

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Decaimentos de Mésons Leves de Sabor Aberto no Modelo C^3P_0 *

Joseima Neves de Quadros

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef (IFM-UFPEL) e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
Março de 2008.

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Este trabalho é dedicado

a meu marido, Everton,
pelo apoio e incentivo que
sempre me deu.

Agradecimentos

★ Ao meu orientador, Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef, pela orientação dedicada, pelos questionamentos e discussões que foram muito importantes para a realização e organização deste trabalho.

★ Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de mestrado.

★ Ao meu marido, Everton, por me apoiar e incentivar no prosseguimento de meus estudos.

★ À minha família pelo apoio, amor e principalmente compreensão pela minha ausência.

★ Aos amigos Mario e Daniel pelo auxílio na realização deste trabalho.

★ Aos amigos que fiz na pós-graduação que contribuíram para uma agradável convivência no IF-UFRGS.

★ Aos professores e colegas do Departamento de Física da UFPel, que deram todo o incentivo para que este sonho se tornasse realidade.

★ Aos professores e funcionários do IF-UFRGS, que de alguma forma contribuíram para a minha formação e para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

A representação de Fock-Tani é um formalismo de teoria de campos para tratar problemas envolvendo simultaneamente partículas compostas e seus constituintes. O formalismo foi originalmente desenvolvido para tratar problemas de física atômica e mais tarde estendido para problemas da física hadrônica. Nesta dissertação, inicialmente apresentamos uma breve revisão da Cromodinâmica Quântica e um detalhado estudo dos modelos de decaimentos. Revisamos também a representação de Fock-Tani para mésons, mostrando como o formalismo se modifica quando se inclui processos de decaimento de mésons.

Há muito tempo os *modelos de criação de pares* para decaimentos hadrônicos fortes têm sido formulados. O modelo 3P_0 é um típico modelo de decaimento que considera apenas decaimentos do tipo OZI-permitidos para as interações fortes. O modelo descreve a criação de um par quark-antiquark adicional na presença do méson do estado inicial. Neste modelo o par quark-antiquark criado tem os números quânticos do vácuo e é descrito pelo limite não-relativístico de um Hamiltoniano de criação de par. A aplicação da transformação de Fock-Tani ao Hamiltoniano de criação de par produz a característica expansão em potências da função de onda, onde o modelo 3P_0 é o resultado da ordem mais baixa desta expansão. O modelo 3P_0 corrigido (C^3P_0) é obtido em ordens mais altas da expansão, pela introdução do *kernel de estado ligado* Δ , chamado de correção de ortogonalidade.

O objetivo deste trabalho é estudar detalhadamente o setor de méson leves usando o modelo C^3P_0 . Em particular, obter as amplitudes e taxas de decaimento dos seguintes canais: $\rho \rightarrow \pi + \pi$, $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$, $a_2 \rightarrow \rho + \pi$, $h_1 \rightarrow \rho + \pi$, $f_0 \rightarrow \pi + \pi$, $f_2 \rightarrow \pi + \pi$. A razão D/S será obtida para os decaimentos $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$ e $h_1 \rightarrow \rho + \pi$.

Abstract

Fock-Tani is a field theory formalism appropriated for the simultaneous treatment of composite particles and their constituents. The formalism was originally developed for the treatment of problems in atomic physics and it was extended later on to the treatment of problems on hadron physics. In this dissertation, we initially present a brief review of Quantum Chromodynamics and a more detailed survey of the decay models. We also review the Fock-Tani formalism applied to mesons, demonstrating how the formalism is modified in order to include meson decay.

For a long time *the pair creation models* for strong hadronic decays have been formulated. The 3P_0 model is typical decay model which considers only OZI-allowed strong decays. The model considers a quark-antiquark pair creation in the presence of the initial state meson. The quark-antiquark pair is created with the vacuum quantum numbers and is described as the non-relativistic limit of the pair creation Hamiltonian. Applying the Fock-Tani transformation to the pair creation Hamiltonian produces the characteristic expansion in powers of the wave function, where the 3P_0 model is the lowest order term of this expansion. The corrected 3P_0 model (C^3P_0) is obtained from higher orders in the expansion, by the introduction of the *bound state kernel* Δ , called the orthogonality correction.

The goal of this dissertation is to study, in detail, the light meson sector using the C^3P_0 model. In particular, calculate the decay amplitudes and decay rates of the following channels $\rho \rightarrow \pi + \pi$, $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$, $a_2 \rightarrow \rho + \pi$, $h_1 \rightarrow \rho + \pi$, $f_0 \rightarrow \pi + \pi$, $f_2 \rightarrow \pi + \pi$. The D/S ratios will be calculated for the following decays: $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$, $h_1 \rightarrow \rho + \pi$.

Índice

Introdução	1
1. A Física de Mésons e o Modelo de Decaimento 3P_0	10
1.1 Introdução	10
1.2 Os Mésons e os seus Números Quânticos	11
1.2.1 As paridades de um méson	11
1.2.2 Um exemplo: o decaimento $a_2^0 \rightarrow \eta + \pi^0$	14
1.3 A física dos mésons do ponto de vista experimental	17
1.3.1 BaBar	17
1.3.2 Belle	20
1.3.3 Cleo	21
1.3.4 Jefferson Lab e o Hall D	22
1.4 Modelo de Decaimento 3P_0	24
2. O Formalismo de Fock-Tani para Mésons e o Decaimento Mesônico	32
2.1 O Formalismo de Fock-Tani	32
2.1.1 Espaço de Vetores de Estados Ideais	35
2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais	37
2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores.	39
2.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores	39
2.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”	40
2.3 Hamiltoniano de Decaimento Mesônico de Fock-Tani	49
2.4 O modelo 3P_0 corrigido (C^3P_0)	53
3. Amplitudes e Taxas de Decaimentos	57
3.1 Decaimento $\rho \rightarrow \pi\pi$	57
3.1.1 Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$ sem Correção de Ortogonalidade	57
3.1.2 Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$ com Correção de Ortogonalidade	62
3.2 Decaimento $b_1 \rightarrow \omega\pi$	68

3.2.1	Decaimento $b_1^+ \rightarrow \omega\pi^+$ sem Correção de Ortogonalidade	68
3.2.2	Decaimento $b_1^+ \rightarrow \omega\pi^+$ com Correção de Ortogonalidade	71
3.3	Resultados analíticos dos processos de decaimentos	76
3.4	Resultados numéricos dos processos de decaimentos	78
3.4.1	O Método da Hiperesfera	80
3.4.2	Ajuste usando um méson calibrador	82
Conclusões e Perspectivas		86
A. Notação e Convenções		88
B. Função de Onda do Méson		92
C. Cálculo de Comutadores		97
D. Cálculo do Potencial Spin-espaco $V_{\mu\nu}^{s-e}$		104
E. Cálculo do Elemento de Matriz de Spin do Decaimento f_0		107
Referências		111

Introdução

A física de mésons e o estudo da interação forte estão profundamente conectados desde o advento do méson π , introduzido teoricamente por Yukawa (1935) e detectado experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell (1947).

A teoria fundamental das interações fortes é a Cromodinâmica Quântica, uma teoria de campos de calibre, não-Abeliana e que descreve as interações entre quarks e glúons. É tradicional, inclusive na comunidade brasileira de Física Hadrônica, Partículas Elementares e Teoria Quântica de Campos, referir-se a esta teoria pela sigla inglesa *QCD* associada à expressão *Quantum Chromodynamics*. O mesmo ocorre para a Eletrodinâmica Quântica, cuja a sigla em inglês é *QED* (Quantum Electrodynamics). Nesta dissertação adotaremos estas convenções.

Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman propuseram em 1961 um esquema de classificação e ordenamento da, já então extraordinária, quantidade de bárions e mésons conhecidos na natureza, denominado de Método dos Octetos (Eightfold Way). Este método, baseado na teoria matemática do grupo de simetria $SU(3)$ (o S significa *Special*, o U significa *Unitary* e o três designando a quantidade de elementos básicos da teoria), tinha como propósito descrever a estrutura intrínseca das partículas fortemente interagentes em termos de entidades fundamentais, os blocos elementares de construção de mésons e bárions.

Alguns anos mais tarde, Gell-Mann denominou estes blocos elementares de quarks, adotando o termo após a leitura de um trecho do romance “Finnegans Wake”, de James Joyce (1882-1941). Na proposta, um quark tinha carga elétrica $2/3$ da carga do próton e os outros dois quarks $-1/3$. Entre 1967 e 1973, usando o Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), Jeromes Isaac Frideman, Henri W. Kendall e Richard E. Taylor notaram que o espalhamento de elétrons por prótons e nêutrons indicava que estes eram compostos por partículas menores, com valores para suas cargas elétricas consistentes com a teoria de quarks. Os três receberam o prêmio Nobel de física, em 1990, pela descoberta. Gell-Mann então identificou na teoria de grupos $SU(3)$ o elemento três como o número de sabores dos quarks fundamentais e buscou à época confirmar, de maneira indireta, através de operações lógicas envolvendo esta teoria, a existência dos quarks. Com aquela identificação do papel dos quarks como elementos do grupo $SU(3)$, tornou-se possível, através da atribuição *a*

priori de algumas propriedades físicas fundamentais aos quarks (como por exemplo cargas fracionárias, caráter fermiônico entre outros), a determinação de propriedades físicas dos hádrons então conhecidos a partir da composição das respectivas propriedades de seus elementos constituintes. Por exemplo, o caráter fermiônico atribuído aos quarks, isto é, spins intrínsecos semi-inteiros; a partir da adição vetorial dos spins de três quarks constituintes é possível determinar-se o spin do hádron correspondente. Através de procedimentos desta natureza, e da comparação das previsões físicas com os dados experimentais de propriedades intrínsecas dos hádrons, o número de quarks e algumas de suas propriedades, como por exemplo sua massa, puderam ser então inferidas.

Gell-Mann postulou então que havia três sabores de quarks na natureza, designados u , d e s , com cargas elétricas fracionárias. Os quarks u e d compõem a matéria ordinária (formada por prótons e nêutrons) enquanto que os quarks s compõem, por exemplo, o méson *kaon*, bem como uma enorme quantidade de outras partículas de vida curta encontradas nos raios cósmicos ou produzidas em reações de altas energias. De maneira independente, e no mesmo ano, George Zweig desenvolveu uma teoria similar à de Gell-Mann e denominou os elementos fundamentais da teoria de azes.

A presença da cor originou uma teoria que apresenta similaridades, em muitos aspectos, com a Eletrodinâmica Quântica. Nesta última, a presença de partículas carregadas origina uma interação mediada por partículas neutras, de massa nula, denominadas de fótons. Similarmente, a interação entre os quarks se dá através da troca de partículas, também de massa nula, que carregam carga de cor, denominadas de glúons (da palavra inglesa *glue* = cola). Evidentemente a cor de um quark (ou glúon) são nomenclaturas que não têm nada a ver com as cores do espectro eletromagnético. Estes nomes estão associados a um tipo de carga forte cuja natureza, embora ainda não bem compreendida, apresenta algumas características especiais: quarks e glúons, em condições normais, estão em regiões de baixas energias absolutamente confinados no interior dos bárions e mésons; jamais foram observados como partículas livres na natureza, independentemente da intensidade da interação externa utilizada para isolá-los. Apenas para exemplificar, prótons e nêutrons, constituídos por três quarks elementares, fazem parte da família dos bárions, enquanto os mésons, do qual o pión é a partícula mais conhecida, são constituídos de pares quark-antiquark. A existência destes quarks é inferida de maneira indireta através de experiências especiais como, por exemplo, em processos de colisões de elétrons altamente energéticos com prótons ou nêutrons e que envolvem, neste caso, a observação da distribuição angular dos elétrons espalhados. Os resultados experimentais são compatíveis, nestes casos, com a presença de três centros pontuais de espalhamento no interior dos prótons e nêutrons. Em síntese, em nível sub-nuclear, prótons e nêutrons revelam assim ricas estruturas interiores, sendo constituídos então por três quarks que carregam cores e cargas de cor, e interagem através da troca de

glúons.

As denominações cor e carga de cor foram propostas em 1965 por Moo-Young Han e Yoichiro Nambu onde os quarks poderiam possuir uma das três cores fundamentais, vermelho, verde e azul e as suas antipartículas, os antiquarks, as anticolors antivermelha (ou ciano), antiverde (ou majenta) e antiazul (ou amarelo). Estas designações são utilizadas para caracterizar o fato de que, devido ao confinamento, a propriedade da cor não é observada quando mésons e bárions são tratados como partículas elementares. Similarmente à cor branca, formada pelas três cores fundamentais do espectro eletromagnético, as cores de três quarks, formando um bárion elementar, ou de um par quark-antiquark, formando um méson elementar, se recombinariam originando uma cor neutra para os bárions e os mésons.

Os diferentes tipos (sabores) de quarks hoje conhecidos são representados pelas letras u, d, c, s, t, b, para designar, na nomenclatura inglesa, as palavras: *up* (u), *down* (d), *charm* (c), *strange* (s), *top* (t) e *bottom* (b). Os quarks t e b são também denominados de truth (verdade) e beauty (beleza). Os quarks são assim partículas com sabor, charme, estranheza, beleza, verdade e cor...

A QCD é presentemente a mais importante candidata à teoria fundamental da interação forte. A interação forte em nível sub-nuclear, envolvendo portanto cargas de cor, é uma das quatro interações fundamentais encontradas na natureza juntamente com as interações gravitacional, fraca e eletromagnética. A QCD prediz que a interação forte apresenta, adicionalmente ao confinamento, uma característica única na natureza, a chamada *liberdade assintótica*. Esta predição da QCD, experimentalmente confirmada, indica que os quarks são assintoticamente livres (para grandes valores de momentum transferidos ou, equivalentemente, quando muito próximos uns dos outros). Este fato permite o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite.

Como foi mencionado, na região de baixas energias (distâncias longas), e que corresponde ao domínio da física nuclear, os quarks apresentam-se em estados fortemente ligados e os hádrons aparecem como singletos de cor. Os mésons apresentam-se com os graus de liberdade ideais para o estudo de regimes fortemente acoplados e não-perturbativos da interação forte, pois diretamente da QCD pouco é conhecido sobre os estados físicos da teoria.

O nosso conhecimento sobre a física hadrônica, em larga escala, é baseada em modelos fenomenológicos, em particular no chamado *modelo de quarks constituintes*. A espectroscopia de mésons e bárions é surpreendentemente bem descrita se considerarmos os hádrons como compostos por estes tipos de quarks (também chamados de quarks de valência). Além do tipo usual de méson descrito pelo modelo de quarks, isto é, composto por um par $q\bar{q}$, a QCD prevê a existência de estados em que os graus de liberdade dos glúons aparecem explicitamente. Os hádrons formados apenas por glue são chamados de *glueballs*. Em

outras palavras os glueballs são hádrons, mas não possuem quarks na sua constituição. Um outro tipo de hádron previsto em teoria é um que mistura graus de liberdade de quarks constituintes com graus de liberdade de glúons constituintes. Estes hádrons são denominados de *híbridos*. Tanto os glueballs quanto os hádrons híbridos representam o que é classificado de novos estados hadrônicos ou muitas vezes apresentados na literatura sob o nome *hádrons exóticos*.

Na década de '70 iniciou-se um vigoroso estudo sobre as propriedades de decaimentos de *mésons leves*. Embora esta denominação não seja rigorosa, entende-se por méson leve os mésons apresentados na tabela (0.1). Há outros mésons que, na literatura, também se encaixam nesta classificação [1], porém na tabela (0.1) há um conjunto representativo dos mais leves, sendo alguns destes objeto do estudo nesta dissertação. A primeira coluna desta tabela apresenta o estado físico na notação usual da espectroscopia, ou seja, $^{2S+1}L_J$. Nas demais colunas temos o spin S , o momento angular L , o momento angular total J , a paridade P , a conjugação de carga C . A importância destas quantidades na identificação e classificação dos hádrons será discutida no próximo capítulo.

Estado	S	L	J	P	C	J^{PC}	Mésons	Tipo
1S_0	0	0	0	-	+	0^{-+}	π, η, η', K	pseudo-escalar
3S_1	1	0	1	-	-	1^{--}	ρ, ω, ϕ, K^*	vetor
1P_1	0	1	1	+	-	1^{+-}	b_1, h_1, h'_1, K_1	pseudo-vetor
3P_0	1	1	0	+	+	0^{++}	a_0, f_0, f'_0, K_0^*	escalar
3P_1	1	1	1	+	+	1^{++}	a_1, f_1, f'_1, K_1	vetor-axial
3P_2	1	1	2	+	+	2^{++}	a_2, f_2, f'_2, K_2^*	tensor

Tab. 0.1: *Mésons leves*

No estudo dos decaimentos há dois tipos fundamentais de processos elementares de decaimentos onde o mecanismo básico é a criação de um par $q\bar{q}$ a partir do vácuo, juntamente com uma recombinação de linhas de quarks. Esta vai ser a essência do modelo 3P_0 a ser estudado neste trabalho e que será descrito no próximo capítulo. Um processo é dito ser proibido pela *regra de Okubo-Zweig-Iizuka* (ou OZI-proibido) quando um diagrama de linha de quarks pode ser dividido em partes e estas partes conter apenas hádrons completos (singletos de cor) sem cortar a linha de quarks (Fig. 0.1). Caso contrário diz-se que o processo é OZI-permitido (Fig. 0.2). Os processos OZI-proibidos são fortemente suprimidos e não representam os canais principais de decaimento.

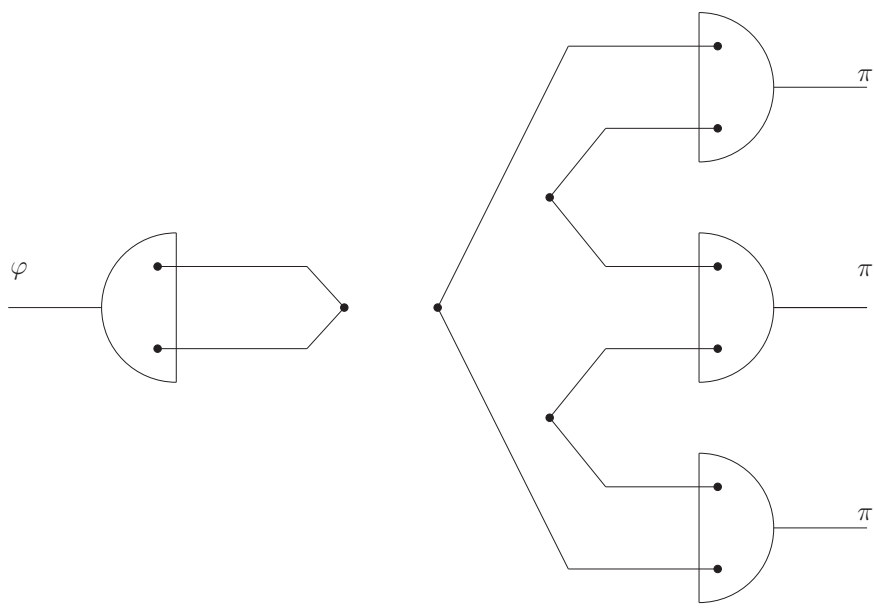


Fig. 0.1: Um processo OZI-proibido, exemplo: $\varphi \rightarrow \pi\pi\pi$

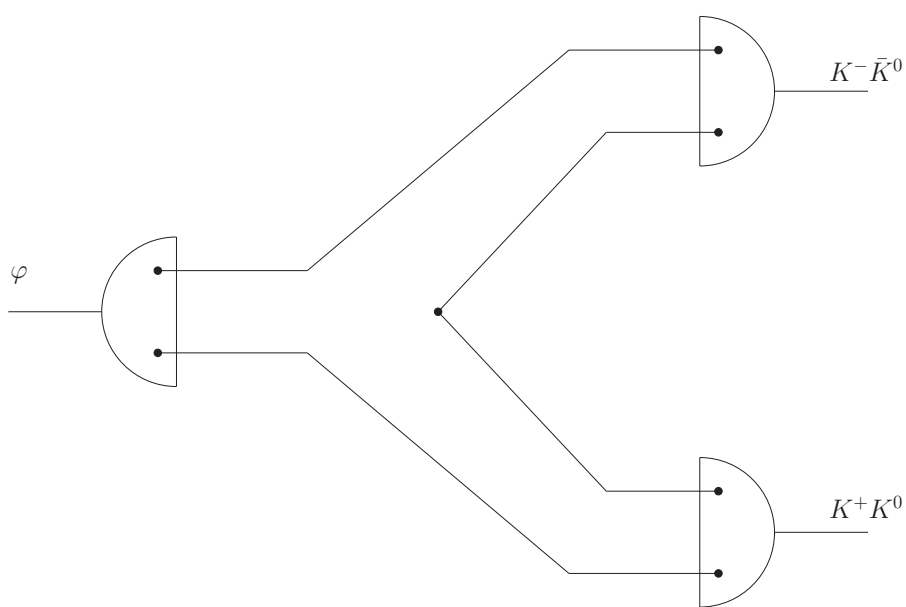


Fig. 0.2: Um processo OZI-permitido, exemplo: $\varphi \rightarrow K\bar{K}$

A espectroscopia hadrônica, por sua vez, desenvolveu uma nomenclatura própria para descrever os diversos setores dos hádrons, por exemplo *quarkônio estranho* são mésons leves (u, d, s) com ao menos um quark ou antiquark estranho na sua componente $q\bar{q}$ de valência. Estes mésons são chamados de *kaônio* se o estado de base dominante é $n\bar{s}$ (onde $n \equiv u, d$) e *antikaônio* se $s\bar{n}$ e *estranhônio* se $s\bar{s}$. Um estado ligado $c\bar{c}$ é, por sua vez, denominado de *charmônio*. De um modo geral quando um méson é composto por dois quarks de sabores diferentes (por exemplo, $d\bar{s}$) ele é chamado de *méson de sabor aberto*. O respectivo *méson de sabor fechado* é o *estranhônio*, *charmônio*, etc.

Historicamente, a grande explosão no conhecimento sobre a espectroscopia hadrônica iniciou-se após a chamada *Revolução de Novembro* [2], há mais de 30 anos, com a descoberta do méson J/ψ . Esta descoberta conseqüentemente implicou na confirmação da existência de um novo quark: o charme. Hoje, um dos desafios consiste em descrever a espectroscopia do setor de charme sob a luz da descoberta do enigmático méson escalar $D_{s0}(2317)$, anunciado por BaBar em abril (2003) [3] e do méson vetorial $D_{s1}(2460)$ por CLEO [4] em agosto (2003). Estas descobertas demonstram que o modelo de potencial de quarks não é tão preciso quanto se imaginava. Nesta abordagem os mésons são descritos por um estado ligado formado por um par $q\bar{q}$, movendo-se sob o efeito do potencial. Os potenciais típicos usados no modelo são o potencial de Coulomb de cor com confinamento linear, acrescentado de interações dependentes de spin com troca de um glúon. Por exemplo, o estado escalar D_{s0} formado por um par $c\bar{s}$ é previsto, pelo modelo, a aparecer com uma massa de 2.48 GeV [5]. Entretanto, este valor está aproximadamente 160 MeV acima da massa experimental do $D_{s0}(2317)$. Antes desta descoberta as discrepâncias no setor de charme eram da ordem de apenas 10 MeV. Uma explicação existente na literatura descreve estas discrepâncias como de origem dinâmica relacionada com um acoplamento forte do D_{s0} ao canal DK (canal do estado ligado do méson D com o méson K, e que é previsto teoricamente) para um decaimento em onda-S na região de massa de 2360 MeV. Nesta interpretação sugere-se a existência da molécula hadrônica formada pelos mésons charmosos D com o káons K [6], como é visto na Fig. (0.3). Como ilustração, pode-se ver a concordância global do modelo de quarks com a experiência na Fig. (0.4) [7].

Nesta dissertação, faremos um estudo da fenomenologia dos mésons leves sob a luz do modelo C^3P_0 deduzido na dissertação de mestrado de Daniel Tavares da Silva [8]. Este será um estudo exploratório onde as bases deste modelo serão expandidas em relação ao estudo inicial desenvolvido em [8]. A idéia geral deste modelo consiste em perceber que os mésons são estados ligados entre quarks e antiquarks e que nos decaimentos esta informação sobre a sua estrutura interna não pode ser desconsiderada. Há muitos exemplos de sistemas nos quais os graus de liberdade internos de partículas compostas não podem ser desprezados. Para estes sistemas o formalismo em segunda quantização da mecânica quântica torna-se

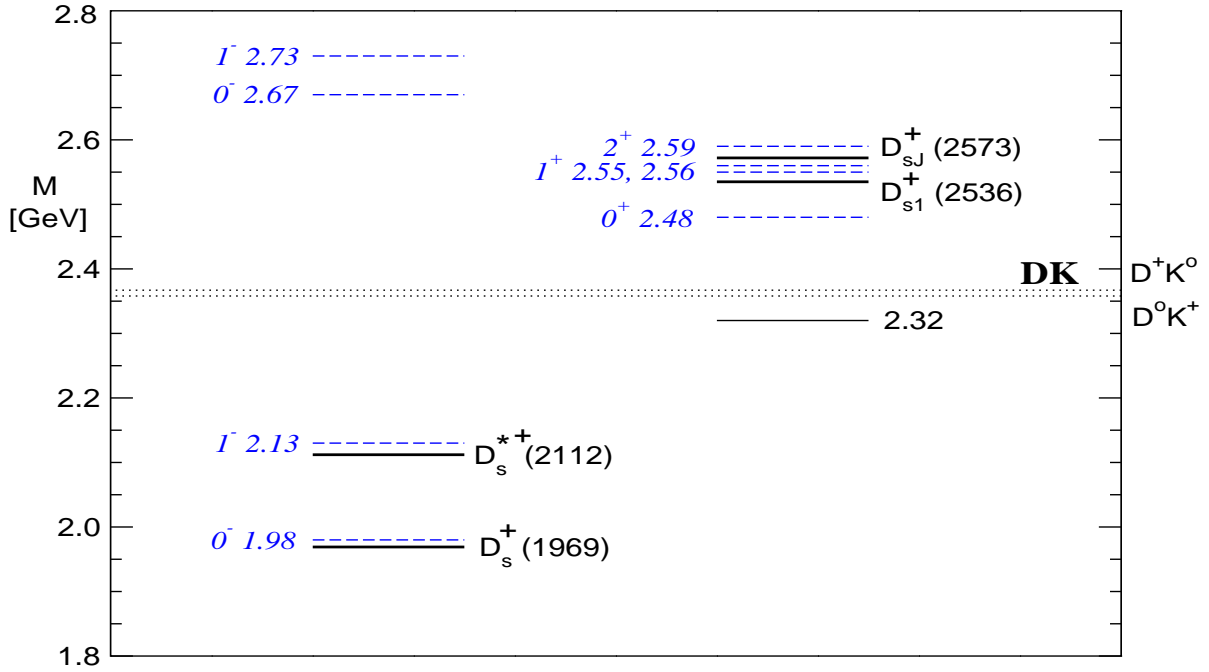


Fig. 0.3: *Espectro experimental (sólido) e teórico (tracejado) dos mésons $c\bar{s}$. O limiar DK e o estado 2.32 GeV do Laboratório BaBar também são mostrados [6].*

uma ferramenta matemática muito difícil de ser usada, uma vez que a presença de estados ligados torna mais complexa a aplicação direta do teorema de Wick, bem como o cálculo de funções de Green entre outros aspectos.

Por isso, foi desenvolvida a idéia de fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert ideal onde as partículas compostas são representadas por operadores elementares ideais, obedecendo regras de comutação canônicas. A informação sobre a sua estrutura interna é transferida para um Hamiltoniano de interação efetivo. O desenvolvimento posterior de uma transformação capaz de realizar este mapeamento foi conseguido por S. Tani [9] e generalizado por M. D. Girardeau [10]. Esta transformação generalizada construída por Girardeau e colaboradores [11]-[19], sendo por eles denominada de *transformação de Fock-Tani*, está relacionada com o método de quasi-partícula de Weinberg [20, 21], onde os estados ligados são subtraídos do problema, restando apenas uma interação residual fraca.

Os operadores de criação e destruição de partículas compostas não obedecem relações de (anti)comutação canônicas, devido à presença da estrutura interna. Após realizar a transformação unitária de Fock-Tani U sobre o operador de criação do estado ligado, um novo estado ligado é obtido sendo definido como a aplicação de um operador de criação ideal sobre o vácuo. Os operadores ideais obedecem a relações de (anti)comutação canônicas.

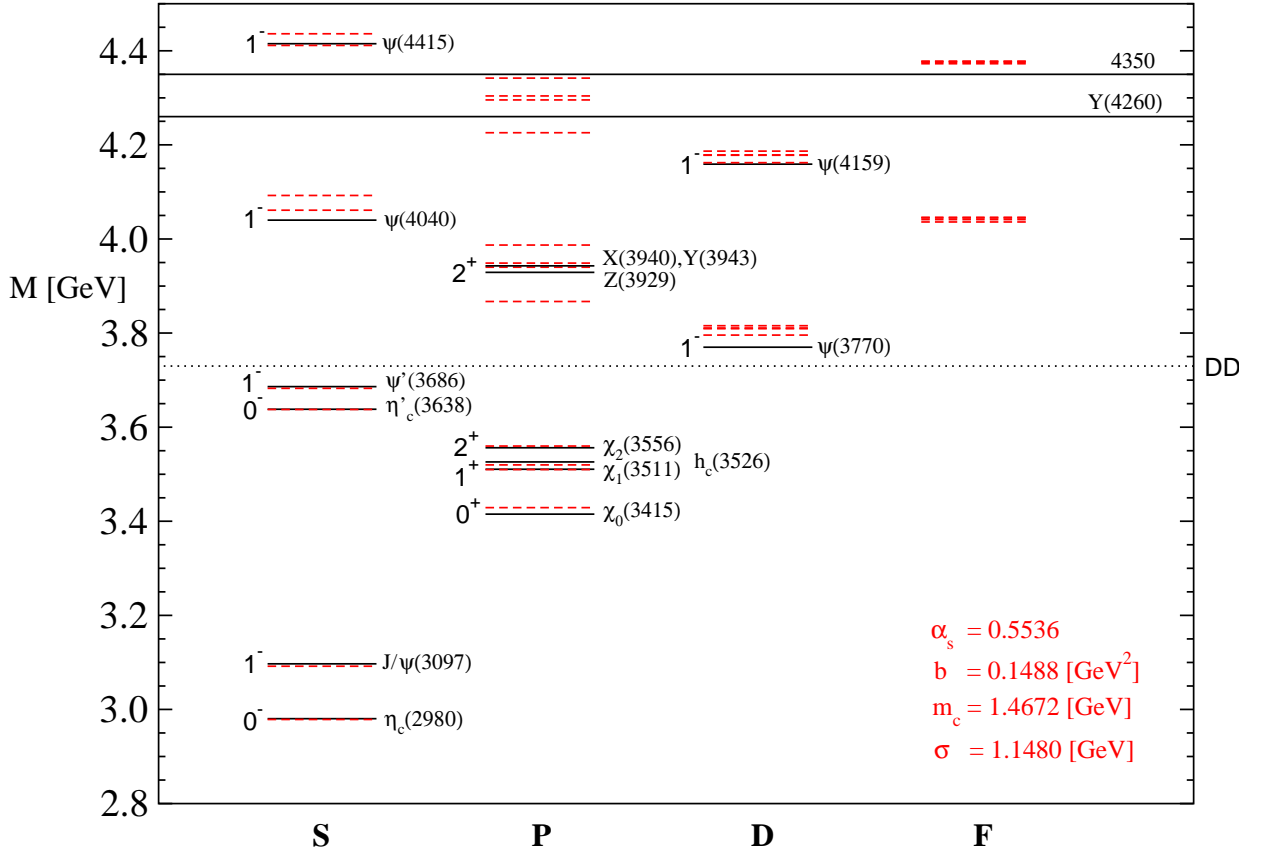


Fig. 0.4: *O conhecimento experimental atual sobre a espectroscopia do charmônio (e possíveis mésons híbridos) em comparação às previsões do modelo de potencial não-relativístico. As linhas sólidas são experimentais e as linhas tracejadas são teóricas [7].*

Além de se transformar o estado, também se efetua a transformação dos operadores da teoria (operadores de quarks, mésons, bárions, glueballs, entre outras partículas) obtendo-se, de forma iterativa, uma expansão em potências da função de onda. Com estes operadores efetivos torna-se possível construir quantidades efetivas em termos das quantidades fundamentais. Uma destas quantidades efetivas importantes que podem ser construídas é o Hamiltoniano $H_{efetivo} = U^{-1}HU$ que possui, entre outras estruturas, diagramas correspondendo a espalhamentos hadrônicos com troca de constituintes, decaimentos, etc.

