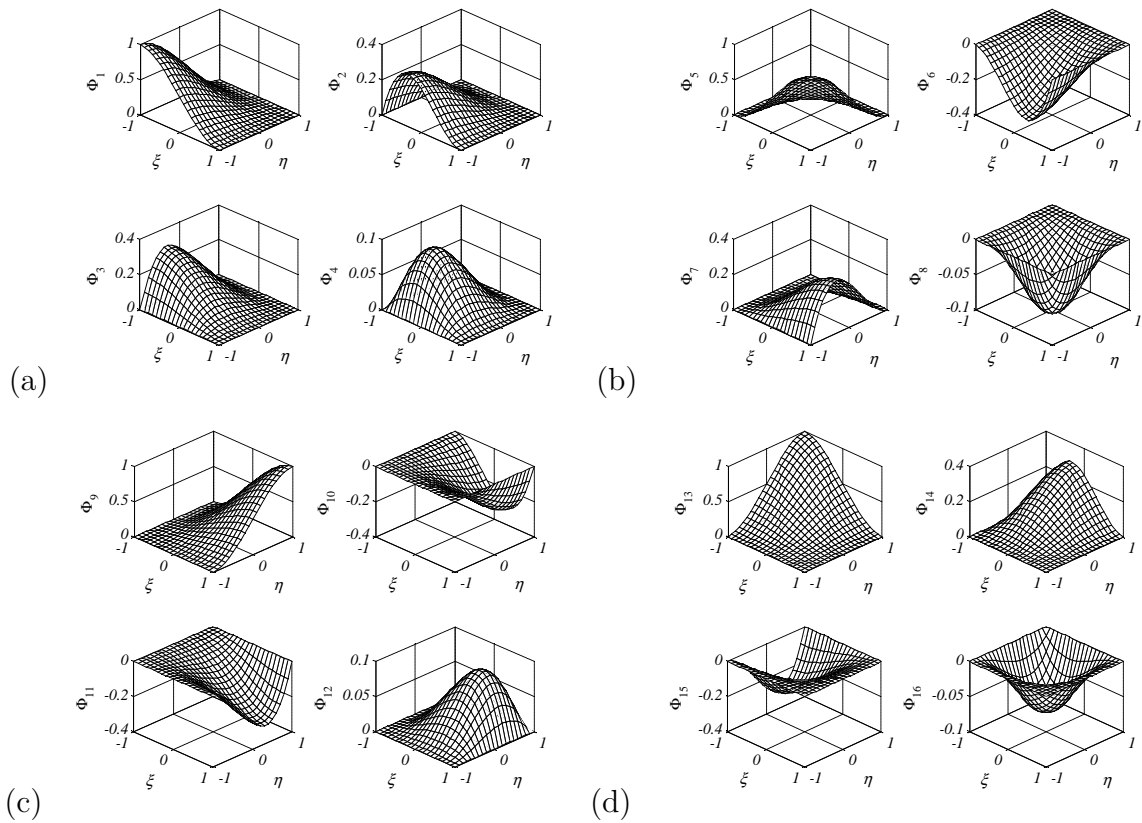


Figura 11: Funções de interpolação do elemento quadrilateral de quatro nós com regularidade C^1 , referentes aos nós (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 4

3.3.2 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAIS COM REGULARIDADE C^2

Os vetores $g_i(\cdot)$ neste caso são dados por (162) e (163):

$$g_i(\xi) = [\phi_1(\xi) \vartheta_1(\xi) \vartheta_3(\xi) \phi_2(\xi) \vartheta_2(\xi) \vartheta_4(\xi)]^T \quad (162)$$

$$g_j(\eta) = [\phi_1(\eta) \vartheta_1(\eta) \vartheta_3(\eta) \phi_2(\eta) \vartheta_2(\eta) \vartheta_4(\eta)]^T \quad (163)$$

com $\phi_I(\xi)$, $\phi_I(\eta)$, $\vartheta_I(\xi)$ e $\vartheta_I(\eta)$ conforme dado em (142)-(143) e (147)-(148).

Operando o produto tensorial dado pela expressão (153) se obtém a matriz $G_{ij}(\xi, \eta)$ correspondente. O conjunto de 36 funções de interpolação Φ_I resultantes estão disponíveis no Apêndice D deste relatório. A título ilustrativo, são mostradas no texto abaixo apenas as nove funções de interpolação associadas com o nó 1 do elemento, dadas por (164) a (172). O comportamento das funções de interpolação associadas com os nós 1-4 do elemento é mostrado nas Figuras 12(a)-(d), respectivamente.

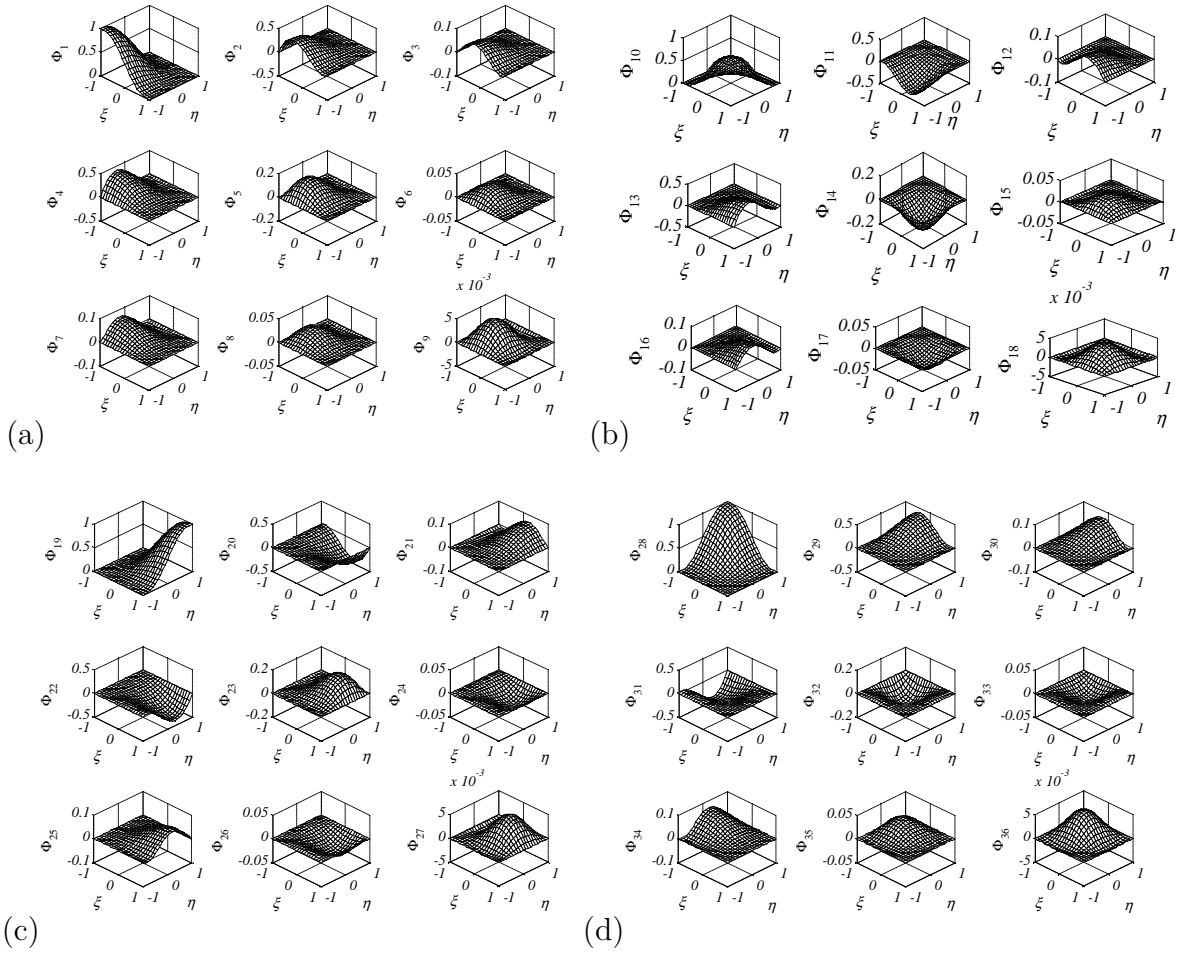


Figura 12: Funções de interpolação do elemento quadrilateral de quatro nós com regularidade C^2 , referentes aos nós (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 4

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (164)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (165)$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (166)$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (167)$$

$$\Phi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (168)$$

$$\Phi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (169)$$

$$\Phi_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (170)$$

$$\Phi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (171)$$

$$\Phi_9(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (172)$$

3.4 Aspectos sobre a implementação dos elementos quadrilaterais com regularidade C^1 e C^2

3.4.1 CARACTERIZAÇÃO GERAL

A implementação dos elementos finitos quadrilaterais de quatro nós com as funções de interpolação de regularidade C^1 e C^2 desenvolvidas anteriormente foi feita em uma plataforma própria de elementos finitos construída em linguagem Fortran. Assim, além de se ter a liberdade para a escolha da estratégia de programação empregada, evitando possíveis conflitos de integração com *softwares* comerciais de elementos finitos, também foi possível se inserir na estrutura funções específicas como, por exemplo, o cômputo das normas das soluções aproximadas, o cálculo de autovalores e outras métricas auxiliares necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Do ponto de vista do conceito de elementos paramétricos, os elementos com regularidade C^1 e C^2 aqui programados podem ser caracterizados como subparamétricos, ou seja, as funções utilizadas para interpolação do campo de deslocamentos (funções desenvolvidas anteriormente) têm maior grau polinomial do que aquelas utilizadas para a interpolação da geometria do problema. Neste último caso, para a interpolação da geometria do problema foram utilizadas as funções referentes ao elemento quadrilateral bilinear de quatro nós de regularidade C^0 , dadas em (173)-(176) (Dhatt e Touzot, 1984):

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \quad (173)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \quad (174)$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \quad (175)$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \quad (176)$$

no qual ξ e η são as coordenadas no domínio paramétrico do elemento.

3.4.2 ASPECTOS SOBRE OS GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO

A principal diferença existente entre os elementos de regularidade C^1 e C^2 aqui programados, em relação ao elemento quadrilateral bilinear de regularidade C^0 , por exemplo, está no número de graus de liberdade associados a cada nó da malha utilizados para a aproximação da solução do problema. Enquanto que para o elemento bilinear clássico de regularidade C^0 se emprega apenas uma função de interpolação para cada componente do campo de deslocamentos, resultando num total de dois graus de liberdade por nó, no elemento C^1 se tem quatro funções para cada componente do campo primal, resultando num total de oito graus de liberdade por nó, e no elemento C^2 se utilizam nove funções para cada componente do campo de deslocamentos, perfazendo um total de dezoito graus de liberdade por nó.

Fisicamente, os graus de liberdade nodais adicionais introduzidos pelos elementos de regularidades C^1 e C^2 estão associados com as derivadas das componentes de deslocamento (u_i) com relação às coordenadas cartesianas do problema (x_i). Tais derivadas, para cada elemento de regularidade C^k , podem ser extraídas dos blocos da estrutura mostrada na Figura 13, a qual foi construída com base em uma analogia ao triângulo de Pascal. Nessa Figura, o símbolo \bullet deve ser substituído pelo campo de deslocamentos u_i , $1 \leq i \leq n_{DE}$, resultando na quantidade de graus de liberdade por nó descrita anteriormente.

C^0	\bullet	$\frac{\partial \bullet}{\partial x_1}$	$\frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^3 \bullet}{\partial x_1^3}$...
C^1	$\frac{\partial \bullet}{\partial x_2}$	$\frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_1 \partial x_2}$	$\frac{\partial^3 \bullet}{\partial x_1^2 \partial x_2}$	$\frac{\partial^4 \bullet}{\partial x_1^3 \partial x_2}$...
C^2	$\frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_2^2}$	$\frac{\partial^3 \bullet}{\partial x_1 \partial x_2^2}$	$\frac{\partial^4 \bullet}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$	$\frac{\partial^5 \bullet}{\partial x_1^3 \partial x_2^2}$...
\vdots	$\frac{\partial^3 \bullet}{\partial x_2^3}$	$\frac{\partial^4 \bullet}{\partial x_1 \partial x_2^3}$	$\frac{\partial^5 \bullet}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}$	$\frac{\partial^6 \bullet}{\partial x_1^3 \partial x_2^3}$...
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Figura 13: Estrutura das derivadas associadas com os graus de liberdade de aproximação nodais para elementos de regularidade C^k

A estratégia de aplicação das condições de contorno essenciais, no que tange a prescrição dos graus de liberdade nodais indicados em (177) a (179), foi realizada de acordo a lógica mostrada na Tabela 3. Nesta Tabela, o caractere “ \bullet ” corresponde a grau de liberdade prescrito, o caractere “ \circ ” corresponde a grau de liberdade não prescrito (livre)

e o caractere “x” indica que o grau de liberdade não é aplicável ao tipo de elemento em consideração.

Tabela 3: Prescrição dos graus de liberdade nodais do elemento em relação à aplicação das condições de contorno essenciais do problema

Grau(s) de liberdade prescrito(s) no nó	Elemento					
	C^0		C^1		C^2	
	Componente de deslocamento a restringir					
	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2
u_1	●	○	●	○	●	○
u_2	○	●	○	●	○	●
$u_{1,1}$	X	X	○	○	○	○
$u_{2,1}$	X	X	○	●	○	●
$u_{1,11}$	X	X	X	X	○	○
$u_{2,11}$	X	X	X	X	○	●
$u_{1,2}$	X	X	●	○	●	○
$u_{2,2}$	X	X	○	○	○	○
$u_{1,12}$	X	X	○	○	○	○
$u_{2,12}$	X	X	○	○	○	○
$u_{1,112}$	X	X	X	X	○	○
$u_{2,112}$	X	X	X	X	○	○
$u_{1,22}$	X	X	X	X	●	○
$u_{2,22}$	X	X	X	X	○	○
$u_{1,122}$	X	X	X	X	○	○
$u_{2,122}$	X	X	X	X	○	○
$u_{1,1122}$	X	X	X	X	○	○
$u_{2,1122}$	X	X	X	X	○	○

A organização dos graus de liberdade associados com os quatro nós do elemento, visando a operação matricial computacional para solução do problema, foi implementada no programa conforme indicado em (177) a (179), para os elementos de regularidade C^0 , C^1 e C^2 , respectivamente.

$$d_i^{el} = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad \dots \quad u_1^{(4)} \quad u_2^{(4)} \right\}^T \quad i = 1, \dots, 8 \quad (177)$$

$$d_i^{el} = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_{1,1}^{(1)} \quad u_{2,1}^{(1)} \quad u_{1,2}^{(1)} \quad u_{2,2}^{(1)} \quad u_{1,12}^{(1)} \quad u_{2,12}^{(1)} \quad \dots \right. \\ \left. u_1^{(4)} \quad u_2^{(4)} \quad u_{1,1}^{(4)} \quad u_{2,1}^{(4)} \quad u_{1,2}^{(4)} \quad u_{2,2}^{(4)} \quad u_{1,12}^{(4)} \quad u_{2,12}^{(4)} \right\}^T \quad i = 1, \dots, 32 \quad (178)$$

$$d_i^{el} = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_{1,1}^{(1)} \quad u_{2,1}^{(1)} \quad u_{1,11}^{(1)} \quad u_{2,11}^{(1)} \quad u_{1,2}^{(1)} \quad u_{2,2}^{(1)} \quad u_{1,12}^{(1)} \quad u_{2,12}^{(1)} \right. \\ u_{1,112}^{(1)} \quad u_{2,112}^{(1)} \quad u_{1,22}^{(1)} \quad u_{2,22}^{(1)} \quad u_{1,122}^{(1)} \quad u_{2,122}^{(1)} \quad u_{1,1122}^{(1)} \quad u_{2,1122}^{(1)} \quad \dots \quad u_1^{(4)} \quad u_2^{(4)} \\ u_{1,1}^{(4)} \quad u_{2,1}^{(4)} \quad u_{1,11}^{(4)} \quad u_{2,11}^{(4)} \quad u_{1,2}^{(4)} \quad u_{2,2}^{(4)} \quad u_{1,12}^{(4)} \quad u_{2,12}^{(4)} \quad u_{1,112}^{(4)} \quad u_{2,112}^{(4)} \\ \left. u_{1,22}^{(4)} \quad u_{2,22}^{(4)} \quad u_{1,122}^{(4)} \quad u_{2,122}^{(4)} \quad u_{1,1122}^{(4)} \quad u_{2,1122}^{(4)} \right\}^T \quad i = 1, \dots, 72 \quad (179)$$

no qual d_i^{el} é o vetor que contém os graus de liberdade associados aos quatro nós do elemento e $u_j^{(I)}$ corresponde ao deslocamento na direção j , $j = 1, 2$, do I -ésimo nó do elemento.

3.4.3 CONDIÇÕES SOBRE A MALHA E OS ELEMENTOS

A utilização de elementos finitos quadrilaterais de estado plano com regularidade C^1 ou superior não é muito comum de ser encontrada na literatura. A principal justificativa para este fato está associada com a dificuldade de se manter a ordem de regularidade interelemento, e conseqüentemente as máximas taxas de convergência associadas, haja visto que na maioria das aplicações práticas as malhas apresentam algum nível de distorção de forma dos elementos (Carey e Oden, 1983; Strang e Fix, 1973). Além disso, Dhatt e Touzot (1984) comentam que para o elemento quadrilateral de quatro nós de regularidade C^1 , por exemplo, a continuidade da classe C^1 é rigorosamente preservada caso a geometria do elemento seja retangular e o mesmo apresente suas faces paralelas ao sistema global de coordenadas x_1, x_2 . Caso contrário, a regularidade C^1 e as características de convergência da solução aproximada não são asseguradas.

Carey e Oden (1983) e Oden e Reddy (1976) descrevem que duas alternativas podem ser adotadas para solucionar as restrições mencionadas: a primeira delas consiste na utilização de elementos ditos não conformes, enquanto que a segunda consiste na utilização dos chamados elementos especiais *simplex*, ambas com possibilidade de se estabelecer a ordem de regularidade de interesse. No primeiro caso, deve-se testar criteriosamente o comportamento destes elementos a fim de se conhecer as limitações e implicações de seu emprego. No segundo caso, faz-se necessário considerar uma quantidade maior de nós para o elemento a fim de se atingir a ordem de regularidade desejada e há um número diferente de graus de liberdade associados com cada nó do elemento.

Tendo em vista que o foco principal deste trabalho está voltado para a verificação da capacidade de aproximação do espectro normalizado de frequências naturais de vibração livre não amortecida, e neste caso os problemas selecionados para avaliação permitem a construção de malhas nas quais os elementos não apresentem distorção de forma e mantenham suas arestas paralelas aos eixos do problema global, então os elementos de regularidade C^1 e C^2 aqui implementados serão utilizados em todas as avaliações posteriores (Capítulos 4, 5 e 6) (não serão testadas as alternativas de elementos anteriormente descritas). De maneira geral, um cuidado especial será prestado na geração das malhas de cada problema, atentando-se para que os elementos apresentem os menores níveis de distorção possíveis, que as arestas dos elementos permaneçam alinhadas com os eixos de coordenadas globais e que a orientação dos eixos locais dos elementos sejam coincidentes com as orientações dos eixos do sistema de coordenadas global.

4 APLICAÇÃO DOS ELEMENTOS QUADRILATERAIS COM REGULARIDADE C^1 E C^2 NA SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS DE MECÂNICA BIDIMENSIONAIS

Esta seção tem o propósito de investigar o comportamento dos elementos quadriláterais de quatro nós com regularidades C^1 e C^2 , implementados com base nas funções de interpolação desenvolvidas anteriormente, na solução de alguns problemas de Mecânica bidimensionais. O primeiro tópico desta seção aborda algumas métricas comumente utilizadas para se quantizar a acuracidade da solução aproximada obtida. Posteriormente, são executados alguns *patch tests*, contemplando os tipos simples e generalizado, e, por fim, alguns problemas clássicos de elasticidade plana infinitesimal isotrópica que apresentam solução analítica são simulados. Os problemas aqui considerados são o da viga em balanço com carga aplicada na extremidade livre, o da placa infinita com furo central submetida a uma tração uniaxial remota e o problema do domínio *L-shaped* em modo 1 de carregamento.

É importante ressaltar que as malhas de cada problema foram geradas com vistas a reduzir o nível de distorção dos elementos e assegurar a orientação dos sistemas locais de forma coincidente com o sistema global de coordenadas. Além disso, a estratégia de aplicação das condições de contorno segue a lógica indicada na Tabela 3 do Capítulo anterior.

4.1 Medidas de erro da solução aproximada

De acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000), o erro da solução aproximada pode ser expresso como a diferença entre a solução exata e a solução aproximada. No caso do campo de deslocamentos pode-se escrever o erro segundo a expressão (180):

$$\bar{e} = u - u^h \quad (180)$$

no qual u é o deslocamento da solução exata, u^h é o deslocamento da solução aproximada e \bar{e} é o erro da solução aproximada.

Contudo, os autores descrevem que a especificação da medida do erro na forma dada pela expressão (180) geralmente não é conveniente em função de que os erros locais, como no caso de uma carga pontual, podem ser localmente infinitos, mas a solução de forma global pode ser aceitável. Desta forma, algumas normas que representam uma quantidade escalar integral geralmente são introduzidas.

Para problemas de elasticidade, Zienkiewicz e Taylor (2000) comentam que a norma de erro de energia da solução aproximada, $\|\bar{e}\|_E$, pode ser escrita de acordo com qualquer uma das três relações dadas em (181) a (183):

$$\|\bar{e}\|_E = \left[\int_{\Omega} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^h) D_{ijrs} (\epsilon_{rs} - \epsilon_{rs}^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \quad (181)$$

$$\|\bar{e}\|_E = \left[\int_{\Omega} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^h) (T_{ij} - T_{ij}^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad 1 \leq i, j \leq n_{DE} \quad (182)$$

$$\|\bar{e}\|_E = \left[\int_{\Omega} (T_{ij} - T_{ij}^h) D_{ijrs}^{-1} (T_{rs} - T_{rs}^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq n_{DE} \quad (183)$$

no qual ϵ_{ij} e ϵ_{ij}^h são os tensores de deformações infinitesimais exato e aproximado, respectivamente, T_{ij} e T_{ij}^h são os tensores de tensão de Cauchy exato e aproximado, respectivamente, D_{ijrs} é o tensor constitutivo de quarta ordem, o qual pode ser escrito na forma compacta, para EPT e EPD, conforme indicado nas expressões (51) e (52), respectivamente, e $d\Omega = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n_{DE}}$.

A norma L_2 do erro da solução aproximada, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), é dada pela expressão (184).

$$\|\bar{e}\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (u_i - u_i^h) (u_i - u_i^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad 1 \leq i \leq n_{DE} \quad (184)$$

As normas anteriormente indicadas podem ser avaliadas sobre um domínio, de forma contínua, ou então sobre elementos, de forma discreta. No caso de se computar alguma norma considerando os resultados discretos dos elementos pode-se escrever a relação (185) (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$\|\bar{e}\|_*^2 = \sum_{P=1}^{n_{EL}} [\|\bar{e}\|_*^2] \quad (185)$$

no qual n_{EL} corresponde ao número total de elementos da malha e o asterisco (*) indica que pode-se aplicar esta ideia tanto para a norma de energia quanto para a norma L_2 .

Neste trabalho serão adotadas as métricas comumente mais observadas em artigos e trabalhos científicos desta área (ver, por exemplo, Belytschko et al., 1994; Duarte e Oden, 1996; Strouboulis et al., 2001). Estas medidas, considerando-se a aplicação em problemas de elasticidade plana e a avaliação discreta sobre os elementos do problema discretizado, podem ser escritas conforme indicado em (186) a (189):

a) Norma de energia da solução aproximada, dada por (186):

$$\|u^h\|_E = \left[\sum_{P=1}^{n_{EL}} T_{ij}^h D_{ijrs}^{-1} T_{rs}^h \right]^{1/2} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq 2 \quad (186)$$

b) Norma L_2 da solução aproximada, dada por (187):

$$\|u^h\|_{L_2} = \left[\sum_{P=1}^{n_{EL}} u_i^h u_i^h \right]^{1/2} \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (187)$$

c) Erro relativo em norma de energia da solução aproximada, dada por (188):

$$\eta_E = \left[\frac{\sum_{P=1}^{n_{EL}} (T_{ij} - T_{ij}^h) D_{ijrs}^{-1} (T_{rs} - T_{rs}^h)}{\sum_{P=1}^{n_{EL}} T_{ij} D_{ijrs}^{-1} T_{rs}} \right]^{1/2} \quad 1 \leq i, j, r, s \leq 2 \quad (188)$$

d) Erro relativo em norma L_2 da solução aproximada, dada por (189):

$$\eta_{L_2} = \left[\frac{\sum_{P=1}^{n_{EL}} (u_i - u_i^h) (u_i - u_i^h)}{\sum_{P=1}^{n_{EL}} u_i u_i} \right]^{1/2} \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (189)$$

no qual n_{EL} é o número total de elementos da malha e D_{ijrs} é determinado por meio das expressões (51) ou (52), utilizando a equivalência de índices entre o tensor constitutivo de quarta ordem e o de segunda ordem (proveniente da escrita na forma compacta) conforme equação (190) e Tabela 4 (Hughes, 2000):

$$D_{tz} = D_{ijrs} \quad (190)$$

Tabela 4: Equivalência de índices entre o tensor constitutivo de quarta ordem e o tensor na forma compacta

Fonte: Hughes (2000)

t	z	i	r	j	s
1		1		1	
3		1		2	
3		2		1	
2		2		2	

4.2 Comportamento dos elementos no *patch test*

De acordo com Cook et al. (1989), o *patch test* consiste numa verificação numérica empregada para se avaliar a validade da formulação e da programação implementada de um elemento finito. Desta forma, o *patch test* é caracterizado como uma condição necessária, mas não suficiente, para se assegurar a convergência da solução aproximada obtida. O *patch test*, proposto inicialmente por Irons *et al.* no final da década de 60, é assim chamado porque a verificação é feita considerando-se um pequeno domínio ou região (*patch*) discretizado com os elementos a serem testados.

Basicamente, dois tipos de *patch test* podem ser caracterizados:

- a) *Patch test* simples: quando apenas condições de contorno essenciais são aplicadas ao modelo numérico. O teste é feito considerando um domínio discretizado com um número pequeno de elementos, de tal forma que pelo menos um nó da malha esteja

localizado no interior do domínio. Uma solução de referência para o campo de deslocamentos do problema é adotada¹¹, e o problema é então resolvido prescrevendo-se os deslocamentos, calculados com base na solução de referência, em todos os nós do contorno. Os nós internos da malha não recebem prescrição de deslocamento, conforme indicado na Figura 14. Ao final, os deslocamentos dos nós internos da malha são então computados e confrontados com os valores de referência inicialmente calculados. O elemento é dito passar no *patch test* se os erros computados nos nós internos da malha são da ordem de precisão numérica do computador. Desta forma, este tipo de teste não leva em consideração as aproximações feitas nos contornos (Zienkiewicz e Taylor, 2000; Cook et al., 1989; Bathe, 1996);

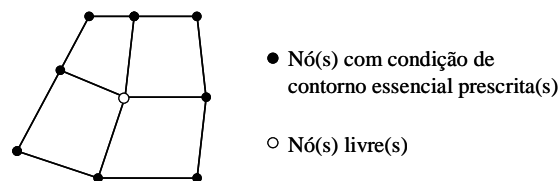


Figura 14: Esquema de construção de um *patch test* simples
Adaptado de: Zienkiewicz e Taylor (2000)

- b) *Patch test* generalizado: neste caso, tanto condições de contorno essenciais quanto naturais são aplicadas. Uma quantidade mínima de condições de contorno essenciais é empregada, de forma a permitir a obtenção de uma solução fisicamente factível. Da mesma forma que no caso anterior, considera-se inicialmente uma solução de referência¹² para o problema, o qual é resolvido prescrevendo-se adicionalmente a condição de contorno natural de forma consistente com a formulação do elemento e com a solução de referência adotada. Os deslocamentos dos nós sem condição de contorno prescrita, seja no contorno ou no interior da malha, são então computados e confrontados com aqueles da solução de referência (ver Figura 15). Novamente, o elemento é dito passar no *patch test* se os erros computados nos nós sem condição de contorno essencial prescrita são da ordem de precisão numérica do computador. Assim, este tipo de *patch test* é mais completo pois introduz os efeitos de aproximação no contorno (Zienkiewicz e Taylor, 2000; Cook et al., 1989; Bathe, 1996).

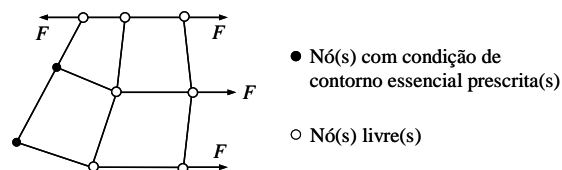


Figura 15: Esquema de construção de um *patch test* generalizado
Adaptado de: Cook et al. (1989)

¹¹No geral, esta solução de referência considera que o campo de deslocamentos varia linearmente ao longo do domínio, gerando um estado de tensão constante nos elementos (Bathe, 1996).

¹²Idem ao caso anterior.

Conforme descrito na seção 3.4.3, sabe-se que os elementos de maior regularidade apresentam sensibilidade da solução aproximada com relação a sua distorção de forma. Desta maneira, as verificações aqui realizadas têm o propósito de simplesmente confirmar este comportamento e apresentar um comparativo entre os resultados obtidos para os elementos de regularidade C^1 (disponível na literatura a partir do trabalho de Bogner et al. (1966)) e C^2 (não encontrado na literatura).

O *patch test* aqui construído é tratado tanto para o caso simples quanto generalizado, e está baseado no exemplo apresentado por Zienkiewicz e Taylor (2000). O problema é abordado em EPT, com espessura unitária, e se refere a um domínio com dimensões e condições de contorno essenciais e naturais conforme indicado na Figura 16. As propriedades mecânicas adotadas para o material, assumindo um comportamento isotrópico linear, são $E = 1000$ e $\nu = 0,3$ (unidades consistentes).

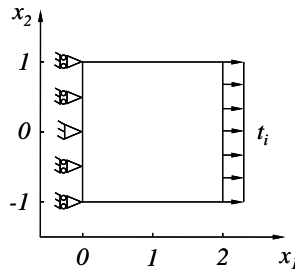


Figura 16: Problema desenvolvido para execução do *patch test*

A solução de referência adotada para o campo de deslocamentos do problema é dada por (191)-(192):

$$u_1(x_1, x_2) = 0,002x_1 \quad (191)$$

$$u_2(x_1, x_2) = -0,0006x_2 \quad (192)$$

sendo u_1 e u_2 as componentes de deslocamento e x_1 e x_2 as coordenadas cartesianas do problema.

O campo de tensões correspondente assume a forma dada em (193)-(195):

$$T_{11}(x_1, x_2) = 2 \quad (193)$$

$$T_{22}(x_1, x_2) = 0 \quad (194)$$

$$T_{12}(x_1, x_2) = 0 \quad (195)$$

no qual T_{11} e T_{22} são as componentes de tensão normais e T_{12} é a componente de tensão cisalhante.