Desta forma pretende-se, neste trabalho de mestrado, usar o novo modelo para decaimentos de mésons, o modelo C^3P_0 , para estudar uma série de processos. O modelo consagrado na literatura e que obtém, de um modo geral, o maior sucesso na descrição dos processos de decaimento é chamado de modelo 3P_0 . Os resultados deste modelo podem ser obtidos partindo do limite não-relativístico de um Hamiltoniano de criação de par a partir

do vácuo, que será apresentado no próximo capítulo, calculando o respectivo elemento de matriz. O modelo que nós utilizamos neste trabalho, o modelo C^3P_0 , tem origem aplicando a transformação de Fock-Tani sobre este Hamiltoniano de criação de par. O Hamiltoniano efetivo de Fock-Tani H_{FT} , em ordem mais baixa da teoria transformada, reproduz os resultados da literatura com o modelo 3P_0 . Entretanto, na estrutura da teoria efetiva representada por $H_{efetivo}$, há contribuições que se originam em ordens mais altas da transformação. Desta forma a proposta deste novo modelo consiste em avaliar a próxima “correção” ao Hamiltoniano do modelo 3P_0 e fazer comparações com a experiência. Esta dissertação ainda estará longe de avaliar o real potencial deste modelo, pois isto demandaria um estudo minucioso de uma parte maior do espectro hadrônico, em particular, o setor do charmônio.

A divisão dos capítulos é a seguinte: no capítulo 1 apresentamos uma revisão curta das idéias centrais da Cromodinâmica Quântica. A seguir é apresentado um panorama da situação experimental da atualidade, dando uma ênfase aos laboratórios modernos e os experimentos em andamento com a descoberta de novos mésons. Na descoberta de novos mésons, quais os aspectos revelantes que devem ser determinados? Esta é a questão discutida, a seguir, neste capítulo: os mésons e seus números quânticos e o modelo 3P_0 de decaimento.

O capítulo 2 é destinado a uma revisão do formalismo de Fock-Tani para mésons. Também é apresentado a base do modelo C^3P_0 , deduzido em [8].

No capítulo 3, é apresentado a parte inédita desenvolvida nesta dissertação, onde fazemos uma aplicação do modelo C^3P_0 de decaimento no setor de mésons leves. Em particular, estudando os seguintes canais: $\rho \rightarrow \pi + \pi$, $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$, $a_2 \rightarrow \rho + \pi$, $h_1 \rightarrow \rho + \pi$, $f_0 \rightarrow \pi + \pi$ e $f_2 \rightarrow \pi + \pi$. Primeiramente, obtemos as amplitudes e taxas de decaimento de forma analítica. Num segundo momento, a interação γ e o parâmetro β são ajustados de forma a obter as taxas de decaimento e as razões D/S que mais se aproximam dos valores experimentais. Para a obtenção destes dados, são utilizados dois tipos de ajustes: o método das hipersferas e o ajuste com um méson calibrador. Os resultados obtidos são comparados entre os modelos C^3P_0 e 3P_0 , com o objetivo de identificar qual modelo melhor descreve os dados experimentais.

Após o capítulo 3, apresentamos as conclusões, apêndices e bibliografia consultada.

Capítulo 1

A Física de Mésons e o Modelo de Decaimento 3P_0

1.1 Introdução

A QCD baseia-se no postulado de simetria local (invariância de calibre) associada à simetria unitária $SU(3)$ de carga de cor. O Lagrangiano é definido na QCD na forma

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

onde $\psi_\xi(x)$ representa os campos dos quarks, $\xi \equiv (f, s, c)$ simboliza os índices de sabor, spin e cor dos quarks; γ^μ ($\mu = (0, 1, 2, 3)$) são as matrizes de Dirac (ver apêndice A) e m a matriz de massa dos quarks. Na expressão (1.1) os índices $\xi \equiv (f, s, c)$ foram suprimidos por simplicidade formal. A derivada covariante D_μ é definida na forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu \quad (1.2)$$

com ∂_μ simbolizando a derivada espaço-temporal, g_{QCD} a constante de acoplamento da interação forte e

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2} \lambda^a A_\mu^a(x) \quad (1.3)$$

onde A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) representa os campos dos glúons e λ^a denota as matrizes de Gell-Mann (ver apêndice A). Foi utilizada a convenção de Einstein de soma para índices repetidos. O tensor de campo gluônico é dado por

$$G_{\mu\nu}^a(x) = F_{\mu\nu}^a(x) - gf^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x), \quad (1.4)$$

onde f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$ e

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x). \quad (1.5)$$

Para entender o espectro de massa hadrônico a partir da QCD bem como as propriedades de interação entre os hádrons, é necessário saber algo sobre a força de longo alcance responsável pelo confinamento dos quarks nos mésons e bárions. No entanto, não existe nenhuma descrição completamente satisfatória para esta região de energias da QCD. Algumas informações podem ser extraídas diretamente da formulação da QCD na rede. Neste sentido, a construção de modelos fenomenológicos é parte essencial para o entendimento das interações fortes a baixas energias.

1.2 Os Mésons e os seus Números Quânticos

Com a consolidação do modelo de quarks constituintes, tornou-se possível estudar a estrutura hadrônica. Por exemplo, o estudo da chamada *espectroscopia mesônica* passa, em primeiro lugar, pela identificação dos números quânticos relevantes dos mésons, considerados como partículas compostas por quarks constituintes. Desta forma, faremos uma breve revisão dos números quânticos importantes na caracterização destes estados.

Os quarks possuem spin S igual a $1/2$ e número bariônico B igual a $1/3$; os *antiquarks*, por sua vez, têm spin $1/2$, porém o seu número bariônico é $-1/3$. Desta forma os quarks e *antiquarks* podem se combinar para formar os chamados *mésons convencionais* (com $B = 0$) e spin total 1 ou 0. O momento angular total \vec{J} é obtido obedecendo às regras usuais de soma de momento angular da Mecânica Quântica, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Os mésons como objetos do tipo *quark-antiquark* (isto é, $q\bar{q}$), além dos números J , L , e S , têm as seguintes propriedades adicionais: Paridade- P , Paridade- C e Paridade- G que serão descritas a seguir.

1.2.1 As paridades de um méson

1. Paridade- P : $P = (-1)^{L+1}$.

A paridade é um operador de reflexão de coordenadas espaciais em torno da origem e, se a função de onda for um auto-estado do operador paridade, então

$$P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \eta_P \psi(\vec{r}), \quad (1.6)$$

onde η_P representa o auto-valor correspondente. Ao aplicar-se duas vezes o operador P a ψ , o estado original é recuperado; conseqüentemente os autovalores η_P podem assumir apenas os valores ± 1 . Frequentemente podemos separar a função de onda ψ em uma parte radial, $R(r)$, e em outra angular, $Y_{LM}(\theta, \phi)$,

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y_{LM}(\theta, \phi). \quad (1.7)$$

A paridade total P é decomposta no seguinte produto $P = P_{orb}P_qP_{\bar{q}}$, onde P_{orb} é a respectiva paridade espacial (orbital), enquanto P_q (ou $P_{\bar{q}}$) é a paridade intrínseca do quark (antiquark). Neste caso, a operação de paridade P_{orb} sobre a função de onda espacial não modifica a parte radial, mas transforma a parte angular na forma $Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi)$, em que

$$P_{orb}Y_{LM}(\theta, \phi) = Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^LY_{LM}(\theta, \phi). \quad (1.8)$$

Ademais, quarks e antiquarks têm paridades intrínsecas opostas, assim $P_q \cdot P_{\bar{q}} = -1$ o que resulta numa paridade total P :

$$P|q\bar{q}\rangle = (-1)^L(-1)|q\bar{q}\rangle = (-1)^{L+1}|q\bar{q}\rangle. \quad (1.9)$$

2. Paridade-C : $C = (-1)^{L+S}$.

A conjugação de carga C muitas vezes é chamada de paridade- C e representa a operação matemática que simula a transformação de uma partícula na sua respectiva antipartícula. Esta operação reverte propriedades intrínsecas da partícula como a sua carga elétrica e seu momento magnético. Uma partícula neutra representa um auto-estado do operador C ; por exemplo, pode-se considerar o pión π^0

$$C|\pi^0\rangle = \eta_C|\pi^0\rangle \quad (1.10)$$

onde $\eta_C = \pm 1$. Se um méson for constituído, por exemplo, por quarks do tipo u , então $|q\bar{q}\rangle = |u\bar{u}\rangle$ e a função de onda total, contendo a parte de spin $\chi(\vec{S})$, caso possa ser expressa em uma forma separável, torna-se

$$\psi(\vec{r}, \vec{S}) = R(r)Y_{LM}(\theta, \phi)\chi(\vec{S}), \quad (1.11)$$

onde \vec{r} é a coordenada relativa de separação entre os quarks.

Desta forma o efeito do operador C sobre o par $u\bar{u}$ será a troca $u \longleftrightarrow \bar{u}$ o que efetivamente corresponde a realizar a troca $\vec{r} \longleftrightarrow -\vec{r}$, ou seja, uma operação de paridade sobre o sistema. Assim a conjugação de carga introduz um fator igual ao obtido para a paridade- P , isto é, $(-1)^{L+1}$. Esta operação também inverte o spin na função de onda de spin, o que resulta em um fator (-1) para o caso $\vec{S} = 0$ e em um fator $(+1)$ se $\vec{S} = 1$, ou seja, um fator geral $(-1)^{S+1}$. Este resultado, quando combinado com o fator correspondente que vem da contribuição do momento angular orbital \vec{L} fornece

$$C|q\bar{q}\rangle = (-1)^{L+S}|q\bar{q}\rangle. \quad (1.12)$$

3. Paridade-G: $G = (-1)^{L+S+I}$.

Ficou claro da discussão anterior que partículas carregadas não podem ser auto-estados de C pois, por exemplo,

$$C|\pi^+\rangle = \eta|\pi^-\rangle. \quad (1.13)$$

Entretanto, se aplicarmos o operador C em um estado de partícula carregada seguido de uma rotação no espaço de isospin, sendo o operador rotado representado por $R = \exp(i\pi I_2)$, tal que

$$|I, I_z\rangle \longrightarrow |I, -I_z\rangle, \quad (1.14)$$

então partículas carregadas podem ser auto-estados deste novo operador. Vamos definir o operador de paridade- G como

$$G = C R. \quad (1.15)$$

Desta definição não é difícil ver que, para um sistema do tipo $q\bar{q}$, temos que $G = C \cdot (-1)^I$, ou seja,

$$G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.16)$$

Pode-se resumir as relações deduzidas recentemente como

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}; \quad P = (-1)^{L+1}; \quad (1.17)$$

$$C = (-1)^{L+S}; \quad G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.18)$$

Estes operadores geram então números quânticos que são importantes, pois representam quantidades conservadas em processos que envolvem a interação forte. Utilizando estas relações podemos construir os valores admissíveis da grandeza J^{PC} , pelo modelo de quarks, para os mésons:

$$0^{-+}, 0^{++}, 1^{--}, 1^{+-}, 1^{++}, 2^{--}, 2^{-+}, 2^{++}, 3^{--}, 3^{+-}, 3^{++}, \dots \quad (1.19)$$

Olhando com cuidado para a seqüência de números contidos na expressão (1.19) nota-se que há uma seqüência de valores de J^{PC} que não são admissíveis em um sistema do tipo $q\bar{q}$

$$0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}, \dots \quad (1.20)$$

Os números quânticos apresentados em (1.20) são conhecidos como números quânticos *explicitamente exóticos*. Um estado destes na natureza, com estes números quânticos, são

candidatos a ter um sistema diferente do tipo $q\bar{q}$. De um modo geral, pode-se escrever um méson como

$$|\text{méson}\rangle = |q\bar{q}\rangle + |\text{não-}q\bar{q}\rangle. \quad (1.21)$$

Numa investigação para encontrar novos estados da matéria, estados que não são puros como (1.21) apresentam a dificuldade adicional de avaliar-se o grau de mistura dos estados $|q\bar{q}\rangle$ e $|\text{não-}q\bar{q}\rangle$. Atualmente, há alguns candidatos, previstos por diversos modelos, que seguem (1.21).

1.2.2 Um exemplo: o decaimento $a_2^0 \longrightarrow \eta + \pi^0$

Um exemplo concreto da utilização em conjunto dos números quânticos discutidos até o momento é a reação de decaimento do méson neutro a_2^0 de massa 1700 MeV. Na tabela de partículas elementares do Particle Data Group (PDG) [22] este méson se apresenta como é visto na Fig. (1.1). Vemos que há vários canais possíveis de decaimento, em particular o canal onde o a_2 decai num η mais um pión. Os números $I^G(J^{PC})$ para o a_2 são vistos no topo da Fig. (1.1), isto é, $1^-(2^{++})$. Os números quânticos do η e do π são obtidos da mesma forma, a partir desta tabela, mas não mostrado na figura, correspondendo aos valores $0^+(0^{-+})$ e $1^-(0^{-+})$, respectivamente. Este decaimento pode ser resumido em

$$1^-(2^{++}) \longrightarrow 0^+(0^{-+}) + 1^-(0^{-+}). \quad (1.22)$$

Para verificar a viabilidade desse decaimento precisamos avaliar se todos os números quânticos são conservados.

1. Momento angular J

O decaimento descrito em (1.22) fornece

$$2 \longrightarrow 0 + 0, \quad (1.23)$$

revelando que, aparentemente, o momento angular não é conservado. Isto significa que nesta reação o estado final deve possuir momento angular orbital não nulo, isto é, devemos ter

$$2 \longrightarrow 0 + 0 + L_{\eta\pi}, \quad (1.24)$$

de onde concluímos que $L_{\eta\pi} = 2$.

$a_2(1700)$

$$J^{PC} = 1^-(2^{++})$$

OMITTED FROM SUMMARY TABLE

$a_2(1700)$ MASS

VALUE (MeV)	EVTS	DOCUMENT ID	TECN	CHG	COMMENT
1732±16 OUR AVERAGE		Error includes scale factor of 1.9. See the ideogram below.			
1737± 5± 7		ABE	04	BELL	10.6 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-K^+K^-$
1698±44		¹ AMSLER	02	CBAR	0.9 $\bar{p}p \rightarrow \pi^0\eta\eta$
1660±40		ABELE	99B	CBAR	1.94 $\bar{p}p \rightarrow \pi^0\eta\eta$
• • • We do not use the following data for averages, fits, limits, etc. • • •					
1722± 9±15	18k	² SCHEGELSKY	06	RVUE 0	$\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$
1702± 7	80k	³ UMAN	06	E835	5.2 $\bar{p}p \rightarrow \eta\eta\pi^0$
1721±13±44	145k	LU	05	B852	18 $\pi^-p \rightarrow \omega\pi^-\pi^0p$
~ 1775		⁴ GRYGOREV	99	SPEC	40 $\pi^-p \rightarrow K_S^0K_S^0n$
1752±21± 4		ACCIARRI	97T	L3	$\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$

- ¹ T-matrix pole.
- ² From analysis of L3 data at 183–209 GeV.
- ³ Statistical error only.
- ⁴ Possibly two $J^P = 2^+$ resonances with isospins 0 and 1.

WEIGHTED AVERAGE
1732±16 (Error scaled by 1.9)

$a_2(1700)$ DECAY MODES

Mode	Fraction (Γ_i/Γ)
Γ_1 $\eta\pi$	seen
Γ_2 $\gamma\gamma$	
Γ_3 $\rho\pi$	

Fig. 1.1: Propriedades do méson a_2 extraídas do PDG

2. Paridade- P

A expressão para a conservação de paridade total para o decaimento $A \rightarrow B + C$ num sistema $q\bar{q}$ é dada por

$$P = P_B P_C (-)^L. \quad (1.25)$$

No exemplo estudado

$$P_{a_2} = (+) \quad ; \quad P_\eta = (-) \quad ; \quad P_\pi = (-). \quad (1.26)$$

Como $L_{\eta\pi} = 2$ a equação (1.25) é verificada:

$$(+) = (-)(-)(-)^2. \quad (1.27)$$

3. Paridade- C

Este número quântico é diretamente verificado. No exemplo estudado

$$C_{a_2} = (+) \quad ; \quad C_\eta = (+) \quad ; \quad C_\pi = (+). \quad (1.28)$$

Assim,

$$(+) = (+)(+). \quad (1.29)$$

4. Paridade- G

Este número quântico é também diretamente verificado. No exemplo estudado

$$G_{a_2} = (-) \quad ; \quad G_\eta = (+) \quad ; \quad G_\pi = (-). \quad (1.30)$$

Assim,

$$(-) = (+)(-). \quad (1.31)$$

5. Isospin- I

Este último número quântico também é verificado diretamente. No exemplo estudado

$$I_{a_2} = 1 \quad ; \quad G_\eta = 0 \quad ; \quad G_\pi = 1. \quad (1.32)$$

Assim,

$$1 = 0 + 1. \quad (1.33)$$

Com esta análise é possível concluir que este decaimento pode ocorrer na natureza. A não-conservação de qualquer um destes números implicaria a impossibilidade deste processo existir.

1.3 A física dos mésons do ponto de vista experimental

Um experimento em física de partículas tem dois componentes básicos: um acelerador e um detector. A função do acelerador é produzir partículas de alta energia. Ele faz isto tomando uma partícula e acelerando-a com a utilização de campos eletromagnéticos. Ela irá então colidir com outra partícula. Primeiramente, somente uma ou duas partículas de alta energia são produzidas, mas estas logo decaem em muitas outras com energia mais baixa.

O trabalho do detector é detectar informações sobre as partículas. Um detector típico consiste de muitos subdetectores, onde cada um executa um tipo diferente de medida. Partículas da colisão passam através dos subdetectores e interagem com cada um deles, e os resultados são registrados.

A maioria das partículas produzidas em uma colisão possuem tempo de vida muito curto e decaem antes que elas passem pelo detector. Assim, em geral, o detector observa somente as partículas mais estáveis do estado final. Estas são elétrons, múons, fótons, píons, káons carregados, ou prótons. O decaimento original deve ser reconstruído baseado sobre as medidas destas partículas.

Como estes experimentos envolvem altas energias, ocasionam a descoberta de novos hádrons. Por este motivo, a física teórica hadrônica permanece criando novos modelos para descrever estas partículas.

A seguir, vamos apresentar alguns experimentos com suas principais características. São eles: Babar, Belle, CLEO e Jefferson Lab.

1.3.1 BaBar

Para cada partícula existe uma equivalente anti-partícula com características quânticas opostas. Pares de partículas e anti-partículas podem ser criados por grandes acúmulos de energia e, reciprocamente, quando uma partícula encontra uma anti-partícula elas se aniquilam com intensa liberação de energia. Na ocasião do *Big-Bang*, a grande explosão que se acredita ter dado origem ao Universo, um grande acúmulo de energia deve ter criado uma quantidade igual de partículas e anti-partículas. Entretanto, no cotidiano não encontramos anti-partículas. A questão que se coloca é “onde estão as anti-partículas?”

BaBar é um experimento de Física de Altas Energias que tem por objetivo estudar a violação da simetria de carga e paridade (violação CP) no decaimento de mésons B. Esta violação manifesta-se com o diferente comportamento entre partículas e anti-partículas e é

o primeiro passo para explicar a ausência das anti-partículas no Universo. O experimento está localizado no *Stanford Linear Accelerator Center*, próximo à Universidade de Stanford, na Califórnia.

O experimento BaBar utiliza dois aceleradores: o SLAC Linac (acelerador linear) e o anel de armazenamento PEP-II. O SLAC serve como um injetor: ele acelera os feixes de elétrons ou pósitrons até as altas energias necessárias, e os injeta em um dos anéis de armazenamento do PEP-II. Este consiste de dois anéis de armazenamento, um anel de alta energia para feixe de elétrons de 9.0 GeV, e um anel de baixa energia para feixes de pósitrons de 3.1 GeV. Os dois feixes movem-se em direções opostas e colidem em um ponto de interação, onde o detector BaBar está localizado. Ao colidirem produzem mésons Upsilon(4S) os quais decaem em número igual de mésons B e anti-B.

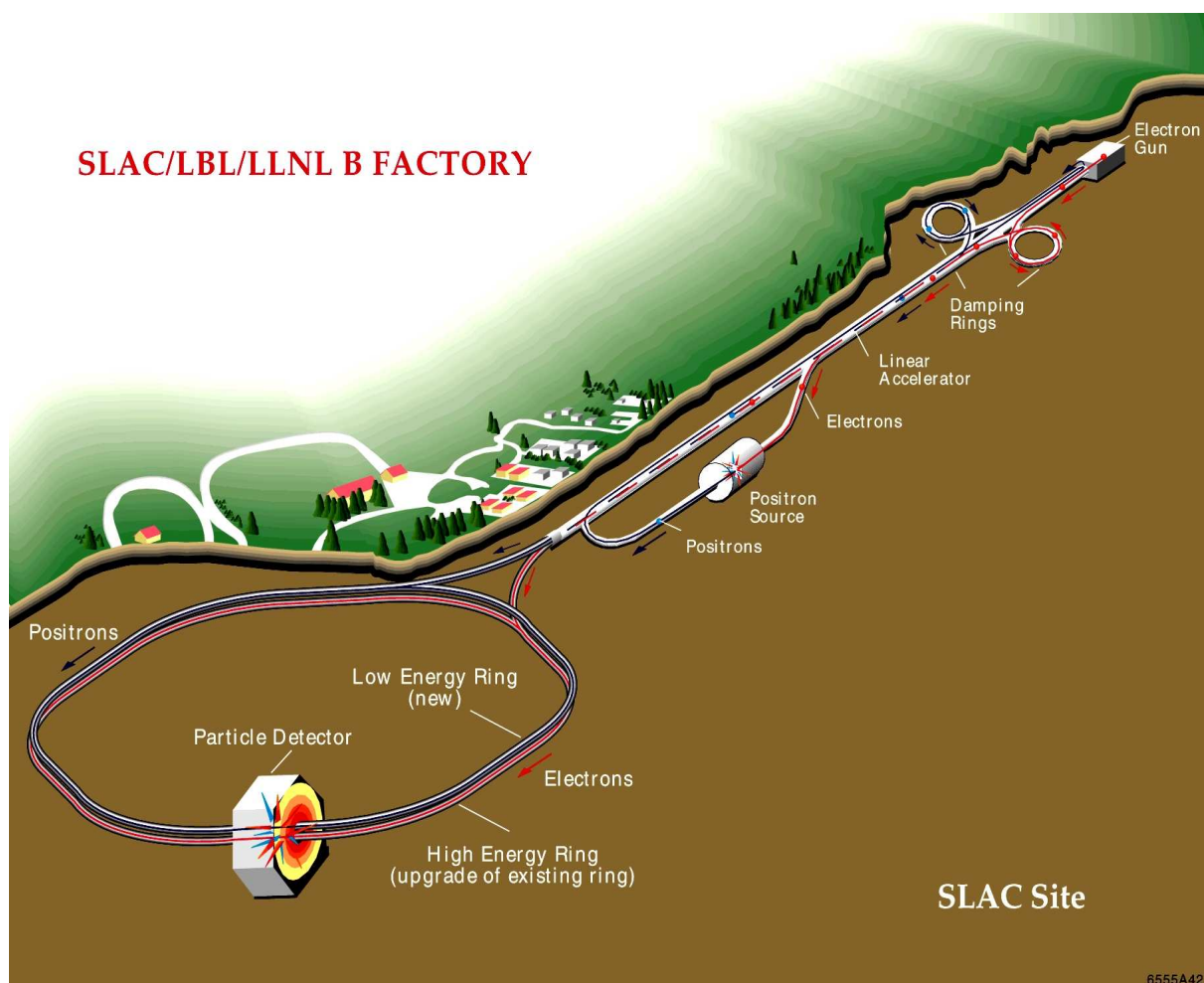


Fig. 1.2: Visão esquemática do Laboratório SLAC.

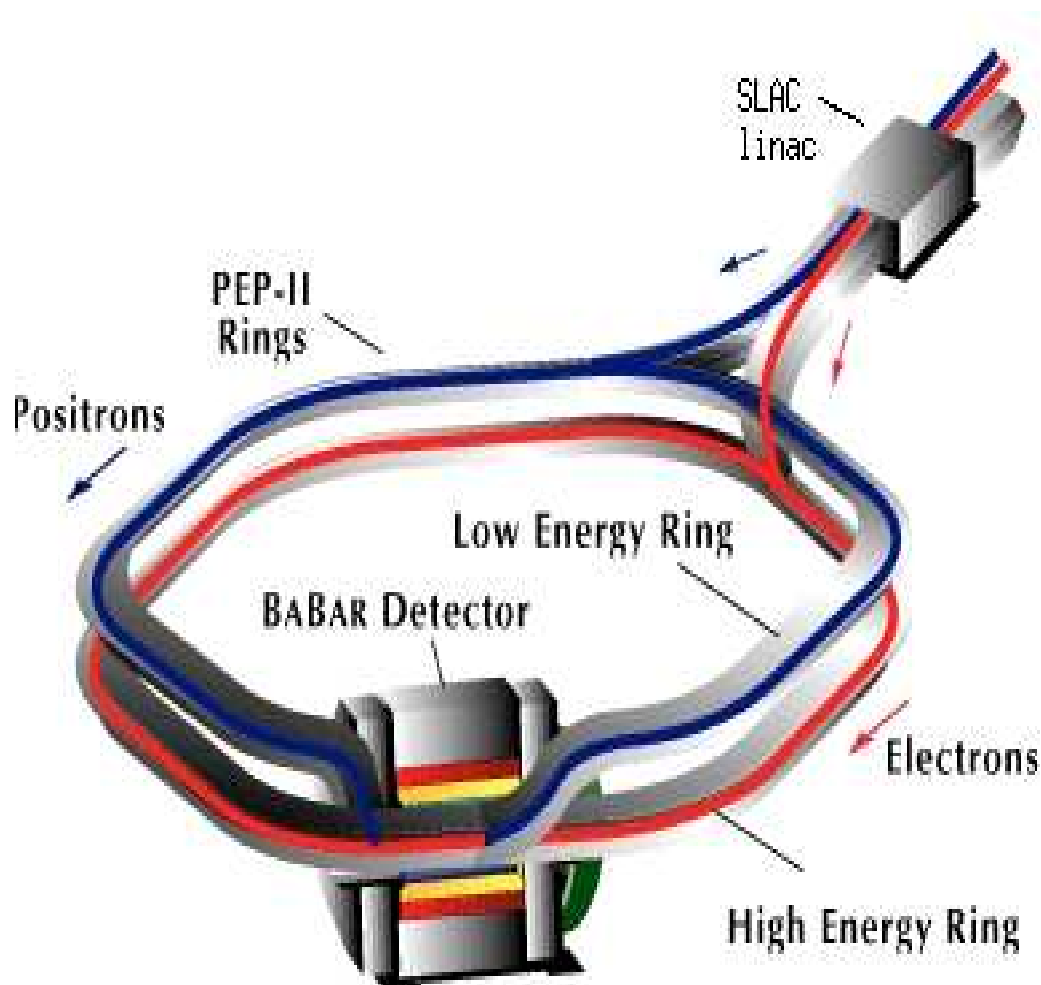


Fig. 1.3: Visão esquemática do PEP-II e do detector Babar.

A massa do Upsilon(4S) é duas vezes a massa de um méson B, assim no referencial do centro de massa, os mésons B são produzidos em repouso. Porém, como os feixes de elétrons e pósitrons têm diferentes energias, no referencial do laboratório os mésons B têm momento diferente de zero. Isto faz possível aos mésons B viajarem uma distância mensurável antes de decaírem. A capacidade para medir esta distância é muito importante para o estudo da violação CP no BaBar.

Com o BaBar foi possível a detecção de novas partículas, como podemos ver na lista de publicações a seguir:

1. PUB-07/044, *Observation of $Y(3940) \rightarrow J/\psi \omega$ in $B \rightarrow J/\psi \omega K$ at BABAR*, 14-Nov-07 PRL.
2. PUB-07/028, *Search for prompt production of χ_c and $X(3872)$ in e^+e^- annihilations*, 12-Jul-07, PRD-RC 76, 071102 (2007).

3. PUB-06/056, *Structure at 2175 MeV in $e^+e^- \rightarrow \phi f_0(980)$ observed via initial-state radiation*, 10-Oct-06, PRD-RC 74, 091103 (2006).
4. PUB-06/044, *Observation of a New D_s Meson Decaying to DK at a Mass of 2.86 GeV/c²*, 27-Jul-06, PRL 97, 222001 (2006).
5. PUB-06/041, *Search for $B^+ \rightarrow X(3872)K^+$, $X(3872) \rightarrow J/\psi \gamma$* , 25-Jul-06, PRD-RC 74, 071101 (2006).
6. PUB-06/025, *Study of the $D_{sJ}^{*+}(2317)$ and $D_{sJ}^+(2460)$ mesons in inclusive $c\bar{c}$ production near $\sqrt{s} = 10.6$ GeV*, 14-Apr-06, PRD 74, 032007 (2006).
7. PUB-05/038, *Study of the $X(3872)$ and $Y(4260)$ in $B^0 \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^- K^0$ and $B^- \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^- K^-$ decays*, 21-Jul-05 PRD-RC 73, 011101 (2006).

Esta lista é apenas uma amostragem de uma lista maior que continua com inúmeras publicações sobre outros novos mésons, novos bárions e candidatos a pentaquarks.

1.3.2 Belle

Assim como o BaBar, o Belle também estuda a violação CP através de decaimentos de mésons B. O acelerador KEK-B produz elétrons com energia de 8 GeV e pósitros com energia de 3.5 GeV que colidem dentro do detector Belle. O experimento está localizado próximo a Tóquio, Japão .

O KEK-B entrou em operação em 1999, e tem medido parâmetros fundamentais da mistura de quarks, conseqüentemente, tem verificado o Modelo Padrão de partículas elementares. Uma imagem esquemática é mostrada na figura (1.4). A seguir mostramos algumas publicações recentes de Belle.

1. “A Yb state ?: Observation of an anomalously large rate for $Upsilon(5S) \rightarrow Upsilon(1,2S) \pi^+ \pi^-$ ”, Abe et al., arXiv:0710.2577 (submetido ao *Phys. Rev. Lett.*)
2. “Z(4430): A charged charmonium-like resonant structure”, S.K. Choi, S.L. Olsen et al., arXiv:0708.1790 (submetido ao *Phys. Rev. Lett.*)
3. Y(4660): X. L. Wang et al, PRL 99, 142002 (2007) (arXiv:0707.3699)
4. Y(4008): C.Z. Yuan et al, PRL 99, 182004 (2007) (arXiv:0707.2541)
5. X(4160): P. Pakhlov et al., arXiv:0708.3812 (submetido ao *Phys. Rev. Lett.*)

6. $\psi(4415) \rightarrow DD_2$: G.Pakhlova et al, arXiv:0708.3313 (aparecerá em *Phys. Rev. Lett.*)
7. $D_{sJ}(2700)$: J. Brodzicka et al., arXiv:0707.3491 (submetido ao *Phys. Rev. Lett.*)

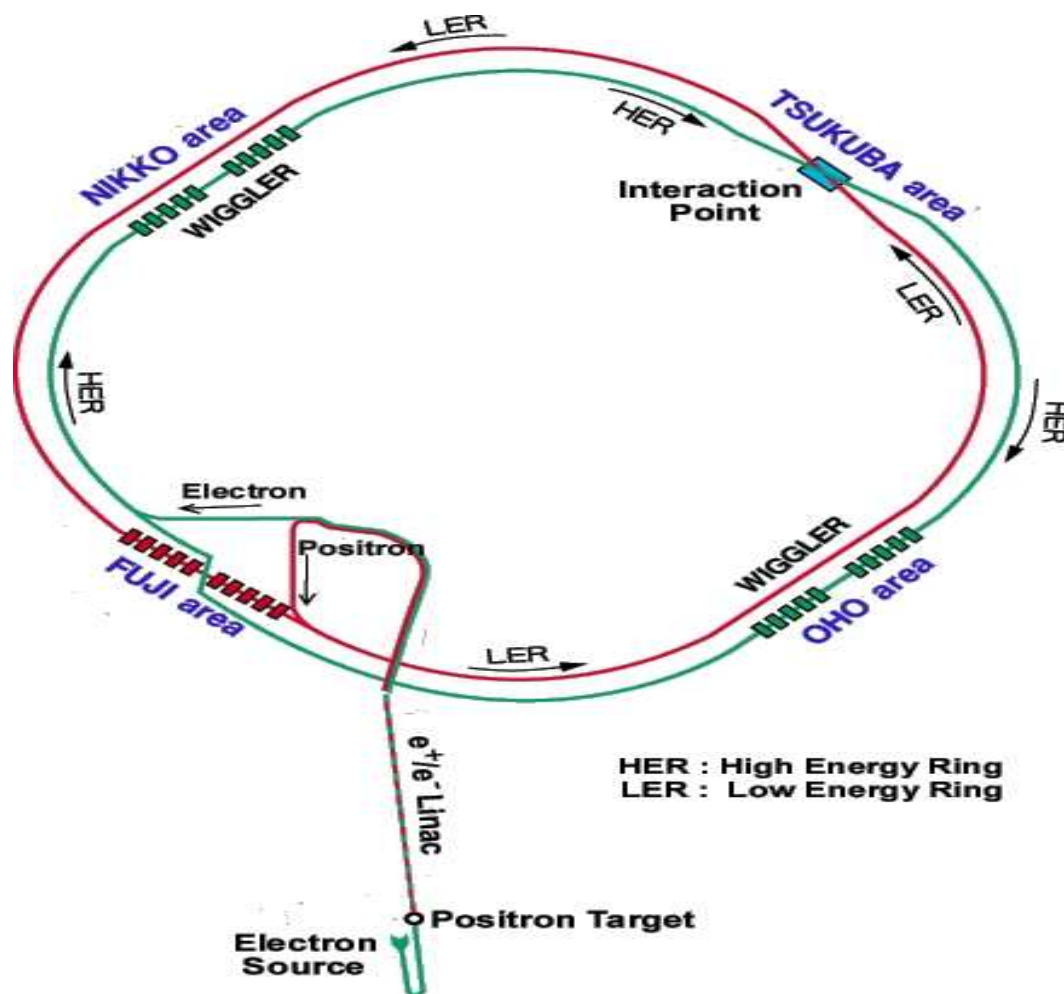


Fig. 1.4: Visão esquemática de Belle.

1.3.3 Cleo

Cleo-C, o atual experimento do Cleo, é um programa de física de charme localizado no *Cornell Electron Storage Ring (CESR)*, na Universidade de Cornell, Estados Unidos. Através das medidas de decaimentos dos mésons D e D_s , o Cleo-C faz um teste crucial das técnicas da QCD na rede usadas para calcular importantes processos de quarks pesados.

O experimento também determina a fração de canais hadrônicos dos mésons D e D_s , os quais normalizam muitas medidas dos decaimentos bottom e charm. Cleo-C também explora espectroscopia de quarkônia pesada e estados relacionados. O experimento inclui o acelerador CESR-C, que produz feixes de elétrons com energia entre 1.5 e 5.6 GeV, e o detector Cleo-C, vistos na figura (1.5). As colisões ocorrem entre elétrons e pósitrons.

Em 2005, Cleo-C descobriu o méson h_c , o estado 1P_1 do charmonium. Este méson já era previsto teoricamente, mas levou muito tempo até ser detectado.

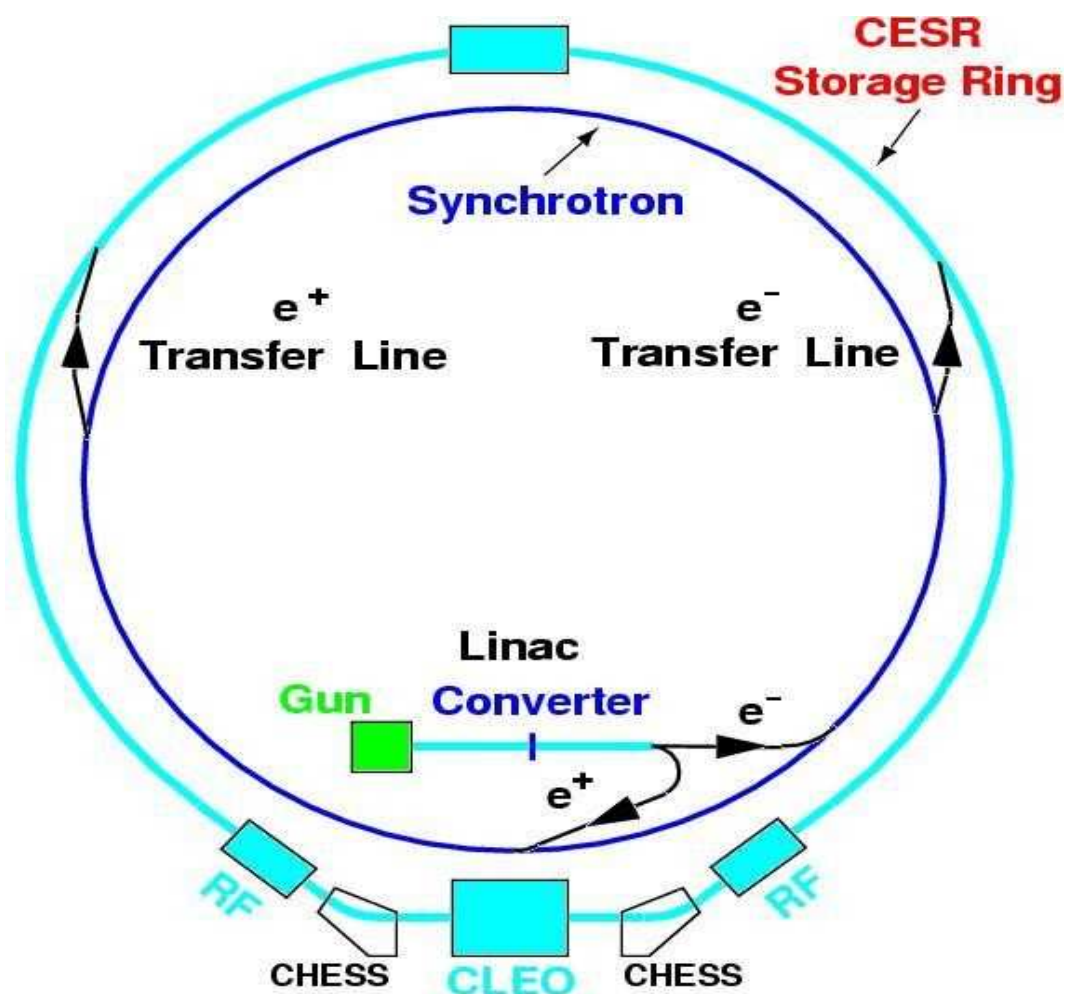


Fig. 1.5: Visão esquemática de CLEO.

1.3.4 Jefferson Lab e o Hall D

O *Thomas Jefferson National Accelerator Facility* (Jefferson Lab) é constituído por “corredores” de aceleração chamados de *halls*. Encontra-se em fase de construção um novo

hall experimental, o chamado “Hall D”. O projeto *GlueX* fará uso do Hall D e deverá entrar em funcionamento em 2011-2012. O experimento incluirá o acelerador CEBAF (Continuous Electron Beam Accelerator Facility) a uma energia de 12 GeV e o detector GlueX. Os elétrons vindos do acelerador a uma energia de 12 GeV produzirão feixes de fótons linearmente polarizados com energia de 9 GeV, usando a técnica bremsstrahlung. Uma imagem do experimento é mostrada na figura (1.6).

O objetivo do projeto é mapear detalhadamente o espectro dos mésons híbridos, começando com aqueles que possuem números quânticos exóticos. Os fótons linearmente polarizados, produzidos por elétrons vindos do acelerador CEBAF, serão utilizados para descobrir este espectro. Esta informação experimental servirá para encontrar a resposta para uma questão fundamental em física - a compreensão quantitativa do mecanismo de confinamento em cromodinâmica quântica.

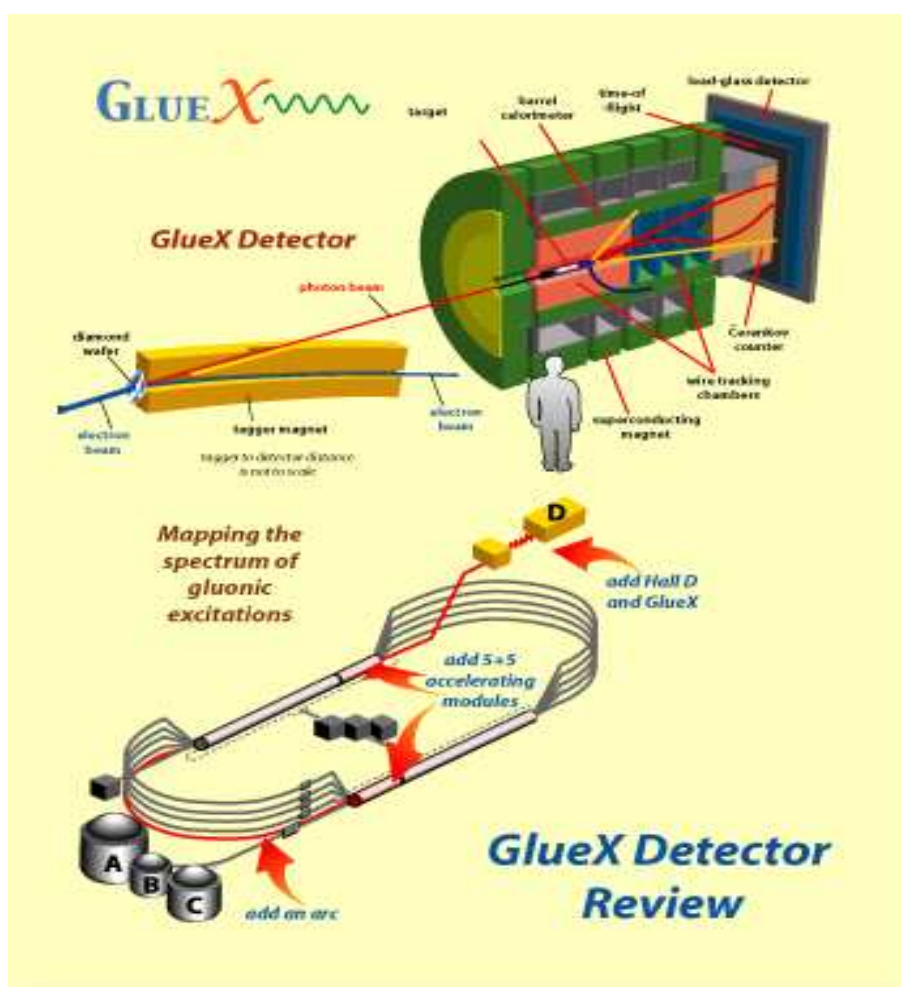


Fig. 1.6: Visão esquemática do GlueX.

1.4 Modelo de Decaimento 3P_0

Há muito tempo os modelos de *criação de pares* para decaimentos hadrônicos fortes têm sido formulados e estudados por muitos autores [23]. O modelo 3P_0 é um modelo de decaimento que considera apenas decaimentos do tipo OZI-permitidos para as interações fortes.

O modelo 3P_0 descreve a criação de um par quark-antiquark adicional na presença do méson do estado inicial. O modelo foi introduzido há mais de trinta anos por Micu [24] e aplicado em decaimento de mésons, na década de setenta, por LeYaouanc *et al* [25]. Esta descrição é uma consequência natural de hádrons descritos pelo modelo de quarks constituintes. Neste modelo o par quark-antiquark criado tem os números quânticos do vácuo e em relação aos números quânticos aditivos, deve ser neutro. Em outras palavras, o par deve ser um singlete de cor e sabor, deve ter paridade positiva, enquanto o momento linear e angular total iguais a zero. Um par férmion-antiférmion que possui estas propriedades deve ter $J^{PC} = 0^{++}$, isto é, $L = 1$ (onda-P) e $S = 1$.

As mais extensas aplicações para o decaimento de mésons foram obtidas por Kokoski e Isgur [26]. Estes autores além de calcularem quase 400 amplitudes diferentes (das quais aproximadamente 60 já foram medidas) também colocaram o modelo numa base teórica mais firme, mostrando que ele podia ser deduzido a partir de uma formulação de tubo de fluxo (*flux-tube*) baseada na QCD na rede.

A formulação do 3P_0 que adotaremos nesta dissertação foi deduzida por E. S. Ackleh, T. Barnes e E. S. Swanson [27]. Os cálculos e aplicações que mostraremos no restante deste capítulo resultam deste estudo. Esta formulação do 3P_0 considera os decaimentos como sendo originados pelo limite não-relativístico do Hamiltoniano abaixo

$$H_I = g \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}). \quad (1.34)$$

Os decaimentos estudados são do tipo

$$(q\bar{q})_A \rightarrow (q\bar{q})_B + (q\bar{q})_C, \quad (1.35)$$

isto é, um méson que decai em dois. Note que este tipo de decaimento exige a criação de um par quark-antiquark, que do Hamiltoniano (1.34) será obtido através do termo $b^\dagger d^\dagger$. O acoplamento g é substituído pelo parâmetro γ relacionado com a massa do quark constituinte m_q por

$$\gamma = \frac{g}{2m_q}. \quad (1.36)$$

Neste modelo não se faz referência a cor, a qual se incluída simplesmente mudará a definição da força de interação γ , pois o fator de cor é um fator global. Visto que γ é ajustado para

os dados experimentais, a inclusão da cor não mudará as previsões para os decaimentos de mésons.

Para determinar uma taxa de decaimento, é necessário avaliar o elemento de matriz do Hamiltoniano de decaimento, o qual é da forma

$$\langle BC|H_I|A\rangle = \delta(\vec{P}_A - \vec{P}_B - \vec{P}_C) h_{fi}. \quad (1.37)$$

onde h_{fi} é a amplitude de decaimento.

A definição geral de uma taxa de decaimento é

$$\Gamma = 2\pi P(\text{EF}) \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (1.38)$$

onde EF é o elemento do espaço de fase. Em muitos modelos de decaimento os cálculos são não-relativísticos, já em outras situações o momento de decaimento é muito grande e o EF deve ser relativístico. Assim temos

$$(\text{EF}) = \frac{M_B M_C}{M_A} \longrightarrow \text{não - relativístico} \quad (1.39)$$

$$(\text{EF}) = \frac{E_B E_C}{M_A} \longrightarrow \text{relativístico}. \quad (1.40)$$

A amplitude de decaimento h_{fi} pode ser combinada com o espaço de fase relativístico para dar a taxa de decaimento, a qual é

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (1.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{p}_A &= 0 \\ P &= |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Um resultado equivalente é obtido por Geiger e Swanson [23]. O momento P de decaimento pode ser avaliado de forma simples. Ele é o momento do sistema dos mésons B e C vistos do referencial (em repouso) do méson A. Assim por conservação da energia relativística temos

$$\sqrt{p_A^2 + m_A^2} = \sqrt{p_B^2 + m_B^2} + \sqrt{p_C^2 + m_C^2}. \quad (1.43)$$

Usando (1.42) e elevando (1.43) ao quadrado, obtemos

$$m_A^2 = 2P^2 + m_B^2 + m_C^2 + 2\sqrt{(P^2 + m_B^2)(P^2 + m_C^2)}. \quad (1.44)$$

Após algumas manipulações algébricas simples pode-se isolar P

$$P = \frac{\sqrt{[m_A^2 - (m_B + m_C)^2][m_A^2 - (m_B - m_C)^2]}}{2m_A}. \quad (1.45)$$

A parte espacial das funções de onda dos mésons A, B e C a ser usada no cálculo do elemento de matriz (1.37) é do tipo oscilador harmônico, mostrada no apêndice B.

Usualmente, os resultados para decaimentos são expressos em termos da amplitude $\mathcal{M}_{L_{BC}S_{BC}}$ e desta forma a taxa $\Gamma_{A \rightarrow BC}$ fica reescrita

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \sum_{LS} |\mathcal{M}_{LS}|^2. \quad (1.46)$$

Para a situação $S_{BC} = 0$ este \mathcal{M}_{LS} é o coeficiente do harmônico esférico Y_{LM} em h_{fi} , e em geral é a amplitude $\langle JM(L_{BC}S_{BC}) | BC \rangle$ no estado final de BC . Visto que o modelo 3P_0 envolve uma força de interação fenomenológica, a comparação com o experimento requer um ajuste para taxas distintas (para determinar γ e o parâmetro β da função de onda).

Uma amplitude de decaimento \mathcal{M}_{LS} no modelo 3P_0 com funções de onda do oscilador harmônico simples (OHS) é proporcional a um polinômio $\mathcal{P}_{LS}(x)$ com $x = P/\beta$ vezes uma exponencial

$$\mathcal{M}_{LS} = \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \mathcal{P}_{LS}(x) e^{-x^2/12}. \quad (1.47)$$

Para os casos considerados aqui, estes polinômios são dados pelas expressões abaixo (entre parênteses um exemplo de decaimento para o respectivo canal)

$$\mathcal{P}_{10}^{({}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0)} = -\frac{2^5}{3^3} x \quad (\rho \rightarrow \pi + \pi) \quad (1.48)$$

$$\mathcal{P}_{20}^{({}^3P_2 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0)} = +\frac{2^6}{3^4 5^{1/2}} x^2 \quad (f_2 \rightarrow \pi + \pi) \quad (1.49)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{({}^3P_2 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^{11/2}}{3^7 2^5 5^{1/2}} x^2 \quad (a_2 \rightarrow \rho + \pi) \quad (1.50)$$

$$\mathcal{P}_{01}^{({}^3P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = +\frac{2^5}{3^{5/2}} \left(1 - \frac{2}{9} x^2\right) \quad (a_1 \rightarrow \rho + \pi) \quad (1.51)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{({}^3P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^{11/2}}{3^9} x^2 \quad (a_1 \rightarrow \rho + \pi) \quad (1.52)$$

$$\mathcal{P}_{00}^{({}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0)} = +\frac{2^{9/2}}{3^2} \left(1 - \frac{2}{9} x^2\right) \quad (f_0 \rightarrow \pi + \pi) \quad (1.53)$$

$$\mathcal{P}_{01}^{({}^1P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^{9/2}}{3^{5/2}} \left(1 - \frac{2}{9} x^2\right) \quad (b_1 \rightarrow \omega + \pi) \quad (1.54)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{({}^1P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^6}{3^9} x^2 \quad (b_1 \rightarrow \omega + \pi) \quad (1.55)$$

Desta forma pode-se calcular, por exemplo, o decaimento do méson ρ , concentrando-se num canal específico: $\rho^+(+\hat{z}) \rightarrow \pi^+\pi^0$, resultando em

$$h_{fi} \Big|_{\rho^+(+\hat{z}) \rightarrow \pi^+\pi^0} = -\frac{2^{7/2}}{3^3} \pi^{-1/4} \frac{g}{m_q} \frac{P}{\beta^{3/2}} e^{-P^2/12\beta^2} Y_{11}(\Omega_B) \quad (1.56)$$

Substituindo (1.56) em (1.41) obtemos a expressão para $\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}$

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = \sqrt{\pi} \left(\frac{2^{10}}{3^6} \right) \gamma^2 \frac{M_\rho}{4} x^3 e^{-x^2/6}. \quad (1.57)$$

Na figura (1.7), vemos os gráficos das taxas $\Gamma_{A \rightarrow BC}$ como função do parâmetro β , onde o parâmetro γ foi fixado em 0.5.

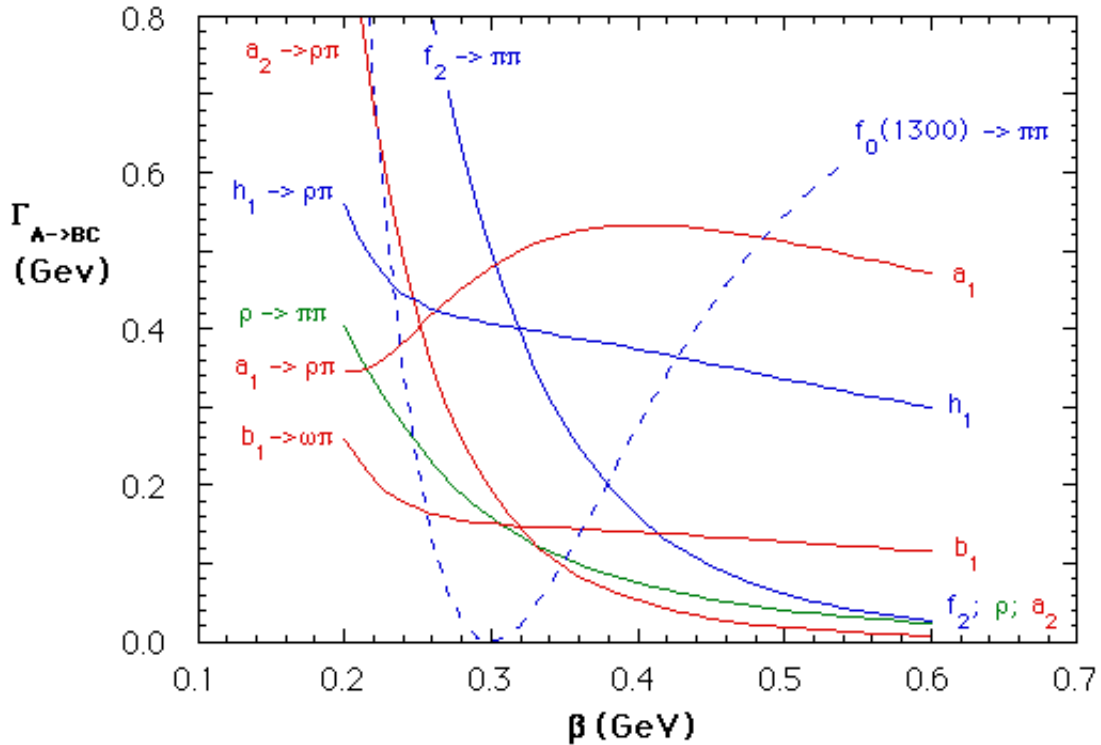


Fig. 1.7: Decaimentos de alguns mésons leves no modelo 3P_0 para $\gamma = 0.5$.

O parâmetro β situado numa faixa 0.35 - 0.4 GeV resulta numa descrição precisa das taxas de decaimento. Na tabela (1.1) são mostradas as taxas de decaimento, resultado do ajuste de um conjunto representativo de sete mésons $q\bar{q}$ de onda-S e onda-P bem estabelecidos. Neste ajuste β e γ são considerados parâmetros livres [27]. As massas têm os seguintes valores

$$\begin{aligned} M_\pi &= 0.138 \text{ GeV}, & M_K &= 0.496 \text{ GeV}, & M_\rho &= 0.770 \text{ GeV}, & M_\omega &= 0.782 \text{ GeV}, \\ M_{h_1} &= 1.170 \text{ GeV}, & M_{a_1} &= 1.230 \text{ GeV}, & M_{b_1} &= 1.231 \text{ GeV}, & M_{f_2} &= 1.275 \text{ GeV}, \\ M_{f_0} &= 1.300 \text{ GeV}, & M_{a_2} &= 1.318 \text{ GeV}, & M_{K_0^*} &= 1.429 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

T. Barnes *et al* incluíram no cálculo o processo $K_0^*(1430) \rightarrow K\pi$, pois a taxa ${}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0$ se mostrou muito sensível aos valores de β e também pelo fato de $K_0^*(1430)$ ser a única

ressonância 3P_0 bem estabelecida. O resultado do ajuste foi completado minimizando

$$\sum_{i=1}^7 \left(\frac{\Gamma_{A \rightarrow BC}^{teo.}}{\Gamma_{A \rightarrow BC}^{exp.}} - 1 \right)^2, \quad (1.59)$$

obtendo os seguintes parâmetros

$$\beta = 0.397 \text{ GeV} \quad , \quad \gamma = 0.506 . \quad (1.60)$$

A discrepância mais significativa na tabela (1.1) está no processo $\rho \rightarrow \pi\pi$ e também associado ao $K_0^*(1430)$.

Decaimento	Exp.[28] (MeV)	Modelo 3P_0 (MeV)	Exp.[29, 28] Razão D/S	Modelo 3P_0 Razão D/S
$\rho \rightarrow \pi\pi$	151	79		
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	157	170		
$a_2 \rightarrow \rho\pi$	72	54		
$a_1 \rightarrow \rho\pi$	400	545	-0.09(2)	-0.154
$b_1 \rightarrow \omega\pi$	142	143	+0.260(35)	+0.292
$h_1 \rightarrow \rho\pi$	360	383	-	+0.222
$K_0^*(1430) \rightarrow K\pi$	287	166		
$f_0 \rightarrow \pi\pi$	150 a 400	271		

Tab. 1.1: Ajuste do modelo 3P_0 para as taxas de decaimento dos mésons leves ($\gamma = 0.506$ e $\beta = 0.397 \text{ GeV}$)

É possível realizar um teste muito mais refinado em decaimentos hadrônicos, quando há mais de uma onda parcial. Nestes casos pode-se medir as fases relativas, assim como as magnitudes das amplitudes de decaimento nestes processos. Para se ter um decaimento de múltiplas amplitudes é necessário ter pelo menos um méson no estado final com spin diferente de zero. No exemplo mostrado acima em (1.56) o estado final contém apenas píons (que tem spin zero), logo a amplitude h_{fi} contém apenas uma onda parcial. Para os decaimentos que iremos considerar, os estados finais relevantes irão conter $\rho\pi$ e $\omega\pi$. Estes estados têm $J^P = 1^+$, portanto eles vão possuir mais de uma onda parcial na amplitude e, conseqüentemente, o estado inicial irá decair em estados que contém um méson vetor de ondas-S e ondas-D mais um méson pseudo-escalar. Aumentando o valor de $L_{q\bar{q}}$, ondas mais altas serão encontradas na amplitude, por exemplo $\pi_2 \rightarrow \rho\pi$ ondas-P e F; $\pi_2 \rightarrow f_2\pi$ ondas-S, D e G. Na relação de mésons leves da tabela (0.1) os canais

$$b_1 \rightarrow \omega\pi$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \rho\pi \\ h_1 &\rightarrow \rho\pi, \end{aligned} \quad (1.61)$$

apresentam a característica de múltiplas amplitudes no canal final. O cálculo da razão D/S para estes mésons fornece o teste preciso para o modelo. Estas razões são conhecidas experimentalmente para alguns mésons. Em particular o canal $b_1 \rightarrow \omega\pi$ é atraente, pois as larguras de b_1 e do ω são estreitas.

Para fins de cálculo pode-se tomar um b_1 com uma polarização e canal de carga inicial definidas e calcular o respectivo elemento de matriz h_{fi} . Assim considera-se $b_1^+(J_z = +1)$ e escolhe-se um estado final de polarização para o ω de $\omega(S_z = +1)$. Então

$$h_{fi} \Big|_{b_1^+(+\hat{z}) \rightarrow \omega(+\hat{z})\pi^+} = -\frac{\gamma}{\pi^{1/4}\beta^{1/2}} \frac{2^4}{3^{5/2}} \left\{ \left(1 - \frac{2}{9}x^2\right) Y_{00}(\Omega) + \frac{2}{325^{1/2}} x^2 Y_{20}(\Omega) \right\} e^{-x^2/12}. \quad (1.62)$$

Substituindo (1.62) em (1.41) obtemos a expressão para $\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi}$

$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = \sqrt{\pi} \left(\frac{2^9}{3^5}\right) \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} \gamma^2 x \left[1 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{3}\right)^4 \right] e^{-x^2/6} \quad (1.63)$$

Este elemento de matriz determina os valores relativos das amplitudes S e D no estado final $|\omega\pi\rangle$. Como o valor de momento angular total é $J^P = 1^+$, o estado $|\omega\pi\rangle$ deve ser uma mistura de onda-S e onda-D da seguinte forma

$$|\omega\pi\rangle = a_S |{}^3S_1\rangle + a_D |{}^3D_1\rangle. \quad (1.64)$$

A projeção deste estado genérico (1.64) sobre o estado $|\omega(+\hat{z})_\Omega \pi_{-\Omega}\rangle$ consiste num ω polarizado na direção \hat{z} com $S_z = +1$ e de um pión recuando com $L = 2$, mas com $J = 1$. Segue da decomposição com Clebsch-Gordons, para acoplamentos de momento angular, que a onda-D da amplitude deva ter um fator $\sqrt{1/10}$

L_z	$S_\omega(\hat{z})$	$J=1 ; J_z = +1$
+2	-1	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
+1	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$
0	+1	$\sqrt{\frac{1}{10}}$

Tab. 1.2: Possíveis valores para os coeficientes de Clebsch-Gordons

Assim,

$$\langle \omega(+\hat{z})_\Omega \pi_{-\Omega} | \omega\pi \rangle = a_S Y_{00}(\Omega) + a_D \sqrt{\frac{1}{10}} Y_{20}(\Omega). \quad (1.65)$$

Portanto, a razão a_D/a_S sai diretamente do elemento de matriz h_{fi} (descontado do fator $\sqrt{1/10}$) em (1.62)

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = + \frac{2^{3/2}}{3^2} \frac{x^2}{\left(1 - \frac{2}{9}x^2\right)} . \quad (1.66)$$

Procedendo de forma similar, obtem-se para $a_1 \rightarrow \rho\pi$

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = - \frac{2^{1/2}}{3^2} \frac{x^2}{\left(1 - \frac{2}{9}x^2\right)} . \quad (1.67)$$

A *razão* das razões D/S nestes decaimentos é especialmente interessante pois, no modelo 3P_0 , a dependência na função de onda espacial se cancela. Encontramos

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = - \frac{1}{2} . \quad (1.68)$$

O modelo 3P_0 foi originalmente comparado com dados do “Particle Data Group” de 1994, assim experimentalmente estas razões são [28]

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = +0.260 \pm 0.035 \quad (1.69)$$

e com os dados da Colaboração ARGUS de 1993 [29]

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = -0.09 \pm 0.02 , \quad (1.70)$$

portanto a razão

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = -0.35 \pm 0.09 . \quad (1.71)$$

Teoria e experimento para estas razões D/S são comparadas na figura Fig. (1.8). O melhor ajuste fornece $\beta = 0.448$ GeV, para o qual $(D/S)_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = +0.219$ e $(D/S)_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = -0.115$.

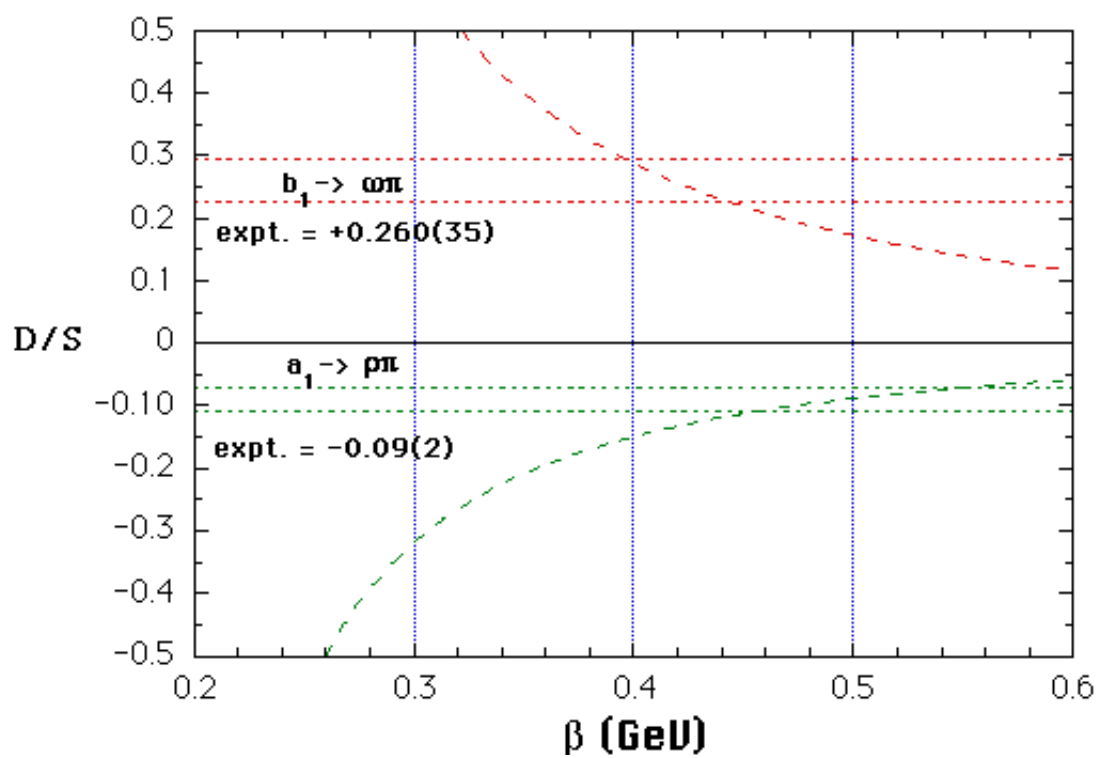


Fig. 1.8: Razões D/S para os decaimentos $b_1 \rightarrow \omega\pi$ e $a_1 \rightarrow \rho\pi$

Capítulo 2

O Formalismo de Fock-Tani para Mésons e o Decaimento Mesônico

Neste capítulo será apresentada uma revisão dos aspectos gerais do formalismo de Fock-Tani e a sua aplicação às interações entre mésons. Inicialmente, o formalismo de Fock-Tani foi desenvolvido por M. Girardeau e colaboradores [9]-[19] nas décadas de '70 e '80 para estudar interações entre átomos para energias nas quais os seus graus de liberdade internos, de elétrons e prótons, não podiam ser desprezados.