Quatro malhas com diferentes níveis de distorção dos elementos foram construídas,

conforme mostrado nas Figuras 17(a)-(d) (análises similares podem ser encontradas em Belytschko et al., 1994; Kaljević e Saigal, 1997; Krongauz e Belytschko, 1997, as quais avaliam o efeito do posicionamento dos pontos de integração no domínio no caso dos chamados métodos sem malha). A Figura 17(a) adicionalmente indica a numeração dos nós e dos elementos válida para as quatro malhas. Como pode ser observado nestas Figuras, a distorção dos elementos da malha é gerada pela mudança de posição do nó interno (nó número 4).

O parâmetro de quantização do nível de distorção da malha adotado neste caso é o do máximo ângulo de vértice, isto é, tal parâmetro captura o valor do maior ângulo de vértice entre todos os elementos da malha. Desta forma, a malha da Figura 17(a) apresenta todos os elementos perfeitamente regulares, na qual todos os ângulos de vértice são iguais a 90° , ao passo que a malha da Figura 17(d) apresenta um elemento (elemento 4) com ângulo de vértice em torno de 169° , o que corresponde a uma condição próxima da degeneração completa do elemento quadrilateral em um elemento triangular. As coordenadas nodais referentes à condição não deformada de cada uma dessas quatro malhas estão indicadas na Tabela 5.

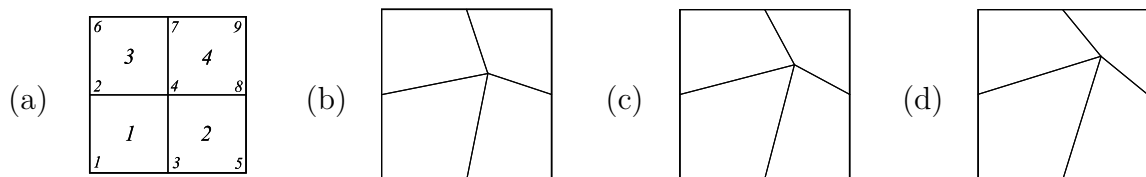


Figura 17: Malhas construídas para o problema do *patch test*

Tabela 5: Coordenadas nodais das malhas construídas para o problema do *patch test*

Número do nó	Malha 1		Malha 2		Malha 3		Malha 4	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
4	1	0	1,15	0,15	1,30	0,30	1,45	0,45
5	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
6	0	1	0	1	0	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	2	0	2	0	2	0	2	0
9	2	1	2	1	2	1	2	1

É importante destacar que as simulações apresentadas a seguir foram executadas empregando-se quadratura de Gauss com 16 e 36 pontos para os elementos C^1 e C^2 , respectivamente, e com 4 pontos no caso do elemento bilinear clássico C^0 Quad4 (empregado apenas para efeitos de comparação de resultados).

4.2.1 PATCH TEST SIMPLES

O *patch test* simples envolve apenas a prescrição de condições de contorno essenciais em todos os nós da malha, com exceção do nó interno. Desta forma, levando-se em consideração a solução de referência adotada para o problema, os deslocamentos a serem prescritos no modelo numérico estão indicados na Tabela 6.

Tabela 6: Deslocamentos prescritos para o *patch test* simples

Nó	u_1	u_2
1	0	0,0006
2	0	0
3	0,002	0,0006
5	0,004	0,0006
6	0	-0,0006
7	0,002	-0,0006
8	0,004	0
9	0,004	-0,0006

Considerando as quatro malhas construídas, a solução exata referente aos deslocamentos do nó interno (nó número 4), estão indicadas na Tabela 7.

Tabela 7: Solução exata para os deslocamentos do nó interno da malha do *patch test* simples

Malha	u_1	u_2
1	0,002	0
2	0,0023	-0,00009
3	0,0026	-0,00018
4	0,0029	-0,00027

Os resultados obtidos na simulação do *patch test* simples para os elementos C^1 e C^2 , e adicionalmente para o elemento bilinear clássico C^0 Quad4, estão mostrados na Tabela 8. Tais resultados estão expressos em termos do erro relativo incidente sobre as componentes de deslocamento do nó interno da malha.

Além de se monitorar o erro relativo sobre os deslocamentos do nó interno da malha, também se efetuou o cômputo das normas L_2 e de energia da solução aproximada (considerando todo o domínio do problema). Os resultados encontrados estão dispostos na Tabela 9 e foram utilizados na construção dos gráficos das Figuras 18(a) e 18(b). As Figuras 18(c) e 18(d) mostram o comportamento dos erros relativos das referidas normas.

Tabela 8: Erro relativo sobre os deslocamentos do nó interno da malha do *patch test* simples

Malha	Erro relativo da solução aproximada (%)					
	Elemento C^0 Quad4		Elemento C^1		Elemento C^2	
	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2
1	0	0*	0	0*	0	0*
2	0	0	-2,428	-19,124	-1,885	-15,322
3	0	0	-4,357	-20,829	-3,479	-18,305
4	0	0	-5,911	-23,387	-4,785	-22,426

Observação: Os resultados indicados com um (*) na Tabela 8 correspondem ao erro da solução aproximada, e não ao erro relativo, como nos demais valores. Tal providência foi tomada em razão de que a solução analítica do problema é nula em tais pontos, impossibilitando o cálculo do erro relativo pela ocorrência de uma divisão por zero.

Tabela 9: Normas L_2 e de energia da solução aproximada do *patch test* simples

Malha	Ângulo de vértice máximo (°)	Elemento C^0 Quad4		Elemento C^1		Elemento C^2	
		$\ u^h\ _{L_2}$	$\ u^h\ _E$	$\ u^h\ _{L_2}$	$\ u^h\ _E$	$\ u^h\ _{L_2}$	$\ u^h\ _E$
1	90	0,0046705	0,126491	0,0046705	0,126491	0,0046705	0,126491
2	110,02	0,0046705	0,126491	0,0046595	0,126592	0,0046524	0,126564
3	136,39	0,0046705	0,126491	0,0046502	0,126905	0,0046348	0,126792
4	168,58	0,0046705	0,126491	0,0046486	0,127505	0,0046204	0,127252

Um outro parâmetro frequentemente avaliado diz respeito ao número de condicionamento da matriz de rigidez global, o qual, segundo Kreyszig (2011), pode ser calculado por meio da expressão (196):

$$c(K_{ij}) = \|K_{ij}\| \|K_{ij}^{-1}\| \quad 1 \leq i, j \leq n_{EQ} \quad (196)$$

no qual $c(K_{ij})$ é o número de condicionamento da matriz de rigidez global K_{ij} , $\|K_{ij}\|$ e $\|K_{ij}^{-1}\|$ são as normas da matriz K_{ij} e de sua inversa, respectivamente, e n_{EQ} é o número total de equações resultante do processo de discretização empregado. Cook et al. (1989) e Li et al. (2008) descrevem que, ao se computar $\|K_{ij}\|$ e $\|K_{ij}^{-1}\|$ por meio da norma L_2 , ou seja, $\|K_{ij}\|_{L_2}$ e $\|K_{ij}^{-1}\|_{L_2}$, a relação (196) pode ser reescrita de uma forma simplificada, conforme dado na expressão (197):

$$c(K_{ij}) = \frac{\lambda^{(máx)}}{\lambda^{(mín)}} \quad (197)$$

no qual $\lambda^{(máx)}$ e $\lambda^{(mín)}$ são o maior e o menor autovalores da matriz de rigidez global K_{ij} .

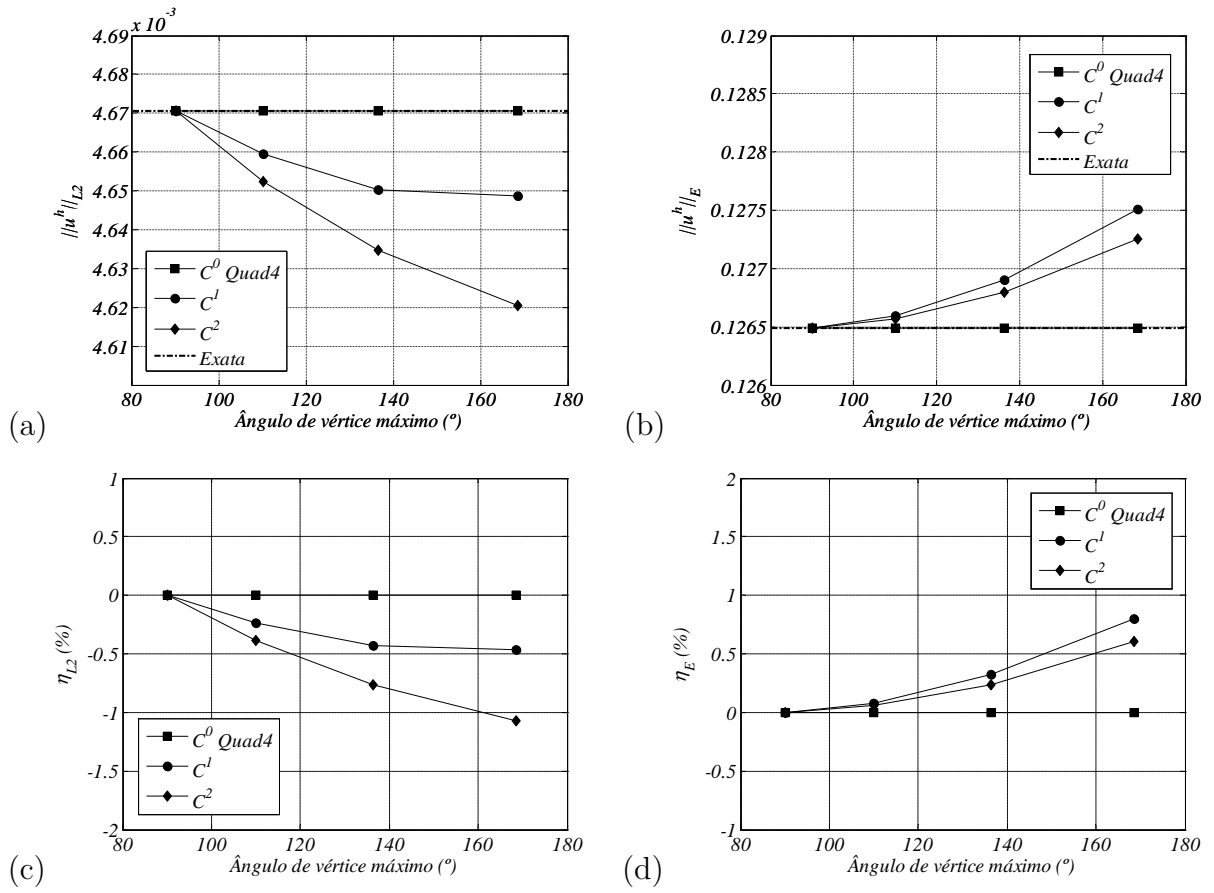


Figura 18: Comportamento das normas (a) L_2 e (b) de energia e do erro relativo em norma (c) L_2 e (d) de energia da solução aproximada do *patch test* simples em função da distorção da malha

Desta forma, na Tabela 10 são apresentados os valores obtidos para os números de condicionamento das matrizes de rigidez global, calculados com base na expressão (197), para os elementos C^0 Quad4, C^1 e C^2 para cada uma das quatro malhas simuladas.

Tabela 10: Número de condicionamento da matriz de rigidez global para as malhas do *patch test* simples

Malha	Elemento		
	C^0 Quad4	C^1	C^2
1	1,00	718,45	$3,793 \cdot 10^7$
2	1,02	735,79	$3,924 \cdot 10^7$
3	1,07	793,05	$7,355 \cdot 10^8$
4	1,21	938,64	$5,079 \cdot 10^7$

4.2.2 PATCH TEST GENERALIZADO

No caso do *patch test* generalizado, além das condições de contorno essenciais, aplicadas apenas sobre a aresta $x_1 = 0$, também se deve aplicar a tração no contorno

natural, isto é, sobre a aresta $x_1 = 2$, conforme indicado na Figura 16. O campo de tensões dado por (193)-(195) possibilita se determinar a tração t_i mediante o emprego da lei de Cauchy sobre a aresta do contorno natural, obtendo-se a expressão dada em (198):

$$t_i = T_{ij}n_j \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2 \quad \text{e} \quad t_2 = 0 \quad (198)$$

Os resultados obtidos nas simulações referentes aos erros relativos sobre as componentes de deslocamento u_1 e u_2 associados aos nós da malha que não possuem condição de contorno essencial aplicada estão indicados na Tabela 11.

Tabela 11: Erro relativo para os deslocamentos nodais das malhas do *patch test* generalizado

Malha	Nó	Erro relativo da solução aproximada (%)					
		Elemento C^0 Quad4		Elemento C^1		Elemento C^2	
		u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2
1	3	0	0	$6,8 \cdot 10^{-11}$	$7,0 \cdot 10^{-10}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$-1,3 \cdot 10^{-8}$
	4	0	$4,9 \cdot 10^{-19*}$	$-1,2 \cdot 10^{-10}$	$-5,4 \cdot 10^{-19*}$	$-9,9 \cdot 10^{-9}$	$-4,9 \cdot 10^{-19*}$
	5	$-2,6 \cdot 10^{-13}$	0	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$-9,6 \cdot 10^{-9}$
	7	0	$-1,6 \cdot 10^{-13}$	$6,8 \cdot 10^{-11}$	$7,0 \cdot 10^{-10}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$-1,3 \cdot 10^{-8}$
	8	0	$5,4 \cdot 10^{-19*}$	$3,4 \cdot 10^{-10}$	$-4,3 \cdot 10^{-19*}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$-5,8 \cdot 10^{-18*}$
	9	0	$-1,6 \cdot 10^{-13}$	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$-9,6 \cdot 10^{-9}$
2	3	0	0	0,795	2,869	0,242	2,918
	4	0	$3,3 \cdot 10^{-13}$	-3,012	-44,554	-1,144	-32,416
	5	$-2,6 \cdot 10^{-13}$	$-3,3 \cdot 10^{-13}$	0,398	6,896	0,136	4,350
	7	0	0	-0,911	-4,227	-0,371	-3,368
	8	0	$-1,5 \cdot 10^{-18*}$	-0,215	$4,2 \cdot 10^{-5*}$	-0,071	$2,6 \cdot 10^{-5*}$
	9	0	$3,4 \cdot 10^{-13}$	-0,648	-6,859	-0,200	-4,286
3	3	0	$-1,6 \cdot 10^{-13}$	2,852	9,806	0,986	7,100
	4	0	0	-6,109	-67,959	-2,449	-43,155
	5	0	$-3,3 \cdot 10^{-13}$	1,649	24,429	0,583	12,642
	7	0	0	-4,146	-14,287	-1,676	-8,737
	8	$-2,6 \cdot 10^{-13}$	$-6,2 \cdot 10^{-19*}$	-0,636	$1,6 \cdot 10^{-4*}$	-0,251	$7,9 \cdot 10^{-5*}$
	9	$-2,6 \cdot 10^{-13}$	0	-2,690	-25,151	-0,948	-13,000
4	3	$-5,0 \cdot 10^{-13}$	$-3,3 \cdot 10^{-13}$	5,995	21,591	2,470	13,651
	4	0	$7,4 \cdot 10^{-13}$	-9,817	-96,204	-4,282	-60,056
	5	$-2,6 \cdot 10^{-13}$	$-6,5 \cdot 10^{-13}$	3,527	50,445	1,470	26,340
	7	0	$1,8 \cdot 10^{-13}$	-9,853	-28,866	-4,680	-16,435
	8	0	$-3,7 \cdot 10^{-18*}$	-0,721	$3,5 \cdot 10^{-4*}$	-0,409	$1,7 \cdot 10^{-4*}$
	9	0	$6,7 \cdot 10^{-13}$	-6,620	-53,902	-2,951	-30,002

Observação: Os resultados indicados com um (*) na Tabela 11 correspondem

ao erro da solução aproximada, e não ao erro relativo, como nos demais valores. Tal providência foi tomada em razão de que a solução analítica do problema é nula em tais pontos, impossibilitando o cálculo do erro relativo pela ocorrência de uma divisão por zero.

Além do cômputo dos erros relativos incidentes sobre os deslocamentos dos nós que não apresentam condição de contorno essencial prescrita, também se computou as normas L_2 e de energia da solução aproximada (levando-se em consideração todo o domínio do problema). Os resultados estão dispostos na Tabela 12 e foram utilizados para se construir os gráficos das Figuras 19(a) e 19(b), as quais apresentam como abcissa o parâmetro de distorção de malha considerado. Em cada uma dessas Figuras, os valores exatos das respectivas normas, calculadas com base na solução analítica dada em (191)-(192) e (193)-(195), também são indicados para fins de comparação. Já as Figuras 19(c) e 19(d) mostram o comportamento dos erros relativos incidentes sobre as referidas normas.

Tabela 12: Normas L_2 e de energia da solução aproximada para o *patch test* generalizado

Malha	Ângulo de vértice máximo (°)	Elemento C^0 Quad4		Elemento C^1		Elemento C^2	
		$\ u^h\ _{L_2}$	$\ u^h\ _E$	$\ u^h\ _{L_2}$	$\ u^h\ _E$	$\ u^h\ _{L_2}$	$\ u^h\ _E$
1	90	0,0046705	0,126491	0,0046705	0,126491	0,0046705	0,126491
2	110,02	0,0046705	0,126491	0,0046640	0,126405	0,0046680	0,126458
3	136,39	0,0046705	0,126491	0,0046506	0,126155	0,0046617	0,126354
4	168,58	0,0046705	0,126491	0,0046417	0,125734	0,0046530	0,126127

O comportamento qualitativo das componentes de tensão T_{11} , T_{22} e T_{12} e das componentes de deslocamento u_1 e u_2 , obtidos para cada uma das quatro malhas simuladas e para cada um dos elementos (C^0 Quad4, C^1 e C^2) estão disponíveis no Apêndice E deste relatório. Adicionalmente, os respectivos campos da solução analítica do problema também são apresentados neste Apêndice.

A Tabela 13 apresenta os valores obtidos para os números de condicionamento das matrizes de rigidez global para os elementos C^0 Quad4, C^1 e C^2 para cada uma das quatro malhas simuladas.

Tabela 13: Número de condicionamento da matriz de rigidez global para as malhas do *patch test* generalizado

Malha	Elemento		
	C^0 Quad4	C^1	C^2
1	76,02	1832,30	$6,376 \cdot 10^7$
2	77,35	1847,88	$6,753 \cdot 10^7$
3	85,97	2006,23	$1,039 \cdot 10^8$
4	109,57	2495,75	$8,988 \cdot 10^7$

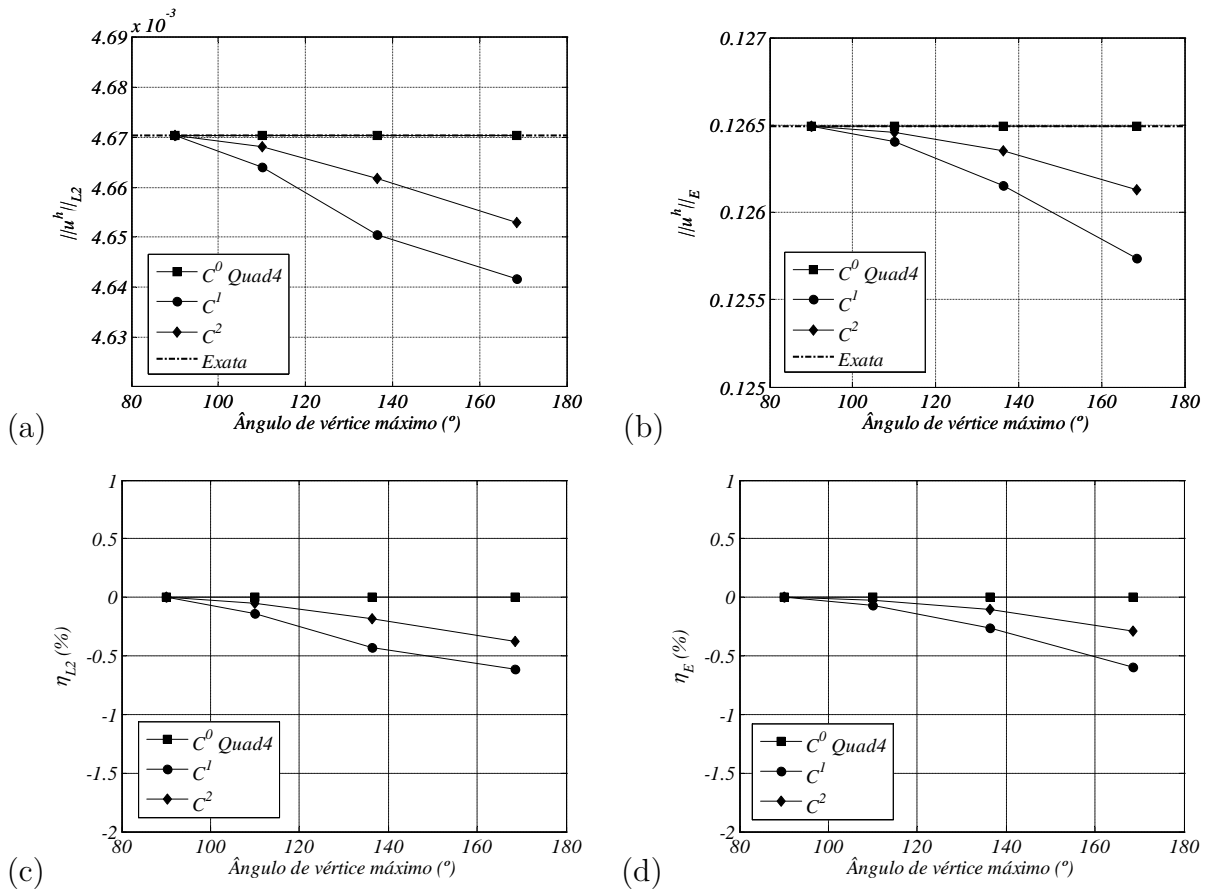


Figura 19: Comportamento das normas (a) L_2 e (b) de energia e do erro relativo em norma (c) L_2 e (d) de energia da solução numérica do *patch test* generalizado em função da distorção da malha

4.3 Solução de alguns problemas clássicos de elasticidade plana

4.3.1 VIGA EM BALANÇO

A solução analítica para o problema da viga em balanço, em EPT, submetida às condições de carregamento e restrição mostradas na Figura 20, segundo Timoshenko e Goodier (1951), é dada pelas expressões (199) a (201) para o campo de tensões e por (202) a (203) para o campo de deslocamentos:

$$T_{11}(x_1, x_2) = -\frac{Px_1x_2}{I} \quad (199)$$

$$T_{22}(x_1, x_2) = 0 \quad (200)$$

$$T_{12}(x_1, x_2) = -\frac{P}{2I}(\bar{h}^2 - x_2^2) \quad (201)$$

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{Px_1^2x_2}{2EI} - \frac{\nu Px_2^3}{6EI} + \frac{Px_2^3}{6IG} + \left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{P\bar{h}^2}{2IG}\right)x_2 \quad (202)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{\nu P x_1 x_2^2}{2EI} + \frac{P x_1^3}{6EI} - \frac{PL^2 x_1}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} \quad (203)$$

no qual P é a carga aplicada na extremidade livre da viga, L é o comprimento total da viga, \bar{h} é a meia-altura da seção transversal, E é o módulo de elasticidade do material, ν é o coeficiente de Poisson do material, G é o chamado módulo de cisalhamento transversal do material, dado por (204), e I é o momento de inércia de área da seção transversal da viga, calculado por meio de (205).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (204)$$

$$I = \frac{2\bar{h}^3 e}{3} \quad (205)$$

sendo e a espessura da viga.

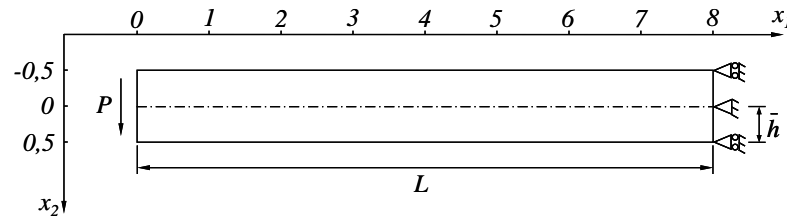


Figura 20: Problema da viga em balanço
Adaptado de: Timoshenko e Goodier (1951)

A solução analítica deste problema, conforme abordado em Timoshenko e Goodier (1951), foi construída mediante a consideração de que na região do engaste apenas o ponto central da viga apresenta deslocamento nulo na direção x_2 , isto é, $u_2(0, 0) = 0$. Para os demais valores de x_2 , o deslocamento u_2 assume valores não nulos, dado que $\nu \neq 0$. Adicionalmente, em função das distorções da seção transversal causadas pela tensão de cisalhamento, o deslocamento na direção x_1 é nulo apenas no ponto central da região do engaste, isto é, $u_1(0, 0) = 0$. Para os demais valores de x_2 , o deslocamento u_1 assume valores não nulos. As Figuras 22(a) e 22(b) mostram, respectivamente, os efeitos descritos anteriormente.

Os modelos numéricos foram construídos considerando as características geométricas indicadas na Figura 20. Quatro malhas foram construídas, empregando-se uma estratégia de refino homogêneo, conforme Figuras 21(a)-(d). As características gerais destas malhas são apresentadas na Tabela 14.

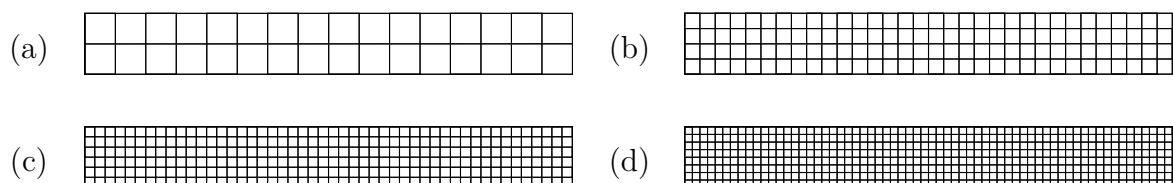


Figura 21: Malhas dos modelos numéricos construídos para o problema da viga em balanço

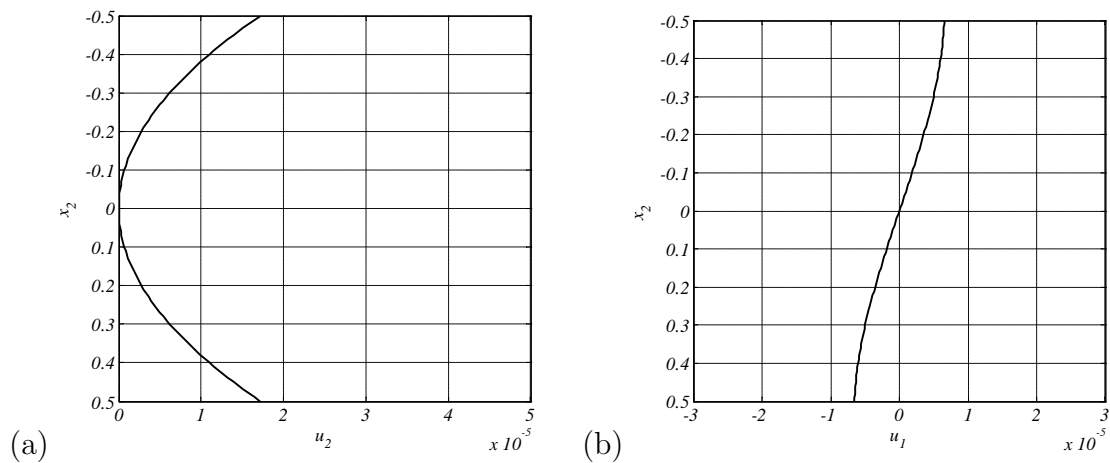


Figura 22: Comportamento das componentes de deslocamento (a) u_2 e (b) u_1 da solução analítica na extremidade engastada da viga em balanço

Tabela 14: Características das malhas construídas para o problema da viga em balanço

Malha	Número de elementos	Número de nós C^0 Quad4, C^1 , C^2	Número de nós C^0 Quad8
1	32	51	133
2	128	165	457
3	288	343	973
4	512	585	1681

A aplicação da condição de contorno natural na extremidade livre da viga foi feita mediante a prescrição da tração equivalente calculada pela solução analítica do problema, conforme equações (199) a (201). Por outro lado, a condição de contorno essencial, aplicada à extremidade engastada, levou em consideração os efeitos mostrados nas Figuras 22(a) e 22(b), e está genericamente ilustrada na Figura 23.

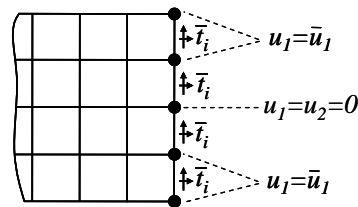


Figura 23: Estratégia de aplicação da condição de contorno essencial para o modelo numérico do problema da viga em balanço

A solução do problema foi conduzida empregando-se os elementos quadrilaterais de quatro nós C^1 e C^2 , com quadraturas de Gauss de 16 e 36 pontos, respectivamente, para cada umas das quatro malhas mostradas nas Figuras 21(a)-(d). Adicionalmente, o problema também foi resolvido com os elementos quadrilaterais de regularidade C^0 de quatro nós (Quad4) e oito nós (Quad8), com quadraturas de Gauss de 4 e 9 pontos,

respectivamente, com o intuito de permitir a execução de comparações sobre os resultados obtidos. Os dados considerados neste problema foram: $e = 1$, $\bar{h} = 1/2$, $L = 8$, $P = 1$, $E = 210000$ e $\nu = 0,3$ (unidades consistentes).

Os resultados obtidos nas simulações, os quais estão disponíveis no Apêndice F deste relatório, foram expressos em termos das métricas definidas anteriormente e são apresentados de forma gráfica nas Figuras 24(a)-(d).

As Figuras 24(a) e 24(b) mostram, respectivamente, as normas L_2 e de energia da solução aproximada. As linhas tracejadas indicadas nestas Figuras se referem aos valores exatos das respectivas normas, as quais foram calculadas com base nas equações (186)-(187) e (199)-(203). As abcissas desses gráficos remetem a um parâmetro relacionado com a malha, que neste caso é o número de graus de liberdade total do modelo numérico. As Figuras 24(c) e 24(d) mostram, respectivamente, o comportamento do erro relativo em norma L_2 e do erro relativo em norma de energia da solução aproximada. Estes dois gráficos também possuem como abcissa o n_{GL} do modelo numérico e estão plotados em escala log-log.