Este formalismo foi estendido para a física dos hádrons, no estudo de bárions no trabalho de doutorado de Dimiter Hadjimichef (IFT/1995) [30], no estudo de mésons no trabalho de doutorado de Sérgio Szpigel (USP/1995) [31] e em publicações posteriores [32]-[34]. Outras aplicações foram para sistemas mistos com interações entre bósons e férmions como, por exemplo, no sistema káon-núcleon [35] e também para interações entre glueballs (trabalho de mestrado de Mário L. L. da Silva, UFRGS - 2004) [36, 37]. Nesta dissertação, iremos seguir a notação e o desenvolvimento utilizados nos trabalhos sobre o formalismo de Fock-Tani aplicado a mésons de Sérgio Szpigel (tese de doutorado [31]) e de Daniel Tavares da Silva (dissertação de mestrado [8]).

2.1 O Formalismo de Fock-Tani

No formalismo de Fock-Tani (FT) partimos da representação do sistema no espaço de Fock, usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares.

Consideremos um sistema contendo quarks e antiquarks (constituintes elementares) que podem formar estados ligados (mésons compostos). Nesta representação, os estados de um méson podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons aplicados ao vácuo, operadores estes que podem ser definidos em termos de combinações lineares de

produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks.

Consideremos o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor de estado $|\alpha\rangle$ no espaço de Fock \mathcal{F} que descreve esse méson, de acordo com o apresentado no apêndice B, é dado por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (2.1)$$

onde M_α^\dagger é o operador de criação de um méson composto no estado α e $|0\rangle$ é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0; \quad (2.2)$$

nesta representação q_μ representa o operador aniquilação de um quark contendo números quânticos representados por μ , e \bar{q}_ν denota o operador aniquilação de um antiquark com números quânticos representados por ν ; o operador M_α^\dagger é definido como:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (2.3)$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do estado ligado do méson, sendo q_μ^\dagger e \bar{q}_ν^\dagger os correspondentes conjugados hermitianos de q_μ e \bar{q}_ν . O índice α representa, de uma maneira compacta, os números quânticos do méson: $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$. Os índices μ e ν identificam os números quânticos de quarks e antiquarks: $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$. É conveniente ademais trabalhar com funções de onda orto-normalizadas:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0, \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando estas relações de anticomutação, juntamente com a condição de orto-normalização apresentada na equação (2.4), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos (ver Apêndice C):

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \quad , \quad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (2.7)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O termo $\Delta_{\alpha\beta}$ apresentado na Eq. (2.7), e que aparece na relação não-canônica (2.6), é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A presença deste termo é indicativo do alto nível de complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como a utilização de funções de Green, do teorema de Wick, entre outros, aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$ e $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$ não se anulam expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson, M_α e M_α^\dagger , não são variáveis dinâmicas convenientes.

A idéia do formalismo de Fock-Tani é fazer uma mudança de representação, de forma que os operadores das partículas compostas sejam redescritos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Naturalmente, as complicações da natureza composta dos mésons aparecerão em algum outro ponto do formalismo. A mudança de representação é realizada por meio de um operador unitário, U , de modo que os estados de um méson composto sejam redescritos por estados de um méson ideal, descritos por operadores de destruição e criação de partículas “ideais”, m_α e m_α^\dagger . Em outras palavras, queremos efetuar a seguinte substituição

$$\boxed{\begin{array}{ccc} M_\alpha^\dagger|0\rangle & \implies & m_\alpha^\dagger|0\rangle \\ \text{Mésón} & & \text{mésón} \\ \text{físico} & & \text{ideal} \end{array}} \quad (2.9)$$

Dessa forma, se $|\alpha\rangle$ representa um estado de um méson composto, ele será redescrito por um méson elementar “ideal” sob a transformação

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle . \quad (2.10)$$

Na nova representação, os estados de mésons elementares ideais são representados por “bras” e “kets” circulares ao invés de angulares. O estado $|0\rangle$ representa o vácuo para os graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons “ideais” na nova representação e operadores de méson “ideal”, m_α^\dagger e m_α , satisfazem, por definição, relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta] &= 0 , \\ [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (2.11)$$

e são cinematicamente independentes dos operadores de quarks e antiquarks

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0 . \quad (2.12)$$

2.1.1 Espaço de Vetores de Estados Ideais

Seja $|\Omega\rangle$ um vetor de estado arbitrário em segunda quantização e O um operador arbitrário, ambos expressos em termos dos operadores de quarks e antiquarks, $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$, da representação de Fock original e $|\Omega\rangle$ e O_{FT} as quantidades correspondentes na nova representação:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O operador U deve ser unitário, pois assim as normas dos produtos escalares entre os vetores de estado bem como os elementos de matriz (valores esperados) dos operadores serão preservados sob a mudança de representação:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\Omega\rangle &= (\Omega|\Omega), \\ \langle\Omega|O|\Omega\rangle &= (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

O operador unitário U é construído expandindo-se o espaço de Fock original de modo que os estados de méson “ideal” sejam incluídos. Consideremos o espaço de Fock físico, indicado por \mathcal{F} . Esse é o espaço de estados gerado por todas as combinações lineares de operadores de quarks e antiquarks, atuando no vácuo físico na forma

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle, \quad (2.15)$$

onde l e m são parâmetros arbitrários. Definimos um espaço de Hilbert \mathcal{M} , o espaço de mésons ideais, independente do espaço de Fock físico \mathcal{F} , como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados constituídos de operadores de “méson ideal”,

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (2.16)$$

onde $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ é o vácuo de \mathcal{M} , definido por

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{M}} = 0. \quad (2.17)$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado “espaço de estados ideais”, como o produto direto dos espaços de Fock físico \mathcal{F} e de mésons ideais \mathcal{M} ,

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}, \quad (2.18)$$

onde o símbolo \otimes representa produto interno.

As relações de comutação das Eqs. (2.6) e (2.8), inicialmente definidas em \mathcal{F} , como também as da Eq. (2.11), inicialmente definidas em \mathcal{M} , são válidas também em \mathcal{I} . Por

definição, os operadores de quark e de méson ideal são cinematicamente independentes e, portanto, também satisfazem a Eq. (2.12) em \mathcal{I} .

O vácuo de \mathcal{I} é dado pelo produto direto dos vácuos de \mathcal{M} e \mathcal{F} ,

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle_{\mathcal{M}} . \quad (2.19)$$

Dessa forma, $|0\rangle$ é o vácuo dos graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons ideais:

$$q_\mu|0\rangle = \bar{q}_\nu|0\rangle = m_\alpha|0\rangle = 0 . \quad (2.20)$$

Note, porém, que os operadores de quarks e antiquarks atuam no vácuo físico $|0\rangle$ e os operadores de mésons ideais atuam no vácuo ideal de mésons $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ na Eq. (2.19).

Estabelecemos, assim, uma correspondência um-para-um entre os estados do espaço de Fock físico \mathcal{F} e os estados de um sub-espaço de \mathcal{I} . Em \mathcal{I} , existe um sub-espaço \mathcal{I}_0 que é isomórfico ao espaço de Fock original \mathcal{F} e consiste dos estados $|\Omega\rangle \in \mathcal{F}$ sem mésons ideais,

$$m_\alpha|\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha , \quad \text{ou} \quad N_m|\Omega\rangle = 0 , \quad (2.21)$$

onde N_m é o operador número total de mésons ideais

$$N_m = m_\alpha^\dagger m_\alpha . \quad (2.22)$$

A Eq. (2.21) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em \mathcal{I} .

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, exige que em \mathcal{I}_0 os mésons ideais sejam modos redundantes, ou seja, correspondam a estados totalmente desocupados. Esta condição é necessária para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

O operador unitário U atua sobre estados de \mathcal{I} e não pode ser definido apenas em \mathcal{F} . Contudo, U está definido em \mathcal{I}_0 , que é isomórfico a \mathcal{F} . Definimos, então, o espaço de Fock-Tani \mathcal{F}_{FT} como o espaço imagem de \mathcal{I}_0 :

$$\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0 . \quad (2.23)$$

Assim, o espaço \mathcal{F}_{FT} é o sub-espaço de \mathcal{I} cujos vetores de estado, representados por $|\Omega\rangle$ na nova representação, estão relacionados aos vetores de estado de \mathcal{I}_0 por

$$|\Omega\rangle = U|\Omega\rangle \Rightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle . \quad (2.24)$$

Qualquer cálculo efetuado no espaço físico \mathcal{F} é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani. Para dois vetores de estados quaisquer, $|\Omega\rangle$ e $|\Omega'\rangle$, e para qualquer observável $O \in \mathcal{F}$, temos

$$\langle\Omega|O|\Omega'\rangle = (\Omega|U^{-1}OU|\Omega') = (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega') . \quad (2.25)$$

É claro que em \mathcal{F}_{FT} , a condição que garante que não há dupla contagem,

$$U^{-1}m_\alpha U|\Omega\rangle = 0, \quad (2.26)$$

deve sempre ser satisfeita.

A vantagem de trabalhar em \mathcal{F}_{FT} é que neste espaço todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de comutação ou anti-comutação canônicas. No entanto, a natureza composta dos mésons será transferida para outro lugar. Os operadores transformados,

$$O_{\text{FT}} = U^{-1}OU, \quad (2.27)$$

dão origem a séries infinitas que fisicamente representam, de algum modo, uma expansão na densidade do sistema [33].

O método apresentado será eficiente para cálculos práticos se forem necessários poucos termos da série para descrever as interações entre os mésons e os quarks. A obtenção de forças efetivas de muitos corpos entre os mésons requer uma expansão até altas ordens na função de onda do méson. No entanto, interações efetivas entre dois mésons podem ser obtidas em ordens relativamente baixas.

Outra complicação potencial relaciona-se com a condição subsidiária anteriormente apresentada em (2.21). Em problemas envolvendo muitos mésons deve-se tomar cuidado para não violar esse vínculo. Para um estado contendo vários mésons compostos, $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = M_{\alpha_1}^\dagger \dots M_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$, a transformação através do operador U não resulta, em geral, em um estado produto de mésons ideais, pois $U^{-1}M_\alpha^\dagger U$ difere de m_α^\dagger por uma série infinita contendo operadores de quarks. No entanto, é possível mostrar que um estado em \mathcal{F}_{FT} da forma $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \dots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$ satisfaz a condição subsidiária Eq. (2.26) e, portanto, pode representar um estado físico. A imagem deste estado em \mathcal{I}_0 é um estado complexo contendo quarks, antiquarks e mésons. Para processos de espalhamento, a matriz- S é definida em termos de estados assintóticos, os quais, por definição, não se superpõem, de forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \rightarrow U^{-1}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle &= |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \\ &= m_{\alpha_1}^\dagger \dots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Portanto, para estados assintóticos, a condição subsidiária é trivialmente satisfeita.

2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais

Uma forma de implementar a substituição (2.9) consiste em definir um novo operador

$$f_0 = m_\alpha^\dagger M_\alpha \quad (2.29)$$

que atua sobre o estado mesônico composto; combinando-o com as expressões (2.1) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} f_0 | \beta \rangle &= m_\alpha^\dagger M_\alpha | \beta \rangle = m_\alpha^\dagger M_\alpha M_\beta^\dagger | 0 \rangle = m_\alpha^\dagger (M_\beta^\dagger M_\alpha + \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}) | 0 \rangle \\ &= m_\beta^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desta expressão vemos que a atuação de f_0 sobre o estado composto produz efetivamente um estado elementar “ideal” na forma buscada.

Podemos construir, a partir de (2.29), um operador F_0 , anti-hermitiano, $F_0^\dagger = -F_0$, da seguinte forma

$$F_0 = f_0 - f_0^\dagger = m_\alpha^\dagger M_\alpha - M_\alpha^\dagger m_\alpha, \quad (2.31)$$

onde a atuação de F_0 sobre os estados composto e elementar resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned} F_0 |\alpha\rangle &= m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ F_0 m_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -|\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalmente, podemos construir, a partir da definição (2.31) do operador anti-hermitiano F_0 , uma transformação unitária capaz de implementar a substituição expressa na equação (2.9), isto é, podemos definir

$$U(t) = \exp(tF_0) \quad (2.33)$$

onde o operador F_0 , o gerador da transformação buscada, depende de um parâmetro real, t , como será visto a seguir (t representa na realidade um ângulo de rotação no espaço de Hilbert). Utilizando (2.32), podemos obter as expressões para as potências de F_0 aplicadas aos estados composto (físico) e elementar (ideal), respectivamente:

$$\begin{aligned} F_0^2 M_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -M_\alpha^\dagger | 0 \rangle & F_0^2 m_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ F_0^3 M_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -m_\alpha^\dagger | 0 \rangle & F_0^3 m_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Desta forma, podemos realizar a transformação unitária completa sobre o estado composto

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= \left(1 - tF_0 + \frac{t^2}{2!} F_0^2 - \frac{t^3}{3!} F_0^3 + \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &= \left(1 + \frac{t^2}{2!} F_0^2 + \frac{t^4}{4!} F_0^4 + \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &\quad - \left(tF_0 + \frac{t^3}{3!} F_0^3 + \frac{t^5}{5!} F_0^5 + \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &= (\cos t) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle - (\sin t) m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se tomarmos $t = -\pi/2$ obtemos o estado transformado

$$U^{-1} M_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle = m_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle \equiv |\alpha\rangle. \quad (2.36)$$

2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores.

2.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores

O primeiro passo na implementação do método requer a transformação dos operadores básicos do modelo em estudo. À primeira vista, a transformação unitária poderia ser avaliada com uma expansão em múltiplos comutadores envolvendo todas as ordens de produtos dos operadores de criação e destruição de mésons físicos e ideais. A transformação de um operador de méson, por exemplo, seria da seguinte forma

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) = U^{-1}(t) M_{\alpha}^{\dagger} U(t) = \exp(-tF_0) M_{\alpha}^{\dagger} \exp(tF_0) = M_{\alpha}^{\dagger} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j \quad (2.37)$$

onde $[M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j$ denota o múltiplo comutador de ordem j definido de maneira recursiva por

$$\begin{aligned} [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_1 &= [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0] & ; & \quad [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_2 = [[M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_1, F_0] \\ \dots [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_{j+1} &= [[M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j, F_0]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Através da relação operatorial simples

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (2.39)$$

podemos calcular $[M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j$ para diferentes valores de j . De (2.31) temos, por exemplo, para o termo de primeira ordem

$$[M_{\alpha}^{\dagger}, F_0] = [M_{\alpha}^{\dagger}, m_{\beta}^{\dagger} M_{\beta} - M_{\beta}^{\dagger} m_{\beta}] = m_{\beta}^{\dagger} (\Delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.40)$$

Nos demais termos das ordens subsequentes aparecem potências das mais diferentes ordens em $\Delta_{\alpha\beta}$. Se desprezarmos os termos envolvendo potências de $\Delta_{\alpha\beta}$ o cálculo fica simplificado. No entanto, estamos com isso eliminando do problema os efeitos da estrutura interna dos mésons. Este caso, apenas para efeito ilustrativo, é mostrado abaixo (um procedimento mais elaborado será mostrado mais adiante).

$$\begin{aligned} [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_1 &\approx -m_{\alpha}^{\dagger} & , & \quad [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_2 \approx -M_{\alpha}^{\dagger} \\ [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_3 &\approx m_{\alpha}^{\dagger} & , & \quad [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_4 \approx M_{\alpha}^{\dagger} \\ [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_5 &\approx -m_{\alpha}^{\dagger} & , & \quad [M_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_6 \approx -M_{\alpha}^{\dagger} \\ & & & \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Destas expressões encontramos

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) \approx (\cos t) M_{\alpha}^{\dagger} - (\sin t) m_{\alpha}^{\dagger}; \quad (2.42)$$

em particular quando $t = -\pi/2$ temos

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) \approx m_{\alpha}^{\dagger}. \quad (2.43)$$

A expansão em múltiplos comutadores (2.37), usada para determinar a transformação de operadores, não é do ponto de vista prático muito útil. A razão disto reside no fato de até a aproximação de “ordem zero” (Eq. (2.42)) envolver uma série infinita. À medida que levarmos em conta o termo operatorial $\Delta_{\alpha\beta}$, a série gerada pela expansão em múltiplos comutadores torna-se muito mais complexa. Há nestes termos, devido à sua complexidade, pouca esperança em reconhecermos termos gerais da série relevante e procedermos na busca de efetuar a sua soma de maneira fechada. Então, torna-se uma necessidade desenvolvermos um método consistente e eficiente para avaliarmos os operadores transformados.

Na próxima subseção , mostraremos uma técnica chamada de *método das equações de movimento*, que servirá para construir a transformação de Fock-Tani dos operadores de maneira iterativa.

2.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”

Os operadores básicos de um determinado modelo aplicado a física de mésons compostos, tais como o operador Hamiltoniano, correntes eletromagnéticas, entre outros, são expressos em termos de operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks. Dessa forma, para obtermos os operadores do modelo na nova representação, aquela que envolve mésons ideais, necessitamos dos operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks transformados. Apresentamos abaixo os operadores de destruição de quarks e antiquarks na nova representação , simbolizados respectivamente por q_{FT} e \bar{q}_{FT}

$$\begin{aligned} q_{\text{FT}} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\text{FT}} &= U^{-1}\bar{q}U . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os operadores de criação correspondentes são obtidos de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (2.44) e lembrando que $U^{-1} = U^{\dagger}$.

Os cálculos dessas expressões pelo método de multicomutadores é complexo, envolvendo séries infinitas e não podem, em geral, ser expressos em uma forma fechada. No entanto, as transformações destes operadores podem ser obtidas iterativamente através do método

denominado de “equações de movimento”, sugerido por Girardeau[11]. Para qualquer operador O , define-se:

$$O(t) = \exp(-tF_0)O \exp(tF_0) . \quad (2.45)$$

Diferenciando-se a expressão acima com relação a t , obtemos a equação de movimento para o operador O :

$$\frac{dO(t)}{dt} = [O(t), F_0] , \quad (2.46)$$

com a “condição inicial”:

$$O(t = 0) = O . \quad (2.47)$$

Os operadores transformados de Fock-Tani são obtidos das soluções das Eqs. (2.46)-(2.47) para $t = -\frac{\pi}{2}$:

$$O_{\text{FT}}(t) |_{t=-\pi/2} = U^{-1}(t)OU(t) |_{t=-\pi/2} = O(-\pi/2) . \quad (2.48)$$

Deste modo, usando a Eq. (2.46) e o gerador da transformação dado na Eq. (2.31), obtemos as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F_0] \\ &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t) , \end{aligned} \quad (2.49)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} &= [\bar{q}_\nu(t), F_0] \\ &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger(t) m_\alpha(t) . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Uma vez que as equações de movimento para q e \bar{q} envolvem $m_\alpha(t)$, é necessário obter também a equação de movimento para $m_\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F_0] \\ &= M_\alpha(t) . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{dM_\alpha(t)}{dt} &= [M_\alpha(t), F_0] \\ &= -[\delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}(t)] m_\beta(t) . \end{aligned} \quad (2.52)$$

As Eqs. (2.49)-(2.52), juntamente com suas equações conjugadas hermitianas, formam um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, e que apresentam um grau elevado de complexidade no que se refere a sua resolução, comparável à técnica de multi-comutadores. No entanto, essas equações podem ser resolvidas de maneira direta através do método de iteração.

Partindo de uma aproximação de ordem zero, onde é desprezado o termo $\Delta_{\alpha\beta}$, coletamos os termos de mesma ordem na função de onda do estado ligado, Φ_α e Φ_α^* . Dessa forma, escrevemos os operadores criação e destruição como uma expansão

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t), & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t), \\ m_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t), & M_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde (i) indica a ordem nas funções de onda. Para que se tenha uma contagem de potências consistente, como pode ser visto nas Eqs. (2.55) a seguir, a presença implícita das funções de onda na definição dos operadores M_α e M_α^\dagger via Eq. (2.3), não devem entrar na contagem. Desta forma, as expansões da Eq. (2.53) pode ser entendidas como expansões na densidade do sistema[11].

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são obtidas desprezando-se os termos $\Delta_{\alpha\beta}(t)$ e Φ_α nas Eqs. (2.49)-(2.52):

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} = 0 ; \\ \frac{dM_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(0)}(t) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando as condições iniciais da Eq. (2.47), as soluções resultam em

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu \quad ; \quad \bar{q}_\nu^{(0)}(t) = \bar{q}_\nu ; \\ m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \sin t \quad ; \quad M_\alpha^{(0)}(t) = M_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Deve-se notar que as condições iniciais foram impostas sobre o termo de ordem zero na expansão da Eq. (2.53). Assim, para que esta expansão seja consistente com a Eq. (2.47), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem $i \geq 1$ que:

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\mu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = M_\alpha^{(i)}(t=0) = 0, \text{ para } i \geq 1. \quad (2.56)$$

Uma vez que o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ não contribui para as equações de movimento em primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) ; \\ \frac{dM_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(1)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(1)}(t) . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Com as condições iniciais da Eq. (2.56) e a condição em $t = -\pi/2$, ao integrar-se as expressões da Eq. (2.57) combinadas com as expressões da Eq. (2.55), obtemos:

$$q_\mu^{(1)}(t) = -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger} [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] ,$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_\nu^{(1)}(t) &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_{\mu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ m_\alpha^{(1)}(t) &= 0 , \\ M_\alpha^{(1)}(t) &= 0 .\end{aligned}\tag{2.58}$$

Esse processo iterativo pode ser estendido diretamente até ordens mais altas. No entanto, as soluções de segunda ordem em diante darão origem a termos seculares, isto é, termos que envolvem polinômios em t , além de funções trigonométricas em t . Entre outras coisas, os termos seculares introduzem as familiares discrepâncias “post-prior” [18] na análise de processos de espalhamento e processos reativos. A origem dos termos seculares está na assimetria das equações de movimento para m_α e M_α , Eqs. (2.51) e (2.52). A simetria é quebrada pelo termo $\Delta_{\alpha\beta}$. Formalmente o problema foi resolvido por Girardeau e Straton [17]. A solução consiste em adicionar a F um termo dependente de $\Delta_{\alpha\beta}$ de modo que as equações tornem-se simétricas. Seguimos, aqui, o procedimento de Lo e Girardeau [18], que embora seja equivalente ao procedimento de Girardeau e Straton, é mais elegante e sistemático.

O gerador da transformação é definido neste caso como

$$F = m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha - \tilde{M}_\alpha^\dagger m_\alpha,\tag{2.59}$$

ou seja, como uma superposição de termos do tipo do operador anti-hermitiano definido na Eq.(2.31) e onde o operador \tilde{M}_α é uma função somente dos operadores de quark e antiquark. \tilde{M}_α é escolhido de tal forma que satisfaça relações de comutação canônicas, ou seja:

$$\begin{aligned}[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta] &= 0 , \\ [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} ,\end{aligned}\tag{2.60}$$

isto é, incorporando em sua definição termos que eliminam a presença de $\Delta_{\alpha\beta}$ em (2.6). Isto leva a equações de movimento simétricas para m_α e \tilde{M}_α em todas as ordens nas funções de onda de estado ligado Φ_α e Φ_α^* :

$$\begin{aligned}\frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F] = \tilde{M}_\alpha(t) , \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha(t)}{dt} &= [\tilde{M}_\alpha(t), F] = -m_\alpha(t) ,\end{aligned}\tag{2.61}$$

e que representam assim uma extensão das Eqs.(2.51) e (2.52). Note-se que, diferentemente da Eq.(2.52), a segunda das expressões acima não contém explicitamente a presença do termo $\Delta_{\alpha\beta}$ que está contido implicitamente na definição de \tilde{M}_α . As soluções destas equações

$$\begin{aligned}m_\alpha(t) &= \tilde{M}_\alpha \sin t + m_\alpha \cos t , \\ \tilde{M}_\alpha(t) &= \tilde{M}_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t ,\end{aligned}\tag{2.62}$$

contêm somente funções trigonométricas em t . Não é difícil mostrar que isto elimina também os termos seculares dos operadores de quark e antiquark.

O operador \tilde{M}_α é também determinado iterativamente, ou seja, ordem a ordem em Φ_α e Φ_α^* , de modo que \tilde{M}_α pode ser expandido similarmente às definições apresentadas em (2.53), como

$$\tilde{M}_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{M}_\alpha^{(i)}(t) , \quad (2.63)$$

onde, novamente, (i) indica a ordem considerada em Φ_α e Φ_α^* . O termo de ordem zero é trivialmente dado por:

$$\tilde{M}_\alpha^{(0)} = M_\alpha , \quad (2.64)$$

que certamente satisfaz a Eq. (2.60), em ordem zero. Isto porque nesta ordem de aproximação despreza-se a presença de $\Delta_{\alpha\beta}$ em (2.6), e (2.64) reproduz, portanto, os resultados originais para primeira e segunda ordem. O termo seguinte é o de segunda ordem:

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(2)} , \quad (2.65)$$

onde $\tilde{M}_\alpha^{(2)}$ deve ser escolhido de forma que

$$[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) . \quad (2.66)$$

A escolha apropriada que satisfaz esta condição é:

$$\tilde{M}_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta . \quad (2.67)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos o operador em terceira ordem em i ,

$$\tilde{M}_\alpha^{(3)} = -\frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma . \quad (2.68)$$

Assim, até terceira ordem em Φ_α , verifica-se que o operador \tilde{M}_α é dado por:

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta + \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma . \quad (2.69)$$

Pode-se mostrar, usando estas relações, que:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

As equações de movimento em segunda ordem para m_α e \tilde{M}_α , usando a transformação de Fock-Tani generalizada, são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [m_\alpha^{(2)}(t), F] = \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) , \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [M_\alpha^{(2)}(t), F] = -m_\alpha^{(2)}(t) . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ao considerarmos as equações de movimento para os operadores q e \bar{q} , temos que incluir as contribuições adicionais que resultam da mudança do gerador da transformação. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(2)}(t), F] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(1)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) , \\ \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(2)}(t), F] &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^{\dagger(1)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) . \end{aligned} \quad (2.72)$$

As condições iniciais para $\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t)$ são dadas por

$$\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t=0) = \tilde{M}_\alpha^{(i)} \quad , \quad \forall i \quad . \quad (2.73)$$

Assim, temos $\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t=0) = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta$ e, integrando-se as Eqs. (2.71)-(2.72) obtemos

$$\begin{aligned} m_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \sin t , \\ \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \cos t , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_\mu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu\nu_1} \left[m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] q_{\mu_2} \\ \bar{q}_\nu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu} \left[m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] \bar{q}_{\nu_2} . \end{aligned} \quad (2.74)$$

As equações de movimento em terceira ordem para os operadores de quarks e antiquarks são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(3)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(3)}(t), F] &= -\frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \left[\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(2)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(2)}(t) \right] \right. \\ &\quad + \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \right] \\ &\quad + \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma} \Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma_1}^{\dagger(0)}(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\ &\quad + \Phi_\alpha^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1} \Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma}^{\dagger(0)}(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\ &\quad \left. - \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\gamma\alpha}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right\} , \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(3)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(3)}(t), F] = & \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \left[q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t)m_\alpha^{(2)}(t) + q_{\mu_1}^{\dagger(2)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) \right] \right. \\
 & + \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho\nu_1} \left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)M_\beta^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)m_\beta^{(0)}(t) \right] \\
 & - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho\nu_1}\Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \\
 & - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho_1\sigma}\Phi_\gamma^{\rho\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \\
 & \left. + \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^{\dagger(0)}(t)\Delta_{\gamma\beta}(t)m_\beta^{(0)}(t) \right\} . \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

Integrando-se estas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(3)}(t) = & \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\mu\sigma}\Phi_\gamma^{\rho\sigma_1}\bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 & + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 & + (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 & + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 & + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 & \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 & + \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}\Phi_\beta^{\rho\sigma_1}\bar{q}_{\nu_1}^\dagger\bar{q}_{\sigma_1}^\dagger\bar{q}_\sigma [2M_\beta(\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 & + \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu\nu_1}\Phi_\beta^{\rho_1\sigma}\bar{q}_{\nu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta(\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 \bar{q}_\nu^{(3)}(t) = & -\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\beta^{\rho\nu}\Phi_\gamma^{\rho_1\sigma}q_{\rho_1}^\dagger \left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 & + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 & + (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 & + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 & + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 & \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 & + \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu}\Phi_\beta^{\rho\sigma_1}q_{\mu_1}^\dagger\bar{q}_{\sigma_1}^\dagger\bar{q}_\sigma [2M_\beta(1 - \cos t) + m_\beta \sin t] \\
 & + \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}\Phi_\alpha^{\mu_1\nu}\Phi_\beta^{\rho_1\sigma}q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta(1 - \cos t) + m_\beta \sin t] . \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

Em princípio, este processo pode ser extendido até qualquer ordem, ainda que a complexidade das expressões obtidas aumente muito com a ordem considerada. Sabe-se, no entanto, que para obter uma interação efetiva méson-méson, necessita-se ir somente até a terceira ordem nos operadores de quarks transformados [33]. Para o estudo dos decaimentos mesônicos do tipo $A \rightarrow B + C$, que é o objetivo desta dissertação, operadores de quarks (antiquarks) de até terceira ordem são suficientes. No trabalho de mestrado de Daniel T.

da Silva [8] o modelo de decaimento mesônico foi deduzido, incluindo efeitos relacionados com o fato dos mésons não serem partículas sem estrutura. Este modelo mais robusto para estudar esses processos foi chamado de C^3P_0 , o modelo 3P_0 corrigido. A obtenção deste modelo corrido implica em obter os operadores de quarks (antiquarks) transformados até quarta e quinta ordem. Os detalhes dessa dedução podem ser encontrados em [8]. Uma versão resumida, destes resultados, será apresentada a seguir. Deve ser enfatizado que esta estrutura teórica será usada para tratar da fenomenologia de um grupo de mésons leves e constituirá um importante teste para este modelo.

Antes de tratar do problema de decaimentos, vamos apresentar o Hamiltoniano microscópico, que descreve a interação entre quarks e antiquarks (sem a criação de pares), expresso em termos dos operadores dos constituintes fundamentais, $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$. A intenção é mostrar alguns aspectos conceituais importantes do formalismo de Fock-Tani. Este Hamiltoniano é expresso como uma soma de termos envolvendo contribuições de energia cinética e potencial, sendo da forma

$$\begin{aligned} H = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Nesta expressão, identificamos nos dois primeiros termos contribuições de energia cinética e nos demais contribuições de energia potencial envolvendo interações de dois corpos. Vários Hamiltonianos de modelos de quarks utilizados na literatura podem ser escritos nessa forma. A equação de movimento para a função de onda de um méson é dada por

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} = \epsilon_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{\mu\nu} , \quad (2.79)$$

onde ϵ_α é a energia total do méson, isto é, a soma de sua energia de centro de massa e de sua energia interna, e $H(\mu\nu; \sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu[\mu']}\delta_{\nu[\nu']} [T([\mu']) + T([\nu'])] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (2.80)$$

Usamos nesta parte do texto a convenção de que não há soma nos índices repetidos entre colchetes. O Hamiltoniano exato e transformado é dado, na nova representação, por

$$H_{\text{FT}} \equiv U^{-1} H U , \quad (2.81)$$

isto é, o Hamiltoniano é avaliado em todas as ordens na função de onda do méson e descreve todos os processos possíveis envolvendo quarks e mésons. Tais processos incluem interações de dois corpos do tipo (anti)quark-(anti)quark, méson- (anti)quark, méson-méson, bem como outros processos de muitos corpos envolvendo interações em que várias partículas (quarks, antiquarks e mésons) participam. Até a ordem em que os operadores de quark e

antiquark foram determinados (ordem três), é possível obter-se um Hamiltoniano efetivo truncado, que descreve apenas interações de poucas partículas. O Hamiltoniano na representação de Fock-Tani H_{FT} tem, assim, a seguinte estrutura geral:

$$H_{\text{FT}} = H_{\text{q}} + H_{\text{mq}} + H_{\text{m}} , \quad (2.82)$$

onde H_{q} indica termos contendo somente operadores de quarks e antiquarks, H_{mq} indica termos contendo operadores de mésons e quarks e H_{m} contém apenas operadores de mésons. O procedimento para obter a Eq. (2.82) é substituir na Eq. (2.78) os operadores de quarks transformados, fazendo em seguida o ordenamento normal dos operadores.

Por exemplo, o termo H_{q} tem estrutura idêntica àquela apresentada na Eq. (2.78), exceto pelo termo que descreve a interação quark-antiquark, que é modificado de forma a não produzir, neste modelo, estados ligados quark-antiquark. Os operadores q e \bar{q} presentes em H e H_{q} têm também significados distintos, pois em H_{q} estes operadores representam somente estados de quarks e antiquarks não ligados. Assim,

$$\begin{aligned} H_{\text{q}} = & T(\mu) q_{\mu}^{\dagger} q_{\mu} + T(\nu) \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu} + \frac{1}{2} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\rho} q_{\sigma} \\ & + \frac{1}{2} V_{q\bar{q}}^{\dagger}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} \bar{q}_{\sigma} + \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} q_{\sigma} . \end{aligned} \quad (2.83)$$

O termo importante a salientar é aquele que descreve a interação quark-antiquark modificada e que é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) = & V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma\rho) - H(\mu\nu; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) \\ & + \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) , \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde $\Delta(\mu\nu; \mu'\nu')$ é conhecido como “*kernel* de estado ligado”

$$\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') = \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{*\mu'\nu'} , \quad (2.85)$$

e $H(\mu\nu; \sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (2.86)$$

A origem destes termos é a seguinte:

- primeiro termo em $\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$: este termo representa as contribuições de ordem zero nas funções de onda de estado ligado para os operadores de quarks:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger(0)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)} \bar{q}_{\rho}^{(0)} q_{\sigma}^{(0)} ; \quad (2.87)$$

- segundo termo: é dado pelas contribuições dos termos de primeira ordem nas funções de onda de estado ligado, ou seja,

$$T(\mu) q_{\mu}^{\dagger(1)} q_{\mu}^{(0)} , \quad T(\nu) \bar{q}_{\nu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{(0)} , \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)} \bar{q}_{\rho}^{(0)} q_{\sigma}^{(0)} ; \quad (2.88)$$

- terceiro termo: este termo representa o conjugado Hermitiano das contribuições anteriores.
- quarto termo: é dado pelas contribuições dos termos de segunda ordem, nas funções de onda mencionadas anteriormente.

$$T(\mu)q_{\mu}^{\dagger(1)}q_{\mu}^{(1)}, \quad T(\nu)\bar{q}_{\nu}^{\dagger(1)}\bar{q}_{\nu}^{(1)}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_{\mu}^{\dagger(1)}\bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)}\bar{q}_{\rho}^{(0)}q_{\sigma}^{(1)}. \quad (2.89)$$

O fato de que a interação quark-antiquark remanescente não pode formar estados ligados, em particular aqueles estados ligados empregados na transformação unitária, está em um certo sentido de acordo com a idéia de quase-partículas de Weinberg [20, 21]. O formalismo de quase-partículas de Weinberg foi introduzido com o objetivo de calcular amplitudes de espalhamento para potenciais para os quais a teoria de perturbação não pode ser empregada. Neste formalismo, partículas elementares fictícias são introduzidas na teoria, em correspondência direta com os estados ligados. Para que a física do problema não seja modificada, Weinberg argumenta que é necessário mudar simultaneamente o potencial de forma que contribuições de interação sejam incorporadas gradativamente nas propriedades intrínsecas destas partículas. Como os aspectos dos estados ligados da teoria original são incorporadas em grande parte na forma de modificações das estruturas intrínsecas das partículas originais, o potencial modificado não deve produzir os estados ligados originais. Neste procedimento, o potencial modificado torna-se mais fraco e, por isso, a teoria de perturbação pode ser em geral usada. No formalismo Fock-Tani, o potencial enfraquecido de Weinberg é realizado pelo potencial da Eq. (2.84).

2.3 Hamiltoniano de Decaimento Mesônico de Fock-Tani

Nesta seção, vamos desenvolver o formalismo de Fock-Tani para decaimentos mesônicos. Primeiramente, descrevemos a obtenção do Hamiltoniano efetivo H_{FT} que representa o decaimento de um méson A em outros dois mésons B e C. Como é usual no formalismo de Fock-Tani, o ponto de partida sempre é um Hamiltoniano microscópico que descreve a interação entre os constituintes. No nosso estudo, este Hamiltoniano será o H_I da Eq. (1.34). Inicia-se o cálculo escrevendo H_I na representação de momento, isto é, partindo de

$$H_I = g \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad (2.90)$$

substituímos as expressões para os campos de Dirac dos quarks. Estes são expandidos, para um dado instante de tempo ($t = 0$), em termos de contribuições de frequências positivas e

negativas (onde foram suprimidos os índices de sabor e cor, para simplificar)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p} \sum_s e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) \right] \quad (2.91)$$

com a seguinte normalização

$$u_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = \delta_{sr}. \quad (2.92)$$

Sendo os espinores dados por

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m} \chi_s \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$v_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m} \chi_s^c \\ \chi_s^c \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Como $\bar{\psi}(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma^0$, a Eq. (2.90) pode ser escrita assim

$$\begin{aligned} H_I &= g \int d\vec{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} d\vec{p}' \sum_{ss'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \left[u_{s'}^\dagger(\vec{p}') b_{s'}^\dagger(\vec{p}') + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') d_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \right] \gamma^0 \\ &\times \left[u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Como foi visto no capítulo 1, para o decaimento mesônico o termo que é relevante para este tipo de processo é aquele onde aparece $b^\dagger d^\dagger$, pois este é o termo que efetivamente cria um par quark-antiquark a partir do vácuo. Assim, a Eq. (2.95) pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}} &= g \int d\vec{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} d\vec{p}' \sum_{ss'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \left[u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}) \right] \\ &= g \int d\vec{p} d\vec{p}' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}) \\ &= g \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p}-\vec{p}') \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}), \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} = \delta(\vec{p}-\vec{p}'). \quad (2.97)$$

Trocando $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ obtemos

$$H_{q\bar{q}} = g \delta_{ff'} \delta_{cc'} \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p}+\vec{p}') \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}), \quad (2.98)$$

onde $\delta_{ff'}$ e $\delta_{cc'}$ são as deltas de sabor e cor, respectivamente. Introduzindo a seguinte notação

$$\left. \begin{array}{l} b \rightarrow q \\ d \rightarrow \bar{q} \end{array} \right| \begin{array}{l} \mu = \begin{cases} \vec{p}' \\ s' \\ c' \\ f' \end{cases} \\ \nu = \begin{cases} \vec{p} \\ s \\ c \\ f \end{cases} \end{array} \quad (2.99)$$

obtemos uma nova representação para $H_{q\bar{q}}$, isto é,

$$H_{q\bar{q}} = V_{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}, \quad (2.100)$$

onde $V_{\mu\nu}$ é uma notação compacta para o potencial de criação de pares, definida por

$$V_{\mu\nu} \equiv g \delta_{ff'} \delta_{cc'} \delta(\vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}) u_{s_{\mu}}^{\dagger}(\vec{p}_{\mu}) \gamma^0 v_{s_{\nu}}(\vec{p}_{\nu}) \quad (2.101)$$

Na expressão (2.100) usamos novamente a convenção da soma sobre índices repetidos (soma e/ou integração).

Podemos reescrever a Eq. (2.101) da seguinte forma

$$V_{\mu\nu} \equiv g V_{f_{\mu}f_{\nu}}^f V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c \delta(\vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}) u_{s_{\mu}}^{\dagger}(\vec{p}_{\mu}) \gamma^0 v_{s_{\nu}}(\vec{p}_{\nu}) \quad (2.102)$$

onde

$$V_{f_{\mu}f_{\nu}}^f = \delta_{f_{\mu}f_{\nu}} \quad (2.103)$$

$$V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c = \delta_{c_{\mu}c_{\nu}} \quad (2.104)$$

Substituindo as Eqs. (2.93) e (2.94) na Eq. (2.102), obtemos

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu} &= g V_{f_{\mu}f_{\nu}}^f V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c \delta(\vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}) \left[\frac{(E_{p_{\mu}} + m)(E_{p_{\nu}} + m)}{4E_{p_{\mu}}E_{p_{\nu}}} \right]^{1/2} \\ &\times \left[\chi_{s_{\mu}}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_{\nu}}{E_{p_{\nu}} + m} \chi_{s_{\nu}}^c - \chi_{s_{\mu}}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_{\mu}}{E_{p_{\mu}} + m} \chi_{s_{\nu}}^c \right] \end{aligned} \quad (2.105)$$

Tomando o limite não-relativístico, onde $E \rightarrow m$, encontramos

$$V_{\mu\nu} = -\frac{g}{2m_q} V_{f_{\mu}f_{\nu}}^f V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c \delta(\vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}) \left[\chi_{s_{\mu}}^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_{\mu} \chi_{s_{\nu}}^c - \chi_{s_{\mu}}^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_{\nu} \chi_{s_{\nu}}^c \right]. \quad (2.106)$$

Lembrando da Eq. (1.36) que $\gamma = g/(2m_q)$, podemos escrever

$$V_{\mu\nu} = -\gamma V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_{s_\mu}^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_{s_\nu}^c \quad (2.107)$$

Finalmente podemos escrever o potencial $V_{\mu\nu}$ de uma forma mais compacta

$$V_{\mu\nu} = V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \quad (2.108)$$

onde

$$V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} = -\gamma \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_{s_\mu}^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_{s_\nu}^c \quad (2.109)$$

é a parte spin-espaço do potencial $V_{\mu\nu}$.

A aplicação da transformação de Fock-Tani sobre o Hamiltoniano (2.100) irá produzir uma expansão com inúmeras contribuições para os processos de decaimento. Isto significa que em termos de estrutura operatorial deve-se reter termos do tipo

$$m^\dagger m^\dagger m. \quad (2.110)$$

Esta escolha corresponde a um decaimento do tipo $A \rightarrow B + C$. A estrutura (2.110) implica que, em ordem mais baixa na expansão em potências da função de onda, deve-se truncar esta expansão em terceira ordem. Como acontece na Eq. (2.82), aparecerá um Hamiltoniano transformado H_m que envolverá apenas mésons. Desta forma, a contribuição para a Eq. (2.100), que dará origem a este Hamiltoniano será

$$H_m = V_{\mu\nu} q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} + V_{\mu\nu} q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)}. \quad (2.111)$$

Das eqs. (2.55), (2.58), (2.74) e (2.77), temos que as contribuições destes termos são

$$\begin{aligned} q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} &\sim (m^\dagger m^\dagger m \bar{q}) \bar{q}^\dagger \\ q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)} &\sim (m^\dagger \bar{q}) \bar{q}^\dagger m^\dagger m. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Desta forma, considerando as Eqs. dadas e inserindo no Hamiltoniano, Eq. (2.111), obtemos

$$\begin{aligned} H_m &= V_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma} m_\gamma^\dagger m_\alpha^\dagger m_\beta \bar{q}_\sigma \right] \bar{q}_\nu^\dagger + V_{\mu\nu} \left[\Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} m_\alpha^\dagger \bar{q}_{\nu_1} \right] \left[-\frac{1}{2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{*\mu_1\nu} \bar{q}_{\nu_2}^\dagger m_\gamma^\dagger m_\beta \right] \\ &= -\frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma} m_\gamma^\dagger m_\alpha^\dagger m_\beta \bar{q}_\sigma \bar{q}_\nu^\dagger - \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{*\mu_1\nu} m_\alpha^\dagger \bar{q}_{\nu_1} \bar{q}_{\nu_2}^\dagger m_\gamma^\dagger m_\beta \end{aligned} \quad (2.113)$$

Após o ordenamento normal dos quarks, obtemos os termos que nos interessam para o processo de decaimento. Assim,

$$H_m = -\frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{*\rho\nu} m_\gamma^\dagger m_\alpha^\dagger m_\beta - \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_1} \Phi_\gamma^{*\mu_1\nu} m_\alpha^\dagger m_\gamma^\dagger m_\beta. \quad (2.114)$$

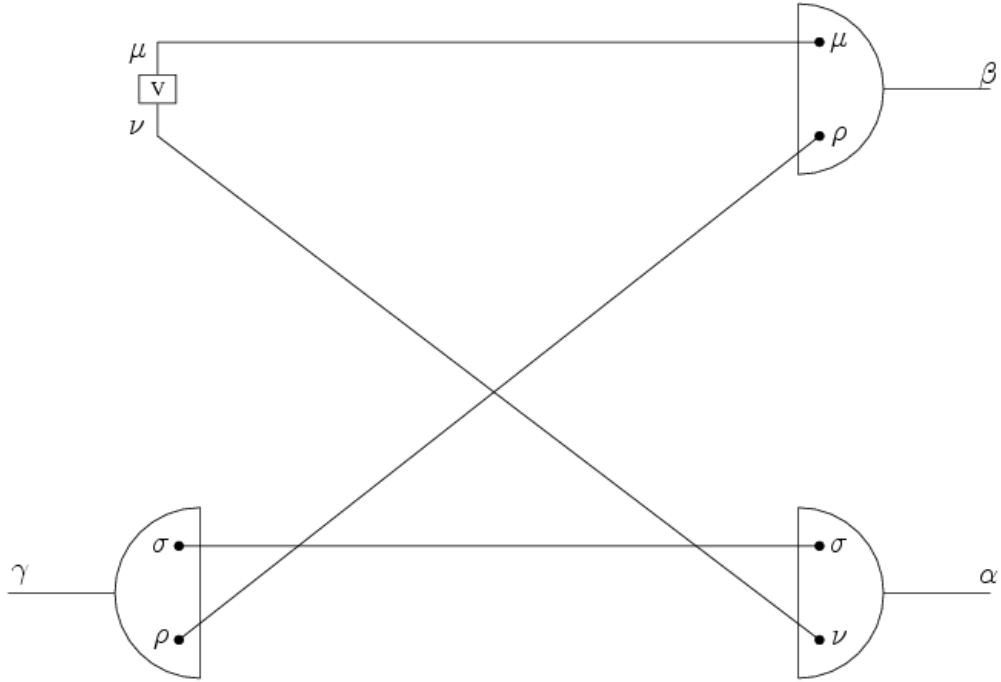


Fig. 2.1: Representação diagramática de H_m em (2.115).

Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos e então obter,

$$H_m = -\Phi_\alpha^{*\sigma\nu} \Phi_\beta^{*\mu\rho} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \quad (2.115)$$

que é o Hamiltoniano de Fock-Tani para decaimentos de mésons em ordem mais baixa da expansão em potências da função de onda. Uma representação diagramática de H_m pode ser vista na figura (2.1).

2.4 O modelo 3P_0 corrigido (C^3P_0)

Ao analisar a característica expansão em potências da função de onda do formalismo de Fock-Tani, percebe-se que o modelo 3P_0 é obtido em ordem mais baixa desta expansão, quando se considera como interação microscópica o Hamiltoniano de criação de par $H_{q\bar{q}}$ da Eq. (2.100). Os demais termos da expansão introduzem correções de ortogonalidade que corrigem o modelo de “ordem zero”. Estes termos possuem potências em $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$, onde $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ é o chamado *kernel de estado ligado*, e é dado por

$$\Delta(\mu\nu; \rho\sigma) = \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma}. \quad (2.116)$$

O Hamiltoniano do modelo C^3P_0 , H^{C3P_0} , considera o termo de ordem zero, que é dado por H_m , e os termos que dependem apenas de uma $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$, denominados por δH . Ou seja,

$$H^{C3P_0} = H_m + \delta H, \quad (2.117)$$

onde o Hamiltoniano sem correção H_m é dado pela Eq. (2.115), e o Hamiltoniano da correção de ortogonalidade δH é obtido por

$$\delta H = V_{\mu\nu} \left[q_{\mu}^{\dagger(3)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(2)} + q_{\mu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(4)} + q_{\mu}^{\dagger(5)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)} \right], \quad (2.118)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \delta H = & \left[-\frac{1}{4} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Delta(\rho\tau; \mu\lambda) \Phi_{\gamma}^{\sigma\lambda} \right] V_{\mu\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

A expressão (2.119) contém todas as possíveis conexões das linhas de quarks entre $V_{\mu\nu}$ e o *kernel de estado ligado* Δ , e sua forma diagramática está descrita nas figuras (2.2), (2.3) e (2.4).

O modelo C^3P_0 foi deduzido em detalhes em [8], onde foram obtidos os operadores transformados em mais alta ordem.

No próximo capítulo faremos aplicações do modelo para os decaimentos dos mésons discutidos no capítulo 1.

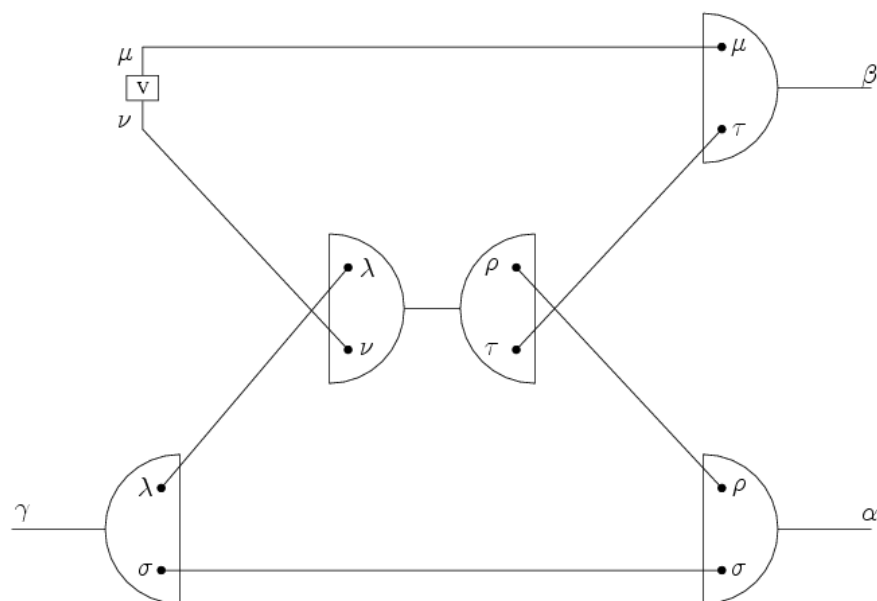


Fig. 2.2: Primeiro diagrama da correção de ortogonalidade.

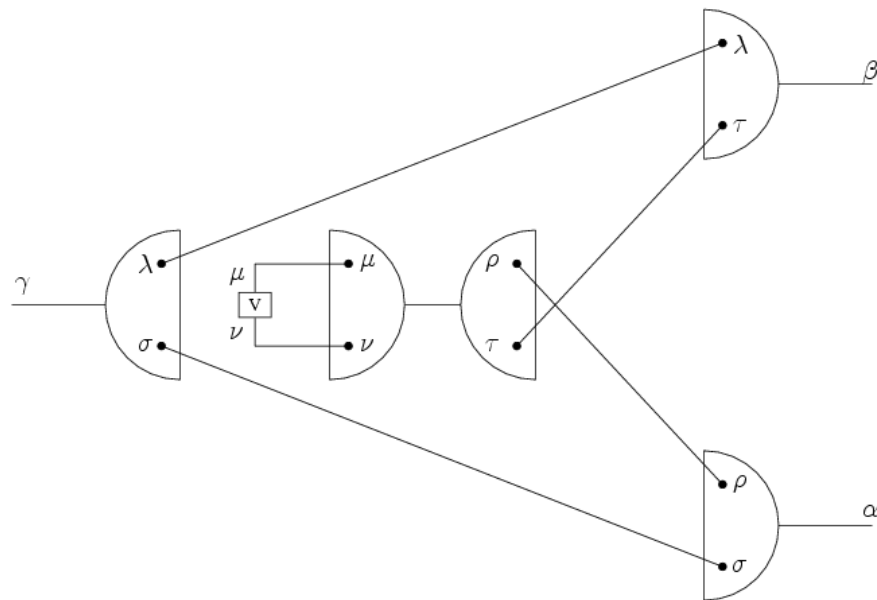


Fig. 2.3: Segundo diagrama da correção de ortogonalidade.

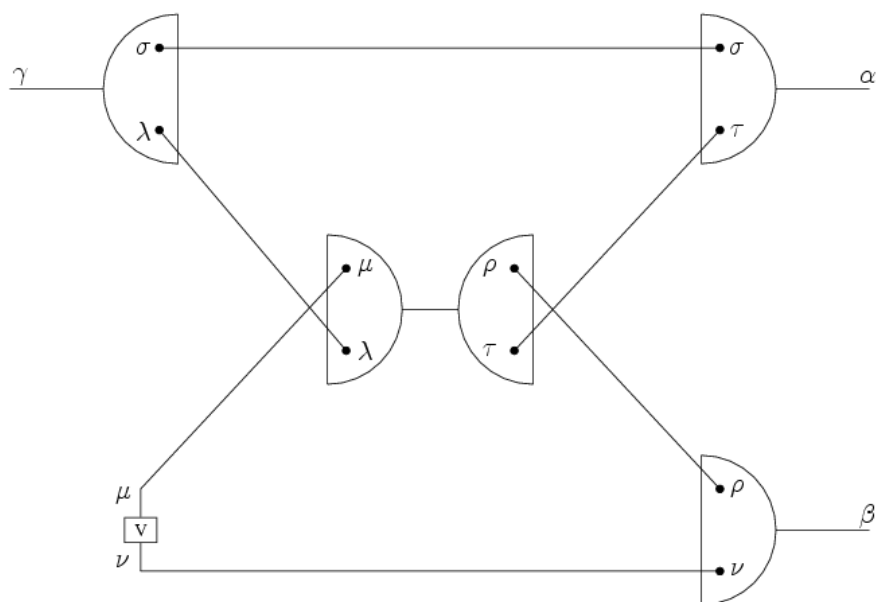


Fig. 2.4: Terceiro diagrama da correção de ortogonalidade.

Capítulo 3

Amplitudes e Taxas de Decaimentos

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações do Modelo C^3P_0 para decaimentos de mésons leves de sabor aberto, obtendo primeiramente a forma analítica das amplitudes e taxas de decaimentos dos canais $\rho \rightarrow \pi + \pi$, $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$, $a_2 \rightarrow \rho + \pi$, $h_1 \rightarrow \rho + \pi$, $f_0 \rightarrow \pi + \pi$ e $f_2 \rightarrow \pi + \pi$. Os detalhes dos cálculos, com e sem correção de ortogonalidade, serão mostrados para os decaimentos $\rho \rightarrow \pi + \pi$ e $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, que representam, respectivamente, decaimentos onde todas as partículas possuem $L = 0$ e aqueles onde há partículas com $L = 1$. Após, a interação γ e o parâmetro β são ajustados de forma a obter as taxas de decaimento e as razões D/S que mais se ajustam aos dados experimentais. Com estes resultados é possível comparar a eficácia entre os modelos 3P_0 e C^3P_0 .

3.1 Decaimento $\rho \rightarrow \pi\pi$

O objetivo desta seção é mostrar, explicitamente, o cálculo para um processo de decaimento no qual todas as partículas envolvidas possuem momento angular orbital $L = 0$. Vamos encontrar a amplitude e a taxa de decaimento do processo utilizando o modelo C^3P_0 . Para isto, é necessário primeiramente encontrar as amplitudes sem e com correção de ortogonalidade, visto que a amplitude total é dada pela soma destes dois termos.

3.1.1 Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$ sem Correção de Ortogonalidade

Consideremos a transição $m_\gamma \rightarrow m_\alpha + m_\beta$, onde $|i\rangle = m_\gamma^\dagger |0\rangle$ e $|f\rangle = m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger |0\rangle$ são os estados inicial e final, respectivamente. Da Eq. (2.115), o elemento de matriz resultante é

$$\langle f | H_m | i \rangle = -\Phi_{\alpha'}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta'}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma'}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_\gamma m_\gamma^\dagger | 0 \rangle \quad (3.1)$$

que resulta em

$$\langle f | H_m | i \rangle = -d_1 - d_2 \quad (3.2)$$

onde d_1 e d_2 são dados por

$$\begin{aligned} d_1 &= \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\lambda} \Phi_\gamma^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \\ d_2 &= \Phi_\alpha^{*\mu\lambda} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Phi_\gamma^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo $V_{\mu\nu}$ o potencial de interação dado pela Eq. (2.108).

A Eq. (3.3) pode ser definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv d_1^f d_1^c d_1^{s-e} \\ d_2 &\equiv d_2^f d_2^c d_2^{s-e} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Assim, calcularemos os termos de cor, sabor e spin para depois calcularmos o termo espacial.

- Cálculo da parte de sabor:

Como foi discutido no apêndice B sobre a função de onda, a parte de sabor resulta em

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f_\rho f_\nu} f_2^{f_\mu f_\lambda} f_1^{f_\rho f_\lambda} V_{f_\mu f_\nu}^f \\ d_2^f &= f_3^{f_\mu f_\lambda} f_2^{f_\rho f_\nu} f_1^{f_\rho f_\lambda} V_{f_\mu f_\nu}^f \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como não há interação que mude o sabor, o potencial de interação (parte de sabor) $V_{f_\mu f_\nu}^f$ fica

$$V_{f_\mu f_\nu}^f = \delta_{f_\mu f_\nu}. \quad (3.6)$$

Combinando as Eqs. (3.5) e (3.6), temos então

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f_\rho f_\nu} f_2^{f_\mu f_\lambda} f_1^{f_\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_2^f &= f_3^{f_\mu f_\lambda} f_2^{f_\rho f_\nu} f_1^{f_\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Cálculo da parte de cor:

Quanto ao cálculo da parte de cor, sabemos que a função de onda da parte de cor é dada por

$$C^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{c_\mu c_\nu} \quad (3.8)$$

Introduzindo a definição da função de onda de cor (Eq. (3.8)) na Eq. (3.3) e analisando somente a parte de cor, temos

$$\begin{aligned} d_1^c &= C^{c_\rho c_\nu} C^{c_\mu c_\lambda} C^{c_\rho c_\lambda} V_{c_\mu c_\nu}^c \\ d_2^c &= C^{c_\mu c_\lambda} C^{c_\rho c_\nu} C^{c_\rho c_\lambda} V_{c_\mu c_\nu}^c \end{aligned} \quad (3.9)$$

Mas como, neste modelo, não há interação que mude a cor, o potencial de interação (parte de cor) $V_{c_\mu c_\nu}^c$ fica

$$V_{c_\mu c_\nu}^c = \delta^{c_\mu c_\nu} \quad (3.10)$$

Combinando as Eqs. (3.9) e (3.10), temos então

$$\begin{aligned} d_1^c &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \delta^{c_\rho c_\nu} \delta^{c_\mu c_\lambda} \delta^{c_\rho c_\lambda} \delta^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_2^c &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \delta^{c_\mu c_\lambda} \delta^{c_\rho c_\nu} \delta^{c_\rho c_\lambda} \delta^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como pode ser visto, a parte de cor sem correção de ortogonalidade resulta sempre no mesmo fator numérico independentemente do processo de decaimento em estudo. Isto pode ser evidenciado pelo fato de que o cálculo independe dos mésons envolvidos. Para o cálculo da cor com correção de ortogonalidade, como veremos posteriormente, o fator $\frac{1}{\sqrt{3}}$ aparecerá multiplicando um outro fator numérico. Sendo assim, incorporamos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ no parâmetro γ (Eq. (1.36)).

- Cálculo da parte de spin:

No apêndice B, mostramos a forma da função de onda de spin para um singleto, (B.4), e para um tripleto, (B.5). O pión é uma partícula com spin $S = 0$, enquanto o méson ρ possui spin $S = 1$. Para o nosso cálculo iremos orientar o meson ρ em uma direção preferencial, introduzindo uma polarização. A direção escolhida será $(+\hat{z})$ o que implica, na parte de spin de d_i^s

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Utilizando as propriedades do apêndice B obtemos

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &= \chi_3^{12} \chi_2^{21} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{2} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \end{aligned} \quad (3.13)$$

e

$$\begin{aligned} d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &= \chi_3^{21} \chi_2^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{2} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim encontramos, para a parte de spin da Eq. (3.3), que

$$d_1^s = d_2^s = -\frac{1}{2} V_{22}^{s-e} (\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \quad (3.15)$$

Combinando o potencial spin-espaço $V_{\mu\nu}^{s-e}$ dado pela Eq. (2.109) com a Eq. (3.15), encontramos

$$d_1^s = d_2^s = \frac{1}{2} \gamma \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c. \quad (3.16)$$

O cálculo da parte espacial está diretamente ligado com o cálculo da parte de spin. Assim sendo, iremos no decorrer deste capítulo sempre desenvolver o cálculo da parte espacial com a contribuição da parte de spin (spin-espaço).

- Cálculo da parte spin-espaço:

Introduzindo a definição da função de onda espacial do apêndice B, obtemos

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= \frac{1}{2} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\lambda \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\ &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \\ &\times \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Calculando a integral nas variáveis de momento, onde ao empregar as deltas temos o cancelamento de várias integrais, obtemos

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= \frac{\gamma}{2} \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta) \int d^3 p_\mu \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu + \vec{p}_\mu)] \chi_2^c \\ &\times \varphi(2\vec{p}_\mu + \vec{P}_\alpha) \varphi(\vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta + 2\vec{p}_\mu) \varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\beta). \end{aligned} \quad (3.18)$$

No capítulo 1, o elemento de matriz $\langle BC | H_I | A \rangle$ é proporcional a uma δ de conservação de momento, como aparece na Eq. (1.37). A origem desta δ está explícita na Eq. (3.18) acima e portanto será suprimida, pois ela é um termo global. O méson será tomado em repouso no estado inicial, ou seja, $\vec{P}_\gamma = 0$ e por conservação de momento do estado final podemos escrever tudo em termos de \vec{P}_β . Desta forma

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= \gamma \delta^3(\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta) \int d^3 p_\mu \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu] \chi_2^c \\ &\varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\beta) \varphi(2\vec{p}_\mu - 2\vec{P}_\beta) \varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\beta). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando a propriedade (D.25) na Eq. (3.19) obtemos a seguinte integral

$$d_1^{s-e} = -\gamma \int d^3 K (K_x + iK_y) \varphi(2\vec{K} - \vec{P}) \varphi(2\vec{K} - 2\vec{P}) \varphi(2\vec{K} - \vec{P}). \quad (3.20)$$

Substituindo a expressão para a função de onda (B.35) e integrando usando (A.22) resulta

$$d_1^{s-e} = - \left(\frac{2^{5/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{3/2}} \right) (P_x + i P_y) \exp \left(- \frac{P^2}{12\beta^2} \right) \quad (3.21)$$

Sabemos que os harmônicos esféricos usuais podem ser escritos em coordenadas cartesianas (Apêndice A). Assim, utilizando a propriedade (A.16) na Eq. (3.21), temos finalmente que

$$d_1^{s-e} = \left(\frac{2^4}{3^3} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(- \frac{P^2}{12\beta^2} \right). \quad (3.22)$$

A obtenção de d_2^{s-e} é mediante a troca de $\vec{P} \rightarrow -\vec{P}$ e assim

$$d_2^{s-e} = - \left(\frac{2^4}{3^3} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(- \frac{P^2}{12\beta^2} \right), \quad (3.23)$$

ou seja, $d_1^{s-e} = -d_2^{s-e}$.

- Cálculo da amplitude de decaimento:

Como mencionado anteriormente, o termo de cor será incorporado no parâmetro γ . Desta forma temos

$$\begin{aligned} d_1 &= d_1^f d_1^{s-e} \\ d_2 &= d_2^f d_2^{s-e} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo as Eqs. (3.7), (3.22) e (3.23) na Eq. (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} d_1 &= \gamma \left(\frac{2^{7/2}}{3^3} \right) \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \frac{P}{\beta} Y_{11}(\Omega_P) \exp \left(- \frac{P^2}{12\beta^2} \right) \\ d_2 &= \gamma \left(\frac{2^{7/2}}{3^3} \right) \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \frac{P}{\beta} Y_{11}(\Omega_P) \exp \left(- \frac{P^2}{12\beta^2} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Mas como a amplitude de decaimento h_{fi} é dada por

$$h_{fi} = -d_1 - d_2 \quad (3.26)$$

obtemos

$$h_{fi} = -\gamma \left(\frac{2^{9/2}}{3^3} \right) \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \frac{P}{\beta} Y_{11}(\Omega_P) \exp \left(- \frac{P^2}{12\beta^2} \right). \quad (3.27)$$

3.1.2 Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$ com Correção de Ortogonalidade

Inicialmente, pela Eq. (2.119), sabemos que a correção de ortogonalidade é dada por

$$\begin{aligned} \delta H &= -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \\ &+ \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \\ &- \frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Na Δ acima há um índice novo i , cuja finalidade é indicar sobre qual partícula está se fazendo a correção. No nosso estudo $i = 2$ corresponde a π^+ e $i = 3$ a π^0 . Da Eq. (3.28) temos

$$\begin{aligned} \langle f | \delta H | i \rangle &= -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \left(\Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} + \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \right) \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \left(\Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} + \Phi_\alpha^{*\lambda\tau} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \right) \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} \\ &- \frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \left(\Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} + \Phi_\alpha^{*\lambda\tau} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \right) \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde há três termos da correção de ortogonalidade a serem calculados.