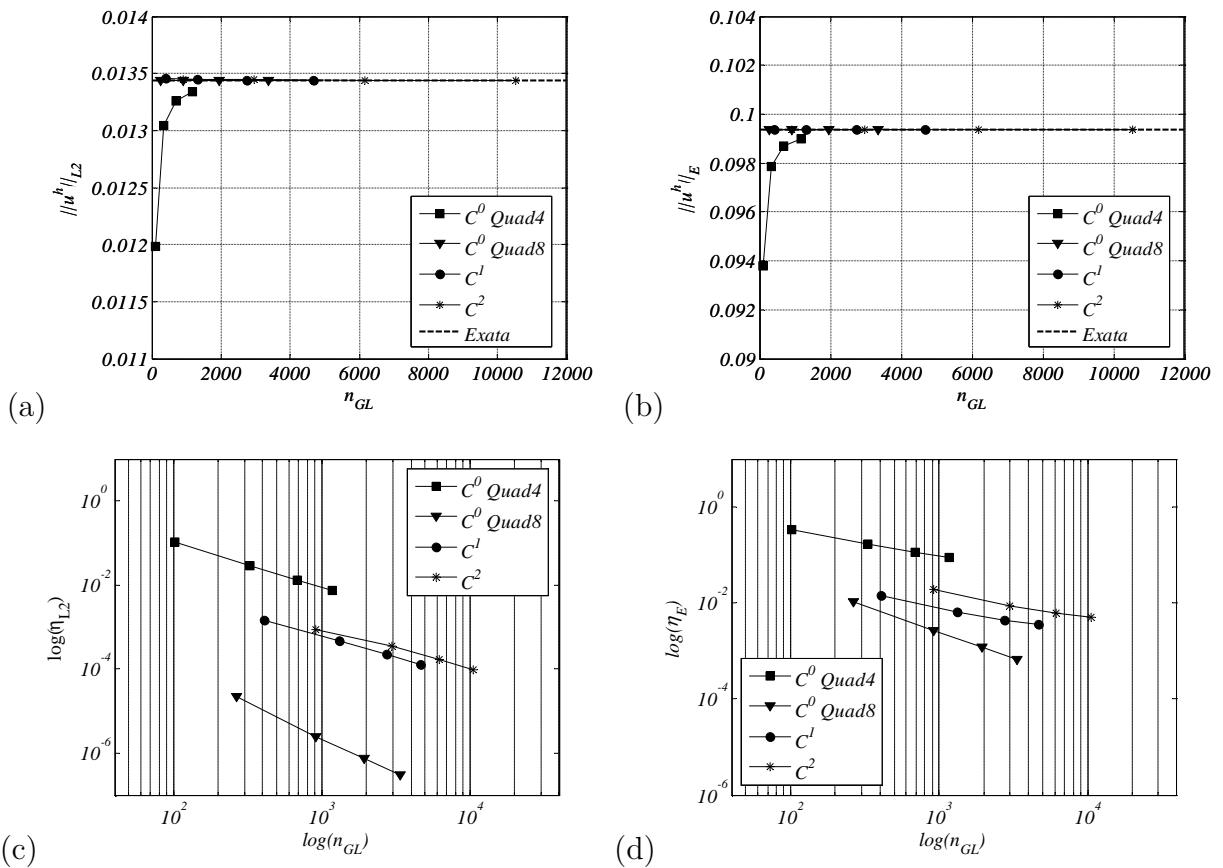


Figura 24: Resultados numéricos do problema da viga em balanço

As inclinações (taxas de convergência) de cada trecho¹³ das curvas dos gráficos das

¹³O trecho 1 corresponde ao segmento de reta entre os pontos das malhas 1 e 2. O trecho 2, entre os pontos das malhas 2 e 3, e assim sucessivamente.

Figuras 24(c) e 24(d) estão indicadas na Tabela 15.

Tabela 15: Inclinações de cada trecho das curvas de convergência do problema da viga em balanço

Figura	Trecho	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^1	C^2
24(c)	1	1,11	1,75	0,96	0,81
	2	1,09	1,63	1,05	1,01
	3	1,07	1,60	1,05	1,03
24(d)	1	0,55	1,12	0,67	0,69
	2	0,54	1,07	0,52	0,49
	3	0,53	1,05	0,41	0,39

A título de ilustração, nas Figuras 25(a) e 25(b) são mostrados os comportamentos das soluções aproximadas obtidas para a componente de deslocamento u_2 na altura central da viga, isto é, para $0 \leq x_1 \leq L$ e $x_2 = 0$, referentes às malhas 1 e 4 simuladas. Adicionalmente, o comportamento da solução analítica também é mostrado nestas Figuras (linhas tracejadas).

Observação: no caso do elemento C^0 Quad8, foram considerados apenas os valores associados com os nós dos vértices para construção dos gráficos das Figuras 25(a) e 25(b).

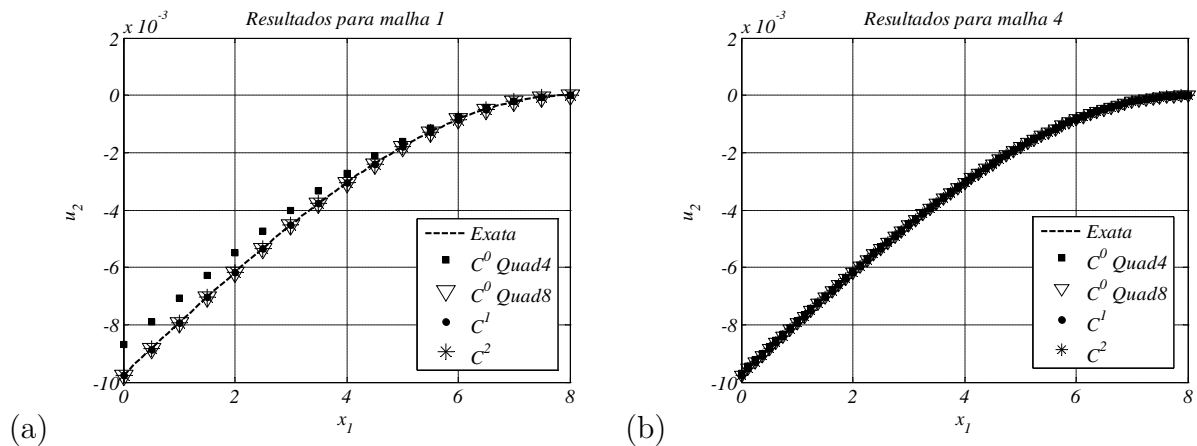


Figura 25: Comportamento da componente u_2 do campo de deslocamento na altura central da viga em balanço para os elementos C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2 para as malhas (a) 1 e (b) 4

4.3.2 PLACA INFINITA COM FURO CENTRAL

De acordo com Szabó e Babuška (1991), a solução analítica referente ao campo de tensões e de deslocamentos para uma placa infinita com furo central, em EPT, submetida a um carregamento remoto uniforme T^∞ aplicado na direção e_1 , conforme ilustrado na Figura 26, é dado pelas expressões (206)-(208) e (209)-(210), respectivamente:

$$T_{11}(r, \theta) = T^\infty \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (206)$$

$$T_{22}(r, \theta) = T^\infty \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (207)$$

$$T_{12}(r, \theta) = T^\infty \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right] \quad (208)$$

$$u_1(r, \theta) = \frac{T^\infty a}{8G} \left[\frac{r}{a} (\kappa + 1) \cos(\theta) + \frac{2a}{r} ((\kappa + 1) \cos(\theta) + \cos(3\theta)) + \right. \\ \left. - \frac{2a^3}{r^3} \cos(3\theta) \right] \quad (209)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{T^\infty a}{8G} \left[\frac{r}{a} (\kappa - 3) \sin(\theta) + \frac{2a}{r} ((1 - \kappa) \sin(\theta) + \sin(3\theta)) + \right. \\ \left. - \frac{2a^3}{r^3} \sin(3\theta) \right] \quad (210)$$

no qual T_{11} e T_{22} são as componentes de tensão normais nas direções cartesianas e_1 e e_2 , respectivamente, T_{12} é a componente de tensão cisalhante, u_1 e u_2 são as componentes de deslocamento nas direções e_1 e e_2 , respectivamente, r e θ são as coordenadas polares do problema, com origem do sistema de coordenadas no centro do furo da placa, a corresponde ao raio do furo central, T^∞ é o valor da tração remota aplicada na placa na direção e_1 , G é o módulo de cisalhamento transversal do material, calculado por meio da relação (204), e κ é o chamado módulo volumétrico do material, o qual é determinado pela expressão (211):

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{para EPT} \\ 3 - 4\nu & \text{para EPD} \end{cases} \quad (211)$$

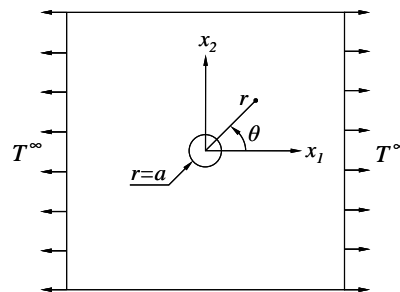


Figura 26: Problema da placa infinita com furo central
Adaptado de: Szabó e Babuška (1991)

O modelo numérico construído para este problema considera dupla condição de simetria, possibilitando se simplificar o modelo para apenas $1/4$ de placa. Além disso, como a solução analítica do problema se refere a uma placa infinita, apenas uma porção

central da placa em torno do furo é considerada, cujas dimensões deste truncamento estão indicadas na Figura 27. Com isso, a aplicação das condições de contorno segue a abordagem utilizada por Szabó e Babuška (1991), a qual considera a prescrição de condições de contorno essenciais sobre os planos de simetria da placa e a prescrição de trações equivalentes, calculadas por meio da solução analítica do problema dada em (206)-(208), nas arestas resultantes do processo de truncamento (ver Figura 27).

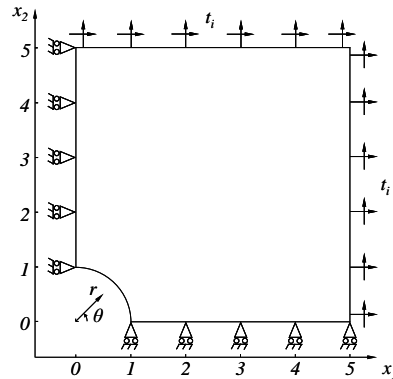


Figura 27: Construção do modelo numérico do problema da placa infinita com furo
Adaptado de: Szabó e Babuška (1991)

Assim como no caso anterior, quatro malhas foram geradas, as quais estão mostradas nas Figuras 28(a)-(d). As características destas malhas estão resumidas na Tabela 16. É importante salientar que a estratégia de construção de malha adotada neste trabalho não segue o estilo radial comumente empregado na simulação deste tipo de problema (ver, por exemplo, Zienkiewicz e Zhu, 1995; Wiberg e Abdulwahab, 1997; Oh e Batra, 1999). Tal providência foi tomada com o intuito de se obter uma malha com o menor nível de distorção possível, visando reduzir a influência deste efeito sobre a solução aproximada obtida com os elementos de regularidade C^1 e C^2 .

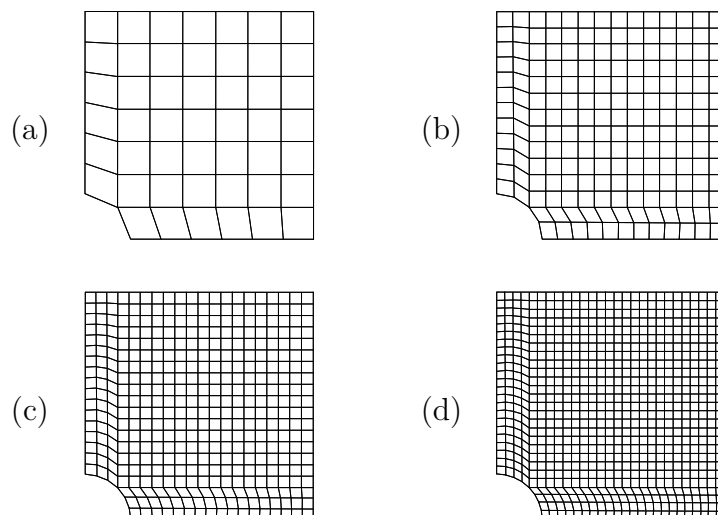


Figura 28: Malhas construídas para o problema da placa infinita com furo central

Tabela 16: Características das malhas construídas para o problema da placa infinita com furo central

Malha	Número de elementos	Número de nós C^0 Quad4, C^1 , C^2	Número de nós C^0 Quad8
1	48	63	173
2	192	221	633
3	391	432	1254
4	713	768	2248

O modelo numérico da Figura 27 foi resolvido para cada uma das quatro malhas mostradas nas Figuras (28)(a)-(d), empregando-se os elementos quadriláteros de quatro nós C^1 e C^2 , com quadraturas de Gauss de 16 e 36 pontos, respectivamente, e os elementos quadriláteros de regularidade C^0 de quatro nós (Quad4) e oito nós (Quad8), com quadratura de Gauss de 4 e 9 pontos, respectivamente.

Os resultados obtidos nas simulações estão mostrados nos gráficos das Figuras 29(a)-(d). Os dados utilizados na geração destes gráficos estão disponíveis no Apêndice G deste relatório.

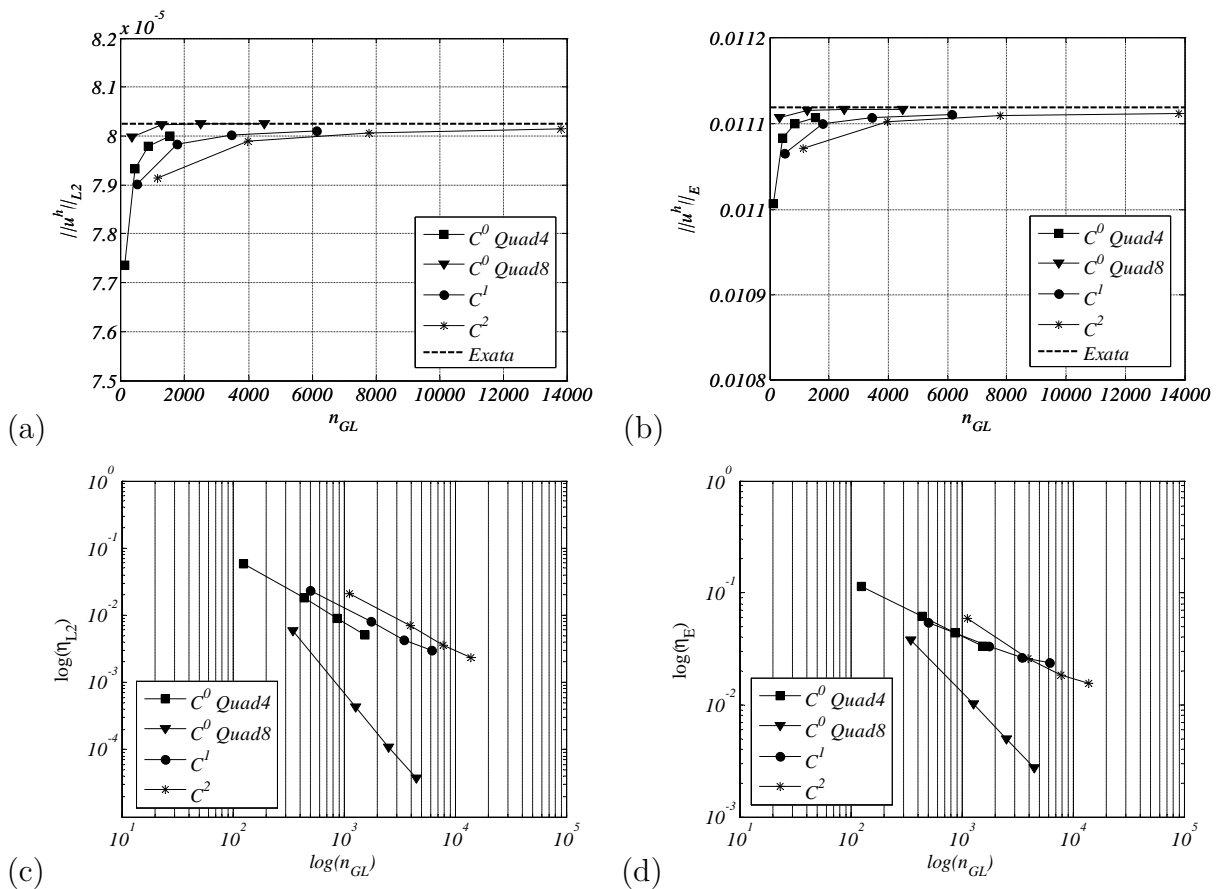


Figura 29: Resultados numéricos do problema da placa infinita com furo central

As Figuras 29(a) e 29(b) mostram, respectivamente, as normas L_2 e de energia da solução aproximada, ao passo que as Figuras 29(c) e 29(d) mostram, respectivamente, os

erros relativos em norma L_2 e em norma de energia da solução aproximada. É importante destacar que, assim como no caso anterior, todos estes gráficos possuem como abscissa o número de graus de liberdade associado ao modelo numérico, e que os gráficos das Figuras 29(c) e 29(d) são plotados em escala log-log.

As inclinações (taxas de convergência) de cada trecho das curvas dos gráficos das Figuras 29(c) e 29(d) estão indicadas na Tabela 17.

Tabela 17: Inclinações de cada trecho das curvas de convergência do problema da placa infinita com furo central

Figura	Trecho	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^1	C^2
29(c)	1	0,92	2,00	0,84	0,88
	2	1,05	2,02	0,95	1,00
	3	0,97	1,85	0,64	0,75
29(d)	1	0,48	1,00	0,39	0,66
	2	0,51	1,06	0,35	0,49
	3	0,49	1,02	0,20	0,28

A título de ilustração, nas Figuras 30(a) e 30(b) são mostrados os comportamentos das soluções aproximadas obtidas para a componente de tensão T_{11} na linha $x_1 = 0$ e $1 \leq x_2 \leq 5$, referentes às malhas 1 e 4 simuladas, respectivamente. Adicionalmente, o comportamento da solução analítica também é mostrado nestas Figuras (linhas tracejadas).

Observação: no caso do elemento C^0 Quad8, foram considerados apenas os valores associados com os nós dos vértices para construção dos gráficos das Figuras 30(a) e 30(b).

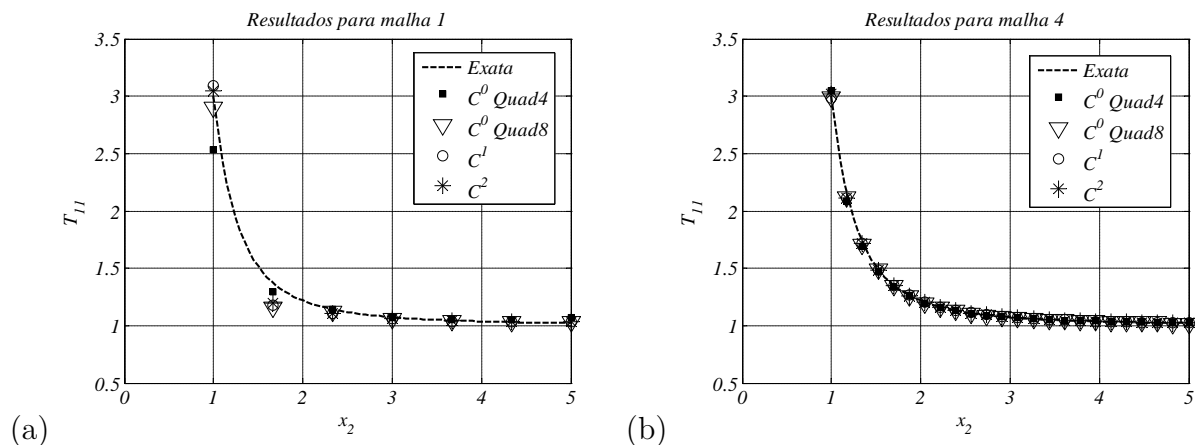


Figura 30: Comportamento da componente de tensão T_{11} sobre a linha $x_1 = 0$ para os elementos C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2 para as malhas (a) 1 e (b) 4

4.3.3 DOMÍNIO *L-SHAPED*

Considerando o problema do corpo elástico plano *L-shaped* com geometria conforme indicado na Figura 31. A solução analítica deste problema, em EPD, de acordo com Szabó et al. (1988) e Szabó e Babuška (1991), para o chamado modo 1 de carregamento, considerando apenas o primeiro termo da expansão assintótica em torno do vértice no qual está posicionada a origem do sistema de coordenadas, é dada pelas expressões (212)-(214) e (215)-(216) para os campos de tensão e de deslocamento, respectivamente:

$$T_{11}(r, \theta) = A_{(1)} \lambda_{(1)} r^{(\lambda_{(1)}-1)} \{ (2 - Q_{(1)} (\lambda_{(1)} + 1)) \cos [(\lambda_{(1)} - 1) \theta] + (\lambda_{(1)} - 1) \cos [(\lambda_{(1)} - 3) \theta] \} \quad (212)$$

$$T_{22}(r, \theta) = A_{(1)} \lambda_{(1)} r^{(\lambda_{(1)}-1)} \{ (2 + Q_{(1)} (\lambda_{(1)} + 1)) \cos [(\lambda_{(1)} - 1) \theta] + (\lambda_{(1)} - 1) \cos [(\lambda_{(1)} - 3) \theta] \} \quad (213)$$

$$T_{12}(r, \theta) = A_{(1)} \lambda_{(1)} r^{(\lambda_{(1)}-1)} \{ (\lambda_{(1)} - 1) \operatorname{sen} [(\lambda_{(1)} - 3) \theta] + Q_{(1)} (\lambda_{(1)} + 1) \operatorname{sen} [(\lambda_{(1)} - 1) \theta] \} \quad (214)$$

$$u_1(r, \theta) = \frac{A_{(1)}}{2G} r^{\lambda_{(1)}} \{ (\kappa - Q_{(1)} (\lambda_{(1)} + 1)) \cos (\lambda_{(1)} \theta) - \lambda_{(1)} \cos [(\lambda_{(1)} - 2) \theta] \} \quad (215)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{A_{(1)}}{2G} r^{\lambda_{(1)}} \{ (\kappa + Q_{(1)} (\lambda_{(1)} + 1)) \operatorname{sen} (\lambda_{(1)} \theta) + \lambda_{(1)} \operatorname{sen} [(\lambda_{(1)} - 2) \theta] \} \quad (216)$$

no qual r e θ são as coordenadas polares do problema, $\lambda_{(1)}$ e $Q_{(1)}$ são constantes que assumem os valores $\lambda_{(1)} = 0,544483737$ e $Q_{(1)} = 0,543075579$ para o modo 1, respectivamente, $A_{(1)}$ é uma constante análoga ao fator intensificador de tensões, para modo 1, da mecânica da fratura elástica linear, G é o módulo de cisalhamento transversal do material, dado por (204), e κ é o módulo volumétrico do material, calculado por meio da relação (211).

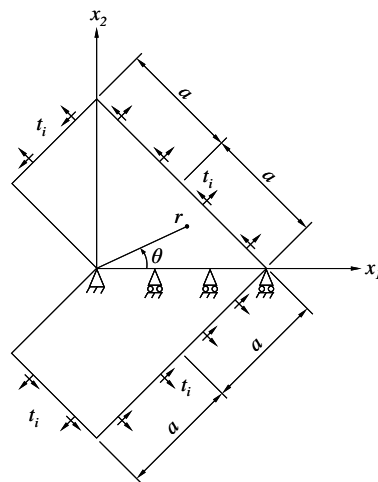


Figura 31: Problema do domínio elástico *L-shaped*
Adaptado de: Szabó et al. (1988)

Observação: as trações aplicadas nos contornos são determinadas por meio da solução analítica do campo de tensões e as condições de contorno essenciais têm a finalidade de evitar deslocamento de corpo rígido, uma vez que as trações aplicadas definem completamente o equilíbrio do corpo (Szabó et al., 1988).

Visando facilitar a construção da malha de forma que a orientação do sistema de coordenadas local seja coincidente com o sistema de coordenadas global do problema, o modelo numérico construído foi baseado na retirada de uma porção interna do domínio *L-shaped*, conforme Figura 32(a), aplicando-se as condições de contorno equivalentes indicadas na Figura 32(b).

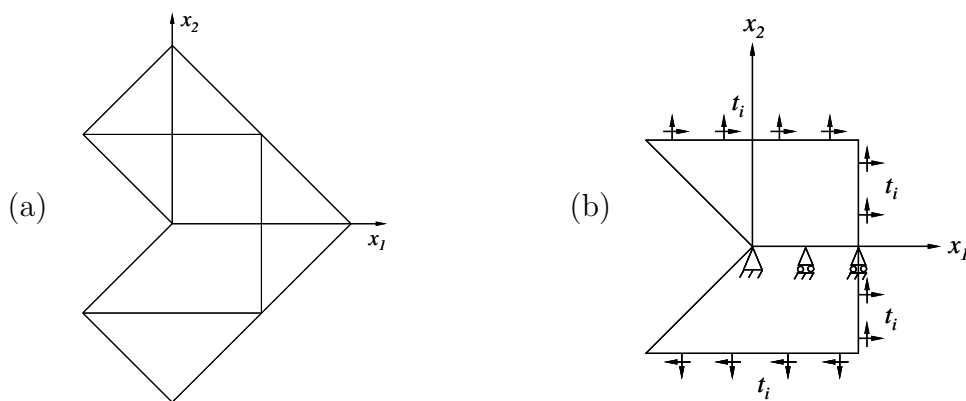


Figura 32: Modelo numérico construído para o problema do domínio *L-shaped*

Quatro malhas foram construídas para os modelos numéricos, as quais estão mostradas nas Figuras 33(a)-(d). As características destas malhas estão resumidas na Tabela 18.

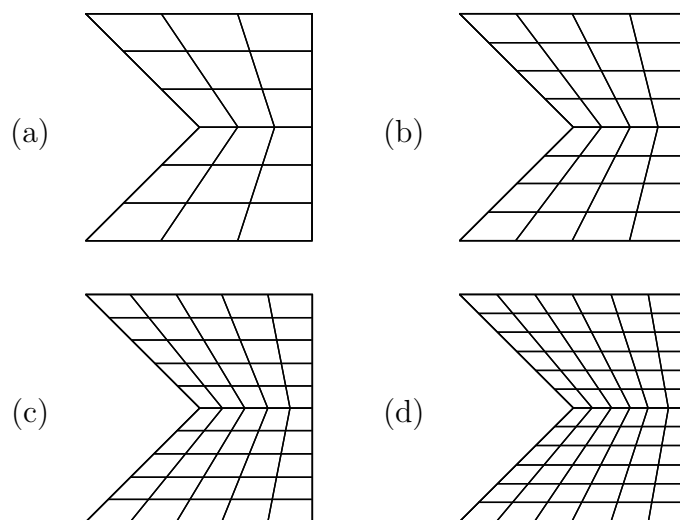


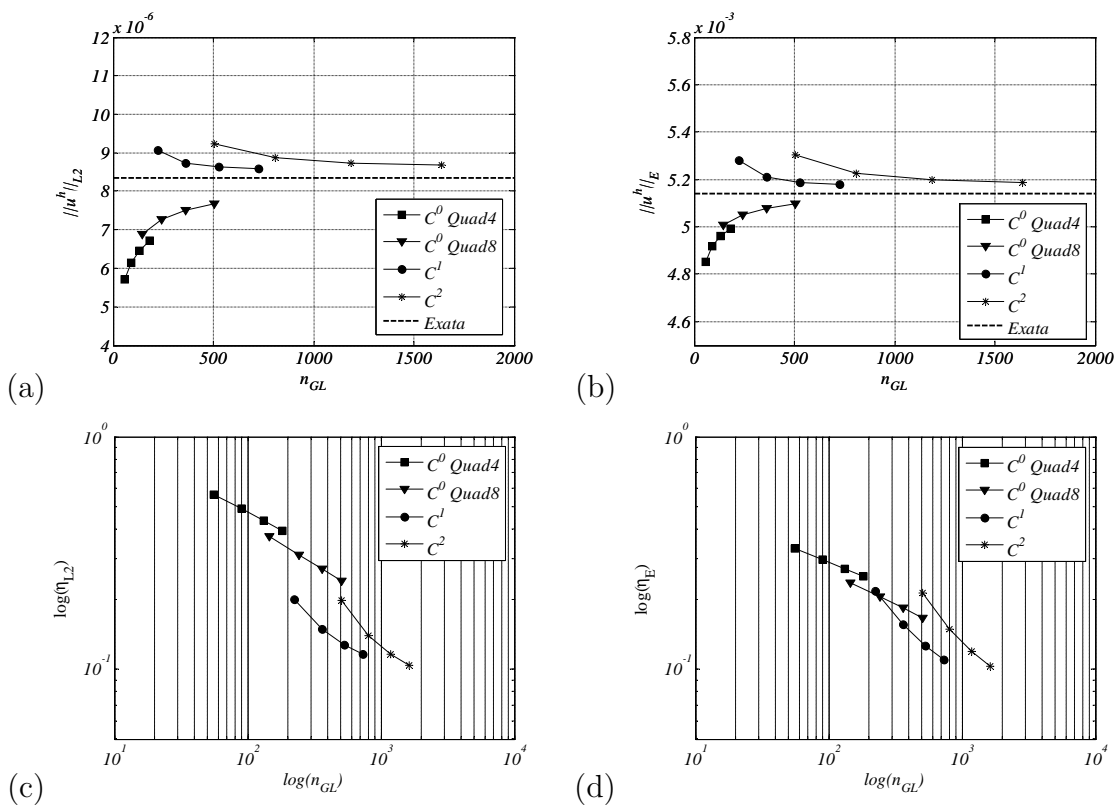
Figura 33: Malhas construídas para o problema do domínio *L-shaped*

Tabela 18: Características das malhas construídas para o problema do domínio *L-shaped*

Malha	Número de elementos	Número de nós C^0 Quad4, C^1 , C^2	Número de nós C^0 Quad8
1	18	28	73
2	32	45	121
3	50	66	181
4	72	91	253

O modelo numérico da Figura 32(b) foi resolvido para cada uma das quatro malhas mostradas nas Figuras 33(a)-(d), empregando-se os elementos quadrilaterais de quatro nós C^1 e C^2 , com quadraturas de Gauss de 16 e 36 pontos, respectivamente, e os elementos quadrilaterais de regularidade C^0 de quatro nós (Quad4) e oito nós (Quad8), com quadratura de Gauss de 4 e 9 pontos, respectivamente. O problema foi abordado em EPD, considerando-se os seguintes dados para sua resolução: $a = 1$, $E = 210000$, $\nu = 0,3$ e $A_{(1)} = 1$ (unidades consistentes).

Os resultados obtidos nas simulações estão mostrados nos gráficos das Figuras 34(a)-(d). Os dados utilizados na geração destes gráficos estão disponíveis no Apêndice H deste relatório.

Figura 34: Resultados numéricos para o problema do domínio *L-shaped*

As Figuras 34(a) e 34(b) mostram, respectivamente, as normas L_2 e de energia da solução aproximada, ao passo que as Figuras 34(c) e 34(d) mostram, respectivamente, os

erros relativos em norma L_2 e em norma de energia da solução aproximada. Assim como nos casos anteriores, todos estes gráficos possuem como abscissa o número de graus de liberdade associado ao modelo numérico.

As inclinações (taxas de convergência) de cada trecho das curvas dos gráficos das Figuras 34(c) e 34(d) estão indicadas na Tabela 19.

Tabela 19: Inclinações de cada trecho das curvas de convergência para o problema do domínio L -shaped

Figura	Trecho	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^1	C^2
34(c)	1	0,29	0,36	0,61	0,73
	2	0,31	0,35	0,40	0,47
	3	0,31	0,34	0,31	0,35
34(d)	1	0,23	0,28	0,71	0,75
	2	0,23	0,28	0,54	0,58
	3	0,23	0,28	0,44	0,47

4.4 Análise dos resultados

As simulações de *patch test* realizadas permitiram verificar que, dado um domínio discretizado com um certo número de elementos, quanto maior é a distorção de forma dos elementos da malha, maiores são os erros relativos da solução aproximada obtida (ver Tabelas 8 e 11) e maiores são os desvios das normas L_2 e de energia da solução numérica (ver Figuras 18 e 19), em relação às respectivas normas da solução exata, apresentados pelos elementos de regularidade C^1 e C^2 . Este comportamento foi evidenciado tanto para o caso de *patch test* simples (apenas condições de contorno essenciais prescritas) quanto para o caso de *patch test* generalizado (condições de contorno mistas aplicadas). Ainda, os desvios apresentados foram maiores para o elemento de regularidade C^2 em comparação com o elemento de regularidade C^1 . Em termos do número de condicionamento da matriz de rigidez global, considerando as malhas sem distorção (malha 1) e com maior nível de distorção (malha 4) utilizadas no *patch test*, os aumentos computados desta grandeza para os elementos C^0 Quad4, C^1 e C^2 foram de 21%, 30,64% e 33,9%, respectivamente, para o *patch test* simples, e de 44,13%, 36,2% e 40,97%, respectivamente, para o *patch test* generalizado (ver dados das Tabelas 10 e 13). Assim, os aumentos dos números de condicionamento das matrizes de rigidez global computados foram relativamente próximos para os três tipos de elementos e nas duas condições de *patch test* simuladas.

Quanto aos problemas de elasticidade plana, a Tabela 20 mostra um comparativo das taxas de convergência, em norma de energia, determinadas pelo estimador de erro *a priori* (expressões (64) e (65)) e calculadas com base nos resultados numéricos (Tabelas 15, 17 e 19).

Tabela 20: Comparativo das taxas de convergência em norma de energia previstas pelo estimador *a priori* e calculadas com base nos resultados numéricos para os problemas da viga em balanço, placa com furo e domínio *L-shaped*

Tipo de elemento	Viga em balanço		Placa com furo		Domínio <i>L-shaped</i>	
	$\beta_{estimado}$	$\beta_{numérico}$	$\beta_{estimado}$	$\beta_{numérico}$	$\beta_{estimado}$	$\beta_{numérico}$
C^0 Quad4	0,5	0,55	0,5	0,49	0,27	0,23
C^0 Quad8	1,0	1,09	1,0	1,02	0,27	0,28
C^1	1,5	0,57	1,5	0,35	0,27	0,58
C^2	1,5	0,57	2,5	0,54	0,27	0,62

Observação 1: as taxas de convergência $\beta_{numérico}$ mostradas na Tabela 20 correspondem às inclinações das retas de melhor ajuste que levam em consideração todos os pontos das referidas curvas. Por outro lado, os valores mostrados anteriormente nas Tabelas 15, 17 e 19 referem-se às inclinações de cada trecho das curvas de convergência.

Observação 2: de acordo com Szabó e Babuška (1991), a taxa de convergência estimada para o problema do domínio *L-shaped* em modo 1 de carregamento e estratégia de refino uniforme de malha apresenta baixa acuracidade e deve ser tratada apenas como uma referência orientativa. Esta baixa acuracidade está associada com o fato de que sob tais condições a avaliação fica relacionada à chamada faixa pré-assintótica e tem apenas uma pequena participação da faixa assintótica. O ideal neste caso, conforme descrevem Szabó e Babuška (1991), seria utilizar uma avaliação do tipo *hp*, promovendo refinamentos geométricos de malha localizados em torno do ponto de singularidade do problema. Com isso, os resultados obtidos para as taxas de convergência do problema do domínio *L-shaped* serão simplesmente apresentados neste relatório e nenhuma análise será feita sobre eles.

Analisando os dados da Tabela 20 verifica-se que os elementos C^0 Quad4 e C^0 Quad8 apresentaram os valores das taxas de convergência determinadas por meio dos resultados numéricos muito próximos dos valores previstos pelo estimador de erro *a priori* para os problemas da viga em balanço e da placa infinita com furo central. Em contrapartida, os elementos de regularidade C^1 e C^2 apresentaram taxas de convergência muito menores do que aquelas previstas pelo estimador de erro (cerca de 2,63 vezes menor para o problema da viga em balanço e cerca de 4,45 vezes menor para o problema da placa infinita com furo central). No caso do problema da placa infinita com furo central, tal comportamento pode estar associado com o fato de que a malha apresenta-se distorcida, comprometendo as características de convergência da solução aproximada. No caso do problema da viga em balanço, os resultados são intrigantes, uma vez que a malha não apresenta qualquer distorção de forma dos elementos. Por outro lado, as condições de contorno aplicadas sobre a aresta engastada podem ter alguma influência sobre os resultados, eventualmente demandando a prescrição adicional de algum grau de liberdade associado às derivadas do campo primal.

Um outro aspecto importante a ser ressaltado diz respeito aos níveis de erro rela-

tivo, tanto em norma L_2 quanto de energia, apresentados pelos elementos de regularidade C^1 e C^2 . Conforme se observa nas Figuras 24 e 29, referentes aos problemas da viga em balanço e da placa infinita com furo central, respectivamente, tais elementos apresentaram erros relativos maiores do que aqueles obtidos com o elemento C^0 Quad8 (teoricamente, os elementos C^1 e C^2 deveriam ter apresentado erros relativos menores do que o elemento C^0 Quad8). Apenas no caso do problema do domínio *L-shaped* os níveis de erro relativo apresentados pelos elementos C^1 e C^2 foram inferiores aqueles dos elementos C^0 Quad4 e C^0 Quad8 a partir de um dado número de graus de liberdade do modelo discreto (ver Figura 34). Porém, nos três problemas simulados, o elemento de regularidade C^2 curiosamente sempre apresentou níveis de erro relativo ligeiramente superiores aos do elemento de regularidade C^1 . Os motivos que levaram os elementos de regularidade C^1 e C^2 a apresentarem taxas de convergência numéricas inferiores às taxas teóricas e níveis de erro relativo superiores ao do elemento de regularidade C^0 Quad8 não ficaram esclarecidos e devem ser investigados de maneira mais criteriosa.

5 APROXIMAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO LIVRE PARA CERTOS PROBLEMAS DE MECÂNICA

O Capítulo 4 apresentou a aplicação dos elementos quadriláterais de quatro nós implementados com as funções de interpolação de regularidade C^1 e C^2 na solução de alguns problemas clássicos de elasticidade plana. O Capítulo 5, por sua vez, tem a finalidade de avaliar o comportamento destes elementos finitos quando empregados na solução do problema da aproximação das frequências naturais de vibração livre. Igualmente, alguns exemplos clássicos que possuem solução analítica são simulados. Os resultados apresentados incluem o comportamento de aproximação do espectro normalizado de frequências naturais e as curvas de convergência relacionadas com os primeiros modos de vibração de cada problema para cada elemento utilizado.

5.1 Barra engastada-livre

5.1.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

De acordo com Timoshenko (1937), o modelo de vibração longitudinal de uma barra prismática considera que as seções transversais da barra permanecem planas durante o movimento e que todas as partículas presentes nestas seções transversais experimentam apenas movimento na direção axial da barra. Ainda segundo o autor, os deslocamentos laterais que se originam simultaneamente com os de extensão e compressão da barra podem ser desconsiderados sem se incorrer em erros substanciais dado que o comprimento das ondas longitudinais de vibração sejam muito maiores do que as dimensões da seção transversal.

Considerando uma barra com comprimento L , seção transversal com área A e material com módulo de elasticidade E , conforme indicado na Figura 35(a). A condição de equilíbrio de uma dada porção da barra, mostrada na Figura 35(b), possibilita se escrever a equação diferencial que descreve o movimento de vibração da barra, a qual é indicada em (217) (Timoshenko, 1937; Rao, 2000):

$$u_{1,11}(x_1, t) = c^2 u_{1,tt}(x_1, t) \quad (217)$$

no qual $u_1(x_1, t)$ é o deslocamento longitudinal para qualquer ponto da barra, x_1 é a coordenada espacial ao longo do eixo da barra, t é o tempo e c é uma constante que representa a velocidade de propagação de ondas na barra, determinada por meio da relação (218).

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (218)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material da barra e ρ a massa por unidade de volume do material da barra.

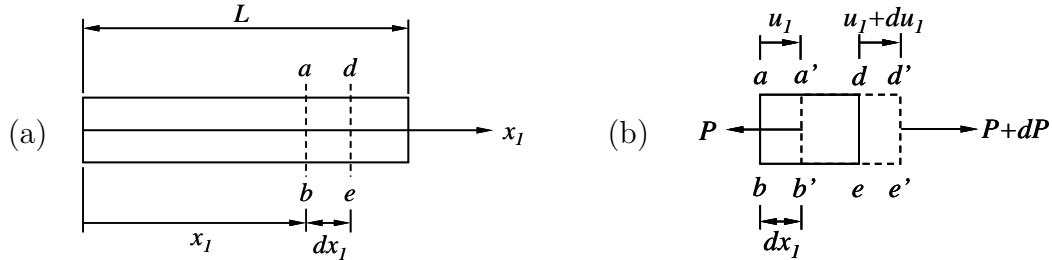


Figura 35: (a) Características gerais da barra e (b) Condição de equilíbrio de uma porção da barra

Adaptado de: Timoshenko (1937)

Considerando que a barra é submetida a vibração harmônica, então a solução para o deslocamento $u_1(x_1, t)$ pode ser construída com base em séries trigonométricas. Ainda, a construção desta solução pode ser feita considerando a técnica de separação de variáveis, mediante o produto de duas funções, sendo uma dependente apenas da coordenada espacial e a outra dependente apenas do tempo. Assim, a função $u_1(x_1, t)$ pode ser escrita conforme dado em (219) (Timoshenko, 1937; Rao, 2000):

$$u_1(x_1, t) = \hat{U}(x_1) \tilde{U}(t) = \left(A_1 \cos\left(\frac{\omega x_1}{c}\right) + A_2 \sin\left(\frac{\omega x_1}{c}\right) \right) (A_3 \cos(\omega t) + A_4 \sin(\omega t)) \quad (219)$$

no qual A_1, \dots, A_4 são constantes a serem determinadas com base nas condições de contorno do problema e ω é a frequência de vibração da barra.

A função $\hat{U}(x_1)$ é chamada de função normal, pois ela determina a forma do modo normal de vibração, ou seja, a forma como cada ponto do meio contínuo se desloca para um dado modo de vibração (Rao, 2000). A determinação das constantes A_1 e A_2 que formam $\hat{U}(x_1)$ é feita mediante a aplicação das condições de contorno nas extremidades da barra. No caso da barra engastada-livre se tem as condições dadas em (220) e (221):

$$u_1(0, t) = 0 \quad \text{para a extremidade engastada} \quad (220)$$

$$u_{1,1}(L, t) = 0 \quad \text{para a extremidade livre} \quad (221)$$

Aplicando a condição (220) na solução geral (219) se obtém o resultado (222):

$$u_1(0, t) = A_1 (A_3 \cos(\omega t) + A_4 \sin(\omega t)) = 0 \quad (222)$$

o qual é satisfeito, para um t arbitrário, se $A_1 = 0$.

A condição dada em (221), por sua vez, resulta em (223):

$$u_{1,1}(L, t) = \frac{A_2 \omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) (A_3 \cos(\omega t) + A_4 \sin(\omega t)) = 0 \quad (223)$$

o qual é satisfeito, para um t arbitrário, com a relação (224):

$$\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \quad (224)$$

A relação (224) é chamada de equação da frequência, pois é por meio dela que as frequências naturais de vibração para cada modo podem ser calculadas. No caso da relação (224), obtém-se a equação para as frequências naturais dada em (225) (Timoshenko, 1937; Rao, 2000):

$$\omega^{(n)} = \frac{(2n + 1) \pi c}{2L} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (225)$$

no qual n é o modo de vibração, c é a constante calculada por meio da relação (218), L é o comprimento da barra e $\omega^{(n)}$ é a frequência natural de vibração do n -ésimo modo.

Por fim, a função normal de vibração é dada por (226) (Timoshenko, 1937; Rao, 2000):

$$\hat{U}^{(n)}(x_1) = B^{(n)} \sin\left(\frac{(2n + 1) \pi x_1}{2L}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (226)$$

sendo $B^{(n)}$ uma constante a ser determinada para cada modo n e $\hat{U}^{(n)}$ é a função normal de vibração associada a cada modo.

A Figura 36 mostra o comportamento da função normal dada em (226) para os três primeiros modos de vibração da barra engastada-livre, considerando $B^{(1)} = B^{(2)} = B^{(3)} = 1$, $L = 1$ e $n = 1, 2, 3$.

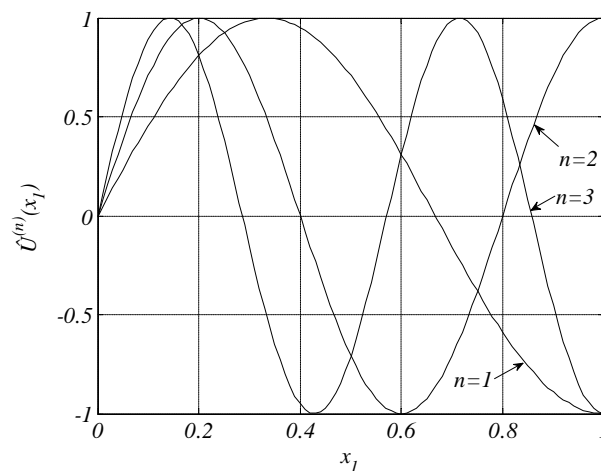


Figura 36: Função normal da barra engastada-livre para os modos de vibração 1, 2 e 3

5.1.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

Tendo em vista o objetivo de obter aproximações para o espectro normalizado de frequências naturais de vibração livre para o problema da barra engastada-livre, foi construído um modelo numérico com as dimensões indicadas na Figura 37(a). Este modelo foi discretizado com 60 elementos quadrilaterais, conforme mostrado na Figura 37(b). Os parâmetros considerados na simulação foram¹⁴: $L = 3$, $\bar{h} = 0,05$, $e = 1$, $\rho = 7,85 \cdot 10^{-6}$, $E = 1$, $\nu = 0$ (unidades consistentes).

As condições de contorno aplicadas no modelo estão indicadas no esboço da Figura 37(a). A restrição de deslocamento na direção e_2 aplicada a todos os nós da malha tem a finalidade de forçar o aparecimento apenas de modos axiais na solução numérica. Entretanto, mesmo tomando tal providência, alguns autovalores obtidos tiveram que ser descartados por estarem vinculados a modos de vibração axiais planos que não são característicos de barra (ver Figuras 38(a) e (b)).

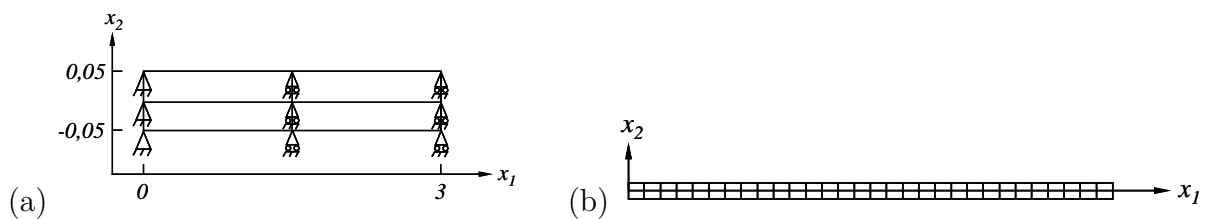


Figura 37: (a) Esquema geral das condições de contorno e dimensões do modelo numérico da barra engastada-livre e (b) Malha construída para o modelo numérico

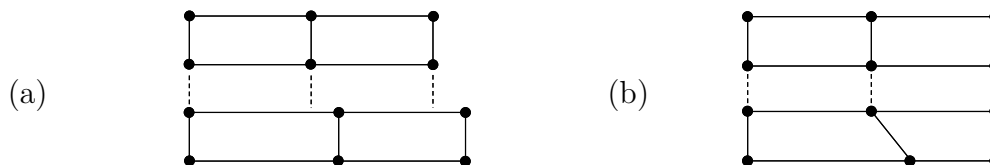


Figura 38: (a) Exemplo de modo de vibração característico de barra (b) Exemplo de modo de vibração não característico de barra

O modelo numérico da Figura 37(b) foi resolvido empregando-se os elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2 . Adicionalmente, a título de comparação com resultados similares disponíveis na literatura, também foram feitas as simulações com os elementos quadrilaterais de regularidade C^0 bilinear de quatro nós (Quad4), quadrático de oito nós (Quad8), cúbico de dezesseis nós (Quad16) e quártico de vinte e cinco nós (Quad25). A quadratura numérica foi executada utilizando-se 16, 36, 4, 9, 16 e 25 pontos de integração para os elementos C^1 , C^2 , Quad4, Quad8, Quad16 e Quad25,

¹⁴Utilizou-se coeficiente de Poisson nulo com o intuito de eliminar a deformação transversal, uma vez que tal consideração faz parte da construção da solução analítica considerada.

respectivamente. A Tabela 21 indica a quantidade de autovalores/modos de vibração característicos de barra que foram obtidos para cada tipo de elemento após ter-se realizado a seleção indicada na Figura 38.

Tabela 21: Modos de vibração característicos de barra obtidos nas simulações do problema da barra engastada-livre para cada tipo de elemento empregado

Elemento	Número de modos característicos de barra resultantes (N)
C^0 Quad4	30
C^0 Quad8	60
C^0 Quad16	90
C^0 Quad25	120
C^1	60
C^2	90

Os autovalores aproximados obtidos que atenderam a condição de descarte anteriormente descrita foram utilizados na comparação com as frequências naturais da solução analítica do problema dada em (225), permitindo a construção das chamadas curvas do espectro normalizado de frequências naturais, as quais são mostradas na Figura 39. O gráfico da Figura 39 tem como abcissa a razão entre o n -ésimo modo de vibração natural aproximado e o número total de modos considerado (N), e apresenta em seu eixo ordenado a razão entre a n -ésima frequência natural aproximada obtida ($\omega^{h(n)}$) e o respectivo valor da solução analítica ($\omega^{(n)}$).

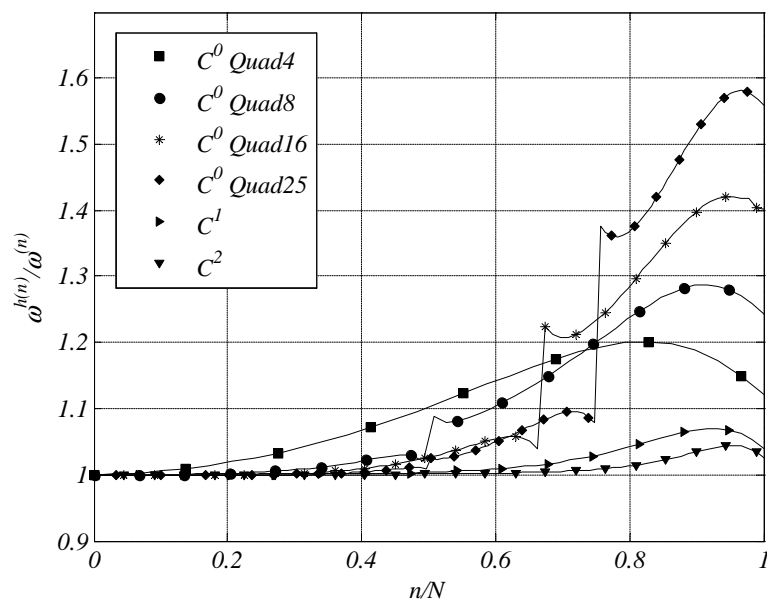


Figura 39: Espectro normalizado de frequências naturais do problema da barra engastada-livre construída com base na solução aproximada e na solução analítica

Além da construção do espectro normalizado de frequências, também se realizou uma verificação do comportamento de convergência da solução numérica para os três primeiros modos de vibração da barra, $n = 1, 2, 3$, utilizando as malhas das Figuras 40(a)-(d). Os resultados obtidos estão mostrados nos gráficos das Figuras 41(a)-(c). Tais gráficos foram plotados em escala log-log do erro relativo da solução aproximada das frequências naturais *versus* o número de elementos da malha.

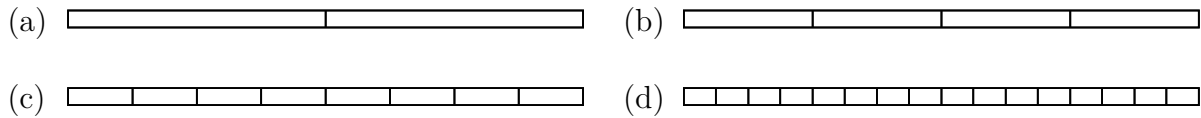


Figura 40: Malhas construídas para avaliação de convergência da solução numérica do problema de autovalores (frequências naturais)

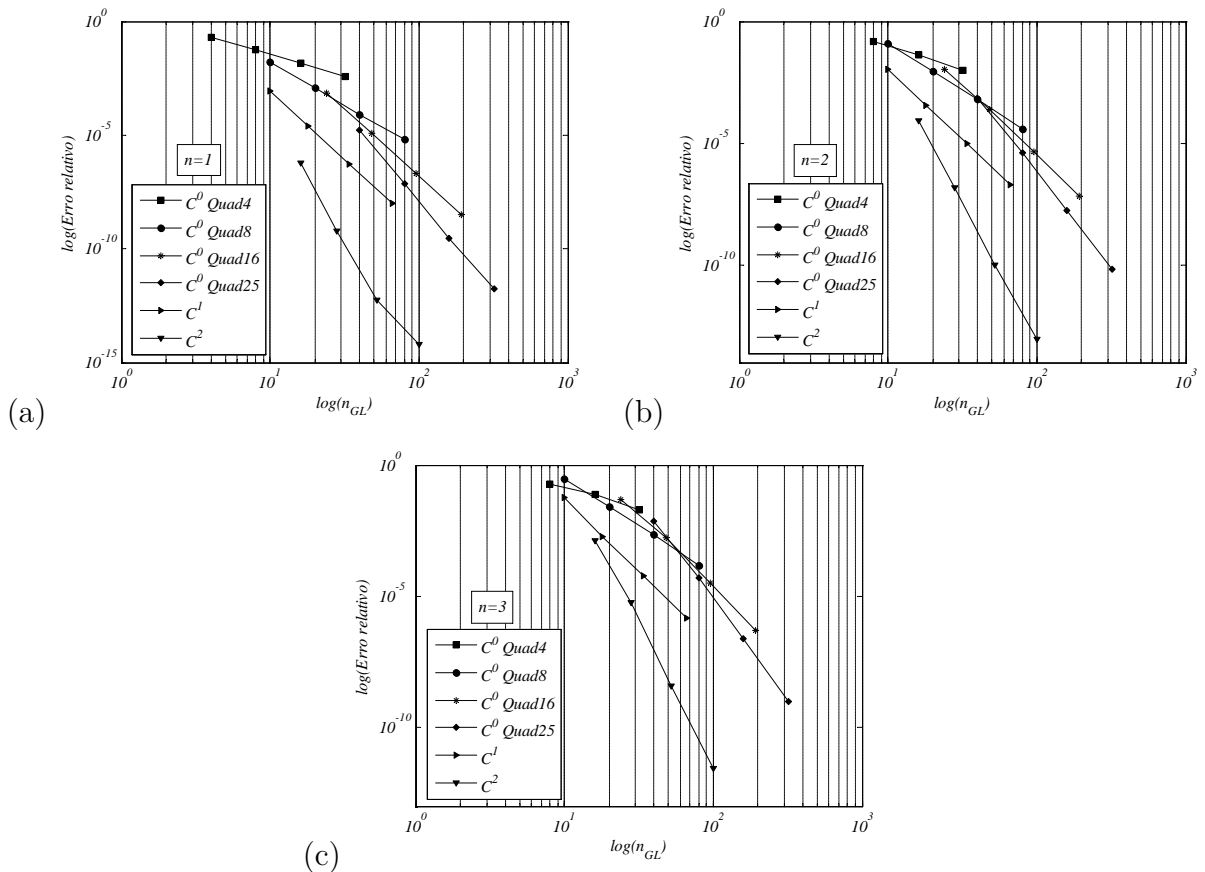


Figura 41: Resultados de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da barra engastada-livre para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3

As taxas de convergência (inclinações das retas) para cada trecho das curvas mostradas nas Figuras 41(a)-(c) estão indicadas na Tabela 22.

Tabela 22: Inclinação de cada trecho das curvas de convergência para os modos de vibração natural 1, 2 e 3 da barra engastada-livre

n	Trecho	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^0 Quad16	C^0 Quad25	C^1	C^2
1	1	1,74	3,73	5,79	7,84	5,98	12,23
	2	2,01	3,90	5,95	7,96	6,00	11,44
	3	2,01	3,62	5,99	7,33	6,06	6,83
2	1	-	3,77	5,46	7,54	5,81	11,32
	2	1,92	3,81	5,85	7,89	5,63	11,78
	3	2,01	4,00	5,96	7,97	5,89	10,78
3	1	-	3,40	4,94	7,07	5,83	9,68
	2	1,27	3,57	5,70	7,78	5,35	11,82
	3	2,00	3,90	5,93	7,95	5,69	11,03

5.2 Barra engastada-engastada

5.2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A equação diferencial que descreve o movimento é a mesma apresentada em (217). As condições de contorno, contudo, neste caso são dadas por (227) e (228) (Timoshenko, 1937; Rao, 2000):

$$u_1(0, t) = 0 \quad (227)$$

$$u_1(L, t) = 0 \quad (228)$$

Aplicando a condição (227) na solução geral (219) se obtém o resultado (229):

$$u_1(0, t) = A_1 (A_3 \cos(\omega t) + A_4 \sin(\omega t)) = 0 \quad (229)$$

o qual é satisfeito, para t arbitrário, com $A_1 = 0$.

Por outro lado, a condição (228) aplicada em (219) fornece o resultado (230):

$$u_1(L, t) = A_2 \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) (A_3 \cos(\omega t) + A_4 \sin(\omega t)) = 0 \quad (230)$$

Desta forma, para t arbitrário, a equação da frequência obtida é dada por (231):

$$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \quad (231)$$

As frequências naturais podem, portanto, ser calculadas pela relação (232) (Timoshenko, 1937; Rao, 2000):

$$\omega^{(n)} = \frac{n\pi c}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (232)$$

no qual n é o modo de vibração, c é a constante calculada por meio da relação (218), L é o comprimento da barra e $\omega^{(n)}$ é a frequência natural de vibração do n -ésimo modo.

A função normal resultante é dada pela expressão (233):

$$\hat{U}^{(n)}(x_1) = B^{(n)} \text{sen} \left(\frac{n\pi x_1}{L} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (233)$$

sendo $B^{(n)}$ uma constante a ser determinada para cada modo n e $\hat{U}^{(n)}$ é a função normal de vibração associada com cada modo.

O comportamento da função normal dada em (233) para os três primeiros modos de vibração, considerando $B^{(1)} = B^{(2)} = B^{(3)} = 1$, $n = 1, 2, 3$, e $L = 1$, está mostrado na Figura 42.

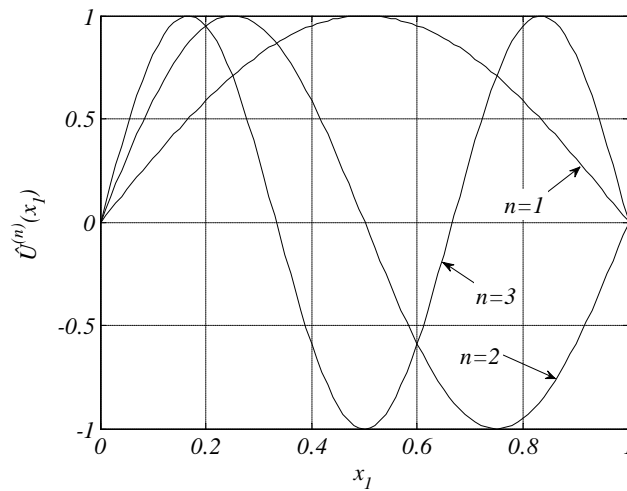


Figura 42: Função normal da barra engastada-engastada para os modos de vibração 1, 2 e 3

5.2.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

O modelo numérico construído para este caso é o mesmo que fora utilizado na simulação anterior, ajustando-se, porém, as condições de contorno essenciais na extremidade da barra $x_1 = L$. Desta forma, as restrições aplicadas no modelo estão indicadas na Figura 43. As propriedades geométricas, de material e de discretização seguem os mesmos valores utilizados no caso anterior.

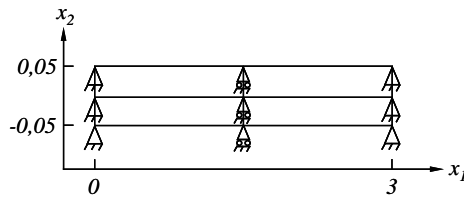


Figura 43: Esquema geral das condições de contorno e dimensões do modelo numérico da barra engastada-engastada

O modelo numérico esboçado na Figura 43 foi resolvido empregando-se os elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2 . Para fins de comparação dos resultados aqui obtidos com aqueles existentes na literatura, também foram executadas simulações com os elementos quadrilaterais de regularidade C^0 bilinear de quatro nós (Quad4), quadrático de oito nós (Quad8), cúbico de dezesseis nós (Quad16) e quártico de vinte e cinco nós (Quad25). A quadratura numérica foi executada utilizando-se 16, 36, 4, 9, 16 e 25 pontos de integração para os elementos C^1 , C^2 , Quad4, Quad8, Quad16 e Quad25, respectivamente

Considerando o descarte de modos de vibração não característicos de barra, a quantidade de frequências naturais/modos de vibração resultantes para cada tipo de elemento estão indicados na Tabela 23.

Tabela 23: Modos de vibração característicos de barra obtidos nas simulações do problema da barra engastada-engastada para cada tipo de elemento empregado

Elemento	Número de modos característicos de barra resultantes (N)
C^0 Quad4	29
C^0 Quad8	59
C^0 Quad16	89
C^0 Quad25	119
C^1	59
C^2	89

As curvas do espectro normalizado de frequências naturais construídas com base nas aproximações dos autovalores estão mostradas nos gráficos da Figura 44. Adicionalmente, também se realizou uma verificação do comportamento de convergência da solução aproximada do problema de autovalores para os três primeiros modos de vibração da barra, $n = 1, 2, 3$, utilizando as malhas indicadas nas Figuras 40(a)-(d). Os resultados obtidos estão mostrados nos gráficos das Figuras 45(a)-(c). As inclinações (taxas de convergência) de cada trecho destas curvas estão apresentadas na Tabela 24.