(a) Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade:

Da Eq. (3.29) o primeiro termo da correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned} \langle f | \delta H^1 | i \rangle &= -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} \\ &- \frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Introduzindo a seguinte notação

$$\langle f | \delta H^1 | i \rangle = -d_1^{1CO} - d_2^{1CO} \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} d_1^{1CO} &= \frac{1}{4} \left(d_{12}^{1CO} + d_{13}^{1CO} \right) \\ d_2^{1CO} &= \frac{1}{4} \left(d_{22}^{1CO} + d_{23}^{1CO} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

e

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{1CO} &= \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta_{\pi^+}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \equiv d_{12}^f d_{12}^c d_{12}^{s-e} \\
 d_{13}^{1CO} &= \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta_{\pi^0}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \equiv d_{13}^f d_{13}^c d_{13}^{s-e} \\
 d_{22}^{1CO} &= \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Delta_{\pi^+}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \equiv d_{22}^f d_{22}^c d_{22}^{s-e} \\
 d_{23}^{1CO} &= \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Delta_{\pi^0}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \equiv d_{23}^f d_{23}^c d_{23}^{s-e}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vamos primeiramente calcular as partes de sabor, cor e spin para depois calcularmos a parte espacial, sendo que vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas anteriormente.

- Cálculo da parte de sabor:

A parte de sabor da Eq. (3.33), sabendo que não há interação que mude o sabor, é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{12}^f &= f_3^{f_{\rho}f_{\sigma}} f_2^{f_{\mu}f_{\tau}} f_2^{f_{\rho}f_{\tau}} f_2^{f_{\lambda}f_{\mu}} f_1^{f_{\lambda}f_{\sigma}} = f_3^{22} f_2^{12} f_2^{22} f_2^{11} f_1^{12} = 0 \\
 d_{13}^f &= f_3^{f_{\rho}f_{\sigma}} f_2^{f_{\mu}f_{\tau}} f_3^{f_{\rho}f_{\tau}} f_3^{f_{\lambda}f_{\mu}} f_1^{f_{\lambda}f_{\sigma}} = f_3^{22} f_2^{12} f_3^{22} f_3^{11} f_1^{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 d_{22}^f &= f_3^{f_{\mu}f_{\tau}} f_2^{f_{\rho}f_{\sigma}} f_2^{f_{\rho}f_{\tau}} f_2^{f_{\lambda}f_{\mu}} f_1^{f_{\lambda}f_{\sigma}} = f_3^{22} f_2^{12} f_2^{12} f_2^{12} f_1^{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 d_{23}^f &= f_3^{f_{\mu}f_{\tau}} f_2^{f_{\rho}f_{\sigma}} f_3^{f_{\rho}f_{\tau}} f_3^{f_{\lambda}f_{\mu}} f_1^{f_{\lambda}f_{\sigma}} = f_3^{11} f_2^{12} f_3^{11} f_3^{11} f_1^{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

- Cálculo da parte de cor:

Quanto ao cálculo da parte de cor da Eq. (3.33), sabemos que a função de onda é dada por

$$C^{c_{\mu}c_{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{c_{\mu}c_{\nu}} \tag{3.35}$$

e como não há interação que mude a cor, o potencial de interação $V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c$ fica

$$V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c = \delta^{c_{\mu}c_{\nu}} \tag{3.36}$$

Substituindo as Eqs. (3.35) e (3.36) na Eq. (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^c &= C^{c_{\rho}c_{\sigma}} C^{c_{\mu}c_{\tau}} C^{c_{\rho}c_{\tau}} C^{c_{\lambda}c_{\nu}} C^{c_{\lambda}c_{\sigma}} V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c = \frac{1}{9\sqrt{3}} \delta^{c_{\rho}c_{\sigma}} \delta^{c_{\mu}c_{\tau}} \delta^{c_{\rho}c_{\tau}} \delta^{c_{\lambda}c_{\nu}} \delta^{c_{\lambda}c_{\sigma}} \delta^{c_{\mu}c_{\nu}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\
 d_{13}^c &= C^{c_{\rho}c_{\sigma}} C^{c_{\mu}c_{\tau}} C^{c_{\rho}c_{\tau}} C^{c_{\lambda}c_{\nu}} C^{c_{\lambda}c_{\sigma}} V_{c_{\mu}c_{\nu}}^c = \frac{1}{9\sqrt{3}} \delta^{c_{\rho}c_{\sigma}} \delta^{c_{\mu}c_{\tau}} \delta^{c_{\rho}c_{\tau}} \delta^{c_{\lambda}c_{\nu}} \delta^{c_{\lambda}c_{\sigma}} \delta^{c_{\mu}c_{\nu}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{22}^c &= C^{\mu c\tau} C^{\rho c\sigma} C^{\rho c\tau} C^{\lambda c\nu} C^{\lambda c\sigma} V_{c_\mu c_\nu}^c = \frac{1}{9\sqrt{3}} \delta^{\mu c\tau} \delta^{\rho c\sigma} \delta^{\rho c\tau} \delta^{\lambda c\nu} \delta^{\lambda c\sigma} \delta^{\mu c\nu} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\
 d_{23}^c &= C^{\mu c\tau} C^{\rho c\sigma} C^{\rho c\tau} C^{\lambda c\nu} C^{\lambda c\sigma} V_{c_\mu c_\nu}^c = \frac{1}{9\sqrt{3}} \delta^{\mu c\tau} \delta^{\rho c\sigma} \delta^{\rho c\tau} \delta^{\lambda c\nu} \delta^{\lambda c\sigma} \delta^{\mu c\nu} = \frac{1}{3\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Como pode ser visto, a parte de cor do primeiro termo da correção de ortogonalidade resulta sempre no mesmo fator numérico $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ independentemente do processo de decaimento em estudo. Isto pode ser evidenciado pelo fato de que o cálculo independe dos mésons envolvidos. Como mencionado anteriormente, quando efetuamos o cálculo da parte de cor sem correção de ortogonalidade, o fator $\frac{1}{\sqrt{3}}$ será incorporado no parâmetro γ (Eq. (1.36)). Desta forma, para o primeiro termo da correção de ortogonalidade, o fator $\frac{1}{3}$ deverá aparecer explicitamente no cálculo da amplitude de decaimento, visto que ele não está incorporado ao parâmetro γ .

- Cálculo da parte de spin:

A parte de spin da Eq. (3.33) é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{12}^s &= \chi_3^{s_\rho s_\sigma} \chi_2^{s_\mu s_\tau} \chi_2^{s_\rho s_\tau} \chi_2^{s_\lambda s_\nu} \chi_1^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &= -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{13}^s &= \chi_3^{s_\rho s_\sigma} \chi_2^{s_\mu s_\tau} \chi_3^{s_\rho s_\tau} \chi_3^{s_\lambda s_\nu} \chi_1^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_3^{21} \chi_3^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &= -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{22}^s &= \chi_3^{s_\mu s_\tau} \chi_2^{s_\rho s_\sigma} \chi_2^{s_\rho s_\tau} \chi_2^{s_\lambda s_\nu} \chi_1^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &= -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{23}^s &= \chi_3^{s_\mu s_\tau} \chi_2^{s_\rho s_\sigma} \chi_3^{s_\rho s_\tau} \chi_3^{s_\lambda s_\nu} \chi_1^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_3^{21} \chi_3^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &= -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

- Cálculo da parte spin-espço:

Agora vamos efetuar o cálculo da parte spin-espço para d_{12}^{s-e} , d_{13}^{s-e} , d_{22}^{s-e} e d_{23}^{s-e} , de onde as relações abaixo são válidas

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= d_{13}^{s-e} \\
 d_{22}^{s-e} &= d_{23}^{s-e}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Introduzindo a definição da função de onda de espaço (ver apêndice B) na Eq. (3.33) obtemos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= \frac{1}{4} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\lambda d^3 U \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\
 &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \\
 &\times \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma). \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Após a integração em momento (afora a δ global) encontramos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= \frac{\gamma}{2} \int d^3 p_\nu d^3 p_\lambda \chi_2^* (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu) \chi_2^c \\
 &\times \varphi(2\vec{p}_\lambda - \vec{P}_\beta) \varphi(-2\vec{p}_\nu - \vec{P}_\beta) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu - 2\vec{P}_\beta) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(2\vec{p}_\lambda) \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

que pode ser escrito

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= \frac{\gamma}{2} \int d^3 K d^3 q (K_x + iK_y) \\
 &\times \varphi(2\vec{q} - \vec{P}) \varphi(-2\vec{K} - \vec{P}) \varphi(\vec{q} - \vec{K} - 2\vec{P}) \varphi(\vec{q} - \vec{K}) \varphi(2\vec{q}). \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Após substituir as definições das partes espaciais (gaussianas) das funções de onda, a integral resulta em

$$d_{12}^{s-e} = -\gamma \left(\frac{2^{11/2}}{7^{5/2}} \right) \left(\frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{3/2}} \right) [P_x + iP_y] \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right). \tag{3.43}$$

Introduzindo o harmônico esférico, Eq. (A.16), obtemos

$$d_{12}^{s-e} = \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right). \tag{3.44}$$

Como $d_{12}^{s-e} = d_{13}^{s-e}$, temos

$$d_{13}^{s-e} = \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right). \tag{3.45}$$

Entretanto, ainda nos resta calcular d_{22}^{s-e} e d_{23}^{s-e} , onde d_{22}^{s-e} é dado por

$$\begin{aligned}
 d_{22}^{s-e} &= \frac{1}{4} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\lambda d^3 U \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\
 &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \\
 &\times \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \\
 &\times \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma). \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

A obtenção de d_{22}^{s-e} se dá através troca $\vec{P} = -\vec{P}$ na Eq. (3.44), e como d_{12}^{s-e} é uma função ímpar em relação a \vec{P} , temos

$$d_{22}^{s-e} = - \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (3.47)$$

Levando o resultado da Eq. (3.47) na Eq. (3.39), encontramos

$$d_{23}^{s-e} = - \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (3.48)$$

Resumidamente

$$\begin{aligned} d_{12}^{s-e} &= \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{13}^{s-e} &= \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{22}^{s-e} &= - \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{23}^{s-e} &= - \left(\frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

que são as contribuições da parte de spin-espaço para o decaimento $\rho \rightarrow \pi\pi$.

- Cálculo da amplitude de decaimento:

No início desta seção, vimos que a amplitude de decaimento, Eq. (3.31), é dada pela soma de d_1^{1CO} e d_2^{1CO} , onde estes dois termos são dados pelas Eqs. (3.32) e (3.33). Assim, para encontrarmos a amplitude de decaimento vamos ter que encontrar cada um dos termos. Desta forma, substituindo as Eqs. (3.34), (3.37) e (3.49) na Eq. (3.33), podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{12}^{1CO} &= 0 \\ d_{13}^{1CO} &= \left(\frac{2^{11/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{22}^{1CO} &= \left(\frac{2^{13/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{23}^{1CO} &= - \left(\frac{2^{11/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Levando os resultados obtidos em (3.50) na Eq. (3.32), encontramos que

$$\begin{aligned} d_1^{1CO} &= \left(\frac{2^{7/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_2^{1CO} &= \left(\frac{2^{7/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Desta forma a amplitude de decaimento h_{fi}^{1CO} resulta na seguinte expressão

$$h_{fi}^{1CO} = - \left(\frac{2^{9/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (3.52)$$

(b) **Cálculo do segundo termo da correção de ortogonalidade:**

Da Eq. (3.29) temos que o segundo termo da correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned} \langle f | \delta H^2 | i \rangle &= \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\lambda\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Este termo não contribui para a correção de ortogonalidade do processo de decaimento devido a sua parte spin-espaço ser nula. Além disto, o termo de sabor também se anula. Desta forma, temos

$$h_{fi}^{2CO} = 0. \quad (3.54)$$

(c) **Cálculo do terceiro termo da correção de ortogonalidade:**

A contribuição para h_{fi}^{3CO} é igual a h_{fi}^{1CO} , onde

$$\begin{aligned} d_1^{3CO} &= d_2^{1CO} \\ d_2^{3CO} &= d_1^{1CO} \end{aligned} \quad (3.55)$$

• **Cálculo da taxa de decaimento**

A seguir, iremos apresentar o cálculo da taxa de decaimento no modelo C^3P_0 . Tendo em vista que, para calcularmos a taxa de decaimento se faz necessário primeiramente a amplitude de decaimento, onde $h_{fi}^{C^3P_0} = h_{fi} + h_{fi}^{1CO} + h_{fi}^{3CO}$, isto é,

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) C_{10}^{\rho} Y_{11}(\Omega_x), \quad (3.56)$$

onde definimos

$$C_{10}^{\rho} \equiv -x \left[\frac{2^{9/2}}{3^3} \exp \left(-\frac{x^2}{12} \right) + \frac{2^{11/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \exp \left(-\frac{9x^2}{28} \right) \right]. \quad (3.57)$$

assim como no capítulo 1, introduzimos a notação $x = P/\beta$.

Da Eq. (1.41) temos que

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right)^2 (\mathcal{C}_{10}^\rho)^2 \int d\Omega_x |Y_{11}(\Omega_x)|^2 \quad (3.58)$$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade dos harmônicos esféricos, Eq. (A.20), e tendo em vista que $E_\pi^2/M_\rho \approx M_\rho/4$, encontramos então

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} &= \pi P \frac{M_\rho}{2} \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right)^2 (\mathcal{C}_{10}^\rho)^2 \\ &= \pi^{1/2} \gamma^2 x \frac{M_\rho}{2} (\mathcal{C}_{10}^\rho)^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

que é a taxa de decaimento para o decaimento do méson ρ em dois pions com a correção de ortogonalidade.

3.2 Decaimento $b_1 \rightarrow \omega\pi$

O objetivo desta seção é mostrar, explicitamente, o cálculo para um processo de decaimento no qual uma das partículas envolvidas possui momento angular $L = 1$ e spin $S = 0$. Vamos encontrar a taxa de decaimento Γ e a amplitude h_{fi} . Como vimos na seção anterior, é necessário primeiramente calcular a amplitude de decaimento sem e com correção de ortogonalidade, visto que a amplitude total é a soma destes dois termos. Através da tabela (0.1), vemos que os mésons ω e π possuem momento angular nulo, enquanto que o méson b_1 possui momento $L = 1$ e $S = 0$.

3.2.1 Decaimento $b_1^+ \rightarrow \omega\pi^+$ sem Correção de Ortogonalidade

Para este cálculo, vamos proceder da mesma forma como foi desenvolvido na seção anterior. Assim, iremos primeiramente calcular as partes de sabor e spin para depois calcularmos a parte espacial.

- Cálculo da parte de sabor:

Para calcularmos a parte de sabor necessitamos saber a função de onda de sabor de cada um dos mésons, que são dadas no apêndice B. A parte de sabor é

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f_\rho f_\nu} f_2^{f_\mu f_\lambda} f_1^{f_\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} = f_3^{f_\rho f_\mu} f_2^{f_\mu f_\lambda} f_1^{f_\rho f_\lambda} = f_3^{12} f_2^{22} f_1^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_2^f &= f_3^{f_\mu f_\lambda} f_2^{f_\rho f_\nu} f_1^{f_\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} = f_3^{f_\mu f_\lambda} f_2^{f_\rho f_\mu} f_1^{f_\rho f_\lambda} = f_3^{12} f_2^{11} f_1^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

- Cálculo da parte de spin:

Para calcularmos a parte de spin necessitamos saber a função de onda de spin de cada um dos mésons. O méson π tem spin $S = 0$, momento angular orbital $L = 0$ e momento angular total $J = 0$, o méson b_1 tem $S = 0$, $L = 1$ e $J = 1$ enquanto o méson ω tem $S = 1$, $L = 0$ e $J = 1$. Existem três possibilidades de orientação para o momento angular total dos mésons b_1 e ω , o que nos leva a considerar uma direção polarizada, ou seja, a direção $(+\hat{z})$. Conseqüentemente, teremos o momento angular orbital do méson b_1 e o spin do méson ω polarizados nesta direção. As funções de onda referentes a estes mésons podem ser encontradas no apêndice B. Sendo assim, a parte de spin fica

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_1^{12} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \end{aligned} \quad (3.61)$$

- Cálculo da parte spin-espaco:

Sabemos que o cálculo da parte espacial está ligado ao da parte de spin, por isso desenvolvemos o cálculo de spin-espaco.

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= -\frac{1}{2} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\lambda \chi_1^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_1^c \\ &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \\ &\times \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \phi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) Y_{11}(\Omega_{\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda}) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Em (3.62) aparece Y_{11} que provém da função de onda (B.36) Y_{1m} com $m = 1$. Como visto anteriormente, este valor é devido a escolha de orientar o momento angular total do b_1 na direção \hat{z} . Utilizando a propriedade (D.13) encontramos

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= -\gamma \int d^3 K (K_x - iK_y) \varphi(\vec{P} - 2\vec{K}) \\ &\times \phi(2\vec{P} - 2\vec{K}) Y_{11}(\Omega_{2\vec{P} - 2\vec{K}}) \varphi(\vec{P} - 2\vec{K}). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Substituindo as definições para as funções de onda obtemos

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= -\gamma \left(\frac{1}{\pi^{9/4} \beta^{11/2}} \right) \int d^3 K \\ &\times \left[-K_x^2 - K_y^2 + K_x P_x + K_y P_y + i K_x P_y - i K_y P_x \right] \\ &\times \exp \left\{ - \left[\frac{3}{2\beta^2} K^2 - \frac{2}{\beta^2} \vec{K} \cdot \vec{P} + \frac{3}{4\beta^2} P^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Após a integração encontramos

$$d_1^{s-e} = \left(\frac{2^{5/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{1/2}} \right) \left[1 - \frac{(P_x^2 + P_y^2)}{3\beta^2} \right] \exp \left(-\frac{P^2}{12\beta^2} \right). \quad (3.65)$$

Introduzindo as relações de harmônicos esféricos (A.15) e (A.17) encontramos, após algumas manipulações algébricas, que

$$d_1^{s-e} = \left(\frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \times \left\{ \left[1 - \frac{2}{9} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left(-\frac{P^2}{12\beta^2} \right). \quad (3.66)$$

A obtenção de d_2^{s-e} é mediante a troca de $\vec{P} \rightarrow -\vec{P}$ e assim

$$d_2^{s-e} = \left(\frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \times \left\{ \left[1 - \frac{2}{9} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left(-\frac{P^2}{12\beta^2} \right). \quad (3.67)$$

- Cálculo da amplitude de decaimento

Substituindo as Eqs. (3.60), (3.66) e (3.67) na Eq. (3.3), encontramos que

$$d_1 = d_2 = \left(\frac{2^3}{3^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \times \left\{ \left[1 - \frac{2}{9} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left(-\frac{P^2}{12\beta^2} \right) \quad (3.68)$$

Levando os resultados da Eq. (3.68) na Eq. (3.2), temos a amplitude de decaimento dada por

$$h_{fi} = - \left(\frac{2^4}{3^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \times \left\{ \left[1 - \frac{2}{9} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega) \right\} \exp \left(-\frac{P^2}{12\beta^2} \right) \quad (3.69)$$

mas como foi visto no capítulo 1, Eq. (1.65), para considerarmos o decaimento ocorrendo em todas as direções e não apenas na direção polarizada, temos que retirar o fator da

decomposição em Clebsch-Gordon, que para este caso é $1/\sqrt{10}$. Assim, a amplitude de decaimento fica

$$h_{fi} = -\left(\frac{2^4}{3^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \times \left\{ \left[1 - \frac{2}{9} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2\right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{3/2}}{3^2} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right). \quad (3.70)$$

3.2.2 Decaimento $b_1^+ \rightarrow \omega\pi^+$ com Correção de Ortogonalidade

Nesta seção iremos desenvolver um segundo exemplo de aplicação da correção de ortogonalidade em primeira ordem. Sendo que, do elemento de matriz, Eq. (3.29), vamos calcular cada um dos três termos em separado.

(a) Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade:

Na subseção (3.1.2), vimos que a parte de cor para o primeiro termo da correção de ortogonalidade independe do processo de decaimento em estudo. Desta forma, a Eq. (3.37) permanece válida. Vamos, então, calcular as partes de sabor e spin para depois calcularmos a parte espacial. A diferença está na estrutura da Eq. (3.33) para o processo $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, onde agora a Δ do estado final corresponde a Δ_ω e Δ_{π^+} , respectivamente.

- Cálculo da parte de sabor:

Para o cálculo da parte de sabor da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 3.2. A parte de sabor é dada por

$$\begin{aligned} d_{12}^f &= f_3^{f_\rho f_\sigma} f_2^{f_\mu f_\tau} f_2^{f_\rho f_\tau} f_2^{f_\lambda f_\mu} f_1^{f_\lambda f_\sigma} = f_3^{12} f_2^{11} f_2^{11} f_2^{11} f_1^{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ d_{13}^f &= f_3^{f_\rho f_\sigma} f_2^{f_\mu f_\tau} f_3^{f_\rho f_\tau} f_3^{f_\lambda f_\mu} f_1^{f_\lambda f_\sigma} = f_3^{12} f_2^{22} f_3^{12} f_3^{12} f_1^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_{22}^f &= f_3^{f_\mu f_\tau} f_2^{f_\rho f_\sigma} f_2^{f_\rho f_\tau} f_2^{f_\lambda f_\mu} f_1^{f_\lambda f_\sigma} = f_3^{12} f_2^{22} f_2^{22} f_2^{11} f_1^{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ d_{23}^f &= f_3^{f_\mu f_\tau} f_2^{f_\rho f_\sigma} f_3^{f_\rho f_\tau} f_3^{f_\lambda f_\mu} f_1^{f_\lambda f_\sigma} = f_3^{12} f_2^{22} f_3^{22} f_3^{11} f_1^{12} = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

- Cálculo da parte de spin:

Para o cálculo da parte de spin da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 3.1. A parte de spin é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{12}^s &= \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_1^{12} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{13}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_3^{21} \chi_3^{21} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{4} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{22}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_2^{22} \chi_1^{21} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = 0 \\
 d_{23}^s &= \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_3^{12} \chi_3^{21} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{4} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

- Cálculo da parte spin-espaco:

Agora vamos efetuar o cálculo da parte spin-espaco para d_{12}^{s-e} , d_{13}^{s-e} , d_{22}^{s-e} e d_{23}^{s-e} , no qual as seguintes relações são verificadas

$$\frac{1}{2} d_{12}^{s-e} = d_{13}^{s-e}; \quad d_{22}^{s-e} = 0, \tag{3.73}$$

Introduzindo a definição da função de onda de espaco obtemos

$$\begin{aligned}
 d_{13}^{s-e} &= -\frac{1}{4} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\lambda d^3 U \chi_1^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_1^c \\
 &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \phi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) Y_{11}(\Omega_{\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma}). \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade (D.13) e substituindo as definições para a função de onda dadas no apêndice B, temos

$$\begin{aligned}
 d_{13}^{s-e} &= \gamma \left(\frac{1}{3^{1/2} 2^{3/2}} \right) \left(\frac{1}{\pi^{13/4} \beta^{17/2}} \right) \int d^3 K d^3 q (K_x - iK_y) |2\vec{q}| Y_{11}(\Omega_{2\vec{q}}) \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{8\beta^2} \left[(2\vec{q} - \vec{P})^2 + (-2\vec{K} - \vec{P})^2 + (\vec{q} - \vec{K} - 2\vec{P})^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\vec{q} - \vec{K})^2 + (2\vec{q})^2 \right] \right\} \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

Após a integração encontramos

$$d_{13}^{s-e} = - \left(\frac{2^{9/2}}{7^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{3/4} \beta^{1/2}} \right) \left[1 - \frac{4}{7\beta^2} (P_x^2 + P_y^2) \right] \exp \left(-\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \tag{3.76}$$

Das definições dos harmônicos esféricos a expressão acima fica

$$\begin{aligned}
 d_{13}^{s-e} &= - \left(\frac{2^{11/2}}{7^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left(- \frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 &\times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2} \right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]
 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Obtendo d_{23}^{s-e} mediante a troca de $\vec{P} \rightarrow -\vec{P}$ em d_{13}^{s-e} e levando a Eq. (3.77) na Eq. (3.73), encontramos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= - \left(\frac{2^{13/2}}{7^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left(- \frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 &\times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2} \right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{13}^{s-e} &= - \left(\frac{2^{11/2}}{7^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left(- \frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 &\times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2} \right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{23}^{s-e} &= - \left(\frac{2^{11/2}}{7^{5/2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left(- \frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 &\times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2} \right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{22}^{s-e} &= 0
 \end{aligned} \quad (3.78)$$

que são as contribuições da parte de spin-espaco.

- Cálculo da amplitude de decaimento:

No início da subseção (3.1.2), vimos que a amplitude de decaimento, Eq. (3.31), é dada pela soma de d_1^{1CO} e d_2^{1CO} . Estes dois termos são dados pelas Eqs. (3.32) e (3.33), agora com Δ_ω e Δ_π^+ . Assim, para encontrarmos a amplitude de decaimento, vamos ter que encontrar cada um dos termos. Desta forma, substituindo as Eqs. (3.37), (3.71) e (3.78) na Eq. (3.33), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{1CO} &= - \left(\frac{2^5}{7^{5/2} 23} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left(- \frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 &\times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2} \right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{13}^{1CO} &= - \left(\frac{2^5}{7^{5/2} 23} \right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left(- \frac{9P^2}{28\beta^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{22}^{1CO} &= d_{23}^{1CO} = 0
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Levando os resultados obtidos em (3.79) na Eq. (3.32), encontramos que

$$\begin{aligned}
 d_1^{1CO} &= - \left(\frac{2^4}{7^{5/2} 23}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 & \times \left[\left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_2^{1CO} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Substituindo as Eqs. (3.80) na Eq. (3.31), temos que a amplitude de decaimento h_{fi}^{1CO} tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{1CO} &= \left(\frac{2^4}{7^{5/2} 23}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 & \times \left[\left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} x^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

com a troca de P/β por x . Mas como foi visto no capítulo 1, Eq. (1.65), para considerarmos o decaimento em todas as direções e não apenas na direção polarizada, temos que retirar o fator da decomposição em Clebsch-Gordon da onda a_D , que para este caso é $1/\sqrt{10}$. Assim a amplitude de decaimento fica

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{1CO} &= \left(\frac{2^4}{7^{5/2} 23}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 & \times \left[\left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) Y_{00}(\Omega_x) + \frac{2^{7/2}}{21} x^2 Y_{20}(\Omega_x) \right].
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

(b) Cálculo do segundo termo da correção de ortogonalidade

Da Eq. (3.29) temos que o elemento de matriz do segundo termo da correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle f | \delta H^2 | i \rangle &= \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \phi_\alpha^{*\lambda\tau} \phi_\beta^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\}.
 \end{aligned}$$

Este termo da correção de ortogonalidade não contribui devido a sua parte spin-espaço ser nula.

(c) Cálculo do terceiro termo da correção de ortogonalidade

A contribuição para h_{fi}^{3CO} é igual a h_{fi}^{1CO} , onde

$$\begin{aligned} d_1^{3CO} &= d_2^{1CO} \\ d_2^{3CO} &= d_1^{1CO}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

• Cálculo da taxa de decaimento

Vamos desenvolver o cálculo da taxa de decaimento no modelo C^3P_0 . Tendo em vista que para calcularmos a taxa de decaimento se faz necessário primeiramente a amplitude de decaimento, onde $h_{fi}^{C^3P_0} = h_{fi} + h_{fi}^{1CO} + h_{fi}^{3CO}$,

$$\begin{aligned} h_{fi}^{C^3P_0} &= - \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) Y_{00}(\Omega_x) \\ &\times \left\{ \frac{2^4}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9} x^2 \right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{7^{5/2} 3} \left[1 - \frac{8}{21} x^2 \right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\ &- \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) x^2 Y_{20}(\Omega_x) \\ &\times \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{7^{7/2} 3^2} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{01}^{b_1} &\equiv - \left\{ \frac{2^4}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9} x^2 \right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{7^{5/2} 3} \left[1 - \frac{8}{21} x^2 \right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\ \mathcal{C}_{21}^{b_1} &\equiv - \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{7^{7/2} 3^2} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

a Eq. (3.84) fica

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \left[\mathcal{C}_{01}^{b_1} Y_{00}(\Omega_x) + \mathcal{C}_{21}^{b_1} Y_{20}(\Omega_x) \right] \quad (3.86)$$

Da Eq. (1.41) temos que

$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega \pi} = 2\pi P \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} \int d\Omega \left| \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \left[\mathcal{C}_{01}^{b_1} Y_{00}(\Omega_x) + \mathcal{C}_{21}^{b_1} Y_{20}(\Omega_x) \right] \right|^2 \quad (3.87)$$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade dos harmônicos esféricos, encontramos então

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_1 \rightarrow \omega \pi} &= 2\pi P \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right)^2 \left((\mathcal{C}_{01}^{b_1})^2 + (\mathcal{C}_{21}^{b_1})^2 \right) \\ &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} x \left((\mathcal{C}_{01}^{b_1})^2 + (\mathcal{C}_{21}^{b_1})^2 \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

que é a taxa de decaimento para o decaimento do méson b_1 em $\omega\pi$ com a correção de ortogonalidade.

3.3 Resultados analíticos dos processos de decaimentos

Nesta seção, vamos apresentar os resultados analíticos das amplitudes e taxas de decaimentos dos sete processos que estamos estudando neste trabalho.

Na tabela (3.1), temos a contribuição da parte de sabor sem a correção de ortogonalidade. O parâmetro \mathcal{F} é o fator de multiplicidade do decaimento, o qual deverá multiplicar sua respectiva taxa de decaimento Γ para que todos os subprocessos estejam incluídos nos resultados. Note que no subprocesso $f \rightarrow \pi^0\pi^0$ não está indicado se $f = f_0$ ou $f = f_2$. Isto não se faz necessário, visto que os dois decaimentos fornecem os mesmos valores para d_1^f , d_2^f e \mathcal{F} . O mesmo ocorre com o subprocesso $a^+ \rightarrow \rho^+\pi^0$, onde temos $a^+ = a_1^+$ ou $a^+ = a_2^+$.

Decaimento Geral	Subprocesso	d_1^f	d_2^f	\mathcal{F}
$\rho \rightarrow \pi\pi$	$\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1
$f \rightarrow \pi\pi$	$f \rightarrow \pi^0\pi^0$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	3/2
$a \rightarrow \rho\pi$	$a^+ \rightarrow \rho^+\pi^0$	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	2
$b \rightarrow \omega\pi$	$b^+ \rightarrow \omega\pi^+$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	1
$h \rightarrow \rho\pi$	$h \rightarrow \rho^0\pi^0$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	3

Tab. 3.1: *Peso dos Fatores de Sabor sem a correção de ortogonalidade*

O peso dos fatores de sabor para a correção de ortogonalidade estão listados na tabela (3.2), onde os subprocessos utilizados são os mesmos da Tab.(3.1).

Visto que as relações $h_{fi}^{2CO} = 0$ e $h_{fi}^{3CO} = h_{fi}^{1CO}$ são sempre válidas para este modelo, nós calculamos apenas o primeiro termo da correção de ortogonalidade para os processos em estudo.

Decaimento	C^3P_0 Termo 1			
	d_{12}^f	d_{13}^f	d_{22}^f	d_{23}^f
$h \rightarrow \rho\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$a \rightarrow \rho\pi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$f \rightarrow \pi\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\rho \rightarrow \pi\pi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$b \rightarrow \omega\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0

Tab. 3.2: *Peso dos Fatores de Sabor para a Correção de Ortogonalidade*

A seguir, apresentamos as amplitudes de decaimento obtidas com o modelo C^3P_0 .