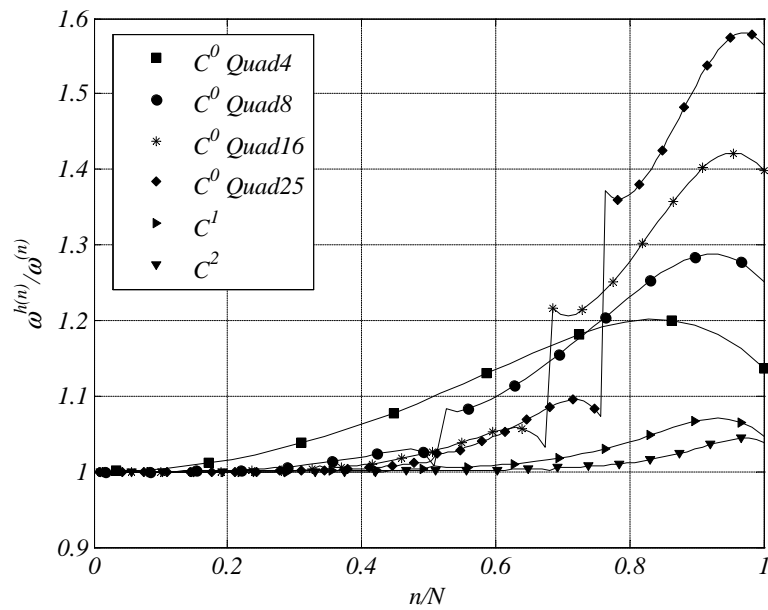


Figura 44: Espectro normalizado de frequências naturais do problema da barra engastada-engastada construída com base na solução aproximada e na solução analítica

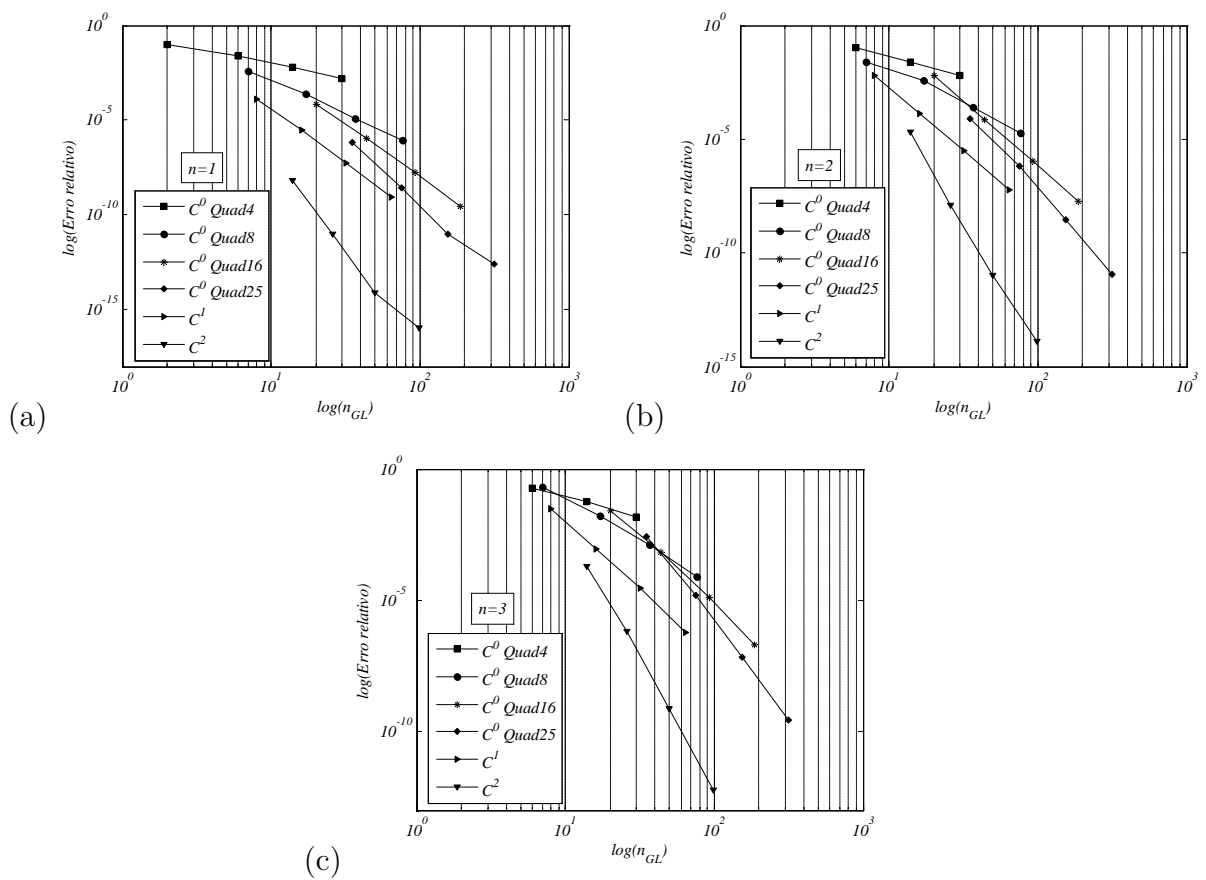


Figura 45: Resultados de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da barra engastada-engastada para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3

Tabela 24: Inclinação de cada trecho das curvas de convergência para os modos de vibração natural 1, 2 e 3 da barra engastada-engastada

n	Trecho	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^0 Quad16	C^0 Quad25	C^1	C^2
1	1	1,26	3,03	5,19	7,21	5,36	10,40
	2	1,64	3,96	5,62	7,73	5,79	11,06
	3	1,82	3,55	5,81	5,23	5,94	4,75
2	1	-	2,10	5,79	6,30	5,66	11,96
	2	1,63	3,44	5,55	7,57	5,36	10,83
	3	1,82	3,56	5,80	7,80	5,79	10,06
3	1	-	2,83	4,61	6,67	5,02	9,19
	2	1,42	3,32	5,44	7,48	4,98	10,45
	3	1,82	3,72	5,77	7,78	5,58	10,60

5.3 Viga biapoada

5.3.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

O diagrama de corpo livre associado com a vibração natural de uma viga está mostrado de forma esquemática nas Figuras 46(a)-(b).

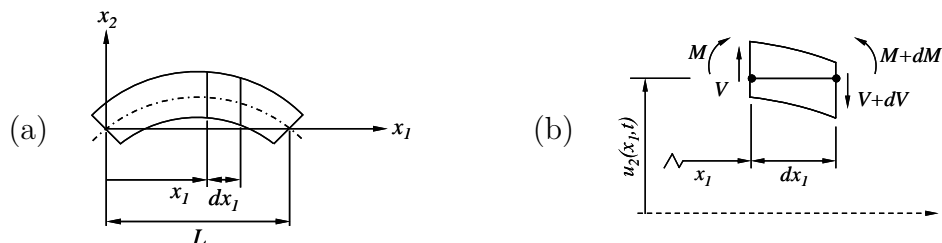


Figura 46: (a) Diagrama de corpo livre para vibração natural de uma viga biapoada (b) Esforços atuantes sobre uma porção da viga

Adaptado de: Rao (2000)

Efetuando a condição de equilíbrio para a porção de viga mostrada na Figura 46(b) é possível se obter a equação diferencial que descreve o movimento de vibração, conforme dado em (234) (Dym e Shames, 1973; Clough e Penzien, 2003):

$$c^2 u_{2,1111}(x_1, t) + u_{2,tt}(x_1, t) = 0 \quad (234)$$

no qual $u_2(x_1, t)$ é o deslocamento na direção e_2 , dependente do tempo e da coordenada espacial x_1 , e c é a constante que representa a velocidade de propagação de ondas na viga, neste caso determinada por meio da relação (235).

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (235)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material da viga, I o momento de inércia de área da seção transversal da viga, ρ é a massa por unidade de volume do material da viga e A é a área da seção transversal da viga.

De acordo com Dym e Shames (1973) e Clough e Penzien (2003), a solução geral da equação (234), tal como desenvolvido para o caso de barras, pode ser construída fazendo-se o produto de uma função dependente apenas da posição e outra função dependente apenas do tempo, conforme dado em (236):

$$u_2(x_1, t) = \hat{U}(x_1) \tilde{U}(t) \quad (236)$$

Substituindo a solução (236) na equação diferencial (234) se obtém as duas equações diferenciais ordinárias homogêneas dadas em (237) e (238):

$$\hat{U}_{,1111}(x_1) - \bar{\beta}^4 \hat{U}(x_1) = 0 \quad (237)$$

$$\tilde{U}_{,tt}(t) + \omega^2 \tilde{U}(t) = 0 \quad (238)$$

no qual ω é a frequência de vibração e $\bar{\beta}$ é uma constante definida como indicado na relação (239).

$$\bar{\beta}^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (239)$$

A solução geral da equação (238) pode ser escrita como dado em (240) (Dym e Shames, 1973; Clough e Penzien, 2003):

$$\tilde{U}(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \quad (240)$$

sendo A_1 e A_2 constantes a serem determinadas com base nas condições de contorno do problema.

A solução geral da equação (237), por sua vez, pode ser escrita conforme (241) (Dym e Shames, 1973; Clough e Penzien, 2003):

$$\hat{U}(x_1) = A_3 \cos(\bar{\beta} x_1) + A_4 \sin(\bar{\beta} x_1) + A_5 \cosh(\bar{\beta} x_1) + A_6 \sinh(\bar{\beta} x_1) \quad (241)$$

no qual A_3, \dots, A_6 são constantes a serem determinadas com base nas condições de contorno das extremidades da viga e $\bar{\beta}$ é calculada por meio da relação (239).

No caso da viga biapoiada, as condições de contorno, válidas para ambas extremidades da viga, são dadas pelas relações (242) e (243) (Clough e Penzien, 2003):

$$u_2(x_1, t) = 0 \quad x_1 = 0, L \quad (242)$$

$$EIu_{2,11}(x_1, t) = 0 \quad x_1 = 0, L \quad (243)$$

Aplicando a condição (242), com $x_1 = 0$, na solução geral (236), e levando em consideração as equações (240) e (241), se obtém o resultado (244):

$$A_3 + A_5 = 0 \quad (244)$$

A condição (243), para $x_1 = 0$, fornece o resultado (245):

$$-A_3 + A_5 = 0 \quad (245)$$

Desta forma, os resultados (244) e (245) são satisfeitos para $A_3 = A_5 = 0$.

As condições (242) e (243), para $x_1 = L$, fornecem os resultados (246) e (247), respectivamente:

$$A_4 \text{sen}(\bar{\beta}L) + A_6 \text{sinh}(\bar{\beta}L) = 0 \quad (246)$$

$$-A_4 \text{sen}(\bar{\beta}L) + A_6 \text{sinh}(\bar{\beta}L) = 0 \quad (247)$$

Somando (246) com (247), obtém-se que $A_6 = 0$, uma vez que $\text{sinh}(\bar{\beta}L) \neq 0$. Assim, a equação da frequência associada com o problema da viga biapoiada resulta em (248):

$$\text{sen}(\bar{\beta}L) = 0 \quad (248)$$

As frequências naturais, portanto, são calculadas por meio da expressão (249) (Clough e Penzien, 2003):

$$\omega^{(n)} = \left[(\bar{\beta}L)^{(n)} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (249)$$

no qual $\omega^{(n)}$ é a n -ésima frequência natural de vibração livre, E é o módulo de elasticidade do material da viga, I é o momento de inércia de área da seção transversal da viga, ρ é a massa por unidade de volume do material da viga, A é a área da seção transversal da viga, L é o comprimento da viga e $(\bar{\beta}L)^{(n)}$ são constantes que satisfazem a equação da frequência, para cada modo de vibração, determinadas por meio da relação (250).

$$(\bar{\beta}L)^{(n)} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (250)$$

E a função normal associada é dada pela expressão (251) (Clough e Penzien, 2003):

$$\hat{U}^{(n)}(x_1) = B^{(n)} \text{sen} \left(\frac{n\pi x_1}{L} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (251)$$

A Figura 47 mostra o comportamento da função normal dada em (251) para os três primeiros modos de vibração, considerando $B^{(1)} = B^{(2)} = B^{(3)} = 1$ e $L = 1$.

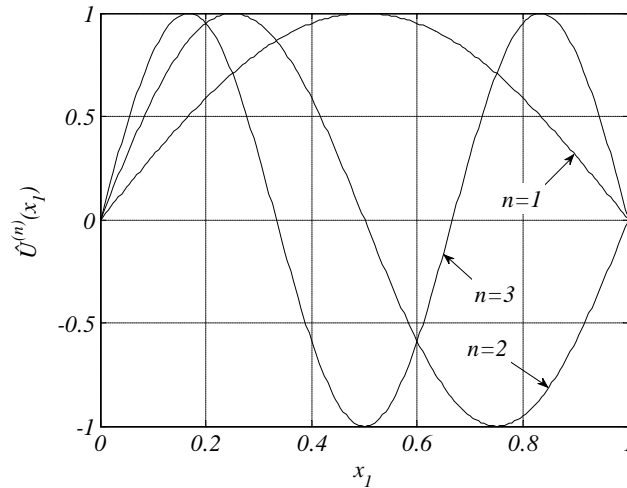


Figura 47: Função normal da viga biapoada para os modos de vibração 1, 2 e 3

Chopra (1995), Dym e Shames (1973) e Timoshenko (1937) descrevem que o cálculo das frequências naturais de vibração através da expressão (249) fornece resultados satisfatórios apenas para a frequência natural fundamental e para vigas com dimensões da seção esbeltas em relação ao comprimento. Para o cálculo de frequências naturais de mais alta ordem, os autores argumentam que uma correção deve ser aplicada na equação (249), a qual leva em consideração os efeitos de inércia rotacional da seção transversal da viga e do cisalhamento ao longo da seção transversal da viga. Desta forma, a equação diferencial corrigida é dada pela expressão (252):

$$\bar{m}u_{2,tt} + EIu_{2,1111} - \bar{m}\bar{r}^2 \left(1 + \frac{E}{\bar{\kappa}G} \right) u_{2,11tt} + \frac{\bar{m}^2\bar{r}^2}{\bar{\kappa}GA} u_{2,tttt} = 0 \quad (252)$$

no qual \bar{m} é a massa da viga, E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia de área da seção transversal da viga, \bar{r} é o raio de giração da seção transversal da viga, calculado por meio da expressão (253), G é o módulo de cisalhamento transversal, dado em (204), A é a área da seção transversal da viga e $\bar{\kappa}$ ¹⁵ é uma constante que depende da geometria da seção transversal da viga e da distribuição não uniforme da tensão cisalhante ao longo da seção transversal.

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (253)$$

¹⁵De acordo com Timoshenko (1937), $\bar{\kappa} = \frac{2}{3}$ para vigas de seção transversal retangular.

Para o caso da viga biapoada, a solução da equação (252) pode ser escrita como dado em (254) (Chopra, 1995):

$$u_2(x_1, t) = A_1 \text{sen} \left(\frac{n\pi x_1}{L} \right) \text{sen} \left(\bar{\omega}^{(n)} t \right) \quad (254)$$

no qual $\bar{\omega}^{(n)}$ é a frequência natural de vibração corrigida para o n -ésimo modo.

Substituindo (254) em (252) se obtém a equação da frequência dada em (255) (Chopra, 1995; Dym e Shames, 1973):

$$1 - \left(\frac{\bar{\omega}^{(n)}}{\omega^{(n)}} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}^{(n)}}{\omega^{(n)}} \right)^2 \left(\frac{n\pi \bar{r}}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{E}{\bar{\kappa}} \right) + \left(\frac{\bar{\omega}^{(n)}}{\omega^{(n)}} \right)^4 \left(\frac{n\pi \bar{r}}{L} \right)^4 \frac{E}{\bar{\kappa}G} = 0 \quad (255)$$

A equação (255) consiste em um polinômio de quarta ordem, o qual fornece quatro raízes para a razão $\frac{\bar{\omega}^{(n)}}{\omega^{(n)}}$. Desta forma, as frequências naturais de vibração corrigidas podem ser calculadas por meio da expressão (249), levando-se em consideração a correção dada em (255). A Figura 48 mostra o efeito da correção acima indicada para o caso de um viga biapoada, com $\frac{E}{\bar{\kappa}G} = 3,2$ para os cinco primeiros modos de vibração livre.

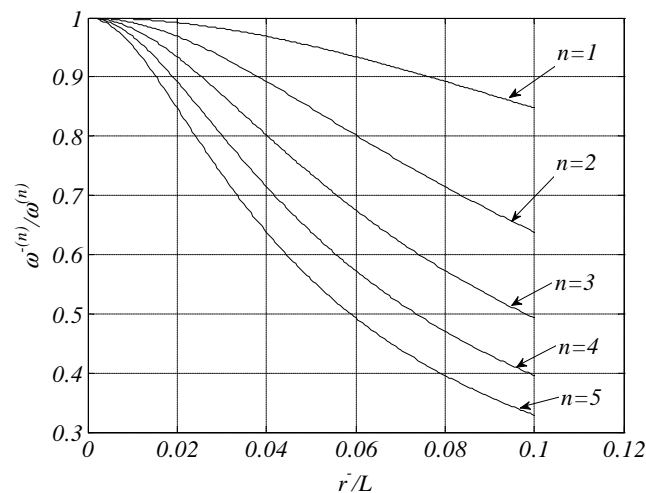


Figura 48: Influência da correção aplicada no cálculo das frequências naturais de vibração da viga biapoada

Adaptado de: Chopra (1995)

5.3.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

O modelo numérico construído para simulação do problema da viga biapoada, tendo em vista o interesse de construir as curvas do espectro normalizado de frequências naturais, conforme feito nos casos anteriores, apresenta as dimensões indicadas na Figura 49(a). Este modelo foi discretizado com 100 elementos quadrilaterais (ver Figura 49(b))

e apresenta as condições de contorno essenciais indicadas na Figura 49(c). As restrições de deslocamento na direção e_1 aplicadas aos nós da linha neutra da viga têm a finalidade de reduzir a quantidade de modos de vibração não característicos de viga obtidos com a solução numérica¹⁶ (ver Figuras 50(a) e (b)).

Os parâmetros considerados na simulação foram: $L = 3$, $\bar{h} = 0,05$, $e = 1$, $\rho = 7,85 \cdot 10^{-6}$, $E = 1$, $\nu = 0$, $\bar{\kappa} = \frac{2}{3}$ ¹⁷ (unidades consistentes).

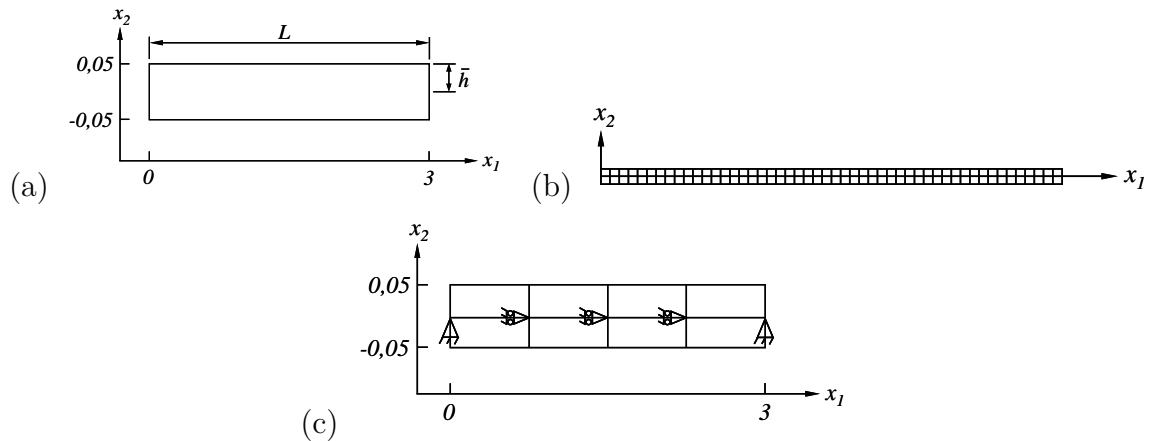


Figura 49: (a) Dimensões do modelo numérico para simulação das frequências naturais de vibração livre da viga biapoçada (b) Malha construída para o modelo numérico da viga biapoçada (c) Condições de contorno essenciais aplicadas ao modelo numérico da viga biapoçada

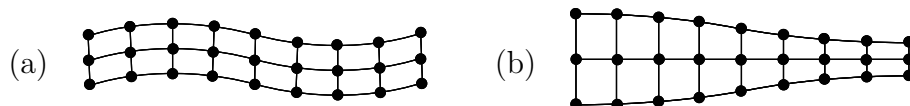


Figura 50: (a) Exemplo de modo de vibração característico de viga (b) Exemplo de modo de vibração não característico de viga

O modelo numérico da Figura 49(b) foi resolvido empregando-se os elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2 , e com os elementos quadrilaterais de regularidade C^0 bilinear de quatro nós (Quad4), quadrático de oito nós (Quad8), cúbico de dezesseis nós (Quad16) e quártico de vinte e cinco nós (Quad25). A quadratura numérica foi executada utilizando-se 16, 36, 4, 9, 16 e 25 pontos de integração para os elementos C^1 , C^2 , Quad4, Quad8, Quad16 e Quad25, respectivamente. A Tabela 25 indica a quantidade de autovalores/modos de vibração característicos de viga que foram obtidos para cada tipo de elemento após ter-se realizado o descarte indicado na Figura 50.

¹⁶Da mesma forma como se procedeu com as simulações das barras, os modos de vibração obtidos numericamente que não são característicos de viga foram desconsiderados quando da construção das curvas do espectro normalizado de frequências naturais de vibração livre.

¹⁷Conforme indicado em Timoshenko (1937).

Tabela 25: Modos de vibração característicos de viga obtidos nas simulações do problema da viga biapoçada para cada tipo de elemento empregado

Elemento	Número de modos característicos de viga resultantes (N)
C^0 Quad4	48
C^0 Quad8	81
C^0 Quad16	105
C^0 Quad25	130
C^1	81
C^2	91

As curvas do espectro normalizado de frequências naturais construídas com base nas aproximações dos autovalores estão mostradas no gráfico da Figura 51. Este gráfico tem como abcissa a razão entre o n -ésimo modo de vibração natural aproximado e o número total de modos considerado (N), e como ordenada a razão entre a n -ésima frequência natural aproximada obtida ($\omega^{h(n)}$) e o respectivo valor da solução analítica ($\omega^{(n)}$). A construção destas curvas foi feita considerando-se apenas os autovalores associados com os modos de vibração característicos de viga, conforme mostrado na Figura 50.

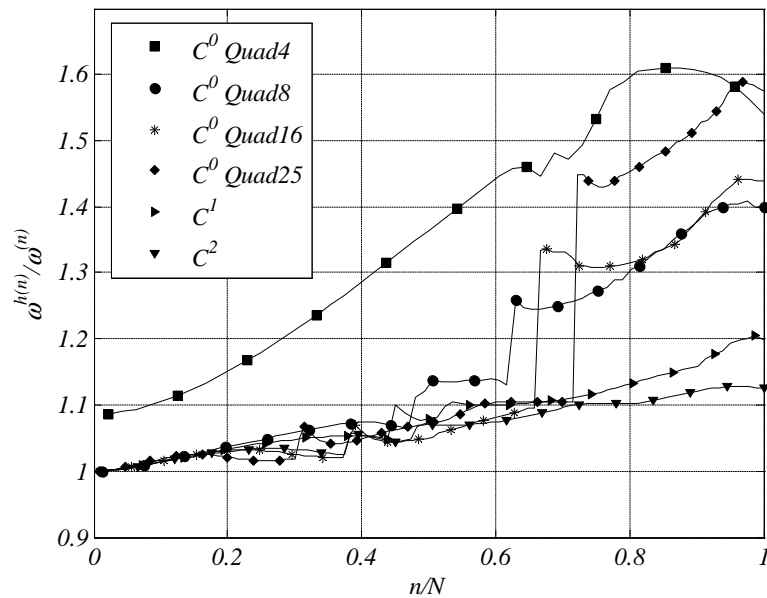


Figura 51: Espectro normalizado de frequências naturais do problema da viga biapoçada construída com base na solução aproximada e na solução analítica

Observação: conforme se observa na Figura 51, a discretização considerada no problema (Figura 49(b)) foi insuficiente para gerar a curva do espectro de frequências naturais referente ao elemento C^0 Quad4 com nível de convergência adequado (pelas curvas de convergência apresentadas no gráfico da Figura 53, a malha deveria ter pelo

menos 200 elementos C^0 Quad4 para resultar em um erro relativo da ordem de 10^{-1} , o qual implicaria em $\frac{\omega^{h(n)}}{\omega^{(n)}} \rightarrow 1$ para $n = 1$).

Adicionalmente, também se realizou uma verificação do comportamento de convergência da solução aproximada do problema de autovalores para os três primeiros modos de vibração livre da viga biapoçada, $n = 1, 2, 3$, utilizando as malhas indicadas nas Figuras 52(a)-(d). Os parâmetros geométricos e de material, bem como as condições de contorno empregadas nesta análise de convergência foram os mesmos considerados acima.

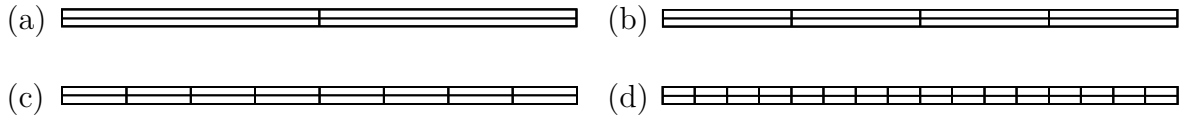


Figura 52: Malhas construídas para avaliação de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da viga biapoçada

Os resultados obtidos estão mostrados nos gráficos das Figuras 53(a)-(c). Estes gráficos estão plotados em escala log-log do erro relativo da solução aproximada das frequências naturais *versus* o número de elementos da malha. As inclinações de cada trecho destas curvas estão apresentadas na Tabela 26.

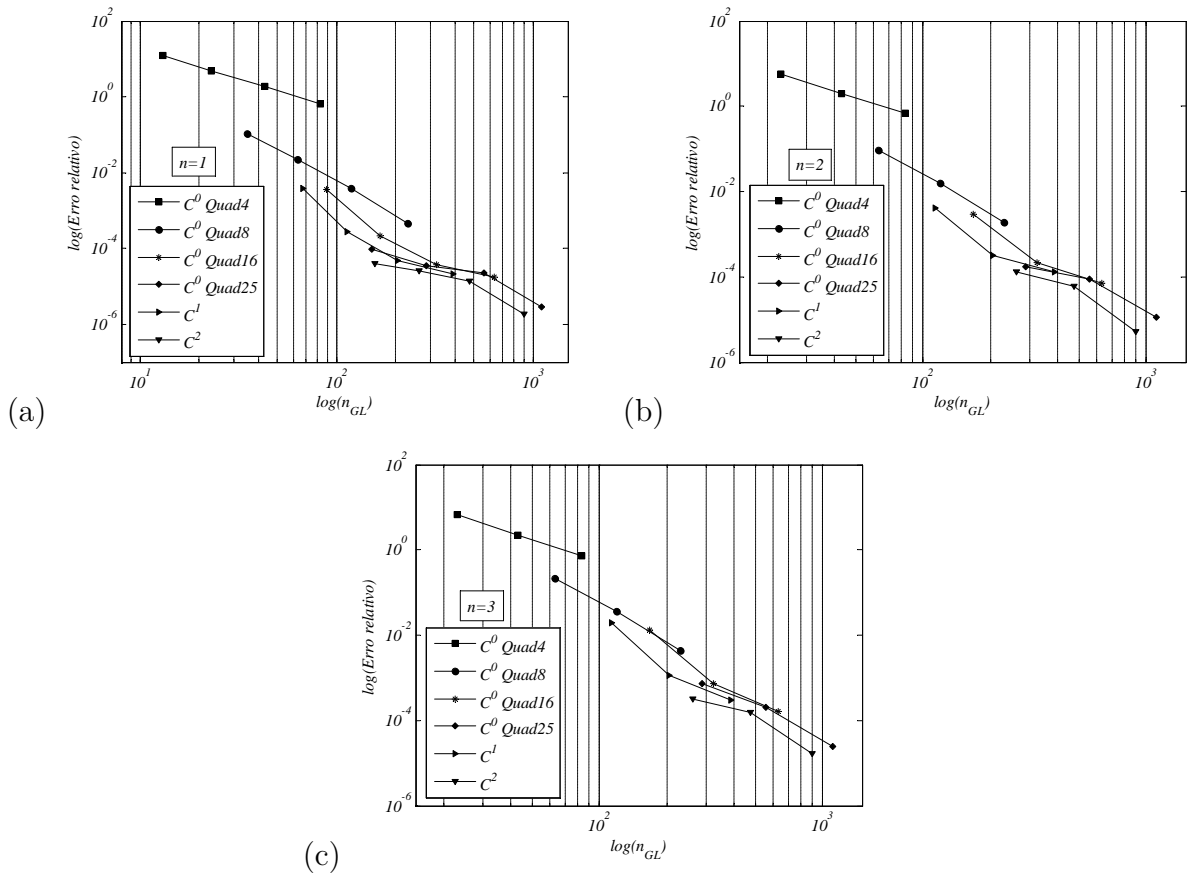


Figura 53: Resultados de convergência da solução numérica das frequências naturais do problema da viga biapoçada para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3

Tabela 26: Inclinação de cada trecho das curvas de convergência para os modos de vibração natural 1, 2 e 3 da viga biapoçada

n	Trecho	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^0 Quad16	C^0 Quad25	C^1	C^2
1	1	1,35	2,24	4,04	1,50	3,74	0,69
	2	1,32	2,54	2,57	0,62	2,51	0,89
	3	1,49	3,04	1,11	3,02	1,22	2,85
2	1	-	-	-	-	-	-
	2	1,49	2,58	3,74	0,95	3,69	1,14
	3	1,54	3,05	1,65	3,02	1,24	3,54
3	1	-	-	-	-	-	-
	2	1,62	2,56	4,13	1,85	4,08	1,04
	3	1,61	3,06	2,24	3,05	1,88	3,22

5.4 Análise dos resultados

Analisando os gráficos dos espectros normalizados de frequências naturais apresentados nas Figuras 39, 44 e 51 observa-se que, para os três problemas simulados, os elementos com regularidade C^1 e C^2 apresentaram melhor desempenho global, ou seja, menores erros ao longo de todo o espectro, na aproximação das frequências naturais de vibração livre quando comparados com todos os elementos de regularidade C^0 avaliados (Quad4, Quad8, Quad16 e Quad25). Ainda, o elemento quadrilateral de regularidade C^2 foi o que apresentou os menores níveis de erro relativo entre todos os elementos utilizados.

Este resultado está de acordo com o comportamento predito pelo estimador de erro *a priori* para aproximação de frequências naturais pelo MEF dado na expressão (137). A título de exemplificação, considere o problema da barra engastada-livre, com $E = \rho = L = 1$. A expressão para cálculo das frequências naturais de vibração livre exatas, conforme equação (225), resulta em $\omega^{(n)} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$. Considerando as primeiras onze frequências naturais exatas, $n = 0, \dots, 10$, a parcela do estimador de erro (137) que define o limite superior da aproximação dos autovalores, isto é, $Ch^{2(p+1-m)}\lambda^{(n)(p+1)/m}$, para $C = 10^{-6}$ e $h = 0,01$, por exemplo, apresenta o comportamento ilustrado na Figura 54. Esta Figura mostra as curvas de $Ch^{2(p+1-m)}\lambda^{(n)(p+1)/m}$ versus $\frac{n}{N}$ para diferentes combinações de valores da ordem do espaço de Hilbert, m , e da ordem polinomial do espaço de aproximação do MEF, p . A ordem de regularidade k associada com cada combinação de m e p foi determinada por meio do Teorema da imersão de Sobolev, com $n_{DE} = 1$, conforme Teorema A.5.1.

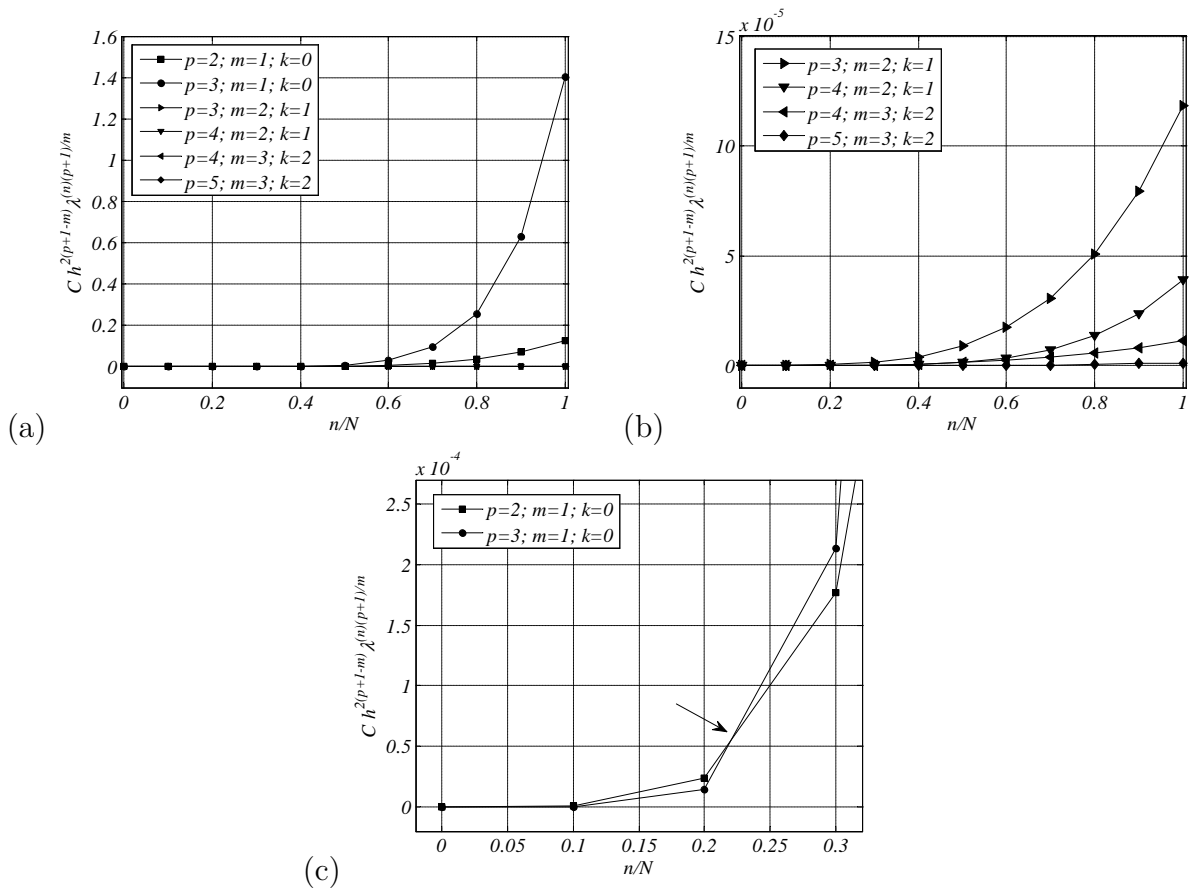


Figura 54: Comportamento da parcela que define o limite superior do estimador de erro *a priori* de autovalores pelo MEF para diferentes ordens do espaço de Hilbert, m , e diferentes ordens polinomiais do espaço de aproximação, p

Desta forma, as seguintes observações podem ser feitas a partir da análise das Figuras 54(a)-(c):

- Para regularidade $k = 0$ e $n_{DE} = 1$, existe um certo valor de $\frac{n}{N}$ abaixo do qual o aumento da ordem polinomial p resulta em uma redução do parâmetro $Ch^{2(p+1-m)}\lambda^{(n)(p+1)/m}$. Porém, após este valor de $\frac{n}{N}$, o aumento da ordem polinomial p resulta em um aumento do termo $Ch^{2(p+1-m)}\lambda^{(n)(p+1)/m}$, indicando uma degradação cada vez maior da solução aproximada dos autovalores (ver Figura 54(c));
- Para regularidades $k = 1$ e $k = 2$, com $n_{DE} = 1$, o aumento da ordem polinomial p promove uma redução do parâmetro $Ch^{2(p+1-m)}\lambda^{(n)(p+1)/m}$ para todos os valores de $\frac{n}{N}$ (ver Figura 54(b));
- Mantendo-se fixa a ordem polinomial p , para $n_{DE} = 1$, o aumento da regularidade k promove uma redução do parâmetro $Ch^{2(p+1-m)}\lambda^{(n)(p+1)/m}$ para todos os valores de $\frac{n}{N}$ (ver Figuras 54(a)-(b)).

Outro aspecto que deve ser ressaltado diz respeito à forma das curvas mostradas nas Figuras 39 e 44. Cottrell et al. (2006), Cottrell et al. (2007) e Hughes et al. (2008) descrevem que a descontinuidade (salto) presente na curva do espectro normalizado de

frequências naturais corresponde a uma separação entre os chamados ramo acústico (associado com os menores modos de vibração) e ramo ótico (associado com os maiores modos de vibração). Em seus trabalhos, os autores supracitados comparam a aproximação de frequências naturais de vibração livre de barras obtidas pelo MEF convencional, empregando elementos de regularidade C^0 e diferentes ordens polinomiais, e pelo método isogeométrico, o qual utiliza funções do tipo NURBS com diferentes ordens de regularidade.

Os resultados aqui obtidos para os problemas das barras com os elementos de regularidade C^0 apresentaram o mesmo comportamento descrito por Cottrell et al. (2006) e Cottrell et al. (2007), isto é, o elemento Quad4 apresentou uma curva formada unicamente pelo ramo acústico, enquanto que os elementos Quad8, Quad16 e Quad25 apresentaram curvas formadas pelos dois ramos. Neste último caso, quanto maior é a ordem polinomial das funções de interpolação do elemento, menor é o tamanho do ramo ótico e maior é o salto observado entre o ramo acústico e o ramo ótico. Por outro lado, as curvas referentes aos elementos de regularidade C^1 e C^2 não apresentaram o chamado ramo ótico, mantendo a continuidade ao longo de todo o espectro (comportamento similar às curvas do método isogeométrico dos trabalhos de Cottrell et al. (2006) e Cottrell et al. (2007)). No caso do problema da viga biapoiada, todos os elementos empregados apresentaram pelo menos uma descontinuidade ao longo da curva do espectro de frequências naturais de vibração livre (ver Figura 51).

Do ponto de vista da aplicação prática de Engenharia, o interesse está voltado para a obtenção de aproximações das frequências naturais de vibração livre de uma dada estrutura que apresentem um nível de erro abaixo de um certo valor considerado aceitável. Levando em consideração os resultados obtidos nos problemas aqui simulados, e assumindo três níveis de erro máximo aceitáveis, a saber, 1%, 5% e 10%, obtêm-se os percentuais de frequências naturais aproximadas, sobre o número total de modos aproximados, que satisfazem tal condição de erro, conforme indicado nas Tabelas 27 a 29.

Tabela 27: Percentuais das frequências naturais aproximadas que satisfazem a condição de erro máximo considerado, referentes ao problema da barra engastada-livre

Erro máximo aceitável	% de frequências naturais com erro inferior ao aceitável					
	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^0 Quad16	C^0 Quad25	C^1	C^2
1%	16,67	33,33	41,11	47,5	61,67	76,67
5%	33,33	50	58,89	60	83,33	100
10%	50	58,33	66,67	75	100	100

Tabela 28: Percentuais das frequências naturais aproximadas que satisfazem a condição de erro máximo considerado, referentes ao problema da barra engastada-engastada

Erro máximo aceitável	% de frequências naturais com erro inferior ao aceitável					
	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^0 Quad16	C^0 Quad25	C^1	C^2
1%	13,79	33,9	40,45	46,22	61,02	77,27
5%	34,48	50,85	60,67	60,5	84,75	100
10%	48,28	59,32	67,42	75,63	100	100

Tabela 29: Percentuais das frequências naturais aproximadas que satisfazem a condição de erro máximo considerado, referentes ao problema da viga biapoiada

Erro máximo aceitável	% de frequências naturais com erro inferior ao aceitável					
	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^0 Quad16	C^0 Quad25	C^1	C^2
1%	0	7,41	6,67	6,15	7,32	7,69
5%	0	25,93	45,71	36,92	32,93	42,86
10%	8,33	46,91	65,71	57,69	57,32	71,43

Os resultados apresentados nas Tabelas 27 a 29 estabelecem, portanto, uma outra forma de avaliação das curvas dos espectros normalizados das Figuras 39, 44 e 51, a qual permite se observar que os elementos de maior regularidade, no caso C^1 e C^2 , possibilitam se obter um percentual maior de frequências naturais do espectro que satisfazem uma dada condição de erro máximo, em comparação com os elementos de regularidade C^0 .

Quanto ao comportamento de convergência da solução aproximada dos autovalores (frequências naturais) para os três problemas aqui considerados, as Figuras 41, 45 e 53 mostram que o elemento quadrilateral de regularidade C^2 apresentou os menores níveis de erro relativo, para cada uma das quatro malhas construídas, entre todos os elementos simulados. Ainda, a análise destas Figuras permite se verificar que o aumento da ordem de regularidade das funções de interpolação do elemento resulta em maiores taxas de convergência da solução numérica (maior inclinação da reta, conforme Tabelas 22, 24 e 26).

Em termos das taxas de convergência da solução aproximada, o estimador de erro *a priori* dado em (137) indica que $\beta = 2(p + 1 - m)$ (expoente do parâmetro h da expressão). A Tabela 30 apresenta um comparativo entre os valores de β preditos pelo estimador de erro e calculados a partir dos resultados numéricos obtidos para cada elemento avaliado, referentes à primeira frequência natural de vibração livre aproximada dos problemas da barra engastada-livre, barra engastada-engastada e viga biapoiada.

Tabela 30: Comparativo das taxas de convergência em norma de energia previstas pelo estimador de erro e calculadas a partir dos resultados numéricos, referentes à primeira frequência natural dos problemas da barra engastada-livre, barra engastada-engastada e viga biapoiada

Elemento	$\beta_{estimado}$	β dos resultados numéricos		
		Barra engastada-livre	Barra engastada-engastada	Viga biapoiada
C^0 Quad4	2	1,93	1,53	1,38
C^0 Quad8	4	3,77	3,53	2,6
C^0 Quad16	6	5,91	5,53	2,57
C^0 Quad25	8	7,73	6,85	1,6
C^1	6	6,01	5,71	2,49
C^2	10	10,14	8,89	1,42

Observação: as taxas de convergência referentes aos resultados numéricos indicadas na Tabela 30 foram determinadas com base na inclinação da reta de melhor ajuste entre todos os pontos de cada curva de convergência, e não por trechos das curvas como apresentado nas Tabelas 22, 24 e 26.

Desta forma, a Tabela 30 mostra que, para os problemas da barra engastada-livre e da barra engastada-engastada, as taxas de convergência obtidas por meio dos resultados numéricos para todos os elementos empregados são muito próximas daquelas previstas pelo estimador de erro *a priori*. Por outro lado, as taxas obtidas na simulação do problema da viga biapoiada foram bem menores do que aquelas calculadas pelo estimador de erro, tanto para os elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 quanto para os Hermitianos de regularidade C^1 .

6 SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA DE VIBRAÇÃO FORÇADA DE UMA BARRA SUBMETIDA A FORÇA IMPULSIVA

6.1 Definição do problema e solução analítica

O problema abordado neste capítulo se refere à vibração forçada de uma barra engastada-livre submetida a um carregamento impulsivo em sua extremidade livre, conforme mostrado na Figura 55(a). O carregamento impulsivo aqui adotado é do tipo Heaviside (ver Figura 55(b)), o qual pode ser visto como uma força repentinamente aplicada à barra.

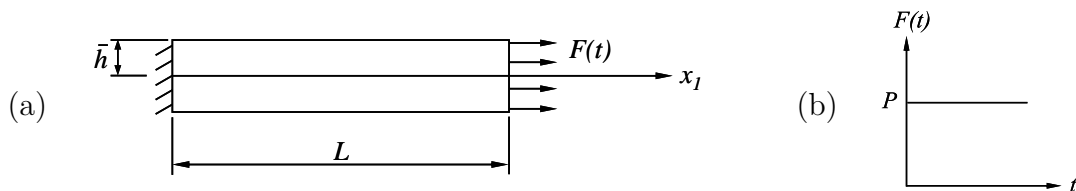


Figura 55: (a) Configuração esquemática do problema da barra engastada-livre submetida a carregamento impulsivo (b) Carregamento impulsivo tipo Heaviside

Adaptado de: Clough e Penzien (2003)

De acordo com Clough e Penzien (2003), a solução analítica para o campo de deslocamentos deste problema pode ser construída através do método da superposição modal. Neste caso, a forma geral da solução é escrita segundo a expressão (256):

$$u_1(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \hat{U}^{(n)}(x_1) Y(t) \right\} \quad (256)$$

no qual $u_1(x_1, t)$ é a solução de interesse, $\hat{U}^{(n)}(x_1)$ é a função normal associada com a vibração livre da estrutura e $Y(t)$ é a chamada resposta temporal em coordenadas generalizadas.

Considerando as expressões de cálculo das frequências naturais de vibração livre e da função normal associadas com o problema da barra engastada-livre, dadas pelas equações (225) e (226), respectivamente, os parâmetros de massa e força generalizados podem ser escritos como dado em (257) e (258), respectivamente (Clough e Penzien, 2003).

$$\begin{aligned} m_N &= \int_0^L \rho(x_1) A(x_1) \left[\hat{U}^{(n)}(x_1) \right]^2 dx_1 = \\ &= \rho A \int_0^L \left[\text{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x_1}{2L} \right) \right]^2 dx_1 = \frac{\rho A L}{2} \end{aligned} \quad (257)$$

$$F_N = \int_0^L q(x_1, t) \hat{U}^{(n)}(x_1) dx_1 = P \hat{U}^{(n)}(L) = \pm P \begin{cases} - & n \text{ ímpar} \\ + & n \text{ par} \end{cases} \quad (258)$$

sendo m_N a massa generalizada, F_N a força generalizada, L o comprimento da barra, x_1 a coordenada espacial orientada com a direção longitudinal da barra, ρ a densidade do material da barra, A a área da seção transversal da barra, P a intensidade da força repentina aplicada na extremidade livre da barra e $\hat{U}^{(n)}(x_1)$ a função normal associada com a vibração livre da barra.

A resposta temporal em coordenadas generalizadas $Y(t)$, considerando m_N e F_N calculados em (257) e (258), respectivamente, é obtida por meio da chamada integral de Duhamel, conforme expressão (259) (Clough e Penzien, 2003):

$$Y(t) = \frac{1}{m_N \omega^{(n)}} \int_0^t F_N(\tau) \operatorname{sen}(\omega^{(n)}(t - \tau)) d\tau = \pm \frac{2P(1 - \cos(\omega^{(n)}t))}{\rho AL [\omega^{(n)}]^2} \begin{cases} - & n \text{ ímpar} \\ + & n \text{ par} \end{cases} \quad (259)$$

Inserindo os resultados indicados em (226) e (259) na solução geral (256) se obtém a expressão da solução para o campo de deslocamentos do problema da barra engastada-livre submetida ao carregamento impulsivo tipo Heaviside, como indicado em (260) (Clough e Penzien, 2003):

$$u_1(x_1, t) = \frac{8PL}{\pi^2 EA} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \pm \frac{(1 - \cos(\omega^{(n)}t))}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x_1}{2L}\right) \right\} \begin{cases} - & n \text{ ímpar} \\ + & n \text{ par} \end{cases} \quad (260)$$

no qual P é a magnitude da força impulsiva aplicada, conforme indicado na Figura 55(b), L é o comprimento da barra, E é o módulo de elasticidade do material da barra, A é a área da seção transversal da barra, $\omega^{(n)}$ são as frequências naturais de vibração livre associadas ao n -ésimo modo de vibração e x_1 é a coordenada espacial.

6.2 Simulação numérica e resultados

O exemplo construído para simulação numérica do problema em questão apresenta as dimensões indicadas na Figura 56(a). A força impulsiva do tipo Heaviside aplicada na barra apresenta magnitude unitária, conforme Figura 56(b).

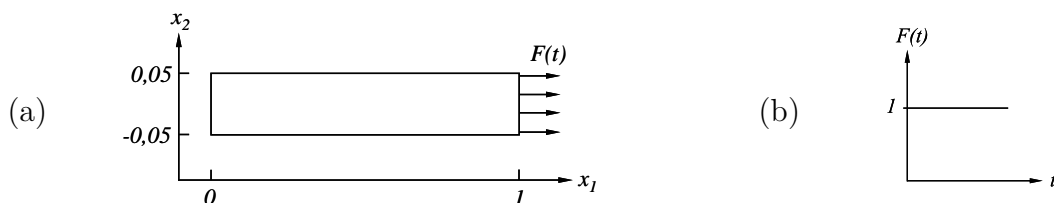


Figura 56: (a) Características geométricas do problema da barra engastada-livre submetida a carga impulsiva (b) Comportamento da carga impulsiva aplicada

O modelo numérico foi discretizado com 8 elementos quadrilaterais e submetido às condições de contorno essenciais indicadas na Figura 57. Os parâmetros considerados na simulação foram: $E = 1$, $\nu = 0$, $\rho = 1$, $L = 1$, $\bar{h} = 0,05$, $e = 1$ e $P = 1$ (unidades consistentes).

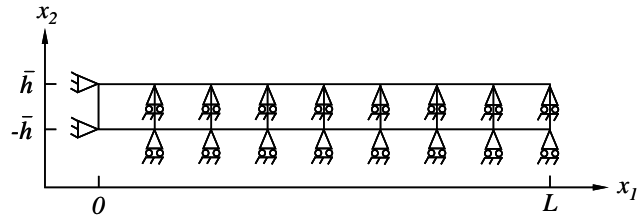


Figura 57: Malha e condições de contorno essenciais do modelo numérico do problema da barra engastada-livre submetida ao carregamento impulsivo

O modelo numérico da Figura 57 foi resolvido empregando-se os elementos quadrilaterais de regularidade C^1 , C^2 , C^0 Quad4 e C^0 Quad8. A quadratura numérica foi executada utilizando-se 16, 36, 4 e 9 pontos de integração, respectivamente. Como condição inicial do problema se considerou $d_{0,i,t} = 0$.

A solução numérica foi obtida por meio do método da superposição modal, levando-se em consideração apenas os autovalores e autovetores associados com os modos de vibração característicos de barra (selecionados de acordo com o critério apresentado na Figura 38 do Capítulo 5). O tempo total de simulação foi estabelecido em $T = 16s$, com incremento de tempo de $\Delta t = 0,1s$.

Os resultados numéricos obtidos foram avaliados em termos do comportamento dos deslocamentos nos nós B_1 e B_2 da malha, conforme mostrado na Figura 58. O comportamento dos deslocamentos referentes ao nó B_1 estão mostrados nas Figuras 59(a)-(d) para cada um dos quatro elementos empregados, ao passo que os deslocamentos do nó B_2 estão mostrados nas Figuras 60(a)-(d). Estas Figuras também apresentam as respectivas curvas da solução analítica, calculadas por meio da expressão (260), considerando-se apenas os primeiros 500 termos da série infinita indicada.

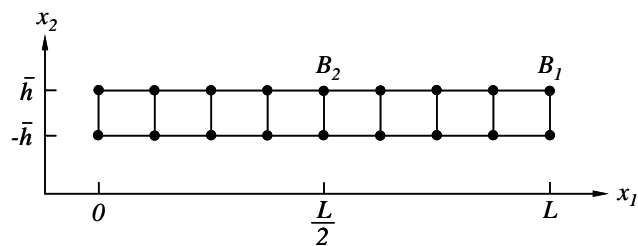


Figura 58: Pontos de verificação dos deslocamentos na barra engastada-livre submetida a carregamento impulsivo

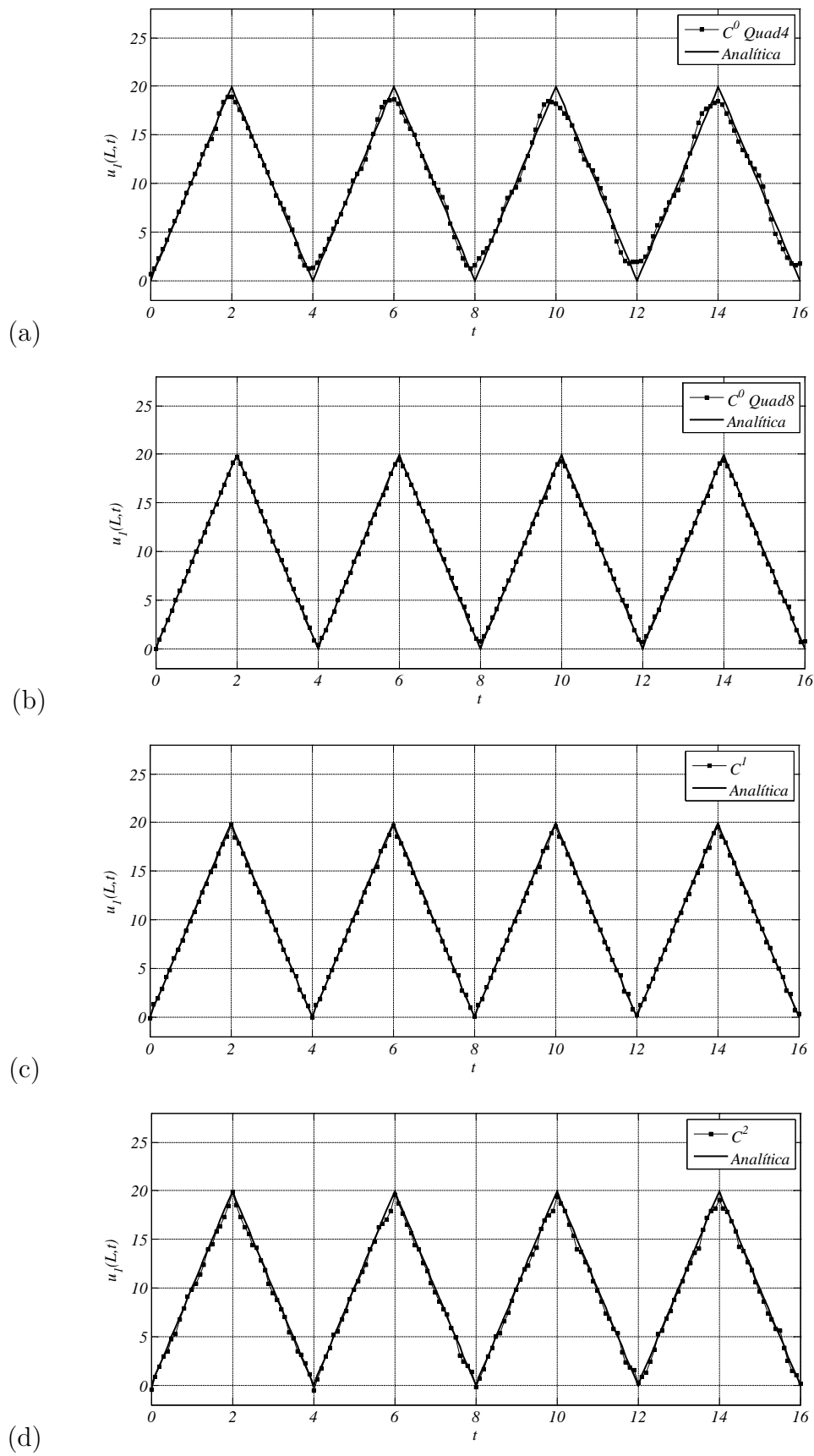


Figura 59: Solução aproximada do deslocamento no nó B_1 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2

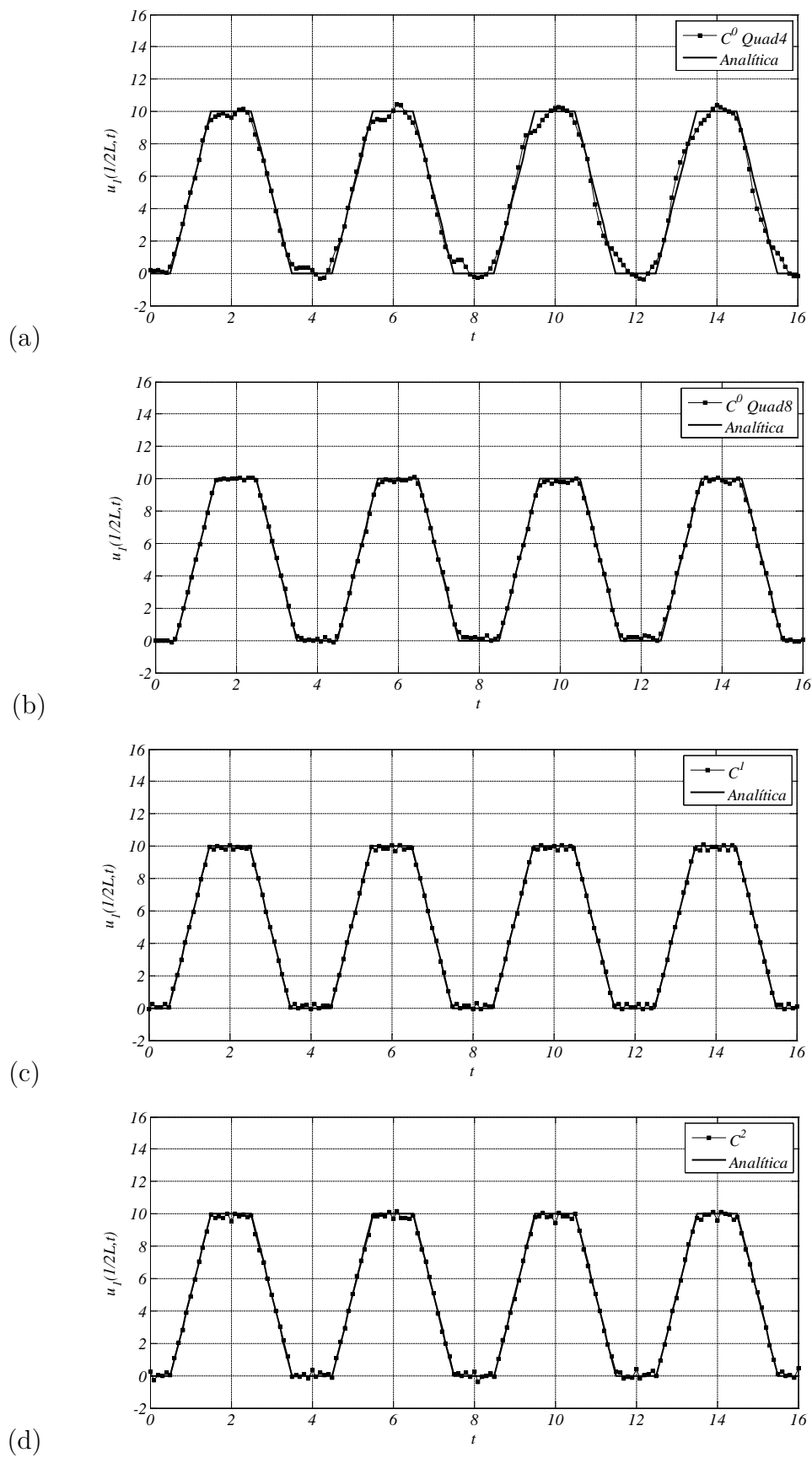


Figura 60: Solução aproximada do deslocamento no nó B_2 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2

Em termos quantitativos, as soluções aproximadas obtidas com cada elemento foram comparadas por meio do erro acumulado ao longo de todos os pontos discretos de tempo calculados nas simulações. Assumindo o cálculo do erro acumulado conforme dado na expressão (261),

$$\bar{e} = \sum_{t_I=0}^T |u_1^h(t_I) - u_1(t_I)| \quad (261)$$

sendo $u_1^h(t_I)$ e $u_1(t_I)$ as soluções aproximada e exata no instante de tempo t_I , T o tempo total da simulação e \bar{e} o erro acumulado da solução aproximada, obtêm-se os resultados indicados na Tabela 31.

Tabela 31: Erro acumulado da solução aproximada dos deslocamentos nos nós B_1 e B_2

Nó	\bar{e} para o elemento			
	C^0 Quad4	C^0 Quad8	C^1	C^2
B_1	77,83	26,88	30,42	57,32
B_2	54,79	18,78	16,9	22,53

6.3 Análise dos resultados

Analisando os resultados mostrados na Tabela 31 observa-se que:

- para o nó da extremidade, B_1 , o elemento de regularidade C^1 apresentou um erro acumulado ligeiramente superior aquele do elemento C^0 Quad8. O elemento de regularidade C^2 , por outro lado, apresentou uma magnitude do erro acumulado bem superior ao do elemento C^0 Quad8, porém inferior aquele do elemento C^0 Quad4;
- para o nó localizado no centro da barra, B_2 , os elementos de regularidade C^1 e C^2 apresentaram erros acumulados similares ao do elemento C^0 Quad8 e muito menores do que aquele referente ao elemento C^0 Quad4. Além disso, o erro acumulado para o elemento de regularidade C^1 foi o menor entre todos os elementos simulados.

Qualitativamente, os elementos de regularidade C^1 e C^2 apresentaram um comportamento satisfatório quanto a forma das curvas das soluções aproximadas. Em termos do deslocamento do nó B_1 , conforme Figuras 59(a)-(d), observa-se que as soluções obtidas com os elementos C^0 Quad4 e C^0 Quad8 não apresentaram os vértices de mudança de direção de deslocamento de tal nó definidos (estes apresentaram-se arredondados para os instantes de tempo $t = 0, 2, 4, \dots$), diferentemente dos elementos de regularidade C^1 e C^2 (ver Figuras 61(a)-(d)). No caso do deslocamento no nó B_2 , conforme Figuras 60(a)-(d), a solução referente ao elemento C^0 Quad4 apresentou desvios consideráveis em relação à solução analítica nos patamares que definem as mudanças de direção do deslocamento deste nó. Os elementos C^0 Quad8, C^1 e C^2 , por outro lado, apresentaram uma pequena

oscilação da solução em torno dos referidos patamares, mas foram capazes de reproduzi-los de maneira satisfatória (ver Figuras 62(a)-(d)).