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) C_{10}^{\rho} Y_{11}(\Omega_x) \quad (\rho \rightarrow \pi\pi) \quad (3.89)$$

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) C_{20}^{f_2} Y_{22}(\Omega_x) \quad (f_2 \rightarrow \pi\pi) \quad (3.90)$$

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) C_{00}^{f_0} Y_{00}(\Omega_x) \quad (f_0 \rightarrow \pi\pi) \quad (3.91)$$

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) C_{21}^{a_2} Y_{21}(\Omega_x) \quad (a_2 \rightarrow \rho\pi) \quad (3.92)$$

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) [C_{01}^{b_1} Y_{00}(\Omega_x) + C_{21}^{b_1} Y_{20}(\Omega_x)] \quad (b_1 \rightarrow \omega\pi) \quad (3.93)$$

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) [C_{01}^{a_1} Y_{00}(\Omega_x) + C_{21}^{a_1} Y_{20}(\Omega_x)] \quad (a_1 \rightarrow \rho\pi) \quad (3.94)$$

$$h_{fi}^{C^3P_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) [C_{01}^{h_1} Y_{00}(\Omega_x) + C_{21}^{h_1} Y_{20}(\Omega_x)] \quad (h_1 \rightarrow \rho\pi) \quad (3.95)$$

onde os \mathcal{C}_{LS} são os polinômios \mathcal{P}_{LS} (Eqs. (1.48-1.55)) corrigidos, e dados por

$$\begin{aligned} C_{10}^{\rho} &\equiv -x \left[\frac{2^{9/2}}{3^3} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) + \frac{2^{11/2}}{3^{3/2} 7^{5/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right] \\ C_{20}^{f_2} &\equiv x^2 \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^4 5^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{3^{3/2} 5^{1/2} 7^{7/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\ C_{00}^{f_0} &\equiv \frac{2^4}{3^2} \left[1 - \frac{2}{9} x^2 \right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{3^{1/2} 7^{5/2}} \left[1 - \frac{8}{21} x^2 \right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{21}^{a_2} &\equiv -x^2 \left\{ \frac{2^5}{3^{7/2}5^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^7}{7^{7/2}5^{1/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\
 \mathcal{C}_{01}^{b_1} &\equiv -\left\{ \frac{2^4}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{7^{5/2}3} \left[1 - \frac{8}{21}x^2\right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\
 \mathcal{C}_{21}^{b_1} &\equiv -x^2 \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{7^{7/2}3^2} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\
 \mathcal{C}_{01}^{a_1} &\equiv \frac{2^{9/2}}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{11/2}}{7^{5/2}3} \left[1 - \frac{8}{21}x^2\right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 \mathcal{C}_{21}^{a_1} &\equiv -x^2 \left\{ \frac{2^5}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^7 5}{3^2 7^{7/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\
 \mathcal{C}_{01}^{h_1} &\equiv -\left\{ \frac{2^4}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{7^{5/2}3} \left[1 - \frac{8}{21}x^2\right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \\
 \mathcal{C}_{21}^{h_1} &\equiv -x^2 \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{7^{7/2}3^2} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\} \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

Introduzindo as amplitudes analíticas (3.89)-(3.95) em (1.41), obtemos as taxas de decaimento Γ para os sete processos em estudo com a utilização do modelo C^3P_0 .

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} &= \pi^{1/2} \gamma^2 \frac{M_\rho}{2} x (\mathcal{C}_{10}^\rho)^2 \\
 \Gamma_{f_2 \rightarrow \pi\pi} &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\pi E_\pi}{M_{f_2}} x (\mathcal{C}_{20}^{f_2})^2 \\
 \Gamma_{f_0 \rightarrow \pi\pi} &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\pi E_\pi}{M_{f_0}} x (\mathcal{C}_{00}^{f_0})^2 \\
 \Gamma_{a_2 \rightarrow \rho\pi} &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\rho E_\pi}{M_{a_2}} x (\mathcal{C}_{21}^{a_2})^2 \\
 \Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} x \left((\mathcal{C}_{01}^{b_1})^2 + (\mathcal{C}_{21}^{b_1})^2 \right) \\
 \Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi} &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\rho E_\pi}{M_{a_1}} x \left((\mathcal{C}_{01}^{a_1})^2 + (\mathcal{C}_{21}^{a_1})^2 \right) \\
 \Gamma_{h_1 \rightarrow \rho\pi} &= 2\pi^{1/2} \gamma^2 \frac{E_\rho E_\pi}{M_{h_1}} x \left((\mathcal{C}_{01}^{h_1})^2 + (\mathcal{C}_{21}^{h_1})^2 \right). \tag{3.97}
 \end{aligned}$$

3.4 Resultados numéricos dos processos de decaimentos

Nesta seção, faremos o ajuste numérico do modelo C^3P_0 aos dados experimentais. Duas estratégias de ajuste serão descritas. A primeira consiste em minimizar a expressão (1.59),

ou seja, a equação de uma hipersfera de raio R

$$\sum_{i=1} \left(\frac{\Gamma_i^{teo.}(\gamma, \beta)}{\Gamma_i^{exp.}} - 1 \right)^2 = R^2. \quad (3.98)$$

O menor valor de raio que a expressão (3.98) pode assumir é $R = 0$. Esta situação corresponde a um ajuste para o par γ e β tal que

$$\Gamma_i^{teo.}(\gamma, \beta) = \Gamma_i^{exp.}. \quad (3.99)$$

Entretanto, este seria o ajuste para o caso ideal, onde o modelo ajusta perfeitamente os dados experimentais. Na situação real $\Gamma_i^{teo.}(\gamma, \beta)$ difere de $\Gamma_i^{exp.}$ e, portanto, procura-se o par γ e β que fornece o melhor ajuste numérico para estas duas quantidades, ou seja, quando R assume o seu menor valor em (3.98).

A segunda estratégia é um procedimento muito comum em estudos de espectroscopia hadrônica, que consiste em destacar um méson específico, em geral, o méson mais leve, e usá-lo para “calibrar” o restante do espectro. Neste procedimento o méson escolhido é ajustado ao seu valor experimental. Os parâmetros do ajuste são, então, utilizados para calcular as propriedades dos demais mésons do espectro.

Usamos no nosso estudo valores atualizados para as massas dos mésons [22]

$$\begin{aligned} M_\pi &= 0.139 \text{ GeV}, & M_\rho &= 0.775 \text{ GeV}, & M_\omega &= 0.782 \text{ GeV}, & M_{h_1} &= 1.170 \text{ GeV}, \\ M_{a_1} &= 1.230 \text{ GeV}, & M_{b_1} &= 1.229 \text{ GeV}, & M_{f_2} &= 1.275 \text{ GeV}, & M_{f_0} &= 1.370 \text{ GeV}, \\ M_{a_2} &= 1.318 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Os valores atualizados para as taxas de decaimento dos mésons de (3.100) serão apresentados a seguir juntamente com os valores calculados do modelo. A forma de fixar o valor para o momento P nas expressões para as taxas de decaimento Γ é determinada pela equação (1.45), isto é,

$$P = \frac{\sqrt{[M_A^2 - (M_B + M_C)^2][M_A^2 - (M_B - M_C)^2]}}{2M_A}. \quad (3.101)$$

Em cada processo haverá um conjunto de massas inicial/final que irá estabelecer a escala de momento.

Os mésons a_1 , b_1 e h_1 têm uma quantidade experimental adicional: a razão D/S , discutida no capítulo 1. No nosso estudo elas serão obtidas a partir dos coeficientes \mathcal{C}_{LS} da equação (3.96). Em particular

$$\left. \frac{a_D}{a_S} \right|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = \frac{\mathcal{C}_{21}^{a_1}}{\mathcal{C}_{01}^{a_1}} \quad ; \quad \left. \frac{a_D}{a_S} \right|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = \frac{\mathcal{C}_{21}^{b_1}}{\mathcal{C}_{01}^{b_1}} \quad ; \quad \left. \frac{a_D}{a_S} \right|_{h_1 \rightarrow \rho\pi} = \frac{\mathcal{C}_{21}^{h_1}}{\mathcal{C}_{01}^{h_1}}. \quad (3.102)$$

Substituindo os valores de (3.96) em (3.102), encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} &= \frac{-x^2 \left\{ \frac{2^5}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{7.5}}{3^2 7^{7/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\}}{\frac{2^{9/2}}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{11/2}}{7^{5/2} 3} \left[1 - \frac{8}{21}x^2\right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right)} \\
 \frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} &= \frac{x^2 \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{7^{7/2} 3^2} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\}}{\frac{2^4}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{7^{5/2} 3} \left[1 - \frac{8}{21}x^2\right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right)} \\
 \frac{a_D}{a_S} \Big|_{h_1 \rightarrow \rho\pi} &= \frac{x^2 \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{17/2}}{7^{7/2} 3^2} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right\}}{\frac{2^4}{3^{5/2}} \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^5}{7^{5/2} 3} \left[1 - \frac{8}{21}x^2\right] \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right)} \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

Os dados experimentais para o grupo de mésons da lista (3.100), são extraídos do “Particle Data Group 2006” [22]. As taxas de decaimento estão em MeV, e listadas a seguir para os canais em estudo:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}^{exp.} &= 149.4 \pm 1.0 \quad ; \quad \Gamma_{f_2 \rightarrow \pi\pi}^{exp.} = 156.7 + 4.7 - 2.2 \quad ; \quad \Gamma_{a_2 \rightarrow \rho\pi}^{exp.} = 75 + 3.0 - 2.8 \\
 \Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi}^{exp.} &= 250 - 600 \quad ; \quad \Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi}^{exp.} = 142 \pm 9 \quad ; \quad \Gamma_{h_1 \rightarrow \rho\pi}^{exp.} = 360 \pm 40 \\
 \Gamma_{f_0 \rightarrow \pi\pi}^{exp.} &= 200 - 500 \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

e as razões D/S

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = -0.108(16) \quad ; \quad \frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = +0.277(27) \quad ; \quad \frac{a_D}{a_S} \Big|_{h_1 \rightarrow \rho\pi} = ? \quad (3.105)$$

onde a razão D/S para h_1 ainda não possui dados experimentais.

Como foi discutido no capítulo 1, uma outra quantidade experimental importante é a razão das razões D/S , em particular com dados atuais (2006) [22]

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = -0.389 \quad (3.106)$$

3.4.1 O Método da Hiperesfera

Neste primeiro ajuste é crucial ter valores precisos de $\Gamma^{exp.}$. Nem todos os mésons têm taxas de decaimento bem determinadas experimentalmente. Constatamos que os mésons a_1 e $f_0(1370)$ têm as maiores incertezas em $\Gamma^{exp.}$. Escolhemos, desta forma, ajustar (3.98) sem incluir estes mésons. Para efetuar uma comparação, calculamos R para os modelos 3P_0 e depois para o C^3P_0 , obtendo os resultados apresentados na tabela 3.3.

	3P_0	C^3P_0
R	0.514	0.467
γ	0.505	0.533
β (GeV)	0.383	0.378

Tab. 3.3: *Ajuste no modelo da hiperesfera*

Podemos concluir, de um modo global, que o modelo C^3P_0 fornece um ajuste melhor e mais próximo aos dados experimentais. Estes valores de γ e β agora serão introduzidos nos $\Gamma^{teo.}$, resultando na tabela (3.4).

Decaimento	3P_0 (MeV)	C^3P_0 (MeV)	D/S (3P_0)	D/S (C^3P_0)
$\rho \rightarrow \pi\pi$	89	117		
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	197	199		
$a_2 \rightarrow \rho\pi$	61	52		
$a_1 \rightarrow \rho\pi$	540	531	-0.163	-0,128
$b_1 \rightarrow \omega\pi$	144	142	+0,314	+0,305
$h_1 \rightarrow \rho\pi$	382	375	+0,234	+0,226
$f_0 \rightarrow \pi\pi$	157	163		

Tab. 3.4: *Ajuste das taxas de decaimento dos mésons leves com o Método das Hiperesferas: 3P_0 ($\gamma = 0.505$ e $\beta = 0.383$ GeV) e C^3P_0 ($\gamma = 0.533$ e $\beta = 0.378$ GeV)*

Pode-se notar, da tabela 3.4, que o ajuste das taxas de decaimento por este método não garante uma boa descrição das razões D/S . Em particular, a razão das razões para o modelo C^3P_0 fica

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = -0.420 . \quad (3.107)$$

Este resultado quando comparado com o do modelo 3P_0 , equação (1.68), revela que o modelo C^3P_0 fornece um valor mais próximo aos dados experimentais, equação (3.106).

3.4.2 Ajuste usando um méson calibrador

Da discussão anterior, fica evidenciado que de uma forma geral é possível ajustar o comportamento global das taxas de decaimento Γ . Este ajuste, entretanto, não fornece um bom resultado para as razões D/S . Como foi mencionado no início desta seção, em física de hádrons quando se faz cálculos de espectroscopia, muitas vezes se fixa o espectro tomando como referência um determinado méson ou conjunto de mésons da teoria. Este méson serve como um calibrador do restante do espectro. Em geral toma-se como base, para o ajuste, os mésons mais leves. Na nossa segunda forma de ajustar os dados, tomaremos o primeiro méson leve do modelo que possui, simultaneamente, o $\Gamma^{exp.}$ e a razão D/S bem determinados. Este méson é o b_1 . O procedimento será o seguinte: variar a intensidade da interação γ e o parâmetro β até encontrar os valores teóricos de Γ e a razão D/S mais próximos dos valores experimentais, para este méson. Este par γ e β do b_1 “calibrado” será utilizado no cálculo dos demais decaimentos. O resultado deste procedimento está listado na tabela 3.5.

Decaimento	3P_0 (MeV)	C^3P_0 (MeV)	D/S (3P_0)	D/S (C^3P_0)
$\rho \rightarrow \pi\pi$	81	111		
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	170	181		
$a_2 \rightarrow \rho\pi$	52	47		
$a_1 \rightarrow \rho\pi$	543	536	-0.149	-0,121
$b_1 \rightarrow \omega\pi$	143	143	+0,288	+0,288
$h_1 \rightarrow \rho\pi$	378	374	+0,215	+0,214
$f_0 \rightarrow \pi\pi$	225	198		

Tab. 3.5: Ajuste das taxas de decaimento dos mésons leves utilizando o méson calibrador: 3P_0 ($\gamma = 0.506$ e $\beta = 0.397$ GeV) e C^3P_0 ($\gamma = 0.535$ e $\beta = 0.387$ GeV)

Novamente pode-se estudar as razões D/S . Vemos pela tabela 3.5 que as razões ficaram menores para ambos os modelos. Entretanto, a razão da razão, para o modelo C^3P_0 fica

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = -0.420 . \tag{3.108}$$

o que outra vez evidencia que o modelo C^3P_0 descreve melhor esta quantidade.

É interessante observar o valor do raio da hipersfera para este ajuste. Muito embora, não seja este o critério para fixar os parâmetros. Este resultado é apresentado na tabela 3.6. Vemos que o modelo C^3P_0 novamente apresenta um raio menor do que o modelo 3P_0 .

	3P_0	C^3P_0
R	0.559	0.486
γ	0.506	0.535
β (GeV)	0.397	0.387

Tab. 3.6: Raio da hiperesfera no ajuste do méson calibrador

Nas figuras 3.1 e 3.2, vemos a proximidade qualitativa dos processos de decaimento nos dois modelos. A forma global das curvas é preservada. Na figura 3.3, é apresentada a dependência das curvas das razões D/S com o parâmetro β para os canais $b_1 \rightarrow \omega\pi$ e $a_1 \rightarrow \rho\pi$ nos modelos 3P_0 e C^3P_0 . Na figura 3.4, são mostradas as regiões de β , da figura 3.3, onde os valores teóricos das razões D/S coincidem com as faixas experimentais. Para o modelo C^3P_0 , vemos que as regiões teórico-experimentais possuem valores comuns de β que descrevem, simultaneamente, os dois processos de decaimento. Entretanto, isto não ocorre para o modelo 3P_0 .

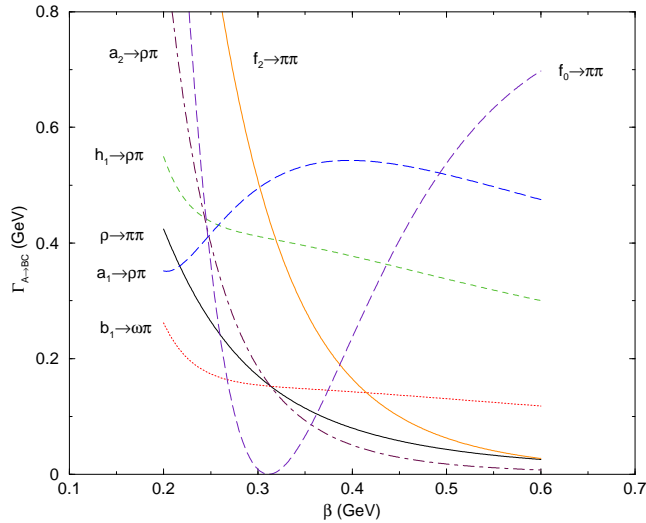


Fig. 3.1: Taxas de decaimentos de mésons leves $q\bar{q}$ no modelo 3P_0 para $\gamma = 0.506$.

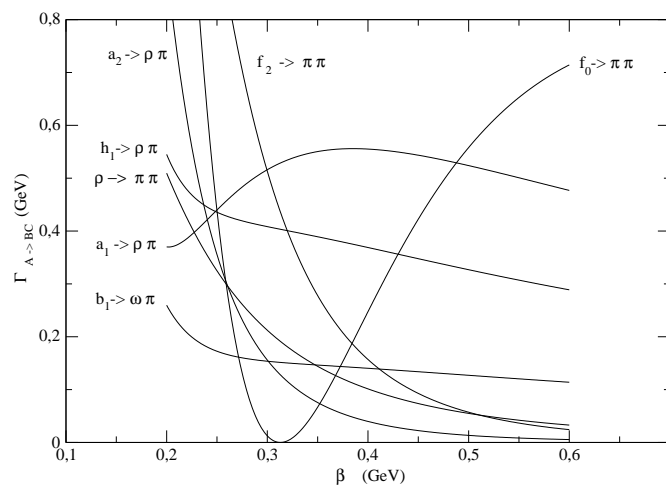


Fig. 3.2: Taxas de decaimentos de mésons leves $q\bar{q}$ no modelo C^3P_0 para $\gamma = 0.535$.

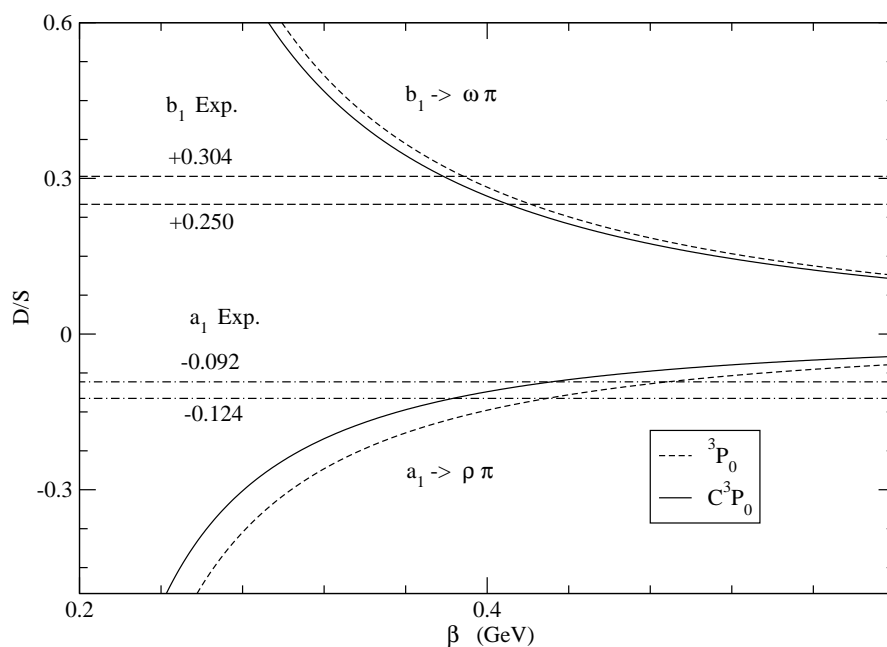


Fig. 3.3: Razões das amplitudes D/S para os processos de decaimento $b_1 \rightarrow \omega \pi$ e $a_1 \rightarrow \rho \pi$ nos modelos 3P_0 e C^3P_0 .

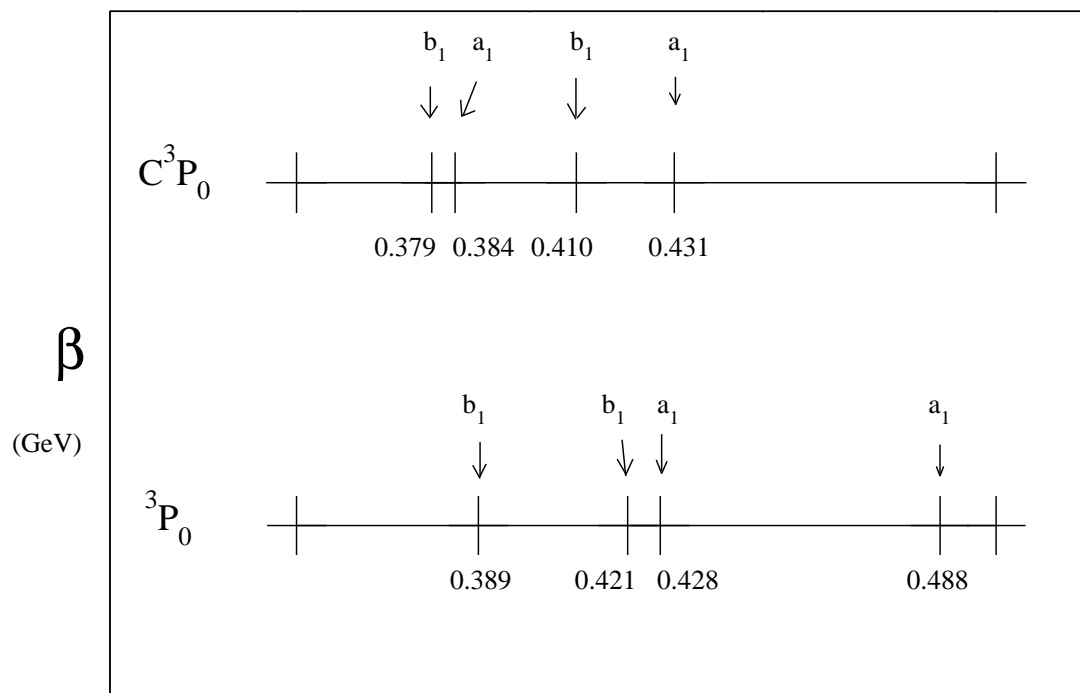


Fig. 3.4: Regiões de coincidência para valores de β no gráfico da figura 3.3.

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, fizemos um estudo da fenomenologia dos mésons leves sob a luz do modelo C^3P_0 . Este foi um estudo exploratório onde as bases deste modelo foram expandidas em relação ao estudo inicial desenvolvido em [8]. A idéia geral deste modelo consiste em perceber que os mésons são estados ligados entre quarks e antiquarks e que nos decaimentos esta informação sobre a sua estrutura interna não pode ser desconsiderada. A forma sistemática de incluir os graus de liberdade dos quarks, na física de mésons, é utilizando o formalismo de Fock-Tani. Desta forma, partindo de um Hamiltoniano de criação de pares de quark-antiquark, a partir do vácuo, obtém-se um Hamiltoniano efetivo H_m que fornece a mesma amplitude de decaimento h_{fi} que o consagrado modelo 3P_0 de decaimento. Entretanto, como a transformação de Fock-Tani implica numa série infinita em potências da função de onda, haverá termos de correção ao Hamiltoniano H_m . Estes termos de mais alta ordem são chamados de *correções de ortogonalidade* ou *correções de estado ligado*. Essencialmente, estes termos introduzem uma correção devido a natureza composta do méson. O novo Hamiltoniano completo obtido pela soma de H_m com a correção de ortogonalidade constitui o Hamiltoniano do modelo C^3P_0 .

Este modelo foi comparado com a experiência em canais de decaimento de mésons leves de sabor aberto bem conhecidos $\rho \rightarrow \pi + \pi$, $b_1 \rightarrow \omega + \pi$, $a_1 \rightarrow \rho + \pi$, $a_2 \rightarrow \rho + \pi$, $h_1 \rightarrow \rho + \pi$, $f_0 \rightarrow \pi + \pi$ e $f_2 \rightarrow \pi + \pi$. Primeiramente, obtemos as amplitudes e taxas de decaimento de forma analítica. Num segundo momento, os parâmetros γ e β foram ajustados de forma a obter as taxas de decaimento e as razões D/S que mais se aproximam dos valores experimentais. Para a obtenção destes resultados, foram utilizados dois tipos de ajustes: o método da hipersfera e o ajuste com um méson calibrador.

O ajuste das taxas de decaimento pelo primeiro método, não garante uma boa descrição das razões D/S . Por este motivo é que um segundo método de ajuste foi utilizado.

No ajuste usando um méson calibrador, a estratégia consiste em tomar como referência um determinado méson ou conjunto de mésons da teoria. Esta é uma prática usual em estudos de espectroscopia. Este méson serve como um calibrador do restante do espectro. O méson escolhido foi o b_1 , por ser o mais leve e por possuir, além de uma taxa de decaimento

bem conhecida, uma razão D/S bem estabelecida.

Uma conclusão geral que pode-se tirar é que o modelo C^3P_0 modifica sensivelmente as razões D/S , quando comparado com o modelo 3P_0 . Em particular, a razão das razões D/S para os canais $a_1 \rightarrow \rho\pi$ em relação $b_1 \rightarrow \omega\pi$ evidencia que o modelo C^3P_0 descreve melhor os dados experimentais. Além disso, o fato importante que surge, independentemente do esquema de ajuste escolhido, consiste na melhor descrição global das taxas de decaimento. Este fato é evidenciado pelo raio R da hipersfera, que nos dois métodos de ajuste indicam um raio menor para o modelo C^3P_0 . Fisicamente isto implica numa proximidade maior do modelo aos dados experimentais. No ajuste usando o método da hipersfera, há uma diferença percentual entre os modelos da ordem de 9 %, enquanto no ajuste usando o méson calibrador a diferença percentual é da ordem de 13 %.

Ao fixar esta parametrização pode-se usar o modelo ajustado para, inicialmente, estudar o setor do quarkônio. A inclusão do quark com estranheza permite estudar o setor do kaônio. Pode-se, então, abordar o problema atual referente aos mésons com charme, como por exemplo os D_{s0} e D_{s1} .

Outra possibilidade é o cálculo das taxas de decaimento para os estados de charmônio. Por exemplo: $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4159)$, $\psi(4415)$, $\eta_c(4043)$, $\eta_c(4384)$, $\chi_0(3852)$, $\chi_1(3925)$, $h_c(3934)$, $h_c(4279)$, $\chi_2(4317)$, $\psi_3(3806)$, $\psi_5(4214)$, $\chi_2(4351)$, $\chi_3(4352)$, ou ainda os novos mésons $X(3943)$, $Y(3940)$ e $Z(3930)$.

Apêndice A

Notação e Convenções

(A) Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli obedecem a lei de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.1})$$

e a lei de anti-comutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2I \delta_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

onde I é a matriz identidade 2×2 , δ_{ij} é o símbolo da delta de Kronecker e ϵ_{ijk} é o símbolo totalmente anti-simétrico. Uma relação útil envolvendo operadores \vec{A} e \vec{B} que comutam com as matrizes de Pauli, mas não necessariamente um com o outro, é

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{A.3})$$

A representação padrão para as matrizes de Pauli é

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

No espaço de isospin, as mesmas matrizes são denotadas por $\vec{\tau}$.

(B) Matrizes de Dirac

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell para as matrizes de Dirac. A propriedade fundamental destas matrizes é a lei de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, definido por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

As matrizes α_i e β são definidas por

$$\gamma_i = \beta \alpha_i \quad \gamma^0 = \gamma_0 = \beta \quad (\text{A.7})$$

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.8})$$

Note-se que 5 não é um índice tensorial. A representação padrão para γ^μ é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Nesta representação, a matriz adjunta hermitiana de γ^μ é

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad (\text{A.10})$$

e a matriz γ_5 é:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

(C) Matrizes de Gell-Mann

Os geradores das transformações do grupo de simetria $SU(3)$ são as matrizes de Gell-Mann λ_a ($a=1,8$). Estas são matrizes 3×3 que obedecem as seguintes relações de comutação e anti-comutação :

$$[\lambda_a, \lambda_b] \equiv \lambda_a \lambda_b - \lambda_b \lambda_a = 2i f_{abc} \lambda_c \quad (\text{A.12})$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} \equiv \lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a = \frac{4}{3} I \delta_{ab} + 2 d_{abc} \lambda_c, \quad (\text{A.13})$$

onde I é a matriz identidade 3×3 e δ_{ab} é o símbolo da delta de Kronecker. Os f_{abc} são ímpares sob a permutação de qualquer par de índices, enquanto d_{abc} são pares. Os seus valores não nulos são :

abc	f_{abc}	abc	d_{abc}	abc	d_{abc}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$	355	1/2
147	1/2	146	1/2	366	-1/2
156	-1/2	157	1/2	377	-1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$	448	$-1/(2\sqrt{3})$
257	1/2	247	-1/2	558	$-1/(2\sqrt{3})$
345	1/2	256	1/2	668	$-1/(2\sqrt{3})$
367	-1/2	338	$1/\sqrt{3}$	778	$-1/(2\sqrt{3})$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2	888	$-1/\sqrt{3}$
678	$\sqrt{3}/2$				

As matrizes de Gell-Mann são dadas por

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

(D) Harmônicos Esféricos

$$Y_{00}(\Omega_P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tag{A.15}$$

$$Y_{11}(\Omega_P) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{(P_x + iP_y)}{P} \tag{A.16}$$

$$Y_{20}(\Omega_P) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(\frac{3P_z^2}{P^2} - 1 \right) \tag{A.17}$$

$$Y_{21}(\Omega_P) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{P_z(P_x + i P_y)}{P^2} \quad (\text{A.18})$$

$$Y_{22}(\Omega_P) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(P_x + i P_y)^2}{P^2} \quad (\text{A.19})$$

(E) Integração de Harmônicos Esféricos

$$\int Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) d\Omega = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (\text{A.20})$$

(F) Integrais Gaussianas

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \exp[-ak^2 + \vec{b} \cdot \vec{k}] = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{b^2}{4a}\right] \quad (\text{A.21})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k k_x \exp[-ak^2 + \vec{b} \cdot \vec{k}] = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{b_x}{2a} \exp\left[\frac{b^2}{4a}\right] \quad (\text{A.22})$$

Apêndice B

Função de Onda do Méson

No formalismo de Fock-Tani, consideramos os estados de méson em segunda quantização, dados por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do méson, normalizada na forma

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.2})$$

Considerando os graus de liberdade spin, sabor, cor e espaço, a função de onda do méson pode ser escrito na forma

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \chi_{S_\alpha}^{s_1 s_2} f_{f_\alpha}^{f_1 f_2} C^{c_1 c_2} \Phi_{nl}^{\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2}. \quad (\text{B.3})$$

As funções de onda de spin, $\chi_{S_\alpha}^{s_1 s_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes aos estados de spin do méson, onde s_1 e s_2 são as projeções de spin do quark e do antiquark ($s = 1 \rightarrow \uparrow \equiv +\frac{1}{2}$ e $s = 2 \rightarrow \downarrow \equiv -\frac{1}{2}$) e o índice S_α denota o méson específico.

O estado de singlete de spin ($S = 0$; $S_z = 0$) é dado por:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (\text{B.4})$$

Enquanto os estados de tripleto de spin ($S = 1$; $S_z = 1, 0, -1$) são representados por:

$$\begin{aligned} &|\uparrow\uparrow\rangle \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ &|\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Desta forma, se estivermos estudando, por exemplo, o decaimento $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^0$, podemos definir

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 1 \rightarrow \rho \\ S_\alpha &= 2, 3 \rightarrow \pi \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

O méson π tem $S = 0$ e ρ tem $S = 1$. Nós tomamos uma direção preferencial ($+\hat{z}$) para o spin do méson ρ , assim temos

$$\begin{aligned} |\rho\rangle &= |\uparrow \bar{\uparrow}\rangle \\ |\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \bar{\downarrow}\rangle - |\downarrow \bar{\uparrow}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sendo assim, as funções de onda de spin $\chi_{S_\alpha}^{s_1 s_2}$ para o decaimento $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^0$ ficam

$$\begin{aligned} \chi_1^{11} &= 1, & \chi_1^{12} &= 0 \\ \chi_1^{21} &= 0, & \chi_1^{22} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \chi_2^{11} &= 0, & \chi_2^{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \chi_2^{21} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \chi_2^{22} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\chi_3^{ij} = \chi_2^{ij} \quad (\text{B.10})$$

Outro processo a ser estudado nesta dissertação é $b_1^+ \rightarrow \omega \pi^+$, onde definimos

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 1 \rightarrow b_1^+ \\ S_\alpha &= 2, \rightarrow \omega \\ S_\alpha &= 3 \rightarrow \pi^+ \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Neste caso, o méson ω , que tem $S = 1$, é que será polarizado na direção ($+\hat{z}$). Assim, temos

$$\begin{aligned} |b_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \bar{\downarrow}\rangle - |\downarrow \bar{\uparrow}\rangle) \\ |\omega\rangle &= |\uparrow \bar{\uparrow}\rangle \\ |\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \bar{\downarrow}\rangle - |\downarrow \bar{\uparrow}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

As funções de onda de spin $\chi_{S_\alpha}^{s_1 s_2}$ para o decaimento $b_1 \rightarrow \omega \pi$ ficam

$$\begin{aligned} \chi_1^{11} &= 0, & \chi_1^{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \chi_1^{21} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \chi_1^{22} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \chi_2^{11} &= 1, & \chi_2^{12} &= 0 \\ \chi_2^{21} &= 0, & \chi_2^{22} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}
 \chi_3^{11} &= 0, & \chi_3^{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \chi_3^{21} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \chi_3^{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

No decaimento $f_0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$, temos os píons com $S = 0$ e o f_0 com $S = 1$, mas neste caso nós não tomamos direção preferencial para o spin do f_0 .