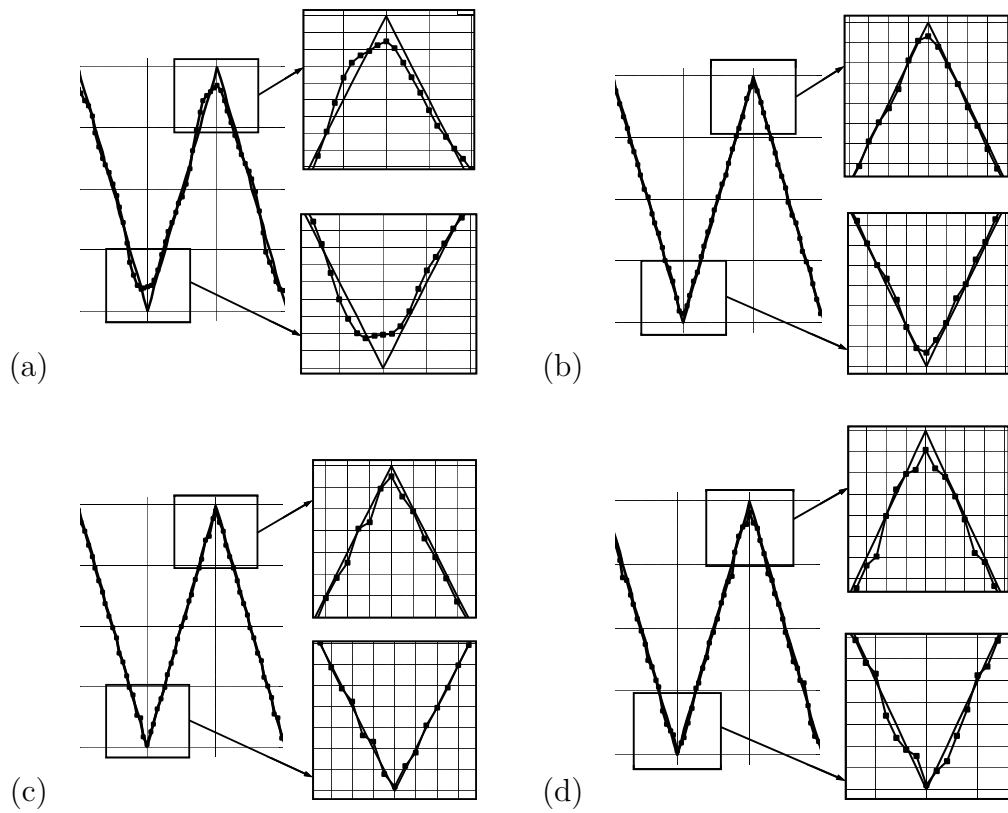


Figura 61: Detalhe da solução aproximada para o deslocamento no nó B_1 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2

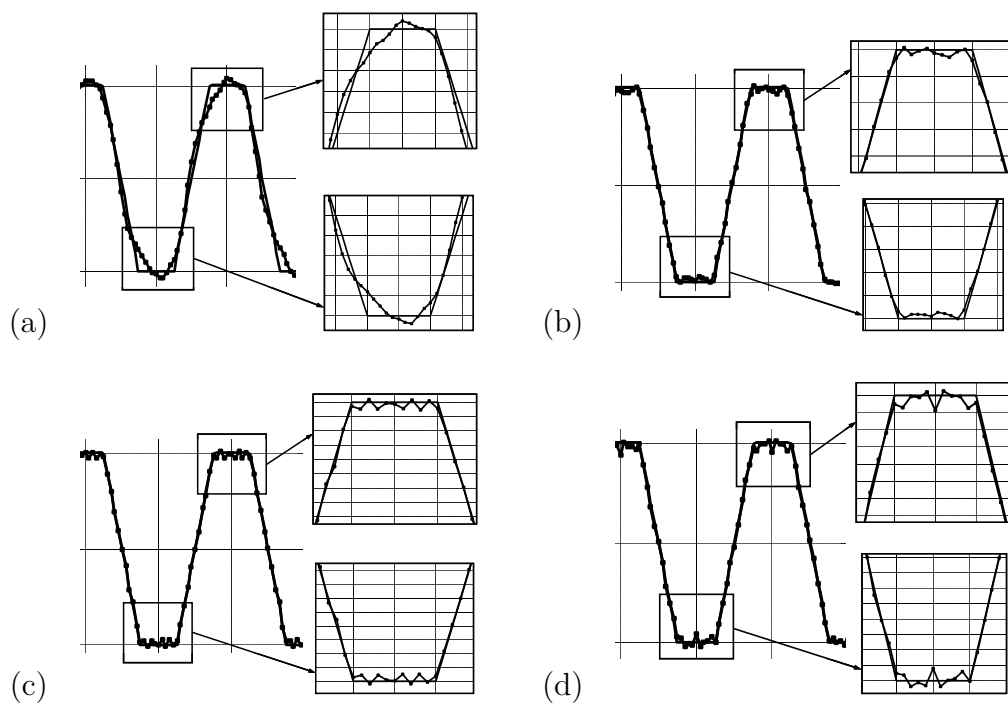


Figura 62: Detalhe da solução aproximada para o deslocamento no nó B_2 da barra engastada-livre para os elementos (a) C^0 Quad4, (b) C^0 Quad8, (c) C^1 e (d) C^2

CONCLUSÕES

Os elementos de regularidade C^1 e C^2 aqui testados apresentaram resultados satisfatórios quanto a aproximação das frequências naturais de vibração livre, mostrando melhores desempenhos quando comparados com os elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 e diferentes ordens polinomiais. O emprego destes elementos de regularidade C^1 e C^2 permitiu se obter um maior percentual de frequências naturais aproximadas do espectro discreto, para um dado nível de erro máximo, em comparação com os elementos Lagrangeanos de regularidade C^0 de quatro, oito, dezesseis e vinte e cinco nós.

De forma similar, os resultados obtidos na aproximação da solução do problema de propagação de onda elástica, decorrente da aplicação de força impulsiva, também foram satisfatórios para os elementos de regularidade C^1 e C^2 em comparação com os elementos de regularidade C^0 Quad4 e Quad8. Em termos do erro acumulado, o elemento de regularidade C^1 apresentou melhor desempenho do que o elemento de regularidade C^2 . Em termos qualitativos da forma da curva gráfica do deslocamento aproximado, os elementos de regularidade C^1 e C^2 demonstraram boa capacidade de reproduzir as inversões abruptas de direção do deslocamento.

Por outro lado, nas simulações dos problemas de elasticidade plana infinitesimal isotrópica, os elementos de regularidade C^1 e C^2 não apresentaram um comportamento satisfatório. Os erros relativos em norma L_2 e de energia da solução aproximada foram maiores do que aqueles obtidos com o elemento Lagrangeano de regularidade C^0 de oito nós, por exemplo. Além disso, as taxas de convergência em norma de energia obtidas com tais elementos foram inferiores às previstas pelo estimador de erro *a priori* (excetuando-se o problema do domínio *L-shaped*). Este comportamento atípico foi evidenciado até mesmo para o problema da viga em balanço, o qual apresenta uma solução analítica suave e os elementos das malhas dos modelos numéricos estavam isentos de distorção e com as arestas paralelas aos eixos cartesianos do problema global (teoricamente não havendo perda de regularidade interelemento).

Um ponto importante a ser ressaltado diz respeito ao esforço computacional para solução das equações. Embora os elementos de regularidade C^1 e C^2 apresentem maior quantidade de graus de liberdade do que o elemento Lagrangeano bilinear de regularidade C^0 , por exemplo, o tempo computacional observado para solução dos problemas aqui simulados não apresentou diferenças significativas entre estes três elementos. Esta constatação pode estar associada com o fato de as malhas construídas para os problemas aqui simulados não apresentarem um grande número de elementos e/ou com o fato de ter-se estruturado o programa com uma estratégia de armazenamento de dados do tipo *skyline* para matrizes simétricas.

Como propostas de trabalhos futuros, os seguintes pontos são elencados:

- a) Implementar os elementos quadrilaterais de regularidade C^1 e C^2 com maior quanti-

dade de nós visando-se avaliar a capacidade de manutenção da ordem de regularidade interelemento com relação ao nível de distorção da malha;

- b) Aplicar os elementos de regularidade C^1 e C^2 em problemas de Mecânica da Fratura, visando-se verificar o comportamento da solução aproximada obtida na existência de singularidades no domínio do problema. Neste caso, ainda seria possível se desenvolver elementos de regularidade C^1 e C^2 , a serem empregados nas proximidades de uma ponta de trinca, por exemplo, com funções de interpolação adequadas para reproduzir os efeitos que ocorrem em tal região (estratégia similar a adotada no X-FEM).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adini, A. ; Clough, R. W. Analysis of plate bending by the finite element method. **NSF Rept. G. 7337**, 1961.

Anton, H. **Cálculo - Um Novo Horizonte**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

Babuška, I. ; Melenk, J. M. The partition of unity method. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, vol.40, p.727-758, 1997. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Bathe, K. J. **Finite Element Procedures**. Upper Saddle River: Prentice-Hal Inc., 1996.

Belytschko, T. ; Lu, Y. Y. ; Gu, L. Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.37, p.229-256, 1994. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Bogner, F. K. ; Fox, R. L. ; Schmit, L. A. J. The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. **Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80**, p.397-443, 1966.

Carey, G. F. ; Oden, J. T. **Finite Elements - A Second Course**. vol. 2. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc, 1983.

Chopra, A. K. **Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.

Ciarlet, P. G. Basic error estimates for elliptic problems. In Ciarlet, P. G. ; Lions, J. L., editors, **Handbook of Numerical Analysis - Finite Element Method - Part 1**, volume II. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1991.

Ciarlet, P. G. ; Raviart, P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in r_n with application to the finite element method. **Arch. Rational Mech. Anal.**, 46, p.177-199, 1972.

Clough, R. W. ; Penzien, J. **Dynamics of Structures**. 3rd. ed. Berkeley: Computers and Structures, Inc., 2003.

Cook, R. D. ; Malkus, D. S. ; Plesha, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3rd. ed. Chichester: John Wiley and Sons Inc., 1989.

Cottrell, J. A. ; Reali, A. ; Bazilevs, Y. ; Hughes, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.195, p.5257-5296, 2006. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Cottrell, J. A. ; Hughes, T. J. R. ; Reali, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.196, p.4160-4183, 2007. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Cottrell, J. A. ; Hughes, T. J. R. ; Bazilevs, Y. **Isogeometric Analysis - Toward Integration of CAD and FEA**. Chichester: John Wiley and Sons Inc., 2009.

Dhatt, G. ; Touzot, G. **The Finite Element Method Displayed**. Chichester: John Wiley and Sons Inc., 1984.

Dolbow, J. ; Belytschko, T. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method. **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol.5, p.207-241, 1998. Disponível em: < dolbow.cee.duke.edu/EFG/efg1.ps>.

Dolbow, J. E. **An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics**. Tese de doutorado, Northwestern University, Evanston, 1999.

Duarte, C. A. ; Oden, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.139, p.237-262, 1996. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Dym, C. L. ; Shames, I. H. **Solid Mechanics: A Variational Approach**. International student edition. New York: McGraw-Hill Inc., 1973.

El-Zafrany, A. ; Cookson, R. A. Derivation of Lagrangian and Hermitian shape functions for quadrilateral elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 23, p.1939-1958, 1986.

Fish, J. ; Belytschko, T. **A First Course in Finite Elements**. Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 2007.

Gilat, A. ; Subramaniam, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas. Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

Givoli, D. On the number of reliable finite-element eigenmodes. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, vol.24, p.1967-1977, 2008. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New York: Dover Publications Inc., 2000.

Hughes, T. J. R. ; Reali, A. ; Sangalli, G. Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: Comparison of p-method finite elements with k-method NURBS. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.197, p.4104-4124, 2008. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Kaljević, I. ; Saigal, S. An improved element free Galerkin formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.40, p.2953-2974, 1997. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Kolsky, H. **Stress Waves in Solids**. New York, Dover Publications, Inc, 1963.

Kreyszig, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 10th. ed. Danvers: John Wiley and Sons Inc., 2011.

Krongauz, Y. ; Belytschko, T. Consistent pseudo-derivatives in meshless methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.146, p.371-386, 1997. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Lancaster, P. Moving weighted least-squares methods. Polynomial and spline approximation. **NATO Advanced Study Institute: Math. Phys. Sci.**, vol.49, p.103-120, 1979.

Li, Z. C. ; Huang, H. ; Huang, J. Effective condition number of the Hermite finite element methods for biharmonic equations. **Applied Numerical Mathematics**, vol.58, p.1291-1308, 2008. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Melenk, J. M. **Finite Element Methods with harmonic shape functions for solving Laplace's equation**. Dissertação de mestrado, The University of Maryland, Maryland, 1992.

Melenk, J. M. **On Generalized Finite Element Methods**. Tese de doutorado, The University of Maryland, Maryland, 1995.

Melenk, J. M. ; Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.139, p.289-314, 1996. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Melosh, R. J. Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method. **AI-AAJ.1**, p.1631-1637, 1963.

Nayroles, B. ; Touzot, G. ; Villon, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. **Computational Mechanics**, vol.10, p.307-318, 1992. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Oden, J. T. ; Reddy, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**. New York: John Wiley and Sons Inc., 1976.

Oh, H. ; Batra, R. C. Application of Zienkiewicz-Zhu's error estimate with super-convergent patch recovery to hierarchical p-refinement. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol.31, p.273-280, 1999. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Oh, H. ; Kim, J. G. ; Hong, W. The piecewise polynomial partition of unity functions for the generalized finite element methods (ii), August 17 2007. Special volume honoring Professor Ivo Babuška's 80th birthday.

Rao, S. S. **Mechanical Vibrations**. 2nd. ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 2000.

Rao, S. S. **The Finite Element Method In Engineering**. 4th. ed. Miami: Elsevier Science and Technology Books, 2004.

Reddy, B. D. **Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements**. New York: Springer, 1998.

Rektorys, K. **Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering**. 2nd. ed. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975.

Strang, G. ; Fix, G. **An Analysis of the Finite Element Method**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.

Strouboulis, T. ; Copps, K. ; Babuška, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.190, p.4081-4193, 2001. Disponível em: < www.sciencedirect.com >.

Szabó, B. ; Babuška, I. **Finite Element Analysis**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1991.

Szabó, B. ; Babuška, I. ; Chayapathy, B. K. Stress computations for nearly incompressible materials. Report WU/CCM-88/2, Washington University, St. Louis, MO 63130, April 1988.

Timoshenko, S. ; Goodier, J. N. **Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.

Timoshenko, S. P. **Vibration Problems in Engineering**. 2nd. ed. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1937.

Wiberg, N. E. ; Abdulwahab, F. Error estimation with postprocessed finite element solutions. **Computers and Structures**, vol.64, p.113-137, 1997. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

Zienkiewicz, O. C. ; Taylor, R. L. **The Finite Element Method. Volume 1: The Basis**. 5th. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

Zienkiewicz, O. C. ; Zhu, J. Z. Superconvergence and the superconvergent patch recovery. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol.19, p.11-23, 1995. Disponível em: < www.sciencedirect.com>.

APÊNDICE A - Propriedades gerais de espaços de funções

A solução aproximada de um problema de valor de contorno (PVC) através de um método numérico fundamentado em uma formulação variacional como o método dos elementos finitos (MEF) é obtida a partir da combinação linear de funções contidas no espaço de aproximação construído (Oden e Reddy, 1976). Com isso, características como convergência da solução aproximada obtida e estabilidade do método numérico dependem de certas propriedades e condições destas funções e, conseqüentemente, destes espaços. Tendo em vista este contexto, neste Apêndice são apresentadas sucintamente algumas propriedades e definições relacionadas a espaços de funções.

A.1 Continuidade e regularidade

Definição A.1.1. Uma função $f(x_i)$, $1 \leq i \leq n_{DE}$, é dita ser contínua ao longo de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{DE}}$, se para cada ponto $P \in \Omega$ as relações (A.1.1) a (A.1.3) são satisfeitas (Anton, 2000):

$$\exists f(P) \tag{A.1.1}$$

$$\exists \lim_{x_i \rightarrow P} [f(x_i)] \tag{A.1.2}$$

$$\lim_{x_i \rightarrow P} [f(x_i)] = f(P) \tag{A.1.3}$$

Definição A.1.2. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser k -vezes continuamente diferenciável, ou seja, ter regularidade k , se suas derivadas de ordem j , para $0 \leq j \leq k$, existem e são funções contínuas ao longo de todo o domínio Ω . Neste caso, diz-se que a função pertence à classe C^k ou $C^k(\Omega)$ (Hughes, 2000; Carey e Oden, 1983).

Observação: uma função da classe C^0 é uma função simplesmente contínua, enquanto que uma função da classe C^∞ possui derivadas contínuas de qualquer ordem (isto é, $j = 0, 1, \dots, \infty$).

Definição A.1.3. Uma função f é dita ser da classe $C_0^k(\Omega)$ se suas derivadas de ordem j , para $0 \leq j \leq k$, existem e são funções contínuas, e assumem valores não nulos apenas dentro de uma sub-região $K \subset \Omega$. Assim, a função f é dita ter suporte compacto e $C_0^k(\Omega)$ representa um subconjunto de $C^k(\Omega)$, isto é, $C_0^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ (Oden e Reddy, 1976).

A.2 Espaços lineares

Definição A.2.1. Um conjunto V é chamado de espaço linear real se, dadas duas funções $f_1, f_2 \in V$ e dois escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, a função $a_1f_1 + a_2f_2$ também pertence ao espaço V , isto é, $a_1f_1 + a_2f_2 \in V$ (Rektorys, 1975).

Os espaços lineares geralmente apresentam as métricas denominadas produto interno e norma, conforme Definições A.2.2 e A.2.3, respectivamente.

Definição A.2.2. Um produto interno (\cdot, \cdot) em um espaço linear real V é um mapeamento $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, (\cdot, \cdot) atribui a um par de elementos $f_1, f_2 \in V$ um número real denotado por (f_1, f_2) . Sendo $f_1, f_2, f_3 \in V$ e $a_1 \in \mathbb{R}$, então tem-se as propriedades (A.2.1) a (A.2.4) (Rektorys, 1975):

$$(f_1, f_2) = (f_2, f_1) \quad (\text{A.2.1})$$

$$(a_1f_1, f_2) = a_1(f_1, f_2) \quad (\text{A.2.2})$$

$$(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3) \quad (\text{A.2.3})$$

$$(f_1, f_1) \geq 0 \text{ e } (f_1, f_1) = 0 \Leftrightarrow f_1 = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

Definição A.2.3. Uma norma $\|\cdot\|$ em um espaço linear real V é um mapeamento $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que apresenta as propriedades dadas em (A.2.5) a (A.2.7) (Hughes, 2000):

$$\|f_1\| \geq 0 \text{ e } \|f_1\| = 0 \text{ se e somente se } f_1 = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

$$\|a_1f_1\| = |a_1| \|f_1\| \quad (\text{A.2.6})$$

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| \quad (\text{A.2.7})$$

no qual $f_1, f_2 \in V$ e $a_1 \in \mathbb{R}$.

Definição A.2.4. Um espaço com produto interno $\{V, (\cdot, \cdot)\}$ possui uma norma natural definida por (A.2.8) (Hughes, 2000):

$$\|f_1\| = (f_1, f_1)^{1/2} \quad (\text{A.2.8})$$

no qual $f_1 \in V$.

A.3 Espaços de Lebesgue

Definição A.3.1. Seja um domínio Ω aberto e limitado no espaço Euclidiano n_{DE} -dimensional $\mathbb{R}^{n_{DE}}$. O espaço de Lebesgue $L_p(\Omega)$, matematicamente definido em (A.3.1), para $p \geq 1$, consiste de todas as funções $u \in \Omega$ cujos valores absolutos das potências de p -ésima ordem, $|u|^p$, são Lebesgue-integráveis, isto é, se a integral da equação (A.3.1) existe e é finita (Hughes, 2000; Oden e Reddy, 1976):

$$L_p = L_p(\Omega) = \left\{ u \mid u \in \Omega, \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\} \quad (\text{A.3.1})$$

no qual $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n_{DE}}$.

Definição A.3.2. A norma $\|u\|_{L_p(\Omega)}$ de uma função $u \in \Omega$ é dada por (A.3.2) (Oden e Reddy, 1976):

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \quad (\text{A.3.2})$$

sendo $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n_{DE}}$.

A.4 Espaços de Sobolev

Definição A.4.1. Seja um domínio Ω aberto e limitado no espaço Euclidiano n_{DE} -dimensional $\mathbb{R}^{n_{DE}}$. O espaço de Sobolev $W_p^m(\Omega)$, matematicamente definido em (A.4.1), é formado pelas funções $u \in L_p(\Omega)$ que apresentam todas suas derivadas parciais fracas, $D^{\alpha_i}(u)$, até ordem m , inclusas no espaço $L_p(\Omega)$ (Oden e Reddy, 1976).

$$W_p^m = W_p^m(\Omega) = \left\{ u \mid D^{\alpha_i} u \in L_p(\Omega), \forall \alpha_i \text{ tal que } 0 \leq \alpha_i^* \leq m \right\} \quad (\text{A.4.1})$$

no qual $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_{DE}})$, $\alpha_i^* = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n_{DE}}$ e $D^{\alpha_i}(u) = \frac{\partial^{\alpha_i^*} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_{n_{DE}}^{\alpha_{n_{DE}}}$.

Observação 1: a derivada parcial fraca de ordem zero da função u corresponde à própria função u , conforme dado em (A.4.2):

$$D^0(u) = u \quad (\text{A.4.2})$$

Observação 2: os resultados (A.4.1) e (A.4.2) conduzem à relação (A.4.3), a qual

expressa a equivalência entre os espaços de Sobolev e de Lebesgue:

$$W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega) \quad (\text{A.4.3})$$

Definição A.4.2. A norma $\|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ de uma função $u \in W_p^m(\Omega)$ é dada por (A.4.4) (Oden e Reddy, 1976):

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha_i^* \leq m} |D^{\alpha_i} u|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{\alpha_i^* \leq m} \|D^{\alpha_i} u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (\text{A.4.4})$$

no qual $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n_{DE}}$.

A.5 Espaços de Hilbert

Oden e Reddy (1976) descrevem que a maioria dos problemas de valor de contorno lineares abordados em Engenharia envolvem o emprego de espaços de Sobolev de ordem $W_2^m(\Omega)$, os quais são denominados de espaços de Hilbert. Esta classe de espaços apresenta as características descritas a seguir.

Definição A.5.1. Seja um domínio Ω aberto e limitado no espaço Euclidiano n_{DE} -dimensional $\mathbb{R}^{n_{DE}}$. O espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$, para $m \geq 0$ e inteiro, é formado pelas funções $u \in L_2(\Omega)$ conforme dado em (A.5.1) (Oden e Reddy, 1976):

$$H^m = H^m(\Omega) = \{u \mid D^{\alpha_i}(u) \in L_2(\Omega), \alpha_i \text{ tal que } 0 \leq \alpha_i^* \leq m\} \quad (\text{A.5.1})$$

no qual $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_{DE}})$, $\alpha_i^* = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_{DE}}$ e $D^{\alpha_i}(u) = \frac{\partial^{\alpha_i^*} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_{n_{DE}}^{\alpha_{n_{DE}}}}$.

Observação: o resultado (A.5.1) conduz à relação de equivalência entre os espaços de Hilbert e de Sobolev dada em (A.5.2):

$$H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega) \quad (\text{A.5.2})$$

Definição A.5.2. O produto interno em $H^m(\Omega)$, $(u, v)_{H^m(\Omega)}$, é dado por (A.5.3) (Oden e Reddy, 1976):

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\alpha_i^* \leq m} (D^{\alpha_i}(u), D^{\alpha_i}(v))_{L_2(\Omega)} \quad (\text{A.5.3})$$

Definição A.5.3. A norma associada ao espaço $H^m(\Omega)$, $\|u\|_{H^m(\Omega)}$, é dada por

(A.5.4) (Oden e Reddy, 1976):

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha_i^* \leq m} \|D^{\alpha_i} u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = [(u, u)_{H^m(\Omega)}]^{1/2} < \infty \quad (\text{A.5.4})$$

Um ponto importante a ser ressaltado diz respeito à continuidade das funções que formam o espaço $H^m(\Omega)$, sobretudo para domínios de maior ordem dimensional (para $n_{DE} > 1$). Neste caso, torna-se útil a aplicação do chamado Teorema da imersão de Sobolev, conforme Teorema A.5.1.

Teorema A.5.1 (Teorema da imersão de Sobolev). Seja um domínio aberto e limitado Ω com contorno Γ no espaço $\mathbb{R}^{n_{DE}}$. Se $m - k > \frac{n_{DE}}{2}$, então cada função em $H^m(\Omega)$ pertence a $C^k(\bar{\Omega})$. Desta forma, a imersão dada na relação (A.5.5) assegura a continuidade das funções em $H^m(\Omega)$ (Reddy, 1998).

$$H^m(\Omega) \subseteq C^k(\bar{\Omega}) \quad (\text{A.5.5})$$

Observação 1: no caso unidimensional, ou seja, no espaço \mathbb{R} , Hughes (2000) destaca que a relação (A.5.6) pode ser estabelecida:

$$H^{k+1} \subset C_0^k \quad (\text{A.5.6})$$

Observação 2: Reddy (1998) salienta que para $n_{DE} = 1$, ou seja, Ω é um subconjunto da linha real, as funções em $H^1(\Omega)$ são pelo menos contínuas ($k = 0$). Para domínios que são subconjuntos do plano, isto é, para $n_{DE} = 2$, é requerido que a função seja membro de $H^2(\Omega)$ a fim de garantir sua continuidade.

APÊNDICE B - Construção das funções de partição de unidade com regularidade C^1 e C^2

B.1 Partição de unidade com regularidade C^1

As condições de contorno a serem aplicadas na determinação dos coeficientes do polinômio geral (140), para as funções ϕ_I , $I = 1, 2$, estão indicadas na Tabela B.1.1.

Tabela B.1.1: Condições de contorno para determinação dos coeficientes dos polinômios das funções de partição de unidade C^1

Nó I	$\phi_I(\xi) _{\xi=-1}$	$\phi_I(\xi) _{\xi=1}$	$\frac{d\phi_I(\xi)}{d\xi} _{\xi=-1}$	$\frac{d\phi_I(\xi)}{d\xi} _{\xi=1}$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0

Como resultado da aplicação das condições de contorno da Tabela B.1.1, obtêm-se os sistemas lineares de equações dados em (B.1.1) e (B.1.2):

$$\begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 1 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \end{cases} \quad (B.1.1)$$

$$\begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \end{cases} \quad (B.1.2)$$

cujas soluções fornecem os coeficientes procurados para ϕ_1 e ϕ_2 , conforme (B.1.3) e (B.1.4), respectivamente:

$$a_3 = \frac{1}{4}; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = -\frac{3}{4}; \quad a_0 = \frac{1}{2} \quad (B.1.3)$$

$$a_3 = -\frac{1}{4}; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = \frac{3}{4}; \quad a_0 = \frac{1}{2} \quad (B.1.4)$$

Desta forma, fazendo-se as devidas manipulações algébricas, as funções de partição de unidade C^1 podem ser escritas como dado em (B.1.5) e (B.1.6).

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(2 + \xi) \quad (B.1.5)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(2 - \xi) \quad (B.1.6)$$

B.2 Partição de unidade com regularidade C^2

As condições de contorno para determinação dos coeficientes do polinômio geral (140), para as funções ϕ_I , $I = 1, 2$, são dadas na Tabela B.2.1.

Tabela B.2.1: Condições de contorno para determinação dos coeficientes dos polinômios das funções de partição de unidade C^2

Nó I	$\phi_I(\xi) _{\xi=-1}$	$\phi_I(\xi) _{\xi=1}$	$\frac{d\phi_I(\xi)}{d\xi} _{\xi=-1}$	$\frac{d\phi_I(\xi)}{d\xi} _{\xi=1}$	$\frac{d^2\phi_I(\xi)}{d\xi^2} _{\xi=-1}$	$\frac{d^2\phi_I(\xi)}{d\xi^2} _{\xi=1}$
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0

A aplicação das condições de contorno da Tabela B.2.1 resulta nos sistemas de equações lineares (B.2.1) e (B.2.2):

$$\begin{cases} -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 1 \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ -20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 = 0 \\ 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad (B.2.1)$$

$$\begin{cases} -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ -20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 = 0 \\ 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad (B.2.2)$$

cujas soluções fornecem os coeficientes procurados para ϕ_1 e ϕ_2 , conforme (B.2.3) e (B.2.4), respectivamente:

$$a_5 = -\frac{3}{16}; \quad a_4 = 0; \quad a_3 = \frac{5}{8}; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = -\frac{15}{16}; \quad a_0 = \frac{1}{2} \quad (B.2.3)$$

$$a_5 = \frac{3}{16}; \quad a_4 = 0; \quad a_3 = -\frac{5}{8}; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = \frac{15}{16}; \quad a_0 = \frac{1}{2} \quad (B.2.4)$$

Assim, fazendo-se as devidas manipulações algébricas, as funções de partição de unidade C^2 podem ser escritas segundo (B.2.5) e (B.2.6).

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{16} (1 - \xi)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) \quad (B.2.5)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{16} (1 + \xi)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) \quad (B.2.6)$$

APÊNDICE C - Construção das funções de enriquecimento com regularidade C^1 e C^2

C.1 Funções de enriquecimento com regularidade C^1

As condições de contorno a serem aplicadas na determinação dos coeficientes do polinômio geral (146), para as funções ϑ_L , $L = 1, 2$, estão indicadas na Tabela C.1.1.

Tabela C.1.1: Condições de contorno para determinação dos coeficientes dos polinômios das funções de enriquecimento C^1

Função L	$\vartheta_L(\xi) _{\xi=-1}$	$\vartheta_L(\xi) _{\xi=1}$	$\frac{d\vartheta_L(\xi)}{d\xi} _{\xi=-1}$	$\frac{d\vartheta_L(\xi)}{d\xi} _{\xi=1}$
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1

Como resultado da aplicação das condições de contorno da Tabela C.1.1, obtêm-se os sistemas lineares de equações dados em (C.1.1) e (C.1.2):

$$\begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 1 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \end{cases} \quad (C.1.1)$$

$$\begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1 \end{cases} \quad (C.1.2)$$

cujas soluções fornecem os coeficientes procurados para ϑ_1 e ϑ_2 , conforme (C.1.3) e (C.1.4), respectivamente:

$$a_3 = \frac{1}{4}; \quad a_2 = -\frac{1}{4}; \quad a_1 = -\frac{1}{4}; \quad a_0 = \frac{1}{4} \quad (C.1.3)$$

$$a_3 = \frac{1}{4}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_1 = -\frac{1}{4}; \quad a_0 = -\frac{1}{4} \quad (C.1.4)$$

Desta forma, fazendo-se as devidas manipulações algébricas, as funções de enriquecimento C^1 podem ser escritas como dado em (C.1.5) e (C.1.6).

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\xi - 1)^2 \quad (C.1.5)$$

$$\vartheta_2(\xi) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\xi + 1)^2 \quad (C.1.6)$$

C.2 Funções de enriquecimento com regularidade C^2

As condições de contorno para determinação dos coeficientes do polinômio geral (146), para as funções ϑ_L , $L = 1, 2, \dots, 2k$, são dadas na Tabela C.2.1.

Tabela C.2.1: Condições de contorno para determinação dos coeficientes dos polinômios das funções de enriquecimento C^2

Função L	$\vartheta_L(\xi) _{\xi=-1}$	$\vartheta_L(\xi) _{\xi=1}$	$\frac{d\vartheta_L(\xi)}{d\xi} _{\xi=-1}$	$\frac{d\vartheta_L(\xi)}{d\xi} _{\xi=1}$	$\frac{d^2\vartheta_L(\xi)}{d\xi^2} _{\xi=-1}$	$\frac{d^2\vartheta_L(\xi)}{d\xi^2} _{\xi=1}$
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1

A aplicação das condições de contorno da Tabela C.2.1 resulta nos sistemas de equações lineares dados em (C.2.1) a (C.2.4):

$$\begin{cases} -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 1 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ -20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 = 0 \\ 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad (C.2.1)$$

$$\begin{cases} -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1 \\ -20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 = 0 \\ 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad (C.2.2)$$

$$\begin{cases} -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ -20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 = 1 \\ 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad (C.2.3)$$

$$\begin{cases} -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ -20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 = 0 \\ 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 1 \end{cases} \quad (C.2.4)$$

cujas soluções fornecem os coeficientes procurados para ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 e ϑ_4 conforme (C.2.5)-(C.2.8), respectivamente:

$$a_5 = -\frac{3}{16}; \quad a_4 = \frac{1}{16}; \quad a_3 = \frac{5}{8}; \quad a_2 = -\frac{3}{8}; \quad a_1 = -\frac{7}{16}; \quad a_0 = \frac{5}{16} \quad (C.2.5)$$

$$a_5 = -\frac{3}{16}; \quad a_4 = -\frac{1}{16}; \quad a_3 = \frac{5}{8}; \quad a_2 = \frac{3}{8}; \quad a_1 = -\frac{7}{16}; \quad a_0 = -\frac{5}{16} \quad (C.2.6)$$

$$a_5 = -\frac{1}{16}; \quad a_4 = \frac{1}{16}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad a_2 = -\frac{1}{8}; \quad a_1 = -\frac{1}{16}; \quad a_0 = \frac{1}{16} \quad (C.2.7)$$

$$a_5 = \frac{1}{16}; \quad a_4 = \frac{1}{16}; \quad a_3 = -\frac{1}{8}; \quad a_2 = -\frac{1}{8}; \quad a_1 = \frac{1}{16}; \quad a_0 = \frac{1}{16} \quad (C.2.8)$$

Portanto, fazendo-se as devidas manipulações algébricas, as funções de enriquecimento C^2 podem ser escritas segundo (C.2.9) a (C.2.12).

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 + 7\xi - 5) \quad (C.2.9)$$

$$\vartheta_2(\xi) = -\frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 - 7\xi - 5) \quad (C.2.10)$$

$$\vartheta_3(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 + \xi - 1) \quad (C.2.11)$$

$$\vartheta_4(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi + 1)(\xi^2 - \xi - 1) \quad (C.2.12)$$

APÊNDICE D - Funções de interpolação para os elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidade C^1 e C^2

D.1 Funções de interpolação para o elemento quadrilateral de quatro nós com regularidade C^1

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta - 1)^2 (2 + \xi) (2 + \eta) \quad (D.1.1)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta - 1)^2 (1 + \xi) (2 + \eta) \quad (D.1.2)$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta - 1)^2 (2 + \xi) (1 + \eta) \quad (D.1.3)$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta - 1)^2 (1 + \xi) (1 + \eta) \quad (D.1.4)$$

$$\Phi_5(\xi, \eta) = -\frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta - 1)^2 (-2 + \xi) (2 + \eta) \quad (D.1.5)$$

$$\Phi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta - 1)^2 (-1 + \xi) (2 + \eta) \quad (D.1.6)$$

$$\Phi_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta - 1)^2 (-2 + \xi) (1 + \eta) \quad (D.1.7)$$

$$\Phi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta - 1)^2 (-1 + \xi) (1 + \eta) \quad (D.1.8)$$

$$\Phi_9(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta + 1)^2 (-2 + \xi) (-2 + \eta) \quad (D.1.9)$$

$$\Phi_{10}(\xi, \eta) = -\frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta + 1)^2 (-1 + \xi) (-2 + \eta) \quad (D.1.10)$$

$$\Phi_{11}(\xi, \eta) = -\frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta + 1)^2 (-2 + \xi) (-1 + \eta) \quad (D.1.11)$$

$$\Phi_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi + 1)^2 (\eta + 1)^2 (-1 + \xi) (-1 + \eta) \quad (D.1.12)$$

$$\Phi_{13}(\xi, \eta) = -\frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta + 1)^2 (2 + \xi) (-2 + \eta) \quad (D.1.13)$$

$$\Phi_{14}(\xi, \eta) = -\frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta + 1)^2 (1 + \xi) (-2 + \eta) \quad (D.1.14)$$

$$\Phi_{15}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta + 1)^2 (2 + \xi) (-1 + \eta) \quad (D.1.15)$$

$$\Phi_{16}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi - 1)^2 (\eta + 1)^2 (1 + \xi) (-1 + \eta) \quad (D.1.16)$$

D.2 Funções de interpolação para o elementos quadrilateral de quatro nós com regularidade C^2

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (D.2.1)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (D.2.2)$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (D.2.3)$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (D.2.4)$$

$$\Phi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (D.2.5)$$

$$\Phi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (D.2.6)$$

$$\Phi_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (D.2.7)$$

$$\Phi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (D.2.8)$$

$$\Phi_9(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (D.2.9)$$

$$\Phi_{10}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi + 1)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (D.2.10)$$

$$\Phi_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - 7\xi - 5) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (D.2.11)$$

$$\Phi_{12}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \xi - 1) (\eta - 1)^3 (3\eta^2 + 9\eta + 8) \quad (D.2.12)$$

$$\Phi_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi + 1)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (D.2.13)$$

$$\Phi_{14}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (D.2.14)$$

$$\Phi_{15}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + 7\eta - 5) \quad (D.2.15)$$

$$\Phi_{16}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi + 1)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (D.2.16)$$

$$\Phi_{17}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (D.2.17)$$

$$\Phi_{18}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 + \eta - 1) \quad (D.2.18)$$

$$\Phi_{19}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi + 1)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) (\eta + 1)^3 (3\eta^2 - 9\eta + 8) \quad (D.2.19)$$

$$\Phi_{20}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - 7\xi - 5) (\eta + 1)^3 (3\eta^2 - 9\eta + 8) \quad (D.2.20)$$

$$\Phi_{21}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \xi - 1) (\eta + 1)^3 (3\eta^2 - 9\eta + 8) \quad (D.2.21)$$

$$\Phi_{22}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi + 1)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 7\eta - 5) \quad (D.2.22)$$

$$\Phi_{23}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 7\eta - 5) \quad (D.2.23)$$

$$\Phi_{24}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 7\eta - 5) \quad (D.2.24)$$

$$\Phi_{25}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi + 1)^3 (3\xi^2 - 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - \eta - 1) \quad (D.2.25)$$

$$\Phi_{26}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - \eta - 1) \quad (D.2.26)$$

$$\Phi_{27}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - \eta - 1) \quad (D.2.27)$$

$$\Phi_{28}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta + 1)^3 (3\eta^2 - 9\eta + 8) \quad (D.2.28)$$

$$\Phi_{29}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta + 1)^3 (3\eta^2 - 9\eta + 8) \quad (D.2.29)$$

$$\Phi_{30}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta + 1)^3 (3\eta^2 - 9\eta + 8) \quad (D.2.30)$$

$$\Phi_{31}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 7\eta - 5) \quad (D.2.31)$$

$$\Phi_{32}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 7\eta - 5) \quad (D.2.32)$$

$$\Phi_{33}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 7\eta - 5) \quad (D.2.33)$$

$$\Phi_{34}(\xi, \eta) = -\frac{1}{256} (\xi - 1)^3 (3\xi^2 + 9\xi + 8) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - \eta - 1) \quad (D.2.34)$$

$$\Phi_{35}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 7\xi - 5) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - \eta - 1) \quad (D.2.35)$$

$$\Phi_{36}(\xi, \eta) = \frac{1}{256} (\xi^2 - 1) (\xi^2 + \xi - 1) (\eta^2 - 1) (\eta^2 - \eta - 1) \quad (D.2.36)$$

APÊNDICE E - Campos de tensão e de deslocamento referentes ao problema do *patch test* generalizado

E.1 Solução analítica

O aspecto qualitativo dos campos de tensão e de deslocamento, construídos com base na solução analítica do problema do *patch test*, estão mostrados nas Figuras E.1.1(a)-(e).

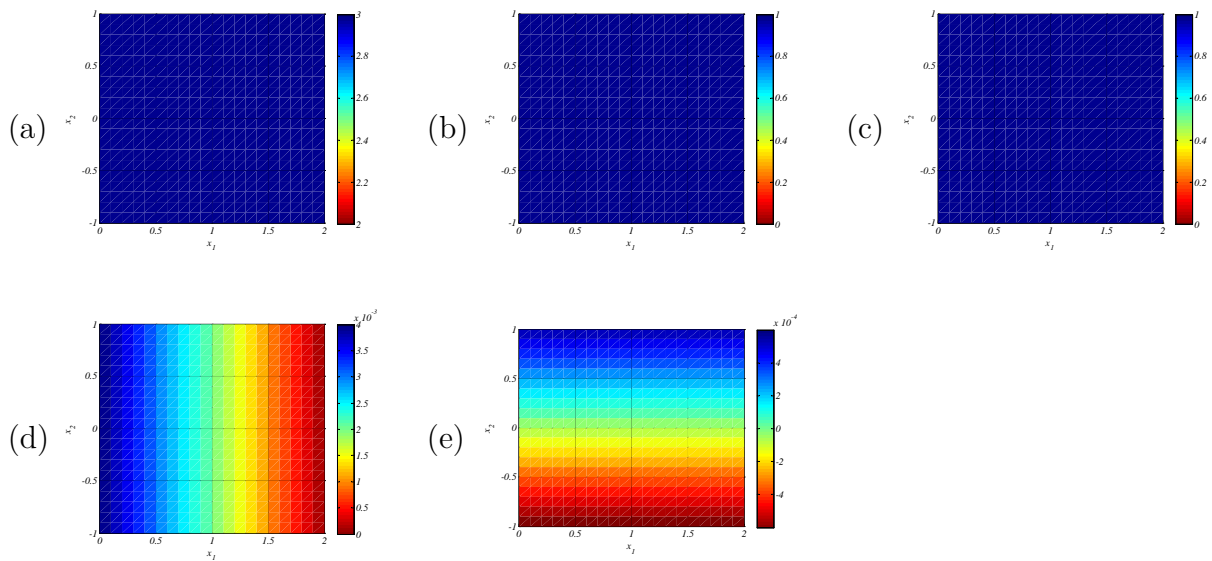


Figura E.1.1: Campos de tensão (a) T_{11} , (b) T_{22} , (c) T_{12} e de deslocamento (d) u_1 , (e) u_2 da solução analítica do *patch test*

E.2 Solução aproximada obtida com os elementos C^0 , C^1 e C^2 , considerando as malhas com diferentes níveis de distorção

O aspecto qualitativo da componente T_{11} do campo de tensões está mostrada nas Figuras E.2.1(a)-(l). As Figuras E.2.1(a)-(d) referem-se ao elemento C^0 Quad4, para as malhas 1-4, respectivamente. As Figuras E.2.1(e)-(h) referem-se ao elemento C^1 , ao passo que as Figuras E.2.1(i)-(l) referem-se ao elemento C^2 .

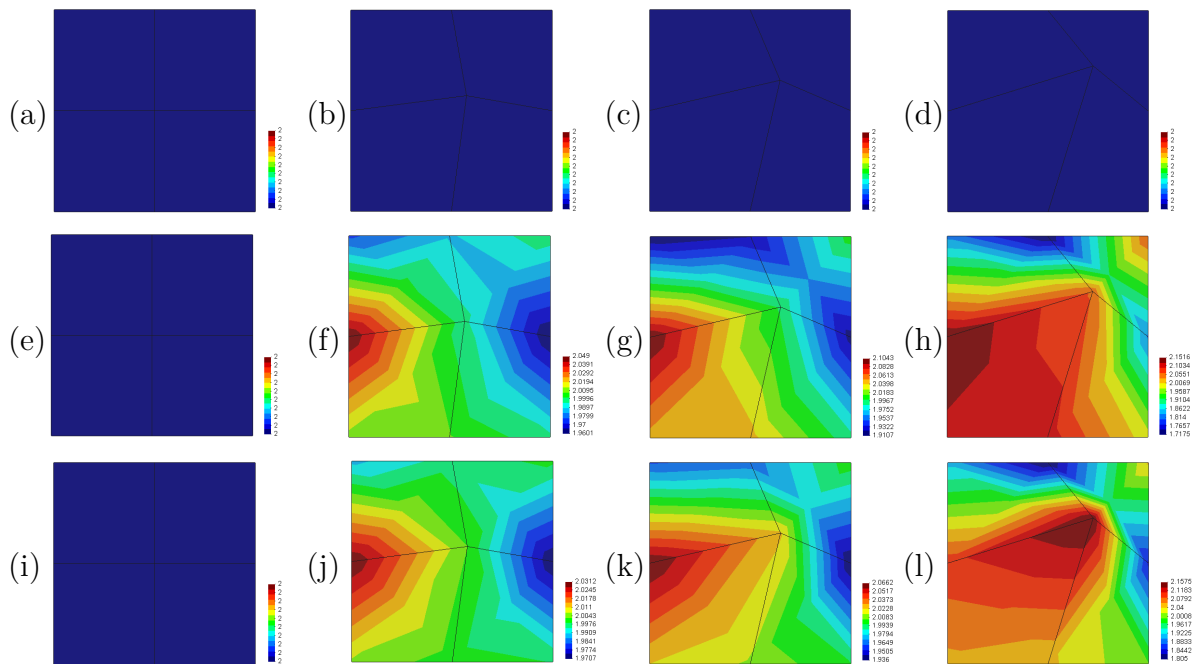


Figura E.2.1: Componente T_{11} do campo de tensões, para os quatro níveis de distorção de malha considerados, obtida com os elementos (a)-(d) C^0 Quad4, (e)-(h) C^1 , (i)-(l) C^2

O aspecto qualitativo da componente T_{22} do campo de tensões está mostrada nas Figuras E.2.2(a)-(l). As Figuras E.2.2(a)-(d) referem-se ao elemento C^0 Quad4, para as malhas 1-4, respectivamente. As Figuras E.2.2(e)-(h) referem-se ao elemento C^1 , ao passo que as Figuras E.2.2(i)-(l) referem-se ao elemento C^2 .

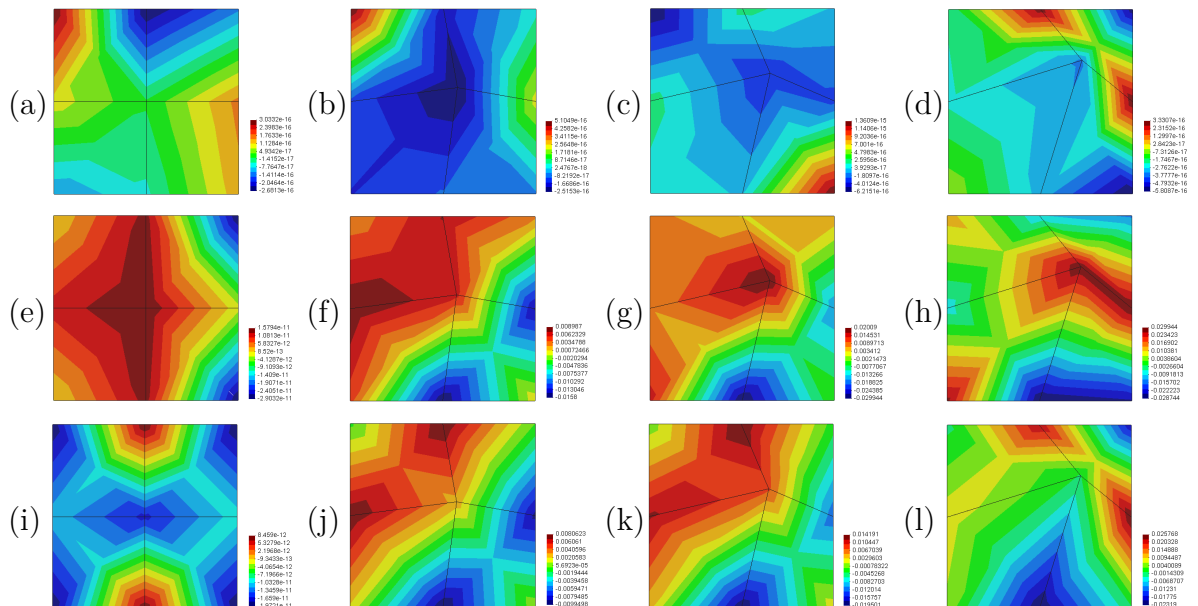


Figura E.2.2: Componente T_{22} do campo de tensões, para os quatro níveis de distorção de malha considerados, obtida com os elementos (a)-(d) C^0 Quad4, (e)-(h) C^1 , (i)-(l) C^2

O aspecto qualitativo da componente T_{12} do campo de tensões está mostrada nas Figuras E.2.3(a)-(l). As Figuras E.2.3(a)-(d) referem-se ao elemento C^0 Quad4, para as

malhas 1-4, respectivamente. As Figuras E.2.3(e)-(h) referem-se ao elemento C^1 , ao passo que as Figuras E.2.3(i)-(l) referem-se ao elemento C^2 .

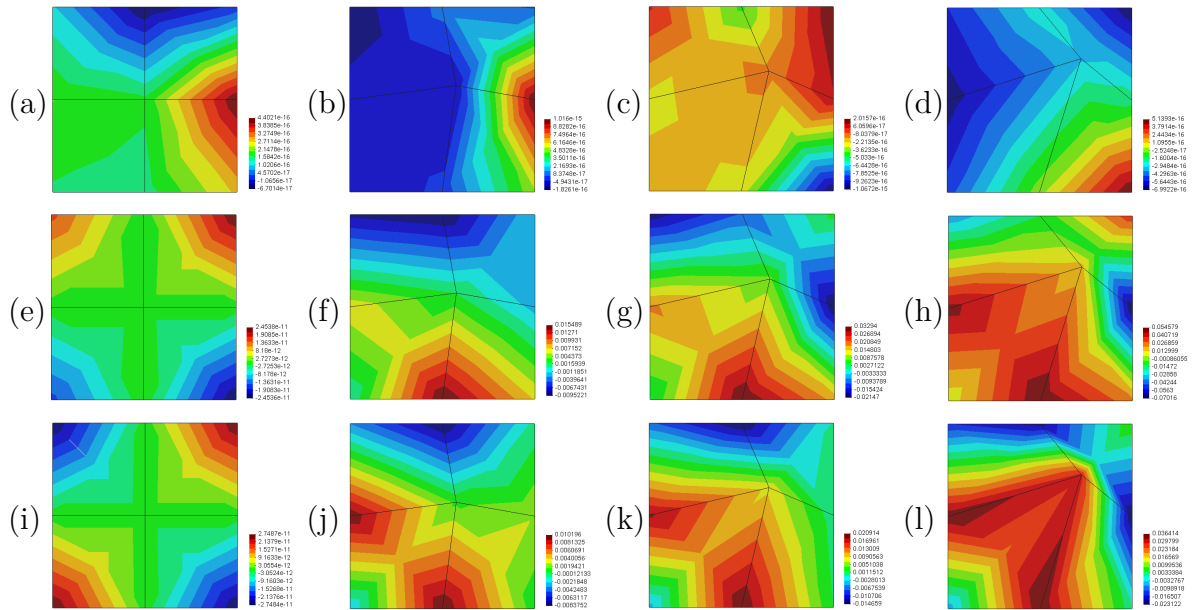


Figura E.2.3: Componente T_{12} do campo de tensões, para os quatro níveis de distorção de malha considerados, obtida com os elementos (a)-(d) C^0 Quad4, (e)-(h) C^1 , (i)-(l) C^2

O aspecto qualitativo da componente u_1 do campo de deslocamentos está mostrada nas Figuras E.2.4(a)-(l). As Figuras E.2.4(a)-(d) referem-se ao elemento C^0 Quad4, para as malhas 1-4, respectivamente. As Figuras E.2.4(e)-(h) referem-se ao elemento C^1 , ao passo que as Figuras E.2.4(i)-(l) referem-se ao elemento C^2 .

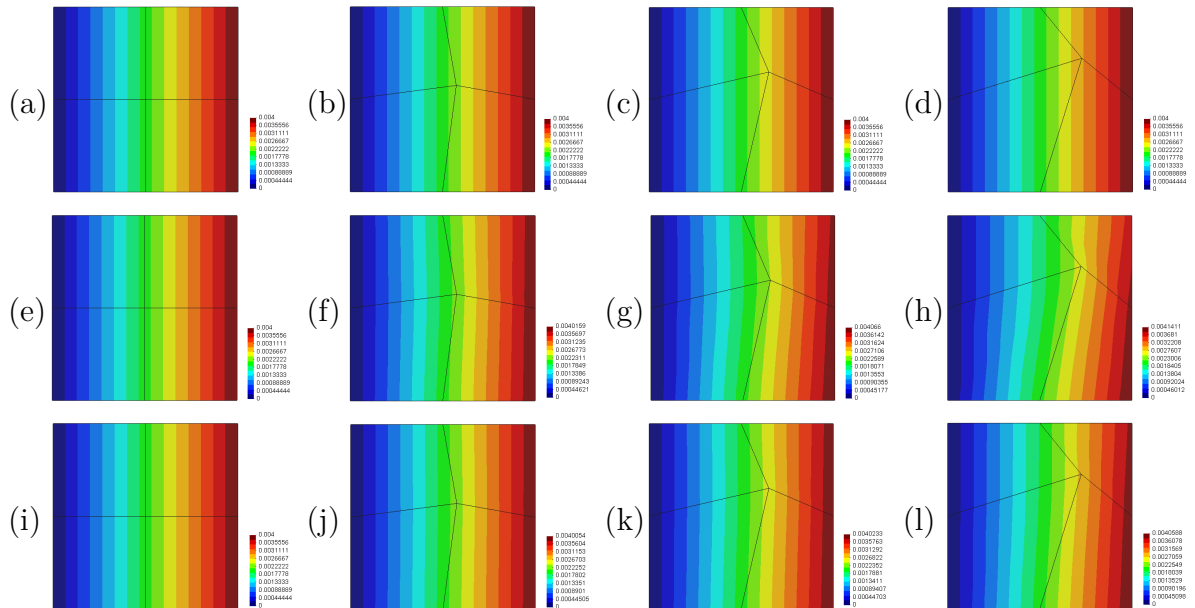


Figura E.2.4: Componente u_1 do campo de deslocamentos, para os quatro níveis de distorção de malha considerados, obtida com os elementos (a)-(d) C^0 Quad4, (e)-(h) C^1 , (i)-(l) C^2

O aspecto qualitativo da componente u_2 do campo de deslocamentos está mostrada nas Figuras E.2.5(a)-(l). As Figuras E.2.5(a)-(d) referem-se ao elemento C^0 Quad4, para as malhas 1-4, respectivamente. As Figuras E.2.5(e)-(h) referem-se ao elemento C^1 , ao passo que as Figuras E.2.5(i)-(l) referem-se ao elemento C^2 .

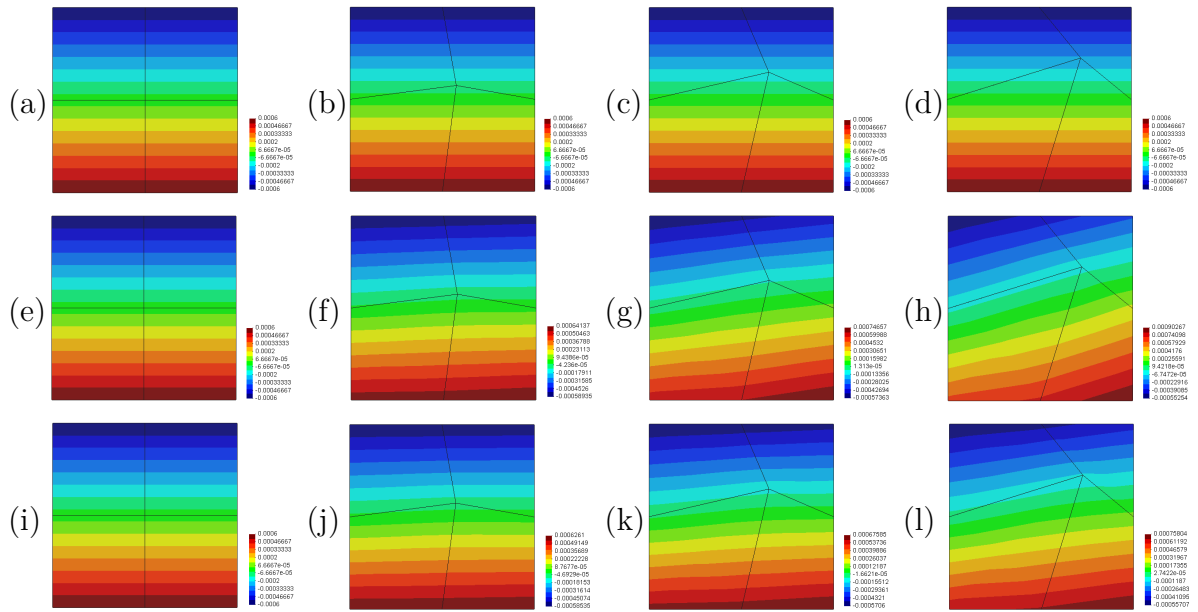


Figura E.2.5: Componente u_2 do campo de deslocamentos, para os quatro níveis de distorção de malha considerados, obtida com os elementos (a)-(d) C^0 Quad4, (e)-(h) C^1 , (i)-(l) C^2

APÊNDICE F - Resultados obtidos para o problema da viga em balanço com os elementos quadrilaterais C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2

Tabela F.1: Resultados referentes ao problema da viga em balanço para o elemento C^0 Quad4

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
102	0,01198780	0,107979	0,09377817	0,330125	4	$8,750 \cdot 10^4$
330	0,01304375	0,029399	0,09786381	0,172329	4	$3,461 \cdot 10^5$
686	0,01326027	0,013286	0,09868309	0,115851	4	$7,440 \cdot 10^5$
1170	0,01333779	0,007518	0,09897492	0,087146	4	$1,315 \cdot 10^6$

Tabela F.2: Resultados referentes ao problema da viga em balanço para o elemento C^0 Quad8

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
266	0,01343867	$2,2 \cdot 10^{-5}$	0,09934834	0,01077	16	$7,876 \cdot 10^5$
914	0,01343880	$2,5 \cdot 10^{-6}$	0,09935374	0,002697	16	$2,961 \cdot 10^6$
1946	0,01343881	$7,3 \cdot 10^{-7}$	0,09935403	0,001199	16	$6,319 \cdot 10^6$
3362	0,01343881	$3,0 \cdot 10^{-7}$	0,09935408	0,000675	16	$1,124 \cdot 10^7$

Tabela F.3: Resultados referentes ao problema da viga em balanço para o elemento C^1

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
408	0,01345795	0,001448	0,09935836	0,014222	16	$1,295 \cdot 10^5$
1320	0,01344500	0,000469	0,09935562	0,006508	16	$4,442 \cdot 10^5$
2744	0,01344169	0,000218	0,09935494	0,004458	16	$9,355 \cdot 10^5$
4680	0,01344045	0,000124	0,09935468	0,003578	16	$1,567 \cdot 10^6$

Tabela F.4: Resultados referentes ao problema da viga em balanço para o elemento C^2

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
918	0,01345068	0,000889	0,09935616	0,019623	36	$3,229 \cdot 10^8$
2970	0,01344341	0,000345	0,09935563	0,008737	36	$1,376 \cdot 10^8$
6174	0,01344100	0,000164	0,09935522	0,006106	36	$1,234 \cdot 10^8$
10530	0,01344007	0,000095	0,09935498	0,004958	36	$9,049 \cdot 10^7$

APÊNDICE G - Resultados obtidos para o problema da placa infinita com furo central com os elementos quadrilaterais C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2

Tabela G.1: Resultados referentes ao problema da placa infinita com furo central para o elemento C^0 Quad4

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
126	$7,73566 \cdot 10^{-5}$	0,057659	0,01100716	0,112976	4	208,89
442	$7,93327 \cdot 10^{-5}$	0,018235	0,01108318	0,061793	4	815,53
864	$7,97968 \cdot 10^{-5}$	0,009035	0,01110015	0,043825	4	1672,69
1536	$7,99926 \cdot 10^{-5}$	0,005156	0,01110718	0,033048	4	3150,27

Tabela G.2: Resultados referentes ao problema da placa infinita com furo central para o elemento C^0 Quad8

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
346	$7,99773 \cdot 10^{-5}$	0,005842	0,01110734	0,037580	16	1886,28
1266	$8,02338 \cdot 10^{-5}$	0,000437	0,01111582	0,010208	16	7640,04
2508	$8,02487 \cdot 10^{-5}$	0,000109	0,01111630	0,004935	16	16357,11
4496	$8,02518 \cdot 10^{-5}$	0,000037	0,01111640	0,002723	16	30775,85

Tabela G.3: Resultados referentes ao problema da placa infinita com furo central para o elemento C^1

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
504	$7,90119 \cdot 10^{-5}$	0,023216	0,01106563	0,054734	16	2210,65
1768	$7,98215 \cdot 10^{-5}$	0,008068	0,01109941	0,033437	16	2469,43
3456	$8,00235 \cdot 10^{-5}$	0,004274	0,01110747	0,026395	16	2604,35
6144	$8,00963 \cdot 10^{-5}$	0,002952	0,01111042	0,023510	16	4095,63

Tabela G.4: Resultados referentes ao problema da placa infinita com furo central para o elemento C^2

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
1134	$7,91477 \cdot 10^{-5}$	0,021097	0,01107183	0,058922	36	$6,703 \cdot 10^7$
3978	$7,98893 \cdot 10^{-5}$	0,006964	0,01110258	0,025619	36	$8,917 \cdot 10^7$
7776	$8,00706 \cdot 10^{-5}$	0,003574	0,01110963	0,018418	36	$1,028 \cdot 10^8$
13824	$8,01366 \cdot 10^{-5}$	0,002321	0,01111220	0,015681	36	$9,154 \cdot 10^7$

APÊNDICE H - Resultados obtidos para o problema do domínio *L-shaped* com os elementos quadrilaterais C^0 Quad4, C^0 Quad8, C^1 e C^2

Tabela H.1: Resultados referentes ao problema do domínio *L-shaped* para o elemento C^0 Quad4

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
56	$5,7120 \cdot 10^{-6}$	0,563441	$4,8510 \cdot 10^{-3}$	0,328930	4	327,26
90	$6,1378 \cdot 10^{-6}$	0,489924	$4,9172 \cdot 10^{-3}$	0,295392	4	629,12
132	$6,4646 \cdot 10^{-6}$	0,435706	$4,9612 \cdot 10^{-3}$	0,270575	4	1027,47
182	$6,7193 \cdot 10^{-6}$	0,394243	$4,9928 \cdot 10^{-3}$	0,251102	4	1525,87

Tabela H.2: Resultados referentes ao problema do domínio *L-shaped* para o elemento C^0 Quad8

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
146	$6,8927 \cdot 10^{-6}$	0,371327	$5,0096 \cdot 10^{-3}$	0,235078	16	3688,77
242	$7,2594 \cdot 10^{-6}$	0,310011	$5,0522 \cdot 10^{-3}$	0,204330	16	6574,40
362	$7,5061 \cdot 10^{-6}$	0,269261	$5,0785 \cdot 10^{-3}$	0,182752	16	10411,30
506	$7,6825 \cdot 10^{-6}$	0,240118	$5,0962 \cdot 10^{-3}$	0,166605	16	15247,31

Tabela H.3: Resultados referentes ao problema do domínio *L-shaped* para o elemento C^1

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
224	$9,0573 \cdot 10^{-6}$	0,198669	$5,2815 \cdot 10^{-3}$	0,217276	16	5065,21
360	$8,7346 \cdot 10^{-6}$	0,148448	$5,2111 \cdot 10^{-3}$	0,155272	16	5427,76
528	$8,6264 \cdot 10^{-6}$	0,127489	$5,1884 \cdot 10^{-3}$	0,126204	16	5639,57
728	$8,5894 \cdot 10^{-6}$	0,115485	$5,1795 \cdot 10^{-3}$	0,109464	16	5790,04

Tabela H.4: Resultados referentes ao problema do domínio *L-shaped* para o elemento C^2

n_{GL}	$\ u^h\ _{L_2}$	η_{L_2}	$\ u^h\ _E$	η_E	n_{PI}	$c(K_{ij})$
504	$9,2454 \cdot 10^{-6}$	0,196809	$5,3020 \cdot 10^{-3}$	0,212947	36	$2,098 \cdot 10^8$
810	$8,8727 \cdot 10^{-6}$	0,139346	$5,2252 \cdot 10^{-3}$	0,148978	36	$1,223 \cdot 10^8$
1188	$8,7391 \cdot 10^{-6}$	0,116441	$5,1993 \cdot 10^{-3}$	0,119290	36	$1,475 \cdot 10^8$
1638	$8,6860 \cdot 10^{-6}$	0,104216	$5,1884 \cdot 10^{-3}$	0,102421	36	$6,597 \cdot 10^8$