Definindo

$$\begin{aligned}
 \alpha &\equiv 1m_s \rightarrow f_0 \\
 \alpha &\equiv 2 \rightarrow \pi \\
 \alpha &\equiv 3 \rightarrow \pi
 \end{aligned}$$

onde $m_s = -1, 0, 1$

Temos para f_0

$$\begin{aligned}
 \chi_{1-1}^{11} &= 0, & \chi_{1-1}^{12} &= 0 \\
 \chi_{1-1}^{21} &= 0, & \chi_{1-1}^{22} &= 1 \\
 \\
 \chi_{10}^{11} &= 0, & \chi_{10}^{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \chi_{10}^{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \chi_{10}^{22} &= 0 \\
 \\
 \chi_{11}^{11} &= 1, & \chi_{11}^{12} &= 0 \\
 \chi_{11}^{21} &= 0, & \chi_{11}^{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

e para π

$$\begin{aligned}
 \chi_2^{11} &= 0, & \chi_2^{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \chi_2^{21} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \chi_2^{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

A função de onda de sabor $f_{f_\alpha}^{f_\mu f_\nu}$ segue a mesma lógica do spin. Considerando o decaimento $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$, temos

$$\begin{aligned}
 |\rho^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\
 |\pi^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\
 |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Definindo

$$f_\alpha = 1 \rightarrow \rho; \quad f_\alpha = 2 \rightarrow \pi^+; \quad f_\alpha = 3 \rightarrow \pi^0 \quad (\text{B.19})$$

e

$$f_\mu = 1 \rightarrow u; \quad f_\mu = 2 \rightarrow d \quad (\text{B.20})$$

Encontramos para o ρ

$$f_1^{12} = -1; \quad f_1^{11} = f_1^{21} = f_1^{22} = 0, \quad (\text{B.21})$$

mas como o ρ e o π^+ tem a mesma função de onda de sabor,

$$f_1^{ij} = f_2^{ij}, \quad (\text{B.22})$$

e para π^0 , temos

$$f_3^{11} = -f_3^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad f_3^{12} = f_3^{21} = 0. \quad (\text{B.23})$$

Do mesmo modo para o $b_1^+ \rightarrow \omega + \pi^+$

$$\begin{aligned} |b_1^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\ |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \\ |\pi^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Definindo

$$f_\alpha = 3 \rightarrow \pi^+; \quad f_\alpha = 2 \rightarrow \omega; \quad f_\alpha = 1 \rightarrow b_1^+ \quad (\text{B.25})$$

e

$$f_\mu = 1 \rightarrow u; \quad f_\mu = 2 \rightarrow d \quad (\text{B.26})$$

Temos para o b_1^+

$$f_1^{12} = -1; \quad f_1^{11} = f_1^{21} = f_1^{22} = 0. \quad (\text{B.27})$$

Mas, como o b_1^+ e o π^+ tem a mesma função de onda de sabor, então

$$f_1^{ij} = f_3^{ij} \quad (\text{B.28})$$

E para ω , temos

$$f_2^{11} = f_2^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad f_2^{12} = f_2^{21} = 0 \quad (\text{B.29})$$

A função de onda de cor será

$$C^{c_1 c_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{c_1 c_2}. \quad (\text{B.30})$$

Na parte espacial utilizam-se funções de onda do tipo oscilador harmônico, pois elas descrevem o confinamento de cor e fornecem amplitudes analíticas. Dessa forma, teremos que as funções de onda espaciais dos mésons são dadas por

$$\Phi_{nl}^{\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2} = \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi_{nl}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \quad (\text{B.31})$$

onde $\Phi_{nl}(\vec{p}_i, \vec{p}_j)$ é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{nl}(\vec{p}_i, \vec{p}_j) &= \left(\frac{1}{2\beta}\right)^l N_{nl} |\vec{p}_i - \vec{p}_j|^l \exp\left[-\frac{(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2}{8\beta^2}\right] \\ &\times \mathcal{L}_n^{l+\frac{1}{2}}\left[\frac{(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2}{4\beta^2}\right] Y_{lm}(\Omega_{\vec{p}_i - \vec{p}_j}) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

em que $p_{i(j)}$ é o momento interno, Y_{lm} o harmônico esférico e β um parâmetro de escala, a constante de normalização N_{nl} depende dos números quânticos radiais e orbitais n, l com

$$N_{nl} = \left[\frac{2(n!)}{\beta^3 \Gamma(n+l+3/2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.33})$$

Os polinômios de Laguerre são dados por

$$\mathcal{L}_n^{l+\frac{1}{2}}(p) = \sum_{k=0}^n \frac{(-)^k \Gamma(n+l+3/2)^{(n-k)!}}{k! \Gamma(k+l+3/2)} p^k \quad (\text{B.34})$$

Os mésons que serão estudados serão mésons leves não-estranhos com $L_{q\bar{q}} = 0$ e $L_{q\bar{q}} = 1$. Desta forma

- $L_{q\bar{q}} = 0$

$$\varphi(\vec{p}) \equiv \Phi_{00}(\vec{p}) = \frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{3/2}} \exp\left[-\frac{p^2}{8\beta^2}\right] \quad (\text{B.35})$$

- $L_{q\bar{q}} = 1$

$$\Phi_{1m}(\vec{p}) = \phi(\vec{p}) Y_{1m}(\Omega_{\vec{p}}) \quad (\text{B.36})$$

onde

$$\phi(\vec{p}) = \left[\frac{2}{3\sqrt{\pi}\beta^5}\right]^{\frac{1}{2}} p \exp\left[-\frac{p^2}{8\beta^2}\right]. \quad (\text{B.37})$$

Apêndice C

Cálculo de Comutadores

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, o cálculo de comutadores que são utilizados no capítulo 2. Como foi definido em (2.3) o operador de criação de um méson no espaço físico é dado por

$$M_\alpha^\dagger = \phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger. \quad (\text{C.1})$$

Para fazer os cálculos dos comutadores, vamos utilizar as seguintes propriedades

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (\text{C.2})$$

e

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\} \quad (\text{C.3})$$

Nos comutadores abaixo, o cálculo é realizado a partir da Eq. (C.3) e utilizando a propriedade (2.5).

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] &= -\bar{q}_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu, \bar{q}_\xi\} + \{\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \\ &= \delta_{\nu\sigma} \bar{q}_\xi \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

- Cálculo de $[q_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

$$\begin{aligned} [q_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi] &= -q_\sigma^\dagger \{q_\nu, q_\xi\} + \{q_\nu, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \\ &= \delta_{\nu\sigma} q_\xi \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

- Cálculo de $[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger]$

$$\begin{aligned} [q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger] &= -\bar{q}_\sigma^\dagger \{q_\nu, q_\xi^\dagger\} + \{q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} q_\xi^\dagger \\ &= -\delta_{\nu\xi} \bar{q}_\sigma^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

- Cálculo de $[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

$$\begin{aligned} [q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] &= -\bar{q}_\sigma^\dagger \{q_\nu, \bar{q}_\xi\} + \{q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

- Cálculo de $[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi]$

$$\begin{aligned} [q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi] &= -q_\sigma \{q_\nu, \bar{q}_\xi\} + \{q_\nu, q_\sigma\} \bar{q}_\xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

E desta expressão, expandindo para outros comutadores de mesma natureza, obtemos

$$[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi] = [q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi^\dagger] = [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\xi q_\sigma] = [\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\xi^\dagger q_\sigma^\dagger] = 0 \quad (\text{C.9})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger] &= -\bar{q}_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu, q_\xi^\dagger\} + \{\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} q_\xi^\dagger \\ &= \delta_{\nu\sigma} q_\xi^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi] &= -q_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu, q_\xi\} + \{\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi] &= -q_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] &= -\bar{q}_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\xi\} + \{\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \\ &= -\delta_{\xi\nu} \bar{q}_\sigma^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

- Cálculo de $[q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

$$\begin{aligned} [q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi] &= -q_\sigma^\dagger \{q_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \\ &= -\delta_{\xi\nu} q_\sigma^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi] &= -\bar{q}_\sigma \{\bar{q}_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma\} q_\xi \\ &= \delta_{\sigma\nu} q_\xi \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

- Cálculo de $[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi]$

$$\begin{aligned} [q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi] &= -\bar{q}_\sigma \{q_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma\} q_\xi \\ &= -\delta_{\xi\nu} \bar{q}_\sigma \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

- Cálculo de $[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

$$\begin{aligned} [q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] &= -\bar{q}_\sigma^\dagger \{q_\nu^\dagger, \bar{q}_\xi\} + \{q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Nos próximos comutadores, o cálculo é realizado a partir da Eq. (C.2)

- Cálculo de $[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi]$

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = [q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger] \bar{q}_\xi + \bar{q}_\omega^\dagger [q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\xi] \quad (\text{C.18})$$

Com as propriedades (C.11) e (C.12), podemos escrever,

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = 0 \quad (\text{C.19})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi]$

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = \bar{q}_\sigma^\dagger [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] + [\bar{q}_\sigma^\dagger, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] \bar{q}_\nu \quad (\text{C.20})$$

Com as propriedades (C.4) e (C.13), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = \delta_{\nu\omega} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi - \delta_{\xi\sigma} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \quad (\text{C.21})$$

- Cálculo de $[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda]$

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda] = q_\rho^\dagger [q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda] + [q_\rho^\dagger, q_\tau^\dagger q_\lambda] q_\mu \quad (\text{C.22})$$

Com as propriedades (C.5) e (C.14), podemos escrever,

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda] = \delta_{\mu\tau} q_\rho^\dagger q_\lambda - \delta_{\lambda\rho} q_\tau^\dagger q_\mu \quad (\text{C.23})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger]$

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] = \bar{q}_\sigma^\dagger [\bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] + [\bar{q}_\sigma^\dagger, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \bar{q}_\nu \quad (\text{C.24})$$

Com as propriedades (C.9) e (C.10), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] = -\bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \delta_{\nu\tau} \quad (\text{C.25})$$

- Cálculo de $[q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger]$

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] = q_\eta^\dagger [q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] + [q_\eta^\dagger, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] q_\mu \quad (\text{C.26})$$

Com as propriedades (C.6) e (C.9), podemos escrever,

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] = q_\eta^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \delta_{\mu\rho} \quad (\text{C.27})$$

ou ainda

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] = -\bar{q}_\tau^\dagger q_\eta^\dagger \delta_{\mu\rho} \quad (\text{C.28})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho]$

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho] = \bar{q}_\sigma^\dagger [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho] + [\bar{q}_\sigma^\dagger, \bar{q}_\tau q_\rho] \bar{q}_\nu \quad (\text{C.29})$$

Com as propriedades (C.9) e (C.15), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho] = \delta_{\tau\sigma} q_\rho \bar{q}_\nu \quad (\text{C.30})$$

ou ainda

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho] = -\delta_{\tau\sigma} \bar{q}_\nu q_\rho \quad (\text{C.31})$$

- Cálculo de $[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho]$

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho] = q_\eta^\dagger [q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho] + [q_\eta^\dagger, \bar{q}_\tau q_\rho] q_\mu \quad (\text{C.32})$$

Com as propriedades (C.8) e (C.16), podemos escrever,

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho] = -\bar{q}_\tau q_\mu \delta_{\rho\eta} \quad (\text{C.33})$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger]$

$$[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] = \bar{q}_\xi [q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] + [\bar{q}_\xi, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] q_\omega \quad (\text{C.34})$$

Com as propriedades (C.6) e (C.10), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] = -\bar{q}_\xi \bar{q}_\sigma^\dagger \delta_{\omega\rho} + \delta_{\xi\sigma} q_\rho^\dagger q_\omega \quad (\text{C.35})$$

Ou ainda,

$$[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] = -\delta_{\xi\sigma} \delta_{\omega\rho} + \delta_{\omega\rho} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi + \delta_{\xi\sigma} q_\rho^\dagger q_\omega \quad (\text{C.36})$$

Nos comutadores a seguir, $\Delta_{\alpha\beta}$ é dada pela Eq.(2.7)

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}]$

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}] &= [\bar{q}_\nu, (\phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau + \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger q_\mu)] \\ &= \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\sigma} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau] + \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} [\bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger q_\mu] \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Com as propriedades (C.4) e (C.11), podemos escrever,

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}] &= \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\tau \delta_{\nu\sigma} \\ &= \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\nu} \bar{q}_\tau \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

- Cálculo de $[q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}]$

$$\begin{aligned} [q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}] &= [q_\mu^\dagger, (\phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\mu'\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau + \phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger q_{\mu'})] \\ &= \phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\mu'\sigma} [q_\mu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau] + \phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} [q_\mu^\dagger, q_\rho^\dagger q_{\mu'}] \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Com as propriedades (C.14) e (C.17), podemos escrever,

$$\begin{aligned} [q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}] &= -\phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \delta_{\mu'\mu} \\ &= -\phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

- Cálculo de $[\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]$. Este cálculo é realizado a partir das Eqs. (C.1) e (2.7), logo podemos escrever

$$\begin{aligned} [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger] &= [(\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} q_\eta^\dagger q_\mu), \phi_\delta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \\ &= [\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \phi_\delta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] + [\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} q_\eta^\dagger q_\mu, \phi_\delta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \\ &= \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\tau} [\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} \phi_\delta^{\rho\tau} [q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Com as propriedades (C.25) e (C.28), temos

$$\begin{aligned} [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger] &= -\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\tau} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \delta_{\nu\tau} - \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} \phi_\delta^{\rho\tau} \bar{q}_\tau^\dagger q_\eta^\dagger \delta_{\mu\rho} \\ &= -\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger - \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} \phi_\delta^{\mu\tau} \bar{q}_\tau^\dagger q_\eta^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos e obter

$$[\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger] = -\left\{ \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma} \right\} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \quad (\text{C.43})$$

- Cálculo de $[\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta]$

O cálculo $[\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta]$ é realizado a partir das Eqs. (C.1) e (2.7), assim

$$\begin{aligned}
 [\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta] &= \left[\left(\phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\eta\nu} q_\eta^\dagger q_\mu \right), \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\tau q_\rho \right] \\
 &= \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\sigma} \phi_\delta^{*\rho\tau} \left[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] \\
 &+ \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\eta\nu} \phi_\delta^{*\rho\tau} \left[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho \right]
 \end{aligned} \tag{C.44}$$

Com as propriedades (C.31) e (C.33), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 [\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta] &= -\phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\sigma} \phi_\delta^{*\rho\tau} \delta_{\tau\sigma} \bar{q}_\nu q_\rho - \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\eta\nu} \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\tau q_\mu \delta_{\rho\eta} \\
 &= -\phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\tau} \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\nu q_\rho - \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\rho\nu} \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\tau q_\mu
 \end{aligned} \tag{C.45}$$

Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos resultando em

$$[\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta] = -\left\{ \phi_\gamma^{*\mu\sigma} \phi_\beta^{\mu\nu} \phi_\delta^{*\rho\nu} + \phi_\gamma^{*\rho\nu} \phi_\beta^{\mu\nu} \phi_\delta^{*\mu\sigma} \right\} \bar{q}_\sigma q_\rho \tag{C.46}$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]]$. Este cálculo é realizado a partir das Eqs. (C.46) e (C.3), logo podemos escrever

$$\begin{aligned}
 [\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]] &= \left[\bar{q}_\nu, \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} \bar{q}_\omega q_\rho \right] \\
 &= \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega q_\rho]
 \end{aligned} \tag{C.47}$$

Com a propriedade (C.9), obtemos

$$[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]] = 0 \tag{C.48}$$

- Cálculo de $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]]$

O cálculo de $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]]$ é realizado a partir das Eqs. (C.46) e (C.3), sendo assim temos

$$\begin{aligned}
 [\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]] &= \left[\bar{q}_\nu, -\left\{ \phi_\alpha^{\rho\nu'} \phi_\beta^{\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{\mu'\omega} \phi_\beta^{\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} \bar{q}_\omega^\dagger q_\rho^\dagger \right] \\
 &= -\left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger q_\rho^\dagger]
 \end{aligned} \tag{C.49}$$

Com a propriedade (C.10), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]] = -\left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} \delta_{\nu\omega} q_\rho^\dagger \tag{C.50}$$

ou ainda

$$[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]] = -\left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\nu} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\nu} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} q_\rho^\dagger \tag{C.51}$$

Apêndice D

Cálculo do Potencial Spin-espço

$$V_{\mu\nu}^{s-e}$$

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, o cálculo do potencial spin-espço $V_{\mu\nu}^{s-e}$, que é utilizado no decorrer deste trabalho. Como foi mostrado em (A.4), as matrizes de Pauli são escritas como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

e ainda temos os espinores que são dados por

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \chi_2^c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

O potencial spin-espço $V_{\mu\nu}^{s-e}$ é da forma

$$V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} = -\gamma \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_{s_\mu}^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_{s_\nu}^c \quad (\text{D.3})$$

Vamos calcular separadamente a expressão

$$\chi_{s'}^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_s^c \quad (\text{D.4})$$

onde $\vec{P} = (\vec{p} - \vec{p}')$. Sabemos que

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{P} = \sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z. \quad (\text{D.5})$$

De posse dessas duas relações, temos

$$\chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_1^c = \chi_1^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_1^c \quad (\text{D.6})$$

$$\chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_2^c = \chi_1^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c \quad (\text{D.7})$$

$$\chi_2^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_1^c = \chi_2^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_1^c \quad (\text{D.8})$$

$$\chi_2^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_2^c = \chi_2^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c \quad (\text{D.9})$$

Avaliando as Eq. ((D.6)-(D.9)), obtemos:

* A Eq. (D.6) é dada por

$$\chi_1^* (\sigma_x P_x) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = P_x \quad (\text{D.10})$$

$$\chi_1^* (\sigma_y P_y) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_y = -iP_y \quad (\text{D.11})$$

$$\chi_1^* (\sigma_z P_z) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_z = 0 \quad (\text{D.12})$$

Assim, dos resultados obtidos em (D.10), (D.11) e (D.12), temos que a equação (D.6) fica

$$\chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_1^c = P_x - iP_y \quad (\text{D.13})$$

* A equação (D.7) é dada por

$$\chi_1^* (\sigma_x P_x) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\chi_1^* (\sigma_y P_y) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_y = 0 \quad (\text{D.15})$$

$$\chi_1^* (\sigma_z P_z) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_z = -P_z \quad (\text{D.16})$$

Logo, dos resultados obtidos em (D.14), (D.15) e (D.16), temos

$$\chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_2^c = -P_z \quad (\text{D.17})$$

* A equação (D.8) é dada por

$$\chi_2^* (\sigma_x P_x) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = 0 \quad (\text{D.18})$$

$$\chi_2^*(\sigma_y P_y) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_y = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$\chi_2^*(\sigma_z P_z) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_z = -P_z \quad (\text{D.20})$$

Das Eqs. (D.18), (D.19) e (D.20), temos que a equação (D.8) fica

$$\chi_2^*(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_1^c = -P_z \quad (\text{D.21})$$

*E por fim, a Eq. (D.9) é dada por

$$\chi_2^*(\sigma_x P_x) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = -P_x \quad (\text{D.22})$$

$$\chi_2^*(\sigma_y P_y) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_y = -iP_y \quad (\text{D.23})$$

$$\chi_2^*(\sigma_z P_z) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_z = 0 \quad (\text{D.24})$$

Assim, dos resultados obtidos em (D.22), (D.23) e (D.24), temos

$$\chi_2^*(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_2^c = -(P_x + iP_y) \quad (\text{D.25})$$

Apêndice E

Cálculo do Elemento de Matriz de Spin do Decaimento f_0

O méson f_0 possui momento angular orbital $L = 1$, spin $S = 1$ e momento angular total $J = 0$, por esta razão sua função de onda difere dos outros processos estudados nesta dissertação. Neste apêndice vamos mostrar o cálculo da parte de spin, d_i^s , para o decaimento $f_0 \rightarrow \pi\pi$. As demais partes do elemento de matriz não serão mostradas explicitamente, visto que elas seguem a mesma lógica dos exemplos já apresentados no capítulo 3.

(A) Decaimento $f_0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ sem correção de ortogonalidade

Sabemos que o méson π tem spin $S = 0$ e que o f_0 possui $L = 1$, $S = 1$ e $J = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} |f_0\rangle &\rightarrow J = 0, L = 1, S = 1 \text{ e } n = 0 \\ |\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Sendo a forma geral da função de onda spin-espaco para o f_0 dada por

$$\Phi_{nljm}(\vec{r}) = \Phi_{nl}(r) \sum_{m=m_l+m_s} \langle l m_l s m_s | j m \rangle Y_{l m_l}(\theta, \phi) \chi_{s m_s}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \Phi_{0100}(\vec{r}) &= \Phi_{01}(r) \sum_{m=m_l+m_s} \langle 1 m_l 1 m_s | 0 0 \rangle Y_{1 m_l}(\theta, \phi) \chi_{1 m_s}^{s_\mu s_\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_{01}(r) Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{1-1}^{s_\mu s_\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_{01}(r) Y_{10}(\theta, \phi) \chi_{10}^{s_\mu s_\nu} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_{01}(r) Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_{11}^{s_\mu s_\nu} \\
 & = \Phi_{01}(r) \left[\frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{1-1}^{s_\mu s_\nu} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_{10}^{s_\mu s_\nu} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_{11}^{s_\mu s_\nu} \right] \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

Desprezando a função de onda espacial $\Phi_{01}(r)$ na Eq. (E.2), temos que a parte de spin para o f_0 fica

$$\chi_{f_0}^s = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{1-1}^{s_\mu s_\nu} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_{10}^{s_\mu s_\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_{11}^{s_\mu s_\nu} \tag{E.3}$$

Desta forma, a parte de spin para o decaimento $f_0 \rightarrow \pi\pi$ fica

$$\begin{aligned}
 d_1^s & = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_{1-1}^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_{10}^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_{11}^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{12} \chi_{1-1}^{22} V_{11}^{s-e} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{12} \chi_{10}^{12} V_{12}^{s-e} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_{10}^{21} V_{21}^{s-e} + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{21} \chi_{11}^{11} V_{22}^{s-e} \\
 & = -\frac{1}{2\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e} \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) V_{12}^{s-e} - \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) V_{21}^{s-e} \tag{E.4}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 d_2^s & = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_{1-1}^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_{10}^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_{11}^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{21} \chi_{1-1}^{22} V_{11}^{s-e} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{12} \chi_{10}^{12} V_{12}^{s-e} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_{10}^{21} V_{21}^{s-e} + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{12} \chi_{11}^{11} V_{22}^{s-e} \\
 & = -\frac{1}{2\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) V_{21}^{s-e} - \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) V_{12}^{s-e} \quad (\text{E.5})$$

Resumindo

$$\begin{aligned} d_1^s = d_2^s &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) V_{12}^{s-e} - \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) V_{21}^{s-e} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

(B) Decaimento $f_0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ com correção de ortogonalidade

Do elemento de matriz, Eq. (3.29), vamos calcular cada um dos três termos em separado. Neste processo, o índice i que aparece na Δ corresponde ao π^0 , portanto, da Eq. (3.33) vemos que as seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned} d_{12}^{1co} &= d_{13}^{1co} \\ d_{22}^{1co} &= d_{23}^{1co} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

- Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade:

Da Eq. (3.33) e utilizando as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção anterior, temos que a parte de spin é dada por

$$\begin{aligned} d_{12}^s &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{s\rho s\sigma} \chi_2^{s\mu s\tau} \chi_2^{s\rho s\tau} \chi_2^{s\lambda s\nu} \chi_{1-1}^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{s\rho s\sigma} \chi_2^{s\mu s\tau} \chi_2^{s\rho s\tau} \chi_2^{s\lambda s\nu} \chi_{10}^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{s\rho s\sigma} \chi_2^{s\mu s\tau} \chi_2^{s\rho s\tau} \chi_2^{s\lambda s\nu} \chi_{11}^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{21} \chi_{1-1}^{22} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{12} \chi_{10}^{12} V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_{10}^{21} V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{12} \chi_{11}^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) \left[V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Substituindo a Eq. (E.8) na Eq. (E.7), temos

$$\begin{aligned}
 d_{13}^s &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) \left[V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right]
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

$$\begin{aligned}
 d_{22}^s &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\mu s_\tau} \chi_2^{s_\rho s_\sigma} \chi_2^{s_\rho s_\tau} \chi_2^{s_\lambda s_\nu} \chi_{1-1}^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\mu s_\tau} \chi_2^{s_\rho s_\sigma} \chi_2^{s_\rho s_\tau} \chi_2^{s_\lambda s_\nu} \chi_{10}^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{s_\mu s_\tau} \chi_2^{s_\rho s_\sigma} \chi_2^{s_\rho s_\tau} \chi_2^{s_\lambda s_\nu} \chi_{11}^{s_\lambda s_\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{21} \chi_{1-1}^{22} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{12} \chi_2^{12} \chi_{10}^{12} V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_{10}^{21} V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{12} \chi_{11}^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) \left[V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right]
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

Levando a Eq. (E.10) na Eq. (E.7),

$$\begin{aligned}
 d_{23}^s &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) \left[V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right]
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

Resumindo

$$\begin{aligned}
 d_{12}^s = d_{13}^s = d_{22}^s = d_{23}^s &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[Y_{11}(\theta, \phi) V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + Y_{1-1}(\theta, \phi) V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4\sqrt{6}} Y_{10}(\theta, \phi) \left[V_{12}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) + V_{21}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \right]
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

- Cálculo do segundo e terceiro termos da correção de ortogonalidade:

Para o segundo termo da correção de ortogonalidade temos que a parte de sabor é nula e, conseqüentemente, a amplitude de decaimento se anulará. Desta forma, não precisamos efetuar o cálculo da parte de spin, pois este termo não contribui para a correção de ortogonalidade. E sendo $h_{f_i}^{3CO}$ igual a $h_{f_i}^{1CO}$, também não se faz necessário o cálculo da parte de spin para o terceiro termo da correção de ortogonalidade.

Referências

- [1] GODFREY, S.; NAPOLITANO, J., Light-meson spectroscopy, *Rev. Mod. Phys.* v. 71, n. 5, Out., 1411-1462, 1999.
- [2] AUGUSTIN, J.-E.; *et al* Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation, *Phys. Rev. Lett.* 33, 1406 Nov. 1974.
- [3] AUBERT, B.; *et al* [BABAR Collaboration], Observation of a Narrow Meson State Decaying to $D_s^+ \pi^0$ at a Mass of 2.32 GeV/c², *Phys. Rev. Lett.* 90, 242001 Abr. 2003.
- [4] BESSON, D.; *et al* (CLEO Collaboration) Observation of a Narrow Resonance of Mass 2.46 GeV/c² Decaying to $D_s^* + \pi^0$ and Confirmation of the $D_s J^*(2317)$ State *Phys.Rev. D* 68, 032002 Ago. 2003.
- [5] GODFREY, S.; ISGUR, I., Mesons in a relativized quark model with chromodynamics *Phys.Rev. D* 32, 189 Mai. 1985.
- [6] BARNES, T.; CLOSE, F. E.; LIPKIN, H. J., Implications of a DK molecule at 2.32 GeV, *Phys. Rev. D* 68, 054006 Set. 2003.
- [7] BARNES, T, The XYZs of charmonium at BES, *Int. J. Mod. Phys. A*21 5583, 2006.
- [8] Da SILVA, D.T. “Um Novo Modelo para Decaimento de Mésons”, Dissertação de Mestrado - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.
- [9] TANI, S. Scattering Involving a Bound State. *Phys. Rev.*, Nova York, v. 117, n. 1, p. 252-260, Jan. 1960.
- [10] GIRARDEAU, M. D. Second-Quantization Representation for Systems of Atoms, Nuclei, and Electrons. *Phys. Rev. Lett.*, Nova York, v. 27, n. 21, p. 1416-1419, Nov. 1971.
- [11] GIRARDEAU, M. D. Second-Quantization Representation for a Nonrelativistic System of Composite Particles. I. Generalized Tani Transformation and its Iterative Evaluation. *J. Math. Phys.*, Nova York, v. 16, n. 9, p. 1901-1919, Set. 1975.

- [12] GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D. Fock-Tani Representation for the Quantum Theory of Reactive Collisions. *Physica A*, Amsterdam, v. 97, n. 1, p. 42-74, Jun. 1979.
- [13] GILBERT, J. D. Second Quantized Representation for a Model System with Composite Particles. *J. Math. Phys.*, Nova York, v. 18, n. 4, p. 791-805, Abr. 1977.
- [14] GIRARDEAU, M. D. Fock-Tani representation for positron-hydrogen scattering. *Phys. Rev. A*, Nova York, v. 26, n. 1, p. 217-236, Jul. 1982.
- [15] OJHA, P. C.; GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D.; STRATON, J. C. Fock-Tani transformation and a first-order theory of charge transfer. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 33, n. 1, p. 112-123, Jan. 1986.
- [16] STRATON, J. C. Reduced-mass Fock-Tani representations for $a^+ + (b^+c^-) \rightarrow (a^+c^-) + b^+$ and first-order results for $\{abc\} = \{ppe, epe, \mu p \mu, \mu d \mu, \text{ and } \mu t \mu\}$. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 35, n. 9, p. 3725-3740, Mai. 1987.
- [17] STRATON, J. C.; GIRARDEAU, M. D. Post-prior symmetrical first-order T matrix for charge transfer. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 40, n. 6, p. 2991-3001, Set. 1989.
- [18] LO, C.; GIRARDEAU, M. D. Symmetric orthogonalized-plane-wave Born approximation for charge exchange. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 41, n. 1, p. 158-164, Jan. 1990.
- [19] STRATON, J. C. Fock-Tani Hamiltonian for reactions involving two-electron atoms. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 43, n. 11, p. 6018-6026, Jun. 1991.
- [20] WEINBERG, S. Elementary Particle Theory of Composite Particles. *Phys. Rev.*, Nova York, v. 130, n. 2, p. 776-783, Abr. 1963.
- [21] WEINBERG, S. Quasiparticles and the Born Series. *Phys. Rev.*, Nova York, v. 131, n. 1, p. 440-460, Jul. 1963.
- [22] YAO W. M.; *et al* (Particle Data Group), *Journal of Physics G* 33, 1 (2006).
- [23] GEIGER, P.; SWANSON, E. S. Distinguishing among strong decay models. *Phys. Rev. D*, Nova York, v. 50, p. 6855, Dez. 1994.
- [24] MICU, L., Decay rates of meson resonances in a quark model *Nuclear Physics B* 10, 521 1969.
- [25] LE YAOUANC, A.; OLIVIER, L.; PÈNE, O.; RAYNAL J. "Naive" Quark-Pair-Creation Model of Strong-Interaction Vertices, *Phys. Rev. D* 8, 2223 1973.

- [26] KOKOSKI, R.; ISGUR, N. Meson decays by flux-tube breaking. *Phys. Rev. D*, Nova York, v. 35, p. 907, Fev. 1987.
- [27] ACKLEH, E. S.; BARNES, T.; SWANSON, E. S. On the mechanism of open-flavor strong decays. *Phys. Rev. D*, Nova York, v. 54, n. 11 p. 6711-6829, 1996.
- [28] MONTANET, L.; *et al*(Particle Data Group), *Physical Review D* 50, 1173 (1994).
- [29] ALBRECHT, H.; *et al.* (ARGUS Collaboration), *Z. Phys. C* 58, 61 (1993).
- [30] HADJIMICHEF, D. *Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica*. 1995. 131 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1995.
- [31] SZPIGEL, S. *Interação Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani*. 1995. 183 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.
- [32] GIRARDEAU, M. D.; KREIN, G.; HADJIMICHEF, D. Field-Theoretic Approach for Systems of Composite Hadrons. *Mod. Phys. Lett. A*, Singapore, v. 11, n. 14, p. 1121-1129, Mai. 1996.
- [33] HADJIMICHEF, D.; KREIN G.; SZPIGEL S.; DA VEIGA, J. S. Mapping of Composite Hadrons into Elementary Hadrons and Effective Hadronic Hamiltonians. *Ann. Phys.*, Nova York, v. 268, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.
- [34] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G., Short-range repulsion and isospin dependence in the kaon-nucleon (KN) system. *Phys. Rev. C*, v.66, 055214, Nov. 2002.
- [35] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G. Long- and medium-range components of the nuclear force in quark-model based calculations. *Phys. Rev. C*, Melville, v. 63, n. 3, 035204 8p., Fev. 2001.
- [36] Da SILVA, M. L. L., *Uma Nova Assinatura para Glueballs*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.
- [37] Da SILVA, M. L. L.; HADJIMICHEF, D.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J., Do glueballs contribute in heavy-ion collisions? *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. G* 32 475, Fev. 2006.